

การทำให้เสถียรแบบคงทนสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา

ROBUST STABILIZATION OF SYSTEMS WITH DELAYED-STATE



T 0 4 7 6 7 0

กมล เอื้อชินกุล

KAMOL UAHCHINKUL

ว
ก
05

เลขหม.....
เลขทะเบียน 47670
วัน, เดือน, ปี 21 ส.ค. 2546

.b.....
.i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. ๒๕๔๖

ROBUST STABILIZATION OF SYSTEMS WITH DELAYED-STATE



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF ENGINEERING IN ELECTRICAL ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2003

ISBN 974-324-650-9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2003

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การทำให้เสถียรแบบคงทนสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา
นักศึกษา	นาย กมล เอื้อชินกุล
รหัสประจำตัว	๔๐๖๐๐๑๔
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
พ.ศ.	๒๕๔๖
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร. จงกล งามวิวิทย์
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม	ดร. สุธี ผู้เจริญชนะชัย

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนมีเสถียรภาพแบบคงทน ระบบที่ต้องการศึกษาจะถูกจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปที่สามารถใช้งานได้ง่ายและครอบคลุมตัวหน่วงเวลาทั้งแบบจุดและแบบกระจาย โดยไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะโครงสร้างของตัวหน่วงเวลาที่แตกต่างกันออกไป การออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพจะทำโดยการสร้างระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาขึ้นมาเพื่อใช้เป็นตัวแทนระบบที่มีตัวหน่วงเวลา และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลานั้น หลังจากนั้นจะแสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบเสมือนที่ออกแบบได้โดยเทคนิคนี้จะสามารถควบคุมให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลามีเสถียรภาพได้โดยมีข้อจำกัดที่น้อยลง สุดท้ายจะเป็นการแสดงการประยุกต์ใช้งานกับระบบตัวอย่าง ผลที่ได้ชี้ให้เห็นว่าเทคนิคและทฤษฎีที่นำเสนอสามารถใช้ออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพที่สามารถควบคุมให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้

Thesis Title	Robust Stabilization Of Systems With Delayed-State
Student	Mr. Kamol UAHCHINKUL
Student Id.	41060014
Degree	Doctor Of Engineering
Programmed	Electrical Engineering
Year	2003
Thesis Advisor	Assoc.Prof. Dr. Jongkol NGAMWIWIT
Thesis Co-Advisor	Dr. Suthee PHOOJAROENCHANACHAI

ABSTRACT

This thesis presents the controller design technique for stabilizing the uncertain time-delay systems. The system under consideration is described in general form. The formulation is conveniently useful and can incorporate with both point and distributed delay. The suitable control law can be derived as follows. First, an equivalent delay-free system is obtained by transformation of the original delayed-system. Next, the stabilization control law will be simplified and solved from the equivalent system and this control law can be used to stabilize the uncertain time-delay system with less limitation. Finally, several design examples will show applicability and effectiveness of the proposed method that can make systems asymptotically stable.

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์จกกล งามวิวิทย์ อาจารย์ที่ปรึกษา และอาจารย์สุธิ ผู้เจริญขณะชัย อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ที่ให้แนวคิดหลักในการทำวิจัยและพัฒนางานสำเร็จออกมาเป็นวิทยานิพนธ์นี้ ได้ รวมถึงแนวทางแก้ปัญหาต่างๆ มากมาย

ขอขอบคุณศูนย์ทดสอบผลิตภัณฑ์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ ที่ได้เล็งเห็นความสำคัญของการศึกษาต่อในครั้งนี้และให้การสนับสนุนโดยการอนุมัติให้ลาศึกษาได้เป็นเวลา 2 ปีเต็ม รวมถึงเพื่อนๆ ที่ร่วมทำงานด้วยทุกคน

ขอขอบคุณคณาจารย์และเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุมทุกท่าน สำหรับความช่วยเหลือต่างๆ ขอขอบคุณเพื่อนๆ และน้องๆ ทั้งหลายที่คอยให้กำลังใจและถามไถ่ถึงความคืบหน้าตลอดมา

ขอขอบคุณกรรมการสอบสัมภาษณ์วิทยานิพนธ์ทุกท่าน ที่ให้ข้อคิดและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ยิ่ง

ขอขอบคุณภรรยาสุดที่รักที่ขอมเหินเหินอยู่กับลูกสาวจอมแก่นและลูกชายจอมซนตลอดช่วงเวลาที่ผ่านมามี

ท้ายที่สุดนี้ ขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อคุณแม่สำหรับทุกสิ่งทุกอย่างที่มีในวันนี้

กมล เออชินกุล

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญรูป.....	VI
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	VII
บทที่	
1 บทนำ.....	1
1.1 ขอบเขตของปัญหาและแนวทางในวิทยานิพนธ์.....	3
1.2 คำโครงของวิทยานิพนธ์.....	4
2 การออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพแบบคงทนสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา.....	6
2.1 ลักษณะระบบที่ต้องการศึกษา.....	6
2.2 ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไป.....	9
2.3 การออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพ.....	13
2.4 ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมและตัวอย่างการคำนวณ.....	16
3 การประยุกต์ใช้งาน.....	27
3.1 ความสอดคล้องกับเทคนิคเดิม.....	27
3.2 การใช้เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพแบบเลื่อน.....	33
3.3 การประยุกต์ใช้กับระบบควบคุมชนิดติดตามโมเดลอ้างอิง.....	35
3.4 กรณีที่คำนวณหารากไม่ได้และกรณีมีรากที่ไม่เสถียรซ้ำกัน.....	38
4 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพ.....	40
4.1 การออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพกับระบบผสมสารเคมีแบบสองถัง.....	40
4.2 การออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพกรณีที่คำนวณหารากที่ไม่ต้องการ ของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาไม่ได้.....	49
5 บทสรุป.....	55
เอกสารอ้างอิง.....	57

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.....	62
ภาคผนวก ข.....	64
ภาคผนวก ค.....	67
ภาคผนวก ง.....	73
ภาคผนวก จ.....	76
ภาคผนวก ฉ.....	77
ภาคผนวก ช.....	78
ประวัติผู้เขียน.....	81
ตัวอย่างผลงานวิจัย.....	83



สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ และ $z(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.1 เมื่อกำหนดให้ค่าสถานะเริ่มต้น $x_0 = -2.5$	19
2.2 กราฟแสดงค่าสถานะ $u(t)$ และ $\omega(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.1 เมื่อกำหนดให้ค่าสถานะเริ่มต้น $x_0 = -2.5$	20
2.3 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ เมื่อไม่มีสัญญาณควบคุม ตามตัวอย่าง 2.2 เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้น $x_0 = [-2.5 \ 1.5]^T$	22
2.4 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.2 เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้น $x_0 = [-2.5 \ 1.5]^T$	23
2.5 กราฟแสดงค่าสถานะ $z(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.2 เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้น $x_0 = [-2.5 \ 1.5]^T$	24
2.6 กราฟแสดงค่าสถานะ $u(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.2 เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้น $x_0 = [-2.5 \ 1.5]^T$	25
3.1 แผนภาพบล็อกแสดงระบบควบคุมชนิดติดตาม โมเดลอ้างอิง.....	35
4.1 ระบบผสมสารเคมีแบบสองถัง.....	40
4.2 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ และตัวรบกวนระบบ $\omega(t)$ ของระบบผสมสารเคมีเมื่อ ไม่มีตัวควบคุม.....	45
4.3 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ ของระบบผสมสารเคมี.....	46
4.4 กราฟแสดงค่าสถานะของระบบระบบเสมือน $z(t)$ ของระบบผสมสารเคมี.....	47
4.5 กราฟแสดงค่าสถานะ $u(t)$ และตัวรบกวนระบบ $\omega(t)$ ของระบบผสมสารเคมี.....	48
4.6 กราฟแสดงค่าสถานะ $c(t)$ ของระบบผสมสารเคมี.....	49
4.7 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ ของระบบผสมสารเคมี.....	52
4.8 กราฟแสดงค่าสถานะ $u(t)$ ของระบบผสมสารเคมี.....	53
4.9 กราฟแสดงค่าสถานะ $c(t)$ และตัวรบกวนระบบ $\omega(t)$ ของระบบผสมสารเคมี.....	54

คำอธิบายสัญลักษณ์

- R คือเลขจำนวนจริงใดๆ
 R^+ คือเลขจำนวนจริงบวกใดๆ
 R^n คือเวกเตอร์ขนาด n ของเลขจำนวนจริงใดๆ
 $R^{n \times m}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n \times m$ ของเลขจำนวนจริงใดๆ
 I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์

ถ้ากำหนดให้ $x \in R^n$ แล้ว

- x^T คือทรานสโพสของเวกเตอร์ x
 $\|x\|$ คือค่ายูคลิดีเนียนนอร์ม (Euclidean norm) ของเวกเตอร์ x มีค่าเท่ากับ $(x^T x)^{\frac{1}{2}}$

ถ้ากำหนดให้ $M \in R^{n \times m}$ แล้ว

- M^T คือทรานสโพสของเมทริกซ์ M
 $\|M\|$ คือค่าสูงสุดของสเปกตรัมนอร์ม (spectrum norm) ของเมทริกซ์ M

ถ้ากำหนดให้ M เป็นเมทริกซ์สมมาตรขนาด $n \times n$ แล้ว

- $\lambda(M)$ คือค่าเงาะง (eigen value) ของเมทริกซ์ M
 $\lambda_{\min}(M)$ คือค่าเงาะงที่น้อยที่สุดของเมทริกซ์ M
 $\lambda_{\max}(M)$ คือค่าเงาะงที่มากที่สุดของเมทริกซ์ M

ถ้ากำหนดให้ M เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ แล้ว

- $\sigma(M)$ คือค่ารากของเมทริกซ์ M มีค่าเท่ากับ
$$\sigma(M) = \{s = C; \det(sI - M) = 0\}$$
 $\sigma_u(M)$ คือค่ารากที่ไม่เป็นที่ต้องการของเมทริกซ์ M มีค่าเท่ากับ
$$\sigma_u(M) = \{s \in \sigma(M); \operatorname{Re} \geq -\nu\}$$
เมื่อ $\nu > 0$ คือค่าขอบเขตเสถียรภาพที่ต้องการ
 $\sigma^+(M)$ คือค่ารากที่ไม่เสถียรของเมทริกซ์ M มีค่าเท่ากับ
$$\sigma^+(M) = \{s = \sigma(M); \operatorname{Re} \geq 0\}$$

