

การวิเคราะห์เสาไฟส่องสว่างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Structural Analysis of Luminaire Support By Finite Element Method



นาย เกรียงไกร บุญสูง  
นาย เอกสิทธิ์ สังข์ศิริ

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2546

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน.....  
วัน,เดือน,ปี..... 4 เดือน 2548

b.....  
i.....

การวิเคราะห์เสาไฟส่องสว่างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Structural Analysis of Luminaire Support By Finite Element Method

โดย

นาย เกรียงไกร บุญสูง

นาย เอกสิทธิ์ สังข์ศิริ



อาจารย์ที่ปรึกษา  
อาจารย์ มนต์ศักดิ์ ทิมสาร

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2546

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2546

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง การวิเคราะห์เสาไฟส่องสว่างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

Structural Analysis of Luminaire Support By Finite Element Method

ผู้จัดทำ

1. นายเกรียงไกร บุญสูง รหัสประจำตัว 44015371

2. นายเอกสิทธิ์ สังข์ศิริ รหัสประจำตัว 44015418



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## การวิเคราะห์เสาไฟส่องสว่างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

นายเกรียงไกร บุญสูง รหัสประจำตัว 44015371

นายเอกสิทธิ์ สังข์ศิริ รหัสประจำตัว 44015418

อ. มนต์ศักดิ์ พิมสาร อาจารย์ที่ปรึกษา

ปีการศึกษา 2546

### บทคัดย่อ

โครงการนี้นำเสนอการวิเคราะห์ความแข็งแรงและความทนทานของเสาไฟส่องสว่างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยองค์ประกอบที่มีผลต่อโครงสร้างที่นำมาพิจารณาคือ ชนิดของแรงที่มากระทำและรูปร่างของ service door ในตอนเริ่มต้นเราได้ทำการประเมินความแข็งแรงของเสาไฟส่องสว่างที่อยู่ภายใต้ภาระอันเนื่องมาจากลมซึ่งจากการวิเคราะห์พบว่า ณ ความเร็วลมประมาณ 80 mph นั้นจะก่อให้เกิดความเสียหายแก่โครงสร้างซึ่งการเสียหายจะเกิดขึ้น ณ service door หลังจากนั้นได้ออกแบบรูปร่างของ service door ขึ้นมาใหม่พบว่าความเร็วลมที่ทำให้เกิดการเสียหายมีค่าสูงขึ้นเป็น 90 mph

จากนั้นการตอบสนอง โครงสร้างภายใต้ภาระแบบไดนามิกส์ ได้ถูกทำการวิเคราะห์โดยการจำลองรูปแบบภาระของลมออกเป็น 4 แบบ พบว่าลักษณะการตอบสนองของเสาไฟจะมี รูปแบบที่เหมือนกับภาระที่กำหนดให้ นอกจากนี้ผลการวิเคราะห์พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติค่าแรกของเสาไฟส่องสว่างจะมีค่าเท่ากับ 0.29448 Hz

## Structural Analysis of Luminaire Support By Finite Element Method

Mr.Kriangkai Boonsoung 44015371

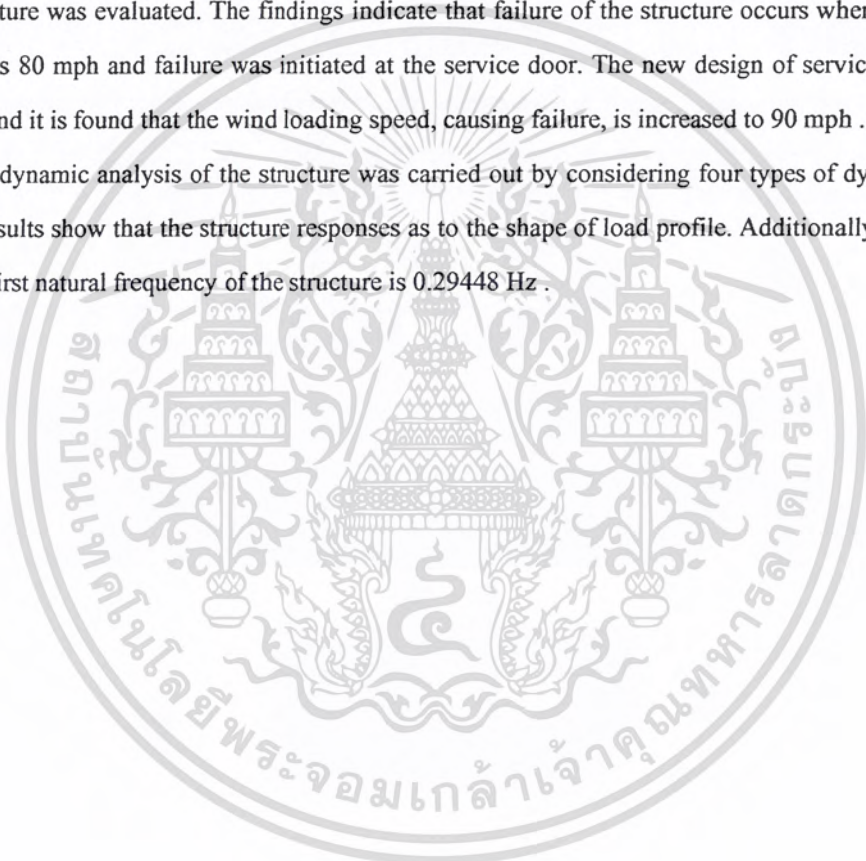
Mr.Eakasit Sangsirit 44015418

Mr.Monsak Pimsam Adviser

### Abstract

This project presents strength and fatigue analyses of luminaire support, subjected to wind loading, by finite element method. The factors which significantly effect the strength of this structure are type of loading and service door geometry. In the beginning of study, structural strength and fatigue life of the structure was evaluated. The findings indicate that failure of the structure occurs when wind loading speed is 80 mph and failure was initiated at the service door. The new design of service door was purposed and it is found that the wind loading speed, causing failure, is increased to 90 mph .

Later, dynamic analysis of the structure was carried out by considering four types of dynamic loading. The results show that the structure responses as to the shape of load profile. Additionally, it is found that the first natural frequency of the structure is 0.29448 Hz .



### กิตติกรรมประกาศ

ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้ได้จัดทำขึ้นเพื่อประกอบการเรียนวิชา project 1,2 ซึ่งนับว่าเป็นโอกาสอันดีที่ทำให้นักศึกษาได้นำความรู้ในภาคทฤษฎีมาทำการปฏิบัติการ เป็นการเพิ่มพูนความรู้และประสบการณ์ให้แก่นักศึกษา

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ อ. มนต์ศักดิ์ พิมสาร อาจารย์ผู้ควบคุม ปริญญาานิพนธ์เป็นอย่างสูงที่ได้ให้คำแนะนำและคำปรึกษาในการจัดทำปริญญาานิพนธ์นี้เป็นอย่างสูง จนปริญญาานิพนธ์นี้เสร็จสมบูรณ์ขึ้นมา

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณบุคคลสำคัญที่สุดที่ทำให้ข้าพเจ้ามีวันนี้ คือ บิดา มารดา อันเป็นที่เคารพรักยิ่ง ซึ่งได้เลี้ยงดูข้าพเจ้ามาเป็นอย่างดี พร้อมทั้งให้โอกาสในการศึกษาอย่างเต็มที่และยังให้กำลังใจ เอาใจใส่เสมอมาในทุกๆด้าน อันหาที่เปรียบมิได้ ข้าพเจ้าขอระลึกในพระคุณอันสุดประมาณ และขอกราบขอบพระคุณมา ณ ที่นี้

นาย เกรียง ไกร บุญสูง  
นาย เอกสิทธิ์ สังข์ศิริ  
เมษายน 2547



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ

หน้าที่

บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญภาพ	V
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ	1
1.3 ภาพรวมของโครงการ	1
บทที่ 2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	3
2.1 บทนำ	3
2.2 ขั้นตอนของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	4
2.3 ความรู้พื้นฐานที่จำเป็น	8
2.4 การประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	9
2.5 ข้อได้เปรียบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	9
2.6 ข้อควรระวังของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	10
2.7 หลักการทั่วไปสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	11
2.8 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์	14
2.9 การกำหนดจุดต่อและความกว้างแถบ	17
2.10 ฟังก์ชันการกระจัด	20
2.11 การนำไปสู่ผลเฉลยแม่นยำ	25
2.12 ข้อเสนอแนะสำหรับการจำลองแบบไฟไนต์เอลิเมนต์	25
2.13 หลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุด	27
2.14 วิธีของกาลเลอร์คิน	29
บทที่ 3 ทฤษฎีความดัด	31
3.1 กลไกความเสียหายเนื่องจากการดัด	31
3.2 ภาวะการเปลี่ยนแปลงแบบแอมพลิฟิเคชัน	32
3.3 ภาวะการเปลี่ยนแปลงแบบแอมพลิฟิเคชันไม่คงที่	33

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ(ต่อ)

หน้าที่

3.4 ขอบเขตของปัญหาความล้า	34
3.5 เส้นกราฟความเค้น-อายุความล้า	34
3.6 ปัจจัยที่มีผลต่อพฤติกรรมความล้า	37
3.7 ผลของความเค้นเฉลี่ย	40
<b>บทที่ 4 ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองในโปรแกรม ABAQUS</b>	<b>42</b>
4.1 ลักษณะของขั้นตอนการสร้างแบบจำลองในโปรแกรม ABAQUS	42
4.1.1 ศึกษาแบบ โครงสร้าง และลักษณะการรับภาระของชิ้นงาน	42
4.1.2 สร้างแบบจำลองของชิ้นงานในโปรแกรม	43
4.1.3 กำหนดคุณสมบัติของชิ้นงานให้กับแบบจำลอง	44
4.1.4 กำหนดลักษณะการวิเคราะห์	44
4.1.5 กำหนดลักษณะขอบเขตของชิ้นงานให้กับแบบจำลอง	44
4.1.6 สร้างเอลิเมนต์ให้กับแบบจำลอง	45
4.1.7 กำหนดชนิดของ IN PUT FILE ที่ใช้งาน	46
4.1.8 การนำข้อมูลไปประมวลผล	47
4.1.9 การบันทึกค่าความเค้นและความเครียด	47
4.2 การคำนวณหาแรงของเสาไฟส่องสว่าง	47
4.2.1 การคำนวณหาแรงของของเสาไฟส่องสว่างแบบ Static	47
4.2.2 การคำนวณหาแรงของของเสาไฟส่องสว่างแบบ Dynamic	49
4.3 การคำนวณอายุการใช้งานโดยใช้โปรแกรม Matlab	
<b>บทที่ 5 ผลจากการทดลอง</b>	
5.1 ผลจากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์	51
5.1.1 ผลการวิเคราะห์ทาง Static	51
5.1.2 ผลการวิเคราะห์ทาง Dynamic	53
<b>บทที่ 6 สรุปและวิจารณ์ผล</b>	<b>55</b>
เอกสารอ้างอิง	
ภาคผนวก ก.	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูปภาพ

รูปที่	หน้าที่
2.1 การแบ่งชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย	3
2.2 ท่อน โลหะรับแรงตามแนวแกน	5
2.3 เอลิเมนต์มิติเดียว	11
2.4 เอลิเมนต์สองมิติ (ก) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม (ข) เอลิเมนต์สามเหลี่ยม	12
2.5 เอลิเมนต์สามมิติ (ก) ชนิดปริซึมหรือชนิดทรงหกหน้า (ข) ชนิดกรวยสามเหลี่ยม หรือชนิดทรงสี่หน้า	12
2.6 (ก) เอลิเมนต์ทรงกระบอก (ข) เอลิเมนต์แผ่น โลหะ โค้งสองมิติ (ค) เอลิเมนต์กรวยสมมาตรสองมิติ	13
2.7 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติที่ประกอบด้วยจุดต่อต่างๆ	13
2.8 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม	14
2.9 ตำแหน่งของจุดต่อที่สำคัญ	14
2.10 การแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยม โค้งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและสามเหลี่ยมย่อย	15
2.11 การขยายขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม	16
2.12 การยึดจุดต่อ (ก) ยึดแบบสลัก (ข) ยึดแบบล้อหมุน	16
2.13 ความกว้างแถบของระบบที่มี $HB=8$	17
2.14 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของคานที่ประกอบด้วย 3 เอลิเมนต์ 8 จุดต่อ	18
2.15 ความกว้างแถบของคาน ในรูป 2.12(ข) ( $HB=12$ )	18
2.16 (ก) โครงข้อหมุนประกอบด้วย 12 จุดต่อ (ข) สแกนไลน์เมทริกซ์ของโครงข้อหมุน (ค) ความกว้างแถบที่ใช้ในการคำนวณ	19
2.17 การสมมติฟังก์ชันการกระจัดสำหรับปัญหามิติเดียว	19
2.18 เอลิเมนต์เชิงซ้อน (ก) เอลิเมนต์มิติเดียว (ข) เอลิเมนต์สามเหลี่ยม 2 มิติ (ค) เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกรวย 3 มิติ	21
2.19 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติ (ก) เอลิเมนต์เชิงเส้น (ข) เอลิเมนต์กำลังสอง (ค) เอลิเมนต์กำลังสาม	23
2.20 เอลิเมนต์ชนิดปริซึม (ก) เอลิเมนต์เชิงเส้น (ข) เอลิเมนต์กำลังสอง (ค) เอลิเมนต์กำลังสาม	24
2.21 การประกอบเอลิเมนต์ที่มีต่อเนื่อง (ก) ก่อนการยึดตัว (ข) ขณะยึดตัวหรือหัดตัวจะเกิดช่องว่างขึ้น	24
2.22 ท่อน โลหะภายใต้การกระทำของโหลดในทิศทาง x	26

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
2.23 แรงกระทำบนท่อน โลหะ	27
2.24 ท่อนโลหะรับแรงตามแนวแกน	28
3.1 แสดงชั้นคอนกรีตต่าง ๆ ของความเสียหายเนื่องจากความล้า	31
3.2 แสดงค่านิยามต่าง ๆ ของภาระเปลี่ยนแปลงแบบแอมพลิจูดคงที่	33
3.3 แสดงลักษณะของสภาวะทดสอบที่ใช้สร้างเส้นกราฟความเค้น-อายุ	34
3.4 แสดงเส้นกราฟความเค้น-อายุการล้าจากการทดสอบที่พลีตบนสเกลแบบต่าง ๆ	35
3.5 แสดงลักษณะทั่วไปของเส้นกราฟความเค้น-อายุและตัวแปรที่เกี่ยวข้อง	36
3.6 ความชันของความเค้นในชั้นส่วนที่มีขนาดใหญ่ และขนาดเล็กภายใต้ภาระตัด	37
4.1 แสดงลักษณะของเสาไฟส่องสว่าง	42
4.2 แสดงขนาดของชิ้นงาน	43
4.3 แสดงลักษณะของแบบจำลอง	43
4.4 แสดงลักษณะของการกำหนดคุณสมบัติของแบบจำลอง	44
4.5 แสดงลักษณะการกำหนดการวิเคราะห์ของแบบจำลอง	44
4.6 แสดงลักษณะของการกำหนดขอบเขตของแบบจำลอง	45
4.7 แสดงลักษณะเอลิเมนต์ของแบบจำลอง	45
4.8 แสดงลักษณะการกำหนดชนิดของ IN PUT FILE	46
4.9 แสดงลักษณะของผลลัพธ์	46
4.10 แสดง IN PUT FILE. For	48
4.11 แสดงลักษณะของแรงที่ใช้วิเคราะห์แบบ Dynamic	49
4.12 แสดงลักษณะของ Amplitudes ของแรง	49
5.1 กราฟแสดงค่าความเค้น	51
5.2 แสดงบริเวณที่มีความเค้นสูงสุด	51
5.3 แสดงรูปแบบของ Service door	52
5.4 กราฟแสดงค่าความเค้น	52
5.5 กราฟแสดงอายุการใช้งาน	53
5.6 แสดงลักษณะของ Amplitudes ของแรง	53

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้าที่
5.7 แสดงลักษณะของ Amplitudes ความเค้น	54
5.8 กราฟแสดงลักษณะของ Amplitudes ความเค้น	54



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและที่มา

ในปัจจุบันนี้ไม่ว่าจะไปที่ไหนเราก็จะพบเห็นเสาไฟส่องสว่างตามสถานที่ต่างๆ เช่น ตามข้างถนน ลานจอดรถ สวนสาธารณะ ฯลฯ เนื่องด้วยแสงสว่างมีความจำเป็นในการดำเนินชีวิต ซึ่งโดยทั่วไปเสาไฟส่องสว่างจะมีลักษณะสูงและตั้งอยู่ในที่โล่ง ซึ่งลักษณะดังกล่าวนี้เป็นสิ่งที่ก่อให้เกิดความเสียหายกับเสาไฟส่องสว่าง ส่วนมากจะมีผลมาจากโปรไฟล์ของลมและจากข้อมูลของบริษัทผู้ผลิตเสาไฟส่องสว่างพบว่าความเสียหายที่เกิดขึ้นส่วนมากจะอยู่ที่บริเวณ service door ของเสาไฟส่องสว่างจากความสนใจและต้องการศึกษา วิธีการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นพิเศษจึงจัดทำโครงการนี้เกี่ยวกับการศึกษาหา ความเค้น ความเครียด อายุการล้า ของเสาไฟส่องสว่างและวิเคราะห์ถึงอายุการใช้งานที่เกิดจากโปรไฟล์ของลมที่มากกระทำซึ่งมีลักษณะที่เปลี่ยนแปลงแบบไม่คงที่ เมื่อวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้นกับเสาไฟส่องสว่างแล้ว นำผลการวิเคราะห์ที่ได้มาปรับปรุง โครงสร้าง ณ ตำแหน่งที่เสียหายให้ดีขึ้น เพื่อให้มีอายุการใช้งานที่นานยิ่งขึ้น

### 1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ

- 1.2.1 ประเมินความเร็วลมสูงสุดที่โครงสร้างของเสาไฟสามารถรับได้
- 1.2.2 ประเมินอายุการใช้งานของเสาไฟส่องสว่าง
- 1.2.3 หาแนวทางปรับปรุงและพัฒนาให้เสาไฟส่องสว่างมีอายุการใช้งานนานขึ้น

### 1.3 ภาพรวมของโครงการ

เอกสารฉบับนี้ในตอนต้นจะกล่าวถึงความเป็นมาของการทำโครงการ ขั้นตอนการทำงานหรือการวิเคราะห์ ส่วนสุดท้ายจะเป็นผลการวิเคราะห์และสรุปผล

การทำโครงการนี้ทำขึ้นเพื่อต้องการรู้ผลของความเร็วลมสูงสุดที่กระทำต่อ โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่าง แล้วโครงสร้างของเสาไฟส่องสว่างสามารถคงสภาพอยู่ได้โดยไม่เกิดความเสียหาย และทำการพัฒนาตำแหน่งของ โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่างที่เกิดความเสียหายมากที่สุด โดยการทดลองจะแบ่งออกเป็นสองกรณี การทดลองทาง Static และ Dynamic

การวิเคราะห์ผล โดยการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ซึ่งการทดลองทาง Static จะเป็นการกำหนดให้ลักษณะของความเร็วของลมขึ้นอยู่กับความสูง ส่วนแบบ Dynamic การวิเคราะห์จะใช้ลักษณะของความเร็วลมแบบเดียวกับ แบบ Static แต่จะเพิ่มลักษณะ Amplitudes ของแรงให้ขึ้นอยู่กับเวลา จากการวิเคราะห์ผลของความเร็วที่ได้คือ 80 mph หลังจากทำการปรับปรุงรูปร่างของ โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่างบริเวณตำแหน่งที่เกิดความเสียหายมากที่สุดทำให้ผลของความเร็วลมที่โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่าง เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สว่างทนได้เป็น 90 mph จากการทดลองทาง Dynamic พบว่าลักษณะ Amplitude ที่มีลักษณะเป็นรูป Square จะก่อให้เกิดความเสียหายมากที่สุด ซึ่งรายละเอียดของโครงการจะกล่าวถึงในบทต่อไป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

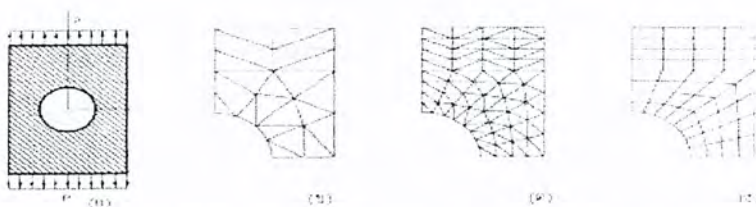
## บทที่ 2

### วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

#### 2.1 บทนำ

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ใช้สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์และเป็นวิธีที่นิยมใช้วิเคราะห์ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์อย่างกว้างขวาง ซึ่งสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง เช่น วิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง และความเค้นของชิ้นส่วนเครื่องจักรกล โครงสร้างเครื่องบิน ตัวอาคาร สะพานและ โครงสร้างอื่นๆ ที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดี ไม่ว่าวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้นจะอยู่ในสภาพยืดหยุ่น (plastic) นอกจากนี้จะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาทางด้านสถิติศาสตร์ตามที่กล่าวมาแล้ว ยังสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านพลศาสตร์ เช่น การสั่นสะเทือนของชิ้นส่วนเครื่องจักรกล การสั่นสะเทือนของ โครงสร้าง รวมทั้งยังสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน การไหลของของไหล, การถ่ายเทมวล เป็นต้น

การวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกลต่างๆ ไปที่ไม่ซับซ้อน เราสามารถจะหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ต้องการทราบ เช่น การกระจัดที่ตำแหน่งใดๆ ของชิ้นส่วนได้โดยอาศัยสมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลยที่ได้รับเรียกว่าผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) แต่มีชิ้นส่วนเครื่องจักรกล และโครงสร้างจำนวนมากที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนที่ประกอบด้วยส่วนเว้า ส่วนโค้งต่างๆ ทำให้พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนไม่สม่ำเสมอและบางบริเวณอาจมีการเปลี่ยนแปลงของไหลอย่างฉับพลัน หรือใช้วัสดุต่างชนิดกันเหล่านี้เป็นต้น จึงมีผลทำให้ไม่สามารถจะหาผลเฉลยแม่นยำตรงจากสมการอนุพันธ์สามัญหรือสมการอนุพันธ์ย่อยได้ ฉะนั้นจึงจำเป็นต้องหาวิธีอื่นๆ เช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่สามารถประมาณค่าผลเฉลยโดยการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต แทนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ การแก้ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าว ชิ้นส่วนหรือส่วนประกอบของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นชิ้นย่อยๆ อย่างต่อเนื่อง ตามรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของชิ้นส่วน เช่น รูป 2.1 เราเรียกชิ้นส่วนย่อยเหล่านี้ว่า ไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลเฉลยที่รับจะเป็นผลเฉลยที่จุดต่อ (node) ของแต่ละเอลิเมนต์ การวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เราจะไม่วิเคราะห์ปัญหาที่เดียวทั้งระบบเช่นวิธีทั่วๆ ไป แต่เราจะวิเคราะห์หาค่าที่ละเอลิเมนต์แล้วนำมารวม



รูปที่ 2.1 การแบ่งชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ก) แผ่นโลหะมีรูตรงกลางและมีโหลด P กระทำ (ข) อีลิเมนต์สามเหลี่ยมหายาบ (ค) อีลิเมนต์ 3 เหลี่ยมละเอียด (ง) อีลิเมนต์สี่เหลี่ยมโค้ง

เข้าด้วยกันเป็นผลเฉลยของระบบ เช่นในระบบ โครงสร้าง เราจะหาการกระจัดและความเค้นของแต่ละจุดของอีลิเมนต์ที่ประกอบเป็น โครงสร้างของระบบ

## 2.2 ขั้นตอนของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตามที่กล่าวมาแล้ว เราสามารถจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาของโครงสร้าง เช่น การการกระจัด, ความเค้น – ความเครียด และใช้วิเคราะห์ปัญหาของการถ่ายเทความร้อน การไหลของของเหลว เป็นต้น ในที่นี้จะเน้นการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาของโครงสร้างระบบทางกล และชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลที่ซับซ้อนที่ไม่สามารถจะหาผลเฉลยจากวิธีธรรมดาๆ ได้

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง สามารถหาได้จากวิธีพื้นฐาน 2 วิธีคือ วิธีแรง หรือวิธียืดหยุ่น (force or flexibility method) และ วิธีการกระจัดหรือวิธีสทิฟเนส (displacement of stiffness method) วิธีแรกสามารถจะหาแรงภายในและแรงปฏิกิริยาโดยอาศัยสมการสมดุลของแรงและสมการเงื่อนไขการกระจัด (compatibility equation)

ส่วนวิธีที่สองจะสามารถหาการกระจัดที่สมมุติขึ้น โดยมีเงื่อนไขของความต่อเนื่องของอีลิเมนต์ที่แต่ละจุดต่อหรือที่ขอบบริเวณที่สัมผัสกัน ไม่ว่าก่อนหรือหลัง โหลดกระทำยังคงมีความต่อเนื่องเหมือนเดิม ดังนั้นสมการสมดุลจะเขียนอยู่ในเทอมของการกระจัดของแต่ละจุดต่อ และค่าของการกระจัดก็สามารถจะหาได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการกระจัด

การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น นิยมใช้วิธีการกระจัดหรือวิธีสทิฟเนสหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์มากกว่า ทั้งนี้เพราะสามารถจะหาสมการสมดุลและหาผลเฉลยได้สะดวกกว่ารวมทั้งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวก็นิยมใช้วิธีการกระจัดด้วย

หลักการทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ จะแบ่งโครงสร้างออกเป็นส่วนย่อยๆ เช่นรูป 2.1 ซึ่งเรียกว่า ไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชันการกระจัด (displacement function) ที่นำมาแทนเอลิเมนต์จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง แต่ละเอลิเมนต์จะ โยงกันด้วยจุดต่อ (node) หรือเส้นขอบหรือผิวรอบเอลิเมนต์สัมผัสกัน และโดยอาศัยคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างหรือชิ้นงาน เราสามารถหาการกระจัด, ความเค้น – ความเครียดที่เกิดขึ้นที่จุดต่อต่างๆ ของแต่ละเอลิเมนต์ที่ประกอบเป็น โครงสร้างหรือชิ้นงาน

ขั้นตอนต่างๆ ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วน เช่น สปริง, ท่อนโลหะ, เหล็ก, โครงข้อหมุน, โครงข้อแข็ง, แผ่นโลหะ, ถึงความดัน ฯลฯ ภายใต้สภาวะต่างๆ ของโหลด มีขั้นตอนต่างๆ ไปคล้ายกันดังนี้

### 1. การแบ่งโครงสร้างเป็นเอลิเมนต์ย่อยและการเลือกชนิดของเอลิเมนต์

การแบ่งโครงสร้างออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย จะต้องคำนึงถึงรูปร่างลักษณะของ โครงสร้างเดิมคือแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element model) จะต้องเหมือนหรือสอดคล้องกับ โครงสร้างเดิมให้เอกลักษณะเป็นเอกลักษณ์ของวัสดุหรือการเชื่อมเพื่อการศึกษาค้นคว้า ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านอื่นไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

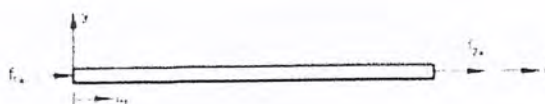
มากที่สุด คือบริเวณที่เป็นส่วนเว้า ส่วนโค้ง หรือมีรู หรือตรงบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างฉับพลันก็จำเป็นต้องแทนด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเพียงพอที่จะให้ผลการวิเคราะห์ที่ได้ถูกต้องแม่นยำ ส่วนบริเวณที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมากนักก็อาจจะแทนด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น ส่วนบริเวณที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมากนักก็อาจจะแทนด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น แต่ถ้าแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยจำนวนเอลิเมนต์มากเกินไปก็จะทำให้ค่าใช้จ่ายในการคำนวณสูง และอาจทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ถ้าเครื่องคอมพิวเตอร์มีความละเอียดในการคำนวณไม่เพียงพอ ส่วนการเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์นั้น จะต้องคำนึงถึงรูปร่างของโครงสร้าง และการกระทำของโหลด รวมทั้งความละเอียดของผลเฉลยที่ผู้วิเคราะห์ต้องการคือ อาจจะเลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดมิติเดียว, สองมิติ, สามมิติ หรือเอลิเมนต์ชนิดแกนสมมาตร (axisymmetric element) รายละเอียดของเอลิเมนต์ชนิดต่างๆ จะกล่าวในบทต่อไป

## 2. การเลือกฟังก์ชันการกระจัด

จะต้องเลือกฟังก์ชันการกระจัดภายในเอลิเมนต์ ให้สอดคล้องกับจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์ หรือสอดคล้องกับระดับความเสรีของเอลิเมนต์ ฟังก์ชันการกระจัดที่นิยมใช้กันคือ พอลิโนเมียลฟังก์ชัน ซึ่งอาจเป็นพอลิโนเมียลกำลังหนึ่ง, กำลังสอง, กำลังสาม ส่วนฟังก์ชันที่เป็นอนุกรมทางเรขาคณิตก็สามารถเลือกใช้ได้แต่ไม่เป็นที่นิยม ทั้งนี้เพราะพอลิโนเมียลฟังก์ชันให้ความสะดวกในการวิเคราะห์มากกว่า ในกรณีของปัญหาสองมิติ ฟังก์ชันการกระจัดที่จุดต่อจะเขียนอยู่ในเทอมของพิกัดของระนาบ เช่น ระนาบ  $x - y$  เป็นต้น ฟังก์ชันการกระจัดที่จะเลือกใช้จะต้องทำให้ผลเฉลยที่ความต่อเนื่องทั้งภายในเอลิเมนต์และแบบจำลองของระบบรวม

## 3. กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด/การกระจัดและความเค้น/ความเครียด

การหาสมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ จำเป็นต้องอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัดและความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ในกรณีของปัญหามิติเดียว รูป 3.2 การยืดตัว  $u$  ของเอลิเมนต์ในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง เช่น ทิศทาง  $x$  จะมีความสัมพันธ์กับความเครียด  $\epsilon_x$  ในกรณีที่  $\epsilon_x$  มีค่าน้อย,



รูปที่ 2.2 ท่อนโลหะรับแรงตามแนวแกน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\epsilon_x = du / dx$  และถ้าวัสดุอยู่ในช่วงยืดหยุ่น, จากกฎของฮุก ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดคือ  $\sigma_x = E\epsilon_x$  ซึ่ง  $\sigma_x$  คือความเค้นในทิศทาง  $x$  และ  $E$  คือค่ามอดุลัสของการยืดหยุ่น ผลเฉลยของการกระจัด, ความเค้น, ความเครียดโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะต้องแม่นยำเพียงใด ย่อขึ้นอยู่กับคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่นำมาใช้ในการคำนวณ และความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด และความเค้นกับความเครียดจะมีลักษณะเป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่เป็นสมการเชิงเส้น

#### 4. หาสถิพเนสมเทริกซ์และสมการของเอลิเมนต์

การหาสถิพเนสมเทริกซ์ของเอลิเมนต์และสมการของแรงของแต่ละเอลิเมนต์สามารถหาได้หลายวิธีเช่น

##### 4.1 วิธีสมมูลโดยตรง (direct equilibrium method)

วิธีสมมูลโดยตรงนี้เป็นวิธีที่ง่ายที่สุด เราสามารถหาสถิพเนสมเทริกซ์และสมการของแรงในเทอมการกระจัดที่จุดต่อของเอลิเมนต์ได้โดยใช้เงื่อนไขการสมมูลของแรงในเอลิเมนต์ ส่วนมากจะใช้หาสถิพเนสมเทริกซ์ของเอลิเมนต์มิติเดียว เช่น เอลิเมนต์สปริง, ท่อน โลหะ, เพลลา, และคานเป็นต้น

##### 4.2 วิธีงานหรือพลังงาน (work or energy method)

โดยอาศัยหลักการของงานสมมุติ (principle of virtual work), หลักของพลังงานศักย์ต่ำสุด (principle of minimum potential energy) และทฤษฎีของแคสติกลีอาโน (Castigliano's theorem) ก็สามารถจะหาสมการของเอลิเมนต์และหาสถิพเนสมของเอลิเมนต์สองและสามมิติได้โดยสะดวก สำหรับวิธีของงานสมมุตินั้นสามารถจะใช้หาสถิพเนสมเทริกซ์ของเอลิเมนต์ของวัสดุทุกชนิดและวิธีพลังงานศักย์ต่ำสุดและทฤษฎีแคสติกลีอาโน ใช้หาสถิพเนสมเทริกซ์ของเอลิเมนต์ของวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่านั้น อย่างไรก็ตามทั้งสามหลักการ สามารถหาสถิพเนสมเทริกซ์ของเอลิเมนต์ของวัสดุยืดหยุ่น ได้เหมือนกัน แต่ในหนังสือนี้จะเน้นการหาสถิพเนสมของเอลิเมนต์ โดยอาศัยหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด เพราะเป็นหลักการที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวาง สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างในช่วงยืดหยุ่น

##### 4.3 วิธีเวทเรซิดิว (method of weighted residuals)

วิธีเวทเรซิดิวที่นิยมกันมากก็คือวิธีของการเลอร์คิน (Galerkin's method) ซึ่งมีประโยชน์มากสำหรับการหาสมการของเอลิเมนต์ และให้ผลเช่นเดียวกับวิธีพลังงาน ส่วนมากมักจะนิยมใช้ในกรณีที่วิธีพลังงานศักย์ต่ำสุดใช้ได้ไม่สะดวก เช่น ปัญหาการไหลของของเหลว การถ่ายเทความร้อน การเคลื่อนมวล (mass transport) เป็นต้น

โดยอาศัยวิธีใดวิธีหนึ่งจากสามวิธีดังกล่าวมาแล้ว เราจะได้สมการสมมูลของแรงในเทอมของสทิพเนสมเทริกซ์ และการกระจัดที่จุดต่อของเอลิเมนต์สมการดังกล่าว สามารถจะเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & \cdot & \cdot & k_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot & \cdot & k_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdot \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

หรือ  $\{f\} = [k] \{d\}$  (2.2)

ซึ่ง  $\{f\}$  คือเมทริกซ์ของแรงที่กระทำที่จุดต่อ,  $[k]$  คือสทiffเนสของเอลิเมนต์ และ  $\{d\}$  คือการกระทำที่จุดต่อซึ่งยังไม่ทราบค่า,  $n$  คือจำนวนของระดับความเสรีของเอลิเมนต์

### 5. หาสมาการรวมของระบบและการกำหนดเงื่อนไขขอบ

สมการรวมของระบบ โครงสร้างสามารถหาได้จาก การรวมสมการของแต่ละเอลิเมนต์ ในขั้นที่ 4 เข้าด้วยกัน ด้วยวิธีซ้อนทับ (superposition method) หรือเรียกว่าวิธีสทiffเนสโดยตรง (direct stiffness method) โดยอาศัยหลักการสมมูลของแรงที่จุดต่อเอลิเมนต์ และการต่อเนื่อง (continuity) ของโครงสร้าง สมการรวมของระบบโครงสร้างที่ได้รับ, เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้คือ

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (2.3)$$

ซึ่ง  $\{F\}$  คือเมทริกซ์รวมของแรงที่จุดต่อ,  $[K]$  คือสทiffเนสเมทริกซ์รวมของระบบ และ  $\{d\}$  คือเมทริกซ์รวมของการกระจัดของระบบซึ่งอาจจะทราบค่าบางค่า และบางตัวอาจจะไม่ทราบค่า เนื่องจากเมทริกซ์  $[K]$  ในสมการ (2.3) เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) ทั้งนี้เพราะตัวกำหนด (determinant) เท่ากับศูนย์ จึงไม่สามารถหาค่า  $\{d\}$  โดยตรงจากสมการ (2.3) ได้ จึงจำเป็นต้องอาศัยเงื่อนไขขอบ (boundary conditions) หรือเงื่อนไขบังคับ (constraints) หรือจุดรองรับ (supports) เพื่อช่วยทำให้เมทริกซ์  $[K]$  ในสมการ (2.3) ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน และสามารถหาค่าการกระจัดที่แต่ละจุดต่อที่ต้องการได้

### 6. หากการกระจัดของระบบ

หลังจากกำหนดเงื่อนไขขอบ หรือเงื่อนไขบังคับ ลงในสมการ (3.3) แล้ว เราสามารถหาค่าการกระจัด  $d_1, d_2, \dots, d_n$  ได้โดยการแก้สมการพีชคณิตพร้อมๆ กันคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & - & - & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & - & - & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

การหาการกระจัด  $\{d\}$  อาจจะใช้วิธีของเกาส์ (gauss's elimination method) หรือวิธีสมมุติ (iteration method) การกระจัด  $\{d\}$  หรือการกระจัด  $\{d\}$  อาจหาได้โดยการคูณสมการ (3.4) ด้วย  $[K]^{-1}$  ตลอด ( $[K]$  จะต้องไม่ใช่เมทริกซ์เอกฐาน)

### 7. การหาค่าความเครียดและความเค้น

ในการวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกล นอกจากต้องการทราบการกระจัดแล้วยังต้องการทราบค่าของความเครียด, ความเค้น หรือค่าของ โมเมนต์ และแรงเฉือน ค่าต่างๆ เหล่านี้สามารถจะคำนวณหาได้โดยอาศัยพื้นฐานความรู้ทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง อาทิเช่น ปัญหามิติเดียว ถ้าทราบค่าการกระจัด  $u$  ก็สามารถหาความเครียดจาก  $\epsilon_x = du / dx$  และหาความเค้นจาก  $\sigma_x = E\epsilon_x$  ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในขั้นตอนที่ 3

### 8. การตีความผลลัพธ์

จากผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 6 และ 7 ก็สามารถจะทราบได้ว่าที่จุดต่อใดของเอลิเมนต์หรือบริเวณใดของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนที่จะต้องให้ความสนใจเป็นพิเศษ เช่น บริเวณที่มีการกระจัดสูงหรือบริเวณใดที่มีความสูง และเราสามารถจะลดขนาดของการกระจัด และ/หรือความเค้นนั้นได้อย่างไร ทั้งนี้จะต้องเปลี่ยนแปลงรูปร่างลักษณะหรือมิติของ โครงสร้างหรือชิ้นส่วนให้เหมาะสมยิ่งขึ้นหรืออาจจะต้องเลือกใช้วัสดุชนิดอื่นที่เหมาะสมกว่า

### 2.3 ความรู้พื้นฐานที่จำเป็น

การศึกษาการวิเคราะห์หรือการออกแบบ โครงสร้างและชิ้นส่วนต่างๆ ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามขั้นตอนในหัวข้อ 3.2 นั้น เราจะต้องมีความรู้พื้นฐานทางด้านต่างๆ หลายด้านจึงจะเข้าใจถึงหลักการและวิธีการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เป็นอย่างดี อาทิเช่น จะต้องมีพื้นฐานความรู้ของด้านเมทริกซ์รู้เทคนิคต่างๆ ที่จะในการแก้สมการพีชคณิตพร้อมๆ กันหลายสมการ รู้เทคนิคการหาค่าของเมทริกซ์ผกผัน เป็นต้น และจะต้องรู้วิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าโดยประมาณ จะต้องมีพื้นฐานความรู้ทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง ทฤษฎีการยืดหยุ่น และหลักการของงาน, พลังงานศักย์ต่ำสุด และวิธีเวทริคัลเป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่หรือใช้ในการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นอกจากนี้ยังต้องมีพื้นฐานความรู้และมีประสบการณ์การใช้เครื่องคอมพิวเตอร์อีกด้วย ในภาคผนวกของหนังสือจะกล่าวโดยสรุปเกี่ยวกับ ทฤษฎีการยืดหยุ่น, วิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลขสำหรับหลักการของงาน, พลังงานศักย์ต่ำสุดและวิธีเวทริคัล จะกล่าวในบทต่อไปนี้ ส่วนพื้นฐานความรู้อื่น เราสามารถจะพบทวนได้จากหนังสือที่เกี่ยวข้องทั่วไป

## 2.4 การประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เราสามารถจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ที่เป็นโครงสร้างและที่ไม่ใช่โครงสร้างได้อย่างกว้างขวาง ตัวอย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับโครงสร้างจะประกอบด้วย การวิเคราะห์ความเค้น ซึ่งรวมทั้งการวิเคราะห์โครงข้อหมุน, โครงข้อแข็ง, ความเข้มของความเค้นตรงบริเวณที่เป็นรู เป็นรอยบาก หรือตรงบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงลักษณะรูปร่าง นอกจากนี้ยังใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์การโก่งของเสา, การล้าตัว (fatigue) และการสั่นสะเทือนของระบบโครงสร้างและระบบเครื่องจักรกลด้วย

ส่วนใหญ่นี่ไม่ใช่โครงสร้างเช่น การถ่ายเทความร้อน, การไหลของของเหลว รวมทั้งการซึมผ่านวัสดุพอรุน และการต่างศักย์ของแม่เหล็กไฟฟ้า ก็สามารถจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาเหล่านั้นได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้ยังนิยมวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาทางด้านชีววิศวกรรมภาค เช่น วิเคราะห์การทำงานของหัวใจ, ตา, ข้อต่อต่างๆ ของร่างกาย เป็นต้น

## 2.5 ข้อได้เปรียบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เราจะเห็นว่าสามารถใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ได้อย่างกว้างขวาง จึงเป็นที่นิยมใช้กันทั่วไปในงานด้านวิศวกรรมศาสตร์ ข้อได้เปรียบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อเทียบกับวิธีธรรมดา มีดังนี้คือ

1. สามารถสร้างแบบจำลองของ โครงสร้าง หรือชิ้นงานที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดีและสะดวก
2. สามารถจำลองการกระทำของ โหลดในสภาพต่างๆ เช่น โหลดที่กระจายไม่สม่ำเสมอได้ใกล้เคียงกับสภาพจริง
3. ใช้วิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนระบบเครื่องจักรกลที่ประกอบด้วยวัสดุต่างชนิดกันได้ โดยไม่มีความยุ่งยาก
4. สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหา ไม่ว่าจะเงื่อนไขขอบ, เงื่อนไขบังคับ, และจุดรองรับจะอยู่ในลักษณะใด
5. สามารถเลือกขนาดของเอลิเมนต์ที่บริเวณใดบริเวณหนึ่งให้มีขนาดใหญ่หรือเล็กได้ตามความจำเป็น
6. ในการออกแบบชิ้นส่วนหรือระบบสามารถจะเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆ ได้สะดวก และยังสามารถประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7. ในการออกแบบและการผลิตชิ้นส่วนเครื่องจักรกลสมัยใหม่ (CAD และ CAM) มักนิยมใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ก่อน ก่อนที่จะผลิตชิ้นส่วนจริงซึ่งทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายและมีความถูกต้องแม่นยำสูง

8. ในกรณีของวัสดุประเภทยืดหยุ่นตัวไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear) หรือการยืดหยุ่นของวัสดุอยู่ในช่วงพลาสติก ก็ยังสามารถใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์สิ่งที่ต้องการได้สะดวก เช่น ใช้วิเคราะห์การล้าตัวและ creep ของชิ้นส่วนเครื่องจักรกล เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์โครงสร้างหรือระบบเครื่องจักรกลก็มีข้อพึงระวังอยู่บ้าง ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

## 2.6 ข้อความระวังของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ผลเฉลยของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะถูกค่อนน้อยเพียงใดจะขึ้นอยู่กับสามประการหลักคือ ประการแรก การกำหนดรูปร่างของเอลิเมนต์ให้ใกล้เคียงกับรูปร่างลักษณะจริงของชิ้นงาน ได้มากน้อยเพียงใด ประการที่สอง การประมาณพฤติกรรมของเอลิเมนต์ได้ถูกต้องตามสภาพที่แท้จริงหรือไม่ และประการสุดท้ายคือ ความละเอียดในการคำนวณตัวเลขที่มีน้อยๆ ของเครื่องคอมพิวเตอร์

การกำหนดหรือแบ่งเอลิเมนต์ย่อยๆ ให้สอดคล้องกับรูปร่างลักษณะจริงของชิ้นงาน ได้มากเท่าไรก็ยิ่งทำให้ผลเฉลยถูกต้องแม่นยำมากขึ้นเท่านั้น

ส่วนการได้มาของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะใช้ในการวิเคราะห์ อาจจะไม่ต้องสอดคล้องกับการยึดตัวอย่างต่อเนื่องของวัตถุ เช่น ถ้าเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีการยึดตัวเชิงเส้น เอลิเมนต์ชนิดนี้จะให้ค่าแม่นยำตรง ถ้าปัญหาเป็นแบบท่อน โลหะที่รับแรงดึงแรงอัด แต่ถ้าท่อน โลหะเดียวกันรับแรงกระจายเนื่องจากมวล การกระจัดที่เกิดขึ้นภายในท่อน โลหะจะเป็นแบบสมการกำลังสอง และถ้ายังคงใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นตรงก็จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นในผลลัพธ์ ดังนั้นการเลือกเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับลักษณะของปัญหา และการเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กจะช่วยลดความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยได้

ส่วนความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขในการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ และวิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลขนั้น จะขึ้นอยู่กับขีดความสามารถของเครื่องคอมพิวเตอร์ และ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณ การใช้ความแม่นยำระดับสอง (double precision) และขนาดของ bandwidth ที่เล็กที่สุดจะสามารถช่วยลดความคลาดเคลื่อนดังกล่าวได้ และถ้าเลือกใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีมาตรฐานระดับสูง ความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขในการคำนวณจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความคลาดเคลื่อนจากการเลือกใช้ชนิด และขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับลักษณะของปัญหา สำหรับ โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาตรฐานทั่วไป เช่น Abaqus ข้อมูลที่จะต้องให้กับคอมพิวเตอร์ก็คือ ตำแหน่งหรือพิกัดของจุดต่อต่างๆ ของเอลิเมนต์ ชนิดของเอลิเมนต์ที่ใช้ คุณสมบัติทางกลของวัสดุของแต่ละเอลิเมนต์ ลักษณะของโหลดที่กระทำ ลักษณะของเงื่อนไขขอบหรือเงื่อนไขบังคับ และต้องระบุชนิดของการวิเคราะห์ด้วย เช่น ความเค้น ระบายหรือความเครียดครั้นเป็นต้น เครื่องคอมพิวเตอร์จะใช้ข้อมูลเหล่านั้นคำนวณสิ่งต่างๆ ที่ต้องการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.7 หลักการทั่วไปสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

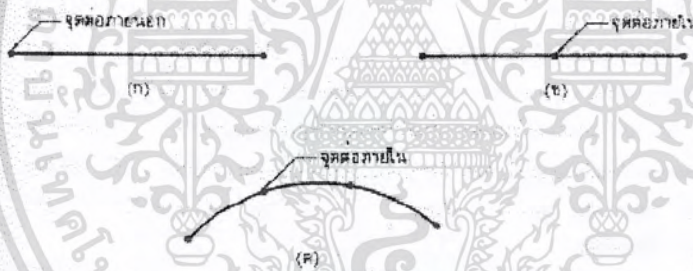
### 2.7.1 ชนิดของเอลิเมนต์

การวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องแบ่งโครงสร้างหรือชิ้นส่วนออกเป็นส่วนเล็กๆ และเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับรูปร่างลักษณะของงานและการกระทำของโหลด ชนิดของเอลิเมนต์อาจแบ่งออกได้ 3 ประเภทตามมิติคือ เอลิเมนต์สำหรับปัญหามิติเดียว สองมิติ และสามมิติ

#### 1. เอลิเมนต์มิติเดียว

เอลิเมนต์มิติเดียวเป็นเอลิเมนต์ที่นิยมนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหามิติเดียว เช่น ชิ้นส่วนที่มีแรงกระทำในแนวแกน ชิ้นส่วนที่รับแรงบิด การโค้งของคาน การนำความร้อนในทิศทางเดียวกัน

รูป 2.3 (ก) คือเอลิเมนต์มิติเดียวที่ประกอบด้วยจุดต่อที่ปลายทั้งสองด้านของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งเรียกว่าจุดต่อภายนอก ส่วนรูปที่ 2.3 (ข) เป็นเอลิเมนต์มิติเดียวที่ประกอบด้วยสามจุดต่อคือจุดต่อภายนอกสองจุดต่อ และจุดต่อภายในหนึ่งจุดต่อ และรูป 2.3 (ค) คือเอลิเมนต์มิติเดียวที่เป็นเส้นโค้งประกอบด้วยสี่จุดต่อ คือ สองจุดต่อภายนอก และสองจุดต่อภายในซึ่ง

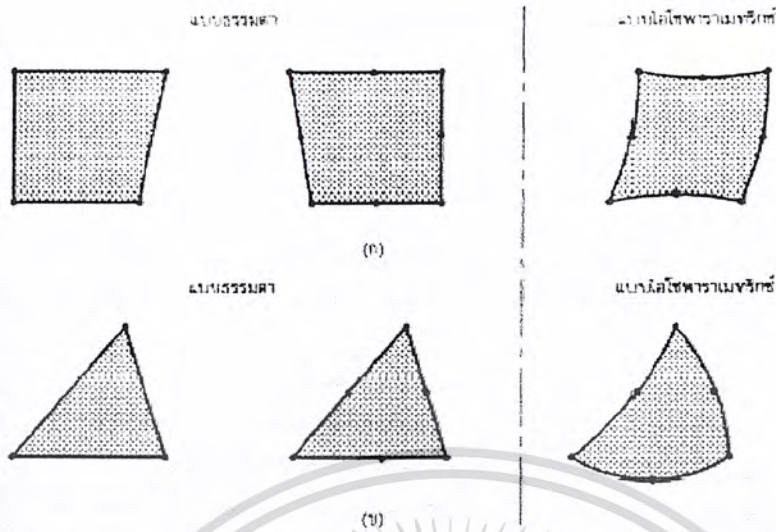


รูปที่ 2.3 เอลิเมนต์มิติเดียว

เหมาะสำหรับใช้วิเคราะห์ปัญหาของ โครงสร้างหรือชิ้นงานที่มีการยึดตัวไม่เป็นเส้นตรง เช่น กายึดตัวของท่อโลหะ อันเนื่องมาจากมวลของท่อโลหะเอง เป็นต้น

#### 2. เอลิเมนต์สองมิติ

เอลิเมนต์สองมิติมักใช้กับการวิเคราะห์ความเค้น – ความเครียดระนาบ โดยทั่วไปเอลิเมนต์สองมิติจะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยด้านที่เป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง เช่น รูปในรูป 2.4 (ก) เป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยสี่จุดต่อและ 8 จุด

