สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การสร้างรูปทรงเรขาคณิต ที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน

GEOMETRICAL CONSTRUCTION OF SOLIDS WHICH HAVE EQUAL VOLUME AND EQUAL SURFACE AREA

T058792

ตรีเทพ นิภาวรรณ

ปัทมา หะยีตาเยะ

เลขหมู่..........
เลขทะเบียน 58792
วัน,เดือน,ปี 10 ก.พ. 2549

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2547

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

GEOMETRICAL CONSTRUCTION OF SOLIDS WHICH HAVE EQUAL VOLUME AND EQUAL SURFACE AREA

TRETEP NIPAWAN

PATTAMA HAYEETAYEH

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2004

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การสร้าง รูปทรงเรขาคณิต ที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน GEOMETRICAL CONSTRUCTION OF SOLIDS WHICH HAVE EQUAL VOLUME AND EQUAL SURFACE AREA
นักศึกษา	นายตรีเทพ นิภาวรรณ 44050015 นางสาวปัทมา หะยีตาเยะ 44050029
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2547
อาจารย์ที่ปรึกษา	อ.พรชัย ชัยสนิท อ.จินดา ไชยช่วย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2547

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการ	อ.ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	อ.พรชัย ชัยสนิท	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	อ.จินดา ไชยช่วย	

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การสร้าง รูปทรงเรขาคณิต ที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน

นักศึกษา นายตรีเทพ นิภาวรรณ 44050015

นางสาวปัทมา หะยีตาเยะ 44050029

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สาขา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2547

อาจารย์ที่ปรึกษา อ.พรชัย ชัยสนิท

อ.จินดา ไชยช่วย

บทคัดย่อ

จากงานวิจัยเกี่ยวกับวิธีการสร้างบริเวณระนาบที่มีพื้นที่เท่ากันและเส้นรอบรูปเท่ากัน ทำให้เกิดแนวคิดนำมาใช้ใน 3 มิติ กล่าวคือ ศึกษาวิธีการสร้างรูปทรงตันเรขาคณิตที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน คุณสมบัติดังกล่าวเรียกว่า "ไอโซพาราเมตริก (isoparametric)" ใน 3 มิติ

ในปัญหาพิเศษฉบับนี้ เราสนใจการสร้างปริซึมให้ไอโซพาราเมตริก โดยประยุกต์หลักการจากงานวิจัยข้างต้น นอกจากนี้เรายังพบว่า สามารถสร้างรูปทรงตันที่เรียกว่า อาร์คิมีเดียนโกลบ (Archimedean globe) ที่ ไอโซพาราเมตริกจากปริซึมล้อมทรงกลมได้ และศึกษาความเป็นไปได้ต่างๆ ในการสร้างรูปทรงตันแบบอื่น ในตระกูลของอาร์คิมีเดียนโกลบ ว่าจะไอโซพาราเมตริก ได้หรือไม่

ท้ายที่สุด เราจะพิสูจน์ให้เห็นว่ามี อัตราส่วนค่าหนึ่งที่ใช้เป็นเกณฑ์ในการสร้างรูปทรงตัน 2 รูปให้ไอโซพาราเมตริก เช่นเดียวกับ อัตราส่วนคอนทัวร์ ใน 2 มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	GEOMETRICAL CONSTRUCTION OF SOLIDS WHICH HAVE EQUAL VOLUME AND EQUAL SURFACE AREA
Students	Mr. Tretep Nipawan 44050015
	Miss Pattama Hayeetayeh 44050029
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and computer Science, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2004
Special Project Advisor	Pornchai Chaisanit
	Chinda Chaichuay

ABSTRACT

From research about how to build two plane regions which have equal area and equal perimeter, it motivates corresponding concept in three dimensions; namely, studying how to build geometric solids which have equal volume and equal surface area. This property is called "isoparametric" in three dimensions.

In this special project, we are interested in how to build isoparametric prisms by applying concept from such research. Moreover, we find out that we can construct two isoparametric solids, called Archimedean globe, from circumscribing prisms and also study possibility about whether or not building other isoparametric solids in the family of Archimedean globes.

Finally, we will prove that there exists a ratio to be criteria for constructing two isoparametric solids, like contour ratio in two dimensions.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่อง การสร้างรูปทรงเรขาคณิตที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อาจารย์พรชัย ชัยสนิท และ อาจารย์จินดา ไชยช่วย ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา รวมทั้งเพื่อนๆและน้องๆทุกคน ที่เป็นกำลังใจและช่วยเหลือในด้านต่างๆ โดยเฉพาะ นางสาวนิภาพร เตาะสาตู สาขาฟิสิกส์ประยุกต์ ชั้นปีที่ 2 ที่มาช่วยวาดภาพบางภาพให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2548

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

จากงานวิจัยเรื่องการสร้างรูปเรขาคณิต 2 รูป ที่มีพื้นที่เท่ากัน และเส้นรอบรูปเท่ากัน โดยไม่ใช้หลักของวิชาทอพอโลยี ทำให้เกิดแนวความคิด นำการสร้างรูปเรขาคณิต 2 มิติ ที่มีสมบัติเฉพาะดังกล่าว ไปสู่การสร้างรูปทรงเรขาคณิต 3 มิติ 2 รูป ให้มีปริมาตรเท่ากัน และพื้นที่ผิวเท่ากัน ซึ่งคาดหวังว่า จะสามารถนำไปใช้ในการออกแบบในอุตสาหกรรม ได้

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อศึกษาการหารูปแบบการสร้างรูปทรงเรขาคณิต บางรูปแบบ ให้มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน โดยไม่ใช้หลักของวิชาทอพอโลยี

1.2.2 เพื่อเป็นประโยชน์แก่บุคคลอื่นที่สนใจ ที่จะนำหลักการสร้างนี้ ไปประยุกต์ใช้ในวิทยาการสาขาอื่นๆ เช่น การออกแบบผลิตภัณฑ์ในงาน อุตสาหกรรม

1.2.3 เพื่อเป็น การฝึกการทำงานวิจัยทางคณิตศาสตร์

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

ปัญหาพิเศษฉบับนี้จะศึกษาการหารูปแบบการสร้างรูปทรงเรขาคณิต บางประเภท ให้มี ปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน โดยครอบคลุมรูปทรงตันเชิงเรขาคณิต ดังนี้

1. ปริซึม
2. รูปทรงตันที่มี ภาคตัดขวางเป็นรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม (circumscribing polygon)

นอกจาก จะศึกษาการสร้างรูปทรงเรขาคณิตบางประเภท แล้ว ปัญหาพิเศษฉบับนี้ จะพยายาม หาเกณฑ์ที่ใช้เป็นค่าในการพิจารณา เพื่อการช่วยสร้างรูปทรงเรขาคณิต ให้มีปริมาตรเท่ากัน และพื้นที่ผิวเท่ากัน

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาเนื้อหาการสร้างรูปเรขาคณิต ที่มีพื้นที่เท่ากันและเส้นรอบรูปเท่ากัน เพื่อใช้เป็นแนวทางในการ ศึกษา การสร้างรูปทรง เรขาคณิตที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน ในขั้นต่อไป

1.4.2 สร้างรูปทรงเรขาคณิตที่มีสมบัติดังกล่าว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4.3 พิสูจน์ ทดสอบผลการสร้างรูปทรงจาก 1.4.2

1.4.4 หาเกณฑ์เพื่อใช้เป็นมาตรฐานในการช่วยสร้าง รูปทรงเรขาคณิต ให้มีปริมาตรเท่ากัน และมีพื้นที่ผิวเท่ากัน

1.4.5 จัดทำเอกสารแสดงผลการศึกษา การสร้างรูปทรงเรขาคณิตดังกล่าว

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ใช้เป็นแนวทางในการประยุกต์ในวิทยาการสาขาอื่นๆ เช่น การออกแบบผลิตภัณฑ์ในงานอุตสาหกรรม เป็นต้น

1.5.2 เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาแก่ผู้ที่สนใจในปัญหาพิเศษนี้

1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1.คอมพิวเตอร์ ระบบปฏิบัติการ window xp

2. กระดาษ A4

3. เครื่องพิมพ์

4. Hard Disk 40.0 GB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและความรู้ที่เกี่ยวข้อง

2.1 ปัญหาการหาบริเวณปิดใน 2 มิติ ที่มีพื้นที่เท่ากันและเส้นรอบรูปเท่ากัน (Isoparametric Problem)

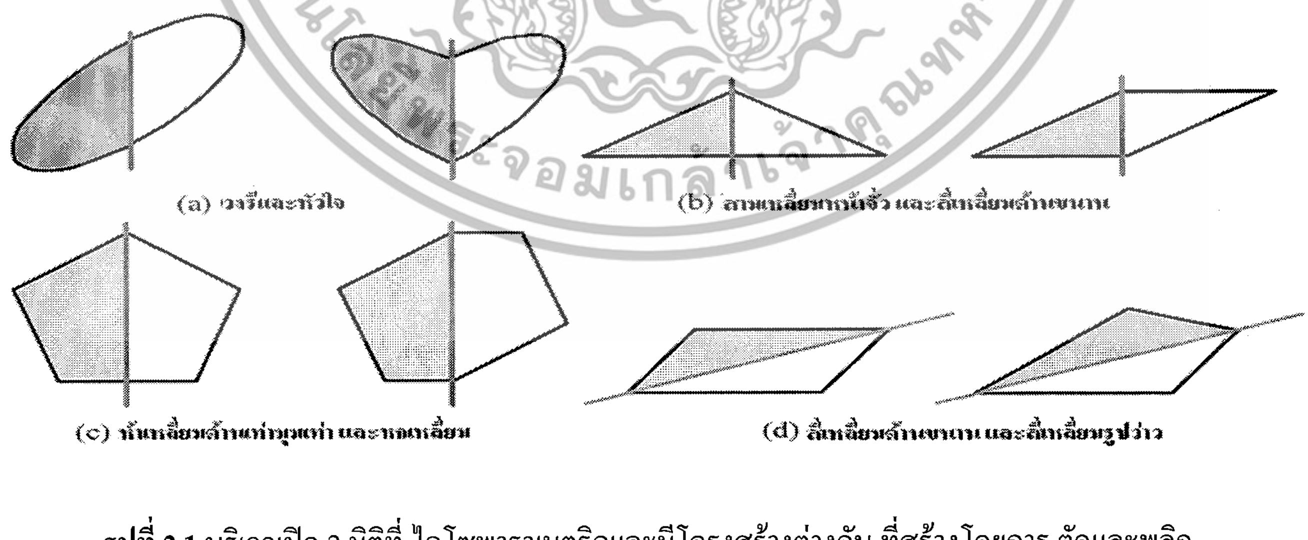
> **นิยาม** : ให้ R_1 และ R_2 เป็น บริเวณปิดใน 2 มิติ ที่มีพื้นที่ S_1 และ S_2 ตามลำดับ และ มีเส้นรอบรูป P_1 และ P_2 ตามลำดับ แล้ว จะเรียก R_1 และ R_2 ว่า **ไอโซพาราเมตริก (isoparametric)** ถ้า $S_1 = S_2$ และ $P_1 = P_2$

จากนิยาม ที่กำหนด ทำให้เกิด ปัญหาที่น่าสนใจตามมาว่า เราจะสร้างบริเวณปิด ใน 2 มิติ ที่ไอโซพาราเมตริกและมีโครงสร้างต่างกัน ได้อย่างไร

หรืออาจเขียนเป็น ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ว่า

"ถ้ากำหนดบริเวณปิดใน 2 มิติ R_1 มาให้ (เช่น สามเหลี่ยมหน้าจั่ว) จะสร้างบริเวณปิดใน 2 มิติ R_2 ที่ไอโซพาราเมตริก กับ R_1 แต่มีโครงสร้าง ต่างจาก R_1 (เช่น สี่เหลี่ยมผืนผ้า) ได้อย่างไร และภายใต้เงื่อนไขใด"

วิธีที่ง่ายที่สุด ที่ทำได้คือ การตัดและ พลิกรูป เช่น จากภาพที่ 2.1 (a) กำหนด R_1 เป็น วงรี มาให้ เราจะหาบริเวณปิด R_2 ที่มีโครงสร้างต่างจากบริเวณปิด R_1 ได้โดย การตัดแบ่งครึ่งบริเวณปิด R_1 แล้วพลิกรูป จนได้บริเวณปิด R_2 เป็นรูปหัวใจ เป็นต้น



รูปที่ 2.1 บริเวณปิด 2 มิติที่ ไอโซพาราเมตริกและมีโครงสร้างต่างกัน ที่สร้างโดยการ ตัดและพลิก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นอกจากวิธีตัดและพลิกรูป แล้ว ยังมีแนวทางอื่น ที่สามารถ สร้างบริเวณปิด R_2 ที่มีสมบัติดังกล่าว (เมื่อกำหนดบริเวณปิด R_1 มาให้)

2.2 อัตราส่วนคอนทัวร์ (Contour Ratio)

