

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การศึกษาค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดของฟันเฟืองตรง

The study of transmission error of involute spur gear system



นางสาว นวินดา ขจรเดชะศักดิ์

ปฏิญานีพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

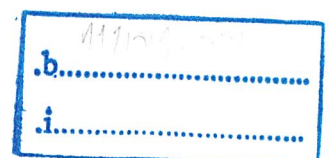
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2546

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน..... 54997  
วัน,เดือน,ปี..... - 4 เม.ย. 2548



การศึกษาค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดของฟันเฟืองตรง  
The study of transmission error of involute spur gear system

จัดทำโดย  
นางสาว นวินดา ขจรเดชะศักดิ์

อาจารย์ที่ปรึกษา  
อ. มนต์ศักดิ์ พิมสาร

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต  
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปริญญาโทปีการศึกษา 2546

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง การศึกษาค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดของฟันเฟืองตรง

The study of transmission error of involute spur gear system

ผู้จัดทำ

1. นางสาว นวินดา ขจรเคชะศักดิ์ รหัสประจำตัว 43010662



อาจารย์ที่ปรึกษา

(อ. มนต์ศักดิ์ พิมสาร)

## การศึกษาค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดของฟันเพื่องตรง

นางสาว นวินดา ขจรเดชะศักดิ์ 43010662  
อ.มนต์ศักดิ์ พิมสาร อาจารย์ที่ปรึกษา  
ปีการศึกษา 2546

### บทคัดย่อ

โครงการนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อทำการศึกษา หาค่าความผิดพลาดของการส่งผ่าน ของชุดกำลังที่ใช้ เพื่องแบบฟันตรง โดยวิธีการศึกษาจะทำโดยการเขียนโปรแกรมขึ้นมา เพื่อหาค่าความผิดพลาดของการส่งผ่าน เมื่อมีการติดตั้งเชิงศูนย์กลาง (Misalignment) และค่าระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงกับทฤษฎี (Change of Center Distance)

ในปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้ มีการแนะนำและประยุกต์ใช้เทคนิคของ Tooth Contact Analysis (TCA) เพื่อตรวจสอบคุณลักษณะของตำแหน่งสัมผัส โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อให้เลียนแบบเงื่อนไขของการขบกัน และตำแหน่งสัมผัสค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดของเพื่องเนื่องจากการติดตั้งเชิงศูนย์กลาง และค่าระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงกับทฤษฎี (Change of Center Distance)

ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมพบว่า การติดตั้งระยะห่างระหว่างเพลาผิดพลาด จะไม่ก่อให้เกิดความผิดพลาดในการส่งผ่าน แต่จะทำให้ได้รัศมีพิศ์การทำงานกับมุมกดทำงานที่เปลี่ยนไป และการติดตั้งแบบเชิงศูนย์กลาง จะก่อให้เกิดความผิดพลาดในการส่งผ่าน

## The study of transmission error of involute spur gear system

Ms. Nawinda Kajorndachasak

Mr. Monsak Pimsarn Advisor

### ABSTRACT

This project presents a transmission error analysis of involute spur gear drives. A computerized approach is performed to investigate the effect of gear misalignment and change of center distance on transmission error.

In this thesis , a mathematical model for the proposed spur gears has been developed. The Tooth Contact Analysis(TCA) technique has been introduced and applied to investigate the characteristic study of bearing contact. Computer program has been developed to simulate various conditions of meshing and its bearing contact. Kinematic errors of the gear train due to axial misalignment and change of center distance can also be calculated by applying the developed computer program.

The results from the analysis have shown that the change of center distance does not induce transmission error , but the working pitch radii and the working pressure angle are changed , and the gear misalignment significantly causes transmission error.

### กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้คงไม่อาจเสร็จได้ด้วยดี หากไม่ได้รับความช่วยเหลือ และความร่วมมือจากหลาย ๆ ฝ่ายด้วยกัน บุคคลแรกที่ต้องกล่าวถึงเพราะเป็นบุคคลสำคัญ ที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จลงได้ก็คือ อาจารย์มนต์ศักดิ์ พิมสาร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้ความเอาใจใส่ แนะนำ และช่วยเหลือเสมอมา ซึ่งต้องขอขอบพระคุณเป็นอย่างมาก

และต้องขอขอบพระคุณบุคคลสำคัญที่สุด ที่ทำให้ข้าพเจ้ามีวันนี้ ก็คือ บิดา มารดา อันเป็นที่เคารพรักยิ่ง ซึ่งได้เลี้ยงดูผู้เขียนมาเป็นอย่างดี พร้อมทั้งให้โอกาสในการศึกษาอย่างเต็มที่ และยังให้กำลังใจเอาใจใส่เสมอมา ในทุก ๆ ด้านอันหาที่เปรียบมิได้ ข้าพเจ้าขอระลึกในพระคุณอันสุดประมาณ และขอกราบขอบพระคุณมา ณ ที่นี้

นวินดา ขจรเคชะศักดิ์

## สารบัญ

## หน้าที่

บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญตาราง	VI
สารบัญภาพ	VII
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	2
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	2
1.4 วิธีการดำเนินงาน	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
บทที่ 2 ทฤษฎีของเกียร์ตรง	4
2.1 บทนำ	4
2.2 คำจำกัดความ	4
2.3 มาตรฐานการบอกขนาดฟัน	5
2.4 กฎการขับและการทำงานของเกียร์ตรง	6
บทที่ 3 เฟืองตรงที่มีรูปร่างแบบ Involute	8
3.1 บทนำ	8
3.2 เรขาคณิตของ Involute Curves	9
3.2.1 Involute และ Evolute	9
3.2.2 การประยุกต์ใช้ Involute Curves กับเฟืองตรง	9
3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาของฟันบนวงกลมหลายๆแบบ	10
3.4 การขบกันของเฟืองตรงที่มีรูปร่างแบบ Involute	12
3.4.1 ค่าคงที่ของอัตราส่วนฟันเฟือง	12
3.4.2 Line of Action	12
3.4.3 Gear Centrodes	13
3.4.4 มุมกด	13
3.4.5 การเปลี่ยนแปลงระยะห่างระหว่างเฟือง ( Change of Center Distance )	13
บทที่ 4 การย้ายระบบพิกัด	15
4.1 บทนำ	15

4.2	กระบวนการหา Transformation matrix	15
4.3	หลักการเลือกใช้ Transformation matrix	16
4.3.1	หมุนรอบแกน X	17
4.3.2	หมุนรอบแกน Y	17
4.3.3	หมุนรอบแกน Z	18
4.4	การย้ายระบบพิกัดในการหมุนของเฟือง	18
4.4.1	การย้ายระบบพิกัดจาก $S_1$ ไปยังระบบพิกัด $S_f$	19
4.4.2	การย้ายระบบพิกัดจาก $S_2$ ไปยังระบบพิกัด $S_f$	19
บทที่ 5	การแก้สมการแบบไม่เชิงเส้น	21
5.1	บทนำ	21
5.2	การแก้ปัญหสมการไม่เชิงเส้นแบบสมการเดียว	21
5.3	การแก้ปัญหสมการไม่เชิงเส้นแบบหลายสมการ	22
บทที่ 6	การวิเคราะห์การขบกันของฟันเฟือง	24
6.1	บทนำ	24
6.2	เงื่อนไขของเส้นสัมผัสที่เชื่อมต่อกัน	24
6.3	การวิเคราะห์การขบกัน	25
6.4	ขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการ TCA	26
บทที่ 7	หลักการทำงานของโปรแกรม	31
7.1	บทนำ	31
7.2	หลักการทำงาน	31
7.3	ขั้นตอนการประมวลผล	34
บทที่ 8	ผลลัพธ์จากการประมวลผล	35
8.1	บทนำ	35
8.2	กรณีที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงตามทฤษฎี ( Change of Center distance )	35
8.3	กรณีที่มีการติดตั้งเยื้องศูนย์ ( Misalignment )	37
บทที่ 9	สรุปและวิจารณ์ผล	40
9.1	สรุปผล	40
9.2	วิจารณ์ผล	40
ภาคผนวก ก		41
บรรณานุกรม		49

## สารบัญตาราง

## หน้าที่

ตารางที่ 2-1 ขนาดเฟืองมาตรฐาน	5
ตารางที่ 8-1 แสดงค่าต่างๆของฟันเฟืองที่ใช้ในการประมวลผล	35
ตารางที่ 8-2 แสดงผลวิเคราะห์จุดสัมผัสของฟันเฟือง และ transmission error ในกรณีที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงกับทฤษฎี	37
ตารางที่ 8-3 แสดงผลวิเคราะห์จุดสัมผัสของฟันเฟือง และ transmission error กรณีที่มีการติดตั้งเชิงศูนย์ $q = 0.0875$ rad	39

## สารบัญภาพ

หน้าที่

รูปที่ 2-1 การเรียกชื่อส่วนของเฟืองตรง	4
รูปที่ 2-2 การทำงานของฟันเฟืองที่ซบกัน	6
รูปที่ 3-1 แสดงการสร้าง Involute Curve	8
รูปที่ 3-2 Involute และ Evolute	9
รูปที่ 3-3 แสดงที่มาของสมการ Involute Curves	10
รูปที่ 3-4 แสดงที่มาของความหนาฟันเฟือง	11
รูปที่ 3-5 แสดงการซบกันของเฟืองตรงที่มีรูปร่างแบบ Involute	12
รูปที่ 3-6 แสดงผลกระทบเมื่อระยะห่างระหว่างฟันเฟืองไม่ตรงตามทฤษฎี	13
รูปที่ 4-1 แสดงที่มาในการย้ายระบบพิกัด	15
รูปที่ 4-2 แสดงการหมุนระบบพิกัดรอบแกน X	17
รูปที่ 4-3 แสดงการหมุนระบบพิกัดรอบแกน Y	17
รูปที่ 4-4 แสดงการหมุนระบบพิกัดรอบแกน Z	18
รูปที่ 4-5 แสดงระบบพิกัดที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการหมุนของเฟือง	18
รูปที่ 4-6 แสดงการย้ายระบบพิกัดจาก $S_1$ ไปยังระบบพิกัด $S_f$	19
รูปที่ 4-7 แสดงการย้ายระบบพิกัดจาก $S_2$ ไปยังระบบพิกัด $S_f$	19
รูปที่ 6-1 แสดงระบบพิกัด	26
รูปที่ 6-2 แสดงพื้นผิว $\Sigma_1$ ของ Pinion	27
รูปที่ 6-3 แสดงพื้นผิว $\Sigma_2$ ของ Gear	27
รูปที่ 6-4 แสดงตำแหน่งและทิศทางของ line of action	30
รูปที่ 7-1 แสดงหน้าต่างของ command window	31
รูปที่ 7-2 แสดงการเปิดหน้าต่าง M-file	32
รูปที่ 7-3 แสดงหน้าต่าง M-file ที่ใช้เขียนโค้ด	32
รูปที่ 7-4 แสดงวิธีทำการประมวลผล	33
รูปที่ 7-5 แสดงผลลัพธ์ในหน้าต่างของ command window	33
รูปที่ 8-1 แสดงการติดตั้งที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงตามทฤษฎี	35
รูปที่ 8-2 แสดงการติดตั้งเพลาแบบเอียงศูนย์	37

## บทที่ 1

### บทนำ

#### 1.1 ความสำคัญและที่มา

ในงานอุตสาหกรรมมีการใช้เฟืองตรงสำหรับการส่งผ่านกำลังกันอย่างแพร่หลาย ตำแหน่งที่เฟืองสัมผัสกันเป็นเส้นตรง เมื่อเฟืองทั้งสองขบกันด้วยเงื่อนไขในอุดมคติ Buckingham[8] , Colbourne[9] , Davidov[10] , Dudley[11] , Litvin[12] , MAAG Gear-Wheel Co.[14] , และ AGMA publications[1-7] เป็นส่วนสำคัญในการสนับสนุนทฤษฎีนี้ ตำแหน่งที่เฟืองสัมผัสกันเป็นจุดสัมผัสที่มาแทนเส้นสัมผัส การติดตั้งเชิงศูนย์อาจเป็นสาเหตุ ให้ตำแหน่งสัมผัสของเฟืองทั้งสองย้ายไปยังขอบของผิวฟันเฟือง ทำให้ความเค้นสัมผัส เสีย และ การสั่นสะเทือนมีค่าเพิ่มขึ้น ค่าส่งผ่านที่ผิดพลาด ( Transmission Error ) จะเกิดขึ้น เมื่อการหมุนของเฟืองทั้งสองมีการติดตั้งเชิงศูนย์

เนื่องจากการเคลื่อนที่ของตำแหน่งสัมผัส ระดับของค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดเป็นหนึ่งในที่มาของเสียงและการสั่นสะเทือน[15] ถ้าออกแบบเฟืองโดยเป็นเฟืองตรงและมีพื้นผิวฟันเรียบสม่ำเสมอ ตำแหน่งสัมผัสของเฟืองนี้คือจุดสัมผัสบริเวณตรงกลางพื้นที่ของผิวฟัน ในขณะที่เดียวกันเนื่องจากความยืดหยุ่นของเฟือง จะส่งผลให้จุดสัมผัสเคลื่อนออกอยู่เหนือพื้นที่ดังกล่าว และความเค้นสัมผัสจะลดลงอย่างมากเมื่อเฟืองทั้งสองขบกันโดยปราศจากการติดตั้งเชิงศูนย์

ในการออกแบบเฟือง ตำแหน่งสัมผัสและค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดเกิดขึ้นจากการผลิตด้วยเครื่องจักร การรวบรวมค่าความผิดพลาดวัดได้โดยขบวนการทางการทดลอง ในปี 1985 Litvin และ Tsay [13] ได้นำเสนอวิธีการที่มีชื่อว่า Tooth Contact Analysis (TCA) สำหรับการวิเคราะห์เฟือง รูปแบบของการสัมผัสและค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดเกิดขึ้นจากการผลิตด้วยเครื่องจักร และการรวบรวมค่าความผิดพลาดของเฟืองที่จับคู่กัน สามารถหาได้โดยประยุกต์ TCA

ในเอกสารนี้มีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมา มีการแนะนำและประยุกต์ใช้เทคนิคของ TCA เพื่อตรวจสอบคุณลักษณะของตำแหน่งสัมผัส โปรแกรมคอมพิวเตอร์ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อให้เลียนแบบเงื่อนไขของการขบกัน และตำแหน่งสัมผัสค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดของเฟืองเนื่องจากการติดตั้งเชิงศูนย์ คอมพิวเตอร์สามารถเลียนแบบเงื่อนไขและหาค่าที่เกี่ยวข้องกับการขบกันของเฟืองได้ เรานำเทคนิค TCA มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาค่าส่งผ่านที่ผิดพลาด

ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมพบว่า การติดตั้งระยะห่างระหว่างเพลาคิดพลาด ( Change of Center Distance ) จะไม่ก่อให้เกิดความผิดพลาดในการส่งผ่าน แต่ตำแหน่งที่ฟันเฟืองสัมผัสกันเปลี่ยนแปลงไป และการติดตั้งแบบเชิงศูนย์ ( Misalignment ) จะก่อให้เกิดความผิดพลาดในการส่งผ่านและทำให้ตำแหน่งที่ฟันเฟืองสัมผัสกันเปลี่ยนแปลงไปด้วย ถ้าเราสามารถวัดค่าของ มุมที่เกิดการเชิงศูนย์ได้ เราก็สามารถคำนวณหา transmission error ได้ การที่ตำแหน่งที่ฟันเฟืองสัมผัสกันเปลี่ยนแปลงไป หรือการเกิดค่า transmission error เป็นปัจจัยหลักที่ทำให้เครื่องจักรเกิดเสียงดัง และการสั่นสะเทือน ดังนั้นจากผลลัพธ์ที่ได้แสดงให้เห็นว่าในกรณีของ misalignment จะก่อให้เกิดเสียงดัง และการสั่นสะเทือน มากกว่ากรณีของ Change of Center Distance

## 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 ศึกษาการสร้างรูปร่างของฟันเฟืองแบบ involute curve

1.2.2 ศึกษาการขบกันของฟันเฟืองโดยใช้หลักการของ Applied Geometry

1.2.3 เขียนโปรแกรม คำนวณค่าความผิดพลาดของการส่งผ่านของฟันเฟืองตรง โดยจะวิเคราะห์ผลของ Change of Center Distance และ Misalignment ที่ส่งผลต่อค่าความผิดพลาดของการส่งผ่าน

## 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการเขียนโปรแกรม เลียนแบบเงื่อนไขการขบกันของเฟืองตรง เพื่อใช้ในการคำนวณค่าความผิดพลาดของการส่งผ่านของฟันเฟืองตรง โดยใช้วิธีการของ Tooth Contact Analysis ( TCA ) สำหรับการวิเคราะห์เฟือง เนื่องจากผู้จัดทำเห็นว่าในการใช้งานจริงยังมีตัวแปรอื่นๆที่ส่งผลกระทบต่อการขบกันของเฟืองตรง แต่ไม่ได้มีการนำมาคำนวณในวิธีการของ TCA ด้วย จึงได้กำหนดขอบเขตของงานวิจัยไว้ดังนี้

1.3.1 มุ่งเน้นศึกษาในส่วนของเฟืองตรง โดยพิจารณาว่าฟันเฟืองนั้นมีรูปร่างตามมาตรฐานที่มีใช้อยู่ในปัจจุบัน AGMA

1.3.2 ค่าความผิดพลาดในกรณีของ Misalignment และหรือ Change of Center Distance สามารถวัดค่าได้

1.3.3 พิจารณาเกียร์เป็นวัตถุแข็งเกร็ง ( Rigid Body ) ไม่มีการเสียรูป

1.3.4 ไม่คิดผลกระทบเนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง

## 1.4 วิธีการดำเนินงาน

ในงานวิจัยนี้เริ่มต้นด้วยการศึกษาทฤษฎีพื้นฐานต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ซึ่งมีอยู่ 4 เรื่องหลักคือ

1.4.1 ศึกษาสมการในการย้ายพิกัดไปยังระนาบอื่น( Transformation ) เพื่อใช้ประโยชน์ในการหมุนของเฟือง

1.4.2 ศึกษารูปร่างของฟันเฟือง ( Gear tooth geometry ) และการขบกันของฟันเฟือง โดยใช้ความสัมพันธ์ของมุมที่หมุนไป

1.4.3 ศึกษาหลักการของการสร้างฟันเฟือง และการขบกันของฟันเฟือง โดยใช้หลักการของ Geometry ซึ่งสมการสำคัญจะประกอบไปด้วย

1.4.3.1 สมการอธิบายผิว (Surface) ของเฟืองและ Normal Vector ของผิว

1.4.3.2 สมการการย้ายพิกัด (Transformation)

1.4.3.3 สมการอธิบายการขบกันของฟันเฟือง(Meshing Equation) ซึ่งสมการนี้จะใช้หาความสัมพันธ์ของการกระจัดเชิงมุมของเฟืองที่ขบกัน