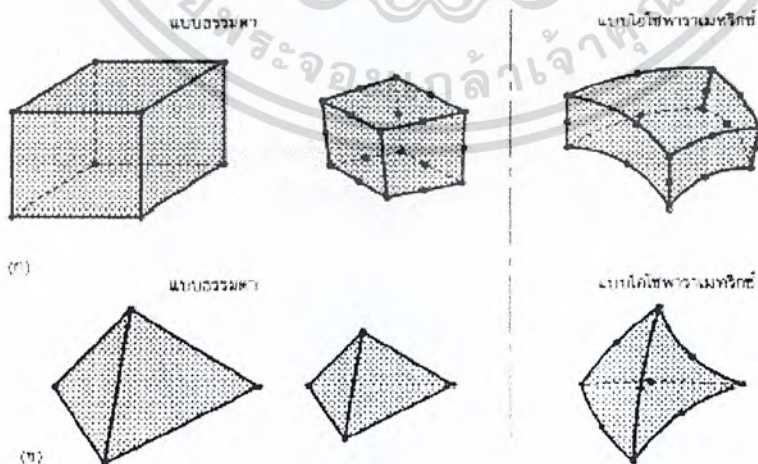


รูปที่ 2.4 เอลิเมนต์สองมิติ (ก) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม (ข) เอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ต่อชนิดด้านตรงและด้านโค้งแบบ ไอโซพาราเมตริก ส่วนรูป 2.4 (ข) เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ และ 6 จุดต่อด้านตรงและด้านโค้งแบบไอโซพาราเมตริก โดยทั่วไปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะได้รับความนิยมมากกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ทั้งนี้เพราะในกรณีที่ระดับขั้นความเสรีเท่ากับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำกว่า ส่วนจะเลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านตรงหรือด้านโค้งขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของชิ้นงานจริง และโดยทั่วไปจะสมมุติให้ความหนาของเอลิเมนต์มีค่าคงตัว แต่อาจจะกำหนดให้ความหนาเป็นฟังก์ชันกับพิกัดก็ได้

3. เอลิเมนต์สามมิติ

เอลิเมนต์สามมิติจะ ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาสามมิติต่างๆ ไป ลักษณะของเอลิเมนต์จะเป็นสี่เหลี่ยมปริซึมและรูปกรวยสามเหลี่ยม เช่นในรูป 3.5 (ก) และ (ข) ตามลำดับ



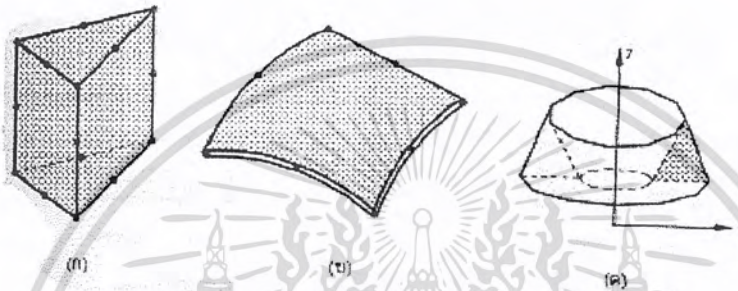
รูปที่ 2.5 เอลิเมนต์สามมิติ (ก) ชนิดปริซึมหรือชนิดทรงหกหน้า

(ข) ชนิดกรวยสามเหลี่ยม หรือชนิดทรงสี่หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

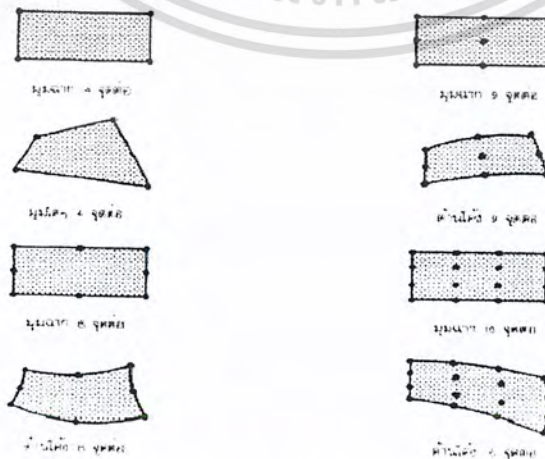
รูป 2.5 (ก) เป็นเอลิเมนต์สามมิติทรง 6 หน้า (hexahedron) ชนิดด้านตรง (linear) 8 จุดต่อ, ชนิดเส้นตรงกำลังสอง (straight-line quadratic) 20 จุดต่อ และชนิดเส้นโค้งกำลังสอง (quadratic with curved faces) 20 จุดต่อ ส่วนรูป 3.5 (ข) เป็นเอลิเมนต์สามมิติทรง 4 หน้า (tetrahedra) ชนิดด้านตรง 4 จุดต่อ ชนิดเส้นตรงกำลังสอง 10 จุดต่อ, และชนิดเส้นโค้งกำลังสอง 10 จุดต่อตามลำดับ

นอกจากเอลิเมนต์สามมิติตามที่กล่าวมาแล้ว ยังมีเอลิเมนต์อีกกลุ่มหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะรูปทรงกระบอก เช่นในรูป 2.5 (ก) ปัญหาในลักษณะแผ่นโค้ง



รูปที่ 2.6 (ก) เอลิเมนต์ทรงกระบอก (ข) เอลิเมนต์แผ่น โลหะ โค้งสองมิติ (ค) เอลิเมนต์กรวยสมมาตรสองมิติ

(shell) เช่นในรูป 2.6 (ข) และเอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหารูปกรวยสมมาตร ซึ่งอาจจะเป็นเอลิเมนต์ชนิดสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมหมุนรอบแกนสมมาตร (360°) เช่นรูป 2.6 (ค) โดยที่ทุกๆ เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจำนวนจุดต่อมากๆ จะให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับค่าแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจำนวนจุดต่อน้อย แต่จะเพิ่มความยุ่งยากในการแก้สมการและใช้เวลาในการคำนวณมาก ตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติ รูป 2.7 ประกอบด้วยจุดต่อ 4 จะให้ผลเฉลยคลาดเคลื่อนมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วย 8 และ 16 จุดต่อเป็นต้น



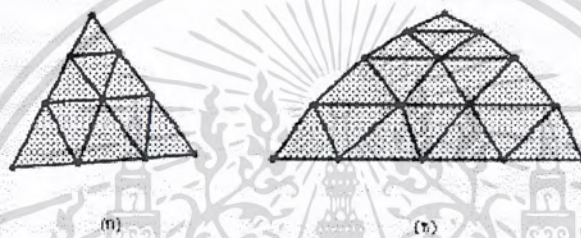
รูปที่ 2.7 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติที่ประกอบด้วยจุดต่อต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไมออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

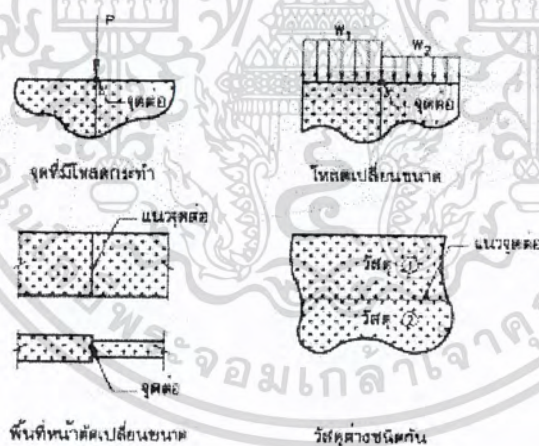
## 2.8 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์

การวิเคราะห์ชิ้นส่วนเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยที่เกี่ยวข้องโยงกันด้วยจุดต่อ เพื่อความสะดวกจะพิจารณาปัญหาสองมิติโดยเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านตรงที่ประกอบสามจุดต่อ เช่น ในรูป 2.8 (ก) ส่วนปัญหาสามมิติก็ใช้หลักการเดียวกัน

การแบ่งชิ้นส่วนอาจจะเริ่มแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมหรือสามเหลี่ยมที่มีขนาดใหญ่ๆ ก่อน แล้วจึงแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยอีกครั้งหนึ่ง ตำแหน่งของจุดต่อ (node) ภายนอกของเอลิเมนต์ย่อยควรจะอยู่ในตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วน หรือตำแหน่งที่มีโหลดกระทำหรือตำแหน่งที่มีการใช้วัสดุต่างกัน ตำแหน่งจุดต่อเหล่านั้นดูได้จากรูป 2.8



รูปที่ 2.8 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม



รูปที่ 2.9 ตำแหน่งของจุดต่อที่สำคัญ

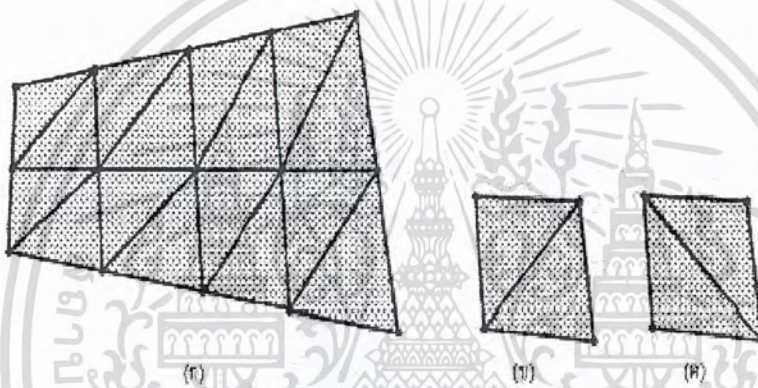
ชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมในรูป 2.8 (ก) ก่อนข้างจะแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยได้ง่าย คือ กำหนดจุดต่อในแต่ละด้านของสามเหลี่ยมให้มีจำนวนเท่ากัน หากเส้นโยงระหว่างจุดต่อจะได้จุดต่อตรงที่เส้นตัดกันเพิ่มขึ้น ตามรูป 2.8 (ก) ชิ้นส่วนจะถูกแบ่งออกเป็น 9 เอลิเมนต์ แต่ละด้านจะมีสี่จุดต่อ ระยะระหว่างจุดต่อของแต่ละด้านของสามเหลี่ยมไม่จำเป็นต้องเท่ากัน ขนาดของเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์จึงมีขนาดแตกต่างกันตามที่ต้องการ ถ้าเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยกัน เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่าจะให้ผลเฉลยที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดีที่สุด แต่ถ้าจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมใดๆ มุมภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมควรจะอยู่ระหว่าง  $30^\circ$  ถึง  $120^\circ$

ในกรณีของชิ้นส่วนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านโค้ง เราอาจใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านตรงแทน เช่น ในรูป 2.8 (ข) ซึ่งทำให้ขนาดของแบบจำลองคลาดเคลื่อนไปเล็กน้อยตามเส้นโค้งปลา ส่วนจำนวนของเอลิเมนต์ทั้งหมดในชิ้นส่วนจะเท่ากับ  $(n-1)^2$ ,  $n$  คือจำนวนจุดต่อของแต่ละด้านของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ต้องการจะแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อย

สำหรับชิ้นส่วนรูปสี่เหลี่ยมในรูป 2.9 (ก) การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยๆ นั้น ทำได้สะดวกคือ กำหนดจุดต่อในแต่ละด้านของสี่เหลี่ยม ลากเส้นระหว่างจุดต่อที่อยู่ตรงข้าม, จุด

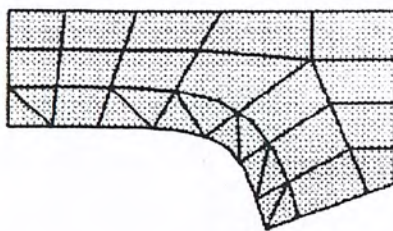


รูปที่ 2.9 การแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ตัดของแต่ละเส้นจะเป็นจุดต่อภายในของชิ้นส่วน และถ้าประสงค์จะแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยๆ ก็ทำได้ โดยลากเส้นทแยงมุมของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม การลากเส้นทแยงมุมนั้นควรเลือกเส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุด เพราะจะทำให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีสัดส่วนใกล้เคียงสามเหลี่ยมด้านเท่ามากขึ้น ดูตัวอย่างในรูป 2.9 (ข) และ (ค) ในกรณีที่เลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม สัดส่วนด้านยาวสุดต่อด้านสั้นสุดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมควรจะทำกับ 1 จึงจะทำให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับค่าแม่นยำมากขึ้น

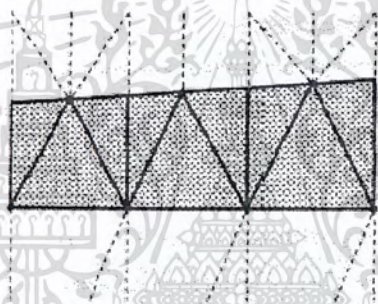
จำนวนจุดต่อบนด้านที่ใกล้กันของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมอาจจะแตกต่างกันแต่จำนวนจุดต่อที่ด้านตรงข้ามจะต้องมีจำนวนเท่ากัน เว้นแต่ต้องการลดหรือขยายขนาดของเอลิเมนต์ระยะระหว่างจุดต่ออาจจะแตกต่างกันทำให้เอลิเมนต์มีขนาดเล็กใหญ่ตามต้องการ จำนวนจุดต่อบนด้านประกอบมุมของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมที่ต้องการแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย

ในรูป 2.9 ระยะระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมจะมีขนาดต่างกัน ทั้งนี้เพื่อให้เอลิเมนต์ในบริเวณที่เป็นส่วนโค้งมีขนาดเล็ก คือ พยายามทำให้แบบจำลองมี



รูปที่ 2.10 การแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยม โค้งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและสามเหลี่ยมย่อย

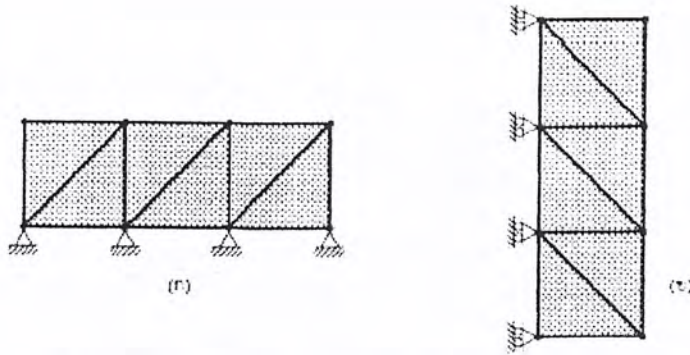
ขนาดใกล้เคียงกับขนาดของชิ้นส่วนจริงมากที่สุด ปกติไม่นิยมแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเท่ากัน และมีรูปร่างเหมือนกันตลอดชิ้นส่วน เพราะบริเวณที่มีความเค้นสูงหรือบริเวณที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิ ควรจะแบ่งให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ส่วนบริเวณที่ไกลออกไปจะแบ่ง



รูปที่ 2.11 การขยายขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ให้มีขนาดโตขึ้น การเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์จะมีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน วิธีที่ง่ายที่สุดของการเปลี่ยนแปลงขนาดของเอลิเมนต์คือ กำหนดให้จำนวนจุดต่อบนด้านตรงข้ามของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้แตกต่างกันเช่น ในรูป 2.11 เป็นต้น

การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง จำเป็นต้องกำหนดลักษณะการเคลื่อนที่ของจุดต่อต่างๆ ด้วย โดยทั่วไปจุดต่อที่ไม่มีมีการเคลื่อนที่จะแทนด้วยการยึดแบบสลัก (pin connection) เช่น ในรูป 3.12 (ก) แต่ถ้าจุดต่อเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวจะแทนด้วย



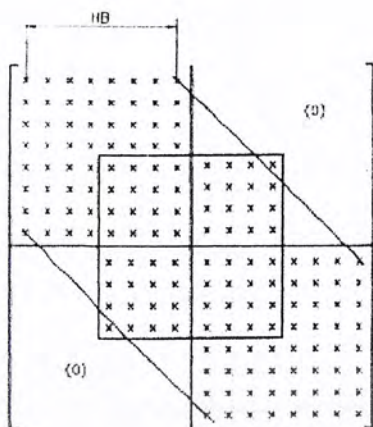
รูปที่ 2.12 การยึดจุดต่อ (ก) ยึดแบบสลัก (ข) ยึดแบบล้อยหมุน

การยึดแบบล้อยหมุน รูป 2.12 (ข) ซึ่งชิ้นส่วนสามารถจะเคลื่อนที่ในแนวตั้งได้ แต่ไม่สามารถเคลื่อนที่ในแนวระดับ ส่วนการที่จะกำหนดให้จุดต่อเคลื่อนที่อย่างไรนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา ซึ่งจะเห็นได้จากบทต่อๆ ไป

ปัญหาบางปัญหาไม่สามารถจะกำหนดเงื่อนไขขอบได้โดยง่าย เช่นการถ่ายเทความร้อน การหมุนตัวของดิน อย่างไรก็ตามวิศวกรได้พยายามจำลองปัญหาดังกล่าว เพื่อคำนวณหาค่าต่างๆ ที่ต้องการให้สอดคล้องกับธรรมชาติของปัญหา

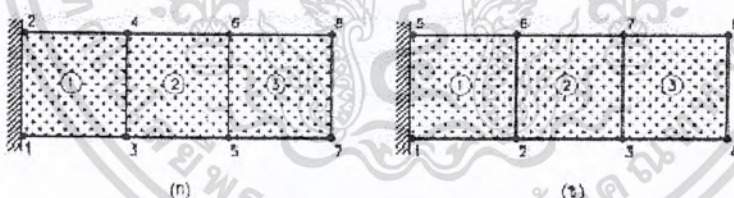
## 2.9 การกำหนดจุดต่อและความกว้างแถบ

โดยทั่วไปการวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนของระบบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะประกอบด้วยสมการเชิงพีชคณิตเป็นจำนวนมาก จำนวนสมการดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับข้อกำหนดตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์ สัมประสิทธิ์ของสมการจะเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ เช่น สทิงเฟนสมเมทริกซ์เป็นต้น สัมประสิทธิ์บางตัวจะมีค่าเท่ากับศูนย์ เพื่อความรวดเร็วในการคำนวณและประหยัดพื้นที่เก็บข้อมูลของคอมพิวเตอร์ เราจะจัดให้สัมประสิทธิ์ของสมการอยู่ในรูปของเมทริกซ์ เช่น ในรูป 2.13 คือความกว้างแถบจะเท่ากับ  $2HB - 1$  ซึ่ง HB คือครึ่งความกว้างแถบ (half bandwidth) ในช่วง HB ค่าสัมประสิทธิ์จะไม่เท่ากับศูนย์ แต่อาจมีบางตัวเท่ากับศูนย์ปนอยู่ด้วย ส่วนช่วงนอกครึ่งความกว้างแถบค่าสัมประสิทธิ์จะเท่ากับศูนย์ทุกตัว สัมประสิทธิ์ช่วงนอก HB นี้ไม่จำเป็นต้องเก็บไว้ในเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณ ถ้าให้ขนาดของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์คือ  $N \times N$  ส่วนที่จำเป็นต้องเก็บไว้ในเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการคำนวณก็คือเมทริกซ์ขนาด  $N \times HB$  เท่านั้น ทั้งนี้เพราะโดยทั่วไปสทิงเฟนสมเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์สมมาตร ซึ่งทำให้ประหยัดเวลาใน



รูปที่ 2.13 ความกว้างแถบของระบบที่มี HB=8

การคำนวณและประหยัดพื้นที่เก็บข้อมูลและยังสามารถจะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีขนาดความจำเล็กลงได้ด้วย ความกว้างครึ่งแถบ HB ดังกล่าวสามารถจะคำนวณได้จาก  $HB = (R + 1) NDOF$ , ซึ่ง R = จำนวนที่แตกต่างกันสูงสุดของจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ และ NDOF คือระดับชั้นความเร็วของแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์ เราจะใช้พื้นที่เก็บข้อมูลในเครื่องคอมพิวเตอร์น้อยสุด ถ้าสามารถหาค่าน้อยสุดของ HB ได้ ซึ่งในระบบที่ซับซ้อน การหาค่าต่ำสุดของ HB ทำได้ยาก แต่อย่างไรก็ตามสำหรับระบบต่างๆ ไป เราสามารถหาค่า HB น้อยสุดได้ เช่น ระบบของคานในรูป 2.14 ที่ประกอบด้วย 3 เอลิเมนต์ การกำหนดจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ดูได้จากรูป 2.14 (ก) และ 2.14 (ข) ถ้าให้แต่ละจุดต่อประกอบด้วย

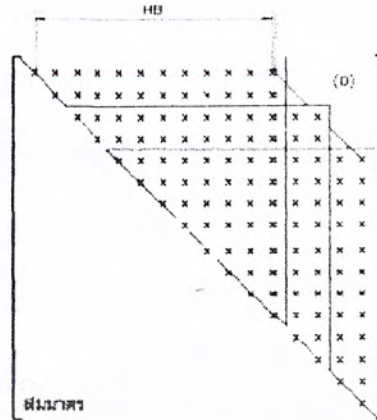


รูปที่ 2.14 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของคานที่ประกอบด้วย 3 เอลิเมนต์ 8 จุดต่อ

สองพิกัดเช่นพิกัด x, y หรือ  $NDOF = 2$ , สำหรับรูป 2.14 (ก)  $R = 4 - 1 = 3$  ดังนั้นครึ่งความกว้างแถบ  $HB = 8$  และหนึ่งเอลิเมนต์จะประกอบ 4 จุดต่อ หรือ 8 ระดับชั้นความเร็ว ฉะนั้นขนาดของสัมประสิทธิ์เมทริกซ์หรือสทิฟเนสเมทริกซ์จะมีขนาด  $8 \times 8$  แต่เนื่องจากคานประกอบด้วยสามเอลิเมนต์ย่อย นั่นคือสทิฟเนสเมทริกซ์ของระบบคานจะมีขนาด  $16 \times 16$

สำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูป 3.14 (ข) การกำหนดจุดต่อจะต่างจากรูป 2.14 (ก) ซึ่ง  $R = 6 - 1 = 5$  และ  $NDOF = 2$  ดังนั้น  $HB = 12$  รูป 2.15 ประกอบคือจะมีสัมประสิทธิ์หรือสทิฟเนสที่เท่ากับศูนย์เพิ่มขึ้นในช่วงของ HB อีก 4 แถว และ 4

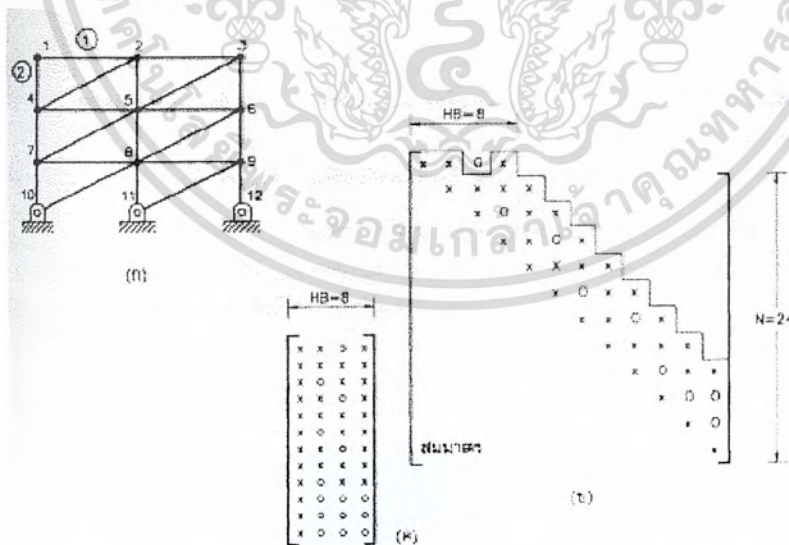
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.15 ความกว้างแถบของคานในรูป 2.12(ข)(HB=12)

คอตมันน์ จากสถิติเนสมทริกซ์ในรูป 3.14 (ก) การคำนวณค่าต่างๆ จึงจำเป็นต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยความจำมากขึ้น ถ้าเปรียบเทียบขนาดความกว้างครึ่งแถบของแบบจำลองไฟไนต์ทั้งสอง ในรูป 2.14 (ก) และ 2.15 (ข) จะเห็นว่าถ้าจัดอันดับการกำหนดตำแหน่งของจุดต่อให้ดี จะสามารถลดพื้นที่เก็บข้อมูลได้เกือบ 30 เปอร์เซ็นต์

สกายไลน์ (skyline) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กำหนดความกว้างครึ่งแถบของสถิติเนสมทริกซ์ กรอบของสกายไลน์จะเริ่มจากสัมประสิทธิ์ตัวแรกที่ไม่เท่ากับศูนย์ของแต่ละคอตมันน์ของสถิติเนสมทริกซ์ ตามวิธีสกายไลน์สัมประสิทธิ์ระหว่างเทอมเส้นทะแยงมุมและแนวสกายไลน์เท่านั้นที่จะเก็บไว้ในเครื่องคอมพิวเตอร์ ดูรูป 2.16 ประกอบ



รูปที่ 2.16 (ก) โครงข้อหมุนประกอบด้วย 12 จุดต่อ(ข) สกานไลน์เมทริกซ์ของโครงข้อหมุน  
(ค) ความกว้างแถบที่ใช้ในการคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูป 2.17 (ก) จุดต่อของเอลิเมนต์ 2 คือ 1 และ 4 แต่ละจุดต่อประกอบด้วย 2 ระดับชั้นความเสถียร ส่วนในรูป 2.17 (ข) คือสทิวเฟนสเทริกซ์รวมของระบบ,  $x$  คือสทิวเฟนสเทอมที่ไม่เท่ากับศูนย์ สทิวเฟนสเทริกซ์ที่จะใช้เป็นข้อมูลในการคำนวณก็คือ ความกว้างแถบตามแนวสกายไลน์ ซึ่งมีขนาด  $8 \times 24$  จากรูป 2.17 (ค) ประกอบ