นิยาม คอนทัวร์ (Contour) คือ บริเวณปิด ใน 2 มิติที่มีเส้นรอบรูป P และ พื้นที่ S

สำหรับ คอนทัวร์ หนึ่งๆ เราจะกำหนด อัตราส่วน K ที่เรียกว่า อัตราส่วนคอนทัวร์ ขึ้นมาโดยมีสูตรว่า

$$K = \frac{P^2}{4S}$$

ทฤษฎีบท 2.2.1 สำหรับทุกบริเวณปิด ใน 2 มิติ $K \geq \pi$

พิสูจน์ : สำหรับเส้นรอบรูป P ที่กำหนด รูปที่มีพื้นที่มากที่สุดที่ปิดล้อมด้วย P คือวงกลม ดังนั้นค่าที่มากที่สุดของ $S = \frac{P^2}{4\pi}$

และทำให้ได้ว่าบริเวณปิดใดๆใน 2 มิติ จะมีพื้นที่ $S \leq \frac{P^2}{4\pi}$

เนื่องจาก $K = \frac{P^2}{4S}$ ดังนั้น จะจัดพจน์ใหม่ได้ว่า

$$\pi \leq \frac{P^2}{4S} = K$$

$$\therefore K \geq \pi \quad \#$$

2.2.1 ตัวอย่าง อัตราส่วนคอนทัวร์ ของรูปเรขาคณิต

(1) <u>วงกลม</u> : กำหนดให้มีรัศมี r หน่วย

เส้นรอบรูป $(P) = 2\pi r$

พื้นที่ $(S) = \pi r^2$

$$K = \frac{P^2}{4S} = \pi$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2) <u>สี่เหลี่ยมมุมฉาก</u>

2.1 <u>สี่เหลี่ยมจัตุรัส</u> : กำหนดให้ยาวด้านละ d หน่วย

เส้นรอบรูป $(P) = 2d$

พื้นที่ $(S) = d^2$

$$\therefore K = \frac{P^2}{4S} = 4$$

2.2 <u>สี่เหลี่ยมผืนผ้า</u> : กำหนดให้ด้านกว้าง ยาว a หน่วย และด้านยาว b หน่วย

เส้นรอบรูป $(P) = 2(a+b)$

พื้นที่ $(S) = ab$

$$\therefore K = \frac{P^2}{4S} = \frac{(a+b)^2}{ab}$$

$$= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$= 2 + r + \frac{1}{r} \quad \text{เมื่อ } r = \frac{a}{b}$$

หมายเหตุ : เนื่องจาก $r + \frac{1}{r} \geq 2$ สำหรับทุกจำนวนจริง r

$\therefore K_{rect} \geq K_{sqr}$ ทุกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เมื่อ K_{rect} แทนอัตราส่วนคอนทัวร์ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

และ K_{sqr} แทนอัตราส่วนคอนทัวร์ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ดังนั้น อัตราส่วนคอนทัวร์ ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะเป็นขอบเขตล่าง (lower bound)ให้กับบรรดาสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งหมด

(3) <u>สามเหลี่ยมหน้าจั่ว</u> : กำหนดให้ มีด้านประกอบมุมยอดยาว d และมุมยอด มีขนาด 2θ

เส้นรอบรูป $(P) = 2d + 2d\sin\theta$

พื้นที่ $(S) = d^2 \sin\theta\cos\theta$

$$K = \frac{P^2}{4S} = \frac{4d^2(1+\sin\theta)^2}{4d^2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\left(2 + \sin\theta + \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

หมายเหตุ : จากค่า K ในด้านขวามือของสมการ จะให้ค่าต่ำสุดก็ต่อเมื่อ $\theta = \frac{\pi}{6}$ ซึ่งจะได้ $K = 3\sqrt{3}$ และสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปนี้จะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าด้วย ดังนั้น อัตราส่วนคอนทัวร์ของ สามเหลี่ยมด้านเท่าจะเป็นขอบเขตล่าง ของทุกสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(4) <u>สามเหลี่ยมฐานโค้ง</u> (sector) : กำหนดให้ มีรัศมี 1 หน่วย และรองรับมุม 2θ

เส้นรอบรูป $(P) = 2 + 2\theta$

พื้นที่ $(S) = \theta$

$$\therefore K = \frac{P^2}{4S} = \frac{(2+2\theta)^2}{4\theta} = 2 + \theta + \frac{1}{\theta}$$

(5) <u>รูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม</u> (Polygon circumscribing circle)

พิจารณา รูปหลายเหลี่ยมที่ล้อมวงกลมรัศมี r หน่วย

ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นรอบรูป (P) พื้นที่ (S) เป็นดังนี้

$$\frac{r}{2} \times P = S$$

$$\therefore K = \frac{P^2}{4S} = \frac{P}{2r}$$

และสำหรับรูปหลายเหลี่ยม n ด้าน ค่า K จะน้อยสุด เมื่อ P น้อยสุด ซึ่งจะเกิดในกรณีที่รูปหลายเหลี่ยม นั้นเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า หรือรูปหลายเหลี่ยมปกติ (regular polygon)

ในกรณีของ รูปหลายเหลี่ยมปกติ ที่ยาวด้านละ a หน่วย

$$P = na$$

$$S = \frac{nar}{2}$$

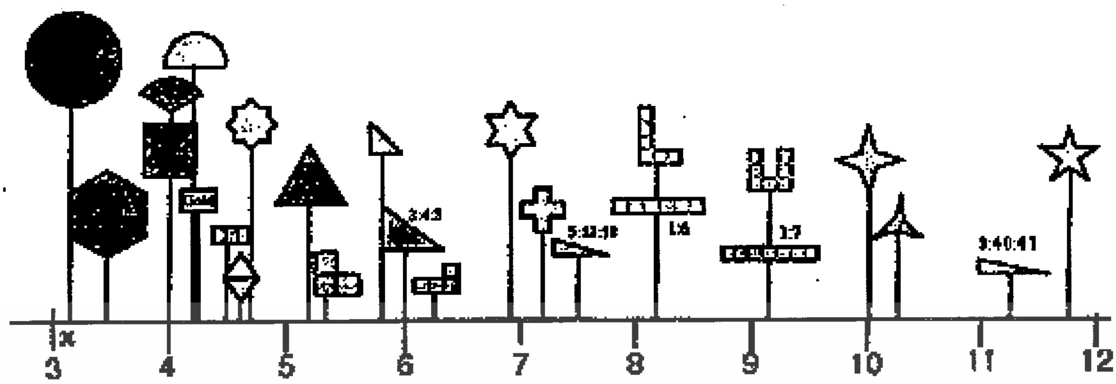
$$\therefore K = \frac{P^2}{4S} = \frac{na}{2r}$$

จากจุดศูนย์กลางของวงกลม ลากไปยังแต่ละมุมของรูปหลายเหลี่ยมปกติ จะเกิดสามเหลี่ยมหน้าจั่ว n รูป ที่มีมุมยอด $\frac{2\pi}{n}$ และได้ผลลัพธ์ต่อไปว่า $\frac{a}{2r} = \tan\frac{\pi}{n}$

$$\therefore K = n\tan\frac{\pi}{n}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และถ้าให้ $n \longrightarrow \infty$ แล้วค่า $K \to \pi$ ซึ่งเป็นค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของอัตราส่วนคอนทัวร์



รูปที่ 2.2 แสดงตัวอย่าง อัตราส่วนคอนทัวร์ ของบริเวณปิดใน 2 มิติแบบต่าง ๆ

จากรูปที่ 2.2 จะเห็นได้ว่า มีบริเวณปิดใน 2 มิติ บางรูปที่มีค่า อัตราส่วนของคอนทัวร์ เท่ากัน ถึงแม้โครงสร้างต่างกัน เช่นที่ $K = 4$ พบว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัสและสามเหลี่ยมฐานโค้งบางขนาด มีค่า K เท่ากัน

จากข้อสังเกตตรงนี้ นำไปสู่ทฤษฎีบทที่สำคัญในการสร้างรูปให้ ไอโซพาราเมตริก

ทฤษฎีบท 2.2.2 คอนทัวร์ 2 รูป สามารถย่อหรือขยายขนาดให้ไอโซพาราเมตริกกัน ได้ **ก็ต่อเมื่อ** ทั้ง 2 คอนทัวร์ มี อัตราส่วนคอนทัวร์ เท่ากัน

พิสูจน์ : ถ้า คอนทัวร์ 2 รูปไอโซพาราเมตริก กันแล้ว ดังนั้น $S_1 = S_2$ และ $P_1 = P_2$

ส่งผลให้ $K_1 = \dfrac{P_1^2}{4S_1} = \dfrac{P_2^2}{4S_2} = K_2$ ดังนั้นทั้ง อัตราส่วนคอนทัวร์ทั้งสอง เท่ากัน

ในทางกลับกัน ถ้าสมมติให้ อัตราส่วนคอนทัวร์ ทั้งสอง เท่ากัน

ดังนั้น $\dfrac{P_1^2}{4S_1} = \dfrac{P_2^2}{4S_2}$ หรือ $\dfrac{S_2}{S_1} = \left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^2$ ถ้าเราย่อหรือขยายขนาดคอนทัวร์ที่ 1 ด้วย แฟกเตอร์ $t = \dfrac{P_2}{P_1}$ ดังนั้น $tP_1 = P_2$ และ $t^2 S_1 = S_2$ แสดงว่าหลังจากย่อหรือขยาย คอนทัวร์ที่ 1 แล้วจะได้ คอนทัวร์ใหม่ที่ ไอโซพาราเมตริกกับ คอนทัวร์ที่ 2

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถ ย่อหรือขยายคอนทัวร์ที่ 2 ด้วย แฟกเตอร์ $\dfrac{P_1}{P_2}$ ให้ไอโซพาราเมตริกกับ คอนทัวร์ที่ 1 ก็ได้ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลจากทฤษฎีบทที่ 2.2.2 ทำให้เราได้หลักการสร้างบริเวณปิดใน 2 มิติที่ไอโซพาราเมตริก และมีโครงสร้างต่างกัน สรุปเป็นขั้นตอนคร่าวๆ ดังนี้

1) หลังจากกำหนด บริเวณปิด R_1 มาให้ พยายามหาบริเวณปิด R_2 ที่มีค่า อัตราส่วนคอนทัวร์ เท่ากับของ R_1 ก่อน

2) ย่อหรือขยาย R_2 ให้ ไอโซพาราเมตริกกับ R_1 ด้วยการ คูณแฟกเตอร์ $\frac{P_1}{P_2}$ ให้กับความยาวด้านแต่ละด้านของ R_2

2.2.2 ตัวอย่างการหา คอนทัวร์ ที่ไอโซพาราเมตริก แต่โครงสร้างต่างกัน

ตัวอย่าง 2.1 : กำหนดสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย จงหาสามเหลี่ยมฐานโค้ง ที่ไอโซพาราเมตริก กับสี่เหลี่ยมดังกล่าว

วิธีทำ จากสูตร K ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าคือ $2+r+\frac{1}{r}$ เมื่อ $r=\frac{a}{b}$ และสูตรค่า K ของสามเหลี่ยมฐานโค้ง เท่ากับ $2+\theta+\frac{1}{\theta}$ เมื่อ สามเหลี่ยมฐานโค้ง มีรัศมี 1 หน่วย และรองรับมุม 2θ

จะเห็นได้ว่า ค่า K สามารถปรับให้เท่ากันได้โดยง่าย โดยการให้ $r=\theta$ ต่อไปจะเป็นขั้นตอนการย่อ/ขยาย สามเหลี่ยมฐานโค้ง โดยถ้าให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น R_1 และสามเหลี่ยมฐานโค้งเป็น R_2 ดังนั้น แฟกเตอร์ ในการย่อหรือขยาย $\frac{P_1}{P_2}=\frac{2(a+b)}{2+2\theta}=\frac{2(a+b)}{2+\frac{2a}{b}}=b$

สรุปว่า วิธีสร้างสามเหลี่ยมฐานโค้ง ให้ไอโซพาราเมตริก กับสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย เป็นดังนี้

(1) ให้ $\theta=\frac{a}{b}$ ดังนั้น ขณะนี้ สามเหลี่ยมฐานโค้ง จะมีรัศมี 1 หน่วยและรองรับมุม $\frac{2a}{b}$

(2) ย่อหรือขยายสามเหลี่ยมฐานโค้ง ด้วย แฟกเตอร์ b ดังนั้นสามเหลี่ยมฐานโค้ง จะมีรัศมี b หน่วย และรองรับมุม $\frac{2a}{b}$

เพื่อความมั่นใจว่า สามเหลี่ยมฐานโค้ง นี้ ไอโซพาราเมตริกกับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้ เราจะตรวจสอบค่า P และ S อีกครั้ง

$$P=b+b+2a=2(a+b)$$
$$S=\frac{1}{2}\times\frac{2a}{b}\times b^2=ab$$

ซึ่งตรงกับเส้นรอบรูปและพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2 : กำหนดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาวด้านละ 12 หน่วย จงหาห้าเหลี่ยม (Pentagon) และหกเหลี่ยม (Hexagon) ที่ไอโซพาราเมตริก กับสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังกล่าว

วิธีทำ เนื่องจาก ตัวแปร หรือ พารามิเตอร์ ที่เกี่ยวข้องกับห้าเหลี่ยมมีมากมาย เช่น มุมแต่ละมุม ความยาวด้าน เราจะจำกัดบางพารามิเตอร์ โดยในที่นี้จะนำความรู้ทางเรขาคณิตที่ว่า