1.4.4 เขียนโปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้ Matlab

หลังจากศึกษาข้อมูลเบื้องต้นแล้ว จึงเข้าสู่ขั้นตอนของการคำนวณหาสมการต่างๆตามที่ต้องการ และนำไปใช้ในการเขียนโปรแกรม เพื่อคำนวณหาค่าผิดพลาดจากการส่งผ่าน โดยจะวิเคราะห์ดูผลของ Change of Center Distance และ Misalignment ที่ส่งผลต่อค่าความผิดพลาดของการส่งผ่าน

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ผลงานวิจัยนี้สามารถช่วยให้ผลิตเครื่องจักร ในส่วนของการส่งกำลังด้วยชุดฟันเฟืองตรง ได้ตรงกับความต้องการมากขึ้น

1.5.2 เป็นข้อมูลเบื้องต้นสำหรับผู้ที่ต้องการศึกษา หรือนำไปพัฒนาใช้กับรูปแบบฟันเฟืองอื่นๆ

## บทที่ 2

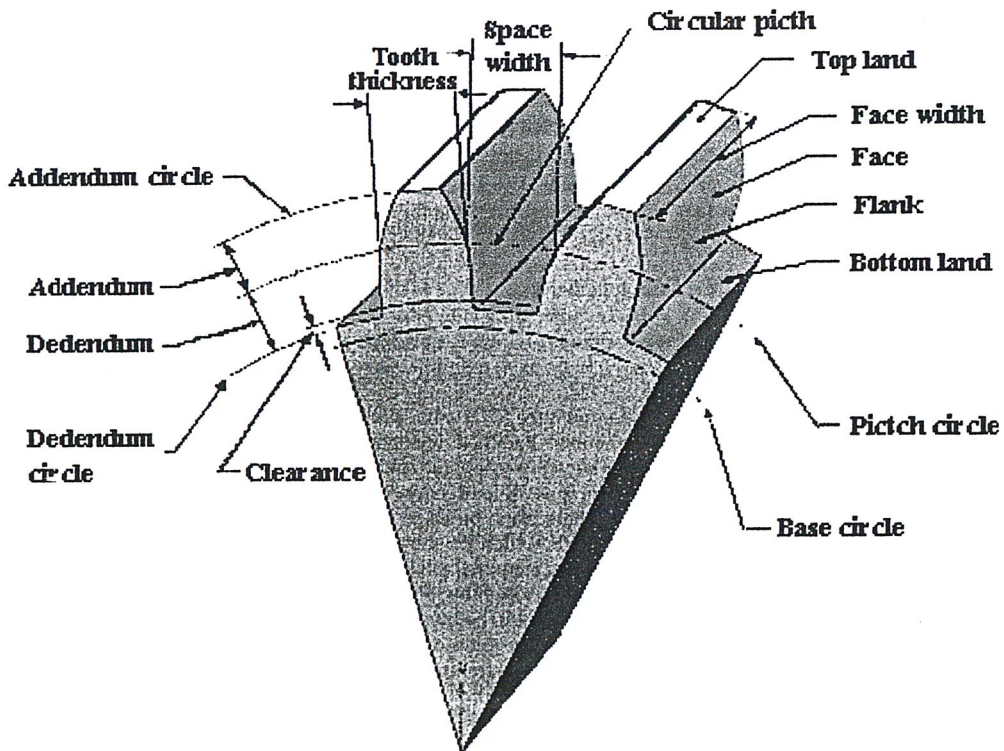
### ทฤษฎีของเฟืองตรง

#### 2.1 บทนำ

เฟืองตรง(spur gear) เป็นชิ้นส่วนเครื่องจักรกลชนิดหนึ่งที่พบอยู่ในเครื่องจักรกลทั่วไป โดยใช้ทำหน้าที่ส่งกำลังและการหมุนจากเพลานึงไปยังอีกเพลานึงที่ขนานกัน ส่วนมากเฟืองขับ(driving gears) จะมีขนาดเล็กกว่าเฟืองตาม (driven gears) และจากนี้จะเรียกชื่อว่า พินเนียน(pinion) และเกียร์(gear) ตามลำดับ แต่ในการใช้งานบางโอกาสอาจใช้เฟืองใหญ่เป็นเฟืองขับก็ได้

#### 2.2 คำจำกัดความ

การให้คำจำกัดความเรียกชื่อชิ้นส่วน การบอกระยะต่างๆ และขนาดของเฟือง พิจารณาจากรูปที่ 2-1 ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2-1 การเรียกชื่อส่วนของเฟืองตรง

วงกลมพิตช์ (pitch circle) เป็นหลักในการเรียกขนาดของเฟือง โดยบอกขนาดของเฟืองด้วยขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ (pitch diameter) ในทางทฤษฎีเฟืองคู่ใดๆที่ขบกัน จะต้องมีการสัมผัสกัน ณ วงกลมพิตช์

เซอกิวลาพิตช์ (circular pitch) ,  $p$  , เป็นระยะที่วัดบนวงกลมพิตช์ จากจุดหนึ่งบนฟันเฟืองไปยังอีกจุดหนึ่ง ณ ตำแหน่งเดียวกันบนฟันถัดไป จากรูปที่ 2-1 จะเห็นได้ว่าระยะนี้มีค่าเท่ากับ ผลรวมของความกว้างฟัน (Tooth thickness) และความกว้างของช่องว่างระหว่างฟัน (Space width)

โมดูล (module) ,  $m$  , เป็นอัตราส่วนระหว่างขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ กับจำนวนฟันบนเฟือง หน่วยที่ใช้วัดคือมิลลิเมตร โมดูลเป็นดัชนีสำหรับบอกขนาดของฟันเฟืองในระบบหน่วยเอสไอ

ไดมิตรัลพิตช์ (diametral pitch) ,  $P$  , เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนฟันบนเฟือง กับขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ หรือเป็นส่วนกลับของโมดูลนั่นเอง ไดมิตรัลพิตช์เป็นดัชนีสำหรับบอกขนาดของฟันเฟืองในระบบหน่วยอังกฤษ หน่วยที่ใช้วัดคือนิ้ว

แอดเดนดัม (addendum) ,  $a$  , หรือช่วงสูงบน เป็นระยะที่วัดในแนวรัศมีระหว่างยอดฟัน (top land) ถึงวงกลมพิตช์

ดีเดนดัม (dedendum) ,  $d$  , หรือช่วงสูงล่าง เป็นระยะที่วัดในแนวรัศมีระหว่างโคนฟัน (bottom land) ถึงวงกลมพิตช์ ฉะนั้นความสูงของฟันเฟืองคือ ผลรวมของค่า  $a$  และ  $d$

เคลียลันซ์ (clearance) ,  $c$  , ในการที่เฟืองคู่หนึ่งขบกัน ดีเดนดัมของเฟืองหนึ่งต้องมีค่ามากกว่าแอดเดนดัมของอีกเฟืองหนึ่ง เพื่อจะได้ไม่เกิดการขัดกัน ผลต่างระหว่างดีเดนดัมและแอดเดนดัม เรียกว่าเคลียลันซ์  $c$

ความหนาของฟัน (face width) ,  $b$  , คือความหนาของฟันเฟืองวัดในทิศทางเดียวกับแนวแกนของเฟือง ซึ่งจะเรียกว่าความหนาเฟือง

### 2.3 มาตรฐานการบอกขนาดฟัน

ดัชนีสำหรับบอกขนาดของฟันเฟือง อาจจะบอกเป็นพิตช์ในระบบหน่วยอังกฤษ หรือบอกเป็นโมดูลในระบบหน่วยเอสไอ จากคำจำกัดความที่ผ่านมาจะได้ว่า

$$\text{ไดมิตรัลพิตช์} \quad P = \frac{N}{d} \quad (2.3.1)$$

โดยที่  $d$  มีหน่วยเป็นนิ้ว

$$\text{โมดูล} \quad m = \frac{d}{N} \quad (2.3.2)$$

โดยที่  $d$  มีหน่วยเป็นมิลลิเมตร

$$\text{เซอควิลลาพิตช์} \quad p = \frac{\pi d}{N} = \pi m \quad (2.3.3)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad pP = \pi \quad (2.3.4)$$

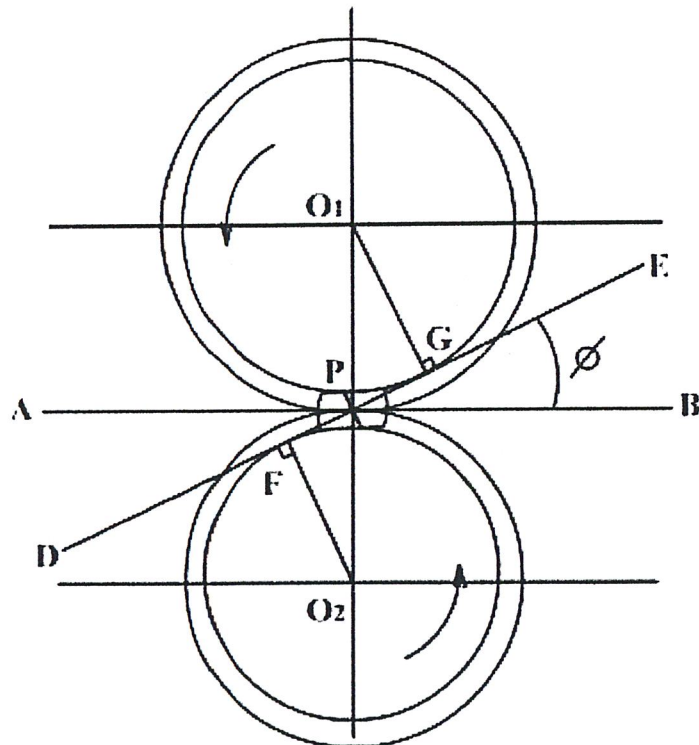
โมดูล m,mm	โมดูล m,mm	โมดูล m,mm	ไดมิตรัลพิตช์ P,in <sup>-1</sup>	ไดมิตรัลพิตช์ P,in <sup>-1</sup>	ไดมิตรัลพิตช์ P,in <sup>-1</sup>
1	4	16	20	5	1.25
1.25	5	20	16	4	1
1.5	6	25	12	3	0.75
2	8	32	10	2.5	0.625
2.5	10	40	8	2	0.50
3	12	50	6	1.5	

ตารางที่ 2-1 ขนาดเฟืองมาตรฐาน

สำหรับเฟืองที่ผลิตโดยใช้วิธีการหล่อ ควรใช้ค่าเชอคิวลาพิตซ์ ทั้งนี้เพราะทำให้สามารถทำแบบหล่อได้สะดวก ส่วนเฟืองที่ผลิตโดยวิธีการตัดกลึง (mechined) มักจะเรียกเป็นไดอะมิทรีลพิตซ์หรือโมดูล เพราะมีอุปกรณ์ในการตัดฟันเฟืองเป็นมาตรฐานอยู่แล้ว ในการเลือกใช้เฟืองควรเลือกให้ตรงกับอุปกรณ์ตัดฟันมาตรฐานที่มีอยู่แล้ว ดังตาราง 2.1 จะสังเกตเห็นว่า เมื่อขนาดโมดูลโตขึ้น ความหนาของฟันเฟืองก็จะเพิ่มขึ้นด้วย แต่เมื่อขนาดของไดอะมิทรีลพิตซ์โตขึ้น ความหนาของฟันเฟืองจะลดลง

#### 2.4 กฎการขับและการทำงานของเฟืองตรง

เฟืองสองอันที่ขบกันจะให้อัตราทดคงที่ก็ต่อเมื่อเฟืองนั้นเป็นไปตามกฎการขับของเฟือง ซึ่งกล่าวไว้ว่ารูปร่างของฟันเฟืองจะต้องทำให้เส้นตั้งฉากร่วม (common normal) ที่ลาก ณ จุดสัมผัสระหว่างฟันทั้งสองผ่านจุดคงที่จุดหนึ่ง ซึ่งอยู่บนเส้นที่โยงระหว่างจุดศูนย์กลางของเฟืองทั้งสองและจุดนี้เรียกว่า จุดพิตซ์ (pitch point)



รูปที่ 2-2 การทำงานของฟันเฟืองที่ขบกัน

พิจารณาจากรูปที่ 2-2 จุดคงที่ดังกล่าวนี้คือจุด P ซึ่งอยู่บนเส้นที่โยงระหว่างจุดศูนย์กลาง  $O_1$  และ  $O_2$  ของเฟืองทั้งสอง รูปร่างของฟันเฟืองที่เป็นไปตามกฎการขับนี้เรียกว่า คอนจูเกตเคอฟ (conjugate curves) และที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ อินวอลูตเคอฟ (involute curves) โดยเริ่มต้นจากวงกลมที่เรียกว่าวงกลมฐาน (base circle) (รายละเอียดการสร้าง involute curves สามารถดูได้จากหัวข้อ 2.5) เส้นตั้งฉากกับ involute curves DE ในรูปเป็นแนวเส้นที่แรงปฏิกริยาที่เฟืองกระทำ เรียกว่า แนวของการกระทำ (line of action) หรือ แนวแรงกด (pressure line) และมุม  $\phi$  ในรูปเรียกว่ามุมกด (pressure angle) เฟืองที่ผลิตขึ้นใช้กับเครื่องจักรกลในปัจจุบันนี้มีมุมกด 20 และ 25 องศา เป็นส่วนมาก สำหรับ

เฟืองที่มีมุมกดเท่ากับ  $14 \frac{1}{2}$  องศา ก็ยังคงมีผลติดออกมาใช้บ้าง ทั้งนี้ก็เพื่อใช้สำหรับการเปลี่ยนเฟืองของเครื่องจักรกลแบบเก่าที่ยังคงมีใช้อยู่

จากการพิจารณารูปสามเหลี่ยม  $O_1FP$  และ  $O_2GP$  ในรูปที่ 2-2 จะพบว่ารัศมีของวงกลมฐานคือ

$$r_{b1} = r_1 \cos \phi \quad (2.4.1)$$

$$r_{b2} = r_2 \cos \phi \quad (2.4.2)$$

โดยที่  $r_1 = \frac{N_1}{2dP}$  และ  $r_2 = \frac{N_2}{2dP}$  คือรัศมีวงกลมพิตช์ของพินิยนและเกียร์ตามลำดับ

หรือเขียนในรูปทั่วไป

$$r_b = r \cos \phi \quad (2.4.3)$$

ระยะทางที่วัดบนวงกลมฐานจากจุดหนึ่งบนฟันเฟือง ไปยังจุดเดียวกันบนฟันเฟืองถัดไปเรียกว่าพิตช์ฐาน ( base pitch ) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับเซอร์คิวลาพิตช์ คือ

$$P_b = p \cos \phi \quad (2.4.4)$$

โดยที่  $\phi$  คือมุมกดของเฟือง

$p$  คือเซอร์คิวลาพิตช์

### บทที่ 3

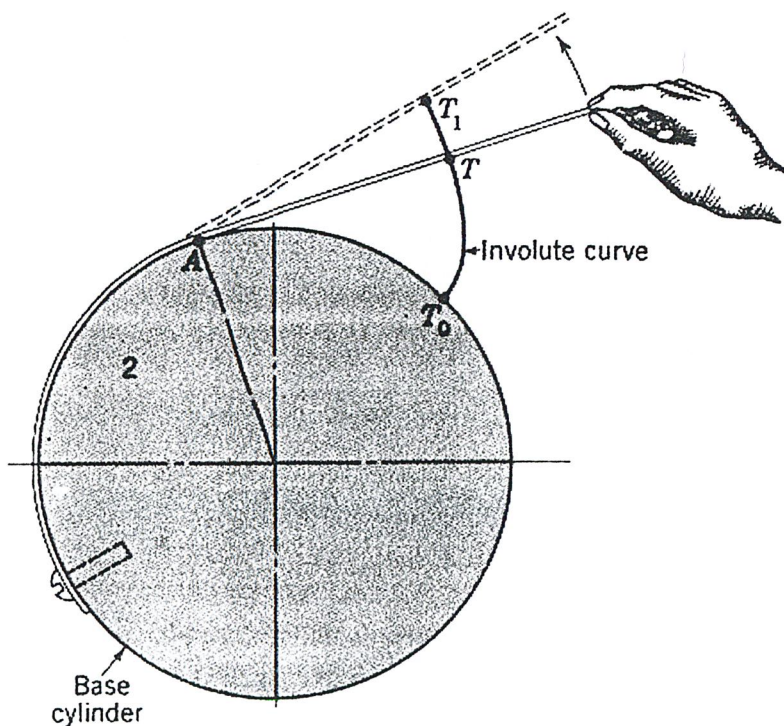
#### เฟืองตรงที่มีรูปร่างแบบ Involute

##### 3.1 บทนำ

เฟืองที่มีรูปร่างแบบ Involute ถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดยออยเลอร์ พบว่ามีการนำไปประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรม เนื่องจากมีข้อดีมากมายดังนี้

1. เครื่องมือที่ใช้ในการสร้างเฟืองที่มีรูปร่างแบบ Involute สามารถผลิตฟันเฟืองได้มีความเที่ยงตรงสูง
2. แปรผันความหนาของฟันเฟืองได้ง่าย และไม่บังคับระยะห่างระหว่างฟันเฟือง โดยสามารถเปลี่ยนการกำหนดเครื่องมือในการสร้างฟันเฟืองได้
3. เฟืองที่มีรูปร่างแบบ Involute โดยที่ไม่ข้อบังคับมาตรฐานในการสร้าง สามารถสร้างได้โดยการประยุกต์ใช้เครื่องมือมาตรฐานให้เข้ากับเฟืองมาตรฐาน
4. การติดตั้งผิดพลาดโดยที่ระยะห่างระหว่างเฟืองไม่ตรงตามทฤษฎี ไม่ก่อให้เกิดค่าการส่งผ่านที่ผิดพลาด

เฟืองที่มีรูปร่างแบบ Involute เราสร้างเส้นโค้งด้วยพื้นฐานความคิดที่ว่า Involute Curve เกิดจากการนำเส้นเชือกมาวางรอบวงกลมฐาน เมื่อคลายออกทีละน้อย ณ จุดใดๆที่ทำให้เกิดมุมฉากระหว่างเส้นเชือกและรัศมีวงกลม จะให้จุด T ใดๆ และเมื่อเรลากเส้นเชื่อมจุด T จะก่อให้เกิด Involute Curve ดังแสดงในรูปที่ 3-1