## 2.10 ฟังก์ชันการกระจัด

ตามที่กล่าวมาแล้ว การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะต้องแบ่งชิ้นส่วนหรือโครงสร้างออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย และจะต้องสมมุติฟังก์ชันการกระจัดโดยประมาณของแต่ละเอลิเมนต์ที่จะประกอบเข้าด้วยกันเป็นโครงสร้างหรือชิ้นส่วนรวมการกระจัดโดยประมาณที่สมมุติขึ้นเรียกว่า ฟังก์ชันการกระจัด (displacement functions) หรือแบบจำลองการกระจัด (displacement models) หรือสนามการกระจัด (displacement fields) หรือรูปแบบการกระจัด (displacement patterns)

ฟังก์ชันการกระจัดที่นิยมใช้กันทั่วไป จะเป็นฟังก์ชันพอลิโนเมียล ในกรณีของปัญหามิติเดียว ฟังก์ชันพอลิโนเมียลคือ

$$u(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_{n+1}x^n \quad (3.5)$$

ซึ่ง  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$  คือสัมประสิทธิ์ของพอลิโนเมียล, ส่วน  $u$  คือการกระจัดในทิศทาง  $x$

ในกรณีของปัญหาสองมิติ ฟังก์ชันพอลิโนเมียลจะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \dots + a_ny^n \\ v(x,y) &= a_{m+1} + a_{m+2}x + a_{m+3}y + a_{m+4}x^2 + a_{m+5}xy + a_{m+6}y^2 + \dots + a_{2m}y^n \end{aligned} \quad (3.6)$$

ซึ่ง  $u$  และ  $v$  คือการกระจัดในทิศทาง  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ,  $a$  คือสัมประสิทธิ์ของพอลิโนเมียล และ

$$m = \sum_{i=1}^{n+1} i$$

ส่วนในกรณีของปัญหาสามมิติ ฟังก์ชันพอลิโนเมียลคือ

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5zx + \dots + a_mz^n \\ v(x, y, z) &= a_{m+1} + a_{m+2}x + a_{m+3}y + a_{m+4}z + a_{m+5}zx + \dots + a_{2m}z^n \\ w(x, y, z) &= a_{2m+1} + a_{2m+2}x + a_{2m+3}y + a_{2m+4}z + a_{2m+5}zx + \dots + a_{3m}z^n \end{aligned} \quad (2.7)$$

ซึ่ง  $u, v$  และ  $w$  คือส่วนประกอบของการกระจัดในทิศทาง  $x, y$  และ  $z$  ตามลำดับ และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$m = \sum_{i=1}^{n+1} i(n+2-i) \tag{2.8}$$

พอลิโนเมียลที่มีหลายเทอมหรือกำลังสูงๆ จะให้การกระจัดที่สมมุติขึ้นมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง แต่การแก้สมการค่อนข้างทำได้ยาก อย่างไรก็ตามการที่จะเลือกใช้ฟังก์ชันพอลิโนเมียลกำลังเท่าใดนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา และความละเอียดของผลเฉลยที่ต้องการ เช่น ในกรณีของปัญหามิติเดียว ฟังก์ชันพอลิโนเมียลกำลังสอง (3 เทอม) จะให้ผลเฉลยดีกว่าฟังก์ชันพอลิโนเมียลเทอมเดียวและสองเทอม รูป 2.17 ประกอบ

การจำลองเอลิเมนต์ด้วยการกระจัด อาจจะแบ่งออกตามกำลังของพอลิโนเมียล ได้สามกลุ่ม คือ กลุ่มเชิงเดียว (simplex) กลุ่มเชิงซ้อน (complex) และกลุ่มเชิงซับซ้อน (multiplex) ;)



รูปที่ 2.17 การสมมติฟังก์ชันการกระจัดสำหรับปัญหามิติเดียว

2.10.1 ฟังก์ชันการกระจัดสำหรับเอลิเมนต์เชิงเดียว

ฟังก์ชันการกระจัดสำหรับเอลิเมนต์เชิงเดียว จะประกอบด้วยพอลิโนเมียลเทอมที่มีค่าคงตัวและเทอมที่เป็นเส้นตรง ส่วนสัมประสิทธิ์ของพอลิโนเมียลจะเท่ากับระดับชั้นความเสรีของระบบ ในกรณีของปัญหามิติเดียว เช่น ท่อน โลหะ, เพลลา, โครงข้อหมุน, โครงข้อแข็ง เป็นต้น เอลิเมนต์เชิงเดียวของปัญหาเหล่านี้จะประกอบด้วยสองจุดต่อภายนอก ซึ่งสามารถจะแทนได้ด้วยพอลิโนเมียลสองเทอมคือเทอมที่เป็นค่าคงตัวและเทอมที่เป็นเชิงเส้นตรงคือ

$$u(x) = a_1 + a_2x \tag{2.9}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีของปัญหาสองมิติ เช่น ปัญหาความเค้นระนาบ, ความเครียดระนาบ และปัญหาวงแหวนแกนสมมาตร (axisymmetric) เอลิเมนต์เชิงเดียวของปัญหาเหล่านี้จะเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยสามจุดต่อที่มุมของสามเหลี่ยม รูป 2.2(ข) แต่ละจุดต่อจะประกอบด้วยการกระจัด  $u$  และ  $v$  ดังนั้นพอลิโนเมียลสำหรับเอลิเมนต์เชิงเดียวสามเหลี่ยมจะประกอบด้วย 6 ระดับขั้นความเสรี

$$\begin{aligned}u(x,y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\v(x,y) &= a_4 + a_5x + a_6y\end{aligned}\quad (2.10)$$

สำหรับกรณีของปัญหาสามมิติ เอลิเมนต์เชิงเดียวก็คือ เอลิเมนต์ชนิดกรวยสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยสี่จุดต่อภายนอก, รูป 2.3 (ข) แต่ละจุดต่อจะประกอบด้วยการกระจัด  $u$ ,  $v$  และ  $w$  ในทิศทาง  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ตามลำดับ ฉะนั้นหนึ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเดียวจึงประกอบด้วย 12 ระดับขั้นความเสรี และฟังก์ชันพอลิโนเมียลสำหรับเอลิเมนต์ดังกล่าวก็คือ

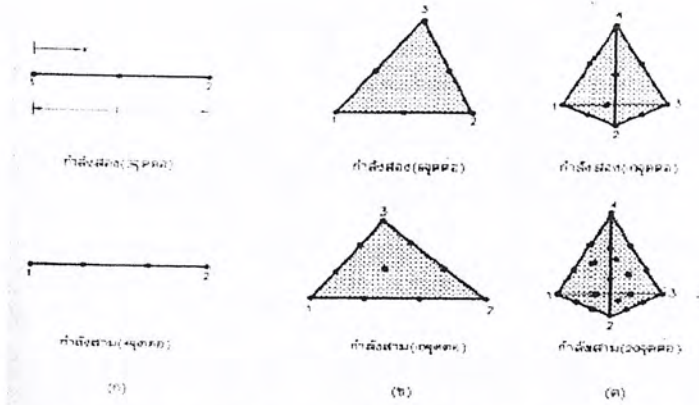
$$\begin{aligned}u(x,y,z) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\v(x,y,z) &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8z \\w(x,y,z) &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z\end{aligned}\quad (2.11)$$

ซึ่งแต่ละฟังก์ชันจะประกอบด้วยเทอมที่เป็นค่าคงที่ และเทอมที่เป็นเชิงเส้นตรง

### 2.10.2 ฟังก์ชันการกระจัดสำหรับเอลิเมนต์เชิงซ้อน

ฟังก์ชันการกระจัดของเอลิเมนต์เชิงซ้อน จะประกอบด้วยพอลิโนเมียลที่มีค่าคงตัว เทอมเชิงเส้น เทอมกำลัง กำลังสาม และเทอมที่มีกำลังสูงกว่านั้นเท่าที่จำเป็น (ขึ้นอยู่กับระดับขั้นความเสรีของเอลิเมนต์และชนิดของเอลิเมนต์) รูปร่างและชนิดของเอลิเมนต์เชิงซ้อนอาจจะเหมือนกับเอลิเมนต์เชิงเดียว แต่จะมีจุดต่อภายในเพิ่มขึ้น ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างเอลิเมนต์เชิงเดียวและเชิงซ้อนก็คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์เชิงซ้อนจะมากกว่ามิติของเอลิเมนต์อย่างน้อย 1 จุดต่อ

ในกรณีปัญหาสามมิติเดียว เอลิเมนต์เชิงซ้อนจะเป็นเอลิเมนต์มิติเดียวที่ประกอบด้วยจุดต่อภายในอย่างน้อย 1 จุดต่อ เช่นรูป 2.18 (ก) จะมีจุดต่อภายในเพิ่มขึ้นอีก 1 จุดหรือ 2 จุด



รูปที่ 2.18 เอลิเมนต์เชิงซ้อน (ก) เอลิเมนต์มิติเดียว (ข) เอลิเมนต์สามเหลี่ยม 2 มิติ  
(ค) เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกรวย 3 มิติ

ดังนั้นฟังก์ชันพอลิโนเมียลสำหรับเอลิเมนต์เชิงซ้อนกำลังสอง (3 จุดต่อ) ในรูป 2.17 (ก) คือ

$$u(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 \quad (2.12)$$

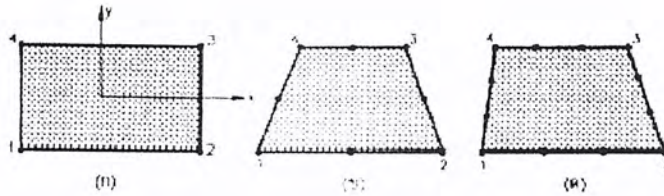
ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ประกอบด้วย 3 ระดับขั้นความเสรี สำหรับปัญหาสองมิติเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงซ้อนกำลังสองและกำลังสาม ดูได้จากรูป 2.18 (ข) และฟังก์ชันพอลิโนเมียลสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงซ้อนกำลังสองคือ

$$\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \\ v(x,y) &= a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ประกอบด้วย 12 ระดับขั้นความเสรี ส่วนรูป 2.17 (ค) เป็นเอลิเมนต์เชิงซ้อนสามเหลี่ยมกรวยกำลังสอง และกำลังสาม ที่ประกอบด้วย 10 จุดต่อ และ 20 จุดต่อตามลำดับ ส่วนฟังก์ชันพอลิโนเมียลของเอลิเมนต์ทั้งสองเขียนได้ในทำนองเดียวกันกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงซ้อนสองมิติ

### 2.10.3 ฟังก์ชันการกระจายสำหรับเอลิเมนต์เชิงซ้อน

ฟังก์ชันการกระจายของเอลิเมนต์เชิงซ้อน (multiplex) จะประกอบด้วยพอลิโนเมียลที่มีกำลังสูงเช่นเดียวกับฟังก์ชันการกระจายของเอลิเมนต์เชิงซ้อน ในหัวข้อ 2.10.3 แต่ของของเอลิเมนต์จะต้องขนานกับแกนของพิกัดรวมของระบบ ทั้งนี้เพื่อให้การกระจายระหว่างขอบของเอลิเมนต์มีความต่อเนื่องกัน ตัวอย่างที่ดีของเอลิเมนต์เชิงซ้อนก็คือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากในรูป 2.18 (ก) ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในกรณีพิเศษที่ประกอบด้วย 4 จุดต่อภายนอก 8 ระดับขั้นความเสรี



รูปที่ 2.19 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติ (ก) เอลิเมนต์เชิงเส้น (ข) เอลิเมนต์กำลังสอง (ค) เอลิเมนต์กำลังสาม

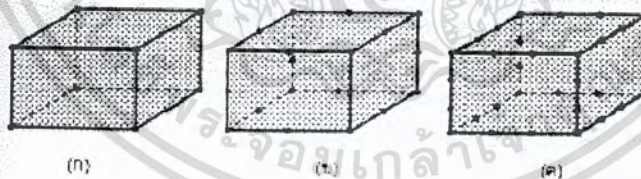
ฟังก์ชันพอลิโนเมียลสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงรับซ้อนเชิงเส้นคือ

$$\begin{aligned}
 u(x,y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\
 v(x,y) &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

เหตุที่เลือกพอลิโนเมียลเทอม  $xy$  แทนที่จะเลือกเทอม  $x^2$  หรือ  $y^2$  ก็เพราะว่าเทอม  $xy$  จะทำให้การกระจายในตัวที่  $x$  หรือ  $y$  มีค่าคงที่แปรตามเชิงเส้น

สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงรับซ้อนกำลังสองและกำลังสามในรูป 2.18 (ข) และ (ค) สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันพอลิโนเมียลที่ประกอบด้วย 8 เทอมที่เป็นฟังก์ชันกับ  $u$ , 8 เทอมที่เป็นฟังก์ชันกับ  $v$  และ 12 เทอมของ  $u$ , 12 เทอมของ  $v$  ตามลำดับ

ส่วนเอลิเมนต์เชิงรับซ้อนที่ใช้กับปัญหาสามมิติจะเป็นชนิดปริซึมในลักษณะเชิงเส้น 8 จุดต่อ, กำลังสอง 20 จุดต่อและกำลังสาม 32 จุดต่อ ตามรูปข้างล่าง



รูปที่ 2.20 เอลิเมนต์ชนิดปริซึม (ก) เอลิเมนต์เชิงเส้น (ข) เอลิเมนต์กำลังสอง (ค) เอลิเมนต์กำลังสาม

ตามที่กล่าวมาแล้ว การเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีกำลังสูง เช่น เอลิเมนต์กำลังสอง, กำลังสาม จะทำให้ผลการวิเคราะห์แม่นยำยิ่งขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณที่คาดว่าจะมีความเข้มของความเค้นสูง การกระจายของความเค้นจะไม่คงที่ จึงจำเป็นต้องเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีกำลังสูงตรงบริเวณดังกล่าว เพื่อลดความยุ่งยากของการอินทิเกรตเชิงตัวเลขและลดเวลาในการอินทิเกรต เราอาจจะใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบผสมระหว่างเอลิเมนต์เชิงเส้นเป็นส่วนใหญ่และเอลิเมนต์เชิงซ้อนหรือเอลิเมนต์เชิงรับซ้อนตรงบริเวณที่จำเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.11 การนำไปสู่ผลเฉลยแม่นยำ

การวิเคราะห์ปัญหาเชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะมีประสิทธิภาพมากน้อยเพียงใดนั้นจะขึ้นอยู่กับการสมมุติฟังก์ชันการกระจัด หรือแบบจำลองการกระจัดของเอลิเมนต์โดยทั่วไปผลเฉลยที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะให้ค่าการกระจัดน้อยกว่าค่าแม่นยำและเพื่อให้มีความมั่นใจว่า ถ้าเราแบ่งโครงสร้างหรือชิ้นส่วนจริงออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ มากขึ้นแล้ว ผลของการวิเคราะห์จะต้องเข้าใกล้หรือนำไปสู่ (converge) ผลเฉลยแม่นยำ, การสมมุติฟังก์ชันการกระจัดในหัวข้อ 2.1 จึงควรมีข้อกำหนดหรือควรมีคุณสมบัติดังนี้

1. ฟังก์ชันการกระจัดจะต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องภายในเอลิเมนต์และการกระจัดระหว่างขอบเอลิเมนต์หรือระหว่างจุดต่อของเอลิเมนต์ที่ติดกันจะต้องมีค่าเท่ากัน ซึ่งฟังก์ชันพอลิโนเมียลจะเป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าต่อเนื่องภายในเอลิเมนต์ตามที่ต้องการ สำหรับความหมายของส่วนที่สองก็คือ การกระจัดของเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกันจะต้องไม่มีช่องว่างหรือซ้อนกัน หรือการกระจัดระหว่างเอลิเมนต์ไม่ต่อเนื่องกัน
  2. ฟังก์ชันการกระจัดจะต้องมีเทอมที่ให้ค่าการกระจัดของวัตถุเกร็ง (rigid body displacement) ของเอลิเมนต์อยู่ด้วย การกระจัดของวัตถุเกร็งจะเป็นการกระจัดในลักษณะการเคลื่อนที่เชิงเส้นตรง (translation) หรือการหมุน (rotation) ก็ได้ ในกรณีของปัญหามิติเดียวและฟังก์ชันการกระจัดเขียนอยู่ในรูปของพอลิโนเมียล เช่นสมการ (2.9) เทอมที่ให้ค่าการกระจัดของวัตถุเกร็งก็คือ  $a_1$  เป็นต้น
  3. ฟังก์ชันการกระจัด จะต้องมีเทอมที่ให้ค่าความเครียดคงที่ (constant strain states) ของเอลิเมนต์อยู่ด้วย ทั้งนี้เพราะว่าถ้าเราแบ่งชิ้นส่วนหรือ โครงสร้างออกเป็นเอลิเมนต์เล็กมากๆ ค่าของความเครียดจะมีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ และในกรณีของปัญหาสองมิติ ถ้าสมมุติให้ฟังก์ชันการกระจัดเป็นฟังก์ชันพอลิโนเมียลตามสมการ (2.10) เทอมที่จะให้ค่าความเครียด  $\epsilon_x, \epsilon_y$  คงที่ก็คือ เทอมที่มีสัมประสิทธิ์เป็น  $a_2$  และ  $a_6$  ตามลำดับ
- ในกรณีที่ฟังก์ชันการกระจัดของเอลิเมนต์เป็นไปตามข้อกำหนด 1 เราจะเรียกว่าเอลิเมนต์ที่เข้ากันได้หรือเอลิเมนต์ที่ตรงรอยกัน (compatible or conforming elements) ส่วนฟังก์ชันการกระจัดของเอลิเมนต์ที่เป็นไปตามข้อกำหนด 2 และ 3 เราจะเรียกว่า เอลิเมนต์บริบูรณ์ (complete)

## 2.12 ข้อเสนอแนะสำหรับการจำลองแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เราจำเป็นต้องกำหนดแบบจำลองให้เหมือนกับรูปร่างลักษณะเดิมของปัญหาให้มากที่สุด อย่างไรก็ตามข้อเสนอแนะต่อไปนี้จะช่วยให้การกำหนดแบบจำลองมีประสิทธิภาพสูงขึ้นหรือให้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำ หรือทำให้เชื่อมั่นได้ว่าผลการคำนวณมีความเป็นไปได้ตามสภาพการใช้งานจริงของชิ้นส่วนนั้น (ในกรณีที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำมาเปรียบเทียบได้) ข้อเสนอแนะดังกล่าวคือ

1. ในกรณีที่แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างกัน ความแตกต่างของขนาด (โดยปริมาตร) ของเอลิเมนต์ที่ติดอยู่กันไม่ควรเกินสามเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. พยายามใช้เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างหรือสัดส่วนของรูปร่างธรรมดาๆ ให้มากที่สุดคือพยายามทำให้สัดส่วนของรูปร่างเอลิเมนต์ ด้านยาวสุดต่อด้านสั้นสุดไม่เกิน 10 : 1 เอลิเมนต์ที่มีสัดส่วนดังกล่าวใกล้เคียงกันจะให้ผลเฉลยแม่นยำขึ้น ส่วนมุมภายในเอลิเมนต์ เช่นกรณีของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม มุมไม่ควรเกิน  $150^\circ$  และไม่ควรน้อยกว่า  $30^\circ$  และจุดต่อภายในของด้านของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม (ในกรณีที่จำเป็นต้องกำหนดจุดต่อภายใน) ควรอยู่ในตำแหน่งที่ไม่น้อยกว่า  $1/3$  ของด้านของสี่เหลี่ยม

3. การเลือกใช้เอลิเมนต์ต้องพยายามให้มีการต่อเนื่องของการกระจัดระหว่างเอลิเมนต์ อาทิเช่นไม่ควรเชื่อมต่อเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสองซึ่งประกอบด้วย 8 จุดต่อ เข้ากับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย 4 จุดต่อ 2 เอลิเมนต์ ตามรูป 2.21 (ก) เพราะขณะยึด/หดตัวจะเกิดช่องว่างระหว่างเอลิเมนต์ขึ้น เช่น รูป 2.21 (ข) ทั้งนี้เพราะการกระจัดของเอลิเมนต์ สี่เหลี่ยมกำลังสองและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น, จำลองมาจากฟังก์ชันการกระจัดที่มีกำลังต่างกัน



รูปที่ 2.21 การประกอบเอลิเมนต์ที่มีต่อเนื่อง (ก) ก่อนการยึดตัว

(ข) ขณะยึดตัวหรือหดตัวจะเกิดช่องว่างขึ้น

4. ใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กๆ ตรงบริเวณที่มีความแตกต่างของความเค้นสูง เช่น ตรงบริเวณที่คาดว่าความเค้นจะมีความเข้มข้นสูง ส่วนบริเวณที่มีความแตกต่างของความเค้นต่ำ ควรใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น

5. การกำหนดหมายเลขจุดต่อของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ต้องพยายามให้ความกว้างแถบหรือครึ่งความกว้างแถบมีค่าน้อยสุด

6. พยายามใช้ประโยชน์จากการสมมาตรของรูปร่าง โครงสร้างหรือชิ้นส่วนและการสมมาตรของโหลด เพื่อให้ได้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กที่สุด

7. การกำหนดเงื่อนไขขอบและหรือเงื่อนไขบังคับของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ จะต้องคำนึงถึงสภาพความเป็นจริงของปัญหา

### 2.13 หลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุด

การหาสทิตพีเนสมเมทริกซ์ของเอลิเมนต์หรือสทิตพีเนสมเมทริกซ์ของระบบรวม จะใช้วิธีสมมูล โดยตรงกับปัญหาต่างๆ ไป เช่น ปัญหาของท่อนโลหะของเพลลาและของคาน ส่วนปัญหาที่ซับซ้อน จำเป็นจะต้องอาศัยหลักของงานหรือพลังงาน เช่น ใช้หลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุด หลักการของงาน สมมุติ และวิธีการกาลเลอร์คิน เป็นต้น สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงหลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุด เพื่อจะได้นำไปประยุกต์ใช้หาสทิตพีเนสมเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ที่ซับซ้อน ในปัญหาต่างๆ เช่น ความเค้น - ความเครียดครณะน, การโค้งงอของแผ่นโลหะและปัญหาสามมิติในกลศาสตร์ของแข็ง เป็นต้น

เนื่องจากหลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุดนั้น จะใช้หาสทิตพีเนสมเมทริกซ์ได้เฉพาะปัญหาของวัสดุ ยืดหยุ่นเชิงเส้นเท่านั้น หลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุดนั้น กล่าวว่า “ถ้าการกระจัดของระบบสอดคล้อง กับเงื่อนไขการต่อเนื่อง (continuity) และเงื่อนไขขอบ (boundary) ของระบบ และระบบอยู่ในสภาพ สมดุลเสถียร (stable equilibrium) แล้ว พลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นย่อมมีค่าน้อยที่สุด” เนื่องจากพลังงาน ศักย์รวม  $\Pi$  ของวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นก็คือ ผลรวมของพลังงานความเครียด  $U$  และพลังงานศักย์จากแรง ภายนอกหรืองานจากแรงภายนอก  $W$  นั่นคือ

$$\Pi = U + W \quad (2.15)$$

ในกรณีของแท่งโลหะซึ่งมีโหนดกระทำทิศทางเดียว เช่น ทิศทาง  $x$  ตามรูป 2.22 พลังงาน ความเครียดที่เกิดขึ้นที่ท่อน โลหะก็คือ งานที่เกิดจากแรงภายในที่ทำให้ท่อนโลหะเปลี่ยนรูปร่าง ถ้าให้  $\sigma_x$  คือความเค้นในทิศทาง  $x$  ที่เกิดขึ้นในท่อนโลหะ ดังนั้นแรงภายในจะเท่ากับ



รูปที่ 2.22 ท่อนโลหะภายใต้การกระทำของโหนดในทิศทาง  $x$

$\sigma_x (\Delta y)(\Delta z)$  และทำให้เกิดการกระจัดในค่าน  $x$  เท่ากับ  $\Delta x(\epsilon_x)$  และการกระจัดที่ค่าน  $x + dx$  จะเท่ากับ  $\Delta x(\epsilon_x + d\epsilon_x)$  ฉะนั้นการกระจัดที่เปลี่ยนแปลงไปก็คือ  $\Delta x d\epsilon_x$  ซึ่ง  $d\epsilon_x$  คือการเปลี่ยนแปลงของ ความเครียดที่เกิดขึ้นในส่วนของความยาว  $\Delta x$  ดังนั้นงานเนื่องจากแรงภายในหรือพลังงานความเครียด  $dU$  ก็คือผลคูณของแรงภายในและการกระจัดที่เกิดขึ้นนั่นคือ

$$dU = \sigma_x (\Delta y)(\Delta z)(\Delta x)d\epsilon_x \quad (2.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้  $(\Delta y)(\Delta z)(\Delta x) = dV =$  ปริมาตรที่มีค่าน้อย และพลังงานความเครียดรวมตลอดความยาวของท่อนโลหะคือ

$$U = \int_V \left[ \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x \right] dV \quad (2.17)$$

สำหรับวัสดุที่เป็นไปตามกฎของฮุก,  $\sigma_x = E\epsilon_x$  ดังนั้น

$$U = \int_V \left[ \int_0^{\epsilon_x} E\epsilon_x d\epsilon_x \right] dV = \frac{1}{2} \int_V (E\epsilon_x^2) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV \quad (2.18)$$

สมการ (3.17) คือสมการของพลังงานความเครียดของปัญหามิติเดียว ส่วนพลังงานศักย์จากแรงภายนอก จะมีเครื่องหมายตรงข้ามกับงานภายนอกทั้งนี้เพราะพลังงานศักย์จากแรงภายนอกก็คือ งานที่สูญเสียไปจากแรงภายนอกซึ่งเขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้

$$W = - \int_V X_b u dV - \int_S T_x u dS - \sum_{i=1}^M f_{ix} d_{ix} \quad (2.19)$$