“รูปหลายเหลี่ยม 2 รูป ที่มีพื้นที่เท่ากันและล้อมวงกลมวงเดียวกัน โดยด้านทุกด้านของรูปหลายเหลี่ยมสัมผัสวงกลม จะไอโซพาราเมตริก”

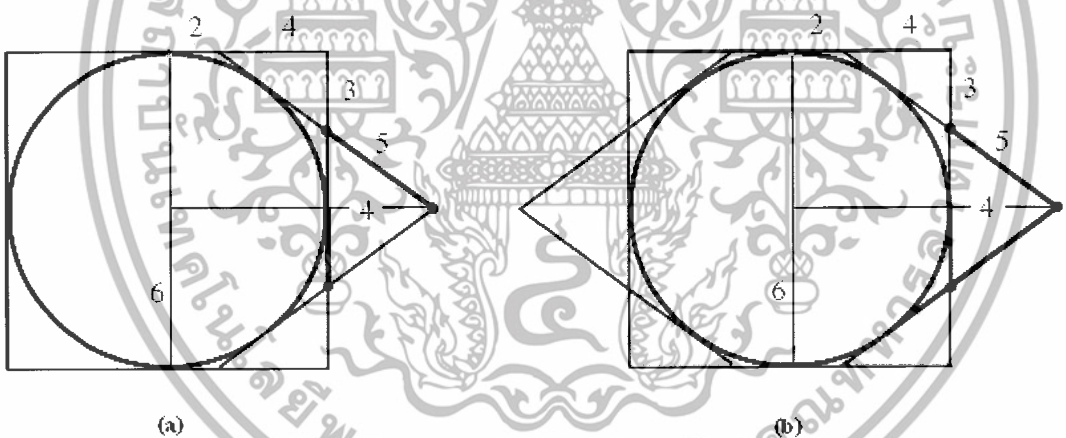
นำมาใช้ในการสร้างห้าเหลี่ยมดังกล่าว

ขั้นตอนแรก ให้วาดวงกลมรัศมี 6 หน่วย แนบใน (inscribe) สี่เหลี่ยมจัตุรัส

ขั้นตอนที่สอง ตัดมุม 2 มุม ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังภาพ 2.3 (a) เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ยาว 3 , 4 และ 5 หน่วย โดยให้ด้านตรงข้ามมุมฉากสัมผัสวงกลมพอดี

ขั้นตอนที่สาม พลิกสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสองรูปให้มาประกอบกันเป็นยอดของห้าเหลี่ยมที่ล้อมรอบวงกลม

ขั้นตอนที่สี่ เนื่องจากห้าเหลี่ยมที่สร้างด้วยวิธีนี้ มีพื้นที่เท่ากับ พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังนั้นโดยทฤษฎีทางเรขาคณิตดังกล่าว จะทำให้ห้าเหลี่ยมรูปนี้ไอโซพาราเมตริกกับสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปที่ 2.3 (a) แสดงห้าเหลี่ยมที่ไอโซพาราเมตริกกับจัตุรัสด้านละ 12 หน่วย
(b) แสดงหกเหลี่ยมที่ไอโซพาราเมตริกกับจัตุรัสด้านละ 12 หน่วย

ในกรณีของการสร้างหกเหลี่ยมก็เช่นเดียวกัน เพียงแต่ทำซ้ำขั้นตอนที่ 2 และ 3 กับอีกด้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมจัตุรัส ก็จะได้หกเหลี่ยมดังภาพ 2.3 (b) ที่ไอโซพาราเมตริกกับสี่เหลี่ยมจัตุรัส และในขณะเดียวกันก็ไอโซพาราเมตริก กับห้าเหลี่ยมรูปก่อนหน้านี้ด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.3 : กำหนด คอนทัวร์ ที่มี อัตราส่วนคอนทัวร์ เท่ากับ K จงหาสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุมยอด 2θ ที่ไอโซพาราเมตริก กับ คอนทัวร์ดังกล่าว

วิธีทำ ให้ K_{isos} แทนอัตราส่วนคอนทัวร์ของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และจากเดิมที่ $K_{isos} \geq 3\sqrt{3}$ (เพราะอัตราส่วนคอนทัวร์ ของสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นขอบเขตล่างให้ทุกสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

ดังนั้น ถ้าค่า K ที่กำหนด น้อยกว่า $3\sqrt{3}$ ก็จะไม่สามารถหาสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาไอโซพาราเมตริก กับคอนทัวร์ดังกล่าวได้

จากทฤษฎีบท 2.2.2 เงื่อนไขที่จำเป็นต่อการสร้างรูปให้ไอโซพาราเมตริกกันคือต้องมีอัตราส่วนคอนทัวร์เท่ากัน ดังนั้น จึงกำหนดสมการ $K_{isos} = K$

และจากสูตรของ K_{isos} ให้ $t = \sin\theta$

$$\therefore K = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{(1+t)^2}{t} = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}\frac{1+t}{t}}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง แล้วจัดเรียงพจน์ใหม่จะได้

$$\left(1+K^2\right)t^3 + \left(3-K^2\right)t^2 + 3t + 1 = 0$$

ถ้า $K = 3\sqrt{3}$ จะได้รากสมการเป็น $t = \frac{1}{2}$ (ที่เหลือเป็นค่าลบ ไม่พิจารณา) ซึ่งสัมพันธ์กับ $\theta = \frac{\pi}{6}$ และทำให้สามเหลี่ยมหน้าจั่วดังกล่าวเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ในกรณีที่ $K > 3\sqrt{3}$ พบว่า สมการพหุนามกำลังสามดังกล่าว จะมีรากที่เป็นบวก 2 ราก ในช่วง $(0,1)$ ที่เป็นเช่นนี้ เพราะ ถ้าพิจารณา $t = 0, -1, \frac{1}{2}$ และแทนค่าในสมการซ้ายมือจะได้ $1,\ -2k^2$ และ $\frac{27-k^2}{8}$ ตามลำดับ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า สมการมีรากในช่วง $(-1,0)$ และ $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ แน่นอน แต่เนื่องจาก $t \geq 0$ สำหรับ $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ ดังนั้น รากที่เราสนใจจึงอยู่ในช่วง $(0,1)$ เท่านั้น

ส่วนจำนวนรากของสมการในช่วง $(0,1)$ สามารถวิเคราะห์ได้จาก กฎแห่งเครื่องหมาย ของเดการ์ตส์ (Descartes Rule of sign) ประกอบกับ เรารู้แล้วว่า มีรากอย่างน้อย 1 ราก อยู่ในช่วง $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ดังนั้นจะมีรากที่เป็นบวก 2 ราก ใน $(0,1)$

ตัวอย่างที่สนับสนุนว่ามีรากในช่วง $(0,1)$ เช่น กำหนด $K = 3 + 2\sqrt{2} > 3\sqrt{3}$

จะได้สมการเป็น $$\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(18 + 12\sqrt{2}\right)t^2 - \left(2 + 3\sqrt{2}\right)t - \sqrt{2}\right) = 0$$

โดยได้รากสมการเป็น $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ดังนั้น เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก ส่วนรากบวกอีกค่าคือ $t = 0.3093...$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $\theta \approx 18^\circ$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปว่า ที่ $K > 3\sqrt{3}$ จะมีสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 รูป ที่ไอโซพาราเมตริก กับ คอนทัวร์ ดังกล่าว

จากตัวอย่างที่ผ่านมาทั้งหมด จะเห็นได้ว่า มีวิธีสำคัญๆ อยู่ 2 แนวทางที่นำมาใช้สร้าง บริเวณปิดใน 2 มิติที่ไอโซพาราเมตริก คือ

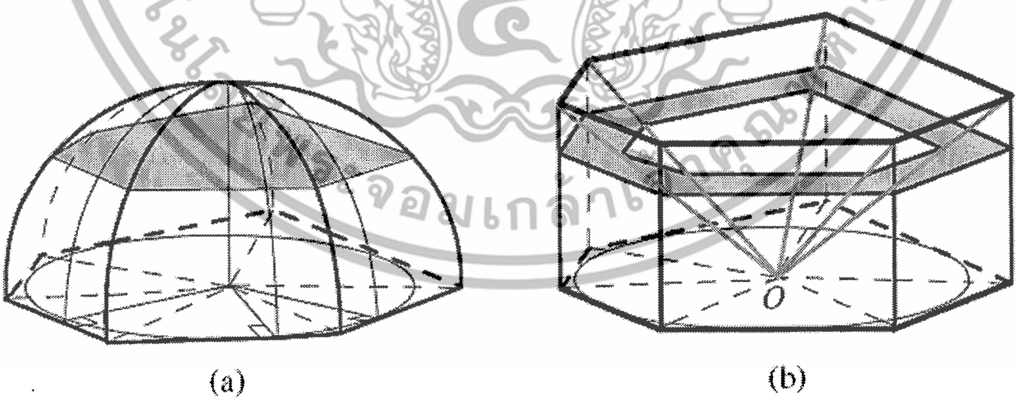
1. ใช้คุณสมบัติของรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม
2. หาเงื่อนไขที่ทำให้ อัตราส่วนคอนทัวร์ของทั้ง 2 รูปเท่ากัน และใช้ผลจากทฤษฎีบท2.2.2

นอกจากปัญหาพิเศษนี้ จะนำหลักการเกี่ยวกับการสร้างรูปให้ไอโซพาราเมตริก ไปใช้ใน 3 มิติแล้ว ยังได้กล่าวถึง การสร้างรูปทรงเรขาคณิตพิเศษแบบหนึ่งที่เรียกว่า อาร์คิมีเดียนโกลบ ซึ่งมีลักษณะที่เกี่ยวข้องดังจะได้กล่าวต่อไปนี้

2.3 อาร์คิมีเดียนโกลบ (Archimedean globe)

อาร์คิมีเดียนโกลบเป็นรูปทรงตันที่ล้อมทรงกลม โดยมีภาคตัดขวางเมื่อตัดตามแนวนอน ได้เป็นรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม

เพื่อความง่ายในการวาดรูป เราจะนิยาม อาร์คิมีเดียนโดม (Archimedean dome) ก่อน ดังภาพ 2.4 (a) ซึ่งจะเห็นได้ว่า อาร์คิมีเดียนโดมคล้ายรูปทรงตันที่ครอบครึ่งทรงกลม โดยมีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลมและมีภาคตัดขวางเมื่อตัดตามแนวนอน เป็นรูปหลายเหลี่ยมแบบเดียวกับฐาน นอกจากนี้ยังมีทิศทางการวางรูป (orientation) เช่นเดียวกับฐาน เมื่อเทียบกับแกนกลางที่ลากมาตั้งฉากกับจุดศูนย์กลางฐาน



รูปที่ 2.4 แสดง (a) อาร์คิมีเดียนโดม และ (b) ปริซึมที่คว้านส่วนที่เป็นพีระมิดกลับหัว และมีจุดยอดที่ O ออก โดยทั้งสองรูป สูงเท่ากัน

เมื่อสะท้อน อาร์คิมีเดียนโดมผ่านฐาน ก็จะได้ อาร์คิมีเดียนโกลบตามต้องการ เนื่องจากจุดมุ่งหมายของปัญหาพิเศษนี้คือการสร้างรูปทรงเรขาคณิต ที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน ดังนั้น สิ่งที่เราสนใจ ก็คือ สูตรหรือวิธีการคำนวณปริมาตรและพื้นที่ผิวของ อาร์คิมีเดียนโกลบ

เอกสารนี้เป็นของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.1 ปริมาตรของอาร์คิมีเดียนโกลบ

ก่อนจะคำนวณหาปริมาตรของ อาร์คิมีเดียนโกลบพิจารณารูปที่ 2.4(b) ซึ่งแสดงปริซึมที่มีหน้าตัดเป็นรูปหลายเหลี่ยม (เช่นเดียวกับกับฐานของ อาร์คิมีเดียนโกลบและมีส่วนสูงเท่ากัน) แต่คว้านเอาส่วนที่เป็นพีระมิด กลับหัวที่มีจุดยอด O และฐานเป็นรูปเดียวกับฐานปริซึม ออกไป

เนื่องจากปริมาตรของพีระมิดเท่ากับหนึ่งในสามของปริมาตรปริซึม ดังนั้นรูปทรงตันที่เหลืออยู่ จึงมีปริมาตรเท่ากับสองในสามของปริมาตรปริซึมเดิม เราพบว่า ปริมาตรของอาร์คิมีเดียนโกลบ เท่ากับสองในสามของปริมาตรปริซึมนี้เช่นกัน

ทฤษฎีบท 2.3.1 รอยตัดของ อาร์คิมีเดียนโกลบและปริซึมที่ถูกคว้านบางส่วนออก (ดังได้กล่าวไปข้างต้น) ซึ่งถูกตัดด้วยระนาบ 2 ระนาบที่ขนานกับฐานและตัดที่ระดับเดียวกัน จะมีปริมาตรเท่ากัน

พิสูจน์ : จากหลักการของคาวาลีเอรี (Cavalieri principle) ที่กล่าวว่า **"ทุกภาคตัดขวางที่ตัดรูปทรงตัน 2 รูป ที่มีส่วนสูงเท่ากันและ มีพื้นที่เท่ากันแล้ว รูปทรงตัน 2 รูป นั้นมีปริมาตรเท่ากัน"**