บทที่ 1

บทนำ

ตัวหน่วงเวลา (time delay) เป็นลักษณะสำคัญชนิดหนึ่งที่พบเห็นได้ทั่วไปในระบบควบคุม อุตสาหกรรมปกติอาจเกิดขึ้นจากเส้นทางเดินที่ยาวของสัญญาณหรือส่วนป้อนกลับ (long feedback path) การคอยจังหวะเวลาหรือไทม์มิ่ง (timing) การอ่านและแปลงค่าสัญญาณป้อนกลับ (read and feedback transformation) การเก็บข้อมูลและคำนวณผล (data store and processing) และในบางกรณีอาจเกิดจากความตั้งใจหรือจำเป็นที่จะให้มีการหน่วงเวลาขึ้นในระบบ เช่น ในระบบที่มีการนำสารประกอบ/พลังงานเหลือใช้เวียนกลับมาใช้ใหม่แบบอัด โนมินั้นอาจต้องหน่วงเวลารอไว้เพื่อให้สารประกอบหรือพลังงานนั้นปรับตัวมาอยู่ในระดับที่เหมาะสมตรงตามที่ต้องการเสียก่อน เป็นต้น ซึ่งระบบที่มีตัวหน่วงเวลาเป็นองค์ประกอบหลักอยู่ภายในนี้ ถูกเรียกว่า ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (delayed systems or time delay systems) ในช่วงที่ตัวควบคุมยังมีความเร็วไม่มากและระบบเองก็ไม่ต้องการความละเอียดแม่นยำนัก ตัวหน่วงเวลาในระบบมักถูกละเลยตัดออกไปจากโครงสร้างหลักของระบบแล้วอนุมานเป็นระบบที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา ทั้งนี้เพื่อลดระยะเวลาและความยุ่งยากในการคำนวณหาค่าของตัวควบคุมลงหรือไม่ก็เพื่อลดภาระการทำงานของตัวควบคุมลง

ในเวลาต่อมาเมื่อเทคโนโลยีที่เกี่ยวข้องต่างๆ ได้รับการพัฒนาให้ดีขึ้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับระบบควบคุมได้ และระบบควบคุมเองก็ต้องการความละเอียดแม่นยำและประสิทธิภาพสูงมากกว่าในอดีตที่ผ่านมา ทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลามักถูกพิจารณาในลักษณะที่มีองค์ประกอบของตัวหน่วงเวลารวมอยู่ด้วยมากขึ้นและส่งผลให้มีการพัฒนาเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาต่อเนื่องมาเป็นลำดับ โดยในปัจจุบันนี้ตัวหน่วงเวลาสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ ชนิดไม่ทราบค่าและชนิดทราบค่า ซึ่งชนิดทราบค่าได้สามารถแยกย่อยออกได้อีกเป็น ตัวหน่วงเวลาแบบจุด (point delay) และตัวหน่วงเวลาแบบกระจาย (distributed delay) เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลานั้นมีความแตกต่างหลากหลายไปตามชนิดของตัวหน่วงเวลาที่อยู่ในระบบ ตัวอย่างงานวิจัยที่นำเสนอเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาได้แก่ งานของ เอลเลอร์ อักการ์วัลกับแบงส์ (ELLER, AGGARWAL and BANKS) [1] รอสส์ (ROSS) [2] บาร์สซกกับออลบรอต (BARSZCZ and OLBROT) [3] และอิเคดะกับอาชิเดะ (IKEDA and ASHIDA) [4] เป็นต้น ซึ่งการคำนวณหาผลเฉลยให้กับตัวควบคุมสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลานั้นทำได้ยากกว่าระบบที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา

และเทคนิคการออกแบบที่นำเสนอจะใช้ได้กับระบบที่มีโครงสร้างของตัวห้วงเวลาและเงื่อนไข สอดคล้องกับที่ได้กำหนดไว้เท่านั้น

ต่อมาเพียกเบดซีกับเพียร์สัน (FIAGBEDZI and PEARSON) [5] ได้เสนอแนวคิดในการ ออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบที่มีตัวห้วงเวลาชนิดทราบค่า โดยใช้เทคนิคการแปลง เชิงเส้นมาช่วยลดรูปสมการระบบที่มีตัวห้วงเวลาไปเป็นสมการระบบที่ไม่มีตัวห้วงเวลา ทำให้ สามารถนำเอาทฤษฎีการควบคุมสำหรับระบบที่ไม่มีตัวห้วงเวลามาปรับประยุกต์ใช้เพื่อ ออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวห้วงเวลาได้โดยตรงและสะดวกขึ้น ซึ่งจะแตกต่างจาก การออกแบบตัวควบคุมในช่วงแรกที่ตัดตัวห้วงเวลาออกแล้วอนุมานว่าเป็นระบบที่ไม่มี ตัวห้วงเวลาอยู่ภายใน เทคนิคของเพียกเบดซีกับเพียร์สันนี้ให้ความถูกต้องแม่นยำมากกว่า โดยที่ ยังคงความสะดวกในการออกแบบตัวควบคุมไว้เหมือนกับระบบที่ไม่มีตัวห้วงเวลา เพียกเบดซี กับเพียร์สันได้ปรับปรุงทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นนี้อีกหลายครั้งเพื่อให้สามารถใช้งานได้ครอบคลุม ระบบที่มีตัวห้วงเวลาที่แตกต่างกันได้มากขึ้น [6-8]

อย่างไรก็ตามงานวิจัยที่ได้อ้างถึงข้างต้นนี้ ยังไม่ได้รวมค่าความไม่แน่นอน (uncertainties) และตัวรบกวนระบบ (disturbances) ไว้ในระบบที่ต้องการศึกษาด้วย ทั้งนี้ค่าความไม่แน่นอนและ ตัวรบกวนระบบนี้เป็นลักษณะพื้นฐานที่พบได้ทั่วไปและมักจะมีผลกระทบต่อประสิทธิภาพหรือผล ตอบสนองของระบบอยู่ไม่มากก็น้อย และในบางครั้งก็ส่งผลกระทบรุนแรงจนถึงเสถียรภาพของ ระบบได้ ดังนั้นค่าความไม่แน่นอนและตัวรบกวนระบบจึงมักถูกรวมเข้าไว้ในระบบที่มีตัวห้วง เวลาที่ต้องการศึกษาด้วยในรูปของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนเพื่อให้ระบบที่มีตัวห้วงเวลา มีคุณ ลักษณะที่ถูกต้องใกล้เคียงกับความเป็นจริงและมีความคงทนต่อความไม่แน่นอนมากขึ้น ระบบที่ได้ จะถูกเรียกว่า ระบบที่มีตัวห้วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน (uncertain delayed system หรือ uncertain system with delay) แต่ที่ส่งผลให้ระบบมีความซับซ้อนขึ้น การวิเคราะห์และ ออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบดังกล่าวจึงทำได้ยากขึ้นเช่นกัน แต่เนื่องจากตัวควบคุมเสถียร ภาพที่ได้สามารถรักษาเสถียรภาพหรือผลตอบสนองของระบบให้เป็นไปตามที่ต้องการได้ดี ระบบ ที่มีตัวห้วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนจึงเป็นที่สนใจของนักวิจัยอย่างกว้างขวาง มีผู้ นำเสนอทฤษฎีการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบดังกล่าวมากมาย [9-41]

งานของ เซอเรส กัดแมนกับพาลมอร์ (CHERES, GUTMAN and PALMOR) [9] นำเสนอ เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมที่น่าสนใจไว้ โดยเทคนิคนี้จะมองตัวห้วงเวลาเป็นเสมือนค่าความ ไม่แน่นอนของระบบแล้วนำเอาเทคนิคการประมาณค่าต่ำสุด-สูงสุดของกัดแมน (Min-Max Approach of GUTMAN) [42-43] มาปรับใช้ ซึ่งมีข้อดีคือสามารถออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพ ให้ระบบที่ต้องการได้โดยง่าย แต่มีข้อเสียที่ตัวควบคุมเสถียรภาพที่ได้จะมีขนาดใหญ่หรือใช้กำลัง

สิ้นเปลืองมากกว่าและตัวควบคุมที่ได้นั้นมีการแกว่งตัวที่สูงมาก (ปัญหาการแกว่งตัวของตัวควบคุมนี้ก็ปัญหาสำคัญปัญหาหนึ่งที่มีผู้สนใจเสนอแนวทางแก้ไขไว้เป็นการเฉพาะเช่นงานของ สอง กับมุกเฮอจี (SONG and MUKHERJEE) [44] ที่เสนอแนวคิดสำหรับลดการแกว่งตัวของตัวควบคุมเสถียรภาพแบบเลื่อนไว้)

งานของลิกับเซอร์โกวิช (LI and YURKOVICH) [38] ที่นำเอาทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นของเฟียกเบตซีกับเพียร์สันมาประยุกต์ใช้ในการแปลงลดรูประบบที่มีตัวหน่วงเวลาไปเป็นระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาก่อนนำไปใช้ออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพแบบคงทน ซึ่งเป็นเทคนิคเดียวกันกับของผู้เขียน [23-24] โดยลิกับเซอร์โกวิชได้ทดลองใช้เทคนิคนี้ออกแบบตัวควบคุมความเร็วรอบให้กับเครื่องยนต์ฟอร์ด V8 ขนาด 4.6 ลิตร ซึ่งผลการทดลองที่ได้แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่ได้สามารถควบคุมความเร็วรอบให้เป็นไปตามที่ต้องการได้จริง แต่ว่าเทคนิคการแปลงเชิงเส้นที่ลิกับเซอร์โกวิชใช้จะทำให้ขนาดของระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลามีขนาดใหญ่ขึ้นเมื่อเทียบกับขนาดของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาเดิม และตัวควบคุมเสถียรภาพที่นำเสนอก็ยังคงไม่ได้แก้ปัญหการแกว่งตัวของสัญญาณควบคุม