รูปที่ 3-1 แสดงการสร้าง Involute Curve

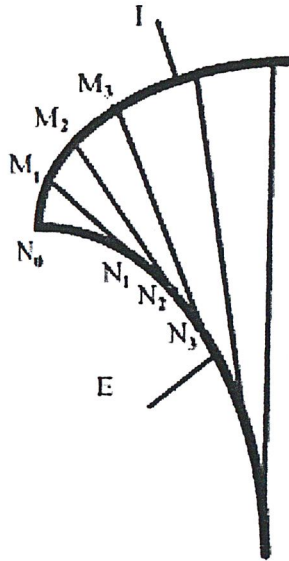
### 3.2 เรขาคณิตของ Involute Curve

เริ่มด้วยคำจำกัดความของคำว่า Involute และ Evolute ของเส้นโค้ง

#### 3.2.1 Involute และ Evolute

พิจารณาเส้นโค้ง I จากรูปที่ 3-2 ให้  $\overline{M_i N_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) แทนรัศมีส่วนโค้งของเส้นโค้ง I ที่จุด  $M_i$  โดยที่  $N_i$  เป็นจุดศูนย์กลางของส่วนโค้ง ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของส่วนโค้ง เราเรียก  $N_i$  ว่า evolute (E) ของเส้นโค้ง I ลักษณะหลักของ E, evolute ของเส้นโค้ง I มีดังนี้

1. ส่วนของเส้นตรง  $M_i N_i$  ที่จุด  $M_i$  ของเส้นโค้ง I สัมผัสกับ evolute (E)
2. evolute ของเส้นโค้ง I เป็น envelope กับตำแหน่งของ  $M_i N_i$  ไปยัง I



รูปที่ 3-2 Involute และ Evolute

#### 3.2.2 การประยุกต์ใช้ Involute Curve กับเฟืองตรง

พิจารณากรณีเฉพาะเมื่อว่า evolute (E) เป็นวงกลม Involute I สำหรับกรณีเฉพาะเป็นรูปร่างฟันเฟืองของเฟืองตรง evolute มีรัศมีวงกลม ( $r_b$ ) ซึ่งเราเรียกว่า base circle การแยกออกจากกันทั้งสองด้านของ involute curve แสดงในรูปที่ 3-3 ถูกสร้างจากจุด  $M_0$  ของเส้นตรง มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา และทวนเข็มนาฬิกา โดย Involute Curve ที่แยกออกจากกันแต่ละคู่ นั้น เป็นรูปร่างแต่ละด้านของฟันเฟือง

การวิเคราะห์รูปร่างของ Involute Curve ในส่วนที่สำคัญมีดังต่อไปนี้

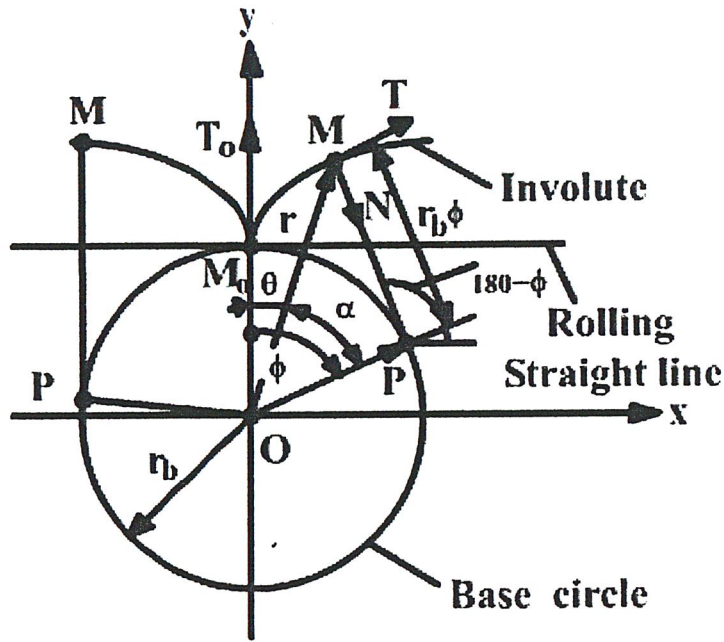
1. โดยทั่วไปจุด  $M$  ของ Involute Curve หาได้โดยสมการเวกเตอร์ดังต่อไปนี้

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} \quad (3.2.1)$$

โดยที่

$$\overline{OP} = r_b [\sin \phi \quad \cos \phi]^T \quad (3.2.2)$$

$$\overline{PM} = PM [-\cos \phi \quad \sin \phi]^T \quad (3.2.3)$$



รูปที่ 3-3 แสดงที่มาของสมการ Involute Curve

2. เนื่องจากการหมุนโดยปราศจากการลื่นไหล เราจะได้ว่า

$$PM = M_0P = r_b\phi \quad (3.2.4)$$

โดยที่  $\phi$  เป็นมุมที่สัมพันธ์กับการหมุน

3. จากสมการ (3.2.1) – (3.2.4) จะได้ว่า

$$x = r_b(\sin\phi - \phi\cos\phi) \quad y = r_b(\cos\phi + \phi\sin\phi) \quad (3.2.5)$$

รูปร่างในแบบอื่นๆของ Involute Curve ขึ้นอยู่กับการประยุกต์โดยการแปรเปลี่ยนตัวแปร  $\alpha$  สมการของ Involute Curve ที่อาจนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างสมบูรณ์คือ

$$x = r\sin\theta \quad y = r\cos\theta \quad (3.2.6)$$

โดยที่

$$r = \frac{r_b}{\cos\alpha}, \quad r_b(\theta + \alpha) = M_0P, \quad M_0P = PM$$

$$PM = r_b \tan\alpha, \quad \theta = \tan\alpha - \alpha \quad (3.2.7)$$

ฟังก์ชัน  $\theta(\alpha)$  ถูกกำหนดโดย  $\text{inv}\alpha$

จากสมการ (3.2.6) และ (3.2.7) จะได้ว่า

$$x = \frac{r_b}{\cos\alpha} \sin(\text{inv}\alpha), \quad y = \frac{r_b}{\cos\alpha} \cos(\text{inv}\alpha) \quad (3.2.8)$$

และ

$$\text{inv}\alpha = \tan\alpha - \alpha \quad (3.2.9)$$

### 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาของฟันบนวงกลม

พิจารณาว่าความหนาของฟันเฟือง ( $t_p$ ) เท่ากับ  $\widehat{AA}$  บนวงกลมพิตซ์ ดังแสดงในรูปที่ 3-4 เป้าหมายของเราคือ การหาความหนาของฟันเฟือง ( $t_x$ ) ที่มีค่าเท่ากับ  $\widehat{BB'}$  บนวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ  $r_x$

โดยที่  $t_x$  ต้องอยู่ในเทอมของ  $P$  , มุมกด ( $\alpha_c$ ) , จำนวนฟันของเฟือง ( $N$ ) และรัศมี  $r_x$

ครึ่งหนึ่งของความหนาฟันเฟือง และมุม  $\beta$  (หรือ  $\beta_x$ ) ที่สอดคล้องกัน เป็นความสัมพันธ์ที่อธิบายได้ด้วยสมการดังนี้

$$\beta = \frac{AA}{2r_p} = \frac{t_p}{2r_p} \quad (3.3.1)$$

$$\beta_x = \frac{t_x}{2r_x} \quad (3.3.2)$$

จากรูปที่ 3-4 เราสามารถเขียนสมการได้ว่า

$$\beta_x = \beta + \text{inv}\alpha_c - \text{inv}\alpha_x \quad (3.3.3)$$

โดยที่

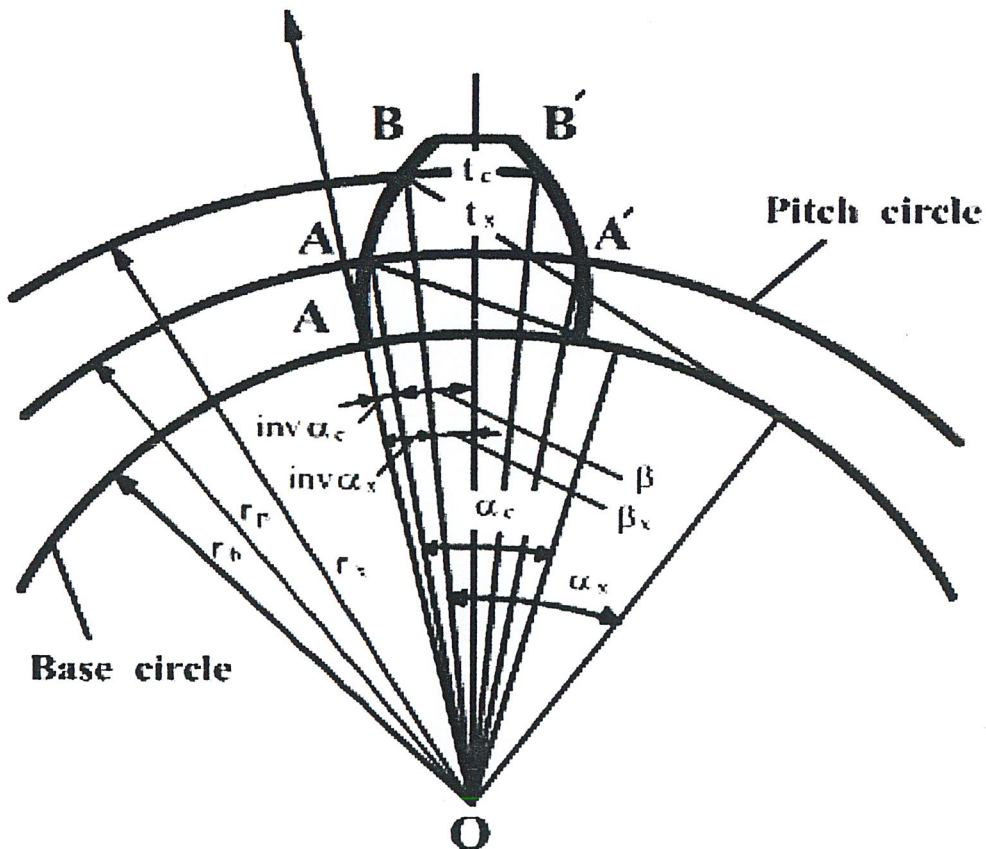
$$\begin{aligned} \text{inv}\alpha_c &= \tan \alpha_c - \alpha_c, & \text{inv}\alpha_x &= \tan \alpha_x - \alpha_x \\ \cos \alpha_x &= \frac{r_b}{r_x} = \frac{N \cos \alpha_c}{2Pr_x} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

ค่าโดยทั่วไปของ  $t_p$  สำหรับมาตรฐานฟันเฟืองคือ

$$t_p = \frac{P_c}{2} = \frac{\pi}{2P} \quad (3.3.5)$$

สมการ (3.3.1) – (3.3.3) แสดงให้เห็นว่า

$$t_x = r_x \left[ \frac{t_p}{r_p} + 2(\text{inv}\alpha_c - \text{inv}\alpha_x) \right] \quad (3.3.6)$$



รูปที่ 3-4 แสดงที่มาของความหนาฟันเฟือง

ขั้นตอนสำหรับการคำนวณหา  $t_x$  มีดังนี้

1. หาค่า  $\cos \alpha_x$

$$\cos \alpha_x = \frac{N \cos \alpha_c}{2Pr_x}$$

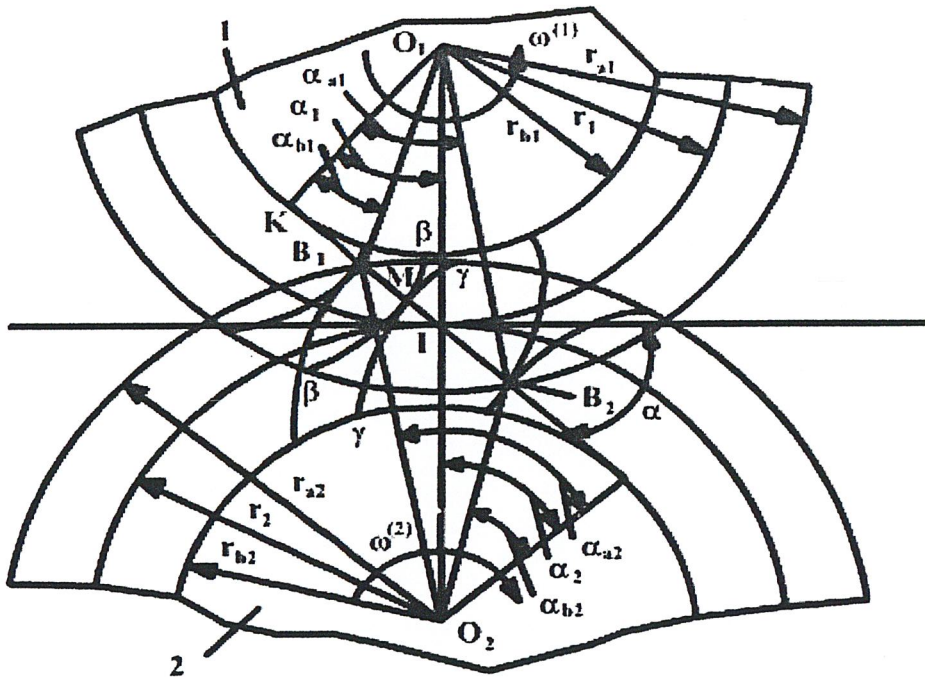
2. หาค่า  $\text{inv} \alpha_x$

$$\text{inv} \alpha_x = \tan \alpha_x - \alpha_x$$

3. หาค่า  $t_x$  โดยใช้สมการ (3.3.6)

### 3.4 การขบกันของเฟืองตรงที่มีรูปร่างแบบ Involute

รูปที่ 3-5 แสดงรูปร่างแบบ Involute ด้วย  $\widehat{\beta\beta}$  และ  $\widehat{\gamma\gamma}$  ของฟันเฟืองทั้งสองที่จับคู่กัน เส้นโค้งเหล่านี้อธิบายได้โดยรัศมีวงกลมฐานของ  $r_{b1}$  และ  $r_{b2}$  ตามลำดับ



รูปที่ 3-5 แสดงการขบกันของเฟืองตรงที่มีรูปร่างแบบ Involute

#### 3.4.1 ค่าคงที่ของอัตราส่วนฟันเฟือง

เราสามารถอธิบายการหมุนได้โดย อัตราส่วนคงที่ของความเร็วเชิงมุม เพราะโดยปกติแล้ว  $\overline{KL}$  จะตัดกับ Involute Curve ณ ตำแหน่งเดิมเสมอ (จุด  $I$  ในรูปที่ 3-5) จุดนี้คือจุดที่เกิดการสัมผัสกันของฟันเฟืองทั้งสองเมื่อมีการหมุนไปนั่นเอง

#### 3.4.2 Line of Action

line of action คือ  $\overline{KL}$  ซึ่งสัมผัสกับวงกลมฐาน  $\overline{KL}$  เป็นมาตรฐานโดยทั่วไปในการสร้างฟันเฟืองที่ดี

### 3.4.3 Gear Centroides

เราเรียกรัศมีของวงกลม ( $\overline{O_1I}, \overline{O_2I}$ ) ว่า gear centroides โดยทั่วไป gear centroides จะมีค่าไม่เท่ากับวงกลมพิตช์

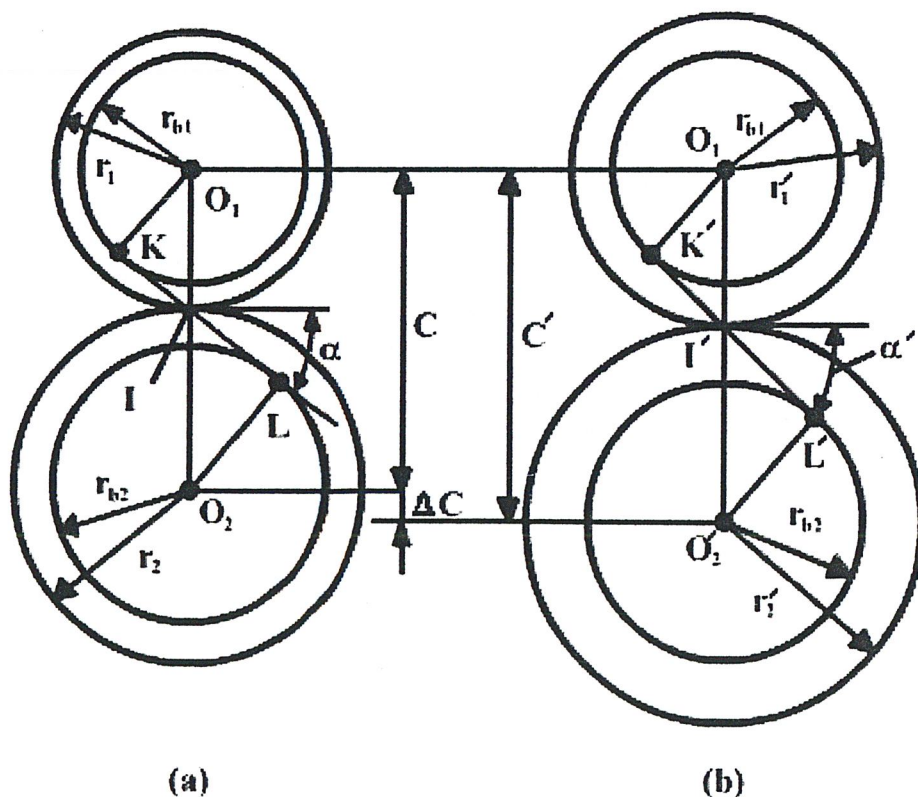
### 3.4.4 มุมกด

มุมกด  $\alpha$  เป็นมุมที่เกิดจากการตัดกันของ line of action ( $\overline{KL}$ ) และ gear centroides โดยทั่วไป มุมกดจะมีค่าไม่เท่ากับมุมของ rack-cutter  $\alpha_c$  หรืออาจมีค่าเท่ากันได้ในกรณีเฉพาะเท่านั้น

### 3.4.5 การเปลี่ยนแปลงระยะห่างระหว่างฟันเฟือง ( Change of Center Distance )

การที่เราติดตั้งระยะห่างระหว่างฟันเฟืองไม่ตรงตามทฤษฎีนั้น จะไม่ส่งผลกระทบต่ออัตราส่วนของฟันเฟือง  $m_{12}$  แต่จะส่งผลกระทบต่อมุมกด และรัศมีของ gear centroides เราสามารถพิสูจน์ข้อความข้างต้นดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. เมื่อพิจารณาถึงรูปร่างของฟันเฟือง ส่วนของเส้นโค้ง  $\widehat{\beta\beta}$  และ  $\widehat{\gamma\gamma}$  และวงกลมฐานที่สอดคล้องกันแล้ว เราได้ส่วนของเส้นโค้ง  $\widehat{\beta\beta}$  และ  $\widehat{\gamma\gamma}$  มาจากรัศมีของวงกลมฐาน  $r_{b1}$  และ  $r_{b2}$  ตามลำดับ