เนื่องจากความสมมาตรของ อาร์คิมีเดียนโกลบดังนั้นเราจึงพิสูจน์แค่ว่า พื้นที่ภาคตัดขวางของ อาร์คิมีเดียนโดมและของปริซึมดังกล่าวที่ส่วนสูงเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน ก็เพียงพอจะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้แล้ว โดยเราจะแบ่งรูปทั้งสองออกเป็นส่วนย่อยๆ จำนวนเท่ากัน โดยจะได้ส่วนที่แบ่งออกมา ดังภาพ 2.5

ให้ T แทนพื้นที่ฐานสามเหลี่ยม และใช้ระนาบตัดตามแนวนอนขนานกับฐาน ที่มีความสูง x เท่ากันทั้ง 2 รูป ถ้ากำหนดให้พื้นที่ภาคตัดขวางของ อาร์คิมีเดียนโดมเป็น $A(x)$ และของปริซึมดังกล่าวเป็น $T(x)$

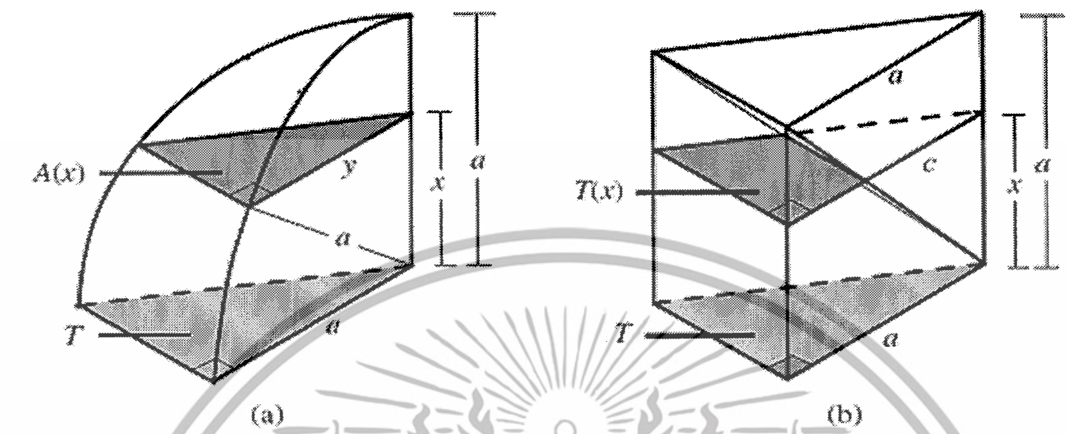
เราจะพิสูจน์ว่า $A(x)=T(x)$ ทุกความสูง x พิจารณาในส่วนของปริซึมพบว่า $T(x)$ เท่ากับ T ลบออกจากพื้นที่สามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับ $T(x)$ และมีอัตราส่วนความคล้ายเป็น $\frac{c}{a}$ ดังภาพ 2.5(b) เนื่องจาก $\frac{c}{a}=\frac{x}{a}$ ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยมมุมฉากดังกล่าวเท่ากับ $\left(\frac{x}{a}\right)^2 T$ และทำให้

$$T(x)=\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)T$$

ในส่วนของ อาร์คิมีเดียนโดมให้ y เป็นส่วนสูงของรอยตัดรูปสามเหลี่ยมดังภาพ 2.5(a) พบว่าสามเหลี่ยมที่เป็นรอยตัดเป็นสามเหลี่ยมคล้ายกับสามเหลี่ยม T ด้วยอัตราส่วน $\frac{y}{a}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยมที่เป็นรอยตัด ซึ่งก็คือ $A(x)=\left(\frac{y}{a}\right)^2 T$ แต่เพราะ $x^2+y^2=a^2$ (จากรูป2.5 (a)) ดังนั้น $A(x)=\left(\frac{y}{a}\right)^2 T=\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)T=T(x)$ #



รูปที่ 2.5 แสดงส่วนที่ตัดออกมาจาก อาร์คิมีเดียน โกลบ (a) และปริซึมที่คว้านเอาพีระมิดกลับหัวออก (b) ที่ตำแหน่งที่สัมพันธ์กันของทั้งสองรูป

> **บทแทรก** ปริมาตรของ อาร์คิมีเดียน โกลบ เท่ากับสองในสามของปริมาตรปริซึมที่มีหน้าตัดเป็นรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม แบบเดียวกับฐานของ อาร์คิมีเดียน โกลบ

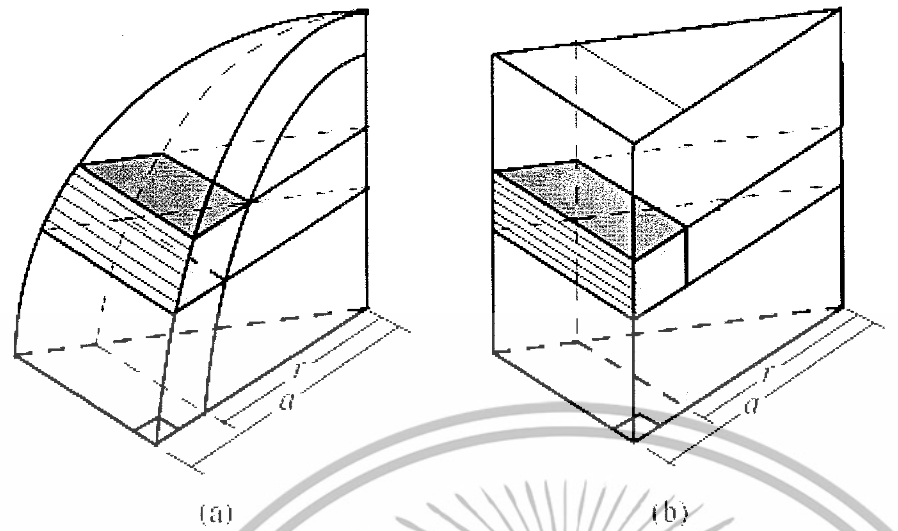
2.3.2 พื้นที่ผิวของอาร์คิมีเดียนโกลบ

รูปทรงในตระกูล อาร์คิมีเดียน โกลบยังมีอีกประเภทหนึ่งที่น่าสนใจคือ อาร์คิมีเดียนเชลล์ (Archimedean shell) ซึ่งมีลักษณะคล้ายโดมรูปใหญ่ซ้อนทับโดมรูปเล็กอยู่ ซึ่งในทฤษฎีบทต่อๆไปพบว่า อาร์คิมีเดียนเชลล์มีส่วนช่วยในการคำนวณพื้นที่ผิว อาร์คิมีเดียน โกลบ

> **ทฤษฎีบท 2.3.2** ถ้าใช้ระนาบ 2 ระนาบ ตัดตามแนวขวางขนานกับฐาน ของ อาร์คิมีเดียนเชลล์และพริสแมติกเชลล์ (prismatic shell) ที่มีหน้าตัดเหมือนฐานของ อาร์คิมีเดียนเชลล์ (และหนาเท่ากับอาร์คิมีเดียนเชลล์) ณ ระดับความสูงเดียวกัน รอยตัดระหว่างระนาบของ อาร์คิมีเดียนเชลล์**และพริสแมติกเชลล์ จะมีปริมาตรเท่ากัน**

พิสูจน์ : พิจารณารูป 2.6(a) ซึ่งแสดงส่วนที่ตัดมาจาก อาร์คิมีเดียนเชลล์โดยมีรัศมี r และ a โดย $r<a$ และที่ฐาน เป็นรูป สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีส่วนสูง $a-r$ จะเห็นได้ว่าแต่ละภาคตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีส่วนสูงต่างค่ากัน และสำหรับส่วนที่ตัดมาจากพริสแมติกเชลล์ จะได้ว่าแต่ละ ภาคตัดขวางเป็น สี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีส่วนสูงคงที่ คือ $a-r$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่2.6 แสดงส่วนที่ตัดจาก อาร์คิมีเดียนเชลล์ (a) และส่วนที่ตัดจาก พริสแมติกเชลล์ (b) ที่ตำแหน่งที่สัมพันธ์กันของทั้งสองรูป

จากการคำนวณในลักษณะเดียวกับ ทฤษฎีบทก่อน พบว่า พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูของรูปซ้ายมือ มีพื้นที่เท่ากับ พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูรูปขวามือ ดังนั้น โดยหลักการของ คาวาลีเอรี จะได้ว่า ปริมาตรของ รอยตัดที่สัมพันธ์กันของ อาร์คิมีเดียนเชลล์และ พริสแมติกเชลล์ มีค่าเท่ากัน #

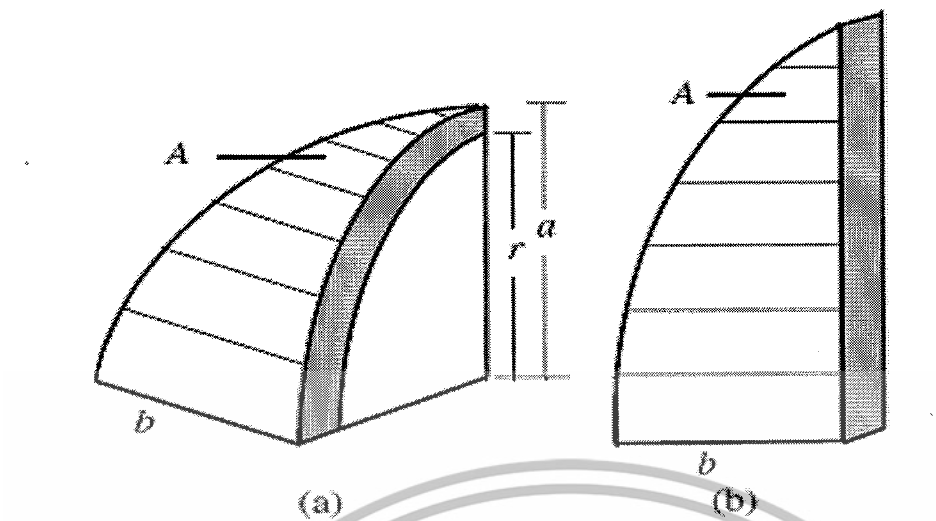
จากทฤษฎีดังกล่าวนี้เอง นำไปสู่ การหาพื้นที่ผิวอาร์คิมีเดียน โกลบและเนื่องจากผลของความสมมาตร เราจะพิจารณาแค่ครึ่งบนของ อาร์คิมีเดียน โกลบเท่านั้น

ในภาพที่ 2.7 (a) จะแสดงส่วนที่ตัดมาจาก อาร์คิมีเดียนเชลล์ที่มีพื้นที่ฐาน b และรัศมีวงนอกเท่ากับ a และของวงใน เท่ากับ r โดย r มีค่าใกล้เคียงกับ a ถ้าคลี่เชลล์ (shell) ดังกล่าว เป็นรูป2.7 (b) ซึ่งมีปริมาตรเท่ากับ พื้นที่ผิวข้าง A คูณกับ ความหนา หรือ เขียนเป็นสูตรว่า $A(a-r)$ สิ่งที่เราต้องการคือ ค่าของ A

จากการพิสูจน์ ทฤษฎีบทก่อน พบว่า ปริมาตรของส่วนที่ตัดออกมานี้ เท่ากับ ปริมาตรของส่วนที่ตัดออกมาจาก พริสแมติกเชลล์ ที่สัมพันธ์กัน ซึ่งเท่ากับ $ba(a-r)$

ดังนั้น $A(a-r)=ba(a-r)$ หรือ $A=ba$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.7 (a) แสดงส่วนที่ตัดมาจาก อาร์คิมีเดียนเชลล์ที่มีความหนาน้อยมาก และเมื่อคลี่ออกมาจะได้ดังภาพ (b)

ซึ่งนั่นหมายความว่า พื้นที่ผิวข้างของส่วนที่ตัดออกมาจาก อาร์คิมีเดียนเชลล์เท่ากับ พื้นที่ผิวข้างของ ปริซึมล้อมทรงกลม ที่มีฐานเดียวกับ อาร์คิมีเดียนเชลล์และนำไปสู่ทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 2.3.3

(a) พื้นที่ผิวข้างของ รอยตัดระหว่าง 2 ระนาบที่ขนานกับฐาน ของ อาร์คิมีเดียน โกลบเท่ากับพื้นที่ผิวข้างของ รอยตัดระหว่าง 2 ระนาบดังกล่าว ของปริซึมล้อมทรงกลมที่มีฐานแบบเดียวกับภาคตัดขวางของ อาร์คิมีเดียน โกลบ

(b) พื้นที่ผิวทั้งหมดของ อาร์คิมีเดียน โกลบเท่ากับ พื้นที่ผิวข้างของปริซึมล้อมทรงกลมที่มีฐานแบบเดียวกับภาคตัดขวางของ อาร์คิมีเดียน โกลบ

และจาก ทฤษฎีบท 2.3.3 (b) ทำให้เราขยายผลต่อไปอีกได้ ดังบทแทรกต่อไป

บทแทรก พื้นที่ผิวทั้งหมดของ อาร์คิมีเดียน โกลบเท่ากับ สองในสามของ พื้นที่ผิวทั้งหมดของปริซึมล้อมทรงกลมที่มีฐานแบบเดียวกับภาคตัดขวางของ อาร์คิมีเดียน โกลบ