งานวิจัยอื่นๆ ที่เสนอเทคนิคการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพนั้นแม้จะพิจารณาว่าตัวหน่วงเวลาเป็นโครงสร้างหลักของระบบ แต่เทคนิคการวิเคราะห์หรือออกแบบเสถียรภาพให้กับระบบจะสามารถใช้งานได้เฉพาะกับระบบที่มีโครงสร้างของตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนที่มีเงื่อนไขสอดคล้องกับที่กำหนดไว้เท่านั้น จากปัญหาและข้อจำกัดที่ปรากฏข้างต้นทำให้การพัฒนาเทคนิคสำหรับการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาในปัจจุบันนี้ ก็เพื่อปรับปรุงให้สามารถใช้งานได้ครอบคลุมระบบที่มีโครงสร้างของตัวหน่วงเวลาที่แตกต่างกันได้มากขึ้น ใช้งานได้สะดวกขึ้น หรือไม่ก็เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพหรือลดปัญหาการใช้งานที่มีอยู่ในเทคนิคเดิมให้น้อยลง ในวิทยานิพนธ์นี้ก็มุ่งเน้นที่จะขยายขอบเขตการใช้งานให้กว้างขวางขึ้นและลดข้อจำกัดการใช้งานในเทคนิคเดิมให้น้อยลง

1.1 ขอบเขตของปัญหาและแนวทางในวิทยานิพนธ์

เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาที่ได้นำเสนอไว้ในงานวิจัยระดับมหาบัณฑิต [41] นั้นสามารถใช้งานได้ดีเฉพาะกับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาชนิดทราบค่าแบบจุด หากระบบมีโครงสร้างตัวหน่วงเวลาแตกต่างกันไป ก็จำเป็นต้องปรับปรุงตัวแปลงเชิงเส้นให้สอดคล้องกับโครงสร้างระบบที่เปลี่ยนไปก่อนทุกครั้ง และข้อจำกัดของตัวทฤษฎีเองก็ยังคงทำให้เกิดปัญหาทางคณิตศาสตร์บางประการในการประยุกต์ใช้งานจริง (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมในภาค

ผนวก ข) ดังจะเห็นได้จากงานของลึกับเซอร์โกวิช ที่นำเทคนิคเดียวกันไปทดลองใช้ควบคุมความเร็วรอบให้เครื่องยนต์ก็ประสบปัญหาที่ระบบเสมือนที่สร้างขึ้นได้มีขนาดใหญ่เกินไป

ในวิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนองานศึกษาปัญหาการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน เช่นเดียวกันกับที่ได้เคยนำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ระดับมหาบัณฑิต โดยจะเสนอการพัฒนาและปรับปรุงเทคนิคและทฤษฎีสำหรับวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพเพิ่มเติมเพื่อให้

- สามารถใช้งานได้ครอบคลุมระบบที่มีโครงสร้างของตัวหน่วงเวลาทั้งแบบจุด แบบกระจายและแบบผสมได้สะดวกและง่ายขึ้น
- ลดข้อจำกัดการใช้งานอันเนื่องมาจากปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้น้อยลง
- ปรับปรุงตัวควบคุมเสถียรภาพให้มีประสิทธิภาพหรือคุณลักษณะที่ดีขึ้น

โดยระบบที่มีตัวหน่วงเวลาที่ต้องการศึกษามีลักษณะพื้นฐานที่สำคัญคือ ตัวระบบหลักเป็นระบบเชิงเส้นที่ตัวหน่วงเวลาที่อยู่ในเป็นชนิดคงที่และทราบค่า และตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนที่อยู่ในนั้นเป็นชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่ (matched uncertainties) และสามารถประมาณค่าสูงสุดได้

หลักการในการออกแบบตัวควบคุมให้กับระบบ ยังคงเป็นการนำเอาเทคนิคการแปลงลดรูปมาปรับใช้ในการแปลงระบบที่มีตัวหน่วงเวลาไปเป็นระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาแล้วจึงนำเอาผลการควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่ไม่มีตัวหน่วงเวลามาปรับประยุกต์ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาอยู่ในอีกทีหนึ่ง

ในวิทยานิพนธ์นี้นอกจากจะเสนอเทคนิคใหม่สำหรับการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน ยังจะได้เสนอขั้นตอนการใช้งานและตัวอย่างการประยุกต์ใช้งานประกอบไปพร้อมกันเพื่อให้ผู้ที่สนใจ สามารถทำความเข้าใจทฤษฎีและแนวคิดได้ง่ายขึ้นด้วย

1.2 เค้าโครงของวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 บท ดังนี้

บทที่ 1 บทนำ จะกล่าวถึงความเป็นมาและเนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 จะกล่าวถึงเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไป และขั้นตอนวิธีการออกแบบตัวควบคุมโดยใช้เทคนิคดังกล่าวพร้อมตัวอย่างการคำนวณ

บทที่ 3 กล่าวถึงความสอดคล้องกันของทฤษฎีใหม่กับทฤษฎีเดิมที่เสนอไว้แล้วและการนำไปประยุกต์ใช้งานแบบต่างๆ

บทที่ 4 จะนำเสนอผลตอบสนองของระบบตัวอย่างที่ได้จากการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ โดยการใช้ตัวควบคุมเสถียรภาพที่ได้นำเสนอ

บทที่ 5 บทสรุปและวิจารณ์ จะสรุปเนื้อหาทั้งหมดและแนวทางสำหรับการพัฒนาต่อสำหรับผู้สนใจ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

การออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพแบบคงทน สำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา

ในบทนี้จะกล่าวถึงเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน ระบบที่จะศึกษาวิเคราะห์มีลักษณะพื้นฐานที่สำคัญคือ ตัวระบบหลักเป็นระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเวลาชนิดคงที่และทราบค่า และตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนนั้นมีขอบเขตและสามารถประมาณหรือระบุขอบเขตนั้นได้ โดยระบบที่มีตัวหน่วงเวลานี้จะถูกจัดให้อยู่ในรูปทั่วไป และเมื่อกำหนดเงื่อนไขและคุณสมบัติบางประการเพิ่มเติม เราจะสามารถใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปแปลงลครูประบบที่มีตัวหน่วงเวลาไปเป็นระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาที่มีคุณลักษณะสอดคล้องกับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาได้ จากนั้นจึงนำระบบเสมือนที่ได้ไปออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพที่สามารถควบคุมทั้งระบบเสมือนและระบบที่มีตัวหน่วงเวลาให้มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable) ได้

เนื้อหาในบทนี้จะแบ่งออกเป็น 4 ส่วนหลัก ส่วนแรกจะกล่าวถึงลักษณะของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาที่ต้องการศึกษาซึ่งรวมถึงสมมติฐานและเงื่อนไขต่างๆ ที่ต้องการของระบบ ส่วนที่สองจะเป็นการนำเอาทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปของเฟียกเบคซิกกับเพียร์สัน [8] มาปรับประยุกต์ใช้งานเพื่อช่วยแปลงรูประบบที่มีตัวหน่วงเวลาไปเป็นระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา ส่วนที่สามจะเป็นการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบเสมือนดังกล่าวโดยแนวคิดหลักที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมได้มาจากการออกแบบตัวควบคุมแบบคงทนของกัตแมน [42~43] ซึ่งตัวควบคุมเสถียรภาพที่ออกแบบได้โดยเทคนิคนี้ จะสามารถใช้ควบคุมและทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้ ส่วนสุดท้ายจะเป็นข้อสรุปวิธีการนำเอาเทคนิคที่นำเสนอนี้ไปใช้และตัวอย่างการคำนวณ

2.1 ลักษณะระบบที่ต้องการศึกษา

ตัวระบบหลัก (nominal system) ของระบบที่จะศึกษาวิเคราะห์นี้ เป็นระบบที่มีตัวหน่วงเวลาแบบคงที่และทราบค่าอยู่ภายใน โดยตัวหน่วงเวลาที่ปรากฏในระบบสามารถเป็นได้ทั้งแบบจุดแบบกระจายและแบบผสม สามารถแสดงให้อยู่ในรูปทั่วไป (Steiljes Integral) ได้ดังนี้

$$(S_{dn}): \quad \dot{x}(t) = \int_{-r}^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + Bu(t) \quad (2.1)$$

โดยที่

$x(t) \in R^n$ คือ ค่าสถานะของระบบที่เวลาปัจจุบัน

$u(t) \in R^m$ คือ ฟังก์ชันของสัญญาณควบคุม

$\alpha(\cdot) \in L_1([-r,0]; R^{n \times n})$ คือ เมทริกซ์ที่ทราบค่าและมีมิติในช่วง $[-r,0]$

$B \in R^{n \times m}$ คือ เมทริกซ์โครงสร้างของตัวควบคุม

$r \in R^+$ คือ ค่าตัวหน่วงเวลาสูงสุดที่ปรากฏในระบบ

เมื่อนำมารวมกับค่าความไม่แน่นอนและตัวรบกวนระบบในรูปของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนเข้าไป จะได้รูปแบบของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา ที่ต้องการศึกษาวิเคราะห์เป็น

$$(S_d): \quad \dot{x}(t) = \int_{-r}^0 [d\alpha(\theta) + d\beta(\theta)]x(t+\theta) + [B + \Delta B(t)]u(t) + \omega(t) \quad (2.2)$$

โดยที่

$\omega(t) \in R^l$ คือ ฟังก์ชันของตัวรบกวนระบบ

$\Delta B(t) \in R^{n \times m}$ คือ เมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าแน่นอนแต่องค์ประกอบภายในแต่ละตัวมีความต่อเนื่อง สัมพันธ์กันเป็นฟังก์ชันและมีขอบเขต

$\beta(\theta) \in L_1([-r,0]; R^{n \times n})$ คือ เมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าแต่องค์ประกอบภายในแต่ละตัวมีขอบเขตและสามารถอินทิเกรตได้ในช่วง $[-r,0]$

กำหนดให้ค่าเริ่มต้นของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) นี้ เป็น

$$x_0(\eta) \in C_d([-h,0]; R^n)$$

สมมติฐาน 2.1 : ผลกระทบของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน

เป็นที่ทราบกันดีว่าค่าความไม่แน่นอนและตัวรบกวนระบบที่รวมกันอยู่ในรูปของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนนั้นมักมีผลกระทบต่อผลตอบสนองและเสถียรภาพของระบบอยู่เสมอ ซึ่งโดยปกติค่าความไม่แน่นอนมักจะแฝงอยู่ภายในทุกส่วนของระบบ ส่วนตัวรบกวนระบบมักเกิดขึ้นจากปัจจัยภายนอกส่วนที่ควบคุมหรือนอกระบบ เราสามารถแบ่งตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนนี้ออกได้