รูปที่ 3-6 แสดงผลกระทบเมื่อระยะห่างระหว่างฟันเฟืองไม่ตรงตามทฤษฎี

2. จากรูปที่ 3-6 แสดงให้เห็นว่าระยะห่างระหว่างฟันเฟืองทั้งสอง เริ่มด้วยระยะ  $C$  [รูปที่ 3-6 (a)] และระยะห่างระหว่างฟันเฟืองทั้งสองมีค่าเท่ากับ  $C' = C + \Delta C$  [รูปที่ 3-6 (b)] line of action ของ

กรณีแรกคือส่วนของเส้นตรง  $\overline{KL}$  และกรณีที่สองคือส่วนของเส้นตรง  $\overline{K'L'}$  โดยที่ line of action ตัดกับ gear centrodes ที่จุด  $I$  และ  $I'$  ตามลำดับ จะสังเกตเห็นว่าตำแหน่งที่เส้นทั้งสองตัดกันของทั้งสองกรณีนั้น เป็นตำแหน่งเดียวกัน ดังนั้นอัตราส่วนของเฟืองจึงเป็นค่าคงที่

3. เนื่องจากระยะห่างระหว่างฟันเฟืองไม่ตรงตามทฤษฎี ทำให้มุมกดเปลี่ยนแปลงเป็น  $\alpha'$  และรัศมีของ gear centrodes  $r'_i$  ( $i=1,2$ ) มีค่าไม่เท่าเดิม ( $r_i$ )

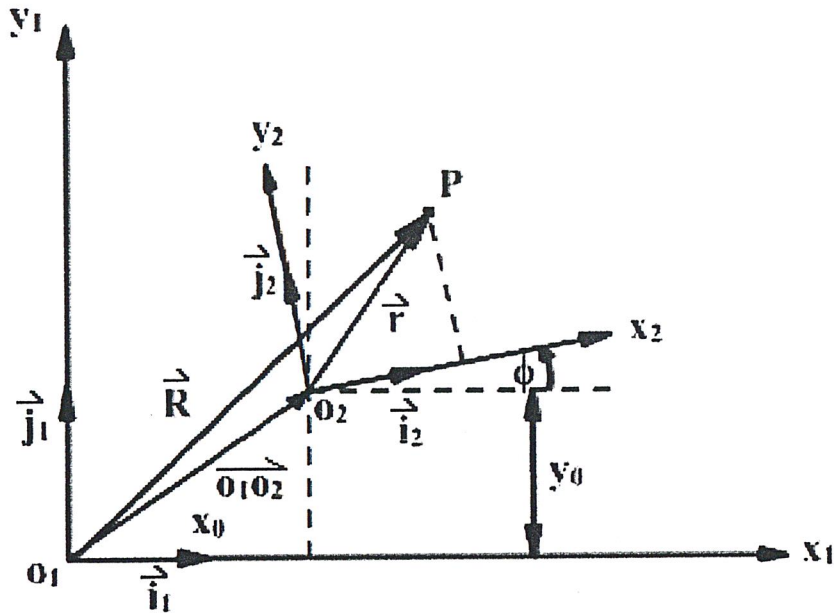
4. เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าอัตราส่วนของฟันเฟืองมีค่าเท่ากัน ทั้งสองกรณี ด้วยสมการต่อไปนี้

$$m_{12} = \frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(2)}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r'_2}{r'_1} \quad (3.4.1)$$

## บทที่ 4 การย้ายระบบพิกัด

### 4.1 บทนำ

การย้ายระบบพิกัด เป็นการบอกตำแหน่งของเวกเตอร์ในระบบพิกัดใหม่ เมื่อเปรียบเทียบกับตำแหน่งของเวกเตอร์ในระบบพิกัดเดิม



รูปที่ 4-1 แสดงที่มาในการย้ายระบบพิกัด

จากรูปที่ 4-1 แสดงให้เห็นว่า ส่วนของเส้นตรง  $O_1O_2$  คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด  $O_2$  เทียบกับระบบพิกัด  $X_1 - Y_1$  เราสามารถบอกตำแหน่งของจุด P ได้ 2 แบบคือ  $\vec{r}$  เมื่อเทียบกับระบบพิกัด  $X_2 - Y_2$  และ  $\vec{R}$  เมื่อเทียบกับระบบพิกัด  $X_1 - Y_1$  เราจะหา  $\vec{R}$  ได้ โดยอาศัยการย้ายระบบพิกัดนั่นเอง

### 4.2 กระบวนการหา Transformation matrix

จากรูปที่ 4-1 เราสามารถบอกตำแหน่งของจุด P ในรูปเวกเตอร์ได้ 2 แบบดังนี้

1. ในระบบพิกัด  $X_2 - Y_2$

$$\vec{r} = x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 \quad (4.2.1)$$

2. ในระบบพิกัด  $X_1 - Y_1$

$$\vec{R} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 \quad (4.2.2)$$

พิจารณาจากรูปที่ 4-1 จะสังเกตเห็นว่า  $\vec{R}$  นั้น เป็นผลบวกของ ส่วนของเส้นตรง  $O_1O_2$  และ  $\vec{r}$  เราสามารถเขียน  $\vec{R}$  ให้อยู่ในรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\vec{R} = O_1O_2 + \vec{r} \quad (4.2.3)$$

กำหนดให้

$$O_1O_2 = x_0\vec{i}_1 + y_0\vec{j}_1 \quad (4.2.4)$$

นำค่าจากสมการ (4.2.1),(4.2.2) และ (4.2.4) แทนลงในสมการ (4.2.3) จะได้สมการใหม่ดังต่อไปนี้

$$x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 = x_0\vec{i}_1 + y_0\vec{j}_1 + x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 \quad (4.2.5)$$

ทำการ dot สมการ (4.2.5) กับ  $\vec{i}_1$  โดยคิดว่า  $\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = 1$  และ  $\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = 0$

และจากสูตรพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เราจะได้  $\vec{i}_2 \cdot \vec{i}_1 = \cos \phi$  และ  $\vec{j}_2 \cdot \vec{i}_1 = -\sin \phi$  เมื่อแทนค่าต่างๆลงไปจะได้สมการดังนี้

$$x_1 = x_0 + x_2 \cos \phi - y_2 \sin \phi \quad (4.2.6)$$

ทำการ dot สมการ (4.2.5) กับ  $\vec{j}_1$  โดยคิดว่า  $\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 = 1$  และ  $\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = 0$

และจากสูตรพื้นฐานทางคณิตศาสตร์จะได้  $\vec{j}_2 \cdot \vec{j}_1 = \cos \phi$  และ  $\vec{i}_2 \cdot \vec{j}_1 = \sin \phi$  เมื่อแทนค่าต่างๆลงไปจะได้สมการดังนี้

$$y_1 = y_0 + x_2 \sin \phi + y_2 \cos \phi \quad (4.2.7)$$

นำสมการ (4.2.6) และ (4.2.7) มาจัดรูปให้เป็นสมการเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & x_0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

จากนี้ไปจะเรียก  $[M_{21}] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & x_0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ว่า Transformation Matrix

โดยที่ เลข 1 หลัง M แสดงถึงระบบพิกัดใหม่

เลข 2 หลัง M แสดงถึงระบบพิกัดเก่า

### 4.3 หลักการเลือกใช้ Transformation matrix

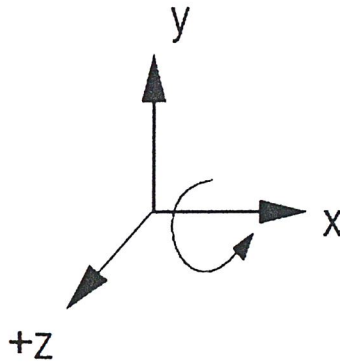
จากหัวข้อที่แล้ว เราสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการย้ายระบบพิกัด 3 มิติโดยการหมุนได้ โดยพิจารณาว่าเราต้องการหมุนระบบพิกัดรอบแกนใด และเลือกใช้ Transformation Matrix พื้นฐาน โดยมีหลักเกณฑ์ดังต่อไปนี้

- มุม  $\phi$  ใน Transformation Matrix พื้นฐาน คือมุมที่หมุนไปจากระบบพิกัดเดิม
- ถ้าต้องการย้ายระบบพิกัดโดยการหมุนในทิศทางเดียวกับรูปที่แสดงไว้ ให้ใช้ Transformation Matrix พื้นฐานที่ให้ไว้ได้เลย แต่ถ้าต้องการทิศทางตรงข้ามให้เปลี่ยนเครื่องหมายหน้า  $\sin \phi$  จากบวกเป็นลบ และจากลบให้เป็นบวก
- พจน์ของ  $x_0, y_0, z_0$  ที่ปรากฏอยู่ใน Transformation Matrix พื้นฐาน แสดงถึงระยะห่างระหว่างจุดกำเนิดของระบบพิกัดเก่าและระบบพิกัดใหม่ ถ้าเป็นจุดเดียวกัน ค่าของ  $x_0, y_0, z_0$  ใน

Transformation Matrix พื้นฐานจะมีค่าเท่ากับศูนย์ แต่ถ้าไม่ใช่จุดเดียวกันให้หารระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด โดยค่าที่ได้จะอยู่ในรูปของระยะห่างระหว่างแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับและแทนค่าลงใน Transformation Matrix พื้นฐาน

Transformation Matrix พื้นฐานที่ใช้ในการหมุนรอบแกนต่างๆมีดังนี้

#### 4.3.1 หมุนรอบแกน X

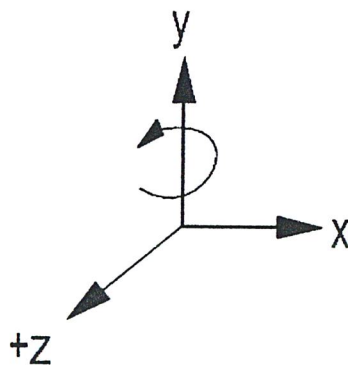


รูปที่ 4-2 แสดงการหมุนระบบพิกัดรอบแกน X

จากรูปที่ 4-2 ถ้าเราต้องการย้ายระบบพิกัด 3 มิติ ด้วยการหมุนระบบพิกัดรอบแกน X สามารถใช้ Transformation Matrix ได้ดังนี้

$$[M_{21}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & y_0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

#### 4.3.2 หมุนรอบแกน Y



รูปที่ 4-3 แสดงการหมุนระบบพิกัดรอบแกน Y

จากรูปที่ 4-3 ถ้าเราต้องการย้ายระบบพิกัด 3 มิติ ด้วยการหมุนระบบพิกัดรอบแกน Y สามารถใช้ Transformation Matrix ได้ดังนี้

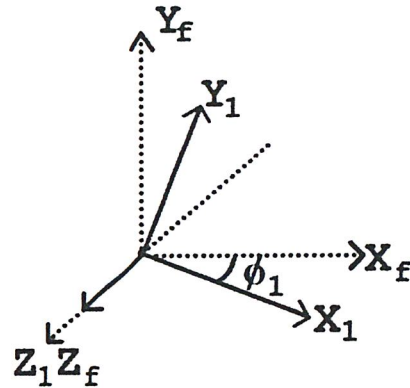
$$[M_{21}] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$



#### 4.4.1 การย้ายระบบพิกัดจาก $S_1$ ไปยังระบบพิกัด $S_f$

จากรูปที่ 4-6 แสดงให้เห็นว่าระบบพิกัด  $S_1$  ทำมุมกับระบบพิกัด  $S_f$  เป็นมุม  $\phi_1$  ทิศทางตามเข็มนาฬิกา(clockwise) รอบแกน Z เราสามารถย้ายระบบพิกัดได้โดยอาศัยสมการเมตริกซ์ดังนี้

$$[\bar{R}_f] = [M_{f1}] [\bar{R}_1] \quad (4.4.1)$$



รูปที่ 4-6 แสดงการย้ายระบบพิกัดจาก  $S_1$  ไปยังระบบพิกัด  $S_f$

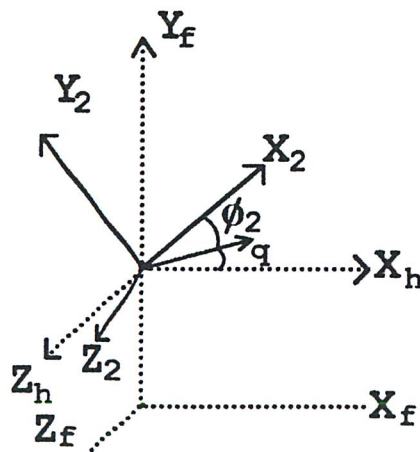
พิจารณาจากหลักเกณฑ์การเลือก Transformation Matrix จะได้ว่า

$$[M_{f1}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

โดยที่  $[\bar{R}_1]$  คือตำแหน่งในระบบพิกัดเก่า และ  $[\bar{R}_f]$  คือตำแหน่งในระบบพิกัดใหม่ อยู่ในรูปของเวกเตอร์ดังนี้

$$[\bar{R}_1] = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\bar{R}_f] = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

#### 4.4.2 การย้ายระบบพิกัดจาก $S_2$ ไปยังระบบพิกัด $S_f$



รูปที่ 4-7 แสดงการย้ายระบบพิกัดจาก  $S_2$  ไปยังระบบพิกัด  $S_f$

จากรูปที่ 4-7 แสดงให้เห็นว่าระบบพิกัด  $S_2$  ทำมุมกับระบบพิกัด  $S_h$  เป็นมุม  $\phi_2$  ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา(counterclockwise) รอบแกน Z และระบบพิกัด  $S_2$  ทำมุมกับระบบพิกัด  $S_h$  เป็นมุม  $q$  รอบแกน Y เราสามารถย้ายระบบพิกัดได้โดยอาศัยสมการเมตริกซ์ดังนี้

$$[\bar{R}_f] = [M_{fh}][M_{hc}][M_{c2}][\bar{R}_2] \quad (4.4.4)$$

พิจารณาจากหลักเกณฑ์การเลือก Transformation Matrix จะได้ว่า

$$[M_{fh}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.5)$$

$$[M_{hc}] = \begin{bmatrix} \cos q & 0 & \sin q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin q & 0 & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

$$[M_{c2}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

โดยที่  $[\bar{R}_2]$  คือตำแหน่งในระบบพิกัดเก่า และ  $[\bar{R}_f]$  คือตำแหน่งในระบบพิกัดใหม่ อยู่ในรูปของเวกเตอร์ดังนี้

$$[\bar{R}_2] = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\bar{R}_f] = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

## บทที่ 5

### การแก้สมการแบบไม่เชิงเส้น

#### 5.1 บทนำ

ในการแก้ปัญหสมการแบบไม่เชิงเส้นนั้น มีเทคนิคที่นิยมใช้กันอยู่หลายเทคนิคด้วยกัน อย่างเช่น วิธีการ Successive Substitution , วิธี Bisection , วิธี Secant และวิธี Newton-Raphson โดยเทคนิค Successive Substitution และวิธี Newton-Raphson จะเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากกว่าวิธีอื่นๆ แต่โดยรวมแล้วทุกวิธีจะมีข้อดีที่แตกต่างกัน ซึ่งเหมาะกับลักษณะของปัญหาที่แตกต่างกันด้วย

สำหรับการศึกษาทำความเข้าใจในเรื่องของวิธีการแก้ปัญหสมการแบบไม่เชิงเส้นนั้น มีข้อดีอยู่ 2 ประการด้วยกัน ประการแรกคือ ไม่มีวิธีการไหนที่เหมาะสมกับปัญหาทุกแบบ ดังนั้นถ้าเข้าใจหลักการหรือวิธีการแก้ปัญหของทุกวิธี จะสามารถแก้ปัญหของสมการไม่เชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพและได้ผลลัพธ์อย่างรวดเร็ว ประการที่สองคือ ไม่มีวิธีการไหนเลยที่สามารถหาค่าที่ดีที่สุด ถ้าปราศจากค่าเริ่มต้น แน่แน่นอนว่าวิธีการ Newton-Raphson สามารถแก้ไขระบบของสมการไม่เชิงเส้น แต่ถ้าระบบนั้นมีค่าสมการจำนวน  $n$  สมการ ขั้นตอนแรกของการแก้ปัญหาคือ การวิเคราะห์และประเมินค่าของฟังก์ชันในรูปของ  $n^2$  แล้วจึงหาค่าอนุพันธ์ย่อย ซึ่งข้อจำกัดนี้ทำให้วิธีการ Newton-Raphson ไม่สามารถใช้แก้ปัญหได้

ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงวิธีการแก้ปัญหสมการไม่เชิงเส้นแบบสมการเดียว และแบบหลายสมการ ด้วยวิธีของ Newton-Raphson

#### 5.2 การแก้ปัญหสมการไม่เชิงเส้นแบบสมการเดียว

ถ้าเรามีฟังก์ชันดังนี้

$$f(x) = 0 \quad (5.2.1)$$

วิธีการของ Newton-Raphson นั้นจะทำการประมาณค่าของผลลัพธ์ของการหาอนุพันธ์ของ  $f(x)$  ว่ามีค่าเท่ากับ

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \quad (5.2.2)$$

แต่ว่าในตอนี้ เราไม่ทราบค่าตั้งต้นของ  $f(x)$  สมมติค่าเริ่มต้นเป็น  $x_0$  และให้  $x_1$  เป็นผลลัพธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = 0$  จะสามารถหา  $x_1$  ได้โดย

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{f'(x_0)} \quad (5.2.3)$$

ในขั้นตอนนี้ค่า  $x_1$  เป็นผลลัพธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = 0$  ได้ก็ต่อเมื่อ  $f(x_1) = 0$  และเขียนสมการ (5.2.3) ได้ใหม่ดังนี้

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (5.2.4)$$

นี่คือวิธีของ Newton-Raphson ซึ่งจะอาศัยค่า  $x_0$  ,  $f(x_0)$  ,  $f'(x_0)$  โดยที่เราสามารถประมาณค่าของค่าตั้งต้นให้มีค่าใกล้เคียงกับค่า  $x_1$  ได้ แต่ค่าที่ได้นั้นก็ยังคงเป็นค่าที่ได้จากการประมาณ ไม่ใช่ค่าของ

คำตอบจริงๆ ของฟังก์ชันนั้นๆ เพราะฉะนั้นเราจะต้องใช้วิธีการ Newton-Raphson อีกรอบหนึ่ง โดยในการคำนวณรอบที่สองนี้ จะใช้สมการ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (5.2.5)$$