$X_b$  ในเทอมแรกของสมการ (2.18) คือแรงเนื่องจากมวลของท่อนโลหะ ซึ่งมีหน่วยเป็นแรงต่อปริมาตร,  $T_x$  ในเทอมที่สองคือ โหลดที่ผิวหรือแรงตึงผิว มีหน่วยเป็นแรงต่อพื้นที่ และ  $f_{ix}$  คือแรงกระทำที่จุดต่อที่ปลาย (ดูรูป 2.23) ในทิศทาง  $x$ ,  $u$  คือการกระจัดในทิศทาง  $x$  ส่วน  $V$  คือ ปริมาตรของท่อนโลหะ และ  $S$  คือพื้นที่ผิวที่สัมผัสกับโหลด  $T_x$ , และ  $d_{ix}$  คือการกระจัดที่จุดต่อที่แรง  $f_{ix}$  กระทำ



รูปที่ 2.23 แรงกระทำบนท่อนโลหะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (2.16) และ (2.18) พลังงานศักย์รวม II คือ

$$II = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV - \int_V X_b u dV - \int_S T_x u dS - \sum_{i=1}^M f_{ix} d_{ix} \quad (2.20)$$

เพื่อที่จะหาค่าพลังงานศักย์รวมต่ำสุด เราจะให้อนุพันธ์ย่อยของพลังงานศักย์รวม II เทียบกับ  $d_{ix}$  มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\frac{\partial II}{\partial d_{ix}} = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.21)$$

ซึ่งสมการ (2.16) จะประกอบด้วย  $n$  สมการ ในเทอมของค่า  $d_i$  ซึ่งเป็นตัวกำหนดการสมมูลย์สถิตของท่อนโลหะหรือโครงสร้าง การประยุกต์ใช้หลักของพลังงานศักย์รวมต่ำสุดกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อจะหาสมการสมมูลของไฟไนต์เอลิเมนต์ และหาค่าสทิตเนสเมทริกซ์ของระบบดูได้จากบทที่ 3, 4 และ 5 เป็นต้น

## 2.14 วิธีของกาเลอร์กิน

วิธีของกาเลอร์กินเป็นอีกวิธีหนึ่งที่นิยมใช้หาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งจะนิยมใช้หาสมการของระบบที่ไม่ใช่โครงสร้าง เช่น ระบบการถ่ายเทความร้อน การไหลของของไหล เป็นต้น วิธีของกาเลอร์กินนั้นจะใช้เวทเรชิดิวที่เหมาะสมซึ่งอาจจะเป็นฟังก์ชัน โดยประมาณของตัวแปรอิสระ เช่น การกระจัดหรืออุณหภูมิ คูณเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบ โดยทิ้งไปฟังก์ชันโดยประมาณจะไม่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์จึงทำให้มีเรชิดิว  $R$  หรือเศษเหลือขึ้น ตัวอย่างเช่น ถ้าให้สมการของระบบ

$$\int R dV = \text{ค่าน้อยสุด} \quad (2.22)$$

หลักการของวิธีก็คือ ทำอย่างไรจะให้เศษเหลือมีค่าน้อยสุด เช่น ถ้าสมมุติให้เวทฟังก์ชัน  $W$  ทำให้เศษเหลือเท่ากับศูนย์ สมการต่างๆ ไปของเวทเรชิดิวก็คือ

$$\int_V R W dV = 0 \quad (2.23)$$

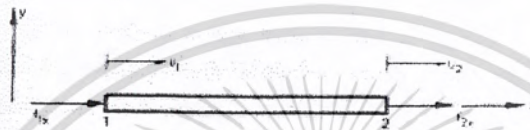
ในกรณีของกาเลอร์กินนั้น เราจะให้เวทเรชิดิวเป็นฟังก์ชันประมาณภายใน (interpolation functions) หรือฟังก์ชันรูปร่าง (shape functions) ของเอลิเมนต์ เช่น ค่า  $N_i$  เป็นฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นตัวแปรอิสระของสมการเชิงอนุพันธ์ (โดยทิ้งไปถ้าแทน  $N_i$  ลงในสมการแล้ว เรชิดิว  $R$  จะไม่เท่ากับศูนย์) ดังนั้นสมการ (2.22) เขียนใหม่ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_V RN_i dV = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.24)$$

สมการ (2.19) จะประกอบด้วย  $n$  สมการ โดยที่ไม่ต้องระบุหรือกำหนดเงื่อนไขขอบ แต่หลังจากอินทิเกรตสมการ (2.23) จะต้องระบุเงื่อนไขขอบตามลักษณะของปัญหา

ในกรณีของท่อน โลหะรับแรงตามแนวแกน  $x$ , เช่น  $f_{1x}$ ,  $f_{2x}$  และ  $u_1$ ,  $u_2$  คือการกระจัดในทิศทาง  $x$  ที่จุดต่อ 1 และ 2 ค่าวัสดุเป็นไปตามกฎของฮุก,  $\sigma_x = E\epsilon_x$  และ



รูปที่ 2.24 ท่อน โลหะรับแรงตามแนวแกน

เพราะว่า  $\epsilon_x = du/dx$  ดังนั้น  $\sigma_x = E du/dx$  ถ้าคานอยู่ในสภาพสมดุลผลรวมของแรงภายในจะเท่ากับค่าคงที่หรือ  $A\sigma_x = \text{ค่าคงที่}$  ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}(A\sigma_x) = 0 \quad (2.25)$$

$A$  คือ พื้นที่หน้าตัดของท่อน โลหะ สมการเชิงอนุพันธ์ของท่อน โลหะในรูป 2.23 คือ

$$\frac{d}{dx}\left(AE \frac{du}{dx}\right) = 0 \quad (2.26)$$

ถ้าพิจารณาสมการ (2.21), (2.22) และสมการ (2.25) จะเห็นว่า

$$R = \frac{d}{dx}\left(AE \frac{du}{dx}\right)$$

ดังนั้นสมการกาลเลอร์กิน (2.19) ของท่อน โลหะเขียนได้ดังนี้

$$\int_0^L \frac{d}{dx}\left(AE \frac{du}{dx}\right) N_i dx = 0 \quad (2.27)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 3 ทฤษฎีความล้า

เมื่อวัตถุได้รับภาวะที่มีความเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาภาระดังกล่าวนี้จะทำให้เกิดความเค้นที่มีขนาดเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาด้วยการเปลี่ยนแปลงขนาดของความเค้นไปตามเวลานี้สามารถก่อให้เกิดความเสียหายในระดับจุลภาคของวัสดุได้แม้ว่าขนาดของความเค้นที่เกิดขึ้นนั้น จะมีค่าต่ำกว่าความต้านแรงดึง(ultimate strength) ของวัสดุค่อนข้างมากก็ตาม ความเสียหายที่เกิดขึ้นในระดับจุลภาค(microscopic level) นี้จะสะสมเรื่อยไปที่ละน้อยจนเกิดเป็นความเสียหายในระดับมหภาค(macrosopic level) ปรากฏเป็นรอยร้าว(crack) ซึ่งหากชิ้นส่วนยังคงอยู่ภายใต้ภาระเปลี่ยนแปลงต่อไปรอยร้าวจะมีการเติบโตจนกระทั่งชิ้นส่วนเกิดความเสียหายในท้ายที่สุด เราเรียกกระบวนการการสะสมความเสียหายนี้ว่า “ความล้า(fatigue)”

### 3.1 กลไกความเสียหายเนื่องจากความล้า

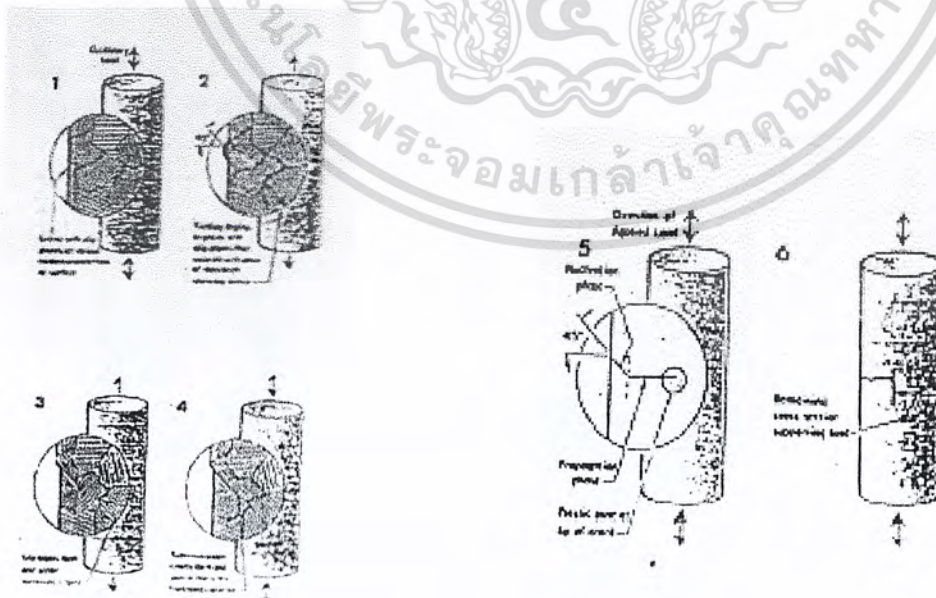
แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

2.1.1 ขั้นตอนการกำเนิดรอยร้าว (crack initiation stage)

2.1.2 ขั้นตอนการเติบโตของรอยร้าว (crack propagation stage)

2.1.3 ขั้นตอนการเติบโตของรอยร้าวอย่างไม่เสถียร (unstable crack propagation stage)

เพื่อให้เข้าใจขั้นตอนทั้ง 3 ขั้น ได้ดียิ่งขึ้น เราจะพิจารณารูปต่อไปนี้พร้อมไปกับคำอธิบายประกอบ



รูปที่ 3.1 แสดงขั้นตอนต่างๆ ของความเสียหายเนื่องจากความล้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น มิใช่เพื่อให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- ก) แสดงชิ้นส่วนที่รับภาระเปลี่ยนแปลงแนวแกน(axial loading) ซึ่งมีค่าความเค้นสูงสุดน้อยกว่าความต้านแรงดึงของวัสดุ ภาพตัดขวางแสดง โครงสร้างจุลภาคของโลหะที่บริเวณใกล้ๆ กับขอบ ซึ่งเราสมมุติให้เกิดความเสียหายเนื่องจากความล้าขึ้น ณ จุดนี้เส้นแรงเงาแทนทิศการวางตัวของระนาบของอะตอมภายในเกรน เราเรียกพื้นที่ระหว่างอะตอมในระนาบติดกันที่อ่อนแอที่สุดว่าระนาบ ไถล(slip plane)
- ข) แสดงให้เห็นว่าเมื่อ slip plane อยู่แนวเดียวกับทิศทางที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุด(45 องศา กับแนวแรงในกรณีนี้) จะถูกทำให้เสียหายก่อน โดยในตอนต้นระนาบเหล่านี้จะเกิดการครากเล็กน้อย และเกรนที่แข็งแรงกว่ารอบๆ จะบีบบังคับให้เกิดการครากในเกรนที่อ่อนแอ ในทิศทางของ slip plane ต่อไปเรื่อยๆ ในแต่ละรอบการกระทำของภาระ
- ค) ขณะที่ภาระเปลี่ยนแปลงการทำต่อไปจะเกิด slip plane เพิ่มขึ้นในเกรนที่อ่อนแออื่นๆ นอกจากนี้เกรนที่อ่อนแอเหล่านั้นจะเกิด strain hardening ทำให้มีความแข็งแรงเพิ่มขึ้น
- ง) เมื่อถึงจุดๆ หนึ่งวัสดุในเกรนที่อ่อนแอจะแข็งแรงพอที่จะก่อให้เกิดรอยร้าวขนาดเล็กขึ้น ซึ่งจะต่อเนื่องเป็นรอยร้าวขนาดใหญ่ขึ้น ซึ่งถือว่าเป็นการสิ้นสุดขั้นตอนการกำเนิดรอยร้าว
- จ) ในช่วงการกำเนิดรอยร้าว นั้น รอยร้าวขนาดเล็กจะมาต่อเชื่อมกันในแนวของความเค้นเฉือนสูงสุด แต่เมื่อเข้าสู่ช่วงการขยายตัวของรอยร้าว รอยร้าวจะเติบโตในทิศทางตั้งฉากกับภาระที่มากกระทำในขั้นตอนนี้ รอยร้าวจะเติบโตเนื่องจากปลายรอยร้าวอยู่ภายใต้ความเค้นสูง
- ฉ) ในขั้นตอนนี้รอยร้าวจะเติบโตผ่านหน้าตัดของชิ้นงานส่วนมากขึ้นจนกระทั่งเหลือพื้นที่น้อยเกินกว่าที่จะรองรับภาระที่มากกระทำทำให้ชิ้นส่วนเกิดการเสียหาย เนื่องจากเกิดความเค้นเกินพิกัด

### 3.2 ภาระเปลี่ยนแปลงแบบแอมพลิจูดคงที่

ภาระกระทำเป็นรอบแบบแอมพลิจูดคงที่( constant amplitude loading ) หมายถึง ภาระเป็นรอบที่มีขนาดของภาระสูงสุด และขนาดของภาระต่ำสุดคงที่ตลอดระยะเวลาที่ภาระกระทำ

พิสัยความเค้น( stress range ) เป็นผลต่างระหว่างค่าความเค้นสูงสุด และต่ำสุดเขียนแทนด้วย

$$\Delta\sigma$$

ความเค้นเฉลี่ย( mean stress ) เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความเค้นสูงสุด และต่ำสุด เขียน แทนด้วย  $\sigma_m$

แอมพลิจูดความเค้น(stress amplitude) เป็นค่าครึ่งหนึ่งของพิสัยความเค้น เขียนแทนด้วย  $\sigma_a$

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (3.1)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (3.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2} \quad (3.3)$$

R คือ อัตราส่วนความเค้น (stress ratio)

A คือ อัตราส่วนแอมพลิจูด (amplitude ratio)

$$R = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (3.4)$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} \quad (3.5)$$

จากนิยามที่กำหนดเราสามารถหาความสัมพันธ์ได้ดังนี้

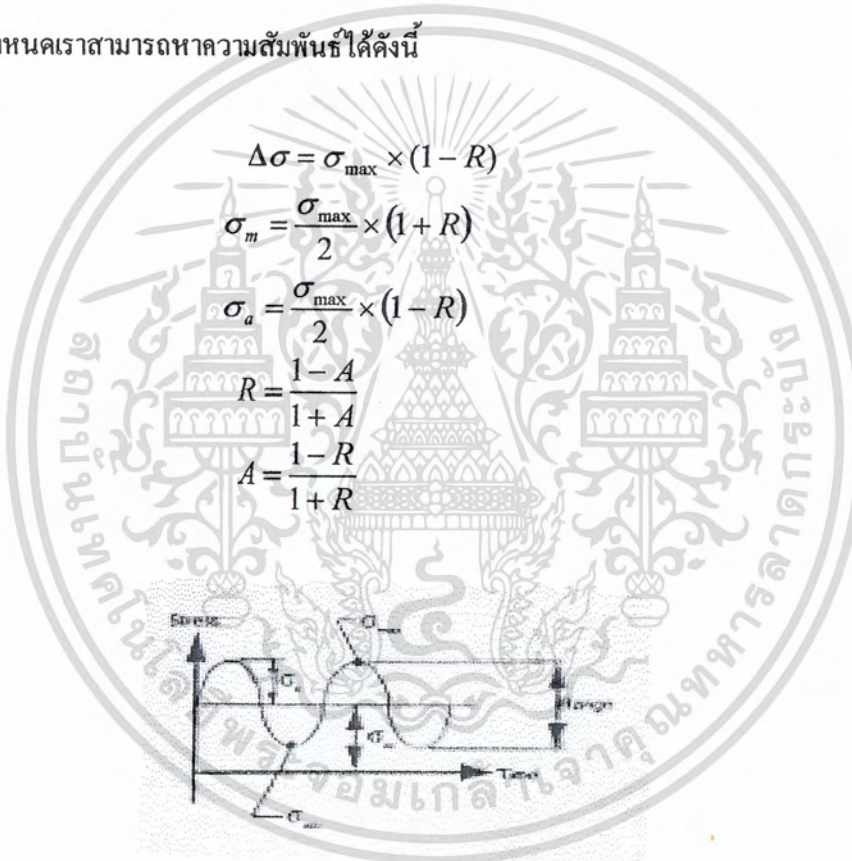
$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} \times (1 - R) \quad (3.6)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max}}{2} \times (1 + R) \quad (3.7)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2} \times (1 - R) \quad (3.8)$$

$$R = \frac{1 - A}{1 + A} \quad (3.9)$$

$$A = \frac{1 - R}{1 + R} \quad (3.10)$$



รูปที่ 3.2 แสดงคำนิยามต่างๆ ของการเปลี่ยนแปลงแบบแอมพลิจูดคงที่

### 3.3 การเปลี่ยนแปลงแอมพลิจูดไม่คงที่

การเปลี่ยนแปลงแบบแอมพลิจูดไม่คงที่ (variable amplitude loading) คือ การเปลี่ยนแปลงขนาดของภาระสูงสุดและต่ำสุดเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงเวลาที่ภาระกระทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.4 ขอบเขตของปัญหาความล้า

เราสามารถจำแนกปัญหาความล้า โดยอาศัยจำนวนรอบของภาระที่กระทำต่อชิ้นส่วน จนกระทั่ง ชิ้นส่วนเกิดความเสียหายเป็นเกณฑ์ออกได้เป็น 2 ช่วง คือ

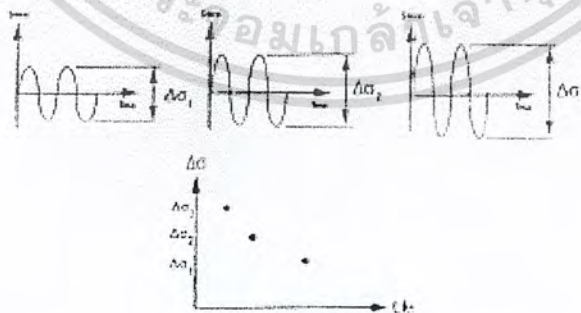
#### 3.4.1 Low-cycle fatigue (LCF)

#### 3.4.2 High-cycle fatigue(HCF)

ปัญหาความล้าในช่วงของ LCF จะหมายถึง ปัญหาที่อายุความล้า หรือจำนวนรอบของภาระที่กระทำต่อชิ้นส่วนจนกระทั่ง เสียหายนี้น้อยซึ่งหมายความว่า ขนาดของภาระที่มากระทำจะต้องมีค่ามาก ดังนั้นปัญหาความล้าในช่วงของ LCF จะเกี่ยวกับการคราก (yielding) ของวัสดุและแนวทางที่เหมาะสม ในการเข้าถึงปัญหาคือ แนวทางของความเครียด ในทางตรงกันข้ามปัญหาความล้าในช่วงของ HCF จะถือว่าพฤติกรรมของวัสดุอยู่ในช่วงยืดหยุ่น(elastic region) และแนวทาง ในการเข้าถึงปัญหาที่เหมาะสมก็คือ แนวทางของความเค้นซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป สำหรับอายุความล้าที่แบ่งกันระหว่าง LCF และ HCF นั้น ไม่สามารถจะระบุลงไปได้อย่างชัดเจน แต่ในที่นี้จะถือว่าอายุความล้าที่แบ่งขอบเขตระหว่าง LCF และ HCF มีค่าเท่ากับ 1,000 รอบ

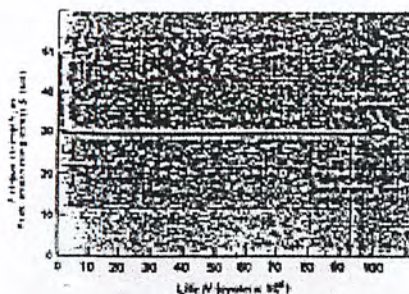
### 3.5 เส้นกราฟความเค้น-อายุความล้า

พื้นฐานสำคัญของการเข้าถึงปัญหาความล้าโดยแนวทางของความเค้นนั่นก็คือ เส้นกราฟความเค้น-อายุความล้า(Stress-life curve : S-N curve ) การสร้างเส้นกราฟดังกล่าวทำได้โดยนำชิ้นงานทดลอง ไปทดสอบ ณ สภาวะทดสอบที่มีค่าความเค้นเฉลี่ยเป็นศูนย์ แต่มีค่าความเค้นส่วนเปลี่ยนแปลงๆกัน จดบันทึกจำนวนรอบตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งเสียหายเช่นนี้เรื่อยไป โดยทั่วไปแล้ว เส้นกราฟดังกล่าวจะมีแกนตั้งเป็น“ความเค้นส่วนเปลี่ยนแปลง (alternating stress)” และแกนนอนเป็น“อายุความล้า (fatigue life)”



รูปที่ 3.3 แสดงลักษณะของสภาวะทดสอบที่ใช้สร้างเส้นกราฟความเค้น-อายุ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ก) พล็อตบนสเกลแบบเชิงเส้น



ข) พล็อตบนสเกลแบบ semi-log



ค) พล็อตบนสเกลแบบ log-log

รูปที่ 3.4 แสดงเส้นกราฟความเค้น-อายุการล้าจากการทดสอบที่พล็อตบนสเกลแบบต่าง ๆ

สเกลของแกนตั้ง และแกนนอนของเส้นกราฟความเค้น-อายุเป็นได้ทั้งแบบเชิงเส้นหรือแบบล็อก แต่ถ้าพิจารณารูป(3.4ก)จะพบว่าเมื่อขนาดของความเค้นส่วนเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้น จำนวนรอบจนกระทั่งเสียหาย จะลดลงอย่างรวดเร็วจนไม่สามารถเห็นบริเวณช่วงต้นกราฟได้ชัดเจน ด้วยเหตุนี้เองที่ทำให้เส้นกราฟ S-N นิยมพล็อตบนสเกลแบบ semi-log หรือแบบ log-log

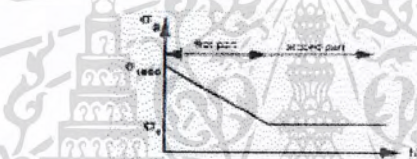
จากรูป (3.4) จะเห็นว่าเส้นกราฟความเค้น-อายุนั้น สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ช่วง ช่วงแรกมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลด กล่าวคือเมื่อความเค้นส่วนเปลี่ยนแปลงมีค่าลดลงอายุความล้าจะมีค่าเพิ่มขึ้น หรือในทางตรงกันข้าม เมื่อความเค้นเพิ่มขึ้นอายุความล้าจะลดลง และในช่วงที่สองจะเป็นเส้นตรงราบที่มีค่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แกนตั้ง (ความเค้นส่วนเปลี่ยนแปลง) คงที่ และเราเรียกค่าคงที่ดังกล่าวนี้ว่า “ขีดจำกัดความทนทาน (endurance limit)” หรือ “ขีดจำกัดความล้า (fatigue limit)” ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\sigma_e$  บริเวณทั้งสองนั้นถูกแบ่งด้วยจุดที่เรียกว่า “knee point” สำหรับจุดใด ๆ ที่มีอายุความล้าจำกัด ( $N < 10^6$  รอบ) ค่า  $\sigma_a$  สามารถเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า “Fatigue strength”

สิ่งที่ได้กล่าวไว้ตอนต้นว่า แนวทางของความเค้นนั้นเหมาะสมกับปัญหา HCF ทำให้แกนราบ(อายุความล้า) มิได้มีจุดเริ่มต้นที่อายุความล้าเท่ากับศูนย์ แต่จะเริ่มต้นที่ค่า  $N_1$  แทน ในที่นี้ จะกำหนดให้  $N_1$  เท่ากับ 1,000 รอบ และแทนความเค้นส่วนเปลี่ยนแปลงที่อายุความล้า  $N_1$  ด้วยสัญลักษณ์  $\sigma_{1000}$  โดยที่ค่า  $\sigma_{1000}$  นี้สามารถประมาณได้จากค่าความต้านแรงดึงของวัสดุ ซึ่งจะกล่าวถึงในตอนถัดไป สำหรับค่า  $N_2$  ซึ่งเป็นจุดที่เกิดการหักมุมจะแตกต่างกันไปตามชนิดของวัสดุ แต่โดยปกติแล้วเรานิยมใช้ค่า  $N_2$  เท่ากับ  $10^6$  รอบ

ในกรณีวัสดุที่ไม่มี Knee point เช่น อลูมิเนียม นั้น ในที่นี้จะถือว่าวัสดุนั้นมีค่าขีดจำกัดความทนทานเท่ากับความเค้นส่วนเปลี่ยนแปลง ณ อายุความล้า  $N_2$  เท่ากับ  $5 \times 10^6$  รอบ



รูปที่ 3.5 แสดงลักษณะทั่วไปของเส้นกราฟความเค้น-อายุและตัวแปรที่เกี่ยวข้อง

ถ้าเส้นกราฟความเค้น-อายุ ความล้าในช่วง  $N_1 < N < N_2$  สามารถประมาณได้เป็นเส้นตรงบนสเกลแบบ semi-log สมการที่ใช้แทนจุดข้อมูลด้านซ้ายมือของ Knee point จะอยู่ในรูป

$$\sigma_a = C + D \cdot \log(N) \quad (3.11)$$

แต่ถ้าจุดข้อมูลในช่วงเดิมสามารถประมาณได้เป็นเส้นตรงบนสเกลแบบ log-log แล้วสมการที่ใช้แทนจะข้อมูลด้านซ้ายมือของ Knee point จะอยู่ในรูป

$$\sigma_a = A(N)^B \quad (3.12)$$

สำหรับกรณีที่  $N_1 = 1000$  รอบ และ  $N_2 = 10^6$  รอบ ค่าคงตัว A และ B จะหาได้จาก

$$A = 10^{\log\left(\frac{\sigma_{1000}^2}{\sigma_e}\right)} \quad (3.13)$$

และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$B = -\frac{1}{3} \cdot \log\left(\frac{\sigma_{1000}}{\sigma_e}\right) \quad (3.14)$$