เป็น 2 ชนิดตามผลกระทบที่เกิดกับระบบคือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนที่ส่งผลกระทบต่อระบบ ในลักษณะเดียวกันกับสัญญาณควบคุมหรือมีโครงสร้างสอดคล้องกับ โครงสร้างของตัวควบคุมในระบบและเป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่ (matched uncertainties) กับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนที่ส่งผลกระทบต่อระบบในลักษณะที่แตกต่างออกไปจากผลที่เกิดจากตัวควบคุมหรือมีโครงสร้างไม่เหมือนกับตัวควบคุมของระบบและเรียกกันทั่วไปว่า ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนชนิดไม่สอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่ (unmatched uncertainties)

กำหนดให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนในระบบที่ต้องการศึกษาเป็นชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่

นิยาม 2.1 : เงื่อนไขเข้าคู่ (matching condition)

จากสมมติฐาน 2.1 เราสามารถเขียนเป็นพจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ว่า สำหรับเวลา $t \in \mathbb{R}^+$ แล้วจะมีเมทริกซ์ต่อเนื่อง $H(\theta)$, $E(t)$ และ $\omega(t)$ ที่สอดคล้องกับ

ก) $\beta(\theta) = BH(\theta)$

ข) $\Delta B(t) = BE(t)$

ค) $\omega(t) = B\varpi(t)$

และจากนิยาม 2.1 เราสามารถจัดรูปสมการระบบ (S_d) ใหม่ได้เป็น

$$\dot{x}(t) = \int_r^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + B[u(t) + v(t)] \quad (2.3)$$

เมื่อ

$$v(t) = \int_r^0 dH(\theta)x(t+\theta) + E(t)u(t) + \varpi(t) \quad (2.4)$$

โดย $v(t)$ คือ ฟังก์ชันผลรวมของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่ทั้งหมดของระบบ

สมมติฐาน 2.2 : ขนาดของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน

ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนที่มีผลกระทบต่อระบบนั้นปกติแล้วจะไม่สามารถบ่งชี้หรือทราบค่าที่แน่นอน ณ เวลาใดเวลาหนึ่งได้ แต่ค่าที่ปรากฏหรือผลกระทบที่เกิดขึ้นนั้นจะมีขนาดไม่เกินค่าขอบเขตจำกัดค่าหนึ่งเสมอ เพราะหากตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนมีค่าสูงได้ไม่จำกัดแล้วจะไม่สามารถหาตัวควบคุมที่มีกำลังเพียงพอที่จะควบคุมระบบได้

กำหนดให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนที่ปรากฏในระบบนั้นมีขอบเขตจำกัดและสามารถประมาณหรือระบุขอบเขตของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนในระบบได้

นิยาม 2.2 : ค่าขอบเขตของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน

จากสมมติฐาน 2.2 เราสามารถเขียนเป็นพจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงค่าขอบเขตของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนได้ดังนี้ สำหรับทุกเวลาที่ $t \in R^+$

- ก) สำหรับบางค่าของ δ ที่มากกว่า 0 แล้วจะมี $\delta I \leq I + \frac{1}{2}(E(t) + E^T(t))$
- ข) สามารถหาค่า $\mu(x_t)$ ซึ่ง $\mu(x_t) \geq \left\| \int_{-r}^0 dH(\theta)x(t+\theta) + \varpi(t) \right\|$
- ค) สามารถหาค่า $\mu_E(t)$ ซึ่ง $\mu_E(t) \geq \|E(t)\|$
- ง) สามารถหาข้อมูลของค่า δ , μ และ μ_E ได้

2.2 ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไป

ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปที่จะนำมาใช้แปลงลดรูประบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) ตามสมการ (2.3) ไปเป็นระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา ได้ปรับปรุงมาจากเทคนิคของของเพียกเบคซีกับเพียร์สัน [7~8] โดยระบบเสมือนที่ได้นั้นจะสะดวกต่อการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพมากกว่า เนื่องจากสามารถนำเอากฎการควบคุมสำหรับระบบที่ไม่มีตัวหน่วงเวลามาปรับใช้ได้ทันที

ก่อนจะกล่าวถึงทฤษฎีบท การแปลงเชิงเส้นทั่วไป ขอกล่าวถึงนิยามสำคัญที่จะถูกใช้งานร่วมกันก่อน ดังต่อไปนี้

นิยาม 2.3 : รากที่ไม่ต้องการ

ถ้ากำหนดให้ $\nu_0 \geq 0$ คือค่าขอบเขตเสถียรภาพที่ต้องการของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา และนิยามให้ระนาบ $C_{-\nu_0}^+ = \{s \in C : \text{Re } s \geq -\nu_0\}$ ส่วนที่เหลือใน C คือระนาบ $C_{-\nu_0}^-$ โดยที่ $C = C_{-\nu_0}^+ \cup C_{-\nu_0}^-$.

จะได้ว่าสำหรับค่า ν_0 ที่เลือกไว้ เซตของรากที่ไม่ต้องการของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) คือเซตของค่าเฉพาะ (eigen value) ที่คำนวณได้จาก

$$\sigma_u(S_d) = \{s \in C : \text{Re } s \geq -\nu_0, \det \Delta(s) = 0\} \subset C_{-\nu_0}^+ \quad (2.5)$$

เมื่อ

$$\Delta(s) = \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) \right]$$

นิยาม 2.4 : สมการเมทริกซ์คุณลักษณะทางซ้าย (Left Characteristic Matrix Equation)

กำหนดให้สมการเมทริกซ์คุณลักษณะทางซ้าย (l.c.m.e.) นิยามโดย

$$JQ = \int_r^0 e^{J\theta} Q d\alpha(\theta). \quad (2.6)$$

เมื่อ

$\alpha(\theta) \in R^{n \times n}$ คือเมทริกซ์ระบบ (system matrix)

$J \in R^{n_p \times n_p}$ คือเมทริกซ์จอร์แดน (jordan matrix)

$Q \in R^{n_p \times n}$ คือเมทริกซ์เฉพาะทางซ้าย (left eigen matrix)

โดยที่ ถ้าเรากำหนดให้ $\sigma_u(S_d) = \Lambda_u^+ \cup \Lambda_u^- \cup \Lambda_u^r$, เมื่อ Λ_u^+ คือเซตของค่ารากจำนวน n_c ราก ที่สร้างขึ้นจากรากเชิงซ้อนของ $\sigma_u(S_d)$ ที่มีค่าเชิงซ้อนเป็นบวก, Λ_u^- คือเซตของค่ารากเชิงซ้อนที่เป็นค่าลบและเข้าคู่กันกับ Λ_u^+ และ Λ_u^r คือเซตของค่ารากจำนวน n_r ราก ที่สร้างขึ้นจากรากจริงของ $\sigma_u(S_d)$ ซึ่งจะทำให้เราได้จำนวนรากที่ไม่ต้องการ $n_p = \#\sigma_u(S_d) = 2n_c + n_r$ เมื่อ $\#$ คือจำนวนราก

และสำหรับค่า $k = 1, 2, \dots, n_c$, ถ้า $(q_1, q_2, \dots, q_{n_c})$ คือค่าเวกเตอร์เฉพาะทางซ้าย (left eigen vector) ของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) ที่สอดคล้องกับรากใน Λ_u^+ และ $(q_{1+2n_c}, q_{2+2n_c}, \dots, q_{n_p})$ คือค่าเวกเตอร์เฉพาะทางซ้ายที่สอดคล้องกับ Λ_u^r แล้วจะได้ว่า

$$Q = \text{row}[\text{Req}_1 \text{ Im}q_1 \text{ Req}_2 \text{ Im}q_2 \dots \text{Req}_{n_c} \text{ Im}q_{n_c} \ q_{1+2n_c} \ q_{2+2n_c} \dots \ q_{n_p}] \quad (2.7)$$

และเพื่อสร้างเมทริกซ์จอร์แดน ที่สอดคล้องกับ $\sigma_u(S_d)$ กำหนดให้

$$D_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & -\varpi_k \\ \varpi_k & \sigma_k \end{pmatrix}$$

โดยที่องค์ประกอบย่อยภายในสอดคล้องกับรากของระบบตามสมการ

$$s_k = \sigma_k + j\varpi_k \in \Lambda_u^+, k=1,2,\dots,n_c$$

และ $D_{1+n_c} = \text{diag}(s_{1+2n_c}, s_{2+2n_c}, \dots, s_{n_p})$ คือเมทริกซ์สมมาตรที่สอดคล้องกับ Λ_u^r . เมื่อนำมารวมกัน เราจะได้เมทริกซ์จอร์แดน J เป็น

$$J = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_{n_c}, D_{1+n_c}) \quad (2.8)$$

นิยาม 2.5 : การแปลงเชิงเส้นทั่วไป

กำหนดให้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปนิยามโดย

$$z(t) = Qx(t) + \int_r^0 \int_{+\theta}^0 e^{J(t+\theta-\tau)} Qd\alpha(\theta)x(\tau)d\tau \quad (2.9)$$

เมื่อ $J \in R^{n_p \times n_p}$ คือเมทริกซ์จอร์แดนและ $Q \in R^{n_p \times n}$ คือเมทริกซ์เงาจางทางซ้ายที่สร้างขึ้นตามนิยาม 2.4

ทฤษฎีบท 2.1 : การแปลงเชิงเส้นทั่วไป

ถ้ากำหนดให้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปนิยามตามสมการ (2.9) เราสามารถใช้การแปลงเชิงเส้นนี้แปลงรูปสมการระบบ (2.3) ให้อยู่ในรูปสมการระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา (S_0) ได้ดังนี้

$$(S_0): \quad \dot{z}(t) = Jz(t) + B_Q(u(t) + v(t)) \quad (2.10)$$

เมื่อ $z(t) \in R^{n_p}$ คือ ค่าสถานะของระบบเสมือน

$J \in R^{n_p \times n_p}$ คือ เมทริกซ์จอร์แดน

$B_Q \in R^{n_p \times m}$ คือ ตัวควบคุมของระบบเสมือน กำหนดสร้างขึ้นได้จาก $B_Q = QB$ โดยที่ Q คือเมทริกซ์เงาเชิงทางซ้าย

$v(t)$ คือ ฟังก์ชันผลรวมของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนอนชนิคสอดคล้องเงื่อนไข
เข้าสู่ทั้งหมดของระบบที่ได้นิยามไว้แล้ว

พิสูจน์

ดูรายละเอียดการพิสูจน์ที่ภาคผนวก ก.