เราจะทำซ้ำโดยอาศัยสมการข้างต้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้ค่า  $x_{i+1}$  และค่า  $x_i$  ที่มีค่าใกล้เคียงกันเท่าที่เรากำหนดไว้ ( ในวิธีการของ Newton-Raphson จะเรียกว่า เข้าใกล้คำตอบที่ต้องการ ) ซึ่งจะได้คำตอบที่มีความถูกต้องมากที่สุด โดยเราจะกำหนดค่าความผิดพลาดในการหาคำตอบแต่ละรอบเท่ากับ  $e_i$  โดยค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์ ( absolute error ) จะมีค่าเท่ากับ

$$e_{ai} = x_{i+1} - x_i \quad (5.2.6)$$

และค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ ( relative error ) มีค่าเท่ากับ

$$e_{ri} = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \quad (5.2.7)$$

สำหรับการหาผลลัพธ์ การทำซ้ำจะหยุดหรือสิ้นสุดเมื่อค่าสัมบูรณ์ของความผิดพลาดสัมพัทธ์จะมีค่าไม่เกินค่าที่กำหนดไว้ ดังสมการ

$$|e_{ri}| \leq \text{ค่าผิดพลาดที่เรายอมรับได้} \quad (5.2.8)$$

### 5.3 การแก้ปัญหามสมการไม่เชิงเส้นแบบหลายสมการ

ถ้าเรามีระบบสมการไม่เชิงเส้น และตัวแปรไม่ทราบค่า  $n$  ตัวดังนี้

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) &= 0 \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

รูปแบบของฟังก์ชันตามสมการ (5.3.1) เป็นรูปแบบมาตรฐานสำหรับระบบสมการทั่วไป จะสังเกตเห็นว่าฟังก์ชันข้างต้นจะเป็นสมการเชิงเส้น เมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น และ จะเป็นสมการไม่เชิงเส้นแบบสมการเดียว เมื่อ  $n = 1$

หนึ่งในเทคนิคของการแก้ระบบสมการแบบหลายสมการ คือวิธี multivariate Newton-Raphson (MNRM) ซึ่งมีแนวคิดพื้นฐานคล้ายคลึงกับกรณีของสมการเดียว โดยผลรวมของการดิฟเฟอเรนเชียลฟังก์ชัน  $f_j$  มีค่าดังนี้

$$df_j = \frac{\partial f_j}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_2} dx_2 \quad (5.3.2)$$

ในกรณีที่มีหลายสมการสามารถเขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$df_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \quad (5.3.3)$$

ในกรณีที่มีหลายสมการ หลายตัวแปรในการคำนวณ มีสูตรดังนี้

$$f_j(\{x\}^{(2)}) - f_j(\{x\}^{(1)}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) \quad (5.3.4)$$

โดยที่  $j$  เป็นตัวบอกว่าฟังก์ชันที่กำลังคำนวณอยู่นั้นเป็นฟังก์ชันใด,  $i$  บอกว่าเป็นตัวแปรใด และเลขมุมบนขวาในวงเล็บมีไว้สำหรับการทำซ้ำ

พิจารณาว่าเรามีสมการไม่เชิงเส้น  $n$  สมการ ดังนั้น  $j = 1$  ถึง  $n$  เราจะเขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\underline{f}(\{x\}^{(2)}) - \underline{f}(\{x\}^{(1)}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i} \right) (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) \quad (5.3.5)$$

จากแนวความคิดของกรณีที่มี 1 ตัวแปร เราจะทำซ้ำไปเรื่อยๆเพื่อหาผลลัพธ์ โดยสันนิษฐานว่า  $\underline{f}(\{x\}^{(2)}) = 0$  เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\underline{J}^{(k)} \underline{\Delta x}^{(k)} = -\underline{R}^{(k)} \quad (5.3.6)$$

โดยที่  $\underline{R}^{(k)}$  เรียกว่า Residual vector ที่การทำซ้ำครั้งที่  $k$  มีค่าดังนี้

$$\underline{R}^{(k)} = \underline{f}(\{x\}^{(k)}) \quad (5.3.7)$$

$\underline{J}^{(k)}$  เรียกว่า Jacobian matrix ที่การทำซ้ำครั้งที่  $k$  มีค่าดังนี้

$$(\underline{J}^{(k)})_{j,i} = \left( \frac{\partial f_j^{(k)}}{\partial x_i^{(k)}} \right) \quad (5.3.8)$$

$$\underline{\Delta x}^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} \quad (5.3.9)$$

ดังนั้นจะได้  $x$  ค่าใหม่ดังนี้

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \underline{\Delta x}^{(k)} \quad (5.3.10)$$

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาาระบบสมการแบบไม่เชิงเส้นแบบหลายสมการ หลายตัวแปร ด้วยวิธีการของ Newton-Raphson มีดังนี้

1. ทำนายค่าเริ่มต้นของ  $x$
2. คำนวณหา Jacobian matrix และ Residual vector
3. แก้สมการ (5.3.6)
4. คำนวณหาค่า  $x$  ใหม่ ได้จากสมการ(5.3.10)
5. ถ้ายังไม่ได้ผลลัพธ์ ให้ทำซ้ำจากขั้นตอนที่ 2 ไปเรื่อยๆ

## บทที่ 6

### การวิเคราะห์การขบกันของฟันเฟือง

#### 6.1 บทนำ

เป้าหมายของวิธีการ TCA (Tooth Contact Analysis) คือ จำลองการขบและการสัมผัสกันของเฟืองตรงด้วยตำแหน่งสัมผัสที่จำกัด และให้จุดสัมผัสที่ทุกๆช่วงเวลา เป้าหมายหลักของวิธีการ TCA คือ

- 1.หาส่วนสัมผัสบนพื้นผิวของเฟืองตรง
- 2.หาค่าการส่งผ่านที่ผิดพลาดที่เกิดจากการติดตั้งเฟืองเยื้องศูนย์
- 3.หาจุดสัมผัส

โดยเราจะพิจารณาว่า เรารู้พื้นผิวของเฟืองตรง รวมถึงตำแหน่งและทิศทางของเฟืองที่ทำให้เกิดการเยื้องศูนย์ด้วย

#### 6.2 เงื่อนไขของเส้นสัมผัสที่เชื่อมต่อกัน

เราสร้างระบบพิกัด 3 ระบบ คือ  $S_1$ ,  $S_2$  และ  $S_f$  สัมพันธ์กับ Pinion, Gear และ รูปร่างทั้งหมด ตามลำดับ นอกจากนี้ยังมีระบบพิกัด  $S_h$  ที่สร้างไว้สำหรับการคำนวณหาค่าความผิดพลาดที่จะเกิดขึ้นจากการติดตั้งที่ผิดพลาด

พื้นผิวของฟันเฟือง  $\Sigma_1$  และ  $\Sigma_2$  แทนในระบบพิกัด  $S_1$  และ  $S_2$  ตามลำดับ ได้สมการดังนี้

$$\bar{r}_i(u_i, \theta_i), \quad \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_i} \neq 0 \quad (i = 1, 2) \quad (6.2.1)$$

Unit normals ของพื้นผิว คือ

$$\bar{n}_i = \frac{\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_i}}{\left| \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_i} \right|} \quad (6.2.2)$$

พิจารณาว่า Pinion ซึ่งให้พื้นผิวของฟันเฟือง  $\Sigma_1$  หมุนในระบบพิกัด  $S_f$  ดังนั้นเราต้องสร้างกลุ่มพื้นผิวของฟันเฟืองขึ้นในระบบพิกัด  $S_f$  กลุ่มพื้นผิวของฟันเฟือง สามารถคำนวณหาให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\bar{r}_f^{(1)} = [M_{f1}] \bar{r}_1 \quad (6.2.3)$$

Unit normals ของพื้นผิว  $\Sigma_1$  ที่แทนในระบบพิกัด  $S_f$  โดยสมการเมตริกซ์คือ

$$\bar{n}_f^{(1)} = [L_{f1}] \bar{n}_1 \quad (6.2.4)$$

Gear ซึ่งให้พื้นผิว  $\Sigma_2$  หมุนในระบบพิกัด  $S_h$  เราอ้างอิงถึงความผิดพลาดของการติดตั้งเยื้องศูนย์ไปยังเกียร์ ตำแหน่งและทิศทางของ  $S_h$  ด้วยความสัมพันธ์ของ  $S_f$  เพื่อจำลองการติดตั้งเยื้องศูนย์ในการหมุนของเฟืองได้ โดยใช้สมการเมตริกซ์ดังนี้

$$\bar{r}_f^{(2)} = [M_{fh}] [M_{h2}] \bar{r}_2 \quad (6.2.5)$$

และ

$$\bar{n}_f^{(2)} = [L_{f_1}][L_{h_2}]\bar{n}_2 \quad (6.2.6)$$

เราแทนพื้นผิว  $\Sigma_2$  ของการติดตั้งเชิงศูนย์กลางในการหมุนของเฟืองและ Unit Normal ของพื้นผิวในระบบพิกัด  $S_f$

เมตริกซ์  $L$  มีขนาด  $3 \times 3$  เราสามารถหาเมตริกซ์  $L$  ได้จากการแทนด้วยเมตริกซ์  $M$  โดยกำจัดแถวและหลักสุดท้ายของเมตริกซ์  $M$  ออกไป

พื้นผิวสัมผัสต้องเป็นเส้นสัมผัสที่เชื่อมต่อกัน สามารถอธิบายได้ว่าตำแหน่งของเวกเตอร์ และ Unit Normal ของพื้นผิว ของ Gear และ Pinion ณ จุดสัมผัส ต้องมีค่าเท่ากัน ดังนั้น

$$\bar{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \bar{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) \quad (6.2.7)$$

$$\bar{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \bar{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) \quad (6.2.8)$$

โดยที่  $\phi_1$  และ  $\phi_2$  เป็นมุมที่ Pinion และ Gear หมุนไปตามลำดับ สมการ (6.2.7) ให้สมการในรูปของสเกลาร์ 3 สมการ แต่สมการ (6.2.8) ให้สมการอิสระที่อยู่ในรูปของสเกลาร์เพียง 2 สมการเพราะ

$$|\bar{n}_f^{(1)}| = |\bar{n}_f^{(2)}| = 1 \quad (6.2.9)$$

### 6.3 การวิเคราะห์การขบกัน

จากสมการ(6.2.7) และ (6.2.8)เราอาจจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\bar{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) - \bar{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \quad (6.3.1)$$

$$\bar{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) - \bar{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \quad (6.3.2)$$

สมการเวกเตอร์(6.3.1) และ (6.3.2) ให้สมการอิสระ 5 สมการ และตัวแปรไม่ทราบค่า 6 ตัวแปร คือ  $u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2$  และ  $\phi_2$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันดังนี้

$$f_i(u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \quad f_i \in C^1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (6.3.3)$$

เป้าหมายของการวิเคราะห์พื้นเฟืองด้วยวิธีการนี้คือ สามารถอธิบายสมการให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันดังต่อไปนี้ได้

$$\{u_1(\phi_1), \theta_1(\phi_1), u_2(\phi_1), \theta_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1)\} \in C^1 \quad (6.3.4)$$

เราอาจแสดงฟังก์ชัน (6.3.3) ให้อยู่ในรูปของจุดใดๆ ได้ดังนี้

$$P^0 = (u_1^0, \theta_1^0, \phi_1^0, u_2^0, \theta_2^0, \phi_2^0) \quad (6.3.5)$$

ถ้าผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นจริง

1. ฟังก์ชัน  $[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5] \in C^1$
2. สมการ(6.3.3) เป็นจริงที่จุด  $P$
3. Jacobian ไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)}{D(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, \phi_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_5}{\partial u_1} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_5}{\partial u_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \phi_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.3.6)$$

ฟังก์ชัน (6.3.3) ให้ข้อมูลของสภาวะที่เกิดการขบกันของฟันเฟือง ณ จุดสัมผัสได้อย่างสมบูรณ์ ฟังก์ชัน  $\phi_2(\phi_1)$  แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่มุมไป

เราสามารถหาส่วนของจุดสัมผัสบนพื้นผิว  $\Sigma_1$  จากฟังก์ชันดังต่อไปนี้

$$\bar{r}_1(u_1, \theta_1), \quad u_1(\phi_1), \quad \theta_1(\phi_1) \quad (6.3.7)$$

และหาส่วนของจุดสัมผัสบนพื้นผิว  $\Sigma_2$  จากฟังก์ชันดังต่อไปนี้

$$\bar{r}_2(u_2, \theta_2), \quad u_2(\phi_2), \quad \theta_2(\phi_2) \quad (6.3.8)$$

ส่วนของจุดสัมผัสบนพื้นผิว  $\Sigma_i (i=1,2)$  เป็น working line บนพื้นผิวของฟันเฟือง พื้นผิวของ Pinion และ Gear จะสัมผัสกันบนจุดของ working line เท่านั้น line of action ของพื้นผิวฟันเฟืองแทนได้ด้วยฟังก์ชันดังนี้

$$\bar{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1), \quad u_1(\phi_1), \quad \theta_1(\phi_1) \quad (6.3.9)$$

หรือฟังก์ชัน

$$\bar{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2), \quad \theta_2(\phi_2), \quad u_2(\phi_2), \quad \theta_2(\phi_2) \quad (6.3.10)$$

ในบางกรณี การผันแปรตัวแปรอื่นนอกเหนือจาก  $\phi_1$  เช่น  $u_1$  อาจจะนำมาใช้ได้เมื่อแก้สมการ (6.3.4) เราอาจแก้สมการนี้ในรูปของจุด  $P^0$  ซึ่งให้สมการ(6.3.5) โดยที่ Jacobian ไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

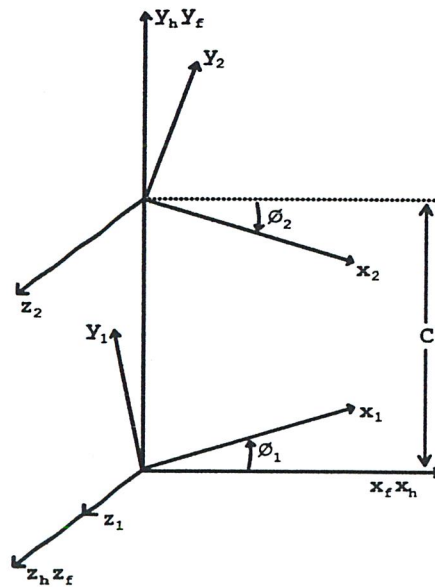
$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)}{D(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, \phi_2)} \neq 0$$

คำตอบของสมการ (6.3.10) จะอธิบายได้โดยฟังก์ชันดังนี้

$$\{\phi_1(u_1), \theta_1(u_1), u_2(u_1), \theta_2(u_1), \phi_2(u_1)\} \in C^1 \quad (6.3.11)$$

จากระบบสมการ 5 สมการ และตัวไม่ทราบค่า 6 ตัวแปร เรากำหนดให้  $\phi_1$  เป็นค่าคงที่ จึงได้ระบบสมการ 5 สมการ 5 ตัวแปร สามารถหาคำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการไม่เชิงเส้นนี้ได้ โดยอาศัยวิธีการแก้สมการของนิวตัน-ราฟสัน ซึ่งได้อธิบายไว้ในบทที่ 5

#### 6.4 ขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการ TCA



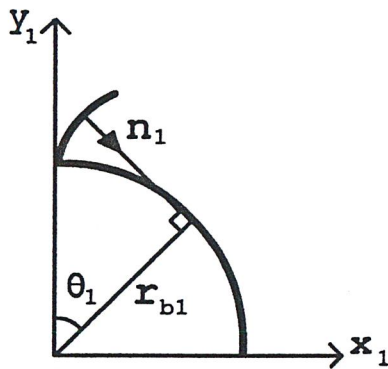
รูปที่ 6-1 แสดงระบบพิกัด

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นถึงขั้นตอนการคำนวณหาสมการเวกเตอร์ และ unit normal ของพื้นผิว โดยละเอียดด้วยวิธีการ TCA ซึ่งสมการที่ได้จากการคำนวณ จะนำไปประยุกต์ใช้ในการเขียนโปรแกรมประมวลผลต่อไป

พิจารณาระบบพิกัด 3 ระบบ คือ  $S_1$ ,  $S_2$  และ  $S_f$  สัมพันธ์กับ Pinion Gear และ รูปร่างทั้งหมดตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 6-1

จากรูปที่ 6-2 Pinion ให้รูปร่างแบบ Involute พื้นผิว  $\Sigma_1$  ในระบบพิกัด  $S_1$  ตามสมการดังต่อไปนี้

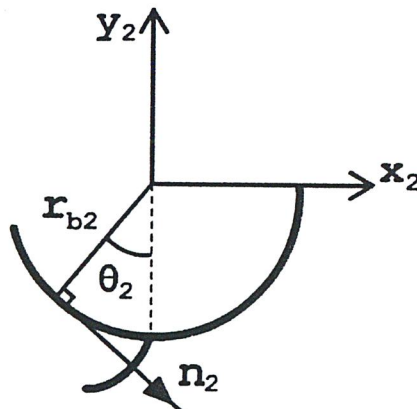
$$\begin{aligned}x_1 &= r_{b1}(\sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1), \\y_1 &= r_{b1}(\cos \theta_1 + \theta_1 \sin \theta_1), \quad z_1 = 0\end{aligned}\quad (6.4.1)$$



รูปที่ 6-2 แสดงพื้นผิว  $\Sigma_1$  ของ Pinion

จากรูปที่ 6-3 Gear ให้รูปร่างแบบ Involute พื้นผิว  $\Sigma_2$  ในระบบพิกัด  $S_2$  ตามสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}x_2 &= r_{b2}(-\sin \theta_2 + \theta_2 \cos \theta_2), \\y_2 &= r_{b2}(-\cos \theta_2 - \theta_2 \sin \theta_2), \quad z_2 = 0\end{aligned}\quad (6.4.2)$$



รูปที่ 6-3 แสดงพื้นผิว  $\Sigma_2$  ของ Gear

การประยุกต์ใช้หลักการพื้นฐานของ TCA ทำให้เรารู้ถึงสภาวะการขบกันของ  $\Sigma_1$  และ  $\Sigma_2$  ที่อยู่ในระบบพิกัด  $S_f$  ได้ โดยทำตามกระบวนการดังต่อไปนี้

1. หา unit normal ( $n_1$  และ  $n_2$ ) ของพื้นผิว  $\Sigma_1$  และ  $\Sigma_2$  ในระบบพิกัด  $S_1$  และ  $S_2$  ตามลำดับ โดยที่ unit normal ของพื้นผิว  $\Sigma_1$  และ  $\Sigma_2$  ต้องมีค่าเท่ากัน ณ จุดสัมผัส
2. เมื่อเราแทน  $\Sigma_1$  และ  $\Sigma_2$  ลงในระบบพิกัด  $S_f$  ด้วยวิธี Transformation จะได้สมการ ณ จุดที่พื้นทั้งสองสัมผัสกัน
3. สมการ ณ จุดที่พื้นทั้งสองสัมผัสกัน เราจะได้สมการ 3 สมการดังนี้

$$f_1[(\theta_1 - \phi_1), (\theta_2 + \phi_2)] = 0 \quad (6.4.3)$$

$$f_2[(\theta_1 - \phi_1), r_{b1}, r_{b2}, C] = 0 \quad (6.4.4)$$

$$f_3[\theta_1, \theta_2, r_{b1}, r_{b2}, C, (\theta_1 - \phi_1)] = 0 \quad (6.4.5)$$