พิสูจน์ : เราจะพิสูจน์เพียง ฐานของปริซึมดังกล่าว มีพื้นที่เท่ากับ หนึ่งในสี่ของ พื้นที่ผิวข้างของปริซึม ก็เพียงพอแล้ว

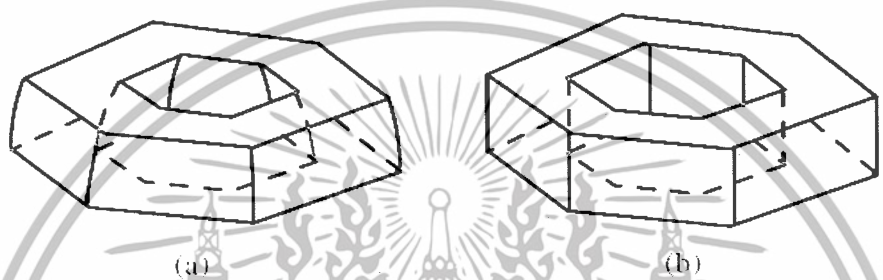
ถ้าให้ p แทน เส้นรอบรูปของ ฐานปริซึม และจะได้ $2a$ แทนส่วนสูงของปริซึม ถ้าแบ่งฐานของปริซึมเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เช่นเดียวกับรูป 2.6(b) จะพบว่ามีส่วนสูง a และมีพื้นที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\frac{ab_k}{2}$ เมื่อ b_k แทนฐานของสามเหลี่ยม ซึ่งเมื่อรวมค่า b_k ทั้งหมด ก็จะเท่ากับ p และจะได้พื้นที่ฐานปริซึมเป็น $\frac{ap}{2} = \frac{(2ap)}{4}$ ตามต้องการ #

2.3.3 ตัวอย่างการสร้างรูปทรงตัน ที่มีปริมาตรเท่ากัน และพื้นที่ผิวเท่ากัน

พิจารณารูป 2.8 (a) ซึ่งแสดงรอยตัดขวางของ อาร์คิมีเดียนเชลล์ที่ตัดด้วยระนาบ 2 ระนาบ และรูป 2.8 (b) แสดงรอยตัดขวางที่ถูกตัดด้วยระนาบดังกล่าว ของ พริสแมติกเชลล์ ที่มีหน้าตัดเหมือนฐานของ อาร์คิมีเดียนเชลล์และมีความหนาเท่ากัน



รูปที่ 2.8 (a) แสดงรอยตัดขวางของ อาร์คิมีเดียนเชลล์
(b) แสดงรอยตัดขวางของ พริสแมติกเชลล์ ที่สัมพันธ์กับ อาร์คิมีเดียนเชลล์

ทฤษฎีบท 2.3.4 รอยตัดขวางทั้งสองในรูป 2.8 มีปริมาตรเท่ากัน และมีพื้นที่ผิวทั้งหมดเท่ากัน

พิสูจน์ : ปริมาตรของรอยตัดขวางทั้งสองเท่ากัน ด้วยผลจาก ทฤษฎีบทที่ 2.3.2 ประกอบกับหน้าตัดด้านบนทั้งสองมีพื้นที่เท่ากัน (เช่นเดียวกับฐาน) และผลของทฤษฎีบท 2.3.3 (a) ที่ทำให้พื้นที่ผิวข้างด้านนอกทั้งสองรูปเท่ากัน (เช่นเดียวกับพื้นที่ผิวข้างด้านใน) ส่งผลให้รอยตัดขวางทั้งสองมีพื้นที่ผิวเท่ากัน

สรุปได้ว่ารอยตัดขวางทั้งสองมีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน #

ดังนั้น เราสามารถใช้ทฤษฎีบทนี้ ช่วยสร้างรูปทรงตันบางประเภทให้มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากันได้

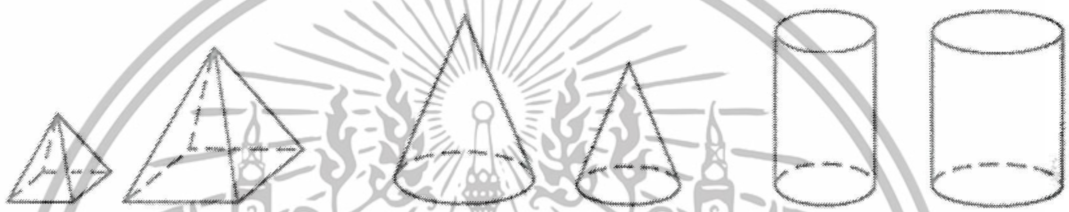
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

2.4 ทฤษฎีรูปทรงตันคล้าย (Similar Solids Theorem)

เราทราบแล้วว่า สำหรับรูป 2 มิติที่คล้ายกัน (similar) ถ้ามีอัตราส่วน ของด้านเป็น $a:b$ แล้วจะมี อัตราส่วนของพื้นที่เป็น $a^2:b^2$ ในกรณีของรูปทรงตัน ก็เช่นกัน แต่ก่อนอื่นจะให้คำจำกัดความของ รูปทรงตันที่คล้ายกัน ดังนิยามด้านล่างนี้

นิยาม : รูปทรงตัน 2 รูปคล้ายกัน (similar solids) ก็ต่อเมื่อ รูปทรงตันทั้งสองมี อัตราส่วนของ ค่าวัดเชิงเส้น(linear measure) ของทั้งสองรูป (เช่น ส่วนสูง ความยาวด้าน หรือ รัศมีฐาน เป็นต้น) เท่ากัน



รูปที่ 2.9 แสดงตัวอย่างรูปทรงตันที่คล้ายกัน

หมายเหตุ : อัตราส่วนที่กล่าวไปในนิยาม เรียกว่า แฟกเตอร์ ย่อ/ขยาย (scale factor)

ต่อไปจะเข้าสู่ใจความของตัวทฤษฎีบทที่ ได้กล่าวนำไว้

ทฤษฎีบท 2.4.1 ทฤษฎีรูปทรงตันคล้าย

ถ้ารูปทรงตันคล้าย มี แฟกเตอร์ ย่อ/ขยาย เป็น $a:b$ แล้ว อัตราส่วนของพื้นที่ จะเท่ากับ $a^2:b^2$ และอัตราส่วนของ ปริมาตร เป็น $a^3:b^3$

หมายเหตุ : คำว่า "พื้นที่" ที่กล่าวถึงใน ทฤษฎีบท หมายถึง พื้นที่ผิวข้าง พื้นที่ฐาน หรือ พื้นที่ผิวทั้งหมด ก็ได้

เราจะใช้ผลของทฤษฎีบทนี้ใน การพิสูจน์ยืนยันในบทที่ 4 ว่ามี อัตราส่วนที่ใช้เป็นเกณฑ์ ในรูป 3 มิติ เช่นเดียวกับที่มี อัตราส่วน คอนทัวร์ใน 2 มิติ เพื่อใช้เป็นตัวกลาง ในการสร้างรูปให้ ไอโซพาราเมตริก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
58792

บทที่ 3
แนวทางการดำเนินงาน

จากแนวทาง การสร้างบริเวณปิด 2 มิติ ที่ ไอโซพาราเมตริกและมีโครงสร้างต่างกัน ดังที่ได้เสนอในบทที่ 2 เราจะนำแนวคิดบางส่วน ประกอบกับ การเสนอแนวทางใหม่ มาประยุกต์ ในการสร้างรูปทรงเรขาคณิต 3 มิติ ที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน แต่มีโครงสร้างต่างกัน โดย จะเริ่มศึกษา หาวิธีสร้างรูปทรงเรขาคณิต ที่มีสมบัติดังกล่าว ตามลำดับ ดังนี้

3.1 ศึกษาหาวิธีสร้าง กรณีปริซึม ที่มีหน้าตัด เป็นรูปเรขาคณิต เช่น

- หาปริซึมหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มี ปริมาตรและพื้นที่ผิว เท่ากับปริซึมหน้าตัด หกเหลี่ยม
- หาปริซึม หน้าตัด เป็นวงแหวน 2 รูป ที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน

3.2 ศึกษาหาวิธีสร้างรูปทรงเรขาคณิต ที่มีภาคตัดขวางเป็น รูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม ให้มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิว เท่ากัน

รูปทรงดังกล่าว เรียกว่า อาร์คิมีเดียนโกลบกล่าวคือ จะหา อาร์คิมีเดียนโกลบ 2 รูปที่มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน

3.3 หาเกณฑ์ที่ เป็นมาตรฐานกลางในการสร้างให้รูปทรงตัน 2 รูป มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากัน จากนั้น พิสูจน์เป็นทฤษฎีบท

จากกรณีของ การหาบริเวณปิดใน 2 มิติ 2 รูป ที่ไอโซพาราเมตริก กัน เรามีทฤษฎีบทรองรับว่า จะสามารถสร้างบริเวณที่มีสมบัติดังกล่าว ได้ จะต้องมี อัตราส่วนของคอนทัวร์ เท่ากันก่อน จากนั้นจึงผ่านการย่อหรือขยายขนาด ต่อไป

ดังนั้น เราจะนำหลักการพิสูจน์ทฤษฎีดังกล่าว มาปรับเป็นทฤษฎีบทที่ใช้ในกรณีของรูปทรง 3 มิติ ซึ่งก็หมายถึง เราพยายามหาอัตราส่วนบางค่า ใน 3 มิติ ซึ่งหาก ทั้งสองรูปทรงมี ค่านี้เท่ากันแล้ว จะสามารถย่อหรือขยายขนาด ให้มีปริมาตรเท่ากันและพื้นที่ผิวเท่ากันได้

3.4 นำเกณฑ์ที่ได้จาก 3.3) ไป ประยุกต์ใช้ กับวิธีการสร้างรูปทรงเรขาคณิต 2 รูป ที่มีคุณสมบัติดังกล่าว ในรูปแบบที่ต่างจาก 3.1) และ 3.2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
ผลการศึกษา

ก่อนจะเข้าสู่วิธีการสร้าง เราจะนิยาม คุณลักษณะของรูปทรงตันที่มีปริมาตรเท่ากัน และพื้นที่ผิวเท่ากัน ว่า ไอโซพาราเมตริก เช่นเดียวกับกรณีที่รูป 2 มิติ เพื่อความง่ายในการเรียกชื่อ

4.1 การสร้างปริซึมให้ไอโซพาราเมตริก

จากแนวคิดการสร้างคอนทัวร์ที่มีพื้นที่เท่ากันและเส้นรอบรูปเท่ากัน ทำให้เกิดแนวทางเพิ่มเติมเพื่อสร้างปริซึมที่มีปริมาตรเท่ากัน และพื้นที่ผิวเท่ากันโดยใช้หลักการดังต่อไปนี้

ถ้าหน้าตัดของปริซึม 2 ปริซึม ไอโซพาราเมตริกแล้วปริซึมทั้งสองที่มีส่วนสูงเท่ากัน จะ ไอโซพาราเมตริก(ใน 3 มิติ) ด้วย

หลักการดังกล่าวสามารถ พิสูจน์ได้โดยง่าย ดังนี้

ให้ปริซึม A มีหน้าตัดพื้นที่ x มีเส้นรอบรูป P_A และมีความยาวแต่ละด้าน a_k

ให้ปริซึม B มีหน้าตัดพื้นที่ y มีเส้นรอบรูป P_B และมีความยาวแต่ละด้าน b_k

ถ้าปริซึมทั้งสองรูปสูง h หน่วยเท่ากันและหน้าตัดไอโซพาราเมตริกเราจะพิสูจน์ 2 ส่วนคือ

(1) <u>ปริซึมทั้งสองมีปริมาตรเท่ากัน</u>

เนื่องจากปริมาตรของปริซึม $A = x \cdot h$

และปริมาตรของปริซึม $B = y \cdot h$

เพราะหน้าตัดของปริซึมไอโซพาราเมตริก กล่าวคือ $x = y$

$\therefore x \cdot h = y \cdot h$

ซึ่งหมายความว่า ปริซึมทั้งสองมีปริมาตรเท่ากัน

(2) <u>ปริซึมทั้งสองมีพื้นที่ผิวเท่ากัน</u>

เนื่องจากพื้นที่ผิวปริซึมเกิดจากพื้นที่หน้าตัดทั้งสองรวมกับพื้นที่ผิวข้าง

พิจารณาแต่ละผิวข้างของปริซึมซึ่งเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มีพื้นที่ $a_k \cdot h$

สำหรับรูป A และมีพื้นที่ $b_k \cdot h$ สำหรับรูป B

เมื่อรวมพื้นที่แต่ละผิวข้าง จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

พื้นที่ผิวข้างของรูป $A = \sum a_k \cdot h$

$$= h \sum a_k = P_A \cdot h$$

พื้นที่ผิวข้างของรูป $B = \sum b_k \cdot h$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= h\sum b_k = P_B \cdot h$$