### 3.6 ปัจจัยที่มีผลต่อพฤติกรรมความล้า ( Factors influence Fatigue )

#### 3.6.1 ผลของขนาด

พฤติกรรมความล้าของวัสดุนั้น ถูกควบคุมโดยพันธะที่อ่อนแอ( weak link )ในเนื้อวัสดุ ดังนั้นเมื่อขนาด (หรืออีกนัยหนึ่งคือ ปริมาตร) ของวัสดุแตกต่างกัน ความน่าจะเป็นที่จะมี weak link ก็จะต่างกันด้วย มีนักวิจัย กล่าวว่าความเค้นที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 95 เปอร์เซ็นต์ ของความเค้นสูงสุด เป็นความเค้นที่ควบคุมพฤติกรรมความล้าทำให้ได้ว่า หากมีเนื้อวัสดุรับความเค้นขนาดดังกล่าวมากขึ้น โอกาสเกิดความเสียหายก็จะมากขึ้นด้วย



รูปที่ 3.6 ความชันของความเค้นในชิ้นส่วนที่มีขนาดใหญ่ และขนาดเล็กภายใต้ภาระคัด

พิจารณาชิ้นส่วนที่มีขนาดต่างกัน และรับภาระคัดจนเกิดความเค้นสูงสุดที่ผิวเท่ากัน ดังแสดงในรูป (2.6) จากการพิจารณาการกระจายความเค้นพบว่า ชิ้นส่วนที่มีขนาดใหญ่กว่าจะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้น (stress gradient) น้อยกว่าชิ้นงานที่มีขนาดเล็ก ดังนั้นปริมาตรของวัสดุที่รับความเค้นมากกว่าหรือเท่ากับ 95 เปอร์เซ็นต์ ของความเค้นสูงสุดในชิ้นงานขนาดใหญ่จะมากกว่าในชิ้นงานขนาดเล็ก ทำให้โอกาสหรือความน่าจะเป็นที่จะเกิดรอยร้าวล้ามีมากกว่า

สำหรับค่าปรับแก้ตัวประกอบขนาด  $C_{size}$  นั้นแสดงอยู่ในสมการที่ ( 3.15 ) โดยที่  $d$  คือขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของชิ้นส่วนที่สนใจ

$$\begin{aligned} C_{temp} &= 1 \quad \text{for } d \leq 8 \text{ mm} \\ C_{temp} &= 1.189d^{-0.097} \quad \text{for } 8\text{mm} \leq d \leq 250\text{mm} \\ C_{temp} &= 0.6 \quad \text{for } d \geq 250\text{mm} \end{aligned} \quad (3.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีที่ชิ้นส่วนที่พิจารณามีลักษณะหน้าตัดไม่ใช่หน้าตัดกลมแล้ว จะต้องทำการหาค่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางสมมูล (equivalent diameter) เสียก่อน

สำหรับชิ้นส่วนหน้าตัดกลมภายใต้ภาวะค้ำคดขณะหมุน (rotating bending)

$$A_{95} = \pi \left( \frac{d^2 - (0.95d)^2}{4} \right) \quad (3.16)$$

$$= 0.0766 d^2$$

และสำหรับหน้าตัดแบบอื่นๆ

$$d_{eq} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0.0766}} \quad (3.17)$$

### 3.6.2 ผลของชนิดของภาระที่กระทำ (Loading effect)

เราได้ทราบแล้วว่าชิ้นงานทดสอบชนิดเดียวกันที่รับภาระแนวแกน และภาระค้ำคดจะมีค่าขีดจำกัดความทนทานต่างกัน เนื่องจากมีปริมาตรของวัสดุที่รับความเค้น  $\sigma_{95}$  ต่างกัน จากการทดสอบพบว่าอัตราส่วนของค่าขีดจำกัดความทนทานที่ได้จากการทดสอบแนวแกน และการทดสอบแบบค้ำคด มีค่าอยู่ระหว่าง 0.6-0.9 และอัตราส่วนที่ได้จากการทดสอบการบิด และการทดสอบแบบค้ำคด มีค่าอยู่ระหว่าง 0.5-0.6 ดังนั้นค่าแนะนำสำหรับค่าปรับแก้ตัวประกอบภาระมีค่าเท่ากับ

$$C_{load} = 1 \quad \text{สำหรับภาระค้ำคด} \quad (3.18)$$

$$C_{load} = 0.7 \quad \text{สำหรับภาระแนวแกน} \quad (3.19)$$

$$C_{load} = 0.577 \quad \text{สำหรับภาระบิด} \quad (3.20)$$

### 3.6.3 ผลของความหยาบของผิว

ความขรุขระต่างๆบนผิวของวัสดุจะเสริมให้ความเค้นมีค่ามากขึ้น ดังนั้นจึงต้องมีการปรับแก้ค่าขีดจำกัดความทนทานที่ได้จากชิ้นงานทดสอบ ซึ่งเตรียมผิวชิ้นงานอย่างดี เมื่อต้องนำค่าดังกล่าวไปใช้จริง โดยใช้ค่าปรับแก้ตัวประกอบความหยาบของผิว (Surface correction factor)

Shigley และ Mischke ได้เขียน  $C_{surf}$  ในรูปของตัวแปร  $\sigma_u$  ดังนี้ โดยค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆอยู่ในตาราง

$$C_{surf} = A(\sigma_u)^b \quad (3.21)$$

โดยถ้าค่า  $C_{surf}$  มากกว่า 1 ให้ปรับค่าเท่ากับ 1

ตารางที่ 1 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในสมการค่าปรับแก้ตัวประกอบความหยาบของผิว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลักษณะผิว	MPa		Ksi	
	A	b	A	b
Ground	1.58	-0.085	1.34	-0.085
Machined or cold-drawn	4.51	-0.265	2.7	-0.265
Hot-rolled	57.7	-0.718	14.4	-0.718
As-forged	272	-0.995	39.9	-0.995

### 3.6.4 ผลของอุณหภูมิ (Temperature effect)

สำหรับเหล็กกล้า ค่าขีดจำกัดความทนทานมีแนวโน้มลดลง เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น นอกจากนี้เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้นเราจะไม่พบขีดจำกัดความทนทาน เนื่องจากอะตอมภายในสามารถเคลื่อนที่ได้ง่ายไม่ว่าความเค้นที่กระทำจะมีค่าน้อยเพียงใดก็ตาม นอกจากนี้เมื่ออุณหภูมิมียุคหนึ่งหรือสองของจุดหลอมเหลวของวัสดุแล้ว การคืบ(Creep) จะเป็นกลไกความเสียหายที่เด่นกว่า และในอาณัติบริเวณนี้การเข้าถึงปัญหาโดยแนวทางของความเค้น จะไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้ การเข้าถึงปัญหาในบริเวณดังกล่าวต้องอาศัยแนวทางของความเครียดที่คำนึงถึงผลของความถี่และความถี่ร่วมกัน อีกสิ่งหนึ่งที่เราควรทราบก็คืออุณหภูมิที่สูงนั้นเปรียบเหมือนการอบคืนตัว (annealing) ทำให้สูญเสียความเค้นกคคคคคคคได้

สำหรับค่าปรับแก้ตัวประกอบอุณหภูมิสำหรับวัสดุบางชนิดแสดงอยู่ในสมการที่ (3.22-3.24)

วัสดุ AISI 4340

$$C_{temp} = 1 - 0.5 \left( \frac{T - 70}{930} \right)^n ; 70^\circ F \leq T \leq 1000^\circ F, n = 3.5 \quad (3.22)$$

$$C_{temp} = 1 ; T \leq 70^\circ F$$

วัสดุ Titanium Alloy

$$C_{temp} = 1 - 0.5 \left( \frac{T - 70}{930} \right)^n ; 70^\circ F \leq T \leq 1000^\circ F, n = 1.3 \quad (3.23)$$

$$C_{temp} = 1 ; T \leq 70^\circ F$$

วัสดุ AISI 2024

$$C_{temp} = 1 - 0.5 \left( \frac{T - 70}{430} \right)^n ; 70^\circ F \leq T \leq 500^\circ F, n = 1.5 \quad (3.24)$$

$$C_{temp} = 1 ; T \leq 70^\circ F$$

ความสัมพันธ์อื่น ๆ ของค่าปรับแก้ตัวประกอบอุณหภูมิสำหรับเหล็กกล้า คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C_{temp} = \left( \frac{620}{460 + T} \right); T > 160^{\circ} F$$

$$C_{temp} = 1 ; T \leq 160^{\circ} F$$
(3.25)

### 3.7 ผลของความเค้นเฉลี่ย

แนวทางของ Morrow

หลักการของแนวทางนี้ก็คือ การหาความเค้นส่วนเปลี่ยนสมมูล เพื่อเป็นตัวแทนสถานะของความเค้นใดๆ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้  
ที่ความเค้นเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ เราจะได้

$$\sigma'_a = \sigma'_f (2N)^b$$
(3.26)

ณ ความเค้นเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์ เราจะได้

$$\sigma'_a - eq = \sigma'_f (2N)^b$$
(3.27)

โดย  $\sigma_a - ep$  แทนความเค้นส่วนเปลี่ยนสมมูล (ที่มีค่าความเค้น-เฉลี่ยเท่ากับศูนย์) ซึ่ง Morrow กำหนดให้มีค่าเท่ากับ

$$\sigma_a - eq = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}}$$
(3.28)

แทนสมการที่ 3.28 ลงในสมการที่ 3.27 จะได้

$$\sigma_a = (\sigma'_f - \sigma_m)(2N)^b$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\sigma_a = \sigma'_f \left[ \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{\frac{1}{b}} (2N) \right]^b$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเทียบกับสมการ 3.26 เทอมในวงเล็บใหญ่นั้นจะแทนอายุความล้มภายใต้ภาวะเปลี่ยนแปลงที่มีความเค้นเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์ ในที่นี้แทนด้วย  $N'$  ดังนั้น

$$2N' = \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}\right)^{\frac{1}{b}} (2N)$$

หรือ

$$N' = \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}\right)^{\frac{1}{b}} (N) \quad (3.29)$$

สำหรับสมการของเส้นกราฟความเค้น-อายุที่ความเค้นเฉลี่ยใดๆ นั้นจะอยู่ในรูปของ

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N')^b + \varepsilon'_f (2N')^c \quad (3.30)$$

แทนสมการที่ 3.29 ลงในสมการที่ 3.30 จะได้

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}\right) (2N)^b + \varepsilon'_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}\right)^{\frac{c}{b}} (2N)^c \quad (3.31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4

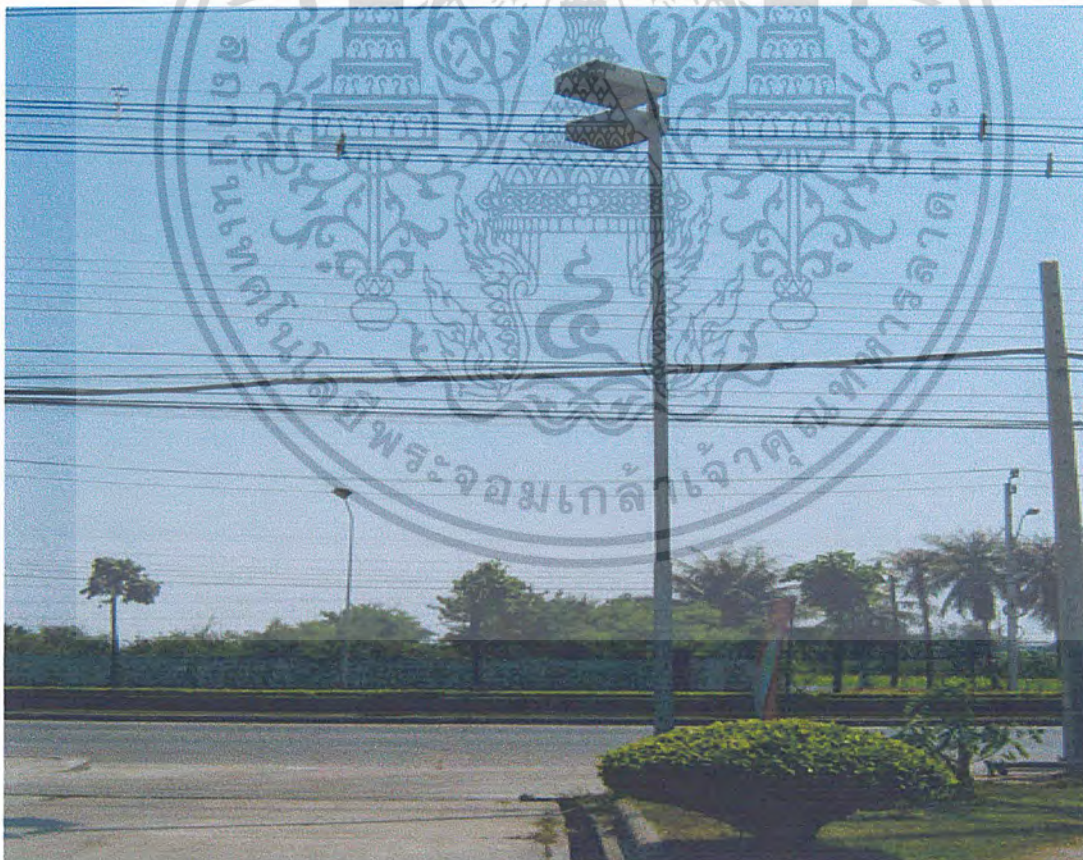
### ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองในโปรแกรม ABAQUS

ในการใช้โปรแกรม ABAQUS วิเคราะห์แบบจำลองนั้น เพื่อที่จะทำให้ผลการวิเคราะห์ออกมาถูกต้อง จำเป็นที่จะต้องรู้ขนาด รูปร่าง และลักษณะการกระทำของภาระกับชิ้นงานให้มีความถูกต้อง ดังนั้นการสร้างแบบจำลองจากโครงสร้างของเสาไฟส่องสว่างมีขั้นตอนดังนี้

#### 4.1 ลักษณะของขั้นตอนการสร้างแบบจำลองในโปรแกรม ABAQUS

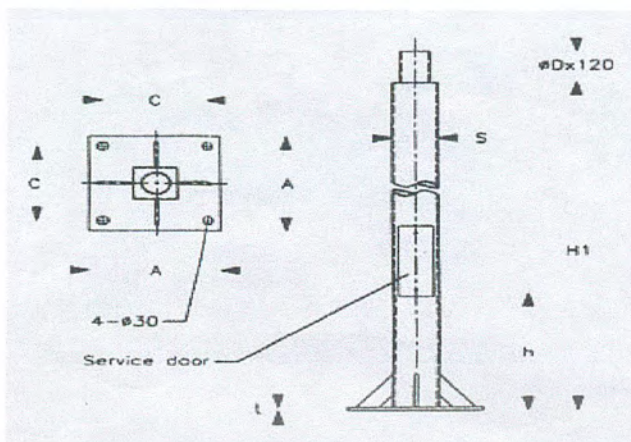
##### 4.1.1 ศึกษาแบบ โครงสร้าง และลักษณะการรับภาระของชิ้นงาน

แบบและโครงสร้างของเสาไฟส่องสว่างถูกกำหนดโดยบริษัทผู้ผลิตซึ่งมีขนาด และ ลักษณะดังรูปที่ 4.1และ 4.2



รูปที่ 4.1แสดงลักษณะของเสาไฟส่องสว่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



Unit	H1	h	s	D	A	C	t
mm	7000	500	125x125	60	400	300	19

รูปที่ 4.2 แสดงขนาดของชิ้นงาน

#### 4.1.2 สร้างแบบจำลองของชิ้นงานใน โปรแกรม

การสร้างแบบจำลองสามารถสร้างได้หลายวิธี ซึ่งในการสร้างแบบจำลองของโครงสร้างเสาไฟส่องสว่างนี้ใช้วิธีการสร้างใน โปรแกรม ABAQUS โดยตรง ส่วนลักษณะของแรงที่กระทำกับชิ้นงานจะสร้างเป็น (TEXT FILE.for) แล้วจะถูกนำมาคำนวณร่วมกับโปรแกรม ABAQUS ในการเรียกใช้ในขั้นตอนที่ 7 โดยลักษณะของแบบจำลองมีรูปร่างดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงลักษณะของแบบจำลอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.1.3 กำหนดคุณสมบัติของชิ้นงานให้กับแบบจำลอง

การกำหนดคุณสมบัติของแบบจำลองที่สร้างขึ้นจะถูกกำหนดด้วยคุณสมบัติของชิ้นงานที่ทำการวิเคราะห์ ซึ่งโครงสร้างของเสาไฟส่องสว่าง มีคุณสมบัติที่สำคัญ เช่น ความหนาแน่น และความยืดหยุ่น (ค่า E) มีการกำหนดดังรูปที่ 4.4

Data			
Click mouse button 3 for table options.			
	Young's Modulus	Poisson's Ratio	
1	200000	0.3	

รูปที่ 4.4 แสดงลักษณะของการกำหนดคุณสมบัติของแบบจำลอง

#### 4.1.4 กำหนดลักษณะการวิเคราะห์

เนื่องจากการวิเคราะห์แบบจำลองแบ่งออกเป็น 2 วิธี ประกอบด้วย วิธี STATIC และ DYNAMIC ซึ่งมีวิธีการวิเคราะห์ที่ต่างกัน จึงจำเป็นต้องกำหนดชนิดของการวิเคราะห์ที่ถูกต้องดังรูปที่

#### 4.5

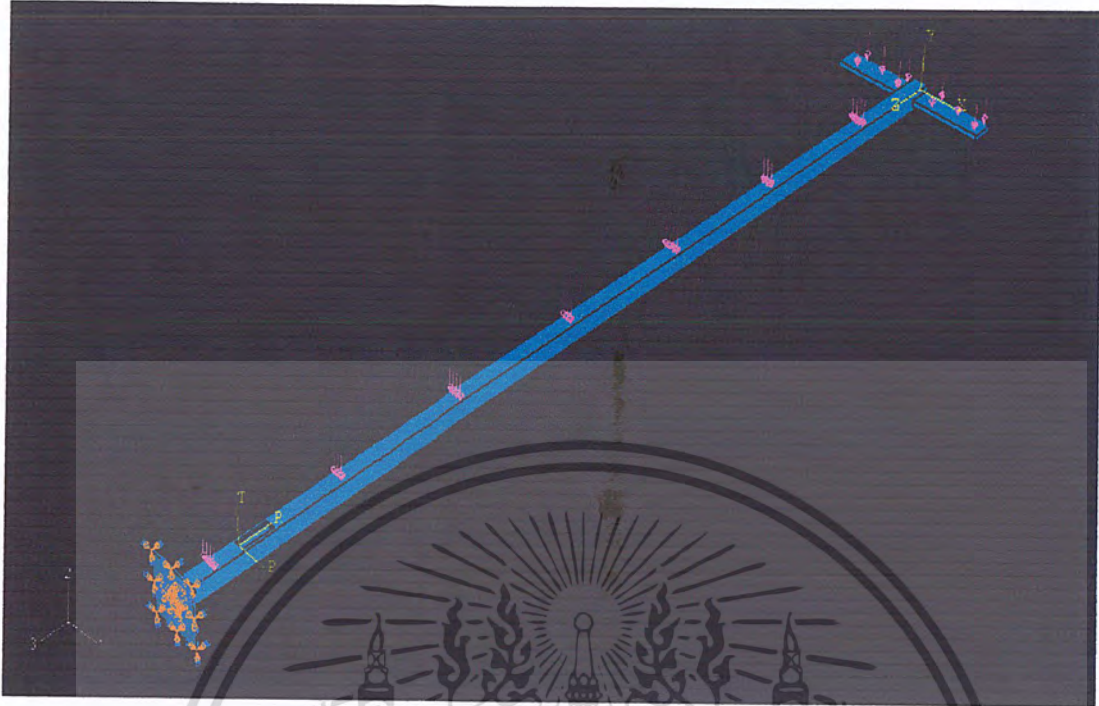
Name	Procedure	Nlgeom	Time
Initial	(Initial)	N/A	N/A
contact	Static, General	OFF	1
Load	Static, General	OFF	1

รูปที่ 4.5 แสดงลักษณะการกำหนดการวิเคราะห์ของแบบจำลอง

#### 4.1.5 กำหนดลักษณะขอบเขตของชิ้นงานให้กับแบบจำลอง

ขอบเขตของแบบจำลองถูกกำหนดโดยลักษณะของภาระที่กระทำกับ โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่าง มีข้อกำหนดที่สำคัญอยู่ 2 ชนิด คือ ลักษณะการจับยึดของชิ้นงาน และ ลักษณะและทิศทางของแรงที่กระทำกับชิ้นงาน ซึ่งมีลักษณะการกำหนดดังรูปที่ 4.6

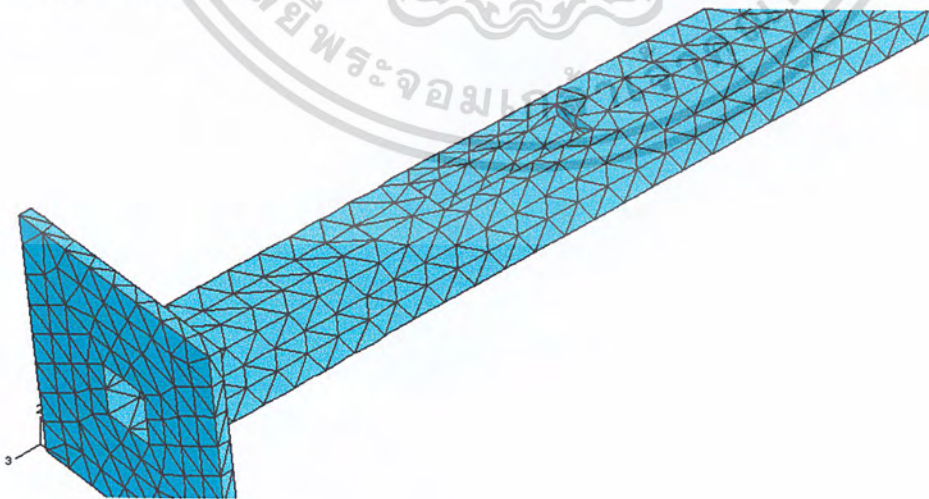
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.6 แสดงลักษณะของการกำหนดขอบเขตของแบบจำลอง

#### 4.1.6 สร้างเอลิเมนต์ให้กับแบบจำลอง

การสร้างเอลิเมนต์จะมีชนิดของเอลิเมนต์ให้เลือกใช้ในตัวโปรแกรม ABAQUS อยู่แล้วซึ่งลักษณะของเอลิเมนต์จะขึ้นอยู่กับลักษณะของแบบจำลอง ขนาดของเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กลงจะให้ความถูกต้องกว่าขนาดใหญ่แต่การกำหนดขนาดเอลิเมนต์ต้องคำนึงถึงขนาดของหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ที่ใช้งาน โดยเอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่างเป็นแบบ An 4-node linear tetrahedron ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 แสดงลักษณะเอลิเมนต์ของแบบจำลอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.1.7 กำหนดชนิดของ IN PUT FILE ที่ใช้งาน

เนื่องจากลักษณะของแรงที่ทำการวิเคราะห์มีลักษณะที่แตกต่างจากการกำหนดโดยใช้ในโปรแกรม ABAQUS จึงจำเป็นที่จะต้องสร้าง Text File ขึ้นมาเพื่อที่ใช้เป็นข้อมูลที่โปรแกรม ABAQUS ใช้ในการวิเคราะห์ จึงจำเป็นต้องเรียกใช้ File.for ที่สร้างขึ้นมาใช้ร่วมกัน โดยมีลักษณะการกำหนดดังรูปที่ 4.8

```

SUBROUTINE DLOAD(F,KSTEP,KINC,TIME,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,COORDS,
                JLTYP,SNAME)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
DIMENSION COORDS(3),TIME(2)
CHARACTER*80 SNAME
C NOTE THAT COORDS(3) IS Z COORDINATE
S=2.01*((COORDS(3)/900.0)**(2.0/9.5))
IF (TIME(1) .LE. 10) THEN
  A=0.1*TIME(1)
ELSEIF (TIME(1) .GT. 10 .AND. TIME(1) .LE. 20) THEN
  A=0.1*(20.0-TIME(1))
ELSEIF (TIME(1) .GT. 20 .AND. TIME(1) .LE. 30) THEN
  A=0.1*(TIME(1)-20)
ELSEIF (TIME(1) .GT. 30 .AND. TIME(1) .LE. 40) THEN
  A=0.1*(40.0-TIME(1))
ELSEIF (TIME(1) .GT. 40 .AND. TIME(1) .LE. 50) THEN
  A=0.1*(TIME(1)-40)
ELSEIF (TIME(1) .GT. 50 .AND. TIME(1) .LE. 60) THEN
  A=0.1*(60.0-TIME(1))
ELSEIF (TIME(1) .GT. 60 .AND. TIME(1) .LE. 70) THEN
  A=0.1*(TIME(1)-60)
ELSEIF (TIME(1) .GT. 70 .AND. TIME(1) .LE. 80) THEN
  A=0.1*(80.0-TIME(1))
ENDIF
F=0.00256*1.14*0.87*(100.0**2.0)*S*A
RETURN
END

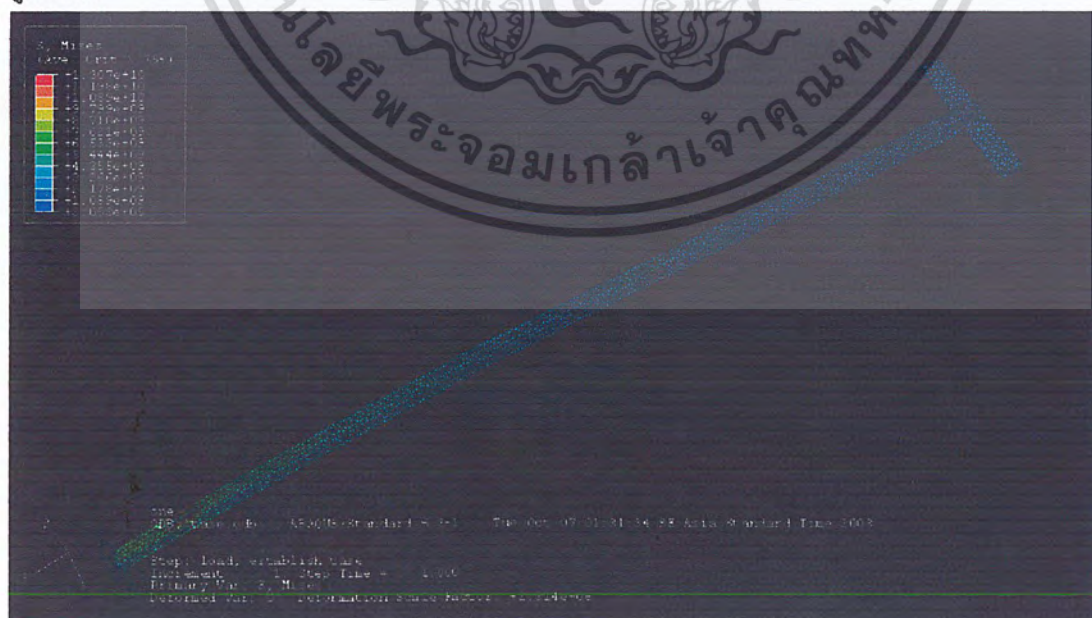
```