4. เมื่อเราวิเคราะห์สมการข้างต้นจะเห็นว่าอัตราส่วนของ  $\frac{d\phi_1}{d\phi_2}$  มีค่าคงที่ เราสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \quad (6.4.6)$$

5. เราสามารถหา line of action ได้ โดยฟังก์ชันเวกเตอร์  $r_f^{(1)}(\theta_1 - \phi_1)$  และง่ายมากที่จะพิสูจน์ให้เห็นว่า line of action เป็นเส้นตรง ทิศทางของ line of action สามารถหาได้จากผลคูณของสเกลาร์  $a_f \cdot (-i_f)$  โดยที่

$$a_f = \frac{\frac{\partial r_f^{(1)}}{\partial \theta_1}}{\left| \frac{\partial r_f^{(1)}}{\partial \theta_1} \right|}$$

ซึ่งก็คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ line of action นั้นเอง

จากกระบวนการข้างต้น เราสามารถนำขั้นตอนมาทำการคำนวณได้ดังนี้

1. สมการ(6.4.1) ให้ unit normal ของพื้นผิว  $\Sigma_1$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$n_1 = \cos\theta_1 i_1 - \sin\theta_1 j_1 \quad (6.4.7)$$

2. ในทำนองเดียวกัน สมการ(6.4.2) ให้ unit normal ของพื้นผิว  $\Sigma_2$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$n_2 = \cos\theta_2 i_2 - \sin\theta_2 j_2 \quad (6.4.8)$$

3. ใช้สมการเมตริกซ์

$$r_f^{(i)} = M_{fi} r_i(\theta_i), \quad n_f^{(i)} = L_{fi} n_i(\theta_i) \quad (i=1,2) \quad (6.4.9)$$

เราจะได้สมการ ณ จุดสัมผัสดังนี้

$$r_f^{(1)}(\theta_1, \phi_1) = r_f^{(2)}(\theta_2, \phi_2), \quad n_f^{(1)}(\theta_1, \phi_1) = n_f^{(2)}(\theta_2, \phi_2) \quad (6.4.10)$$

4. สมการเวกเตอร์(6.4.10) ให้ระบบสมการสเกลาร์ดังนี้

$$\begin{aligned} r_{b1}[\sin(\theta_1 - \phi_1) - \theta_1 \cos(\theta_1 - \phi_1)] \\ - r_{b2}[-\sin(\theta_2 + \phi_2) + \theta_2 \cos(\theta_2 + \phi_2)] = 0 \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

$$\begin{aligned} r_{b1}[\cos(\theta_1 - \phi_1) + \theta_1 \sin(\theta_1 - \phi_1)] \\ - r_{b2}[-\cos(\theta_2 + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + \phi_2)] - C = 0 \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

$$\cos(\theta_1 - \phi_1) - \cos(\theta_2 + \phi_2) = 0 \quad (6.4.13)$$

$$\sin(\theta_1 - \phi_1) - \sin(\theta_2 + \phi_2) = 0 \quad (6.4.14)$$

5. วิเคราะห์สมการ (6.4.13) และ (6.4.14) เราจะได้ว่า

$$\theta_1 - \phi_1 = \theta_2 + \phi_2 \quad (6.4.15)$$

เมื่อพิจารณาว่าสมการ (6.4.11) และ (6.4.12) เกิดขึ้นในเวลาเดียวกัน ได้รับความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\cos(\theta_1 - \phi_1) - \frac{r_{b1} + r_{b2}}{C} = 0 \quad (6.4.16)$$

$$r_{b1}\theta_1 + r_{b2}\theta_2 - C\sin(\theta_1 - \phi_1) = 0 \quad (6.4.17)$$

ระบบสมการ (6.4.15) ถึง (6.4.17) มีองค์ประกอบของระบบสมการ (6.4.3) ถึง (6.4.5) สมการ (6.4.15) ถึง (6.4.17) แสดงให้เห็นว่า

$$\theta_1 - \phi_1 = \theta_2 + \phi_2 = \text{const} \quad (6.4.17)$$

$$r_{b1}\theta_1 + r_{b2}\theta_2 = \text{const} \quad (6.4.18)$$

6. ทำการ Differentiate สมการ (6.4.18) และ (6.4.19) แสดงให้เห็นว่าอัตราส่วนของเฟืองมีค่าคงที่ ได้ดังนี้

$$m_{12} = \frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \quad (6.4.20)$$

7. เราสามารถเขียนสมการของ line of action ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} r_f^{(1)} = & r_{b1}[\sin(\theta_1 - \phi_1) - \theta_1 \cos(\theta_1 - \phi_1)]i_f \\ & + r_{b1}[\cos(\theta_1 - \phi_1) + \theta_1 \sin(\theta_1 - \phi_1)]j_f \end{aligned} \quad (6.4.21)$$

โดยที่  $(\theta_1 - \phi_1)$  เป็นค่าคงที่ ฟังก์ชันเวกเตอร์  $r_f^{(1)}$  ( $\theta_1$ ) เป็นแนวตรง เนื่องจาก  $(\theta_1 - \phi_1)$  เป็นค่าคงที่ และ line of action เป็นเส้นตรง

Unit normal ของ line of action คือ

$$a_f = \frac{\frac{\partial r_f^{(1)}}{\partial \theta_1}}{\left| \frac{\partial r_f^{(1)}}{\partial \theta_1} \right|} = -\cos(\theta_1 - \phi_1)i_f + \sin(\theta_1 - \phi_1)j_f \quad (6.4.22)$$

ทิศทางของ line of action หาได้จากผลคูณสเกลาร์

$$a_f \cdot (-i_f) = \cos(\theta_1 - \phi_1) = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{C} \quad (6.4.23)$$

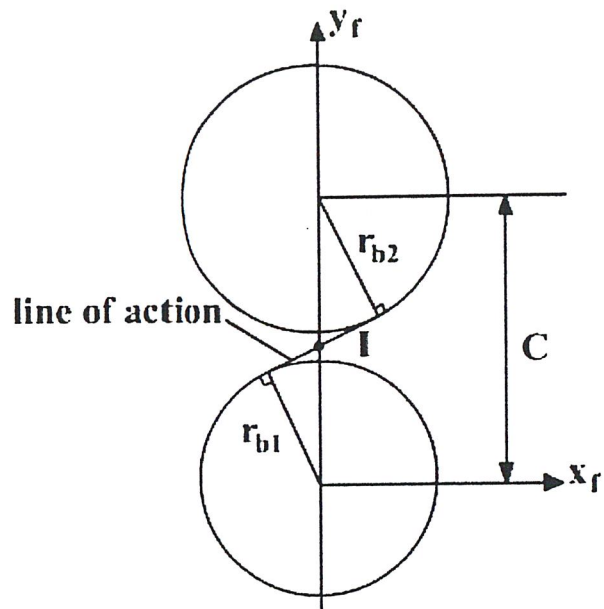
line of action (รูปที่ 6-4) ผ่านจุด I และตัดกับแกน  $y_f$  สมการ (6.4.20) แสดงให้เห็นว่า  $x_f^{(1)} = 0$  จะได้ว่า

$$y_f^{(1)} = \frac{r_{b1}}{\cos(\theta_1 - \phi_1)} \quad (6.4.24)$$

จากสมการ(6.4.23)และ (6.4.24) จะได้ว่า

$$y_f^{(1)} = \left(\frac{r_{b1}}{r_{b1} + r_{b2}}\right)C = \frac{C}{1 + m_{12}} \quad (6.4.25)$$

จากรูปที่ 6-4 แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่า line of action สัมผัสกับวงกลมฐาน ( base circle) ของเฟืองทั้งสอง โดยที่ตำแหน่งและทิศทางของ line of action ขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่างเฟือง (C)



รูปที่ 6-4 แสดงตำแหน่งและทิศทางของ line of action

## บทที่ 7

### หลักการทํางานของโปรแกรม

#### 7.1 บทนำ

ในงานวิจัยนี้เป็นการเขียนโค้ดขึ้นมา เพื่อทำการประมวลผลโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ขั้นตอนส่วนใหญ่เป็นการคำนวณทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์หลากหลายวิธี ดังนั้นเราจึงเลือกทำการประมวลผลด้วยโปรแกรม Matlab ด้วยเหตุผลที่ว่าโปรแกรมนี้มีคำสั่งเกี่ยวกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้เลือกใช้อย่างมากมาย เราจึงไม่จำเป็นต้องเขียนโค้ดเองเพื่อใช้ในการคำนวณกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ยุ่งยากและซับซ้อนมาก ดังนั้นโปรแกรมนี้จึงทำให้สามารถประมวลผลได้สะดวกและรวดเร็วกว่าโปรแกรมอื่นๆ

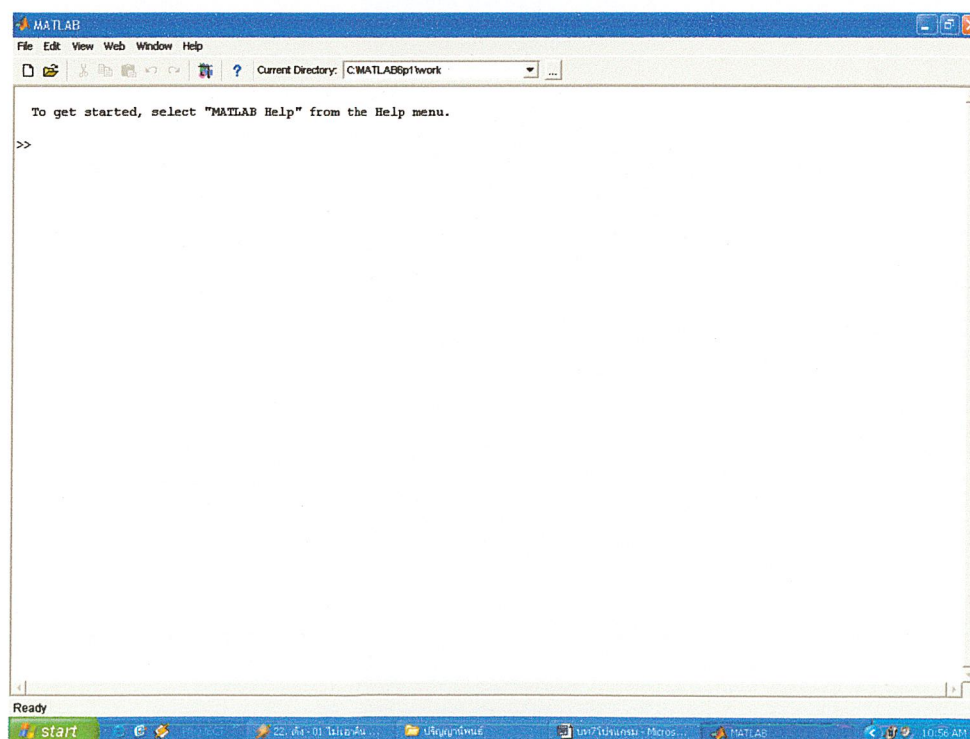
หัวข้อต่อไปจะอธิบายถึงหลักการทํางานของโปรแกรม Matlab เป็นลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด รวมไปถึงแนวความคิดและลำดับขั้นตอนต่างๆในการประมวลผล

#### 7.2 หลักการทํางาน

หลักการทํางานของโปรแกรม Matlab ที่เราจะใช้ประมวลผลมีดังต่อไปนี้

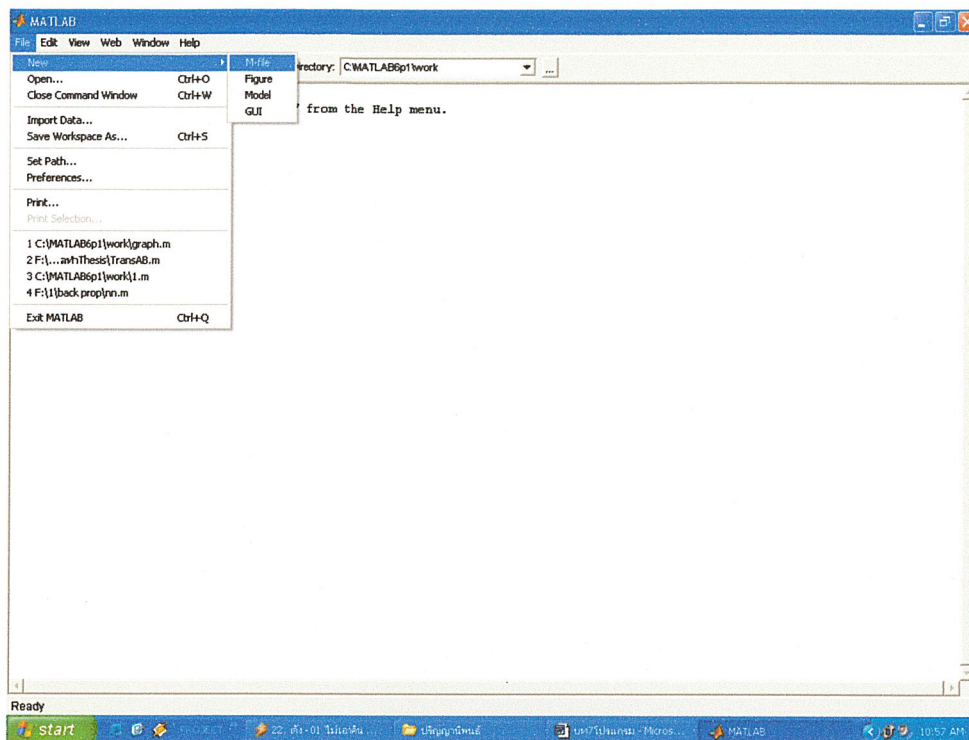
1. ดับเบิลคลิกที่ไอคอนเพื่อเข้าโปรแกรม
2. เมื่อเข้าไปในโปรแกรมเราจะเห็นหน้าต่างของ command window ดังแสดงในรูปที่ 7-1

หน้าต่างนี้จะแสดงผลลัพธ์ต่างๆที่ได้จากการคำนวณ

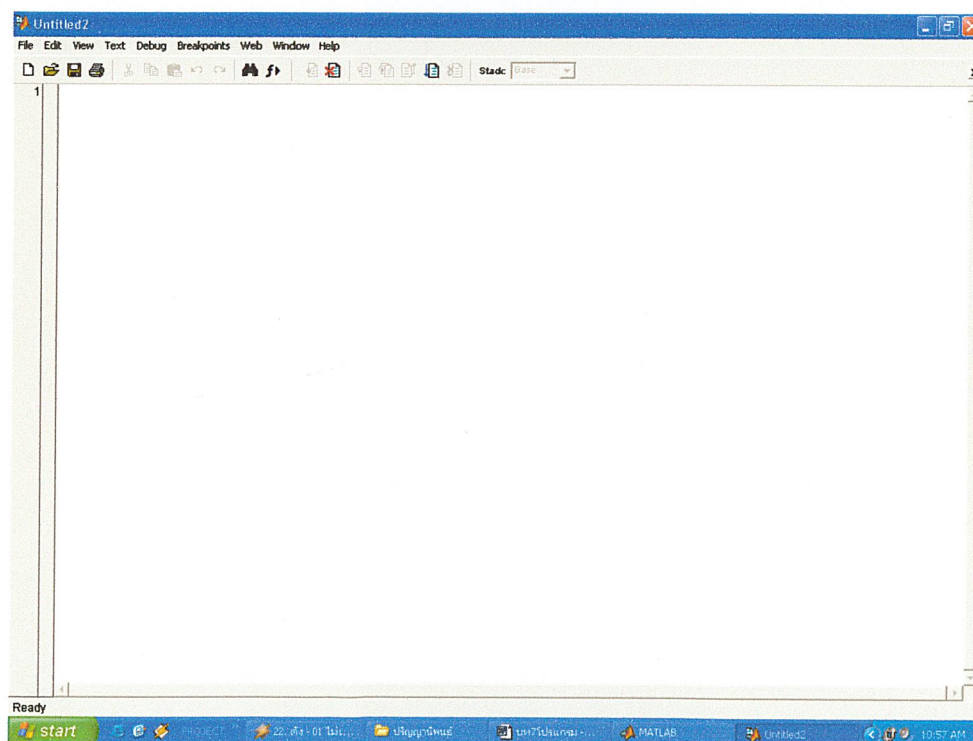


รูปที่ 7-1 แสดงหน้าต่างของ command window

3. เราสามารถเขียนโค้ดที่ต้องการประมวลผลได้โดยไปที่ File --> New --> M-file ดังแสดง  
 ในรูปที่ 7-2 เมื่อคลิกที่ M-file แล้ว จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมาเพื่อให้เราเขียนโค้ด แสดงในรูปที่ 7-3