แต่เนื่องจากหน้าตัดของปริซึมไอโซพาราเมตริก กล่าวคือ $P_A = P_B$

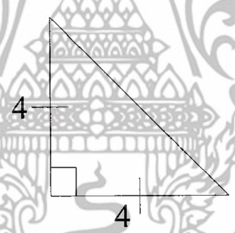
ดังนั้น $P_A \cdot h = P_B \cdot h$

หรือหมายความว่า พื้นที่ผิวข้างของปริซึมเท่ากัน และส่งผลให้พื้นที่ผิวทั้งหมดเท่ากันด้วย เพราะหน้าตัดของปริซึม มีพื้นที่เท่ากัน จากผลของไอโซพาราเมตริก

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดปริซึมหน้าตัด แบบหนึ่งมาให้ จะหาปริซึมหน้าตัดต่างกันอีกรูปที่ไอโซพาราเมตริกได้โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างหน้าตัดให้ ไอโซพาราเมตริกกับหน้าตัดของรูปที่กำหนดให้โดยใช้หลักการ ที่กล่าวไปแล้วในบทที่ 2
2. กำหนดส่วนสูงขนาดเท่ากับส่วนสูงของรูปที่กำหนดให้ ก็จะได้ปริซึมที่ไอโซพาราเมตริก กับปริซึมที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 4.1 : กำหนดหน้าตัดปริซึมเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป 4.1 และปริซึมยาว 5 หน่วย



รูปที่ 4.1 แสดงหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากของปริซึมที่กำหนดให้

หาปริซึมหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ ไอโซพาราเมตริกกับปริซึมรูปนี้

วิธีทำ <u>**ขั้นตอนที่ 1**</u>: สร้างหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้ไอโซพาราเมตริก กับหน้าตัดสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.1 หาเงื่อนไขของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ทำให้อัตราส่วนคอนทัวร์เท่ากับ ค่านี้ ของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้ K_1 เป็นอัตราส่วนคอนทัวร์ของสามเหลี่ยมมุมฉากดังกล่าว

และ K_2 เป็นอัตราส่วนคอนทัวร์ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\therefore K_1 = \frac{\left(8+4\sqrt{2}\right)^2}{4(8)} = 3+2\sqrt{2} \qquad (1)$$

ถ้าสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง x หน่วยและ ยาว y หน่วย

เอกสารนี้เป็นเอกสาร... ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง x หน่วย และ ยาว y หน่วย

$$\therefore K_2 = \frac{4(x+y)^2}{4(xy)} = 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + k + \frac{1}{k} \tag{2}$$

เมื่อ $k = \dfrac{y}{x}$

ต่อไป สร้างสมการ $K_1 = K_2$ จะได้ว่า

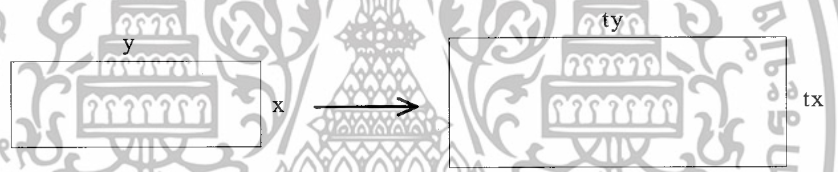
$$3 + 2\sqrt{2} = 2 + k + \frac{1}{k}$$

$$k + \frac{1}{k} = 1 + 2\sqrt{2} \tag{3}$$

(เมื่อคำนวณแล้วจะได้ k ประมาณ 3.5465 หน่วย)

1.2 ย่อ/ขยาย สี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยแฟกเตอร์ $t = \dfrac{P_1}{P_2}$ เมื่อ P_1, P_2 แทนเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมมุมฉากและสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามลำดับ

$$\therefore t = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2(x+y)} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{x+y}$$



รูปที่ 4.2 แสดงการย่อ/ขยายขนาดสี่เหลี่ยมผืนผ้า t เท่า

ดังนั้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ ย่อ/ขยายด้วย t

จะมีด้านกว้าง $tx = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{x}{x+y}\right) = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{1}{1+k}\right) \approx 1.5019$ หน่วย

และด้าวยาว $ty = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{y}{x+y}\right) = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{k}{1+k}\right) \approx 5.3265$ หน่วย

และจะได้พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าประมาณ 8 ตารางหน่วยเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยม

ในขณะที่เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $= 2t(x+y)$

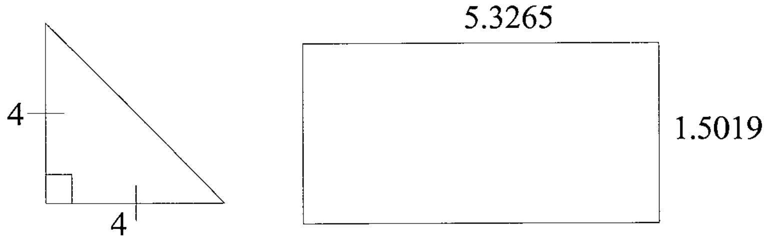
$$= 2\left(\frac{4 + 2\sqrt{2}}{x+y}\right)(x+y)$$

$$= 8 + 4\sqrt{2}$$

(เท่ากับเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดเช่นกัน)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

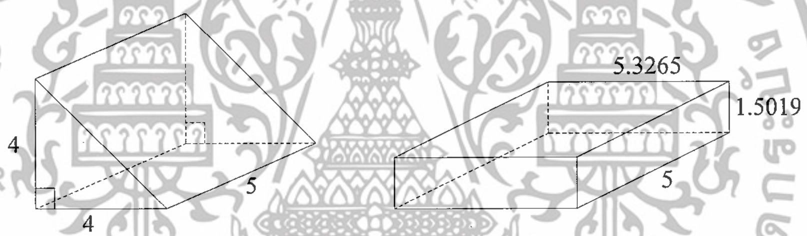
สรุปว่า รูปทั้งสองด้านล่างนี้ ไอโซพาราเมตริกกัน



รูปที่ 4.3 แสดงหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าของปริซึม ที่ไอโซพาราเมตริกกับ หน้าตัดสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนด

หมายเหตุ : สำหรับข้อนี้ สามารถแก้สมการเปรียบเทียบพื้นที่และเส้นรอบรูปเท่ากันได้โดยไม่ต้องใช้อัตราส่วนคอนทัวร์

<u>ขั้นตอนที่ 2</u>: กำหนดส่วนสูงของปริซึมหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า เท่ากับปริซึมหน้าตัดสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้รูป 2 รูปข้างล่างนี้ ไอโซพาราเมตริก



รูปที่4.4 แสดงปริซึมหน้าตัด สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ไอโซพาราเมตริก กับปริซึมหน้าตัดสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนด

ถ้าต้องการสร้างปริซึม 2 รูป ที่มีหน้าตัดเป็นวงแหวนของรูปเรขาคณิต เช่น เป็นสี่เหลี่ยมซ้อนกัน ให้ไอโซพาราเมตริกก็สามารถดัดแปลงหลักการข้างต้น โดยสร้างปริซึมหน้าตัดเป็นรูปเรขาคณิตปกติให้ไอโซพาราเมตริก กันก่อน จากนั้นจึงย่อส่วนทั้ง 2 รูปด้วยค่าแฟกเตอร์ เท่ากัน แล้วจึงซ้อน รูปเล็กในรูปใหญ่ ก็จะได้ปริซึมหน้าตัดเป็นวงแหวน 2 ปริซึมที่ไอโซพาราเมตริก

4.2 การสร้างรูปทรงตันที่ไอโซพาราเมตริก กับ อาร์คิมีเดียนโกลบ

จากทฤษฎีบท ที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 สามารถสรุปได้ว่า

(1) ปริมาตรของ อาร์คิมีเดียนโกลบเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของปริมาตรปริซึมที่มีหน้าตัดเป็นรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม แบบเดียวกับฐาน อาร์คิมีเดียนโกลบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

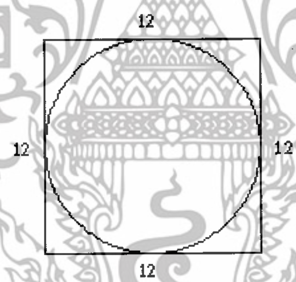
(2) พื้นที่ผิวของ อาร์คิมีเดียนโกลบเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของพื้นที่ผิวของปริซึมที่มีหน้าตัดเป็นรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม แบบเดียวกับฐาน อาร์คิมีเดียนโกลบ

ดังนั้นจะสามารถสร้าง อาร์คิมีเดียนโกลบ ให้ไอโซพาราเมตริก ได้ด้วยขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างปริซึมที่มีหน้าตัดเป็นรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลมที่ต่างกัน 2 รูป ให้ ไอโซพาราเมตริกตามวิธีที่กล่าวไปในบทที่ 2 และ หัวข้อ 4.1
2. สร้าง อาร์คิมีเดียนโกลบแนบในปริซึมทั้งสอง ซึ่งจะได้ อาร์คิมีเดียนโกลบสองรูป ต่างกันที่ ไอโซพาราเมตริกในที่สุด

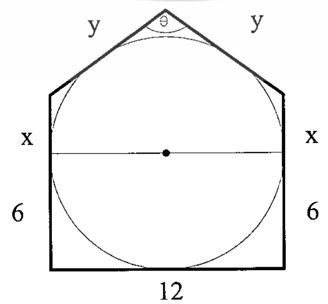
ตัวอย่าง 4.2 : สร้าง อาร์คิมีเดียนโกลบภาคตัดขวางรูปห้าเหลี่ยม ให้ ไอโซพาราเมตริกกับอาร์คิมีเดียนโกลบภาคตัดขวางสี่เหลี่ยมจัตุรัส

วิธีทำ **<u>ขั้นตอนที่ 1</u>** : สร้างปริซึมหน้าตัดห้าเหลี่ยม และปริซึมหน้าตัด สี่เหลี่ยมจัตุรัสให้ไอโซพาราเมตริก โดยในที่นี้ เพื่อให้ง่ายในการคิดเลข จะกำหนดให้หน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสล้อมวงกลมรัศมี 6 หน่วย ดังนั้นด้านแต่ละด้านยาว 12 หน่วย ดังภาพ 4.5



รูปที่ 4.5 แสดงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ล้อมวงกลมรัศมี 6 หน่วย

ต่อไป กำหนดลักษณะหน้าตัดห้าเหลี่ยม ที่จะสร้าง โดยในที่นี้ จะให้เป็นดังรูป 4.6 ซึ่งมีลักษณะคล้ายสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซ้อนทับสี่เหลี่ยมผืนผ้า



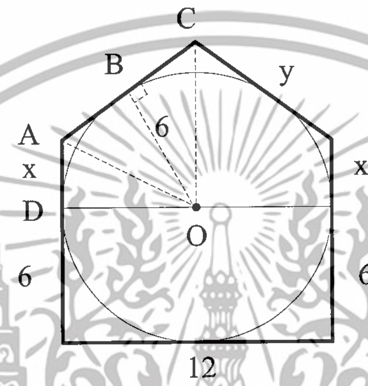
รูปที่ 4.6 แสดงหน้าตัดห้าเหลี่ยม ที่เกิดจากสามเหลี่ยมหน้าจั่วซ้อนทับบนสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยมีมุมยอด θ และล้อมวงกลมขนาดเดียวกับ วงกลมที่แนบในสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากขั้นตอนใน 4.1 เราจะสร้างหน้าตัดห้าเหลี่ยมให้ไอโซพาราเมตริก กับหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสก่อน โดยในที่นี้ จะใช้ทฤษฎีบททางเรขาคณิตมาช่วย แทนที่จะใช้อัตราส่วน คอนทัวร์ กล่าวคือ ถ้ารูปหลายเหลี่ยม 2 รูปที่ล้อมวงกลมเดียวกันและมีเส้นรอบรูปเท่ากันแล้ว จะไอโซพาราเมตริกกันทันที

เส้นรอบรูปของห้าเหลี่ยม จะเท่ากับ เส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อสมการดังบรรทัดถัดไปเป็นจริง

$$x + y = 12 \qquad (1)$$



รูปที่ 4.7 แสดงเส้นประที่ลากเพื่อช่วยคำนวณค่า x และ y

หากลากเส้นประ ดังรูป 4.7 และกำหนดจุดบางจุด จากนั้นอาศัยทฤษฎีบททางเรขาคณิต พบว่า

$$\overline{AB} = x\,,\ \overline{BC} = y - x \quad \text{และ} \quad B\hat{C}O = \frac{\theta}{2}$$

เพราะ B คือจุดสัมผัสจุดหนึ่งของวงกลมและผลจากสมการ(1) ดังนั้น เมื่อพิจารณา สามเหลี่ยม BCO พบว่า

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{6}{y - x} = \frac{6}{12 - 2x} \qquad (2)$$

ในขณะเดียวกัน เพราะสามเหลี่ยม ADO เท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยม ABO ดังนั้น จะได้ $A\hat{O}B = A\hat{O}D$ และทำให้ $A\hat{O}D = \dfrac{\theta}{4}$

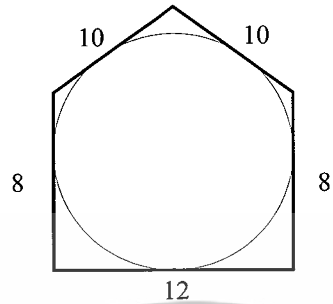
เมื่อพิจารณา สามเหลี่ยม ADO พบว่า

$$\tan\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{x}{6} \qquad (3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