นิยาม 2.6: การทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัม (spectral stabilizability)

ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) จะสามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้ก็ต่อเมื่อ

$$\text{rank} \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) | B \right] = n \quad (2.11)$$

สมมติฐาน 2.3: ตัวระบบหลักสามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัม

ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) สามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้ สำหรับรากทั้งหมดที่เป็นรากที่ไม่ต้องการของระบบ หรือเมื่อสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$\text{rank} \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) | B \right] = n \text{ for all } s \in C_{-v_0}^+ \quad (2.12)$$

ทฤษฎีบท 2.2: คู่เมทริกซ์ที่สามารถควบคุมได้อย่างบริบูรณ์

คู่เมทริกซ์ (J, B_Q) จะเป็นคู่เมทริกซ์ที่สามารถควบคุมได้อย่างบริบูรณ์ (completely controllable) ก็ต่อเมื่อ ระบบที่มีตัวนำเวลา (S_d) สามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้ที่ค่าขอบเขตเสถียรภาพ v_0 ที่เลือกไว้

พิสูจน์

ดูรายละเอียดการพิสูจน์ที่ภาคผนวก ข.

2.3 การออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพ

หลังจากใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไป เราจะได้ระบบเสมือนที่ไม่มีตัวนำเวลา (S_o) ซึ่งให้ผลตอบสนองที่แปรผันตามผลตอบสนองของระบบที่มีตัวนำเวลา (S_d) ต่อไปเราจะกล่าวถึงเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวนำเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน โดยตัวควบคุมเสถียรภาพนี้จะกำหนดสร้างจากระบบเสมือนที่ไม่มีตัวนำเวลา เทคนิคการออกแบบนี้ได้ปรับปรุงเพิ่มเติมจากเทคนิคค่าต่ำสุด-สูงสุดของกิตแมน [36~37] ซึ่งเป็นเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบที่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนที่ใช้งานได้ไม่ยุ่งยาก

ทฤษฎีบท 2.3 : ตัวควบคุมเสถียรภาพ

หากเราสามารถสร้างระบบเสมือนที่ไม่มีตัวนำเวลา (S_o) จากระบบที่มีตัวนำเวลา (S_d) ได้โดยใช้ทฤษฎีบท 2.1 แล้ว เมื่อเราเลือกให้ $Q_R > 0$ และสามารถหาผลเฉลย P ที่เป็นค่าบวกแน่นอน (positive definite) ได้จากสมการรีคาคิของระบบเสมือนที่ไม่มีตัวนำเวลา (S_o) นิยามโดย

$$J^T P + P J - P B_Q B_Q^T P + Q_R = 0 \quad (2.13)$$

แล้ว เราจะได้ตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบเสมือนที่ไม่มีตัวนำเวลา (S_o) ที่กำหนดโดยสมการ

$$u(t) = u_L(t) + u_N(t) \quad (2.14)$$

เมื่อ

$$u_L(t) = -\frac{1}{2} B_Q^T P z(t) \quad (2.15)$$

$$u_N(t) = -\frac{\rho^2(x_t)B_Q^T Pz(t)}{\delta(\rho(x_t)\|B_Q^T Pz(t)\| + e^{-\phi t})} \quad (2.16)$$

โดยที่ค่าอัตราขยายไม่เชิงเส้น (nonlinear gain) กำหนดขึ้นโดย

$$\rho(x_t) = \mu_E \|u_L(t)\| + \mu(x_t) \quad (2.17)$$

และ ϕ คือค่าจำนวนจริงบวกใดๆ

พิสูจน์

กำหนดให้ฟังก์ชันเลียปูโนฟเป็น

$$V_z(t) = z^T(t)Pz(t) \quad (2.18)$$

หาอนุพันธ์ของ V_z จะได้ว่า

$$\dot{V}_z = z^T(t)[J^T P + PJ]z(t) + 2z^T(t)PB_Q(u(t) + v(t))$$

แทนค่าตัวควบคุม $u_L(t)$ จากสมการ (2.15) ลงไป แล้วจัดรูปใหม่เป็น

$$\dot{V}_z = -z^T(t)Q_R z(t) + 2z^T(t)PB_Q(u_N(t) + v(t)) \quad (2.19)$$

ถ้ากำหนดให้

$$\gamma(t) = 2z^T(t)PB_Q(u_N(t) + v(t)) \quad (2.20)$$

แทนค่า $v(t)$ จากสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.20) จะได้

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 2z^T(t)PB_Q \left\{ u_N(t) + E(t)u_N(t) \right. \\ &\quad \left. + \int_r^0 dH(\theta)x(t+\theta) + E(t)u_L(t) + \omega(t) \right\} \\ &\leq 2 \left[z^T(t)PB_Q \delta u_N(t) + \rho(x_t)\|B_Q^T Pz(t)\| \right] \end{aligned}$$

แทนค่า $u_N(t)$ จากสมการ (2.16) ลงไปจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\leq 2 \left(\frac{\rho^2(x_t) \|B^T Pz(t)\|^2}{\rho(x_t) \|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t}} + \rho(x_t) \|B^T Pz(t)\| \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{e^{-\phi t} \rho(x_t) \|B^T Pz(t)\|}{\rho(x_t) \|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t}} \right) \\ &\leq 2e^{-\phi t} \end{aligned}$$

แทนค่าผลลัพธ์ที่ได้กลับลงไปนสมการ (2.19) จะได้

$$V_z(t) \leq -z^T(t)Qz(t) + 2e^{-\phi t} \quad (2.21)$$

จากข้างต้น สามารถพิสูจน์ได้ว่า $z(t)$ จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลาเป็นอนันต์

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\|^2 = 0 \quad (2.22)$$

ซึ่งจากสมการ (2.22) แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมเสถียรภาพที่ออกแบบขึ้นนี้สามารถควบคุมให้สถานะ $z(t)$ ของระบบเสมือน (S_o) ลู่เข้าสู่ 0 ได้ หรือกล่าวได้ว่าตัวควบคุมเสถียรภาพนี้สามารถควบคุมให้ระบบ (S_o) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้ โดยตัวควบคุมเสถียรภาพตามสมการ (2.14) จะแบ่งได้เป็น 2 ส่วนหลัก ส่วนแรก $u_L(t)$ เป็นตัวควบคุมเชิงเส้นที่ใช้ควบคุมผลที่เกิดจากรากที่ไม่เสถียรที่มีอยู่ในระบบ และส่วนที่สอง $u_N(t)$ เป็นตัวควบคุมแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ใช้สำหรับควบคุมผลกระทบที่เกิดจากตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนอนที่มีในระบบ

และจากทฤษฎีบท 2.1 จะเห็นว่าถ้าหากตัวควบคุมที่ออกแบบขึ้นสามารถควบคุมให้สถานะ $z(t)$ ลู่เข้าสู่ 0 ได้แล้ว จะส่งผลให้สถานะ $x(t)$ ของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) ลู่เข้าสู่ 0 ได้ด้วยเช่นกัน นั่นหมายความว่าเราสามารถออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาขึ้นจากระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาได้ และตัวควบคุมที่ออกแบบได้นั้นจะสามารถทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้

2.4 ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมและตัวอย่างการคำนวณ

จากเงื่อนไข สมมติฐานและทฤษฎีบทที่นำเสนอมาข้างต้น สามารถสรุปได้ว่าเราสามารถออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวห้วงเวลาที่มีคุณลักษณะดังต่อไปนี้

- ตัวห้วงเวลาที่อยู่ภายในระบบเป็นชนิดทราบค่าหรือประมาณค่าได้
- ค่าความไม่แน่นอนในระบบและตัวรบกวนระบบมีขนาดขอบเขตและสามารถประมาณหรือระบุค่าสูงสุดได้
- ค่าความไม่แน่นอนที่แฝงอยู่ใน โครงสร้างของตัวควบคุมมีขนาดไม่ใหญ่กว่าสัญญาณควบคุม
- ค่าความไม่แน่นอนในระบบและตัวรบกวนระบบเป็นชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าสู่
- ตัวระบบหลักสามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้สำหรับทุกรากที่อยู่นอกขอบเขตเสถียรภาพที่ต้องการ

และขั้นตอนการใช้งานเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพแบบคงทนสำหรับระบบที่มีตัวห้วงเวลา โดยใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปได้ดังนี้

ขั้นตอนการใช้งาน

1. คำนวณและประมาณหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เพื่อสร้างสมการระบบที่มีตัวห้วงเวลา (S_d) และจัดรูปแบบสมการให้สอดคล้องกับสมการ (2.2) พร้อมทั้งตรวจสอบชนิดของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน
2. เลือกขอบเขตเสถียรภาพ v_0 ที่ต้องการให้กับระบบ จากนั้นคำนวณหาค่าแห่งรากที่ไม่ต้องการของระบบ $\sigma_u(S_d)$ ทั้งหมดที่อยู่ในระนาบ $C_{-v_0}^+$ โดยที่เราสามารถนำเทคนิคของแมนนิเตียส (MANITIUS) [42]. มาช่วยในการคำนวณประมาณค่ารากให้กับระบบที่มีตัวห้วงเวลาได้ จากนั้นใช้สมการ (2.12) ตรวจสอบว่าระบบที่มีตัวห้วงเวลา (S_d) สามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้สำหรับรากทั้งหมดที่อยู่ในระนาบ $C_{-v_0}^+$
3. สร้างสมการเมทริกซ์คุณลักษณะทางซ้ายตามนิยาม 2.4 และแทนค่าลงในสมการ (2.10) จะได้สมการระบบเสมือนที่ไม่มีตัวห้วงเวลา (S_0)
4. เลือกค่า $Q_R > 0$ ที่เหมาะสมและคำนวณหาผลเฉลยจากสมการ (2.13)
5. แทนค่าผลลัพธ์ที่ได้ทั้งหมด รวมถึงเลือกกำหนดค่า ϕ ที่เหมาะสมลงในสมการ (2.16) ก็จะได้ตัวควบคุมเสถียรภาพแบบคงทนสำหรับระบบที่มีตัวห้วงเวลา (S_d)

ต่อไปเป็นตัวอย่างการคำนวณโดยใช้เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพที่ได้นำเสนอไว้

ตัวอย่างที่ 2.1

พิจารณาระบบที่มีตัวหน่วงเวลาแบบจุดและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน ดังแสดงต่อไปนี้