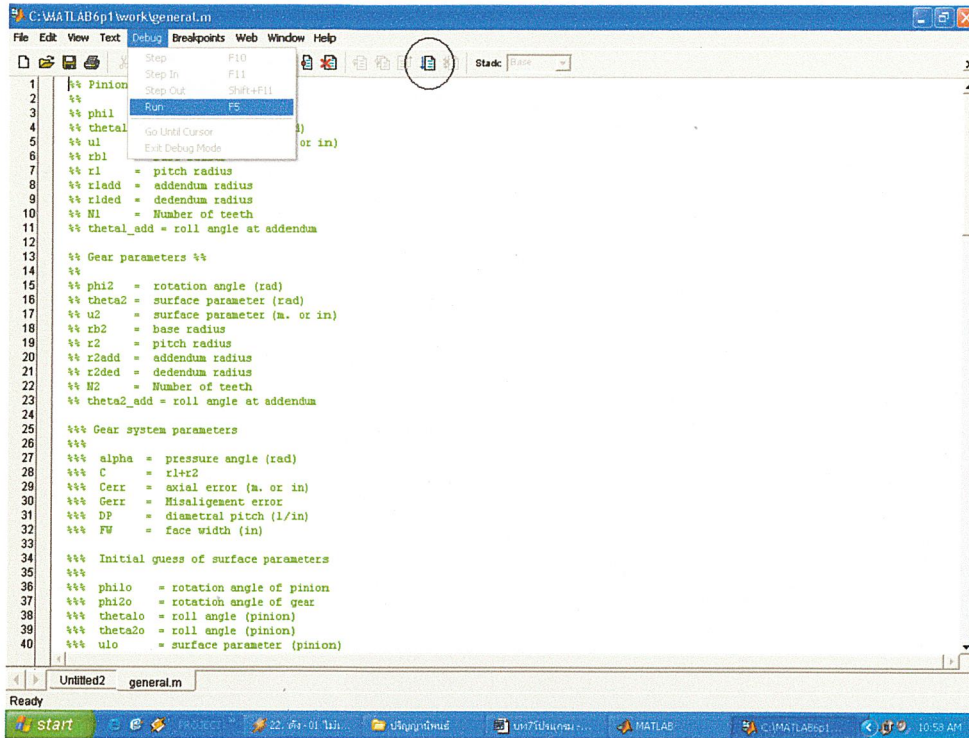


รูปที่ 7-2 แสดงการเปิดหน้าต่าง M-file



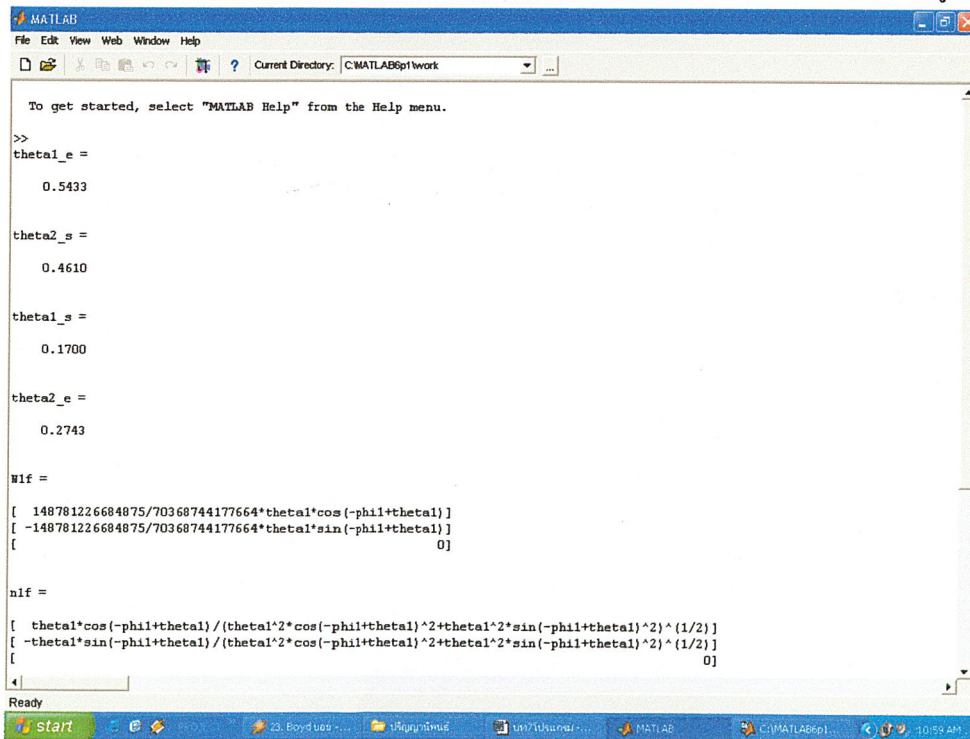
รูปที่ 7-3 แสดงหน้าต่าง M-file ที่ให้เขียนโค้ด

4. เมื่อเขียนโค้ดตามที่ต้องการแล้วให้เซฟไว้ใน Directory ที่ต้องการ เราสามารถประมวลผลได้จากหน้าต่าง M-file โดยคลิกที่ Debug --> Run หรือจากรูปที่อยู่ในวงกลม ดังแสดงในรูปที่ 7-4



รูปที่ 7-4 แสดงวิธีทำการประมวลผล

5. ผลลัพธ์จากการประมวลผลจะแสดงในหน้าต่างของ command window ดังแสดงในรูปที่ 7-5



รูปที่ 7-5 แสดงผลลัพธ์ในหน้าต่างของ command window

### 7.3 ขั้นตอนการประมวลผล

หัวข้อนี้จะอธิบายถึงแนวความคิดและขั้นตอนการเขียนโค้ด ที่ใช้ประมวลผลในงานวิจัยนี้ โดยจะอธิบายเป็นลำดับขั้นตอนจากการกำหนดค่าตัวแปรต่างๆ ไปจนถึงขั้นตอนสุดท้ายที่ได้ผลลัพธ์ มีขั้นตอนต่างๆดังนี้

1. เราจะทำการเขียนโค้ดในหน้าต่าง M- file เริ่มต้นจากการเขียนคำอธิบายตัวแปรต่างๆที่ใช้ในการคำนวณ เพื่อป้องกันความสับสนภายหลัง

2. กำหนดค่าตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณดังนี้ จำนวนฟันของพีเนียน และเกียร์ ค่าโคมิทรัลพิลช์ และ มุมกด

3. ใช้สมการจากทฤษฎีของเฟืองตรงเพื่อคำนวณหาค่าพื้นฐานต่างๆของพีเนียน และเกียร์ดังนี้ รัศมีวงกลมพิลช์ รัศมีวงกลมฐาน ระยะห่างระหว่างฟันเฟือง ระยะแอดเดนดัม ระยะดีเดนดัม รัศมีแอดเดนดัม และรัศมีดีเดนดัม

4. คำนวณหาจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายที่เกิดการสัมผัสกันของฟันเฟือง ขั้นตอนนี้เราจะใช้ทฤษฎีในหัวข้อ 3.3-3.4 คือ ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาของฟันบนวงกลม และการขบกันของเฟืองตรงที่มีรูปร่างแบบ Involute

5. คำนวณระบบพิกัดของพีเนียน และเกียร์ ในขั้นตอนนี้ เราจะทำการย้ายระบบพิกัด คำนวณหาเวกเตอร์และ Unit normal ณ ตำแหน่งที่พีเนียนและเกียร์สัมผัสกัน

6. จากขั้นตอนที่ 5 ทำให้เราได้สมการเวกเตอร์และ สมการของ Unit normal ของพีเนียนและของเกียร์อย่างละ 6 สมการ โดยที่ 3 สมการแรกเป็นสมการเวกเตอร์บอกตำแหน่งสัมผัส และอีก 3 สมการเป็นสมการของ Unit normal จากเงื่อนไขในการสัมผัสกันของฟันเฟือง สมการของ Unit normal ให้สมการอิสระที่อยู่ในรูปของสเกลาร์เพียง 2 สมการ เนื่องจากเงื่อนไขในสมการที่ (6.2.9) เราจะได้ว่าสมการ 5 สมการของพีเนียนและเกียร์มีค่าเท่ากัน ดังนั้นจะได้สมการ 5 สมการอยู่ในรูปฟังก์ชันที่มีค่าเท่ากับศูนย์

7. หลังจากที่เราได้ระบบสมการ 5 สมการ 5 ตัวแปรแล้ว เราจะใช้วิธีการแก้สมการไม่เชิงเส้นแบบหลายสมการของ Newton-Raphson เพื่อคำนวณหาผลลัพธ์ที่ต้องการ

## บทที่ 8 ผลลัพธ์จากการประมวลผล

### 8.1 บทนำ

ในบทนี้จะแสดงถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการประมวลผล โดยที่งานวิจัยนี้มีการประมวลผลใน 2 กรณี คือ กรณีที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงตามทฤษฎี (Change of Center Distance) และกรณีที่มีการติดตั้งเยื้องศูนย์ (Misalignment)

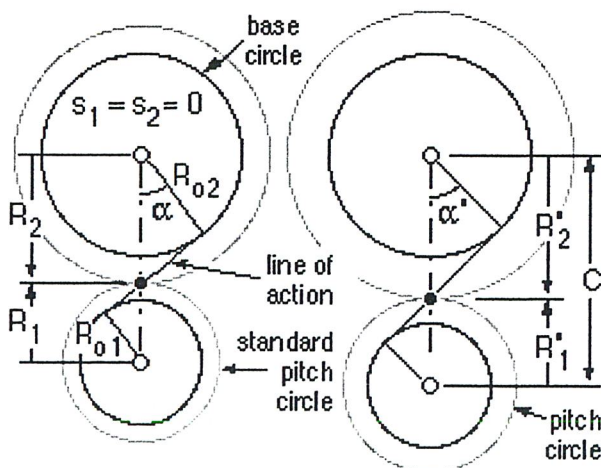
ในงานวิจัยนี้เป็นการเขียนโปรแกรมเพื่อทำการประมวลผล ดังนั้นในการคำนวณเราจึงต้องทำการกำหนดค่าต่างๆ ให้กับฟันเฟืองที่เราจะใช้ ซึ่งในส่วนของ การกำหนดค่านี้เป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณ เราสามารถปรับเปลี่ยนได้ตามความต้องการ เพื่อให้สอดคล้องกับขนาดของฟันเฟืองที่เราต้องการศึกษา ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดค่าต่างๆ ของฟันเฟืองไว้ดังแสดงในตารางที่ 8-1

ตัวแปร	Pinion	Gear
จำนวนฟัน	$T_1 = 36$	$T_2 = 72$
มุมกด	$0.3491(20^\circ)$	$0.3491(20^\circ)$
ไดเมทรีลพิทช์	8	8
ระยะห่างระหว่างเพลาตามทฤษฎี	6.75 นิ้ว	

ตารางที่ 8-1 แสดงค่าต่างๆของฟันเฟืองที่ใช้ในการประมวลผล

### 8.2 กรณีที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงตามทฤษฎี (Change of Center Distance)

ในกรณีนี้เราจะเริ่มจากการพิจารณา ระยะห่างระหว่างเพลา(C) ซึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมของรัศมีวงกลมพิทช์ของฟันเฟืองทั้งสองรวมกัน ในกรณีที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงตามทฤษฎี ระยะที่เปลี่ยนแปลงเท่ากับ  $\Delta c$  ดังแสดงไว้ในรูปที่ 8-1 เพราะฉะนั้นเราสามารถคำนวณหาค่า C ค่าใหม่ได้ดังนี้  $C = r_1 + r_2 + \Delta c$  และนำค่า C ที่หาได้ ไปแทนที่ C เดิม



รูปที่ 8-1 แสดงการติดตั้งที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงตามทฤษฎี

จากสมการการสัมผัสกันของพื้นเฟืองในบทที่ 6 เราสามารถประยุกต์เงื่อนไขของการสัมผัสกันของพื้นผิว  $\Sigma_1$  และ  $\Sigma_2$  จะได้สมการ 6 สมการดังต่อไปนี้

$$r_{b1} \cos \phi_1 (\sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1) - r_{b1} \sin \phi_1 (\cos \theta_1 + \theta_1 \sin \theta_1) - r_{b2} \{ (\cos q \cos \phi_2)(-\sin \theta_2 + \theta_2 \cos \theta_2) + (\cos q \sin \phi_2)(-\cos \theta_2 - \theta_2 \sin \theta_2) \} - u_2 \sin q = 0 \quad (8.2.1)$$

$$r_{b1} \sin \phi_1 (\sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1) + r_{b1} \cos \phi_1 (\cos \theta_1 + \theta_1 \sin \theta_1) - r_{b2} \{ (-\sin \phi_2)(-\sin \theta_2 + \theta_2 \cos \theta_2) - (\cos \phi_2)(-\cos \theta_2 - \theta_2 \sin \theta_2) \} - C = 0 \quad (8.2.2)$$

$$u_1 - r_{b2} \{ (-\sin q \cos \phi_2)(-\sin \theta_2 + \theta_2 \cos \theta_2) - (\sin q \sin \phi_2)(-\cos \theta_2 - \theta_2 \sin \theta_2) \} - u_2 \cos q = 0 \quad (8.2.3)$$

$$\theta_1 \cos(-\phi_1 + \theta_1) / (\theta_1^2 \cos(-\phi_1 + \theta_1)^2 + \theta_1^2 \sin(-\phi_1 + \theta_1)^2)^{\frac{1}{2}} - (\theta_2 \cos(\theta_2 + q - \phi_2) + \theta_2 \cos(-\theta_2 + q + \phi_2)) / ((\theta_2 \cos(\theta_2 + q - \phi_2) + \theta_2 \cos(-\theta_2 + q + \phi_2))^2 + \theta_2^2 \sin(-\theta_2 + \phi_2)^2 + (-\theta_2 \sin(-\theta_2 + q + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + q - \phi_2))^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (8.2.4)$$

$$-\theta_1 \sin(-\phi_1 + \theta_1) / (\theta_1^2 \cos(-\phi_1 + \theta_1)^2 + \theta_1^2 \sin(-\phi_1 + \theta_1)^2)^{\frac{1}{2}} + (\theta_2 \sin(-\phi_2 + \theta_2)) / ((\theta_2 \cos(\theta_2 + q - \phi_2) + \theta_2 \cos(-\theta_2 + q + \phi_2))^2 + \theta_2^2 \sin(-\theta_2 + \phi_2)^2 + (-\theta_2 \sin(-\theta_2 + q + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + q - \phi_2))^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (8.2.5)$$

$$(\theta_2 \sin(-\theta_2 + q + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + q - \phi_2)) / ((\theta_2 \cos(\theta_2 + q - \phi_2) + \theta_2 \cos(-\theta_2 + q + \phi_2))^2 + \theta_2^2 \sin(-\theta_2 + \phi_2)^2 + (-\theta_2 \sin(-\theta_2 + q + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + q - \phi_2))^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (8.2.6)$$

จากสมการ(8.2.4)-(8.2.6) เราจะใช้สมการเพียง 2 สมการ ด้วยเงื่อนไข  $|n_f^1| = |n_f^2| = 1$  ดังนั้นระบบสมการ(8.2.1)-(8.2.6) สร้างระบบสมการอิสระ 5 ตัวแปร ด้วยตัวแปรไม่ทราบค่า 6 ตัว ดังนี้  $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, u_1$  และ  $u_2$

เราสามารถยืนยันได้ว่า การติดตั้งที่ทำให้ระยะห่างระหว่างเพลลาไม่ตรงตามทฤษฎี ไม่ทำให้เกิดค่าการส่งผ่านที่ผิดพลาด จากการกำหนดค่าต่างๆของพื้นเฟืองตามตารางที่ 8-1

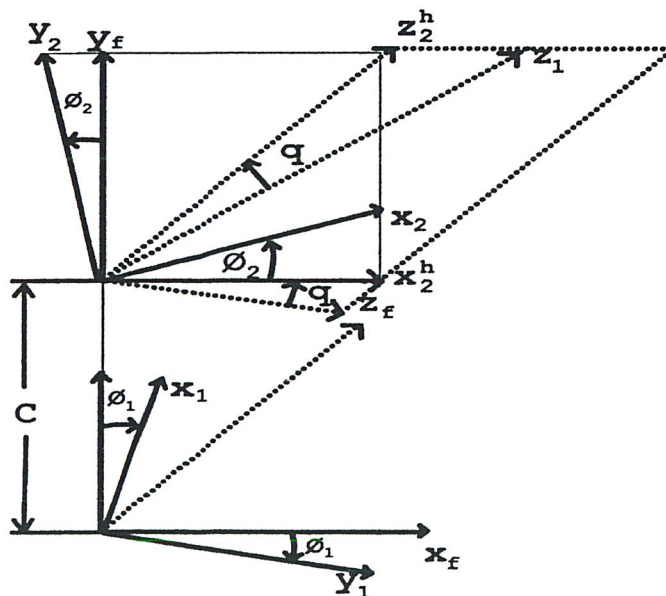
ในงานวิจัยนี้เราศึกษาในกรณีที่ทำให้ระยะห่างระหว่างเพลลาที่ไม่ตรงตามทฤษฎี เปลี่ยนแปลงเท่ากับ 0.025 นิ้ว และ 0.05 นิ้ว การวิเคราะห์จุดสัมผัสของพื้นเฟือง สามารถอธิบายได้โดยการแก้สมการ (8.2.1)-(8.2.6) ผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงค่าของตัวแปรต่างๆ ณ จุดที่พื้นเฟืองทั้งสองสัมผัสกัน โดยนำค่า  $\phi_2$  ที่ได้จากการประมวลผลไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎี และแสดงผลในรูปของ  $\Delta \phi_2$  ดังแสดงไว้ในตารางที่ 8-2

$\Delta c$ (นิ้ว)	$\phi_1$ (rad)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$\Delta\phi_2$ (rad)
0.00	-0.08	0.2691	0.4115	0.00
	-0.04	0.3091	0.3915	0.00
	0	0.3491	0.3715	0.00
	0.04	0.3891	0.3515	0.00
	0.08	0.4291	0.3315	0.00
0.025	-0.08	0.279	0.4235	0.00
	-0.04	0.319	0.4035	0.00
	0	0.359	0.3835	0.00
	0.04	0.399	0.3635	0.00
	0.08	0.439	0.3435	0.00
0.05	-0.08	0.2887	0.4353	0.00
	-0.04	0.3287	0.4153	0.00
	0	0.3687	0.3953	0.00
	0.04	0.4087	0.3753	0.00
	0.08	0.4487	0.3553	0.00

ตารางที่ 8-2 แสดงผลวิเคราะห์จุดสัมผัสของฟันเฟือง และ *transmission error* ในกรณีที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงกับทฤษฎี

### 8.3 กรณีที่มีการติดตั้งเยื้องศูนย์กลาง (Misalignment)

ในกรณีเราจะพิจารณาว่า การหมุนของฟันเฟืองทั้งสองไม่ขนานกัน เนื่องจากเพลาเกิดการเยื้องศูนย์กลางเป็นมุม  $q$  rad โดยระยะห่างระหว่างเพลา มีค่าเท่ากับ  $C$  ตามทฤษฎี ดังรูปที่ 8-2



รูปที่ 8-2 แสดงการติดตั้งเพลาแบบเยื้องศูนย์กลาง

จากสมการการสัมผัสกันของฟันเฟืองในบทที่ 6 เราสามารถประยุกต์เงื่อนไขของการสัมผัสกันของฟันผิว  $\Sigma_1$  และ  $\Sigma_2$  จะได้สมการ 6 สมการดังต่อไปนี้

$$r_{b1} \cos \phi_1 (\sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1) - r_{b1} \sin \phi_1 (\cos \theta_1 + \theta_1 \sin \theta_1) - r_{b2} \{ (\cos q \cos \phi_2)(-\sin \theta_2 + \theta_2 \cos \theta_2) + (\cos q \sin \phi_2)(-\cos \theta_2 - \theta_2 \sin \theta_2) \} - u_2 \sin q = 0 \quad (8.3.1)$$

$$r_{b1} \sin \phi_1 (\sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1) + r_{b1} \cos \phi_1 (\cos \theta_1 + \theta_1 \sin \theta_1) - r_{b2} \{ (-\sin \phi_2)(-\sin \theta_2 + \theta_2 \cos \theta_2) - (\cos \phi_2)(-\cos \theta_2 - \theta_2 \sin \theta_2) \} - C = 0 \quad (8.3.2)$$

$$u_1 - r_{b2} \{ (-\sin q \cos \phi_2)(-\sin \theta_2 + \theta_2 \cos \theta_2) - (\sin q \sin \phi_2)(-\cos \theta_2 - \theta_2 \sin \theta_2) \} - u_2 \cos q = 0 \quad (8.3.3)$$

$$\theta_1 \cos(-\phi_1 + \theta_1) / (\theta_1^2 \cos(-\phi_1 + \theta_1)^2 + \theta_1^2 \sin(-\phi_1 + \theta_1)^2)^{\frac{1}{2}} - (\theta_2 \cos(\theta_2 + q - \phi_2) + \theta_2 \cos(-\theta_2 + q + \phi_2)) / ((\theta_2 \cos(\theta_2 + q - \phi_2) + \theta_2 \cos(-\theta_2 + q + \phi_2))^2 + \theta_2^2 \sin(-\theta_2 + \phi_2)^2 + (-\theta_2 \sin(-\theta_2 + q + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + q - \phi_2))^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (8.3.4)$$

$$-\theta_1 \sin(-\phi_1 + \theta_1) / (\theta_1^2 \cos(-\phi_1 + \theta_1)^2 + \theta_1^2 \sin(-\phi_1 + \theta_1)^2)^{\frac{1}{2}} + (\theta_2 \sin(-\phi_2 + \theta_2)) / ((\theta_2 \cos(\theta_2 + q - \phi_2) + \theta_2 \cos(-\theta_2 + q + \phi_2))^2 + \theta_2^2 \sin(-\theta_2 + \phi_2)^2 + (-\theta_2 \sin(-\theta_2 + q + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + q - \phi_2))^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (8.3.5)$$

$$(\theta_2 \sin(-\theta_2 + q + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + q - \phi_2)) / ((\theta_2 \cos(\theta_2 + q - \phi_2) + \theta_2 \cos(-\theta_2 + q + \phi_2))^2 + \theta_2^2 \sin(-\theta_2 + \phi_2)^2 + (-\theta_2 \sin(-\theta_2 + q + \phi_2) - \theta_2 \sin(\theta_2 + q - \phi_2))^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (8.3.6)$$