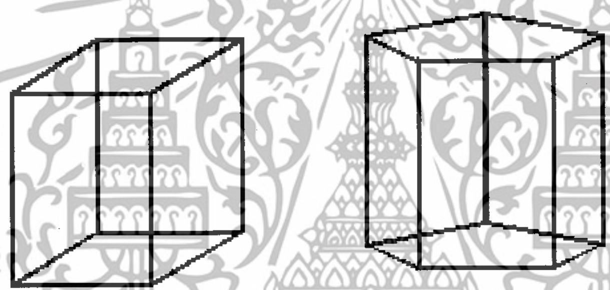
จากสมการ (2) , (3) จะได้ $x = 2$ และทำให้ $y = 10$

สรุปว่า ห้าเหลี่ยมที่ต้องการ มีลักษณะดังนี้



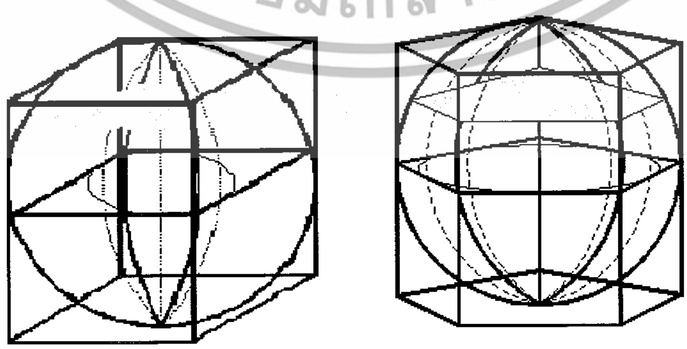
รูปที่ 4.8 แสดงรูปห้าเหลี่ยมที่ไอโซพาราเมตริกกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนด

โดยขั้นตอนจากหัวข้อ 4.1 เราเพียงกำหนดส่วนสูงค่าเท่ากันให้กับปริซึมทั้งสองรูป ก็จะได้ปริซึมสองรูปที่ ไอโซพาราเมตริกดังภาพจำลองด้านล่างนี้



รูปที่ 4.9 แสดงภาพจำลองปริซึมหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสล้อมวงกลมที่ไอโซพาราเมตริกกับปริซึมหน้าตัดห้าเหลี่ยมที่ล้อมวงกลมวงเดียวกัน

<u>**ขั้นตอนที่ 2**</u> : สร้าง อาร์คิมีเดียนโกลบแนบในปริซึมทั้งสอง จะได้ อาร์คิมีเดียนโกลบ 2 รูป ที่ไอโซพาราเมตริก กันในที่สุด



รูปที่ 4.10 แสดงอาร์คิมีเดียนโกลบภาคตัดขวางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ไอโซพาราเมตริกกับอาร์คิมีเดียนโกลบภาคตัดขวางห้าเหลี่ยม

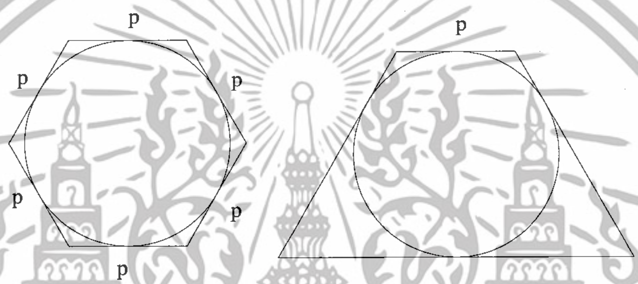
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ : (1) หน้าตัดปริซึมที่ใช้ในตัวอย่างนี้ อ้างอิงมาจาก ตัวอย่าง 2.2 ในบทที่ 2 ซึ่งถึงแม้ใช้หลักการโดยรวม เหมือนกัน แต่วิธีการภายในต่างกัน โดยวิธีการที่ใช้ในตัวอย่างนี้ จะเน้นการคำนวณมากกว่า เพราะในบางครั้งอาจพบรูปที่ไม่สามารถตัดและพลิกได้อย่างในตัวอย่าง 2.2

(2) การกำหนดลักษณะรูปเริ่มต้น ให้กับหน้าตัดปริซึมที่จะสร้าง ต้องระมัดระวัง เพราะว่าอาจให้รูปที่ไม่สมเหตุสมผลได้ กล่าวคือ ถึงแม้จะคำนวณออกมาได้ แต่อาจไม่สามารถวาดรูปเช่นนี้ได้จริง ดังกรณีตัวอย่างด้านล่างนี้

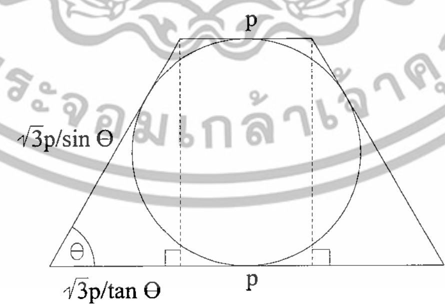
ต้องการสร้างอาร์คิมีเดียนโกลบภาคตัดขวางรูปสี่เหลี่ยมให้ไอโซพาราเมตริกกับอาร์คิมีเดียนโกลบภาคตัดขวางรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

เริ่มต้น ก็ต้อง สร้างปริซึม 2 รูปที่ ไอโซพาราเมตริกและมีหน้าตัดเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า(สมมติ ยาวด้านละ p) และรูปสี่เหลี่ยมที่ล้อมรอบวงกลมวงเดียวกัน



รูปที่ 4.11 แสดงหน้าตัดปริซึมรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าล้อมวงกลม และหน้าตัดปริซึมรูปสี่เหลี่ยมที่ล้อมวงกลมวงเดียวกัน

กำหนดให้สี่เหลี่ยมดังกล่าวเป็นสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว ที่มีด้านที่ขนานที่สั้นกว่ายาว p หน่วย ถ้าเราสามารถสร้างให้สี่เหลี่ยมคางหมู มีเส้นรอบรูป $6p$ เท่ากับรูปหกเหลี่ยม ก็จะสามารถสรุปได้ทันทีว่ารูปเหลี่ยมทั้งสอง ไอโซพาราเมตริกกัน



รูปที่ 4.12 แสดงเส้นประที่ลากเพิ่มเพื่อคำนวณหาค่า p

หาค่า θ ที่ทำให้เส้นรอบรูปเป็น $6p$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}p}{\sin\theta}+\frac{\sqrt{3}p}{\tan\theta}\right)+2p=6p$$

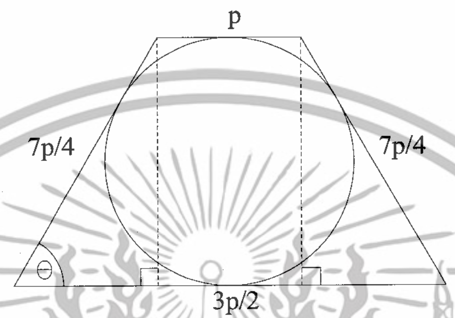
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sqrt{3}p\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\tan\theta}\right)=2p$$

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

แก้สมการได้ $\theta \approx 1.4274$ เรเดียน

ดังนั้นหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมมีความยาวด้านดังนี้

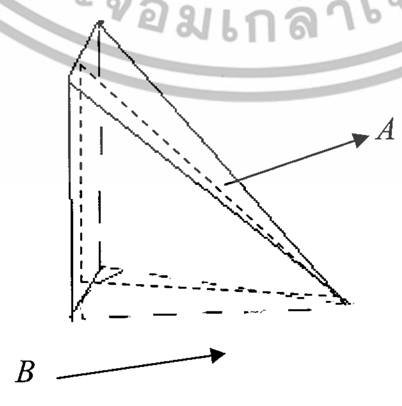


รูปที่ 4.13 แสดงหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วล้อมวงกลมที่ไอโซพาราเมตริกกับหน้าตัดรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

เนื่องจาก สี่เหลี่ยมคางหมูที่ล้อมวงกลมอยู่ ดังนั้น ผลบวกด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน แสดงว่าการกำหนดพารามิเตอร์ เริ่มต้นของสี่เหลี่ยมคางหมู ไม่สมเหตุสมผล เพราะรูปข้างต้นผิดหลักการดังกล่าว

__ข้อควรระวัง__

จากรูปที่ 2.4 ของบทที่ 2 ในที่นี้จะพิสูจน์ให้เห็นว่า อาร์คิมีเดียนโดมและปริซึมหน้าตัดเดียวกับฐานของโดม ที่คว้านเอาพีระมิดกลับหัวออก **ไม่ไอโซพาราเมตริก** แม้จะมีปริมาตรเท่ากัน พิจารณาส่วนที่ตัดออกมาจาก ปริซึมดังกล่าว ดังภาพ 4.13



รูปที่ 4.14 แสดงส่วนที่ตัดมาจากปริซึมที่คว้านเอาพีระมิดกลับหัวออก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจากพื้นที่รอบนอกของทั้งสองในภาพ 2.4 เท่ากัน จากทฤษฎีบท2.3.3 (a) ดังนั้น ถ้าต้องการให้ พื้นที่ผิวทั้งหมดเท่ากัน จะต้องให้ผลรวมพื้นที่ A รอบๆพีระมิด และผลรวมพื้นที่ B ที่ฐาน (ซึ่งก็คือฐานเดียวกับฐานของโดม) เท่ากัน จึงจะสรุปได้ว่าพื้นที่ผิวเท่ากัน

แต่จะเห็นได้ว่า ส่วนสูงของสามเหลี่ยม A ยาวกว่าสามเหลี่ยม B เสมอ ดังนั้นไม่มีโอกาส ที่ผลรวมพื้นที่ดังกล่าวจะเท่ากัน สรุปว่าพื้นที่ผิวทั้งหมดของรูปดังกล่าว ไม่เท่ากัน (แม้จะมีปริมาตรเท่ากัน) ส่งผลให้ อาร์คิมีเดียนโดมและปริซึม ที่คว้านเอาพีระมิดกลับหัวออกดังกล่าว **ไม่ ไอโซพาราเมตริก**

4.3 การหาอัตราส่วนเพื่อใช้เป็นเกณฑ์ในการสร้างรูปทรงตันให้ไอโซพาราเมตริก

ในบริเวณปิด 2 มิติ มีทฤษฎีบทยืนยัน ถ้าคอนทัวร์มีค่าอัตราส่วนคอนทัวร์ K เท่ากันแล้ว จะสามารถย่อหรือขยายรูปหนึ่งให้ ไอโซพาราเมตริกกับอีกรูปได้

จากแนวคิดตรงนี้เอง ที่ทำให้ผู้จัดทำ เกิดความคิดริเริ่มต่อไปว่า สำหรับรูปทรงตัน 3 มิติ ก็น่าจะมีอัตราส่วนค่าหนึ่ง ที่หากรูปทรงตัน 2 รูปมีค่านี้เท่ากันแล้ว จะสามารถย่อหรือขยายรูปหนึ่งให้ ไอโซพาราเมตริกกับอีกรูปได้

ให้อัตราส่วนดังกล่าว แทนด้วย K^* ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\dfrac{A^3}{36V^2}$ เมื่อ A แทนพื้นที่ผิวของรูปทรงตัน และ V แทนปริมาตรของรูปทรงตัน

จะพิสูจน์ให้เห็นจริงว่า อัตราส่วน K^* ดังกล่าวสอดคล้องกับสมมติฐานที่กล่าวไปข้างต้น

> **ทฤษฎีบท 4.3.1** รูปทรงตัน 2 รูปสามารถย่อหรือขยายให้ ไอโซพาราเมตริกกันได้ ก็ต่อเมื่อ รูปทรงตัน 2 รูปมีค่า K^* เท่ากัน

พิสูจน์ : ถ้า รูปทรงตัน 2 รูป ไอโซพาราเมตริกกันแล้ว พื้นที่ผิวของทั้งสองรูปเท่ากันและปริมาตรของทั้งสองรูปเท่ากัน ดังนั้น รูปทรงตัน 2 รูปมีค่า K^* เท่ากัน

ต่อไปจะพิสูจน์บทกลับ

กำหนดให้ K^* ของรูปทรงตันรูปที่1 และ 2 เป็น K_1^* และ K_2^* ตามลำดับ

พื้นที่ผิวของรูปทรงตันรูปที่ 1 และ 2 เป็น A_1 และ A_2 ตามลำดับ

และ ปริมาตรของรูปทรงตันรูปที่ 1 และ 2 เป็น V_1 และ V_2 ตามลำดับ

จะพิสูจน์ว่าถ้า $K_1^* = K_2^*$ แล้วสามารถย่อหรือขยายขนาดให้ไอโซพาราเมตริก ได้

จาก $K_1^* = K_2^*$ จะได้ $\dfrac{A_1^3}{36V_1^2} = \dfrac{A_2^3}{36V_2^2}$

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^3 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \qquad (1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า ย่อ/ขยาย รูปที่ 1 ด้วยแฟกเตอร์ $t = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$ จากทฤษฎีบท 2.4.1 (similar solids theorem) พบว่า พื้นที่ผิวเท่ากับ $t^2 A_1$ และปริมาตรเท่ากับ $t^3 V_1$ และจากผลของสมการ (1) ยังได้อีกว่า $A_2 = t^2 A_1$ และ $V_2 = t^3 V_1$ หมายความว่า เมื่อขยายรูปทรงตันที่ 1 ด้วยแฟกเตอร์ดังกล่าวจะไอโซพาราเมตริกกับ รูปทรงตันที่ 2 #