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + e^{-1}x(t-1) + \beta(t)x(t-1) + u(t) + \omega(t) \quad (2.23)$$

โดยที่ $|\beta(t)| \leq 0.3$ และ $|\omega(t)| \leq 0.15$

ขั้นตอนที่ 1

เราสามารถจัดรูปสมการระบบ (2.23) ให้อยู่ในรูปทั่วไปตามสมการ (2.2) ได้ โดยจะได้ว่า

$$r=1, \quad \alpha(\theta) = -2H_u(\theta) + e^{-1}H_u(\theta+1), \quad \beta(\theta) = \beta(t)H_u(\theta+1), \quad B=1$$

โดยที่ H_u คือ ฟังก์ชันหน่วยแบบเฮวิไซด์ (heaviside unit function) ที่อนุพันธ์ของมันมีค่าเท่ากับ 1 เฉพาะที่เวลาเท่ากับ 0 ส่วนเวลาอื่นๆ ที่เหลือทั้งหมดอนุพันธ์จะมีค่าเป็น 0 และเมื่อตรวจสอบตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนพบว่า เป็นชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าสู่โดยจะได้

$$H(\theta) = \beta(t)H_u(\theta+1), \quad E(t) = 0 \quad \text{และ} \quad \omega(t) = \omega(t)$$

ขั้นตอนที่ 2

เลือกขอบเขตเสถียรภาพ v_0 เป็น 0 และคำนวณหารากของระบบได้ 1 รากและมีค่าเท่ากับ -1 ซึ่งเป็นรากที่เสถียร

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\text{rank} \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) | B \right] = 1$$

ซึ่งเท่ากับขนาดของระบบสำหรับรากทั้งหมดที่อยู่ในระนาบ C_0^+ แสดงว่าระบบนี้สามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้

ขั้นตอนที่ 3

จาก นิยาม 2.4 เมื่อระบบไม่มีรากที่ไม่ต้องการ เราจึงกำหนดให้ $J = -1$ ซึ่งเป็นค่ารากที่เสถียรของระบบและเนื่องจากขนาดของเมทริกซ์จอร์แดนเท่ากับ 1 ทำให้สามารถใช้ค่าคงที่ใดๆ เป็นเวกเตอร์เจาะจงได้ ดังนั้นเรากำหนดให้เวกเตอร์เจาะจงทางซ้ายของระบบ $Q = 1$

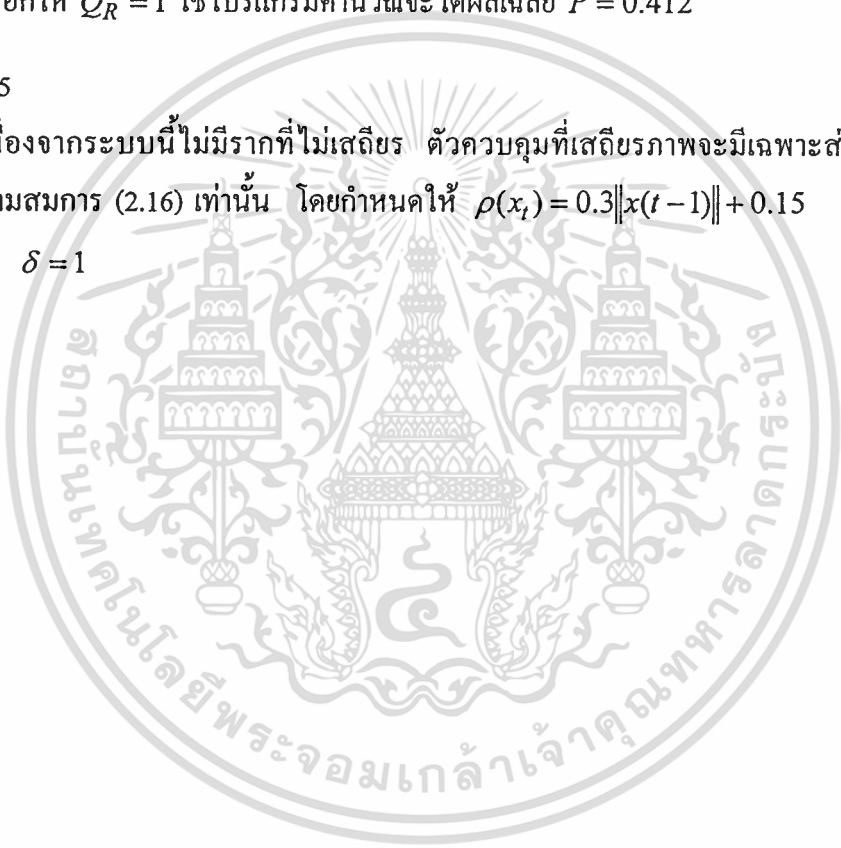
$$\dot{z}(t) = -z(t) + u(t) + v(t) \quad (2.24)$$