รูปที่ 4.8 แสดงลักษณะการกำหนดชนิดของ IN PUT FILE

#### 4.1.8 ผลลัพธ์ที่ต้องการ

ผลลัพธ์ที่เกิดจากโปรแกรมจะมีหลายชนิดขึ้นอยู่กับการนำไปใช้ ซึ่งจะนำค่าความเค้นมาใช้ดัง

รูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 แสดงลักษณะของผลลัพธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.1.9 การนำข้อมูลไปประมวลผล

หลังจากที่ได้ทำตามขั้นตอนข้างต้นแล้ว โปรแกรมจะทำการประมวลผลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์

#### 4.1.10 การบันทึกค่าความเค้นและความเครียด

เมื่อ โปรแกรมประมวลผลเสร็จเรียบร้อยแล้วสามารถเลือกดูผลลัพธ์ได้และบันทึกค่าเพื่อนำไปคำนวณหาอายุการใช้งาน

### 4.2 การคำนวณหาแรงของเสาไฟส่องสว่าง

การหาแรงของเสาไฟส่องสว่างสามารถหาได้หลายวิธีแต่วิธีที่ใช้ทางไฟไนต์เอลิเมนต์จะให้คำตอบที่ใกล้เคียงและยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยมากที่ลักษณะของปัญหาที่ซับซ้อน นอกการใช้โปรแกรม ABAQUS เป็นตัวประมวลผลหลักแล้วยังต้องสร้าง IN PUT FILE .for ใช้สำหรับสร้างข้อมูลของลักษณะของแรงที่กระทำกับเสาไฟส่องสว่างที่มีลักษณะตามการกำหนดในการวิเคราะห์ ซึ่งการวิเคราะห์แบ่งออกเป็นสองลักษณะคือ Static และ Dynamic เพื่อนำไปใช้กำหนดลักษณะของแรงให้กับแบบจำลอง

#### 4.2.1 การคำนวณหาแรงของเสาไฟส่องสว่างแบบ Static

โดยลักษณะของแรงจะขึ้นอยู่กับความสูง โดยทำการเปลี่ยนลักษณะของความเร็วโดยนำสูตรพื้นฐานที่ใช้ในการคำนวณ (AASHTO. 1994) มาใช้แล้วนำค่าแรงที่ได้ไปใช้ใน IN PUT FILE .for

Wind load on luminaire

Table 1-1. Wind importance Factors,  $I_r$

Recurrence Interval ( years)	Importance factor, $I_r$
100	1.15
50	1
25	0.87
10	0.71

Table 1-2. Recommended Design Life

Design Life	Structure Type
50 – year	Luminaire support structures exceeding 15 m (49.2 ft) in height
	Overhead sign structures
25 – year	Luminaire support structures less than 15 m (49.2 ft) in height
	Traffic signal structures
10 - year	Roadside sign structures

#### ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงค่า Factors

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 4.1 ได้ค่าคงที่ดังนี้

$K_z$  คือ ค่าคงที่ ซึ่งคิดเทียบกับความสูง  $H_1$  มีค่ามากกว่า 15 ft

$$K_z = 2.01(H_1 / 900)^{(2/9.5)}$$

$P_z$  คือ ความดันที่ลมกระทำ ไม่ใช่สัมประสิทธิ์ แรงต้าน  $C_d$

$$P_z = 0.00256 K_z G V^2 I_r$$

ตัวอย่างการใช้ตารางเพื่อหาแรงจากความเร็ว โดยกำหนดให้ความเร็ว 80 mph และเสาไฟส่องสว่างสูง 7.5 m

จากสูตร  $P_z$  คือ แรงที่ต้องการซึ่งประกอบด้วย ตัวแปรหลายตัว

$G$  คือ Modulus of Rigidity ของวัสดุที่ใช้ทำเสาไฟส่องสว่าง

$V$  คือ ความเร็วที่ใช้จากตัวอย่างมีค่า 80

#### 4.2.1.1 วิธีการหาค่าตัวแปรจากตารางที่ 1-1, 1-2

จากตารางที่ 1-1 ค่า  $I_r$  ดูจากตารางเนื่องจากในช่องที่ 1 เป็นปีที่ต้องการซึ่งกำหนดโดยตารางที่ 1-2 จากตารางที่ 1-2 ความสูงของเสาไฟส่องสว่าง 7.5 m จึงได้ค่าอายุการออกแบบ 25 ปี นำค่าที่ได้มาใช้ในตารางที่ 1-1 จะได้ค่า  $I_r$  มีค่า 0.87

ค่า  $K_z$  หาจากสมการชั้นดิน ซึ่งค่า  $H_1$  คือค่าความสูงของช่วงของเสาไฟที่ทำการวิเคราะห์หาแรง จากนั้นจะได้ค่า  $P_z$  นำไปใช้ดังรูปที่ 4.10

```

SUBROUTINE DLOAD(F,KSTEP,KINC,TIME,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,COORDS,
1          JITYP,SNAME)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
DIMENSION COORDS(3),TIME(2)
CHARACTER*80 SNAME
C NOTE THAT COORDS(3) IS Z COORDINATE
S=2.01*((COORDS(3)/900.0)**(2.0/9.5))
IF (TIME(1).LE.10) THEN
  A=0.1*TIME(1)
ELSEIF (TIME(1).GT.10. .AND. TIME(1).LE.20) THEN
  A=0.1*(20.0-TIME(1))
ELSEIF (TIME(1).GT.20. .AND. TIME(1).LE.30) THEN
  A=0.1*(TIME(1)-20)
ELSEIF (TIME(1).GT.30. .AND. TIME(1).LE.40) THEN
  A=0.1*(40.0-TIME(1))
ELSEIF (TIME(1).GT.40. .AND. TIME(1).LE.50) THEN
  A=0.1*(TIME(1)-40)
ELSEIF (TIME(1).GT.50. .AND. TIME(1).LE.60) THEN
  A=0.1*(60.0-TIME(1))
ELSEIF (TIME(1).GT.60. .AND. TIME(1).LE.70) THEN
  A=0.1*(TIME(1)-60)
ELSEIF (TIME(1).GT.70. .AND. TIME(1).LE.80) THEN
  A=0.1*(80.0-TIME(1))
ENDIF
F=0.00256*1.14*0.87*(100.0**2.0)*S*A
RETURN
END

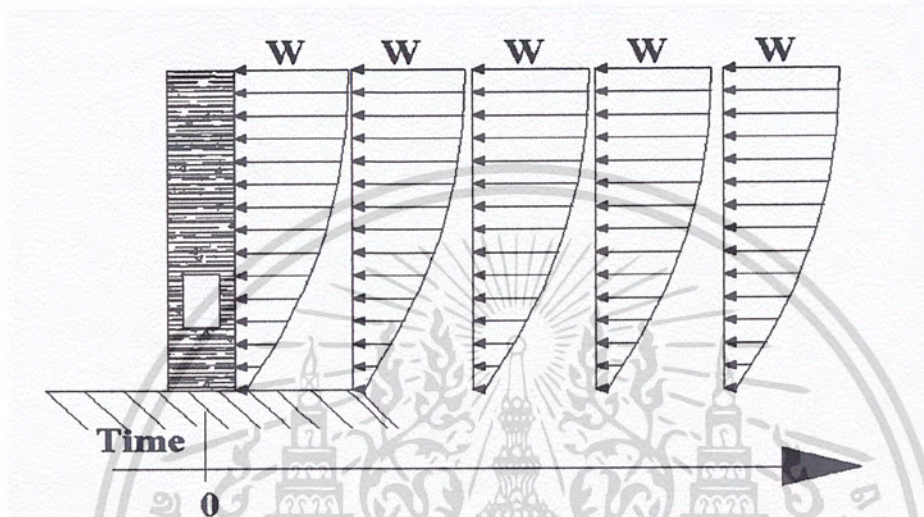
```

รูปที่ 4.10 แสดง IN PUT FILE. For

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

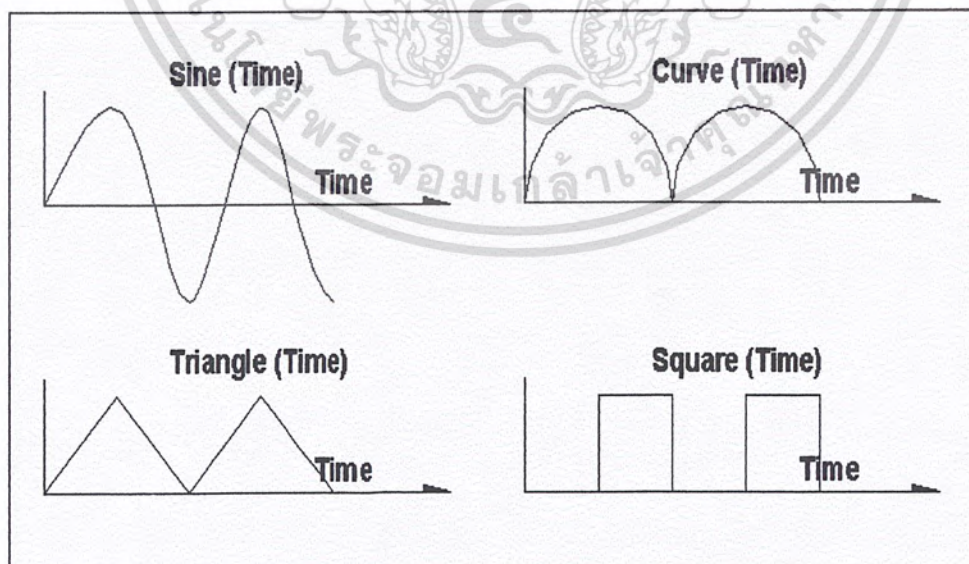
#### 4.2.2 การคำนวณแรงของเสาไฟส่องสว่างแบบ Dynamic

การคำนวณในวิธีนี้จะใช้ขนาดของแรงเป็นแบบเดียวกับ Static แต่จะกำหนดให้ขึ้นอยู่กับเวลาโดยการใช้ IN PUT FILE. for ซึ่งลักษณะของแรงมีลักษณะดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 แสดงลักษณะของแรงที่ใช้วิเคราะห์แบบ Dynamic

และจะมีลักษณะ Amplitudes ของแรงที่กำหนดขึ้นเพื่อเปรียบเทียบมี 4 แบบดังรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 แสดงลักษณะของ Amplitudes ของแรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.3 การคำนวณอายุการใช้งานโดยใช้โปรแกรม Matlab

สมการที่ใช้คำนวณอายุความล้า(สมการ 3.31)เป็นสมการแบบ Non-linear การคำนวณจึงเลือกวิธีการของนิวตันราฟสัน และเพื่อความสะดวกจึงใช้โปรแกรม Matlab ช่วยในการคำนวณ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

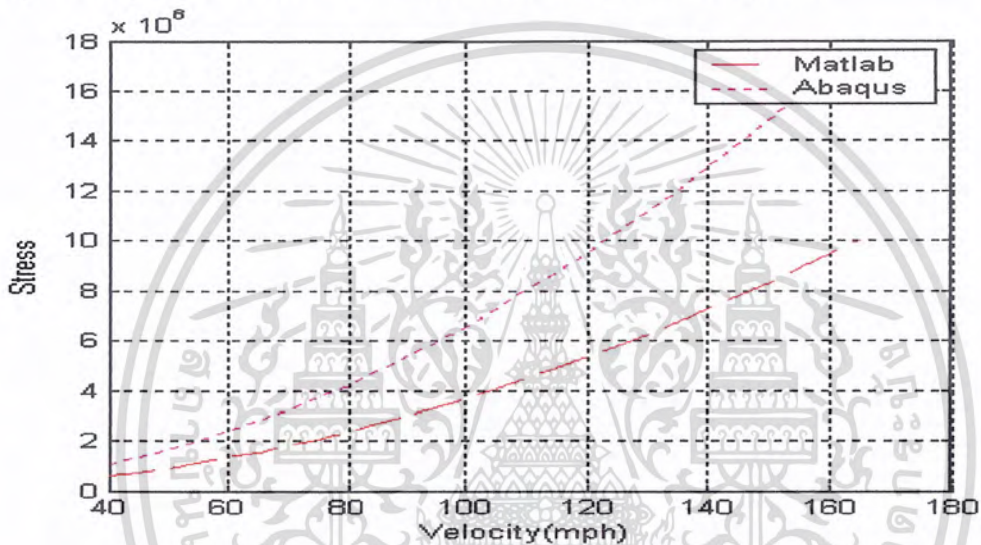
### ผลจากการทดลอง

#### 5.1 ผลจากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ผลการวิเคราะห์จะมีอยู่สองส่วนที่สำคัญได้แก่การวิเคราะห์ทาง Static และ Dynamic ค่าของผลลัพธ์ได้จากการใช้โปรแกรม ABQUS และ Matlab

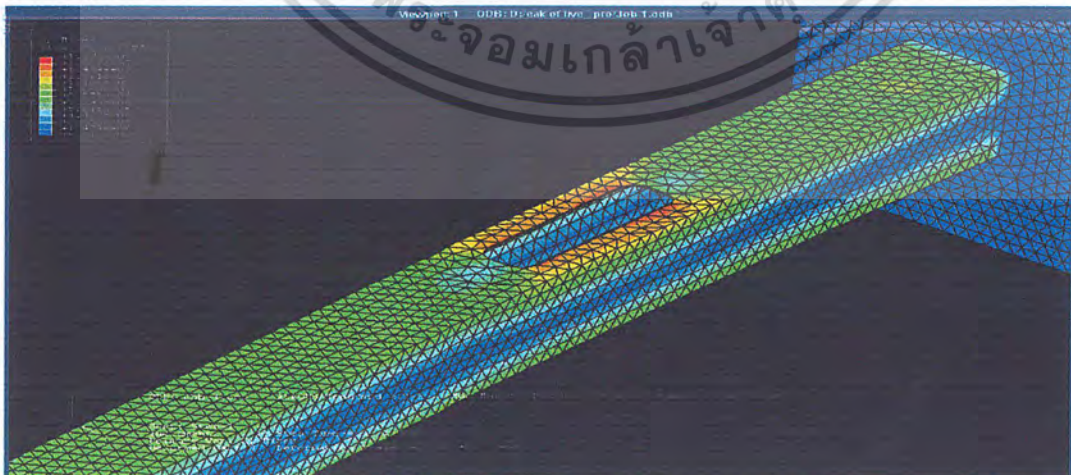
##### 5.1.1 ผลการวิเคราะห์ทาง Static

เป็นการแสดงผลของความเค้น Von - Mises สูงสุดที่เกิดจากความเร็วของลมที่จะมีค่าความเร็วขึ้นอยู่กับความสูงโดยวิธีการคำนวณ และ ใช้โปรแกรม ABAQUS แสดงดังรูป 5.1



รูปที่ 5.1 กราฟแสดงค่าความเค้น

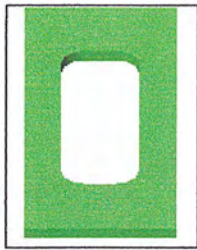
จากผลการวิเคราะห์ทาง Static พบว่าบริเวณที่มีความเค้น Von - Mises สูงสุดคือ บริเวณ Service door ดังรูปที่ 5.2



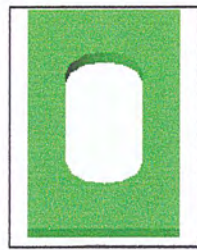
รูปที่ 5.2 แสดงบริเวณที่มีความเค้นสูงสุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

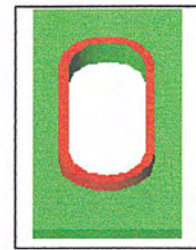
จึงได้มีการพัฒนารูปแบบของ Service door ขึ้นใหม่เพื่อให้ความเค้นลดลง ดังรูปที่ 5.3



Fillet=18.3mm



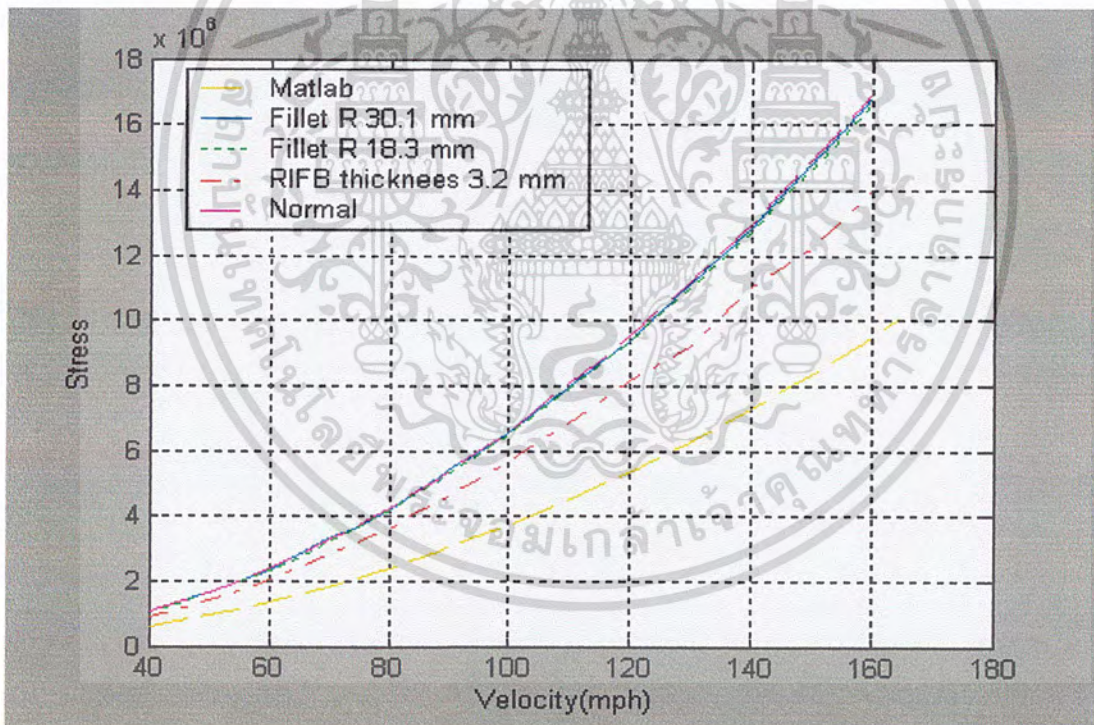
Fillet=31.1mm



RIFB thicknees=3.2mm

รูปที่ 5.3 แสดงรูปแบบของ Service door

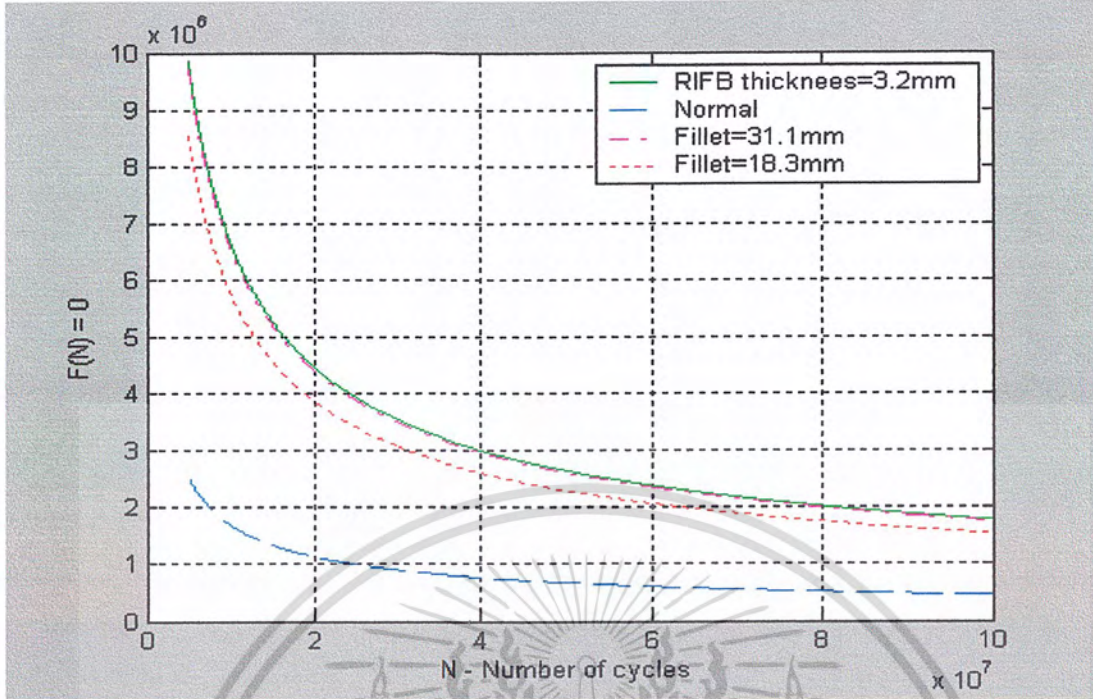
จากผลของการพัฒนารูปแบบของ Service door ขึ้นใหม่ทำให้ความเค้น Von - Mises ที่เกิดขึ้นมีค่าดัง รูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 กราฟแสดงค่าความเค้น

จากผลการวิเคราะห์ ข้อที่ 5.1 สามารถนำไปใช้หาค่าความเค้น Von - Mises โดยใช้วิธีตามข้อที่ ที่กล่าวมาข้างต้นจะได้กราฟอายุการใช้งานดัง รูปที่ 5.5

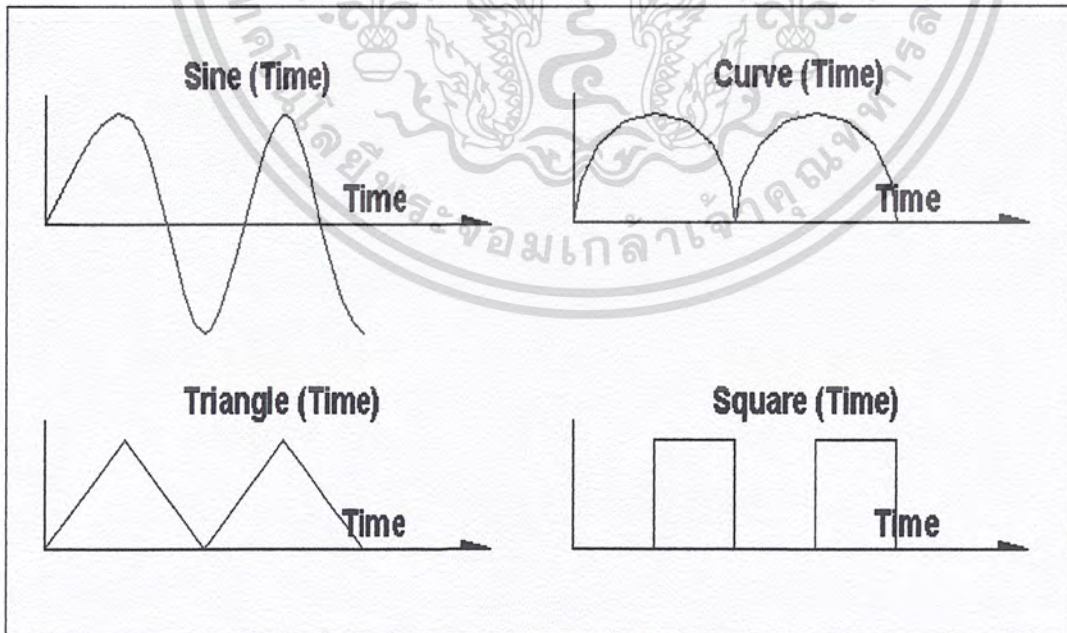
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.5 กราฟแสดงอายุการใช้งาน