หมายเหตุ : ถ้าย่อ/ขยายรูปที่ 2 ให้ไอโซพาราเมตริก กับรูปที่ 1ใช้แฟกเตอร์ $t = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}$

<u>ข้อควรระวัง</u>

(1) การย่อ /ขยาย รูปที่ 1 จะกระทำกับ<u>ค่าวัดเชิงเส้น</u> เช่น ส่วนสูง รัศมีฐาน ความยาวด้านของฐาน เป็นต้น เท่านั้น

(2) เมื่อกำหนดรูปทรงตันรูปหนึ่ง มาให้ อาจไม่สามารถหา รูปทรงตันอีกแบบที่ ไอโซพาราเมตริกได้ เช่น กำหนด ทรงกลมมาให้ จะไม่สามารถหา ลูกบาศก์ ที่ ไอโซพาราเมตริกกับ ทรงกลมได้ เพราะ ค่า K^* ของทุกทรงกลมเป็น π แต่ค่า K^* ของทุกลูกบาศก์เป็น 6 ดังนั้น จากทฤษฎีบทข้างต้น จะไม่สามารถ ย่อ/ขยาย ขนาด ลูกบาศก์ ให้ไอโซพาราเมตริก กับทรงกลมได้

จากทฤษฎีบทดังกล่าว จะแสดงตัวอย่างให้เห็นจริงถึงการนำไปใช้งาน

ตัวอย่าง 4.3 : กำหนดลูกบาศก์ ยาวด้านละ 5 หน่วย จงหาทรงกระบอกที่ ไอโซพาราเมตริกกับลูกบาศก์ลูกนี้

วิธีทำ เนื่องจากพื้นที่ผิว (A) ของลูกบาศก์ $= 6(5^2) = 150$ ตารางหน่วย

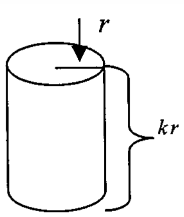
และปริมาตร (V) ของลูกบาศก์ $= 5^3 = 125$ ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้น K^* ของลูกบาศก์เท่ากับ $\frac{150^3}{36(125^2)} = 6$

(ซึ่งจริงๆเป็นค่า K^* ของรูปลูกบาศก์ทุกรูปด้วย)

ถ้าจะสร้างทรงกระบอกให้ ไอโซพาราเมตริกกับลูกบาศก์รูปนี้ จะต้องให้ K^* ของทรงกระบอกเท่ากับ 6 ก่อน แล้วจึงใช้ผลของทฤษฎีบทมาช่วย

เลือกทรงกระบอกที่มีรัศมี r หน่วยและส่วนสูงเป็น k เท่าของรัศมี



ดังนั้น พื้นที่ผิว (A) ของทรงกระบอก $= 2\pi r(r + kr)$

$= 2\pi r^2(1 + k)$

และปริมาตร (V) ของทรงกระบอก $= \pi r^2(kr)$

$= \pi r^3 k$

รูปที่ 4.15 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ให้ทรงกระบอกก่อนการสร้างรูปให้ไอโซพาราเมตริก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น K^* ของทรงกระบอกรูปนี้เท่ากับ $\dfrac{(2\pi r^2)^3(1+k)^3}{36\cdot\left(\pi r^3 k\right)^2}=\dfrac{2\pi}{9}\cdot\dfrac{(1+k)^3}{k^2}$

หาค่า k ที่ทำให้ทรงกระบอกมีค่า K^* เท่ากับของลูกบาศก์ซึ่งก็คือ 6

ดังนั้น
$$\frac{2\pi}{9}\cdot\frac{(1+k)^3}{k^2}=6$$
$$\frac{(1+k)^3}{k^2}=\frac{27}{\pi} \qquad (1)$$

(เมื่อแก้สมการแล้วได้ k ประมาณ 4.9471)

จะได้ค่าแฟกเตอร์ในการย่อ/ขยาย $t=\sqrt{\dfrac{150}{A_{cylinder}}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{r\sqrt{2\pi(1+k)}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{r\sqrt{\pi(1+k)}}$

เมื่อ $A_{cylinder}$ คือ พื้นที่ผิวของทรงกระบอก

ดังนั้นเมื่อย่อ/ขยาย ทรงกระบอกเดิม t เท่า จะได้

พื้นที่ผิวทรงกระบอกที่ย่อ/ขยายแล้ว $=2\pi(tr)(tr+tkr)$
$$=2\pi t^2r^2(1+k)$$
$$=2\pi\left(\frac{75}{r^2\pi(1+r)}\right)r^2(1+k)$$
$=150$ (เท่ากับ กรณีลูกบาศก์)

ปริมาตรทรงกระบอกที่ย่อ/ขยายแล้ว $=\pi(tr)^2(tkr)$
$$=\pi t^3r^3k$$
$$=\pi\frac{75\sqrt{75}}{r^3\cdot\pi(1+k)\sqrt{\pi(1+k)}}r^3k$$
$$=\frac{75\sqrt{75}}{(1+k)^{3/2}}\cdot\frac{k}{\sqrt{\pi}}$$
$$=\frac{k}{(1+k)^{3/2}}\cdot\frac{75\sqrt{75}}{\sqrt{\pi}}$$
$=\sqrt{\dfrac{\pi}{27}}\cdot\dfrac{75\sqrt{75}}{\sqrt{\pi}}$ (เพราะผลของสมการที่ 1)

$=125$ (เท่ากับกรณีลูกบาศก์)

เนื่องจาก $t=\dfrac{5\sqrt{3}}{r\sqrt{\pi(1+k)}}$ หรือ $tr=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi(1+k)}}$ เป็นค่าคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

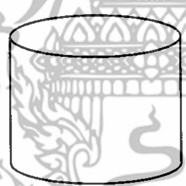
แสดงว่าทรงกระบอกรัศมี $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi(1+k)}}$ หรือประมาณ 2.0035 หน่วย (โดย k สอดคล้องกับสมการ (1)) และมี ส่วนสูง $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi(1+k)}}\cdot k$ หรือประมาณ 9.9116 หน่วย จะ ไอโซพาราเมตริกกับลูกบาศก์ยาวด้านละ 5 หน่วย

หมายเหตุ : จะเห็นได้ว่า ถ้าสร้างทรงกระบอก โดยใช้หลักการจากหัวข้อ 4.1 จะไม่สามารถทำได้ เพราะ หน้าตัดรูปวงกลม จะมี อัตราส่วนคอนทัวร์ ต่างกับ หน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสเสมอ แต่เมื่อนำทฤษฎีบทข้างต้นไปใช้ พบว่า สามารถสร้างลูกบาศก์ให้ ไอโซพาราเมตริก กับ ทรงกระบอก ได้ และยังเป็นการแสดงให้เห็นว่า ปริซึมสองรูปที่ ไอโซพาราเมตริกกัน ไม่จำเป็นต้องมีส่วนสูงเท่ากัน อย่างวิธีสร้างในหัวข้อ 4.1

ต่อไปจะสรุปขั้นตอนของการสร้างรูปทรงตันให้ไอโซพาราเมตริก โดยใช้ทฤษฎีบท 4.3.1

1. กำหนด รูปทรงตัน รูปหนึ่งมาให้ โดยมีอัตราส่วน K_1^* ซึ่งได้จากการคำนวณ

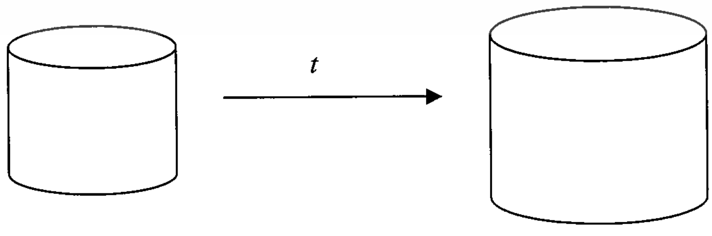
2. จะหารูปทรงตัน อีกรูปที่ต่างจากรูปแรก แต่ ไอโซพาราเมตริกกับรูปแรก



3. กำหนดบางพารามิเตอร์ให้กับรูปที่ 2 แล้วคำนวณอัตราส่วน K_2^*

4. แก้สมการ $K_1^* = K_2^*$

5. ย่อหรือขยายรูปที่ 2 ด้วย แฟกเตอร์ $t = \sqrt{\dfrac{A_1}{A_2}}$ เมื่อ A_1 และ A_2 แทนพื้นที่ผิวของรูปที่ 1 และ 2 ตามลำดับ



รูปที่ 4.16 แสดงการย่อ/ขยายค่าวัดเชิงเส้นของรูปที่สอง t เท่า

6. จะได้รูปขวามือของรูป 4.16 ไอโซพาราเมตริก กับรูปที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการศึกษา

คณะผู้จัดทำ ได้ศึกษาวิธีสร้างรูปทรงเรขาคณิต ให้มีปริมาตรเท่ากัน และพื้นที่ผิวเท่ากัน โดยแบ่งเป็นกลุ่มปริซึม และกลุ่ม อาร์คิมีเดียนโกลบซึ่งอาศัยพื้นฐานบางส่วน จากงานวิจัยเดิม เกี่ยวกับการหาบริเวณปิดที่มีพื้นที่เท่ากัน และเส้นรอบรูปเท่ากัน

จากการศึกษา คณะผู้จัดทำพบว่า เราสามารถสร้างปริซึม 2 รูปที่ต่างหน้าตัดกัน ให้ ไอโซพาราเมตริกโดยการสร้างให้หน้าตัดของปริซึมทั้งสองไอโซพาราเมตริก ใน 2 มิติก่อน จากนั้นจึงกำหนดส่วนสูงขนาดเท่ากันให้กับปริซึม

และจากการสร้างปริซึมให้ไอโซพาราเมตริก ตรงนี้เอง ที่เป็นส่วนสนับสนุน ในการสร้างรูปทรงตันในกลุ่ม อาร์คิมีเดียนโกลบที่มีภาคตัดขวางต่างกัน ให้ไอโซพาราเมตริก ได้ โดยในขั้นแรกเราต้องสร้าง ปริซึมหน้าตัดรูปหลายเหลี่ยมล้อมวงกลม ที่ ไอโซพาราเมตริกกันก่อน จากนั้นในขั้นตอนต่อไปถ้าบรรจุ อาร์คิมีเดียนโกลบแนบใน ปริซึมแต่ละรูป ก็จะส่งผลให้เกิด อาร์คิมีเดียนโกลบสองรูปต่างกัน ที่ ไอโซพาราเมตริกกันทันที

นอกจาก การสร้าง ที่เจาะจงเฉพาะแบบ แล้ว คณะผู้จัดทำพยายาม หาวิธีที่เป็นกรณีทั่วไป ในการสร้าง รูปทรงตันให้ไอโซพาราเมตริก โดย มุ่งที่จะศึกษา อัตราส่วน ค่าหนึ่ง ซึ่งเทียบเคียงกับอัตราส่วนคอนทัวร์ใน 2 มิติ โดยถ้า รูปทรงตัน 2 รูปใด มีค่าอัตราส่วนตัวนี้เท่ากัน แล้วจะสามารถย่อหรือขยาย รูปหนึ่งให้ ไอโซพาราเมตริกกับอีกรูปได้ อัตราส่วนดังกล่าว ที่เราหาและพิสูจน์ยืนยันว่าเป็นจริง มีสูตรดังนี้

$$K^{*} = \frac{A^{3}}{36V^{2}}$$

เมื่อ A แทนพื้นที่ผิวของรูปทรงตัน และ V แทนปริมาตรของรูปทรงตัน

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ในการใช้ อัตราส่วน K^{*} มาช่วยสร้าง รูปให้ไอโซพาราเมตริก ยังจำเป็นต้องใช้ การแก้สมการ และการวิเคราะห์ ประกอบกันไป ดังนั้นหากมีการพัฒนาวิธีต่อไป อาจลองพยายามหา วิธีอื่นที่หลีกเลี่ยงการคำนวณที่ใช้เวลามากในส่วนนี้
2. หากมีการศึกษาวิธีการสร้างต่อไป ควรจะมีการนำความรู้ทาง แคลคูลัส หรือ การวิเคราะห์เชิงตัวเลข เข้ามาช่วย แทนที่จะเป็นวิธีทางเรขาคณิตอย่างเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

[1] T.M. Apostol and M.A. Mnatsakanian, Isoperimetric and Isoparametric Problems, American Mathematical Monthly, 111 , 2004.

Available at *http://www.mamikon.com/USArticles/IsoPArametric.pdf*

[2] T.M. Apostol and M.A. Mnatsakanian ,A Fresh Look at the Method of Archimedes, American Mathematical Monthly,111(6),2004.

Available at *http://www.mamikon.com/USArticles/FreshLookArchim.pdf*

[3] Similar Solids, *http://everett.lansingschools.net/Geometry/lgp12had.pdf*

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้