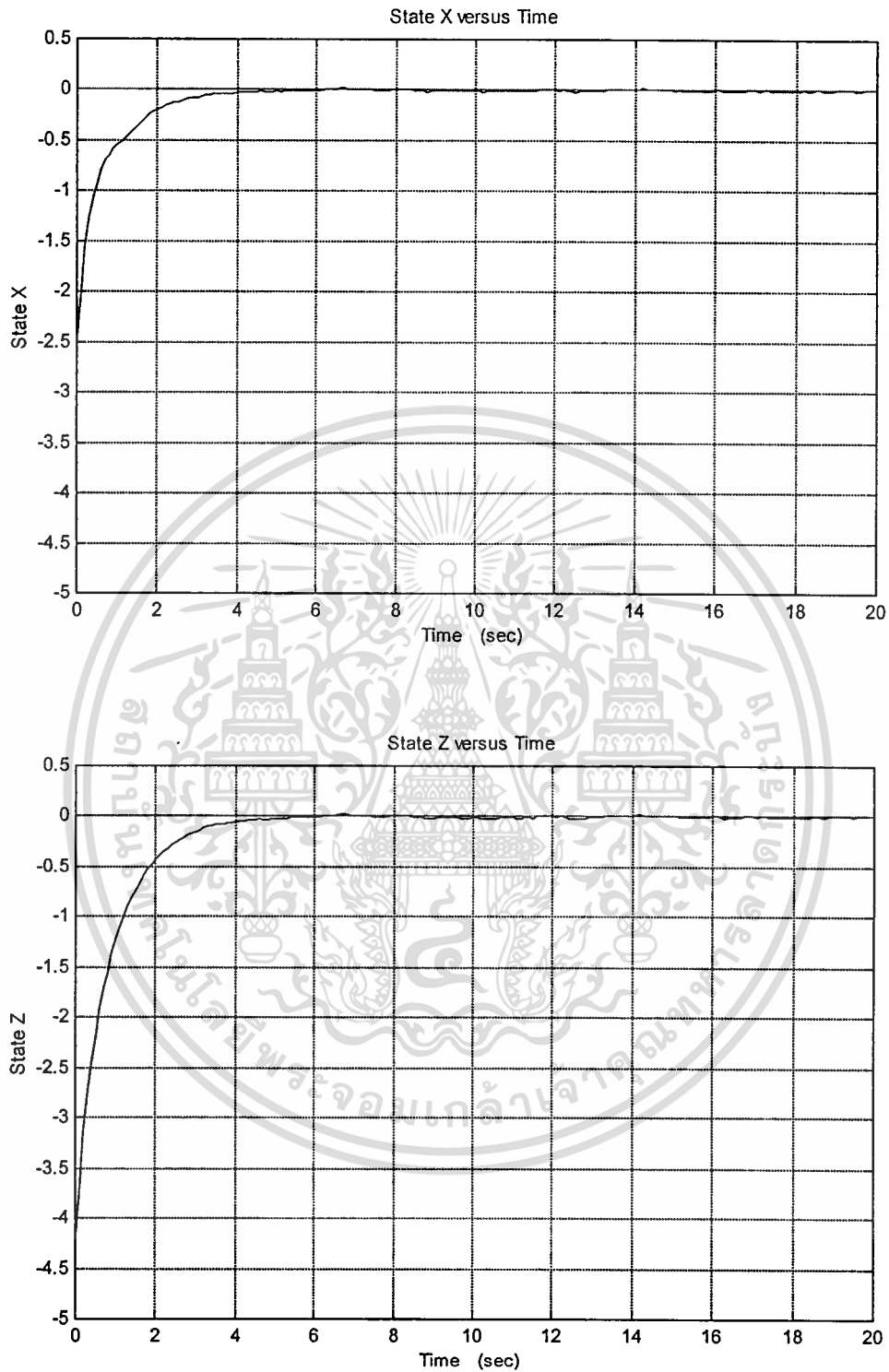
ขั้นตอนที่ 4

เลือกให้ $Q_R = 1$ ใช้โปรแกรมคำนวณจะได้ผลเฉลย $P = 0.412$

ขั้นตอนที่ 5

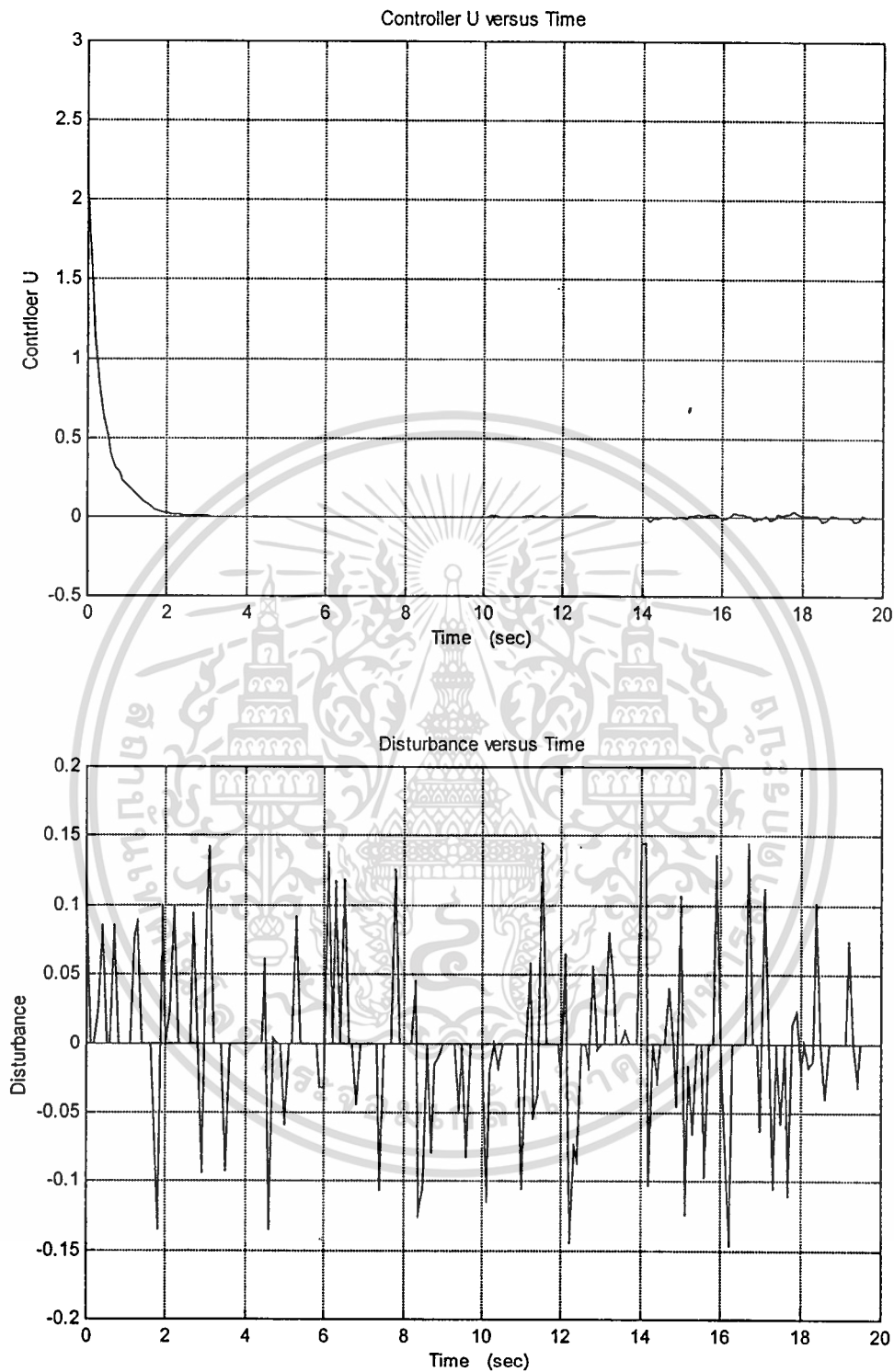
เนื่องจากระบบนี้ไม่มีรากที่ไม่เสถียร ตัวควบคุมที่เสถียรภาพจะมีเฉพาะส่วนที่กำหนดนิยามไว้ตามสมการ (2.16) เท่านั้น โดยกำหนดให้ $\rho(x_t) = 0.3\|x(t-1)\| + 0.15$ และเลือกให้ $\phi = 0.45$ $\delta = 1$





รูปที่ 2.1 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ และ $z(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.1
เมื่อกำหนดให้ค่าสถานะเริ่มต้น $x_0 = -2.5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.2 กราฟแสดงค่าสถานะ $u(t)$ และ $w(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.1
เมื่อกำหนดให้ค่าสถานะเริ่มต้น $x_0 = -2.5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากผลจำลองที่ได้ แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่ออกแบบขึ้นจากระบบเสมือนสามารถทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้แม้ว่าระบบจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน และสถานะของ $x(t)$ นั้นเปลี่ยนแปลงไปตามสถานะ $z(t)$

ตัวอย่างที่ 2.2

พิจารณาระบบที่มีตัวหน่วงเวลาแบบจุดเดียว นิชยามตามสมการ

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \kappa(t) & 1 \\ \kappa(t) & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & \chi(t) \\ 0 & \chi(t) \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

โดยที่ $\|\kappa(t)\| \leq 0.1$, $\|\chi(t)\| \leq 0.1$ และ $\|\omega(t)\| \leq 0.25$

ขั้นตอนที่ 1

เราสามารถจัดรูปสมการระบบข้างต้นให้อยู่ในรูปทั่วไปตามสมการ (2.2) ได้ โดยจะได้ว่า

$$r=1, \quad \alpha(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_u(\theta) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_u(\theta+1),$$

$$\beta(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa(t) & 0 \end{bmatrix} H_u(\theta) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \chi(t) \end{bmatrix} H_u(\theta+1), \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ H_u คือ Heaviside Unit Function และเมื่อตรวจสอบตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน พบว่าเป็นชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่โดยจะได้

$$H(\theta) = [\kappa(t) \ 0] H_u(\theta) + [0 \ \chi(t)] H_u(\theta+1)$$

ขั้นตอนที่ 2

เลือกให้ขอบเขตเสถียรภาพ ν_0 เป็น 0 คำนวณได้รากทั้งหมดของระบบคือ $\{ 0, 0.56714, -1.53391 \pm j4.37518 \}$ จะได้รากที่ไม่ต้องการของระบบจำนวน 2 รากคือ 0 และ 0.56714 และเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\text{rank} \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) | B \right] = 2$ ซึ่งเท่ากับขนาดของระบบสำหรับรากทั้งหมดที่อยู่ในระนาบ C_0^+ และแสดงว่าระบบนี้สามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้สำหรับทุกรากที่มีค่ามากกว่า 0

ขั้นตอนที่ 3

จาก นิยาม 2.4 กำหนดให้ $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.56714 \end{bmatrix}$ และได้ $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.56714 & 1 \end{bmatrix}$. ซึ่งจะทำให้ได้สมการระบบเสมือนเป็น

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.56714 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1.56714 \end{bmatrix} (u(t) + v(t)) \quad (2.26)$$

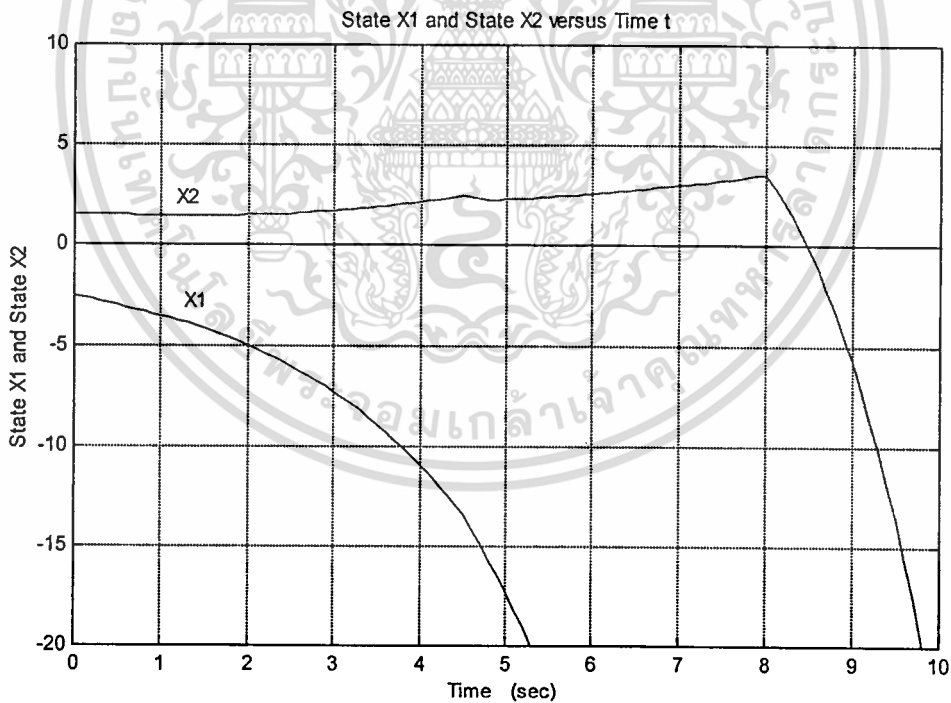
ขั้นตอนที่ 4

เลือกให้ $Q_R = I$ จะได้ผลเฉลย $P = \begin{bmatrix} 5.67103 & -4.256821 \\ -4.25682 & 4.25682 \end{bmatrix}$