จากสมการ(8.3.4)-(8.3.6) เราจะใช้สมการเพียง 2 สมการ ด้วยเงื่อนไข  $|n_f^1| = |n_f^2| = 1$  ดังนั้นระบบสมการ(8.3.1)-(8.3.6) สร้างระบบสมการอิสระ 5 ตัวแปร ด้วยตัวแปรไม่ทราบค่า 6 ตัว ดังนี้  $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, u_1$  และ  $u_2$

เราสามารถหาค่าการส่งผ่านที่ผิดพลาด ที่เกิดจากการติดตั้งเชิงศูนย์ได้ จากการกำหนดค่าต่างๆ ของฟันเฟืองตามตารางที่ 8-1

ในงานวิจัยนี้เราได้เลือกศึกษา ในกรณีที่เกิดการติดตั้งเชิงศูนย์  $q = 0.0875$  rad ผลการวิเคราะห์จุดสัมผัสของฟันเฟือง และ transmission error สามารถอธิบายได้โดยการแก้สมการ(8.3.1)-(8.3.6) ผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงค่าของตัวแปรต่างๆ ณ จุดที่ฟันเฟืองทั้งสองสัมผัสกัน โดยนำค่า  $\phi_2$  ที่ได้จากการประมวลผลไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎี และจะแสดงผลในรูปของ  $\Delta\phi_2$  ดังแสดงไว้ในตารางที่ 8-3

$\phi_1$ (rad)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$u_1$ (นิ้ว)	$u_2$ (นิ้ว)	$\Delta\phi_2$ (rad)
-0.08	0.2702	0.4204	0.0086	0.0261	-0.00036
-0.04	0.3156	0.3916	0.0124	0.0217	-0.00036
0	0.3501	0.3717	0.0152	0.0177	-0.00028
0.04	0.3900	0.3515	0.0177	0.0133	-0.00046
0.08	0.4298	0.3317	0.0201	0.0087	-0.00026

ตารางที่ 8-3 แสดงผลวิเคราะห์จุดสัมผัสของฟันเฟือง  
และ transmission error กรณีที่มีการติดตั้งเยื้องศูนย์กลาง  $q = 0.0875$  rad

## บทที่ 9

### สรุปและวิจารณ์ผล

#### 9.1 สรุปผล

ผลลัพธ์ที่ได้จากการประมวลผลที่แสดงค่าของตัวแปรต่างๆ ณ จุดที่ฟันเฟืองทั้งสองสัมผัสกัน และ ค่าการส่งผ่านที่ผิดพลาด ( Transmission error ) สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ในกรณีที่ระยะห่างระหว่างเพลาไม่ตรงตามทฤษฎี ( Change of Center Distance ) เราจะเห็นว่าตำแหน่งที่ฟันเฟืองสัมผัสกันเปลี่ยนแปลงไป แต่ไม่ก่อให้เกิดค่า Transmission error
2. ในกรณีของการติดตั้งเยื้องศูนย์ ( Misalignment ) จะส่งผลให้เกิดค่า Transmission error และทำให้ตำแหน่งที่ฟันเฟืองสัมผัสกันเปลี่ยนแปลงไปด้วย
3. การที่ตำแหน่งที่ฟันเฟืองสัมผัสกันเปลี่ยนแปลงไป หรือการเกิดค่า Transmission error เป็นปัจจัยหลักที่ทำให้เครื่องจักรเกิดเสียงดัง และการสั่นสะเทือน ดังนั้นจากผลลัพธ์ที่ได้แสดงให้เห็นว่าในกรณีของ Misalignment จะก่อให้เกิดเสียงดัง และการสั่นสะเทือน มากกว่ากรณีของ Change of Center Distance

#### 9.2 วิจารณ์ผล

จากผลสรุปในหัวข้อข้างต้น สามารถวิจารณ์ผลได้ดังนี้

1. ผลลัพธ์และข้อสรุปที่ได้เกิดจากการวางขอบเขตของงานวิจัยไว้เช่น พิจารณาว่าฟันเฟืองที่มีใช้อยู่ในปัจจุบันนั้นมีรูปร่างตามมาตรฐาน AGMA ฟันเป็นวัตถุแข็งเกร็ง และไม่คิดผลกระทบเนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง เป็นต้น ดังนั้นในการใช้งานจริงอาจเกิดการส่งผ่านที่ผิดพลาดขึ้นในกรณีของ Change of Center Distance หรือค่าส่งผ่านที่ผิดพลาดอาจมากขึ้นกรณีของ Misalignment ได้ เนื่องจากในความเป็นจริงฟันเฟืองที่ใช้ อาจมีการเสียรูปในขณะที่มีการขบกันของฟัน
2. เราน่าจะสามารถลดการส่งผ่านที่ผิดพลาดได้ ด้วยการปรับแต่งรูปร่างของฟันเฟือง

## ภาคผนวก ก

## โค้ดที่ใช้ในการประมวลผล

```

%% Pinion parameters %%
%% phi1 = rotation angle (rad)
%% theta1 = surface parameter (rad)
%% u1 = surface parameter (m. or in)
%% rb1 = base radius
%% r1 = pitch radius
%% r1add = addendum radius
%% r1ded = dedendum radius
%% N1 = Number of teeth
%% theta1_add = roll angle at addendum

%% Gear parameters %%
%% phi2 = rotation angle (rad)
%% theta2 = surface parameter (rad)
%% u2 = surface parameter (m. or in)
%% rb2 = base radius
%% r2 = pitch radius
%% r2add = addendum radius
%% r2ded = dedendum radius
%% N2 = Number of teeth
%% theta2_add = roll angle at addendum

%% Gear system parameters%%
%% alpha = pressure angle (rad)
%% C = r1+r2
%% Cerr = axial error (m. or in)
%% Gerr = Misalignment error
%% DP = diametral pitch (1/in)
%% FW = face width (in)

%% Initial guess of surface parameters%%

```

```

%%%% phi1o = rotation angle of pinion
%%%% phi2o = rotation angle of gear
%%%% theta1o = roll angle (pinion)
%%%% theta2o = roll angle (pinion)
%%%% u1o = surface parameter (pinion)
%%%% u2o = surface parameter (gear)

clear all

syms phi1 theta1 u1 phi2 theta2 phi2 u2

syms r1 r2 rb1 rb2 alpha C Cerr Gerr q

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Define numeric parameters for pinion and gear %%%%%%%%%%
N1 = 36;
N2 = 72;
DP = 8;
alpha = 20.0; %% degree %%
alpha = alpha*pi/180; %% change to radian %%
r1 = N1/(2*DP);
r2 = N2/(2*DP);
rb1 = r1*cos(alpha);
rb2 = r2*cos(alpha);
C = r1+r2;
add = 1.25/DP;
ded = 1.00/DP;
r1add = r1+add;
r1ded = r1-ded;
r2add = r2+add;
r2ded = r2-ded;
Cerr = 0;
Gerr = 0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Find initial and end points of contact %%%%%%%%%%
alpha1_e = acos(rb1/r1add);
theta1_e = tan(alpha1_e);
alpha2_s = acos(rb2/r2add);
theta2_s = tan(alpha2_s);

```

```

AI = sqrt(r1^2-rb1^2);
BD = sqrt(r2add^2-rb2^2);
DI = sqrt(r2^2-rb2^2);
BI = BD-DI;
AB = AI-BI;
AC = sqrt(r1add^2-rb1^2);
CI = AC - AI;
DC = DI-CI;
alpha1_s = atan(AB/rb1);
theta1_s = tan(alpha1_s);
phi1_s = -(alpha - theta1_s);%% Negative indicates CW %%
phi2_s = theta2_s-alpha;
alpha2_e = atan(DC/rb2);
theta2_e = tan(alpha2_e);
phi2_e = -(alpha - theta2_e);%% Negative indicates CW %%
phi1_e = theta1_e-alpha;

```

```

%% Determine x1 y1 z1 coordinates %%

```

```

x1 = rb1*(sin(theta1)-theta1*cos(theta1));
y1 = rb1*(cos(theta1)+theta1*sin(theta1));
z1 = u1;
R1 = [x1;y1;z1;1];

```

```

%% Gerr is in clockwise direction about y axis%%

```

```

Mfh = [ cos(Gerr) 0  sin(Gerr) 0;
        0      1      0      0;
       -sin(Gerr) 0  cos(Gerr) 0;
        0      0      0      1];

```

```

%% phi1 is in counterclockwise direction about z axis %%

```

```

Mh1 = [ cos(phi1) -sin(phi1) 0 0;
        sin(phi1)  cos(phi1) 0 0;
        0          0      1 0;
        0          0      0 1];

```

```

R1f = Mfh*Mh1*R1 ;
VR1f = [ R1f(1,1); R1f(2,1); R1f(3,1)];
VR1f_Dtheta1 = diff(VR1f,'theta1');
VR1f_Du1 = diff(VR1f,'u1');
N1f = simple(cross(VR1f_Dtheta1,VR1f_Du1));
MagN1f = sqrt(N1f(1,1)^2+N1f(2,1)^2+N1f(3,1)^2);
n1f = N1f/MagN1f;

%% Determine x2 y2 z2 coordinates %%
x2 = rb2*(-sin(theta2)+theta2*cos(theta2));
y2 = rb2*(-cos(theta2)-theta2*sin(theta2));
z2 = u2;
R2 = [x2;y2;z2;1];
Mfh = [1 0 0 0;
        0 1 0 C;
        0 0 1 0;
        0 0 0 1];
Mhc = [ cos(q) 0 sin(q) 0;
        0 1 0 0;
        -sin(q) 0 cos(q) 0;
        0 0 0 1];
Mc2 = [ cos(phi2) -sin(phi2) 0 0;
        sin(phi2) cos(phi2) 0 0;
        0 0 1 0;
        0 0 0 1];
R2f = Mfh*Mhc*Mc2*R2 ;
VR2f = [ R2f(1,1); R2f(2,1); R2f(3,1)];
VR2f_Dtheta2 = diff(VR2f,'theta2');
VR2f_Du2 = diff(VR2f,'u2');
N2f = simple(cross(VR2f_Du2,VR2f_Dtheta2));
MagN2f = sqrt(N2f(1,1)^2+N2f(2,1)^2+N2f(3,1)^2);
n2f = N2f/MagN2f;
F1 = R1f(1,1)-R2f(1,1);
F2 = R1f(2,1)-R2f(2,1);

```

```

F3 = R1f(3,1)-R2f(3,1);
F4 = n1f(1,1)-n2f(1,1);
F5 = n1f(2,1)-n2f(2,1);
F1_Du1 = diff(F1,'u1');
F1_Dtheta1 = diff(F1,'theta1');
F1_Du2 = diff(F1,'u2');
F1_Dtheta2 = diff(F1,'theta2');
F1_Dphi2 = diff(F1,'phi2');
F2_Du1 = diff(F2,'u1');
F2_Dtheta1 = diff(F2,'theta1');
F2_Du2 = diff(F2,'u2');
F2_Dtheta2 = diff(F2,'theta2');
F2_Dphi2 = diff(F2,'phi2');
F3_Du1 = diff(F3,'u1');
F3_Dtheta1 = diff(F3,'theta1');
F3_Du2 = diff(F3,'u2');
F3_Dtheta2 = diff(F3,'theta2');
F3_Dphi2 = diff(F3,'phi2');
F4_Du1 = diff(F4,'u1');
F4_Dtheta1 = diff(F4,'theta1');
F4_Du2 = diff(F4,'u2');
F4_Dtheta2 = diff(F4,'theta2');
F4_Dphi2 = diff(F4,'phi2');
F5_Du1 = diff(F5,'u1');
F5_Dtheta1 = diff(F5,'theta1');
F5_Du2 = diff(F5,'u2');
F5_Dtheta2 = diff(F5,'theta2');
F5_Dphi2 = diff(F5,'phi2');
F1=subs(F1);
F2=subs(F2);
F3=subs(F3);
F4=subs(F4);
F5=subs(F5);
phi1 = -0.1791;%fix phi 1

```

```

q=0.0175;%fix
u1=0.184;
theta1=0.171;
u2=0.191;
theta2=0.461;
phi2=0.01115;
J = [ F1_Du1 F1_Dtheta1 F1_Du2 F1_Dtheta2 F1_Dphi2;
      F2_Du1 F2_Dtheta1 F2_Du2 F2_Dtheta2 F2_Dphi2;
      F3_Du1 F3_Dtheta1 F3_Du2 F3_Dtheta2 F3_Dphi2;
      F4_Du1 F4_Dtheta1 F4_Du2 F4_Dtheta2 F4_Dphi2;
      F5_Du1 F5_Dtheta1 F5_Du2 F5_Dtheta2 F5_Dphi2];
m=1;
n=1;
l=1;
o=1;
p=1;
eps = 1e-2;
count = 0;
max = 20;
while ( m > eps | n > eps | l > eps ) & ( count < 20 ),
    count = count+1;
    fprintf('Count = %d\n',count);
    J11 = subs(F1_Du1);
    J12 = subs(F1_Dtheta1);
    J13 = subs(F1_Du2);
    J14 = subs(F1_Dtheta2);
    J15 = subs(F1_Dphi2);
    J21 = subs(F2_Du1);
    J22 = subs(F2_Dtheta1);
    J23 = subs(F2_Du2);
    J24 = subs(F2_Dtheta2);
    J25 = subs(F2_Dphi2);
    J31 = subs(F3_Du1);
    J32 = subs(F3_Dtheta1);

```

```

J33 = subs(F3_Du2);
J34 = subs(F3_Dtheta2);
J35 = subs(F3_Dphi2);
J41 = subs(F4_Du1);
J42 = subs(F4_Dtheta1);
J43 = subs(F4_Du2);
J44 = subs(F4_Dtheta2);
J45 = subs(F4_Dphi2);
J51 = subs(F5_Du1);
J52 = subs(F5_Dtheta1);
J53 = subs(F5_Du2);
J54 = subs(F5_Dtheta2);
J55 = subs(F5_Dphi2);
DJ = [ J11 J12 J13 J14 J15;
       J21 J22 J23 J24 J25;
       J31 J32 J33 J34 J35;
       J41 J42 J43 J44 J45;
       J51 J52 J53 J54 J55];
o1 = det (DJ);
F11 = subs(F1);
F21 = subs(F2);
F31 = subs(F3);
F41 = subs(F4);
F51 = subs(F5);
u1_2 = u1-(F11/o1);
theta1_2 = theta1-(F21/o1);
u2_2 = u2-(F31/o1);
theta2_2 = theta2-(F41/o1);
phi2_2 = phi2-(F51/o1);
m = abs(u1_2-u1)/abs(u1);
n = abs(theta1_2-theta1)/abs(theta1);
l = abs(u2_2-u2)/abs(u2);
o = abs(theta2_2-theta2)/abs(theta2);
p = abs(phi2_2-phi2)/abs(phi2);

```

```
u1=u1_2
theta1=theta1_2
u2=u2_2
theta2=theta2_2
phi2=phi2_2
end
```

### บรรณานุกรม

- [1] AGMA, "Gear-Cutting Tool Fine – and Coarse – Pitch Hobs," AGMA 120.01, 1975
- [2] AGMA, "Design Guide for Vehicle Spur and Helical," AGMA 170.01, 1976
- [3] AGMA, "Information Sheet-Gear Scoring Design for Aerospace Spur and Helical Power Gears," AGMA 217.01, 1965
- [4] AGMA, "Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur and Helical Involute Gear Teeth," AGMA 218.01, 1982
- [5] AGMA, "Information Sheet – Geometry Factors for Determining of the Strength of Spur, Helical, Herrtngbone and Bevel Gear Teeth," AGMA 266.01, 1970
- [6] AGMA, " AGMA Gear Handbook – Volume 1 – Gear Classification, Materials and Measuring Methods for Unassembled Gears," AGMA 390.03, 1973
- [7] AGMA, "Design Procedure for Aircraft Engine and Power Take-Off Spur and Helical Gears," AGMA 411.02, 1966
- [8] Buckingham, E., Analytical Mechanics of Gears, Dover Publications Inc., New York, 1949
- [9] Colbourne, J.R., The Geometry of Involute Gears, Springer Verlag, New York, 1987
- [10] Davidov, J.S., "The Generation of Conjugate Surfaces by Two Rigidly Connected Tool Surfaces," Vestnik Mashinostroyenia, No.2, 1963
- [11] Dudley ,D.W., Handbook of Practical Gear Design, McGraw-Hill Book Co., New York, 1984
- [12] Litvin, F.L., Theory of Gearing, 2<sup>nd</sup> ed., Nauka, 1968 (in Russian). The new edition (in English), NASA, Washing D.C., 1989
- [13] Litvin, F.L. and Tsay, C.B., "Helical Gears with Circular Arc Teeth: Simulation of Conditions of Meshing and Bearing Contact," ASME 1984 Des. Eng. Tech. Onf.; also Trans ASME, J.Mech. Transm. Autom. Des., Vol.107, No.4, pp.556-564, 1985
- [14] MAAG Gear-Wheel Co. Ltd., "Underlying Theory for the Maag 0° Grinding Method."
- [15] Robert E. Smith, "The Relationship of Measure Gear Noise to Measured Gear Transmission Errors," AGMA Technical paper, Oct., 1987
- [16] ดร.วริทธิ์ อิงภากรณ์ และ ชาญ ถนัดงาน , "การออกแบบเครื่องจักรกลเล่มที่ 2", พ.ศ. 2541, หน้า 21-27