#### 5.1.2 ผลการวิเคราะห์ทาง Dynamic

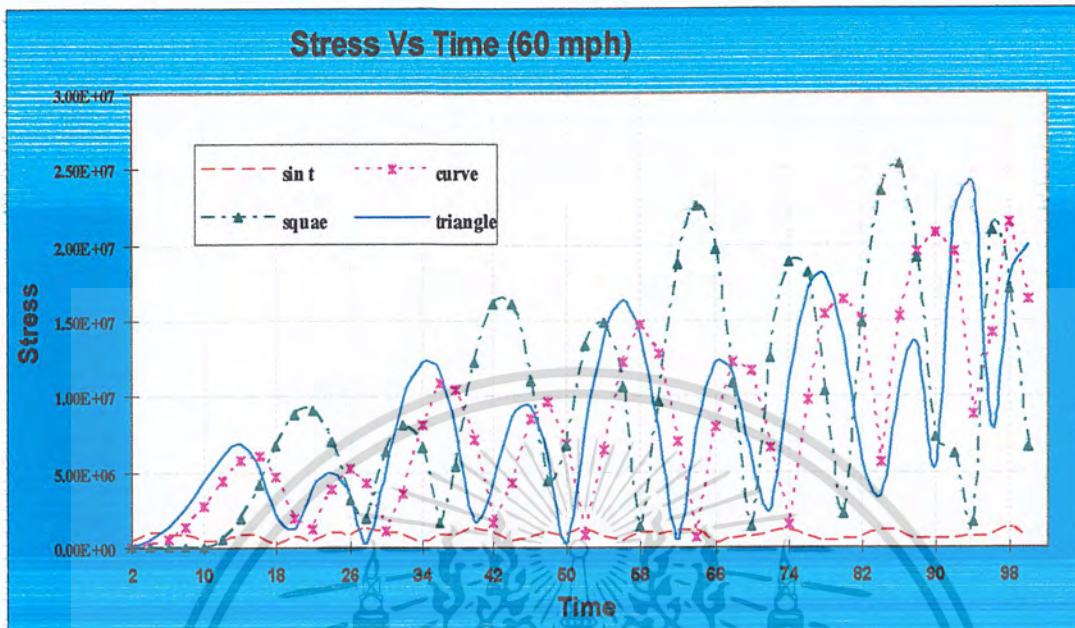
จากการกำหนดลักษณะของแรงให้ขึ้นอยู่กับความสูงและเวลาซึ่งในการวิเคราะห์กำหนดลักษณะของ Amplitudes มีลักษณะดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6 แสดงลักษณะของ Amplitudes ของแรง

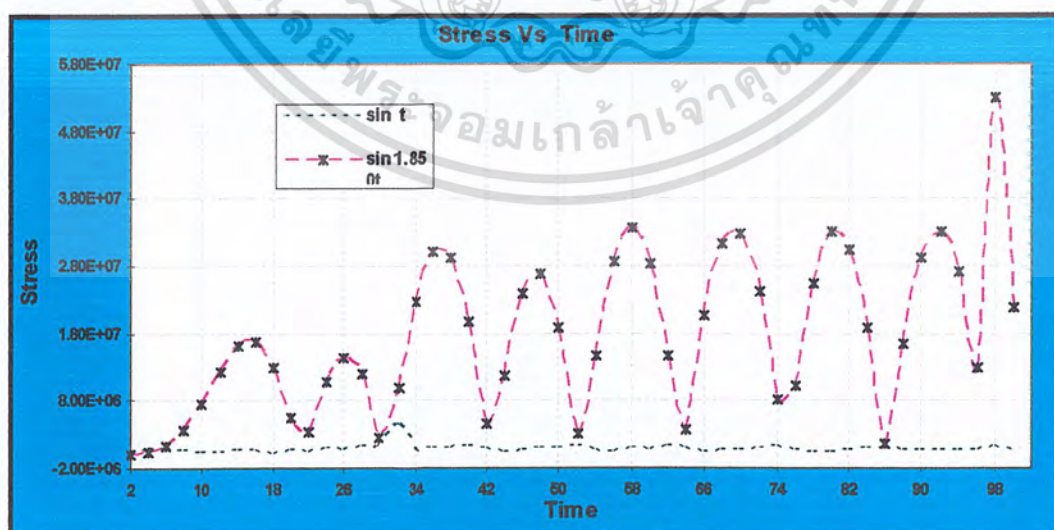
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการวิเคราะห์ลักษณะของแรงที่กำหนดขึ้นต้นจะได้ค่าความเค้นมีลักษณะดังรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7 แสดงลักษณะของ Amplitudes ความเค้น

จากการศึกษาในวิชา Vibration ความถี่ธรรมชาติมีผลต่อการเกิดความเค้น จึงทำการวิเคราะห์เพื่อเปรียบเทียบผลที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์ รูป 5.8 แสดงผลการเปรียบเทียบผลการเปลี่ยนแปลงความถี่ของแรงที่กระทำกับ โครงสร้าง โดยกราฟแสดงให้เห็นว่าเมื่อ โครงสร้างถูกกระตุ้นด้วยความถี่ธรรมชาติจะทำให้ความเค้นมีค่าสูงเพราะเกิดการกำทอนขึ้น(ค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 0.29448 Hz)



รูปที่ 5.8 กราฟแสดงลักษณะของ Amplitudes ความเค้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 6

### สรุปผลการวิเคราะห์และวิจารณ์ผล

#### สรุปผลการวิเคราะห์

1.จากการทดลองวิเคราะห์ โดยใช้ทฤษฎี Shear Stress ผลที่ได้ โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่าง สามารถทนต่อความเร็วลมได้ที่ 100 mph หรือ 160 km/h

2.จากการวิเคราะห์โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ( ABAQUS) ผลที่ได้ โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่างสามารถทนต่อความเร็วลมได้ที่ 80 mph หรือ 128 km/h

3.จากผลการวิเคราะห์พบว่าจุดที่เสียหายของเสาไฟส่องสว่างมากที่สุดคือบริเวณ Service door จึงได้ทำการพัฒนารูปร่างและลักษณะโดยการทำให้มุมของ Service door มีความโค้งและเพิ่มความหนา โดยรอบ Service door จากการวิเคราะห์ลักษณะที่ดีที่สุดคือการเพิ่มความหนาโดยรอบ Service door

4.จากการพัฒนารูปร่างของ Service door ทำให้ผลที่ได้โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่างสามารถทนต่อความเร็วลมได้ที่ 90 mph หรือ 144 km/h

5.จากการใช้ทฤษฎี Fatigue life เพื่อทำนายอายุการใช้งานของ โครงสร้างของเสาไฟส่องสว่าง พบว่าจากการพัฒนารูปร่างและลักษณะของ Service door ทำให้อายุการใช้งานเพิ่มขึ้น 28 เปอร์เซ็นต์

6.จากผลการวิเคราะห์จะเห็นได้ว่าเมื่อใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทำการวิเคราะห์ค่าที่ได้จะมีค่าสูงกว่าการวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎี Shear Stress จึงสามารถใช้โปรแกรมในการออกแบบได้

7.จากการวิเคราะห์ทาง Dynamic เราพบว่าความเค้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะของ Amplitudes และลักษณะที่ทำให้ความเค้นมากที่สุดจากการทดลองคือแบบ Square

8. สิ่งที่ต้องคำนึงถึงคือ ความถี่ธรรมชาติของ โครงสร้างซึ่งจากการทดลองได้ค่าความถี่ธรรมชาติ อยู่ที่ 0.29448 Hz จะทำให้ความเค้นสูงขึ้น 60-70 เปอร์เซ็นต์ เพราะฉะนั้นการออกแบบ โครงสร้างที่รับแรงที่มีลักษณะที่มีการเคลื่อนที่จะต้องคำนึงถึงภาระที่เป็นแบบ Dynamic เสมอจากผลการทดลอง

#### ข้อเสนอแนะและวิจารณ์

1. จากผลการวิเคราะห์สังเกตได้ว่าพื้นที่รับแรงมากและลักษณะความโค้งของ Service door จะสามารถต้านความเค้นได้สูงซึ่งเป็นไปตามหลักของความเป็นจริง และยังมีวิธีการในการเพิ่มอายุการใช้งานของเสาไฟส่องสว่างอีกหลายวิธี เช่น การเปลี่ยนตำแหน่งของ Service door และ อาจเปลี่ยนรูปร่างของเสาไฟส่องสว่าง และลักษณะของ Amplitudes แรงที่กระทำมีผลต่อลักษณะ Amplitudes ของความเค้นที่เกิดขึ้น ดังนั้นการออกแบบโครงสร้างทั่วไปจะต้องคำนึงถึงลักษณะของ Amplitudes แรงที่กระทำต่อโครงสร้างนั้นเสมอ

2. การเขียน INPUT FILE ควรจะศึกษาคำสั่งของ ABAQUS ให้มากเพราะจะทำให้การเขียนง่ายขึ้นมากและโปรแกรมที่สร้าง INPUT FILE (FORTRAN) ในส่วนของคำสั่งที่มีการใช้อีกเป็นครั้งที่สอง ควรจะเขียนเป็นฟังก์ชันเพราะจะไม่เสียเวลาและ โปรแกรมจะมีขนาดเล็กลงง่ายกับการศึกษามากขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## References

- [1] AASHTO. (1994). Standard Specification for Structural Support for Highway Signs , Luminaires and Traffic Signals, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington , D.C
- [2] Daryl L.Logan, Finite Element Method, 3<sup>rd</sup> ,Brooks/Cole,2002
- [3] Joseph E. Shigley, Charles R. Mischke, Mechanical Engineering Design ,International six Edition, Mcgraw-Hill
- [4] Society of Automotive Engineers, Inc.“Fatigue Design Handbook” Ae-10 SAE
- [5] Stephen J.Chapman, MATLAB Programming for Engineers, Brooks/Cole,2002.
- [6] รศ.ดร.เดช พุทธรเจริญทอง, การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ,1998.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

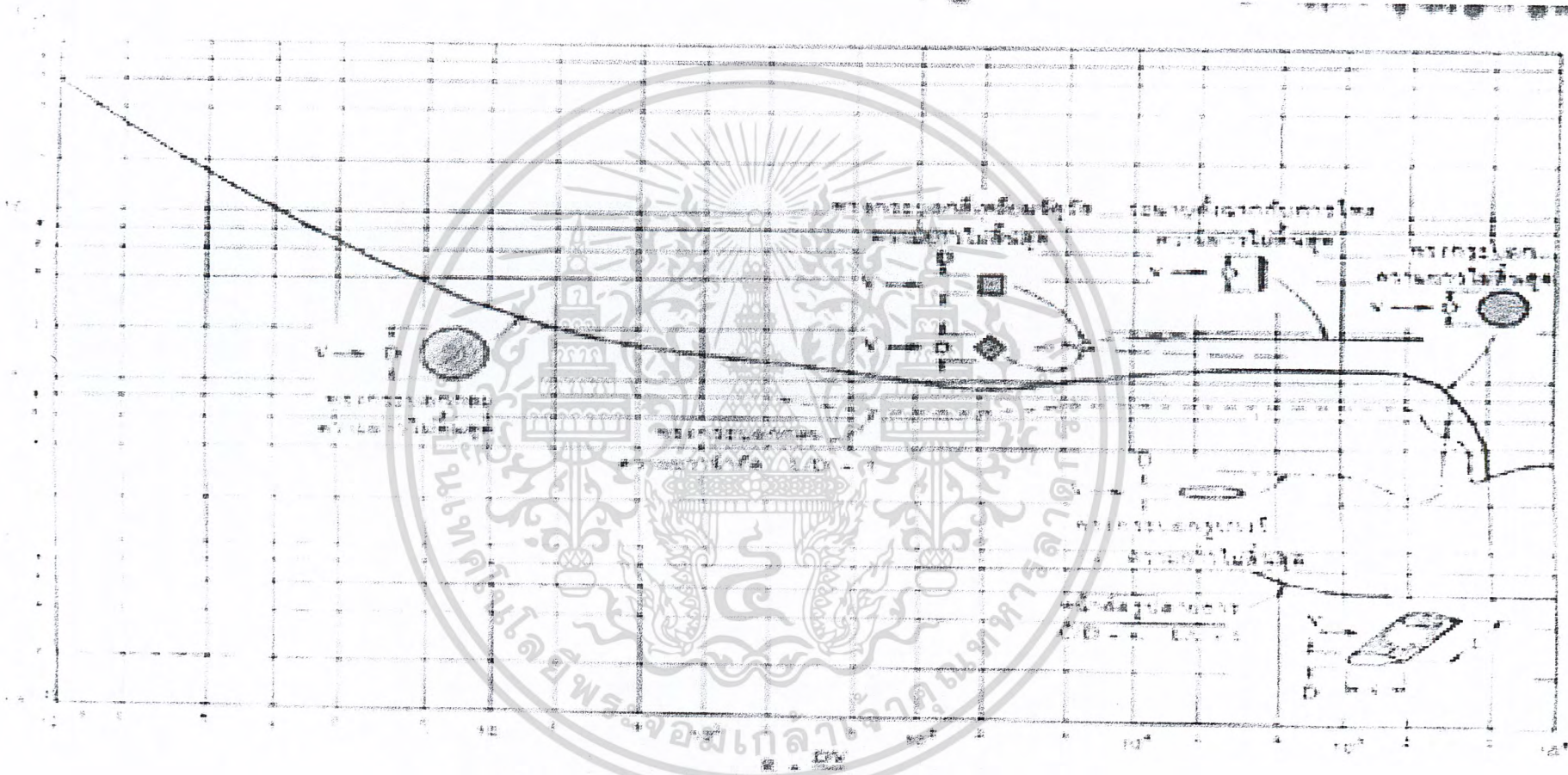
ตารางที่ 1 ตารางแสดงคุณสมบัติของเหล็กชนิดต่างๆ

Grade (a)	Orientation (e)	Description (f)	Hardness HB	Tensile Strength $S_{ut}$		Reduction in Area %	True Strain at Fracture $\epsilon_f$	Modulus of Elasticity E		Fatigue Strength Coefficient $\sigma'_f$		Fatigue Strength Exponent b	Fatigue Ductility Coefficient $\epsilon'_f$	Fatigue Ductility Exponent c
				MPa	ksi			GPa	10 <sup>4</sup> psi	MPa	ksi			
A538A (b)	L	STA	405	1515	220	67	1.10	185	27	1655	240	-0.065	0.30	-0.62
A538B (b)	L	STA	460	1860	270	56	0.82	185	27	2135	310	-0.071	0.80	-0.71
A538C (b)	L	STA	480	2000	290	55	0.81	180	26	2240	325	-0.07	0.60	-0.75
AM-350 (c)	L	HR, A		1315	191	52	0.74	195	28	2800	406	-0.14	0.33	-0.84
AM-350 (c)	L	CD	496	1905	276	20	0.23	180	26	2690	390	-0.102	0.10	-0.42
Gainex (c)	LT	HR sheet		530	77	58	0.86	200	29.2	805	117	-0.07	0.86	-0.65
Gainex (c)	L	HR sheet		510	74	64	1.02	200	29.2	805	117	-0.071	0.86	-0.68
H-11	L	Ausformed	660	2585	375	33	0.40	205	30	3170	460	-0.077	0.08	-0.74
RQC-100 (c)	LT	HR plate	290	940	136	43	0.56	205	30	1240	180	-0.07	0.66	-0.69
RQC-100 (c)	L	HR plate	290	930	135	67	1.02	205	30	1240	180	-0.07	0.66	-0.69
10B62	L	Q&T	430	1640	238	38	0.89	195	28	1780	258	-0.067	0.32	-0.56
1005-1009	LT	HR sheet	90	360	52	73	1.3	205	30	580	84	-0.09	0.15	-0.43
1005-1009	LT	CD sheet	125	470	68	66	1.09	205	30	515	75	-0.059	0.30	-0.51
1005-1009	L	CD sheet	125	415	60	64	1.02	200	29	540	78	-0.073	0.11	-0.41
1005-1009	L	HR sheet	90	345	50	80	1.6	200	29	640	93	-0.109	0.10	-0.39
1015	L	Normalized	80	415	60	88	1.14	205	30	825	120	-0.11	0.95	-0.64
1020	L	HR plate	108	440	64	62	0.96	205	29.5	895	130	-0.12	0.41	-0.51
1040	L	As forged	225	620	90	60	0.93	200	29	1540	223	-0.14	0.61	-0.57
1045	L	Q&T	225	725	105	65	1.04	200	29	1225	178	-0.095	1.00	-0.66
1045	L	Q&T	410	1450	210	51	0.72	200	29	1860	270	-0.073	0.60	-0.70
1045	L	Q&T	390	1345	195	59	0.89	205	30	1585	230	-0.074	0.45	-0.68
1045	L	Q&T	450	1585	230	55	0.81	205	30	1795	260	-0.07	0.35	-0.69
1045	L	Q&T	500	1825	265	51	0.71	205	30	2275	330	-0.08	0.25	-0.68
1144	L	Q&T	595	2240	325	41	0.52	205	30	2725	395	-0.081	0.07	-0.60
1144	L	CDSR	265	930	135	33	0.51	195	28.5	1000	145	-0.08	0.32	-0.58
1144	L	DAT	305	1035	150	25	0.29	200	28.8	1585	230	-0.09	0.27	-0.53
1541F	L	Q&T forging	290	950	138	49	0.68	205	29.9	1275	185	-0.076	0.68	-0.65
1541F	L	Q&T forging	260	890	129	60	0.93	205	29.9	1275	185	-0.071	0.93	-0.65
4130	L	Q&T	258	895	130	67	1.12	220	32	1275	185	-0.083	0.92	-0.63
4130	L	Q&T	365	1425	207	55	0.79	200	29	1695	246	-0.081	0.89	-0.69

ตารางที่ 1 ตารางแสดงคุณสมบัติของเหล็กชนิดต่างๆ (ต่อ)

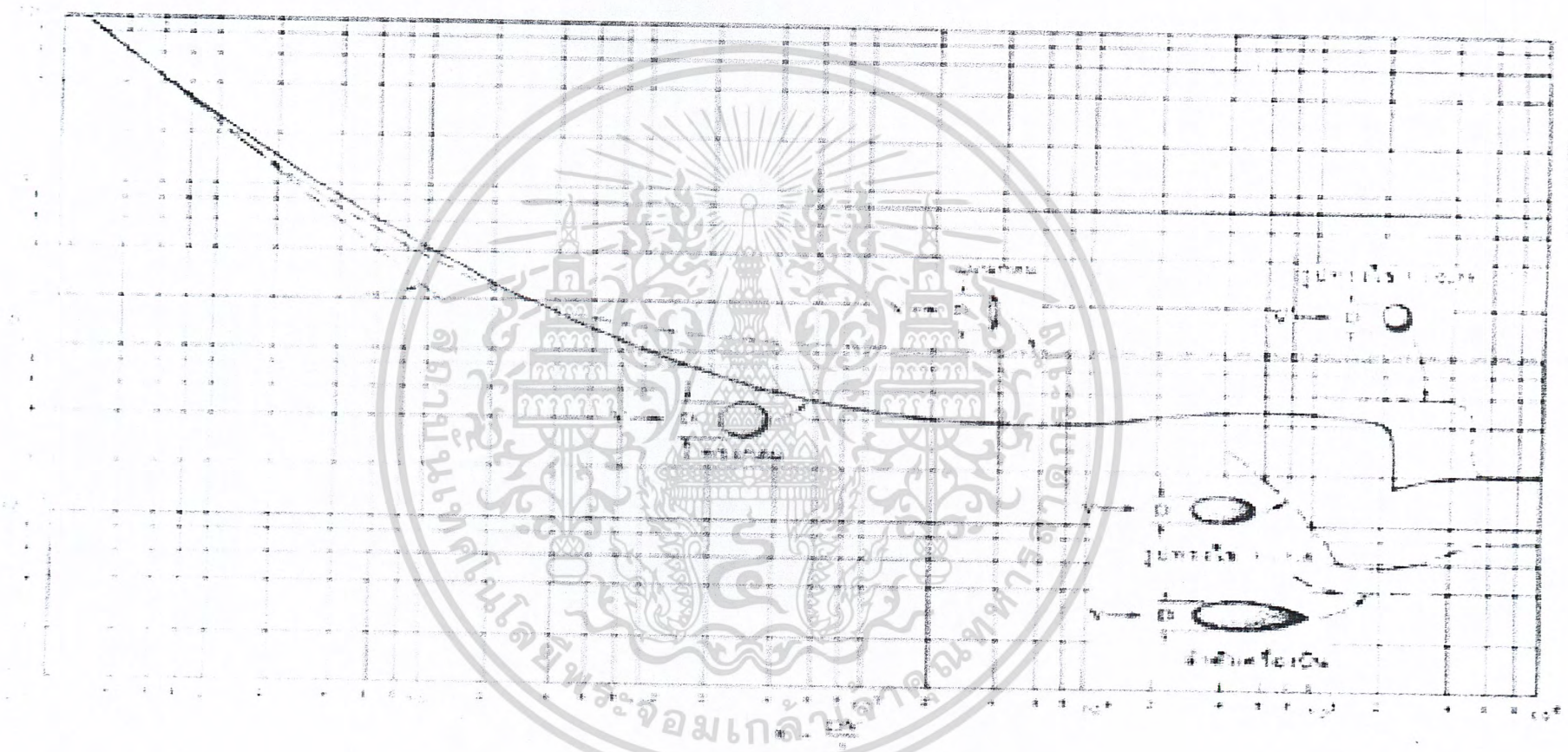
Grade (a)	Orientation (e)	Description (f)	Hardness HB	Tensile Strength $S_{ut}$		Reduction in Area %	True Strain at Fracture $\epsilon_f$	Modulus of Elasticity E		Fatigue Strength Coefficient $\sigma'_f$		Fatigue Strength Exponent b	Fatigue Ductility Coefficient $\epsilon'_F$	Fatigue Ductility Exponent c
				MPa	ksi			GPa	10 <sup>4</sup> psi	MPa	ksi			
4140	L	Q&T, DAT	310	1075	156	60	0.69	200	29.2	1825	265	-0.08	1.2	-0.59
4142	L	DAT	310	1060	154	29	0.35	200	29	1450	210	-0.10	0.22	-0.51
4142	L	DAT	335	1250	181	28	0.34	200	28.9	1250	181	-0.08	0.06	-0.62
4142	L	Q&T	380	1415	205	48	0.66	205	30	1825	265	-0.08	0.45	-0.75
4142	L	Q&T and deformed	400	1550	225	47	0.63	200	29	1895	275	-0.09	0.50	-0.75
4142	L	Q&T	450	1760	255	42	0.54	205	30	2000	290	-0.08	0.40	-0.73
4142	L	Q&T and deformed	475	2035	295	20	0.22	200	29	2070	300	-0.082	0.20	-0.77
4142	L	Q&T and deformed	450	1930	280	37	0.46	200	29	2105	305	-0.09	0.60	-0.76
4142	L	Q&T	475	1930	280	35	0.43	205	30	2170	315	-0.081	0.09	-0.61
4142	L	Q&T	560	2240	325	27	0.31	205	30	2655	385	-0.089	0.07	-0.76
4340	L	HR, A	243	825	120	43	0.57	195	28	1200	174	-0.095	0.45	-0.54
4340	L	Q&T	409	1470	213	38	0.48	200	29	2000	290	-0.091	0.48	-0.60
4340	L	Q&T	350	1240	180	57	0.84	195	28	1655	240	-0.076	0.73	-0.62
5160	L	Q&T	430	1670	242	42	0.87	195	28	1930	280	-0.071	0.40	-0.57
52100	L	SH, Q&T	518	2015	292	11	0.12	205	30	2585	375	-0.09	0.18	-0.56
9262	L	A	260	925	134	14	0.16	205	30	1040	151	-0.071	0.16	-0.47
9262	L	Q&T	280	1000	145	33	0.41	195	28	1220	177	-0.073	0.41	-0.60
9262	L	Q&T	410	565	227	32	0.38	200	29	1855	269	-0.057	0.38	-0.65
950C (d)	LT	HR plate	159	565	82	64	1.03	205	29.6	1170	170	-0.12	0.95	-0.61
950C (d)	L	HR bar	150	565	82	69	1.19	205	30	970	141	-0.11	0.85	-0.59
950X (d)	L	Plate channel	150	440	64	65	1.06	205	30	625	91	-0.075	0.35	-0.54
950X (d)	L	HR plate	156	530	77	72	1.24	205	29.5	1005	146	-0.10	0.85	-0.61
950X (d)	L	Plate channel	225	695	101	68	1.15	195	28.2	1055	153	-0.08	0.21	-0.53

ตารางที่ 2 แสดงค่า  $C_D$  ของทรงกระบอกและรูปทรงอื่นๆใน 2 มิติ



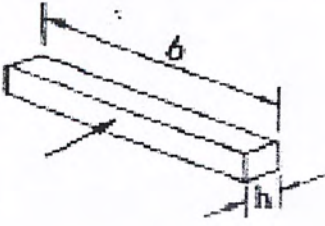






รูปที่ 2 แสดงค่า  $C_D$  ของทรงกระบอกและรูปทรงอื่นๆใน 2 มิติ

ตารางที่ 3 แสดงค่า  $C_D$  ของทรงกลมและรูปทรงอื่นๆใน 3 มิติ



รูปที่ 3 แสดงค่า  $C_D$  ของทรงกลมและรูปทรงอื่นๆใน 3 มิติ

ตารางที่ 4 ค่า  $C_D$  สำหรับรูปทรงต่างๆ ( $Re \geq 1000$ )

วัตถุ	รูปทรง	$C_D$
ทรงกระบอกหน้าสี่ สี่เหลี่ยมจัตุรัส		2.05 ( $b/h = \alpha$ ) 1.05 ( $b/h = 1$ )
จานกลม		1.17
วงแหวน		1.20
ครึ่งทรงกลม		1.42
		0.38
หน้าตัดตัว C		2.30
		1.20

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้