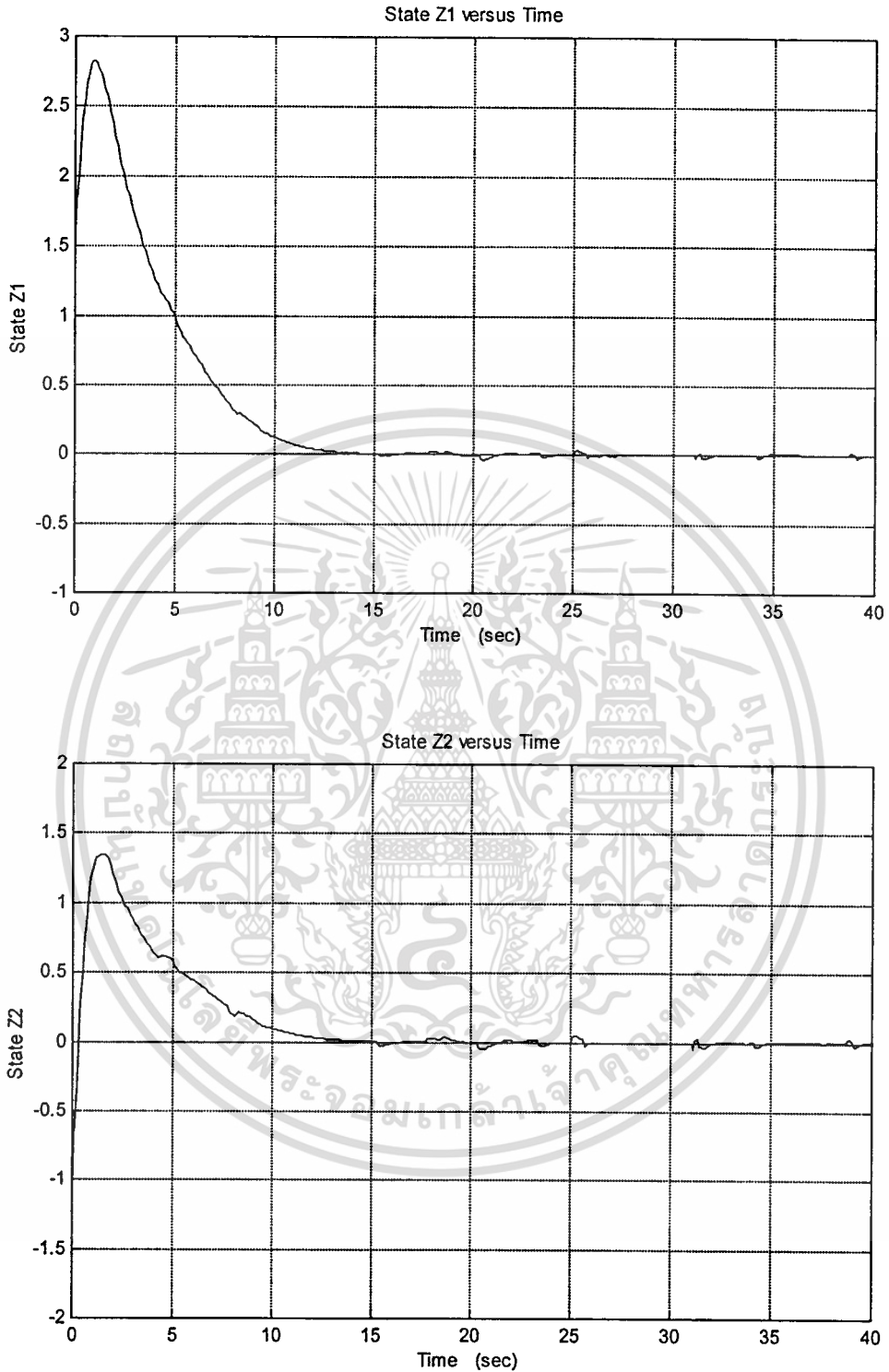
ขั้นตอนที่ 5

เราได้ $\rho(x_t) = 0.1\|x(t)\| + 0.1\|x(t-h)\| + 0.25$
และเลือกให้ $\phi = 0.1$

□

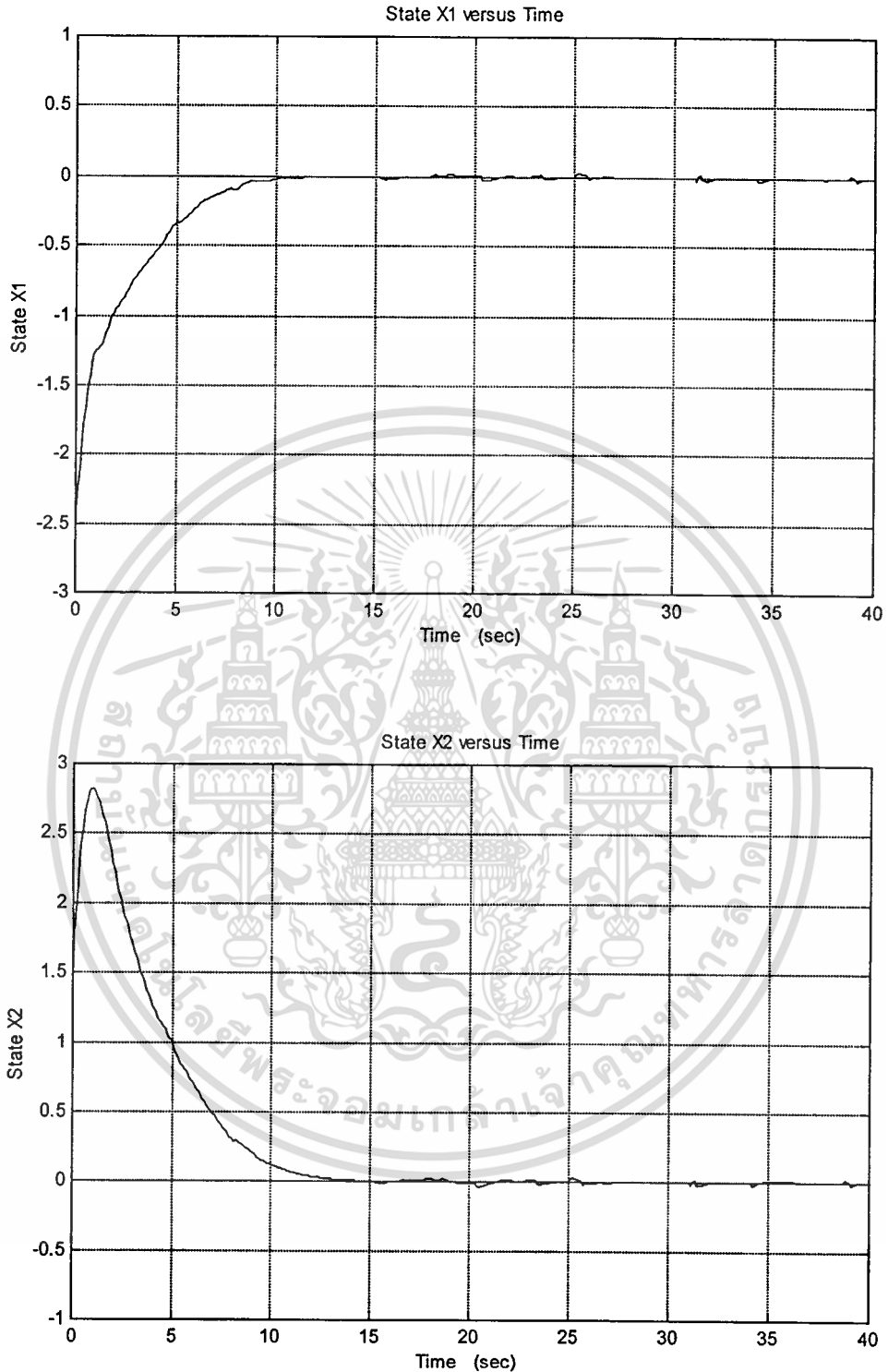


รูปที่ 2.3 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ เมื่อไม่มีสัญญาณควบคุม ตามตัวอย่าง 2.2
เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้น $x_0 = [-2.5 \ 1.5]^T$



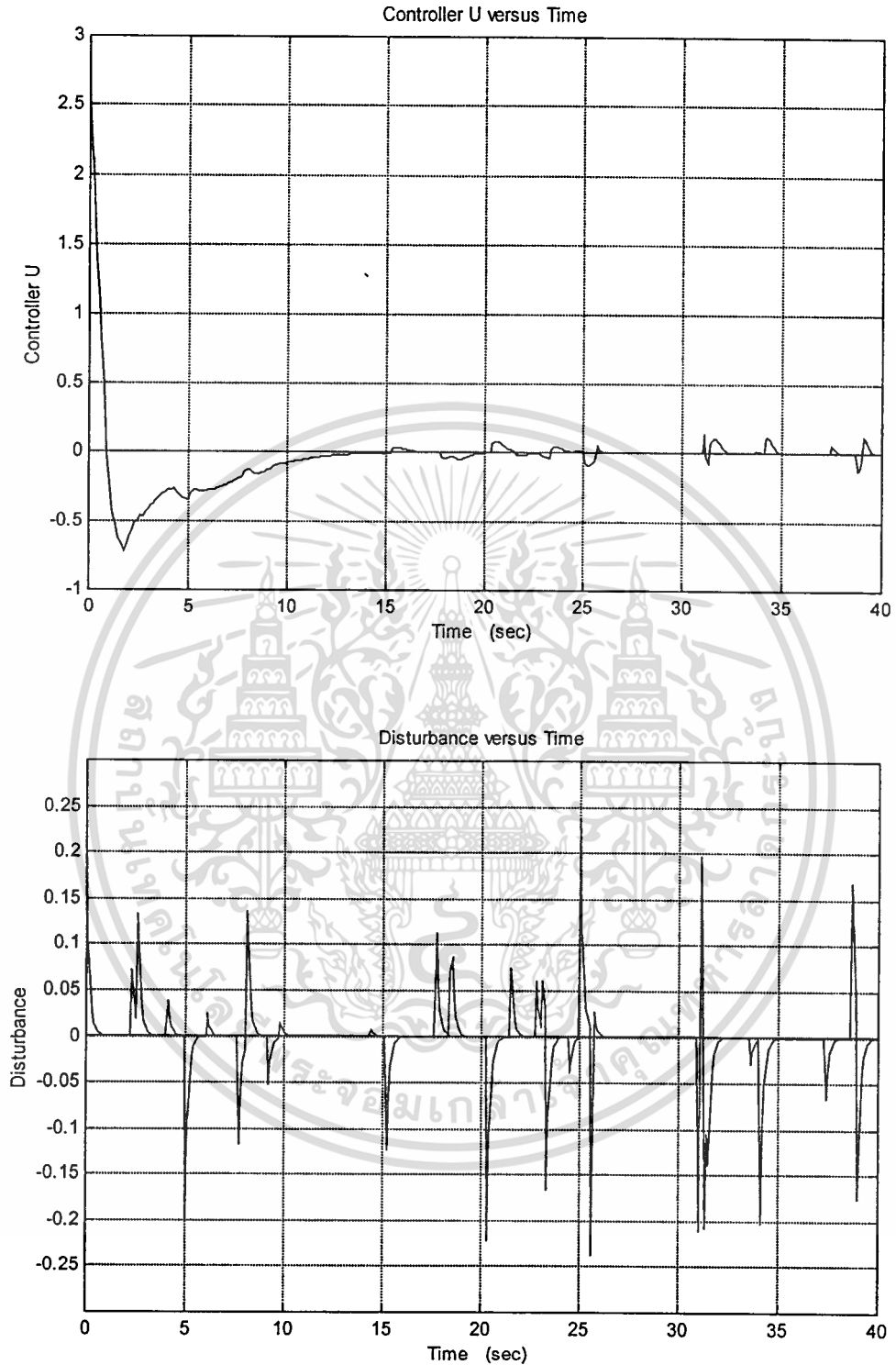
รูปที่ 2.5 กราฟแสดงค่าสถานะ $z(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.2
เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้น $x_0 = [-2.5 \ 1.5]^T$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.4 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.2
เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้น $x_0 = [-2.5 \ 1.5]^T$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.6 กราฟแสดงค่าสถานะ $u(t)$ เมื่อมีสัญญาณรบกวน ตามตัวอย่าง 2.2
เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้น $x_0 = [-2.5 \ 1.5]^T$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 2.3 ถึงรูปที่ 2.6 แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่คำนวณสร้างขึ้นโดยเทคนิคการแปลงเชิงเส้นนี้สามารถทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้

สังเกตว่าการเปลี่ยนแปลงสถานะของระบบเสมือน $z(t)$ ในตัวอย่างที่ 2 แม้ว่าในช่วงเริ่มต้นนั้นจะแตกต่างจากสถานะของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา $x(t)$ แต่เมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่งการเปลี่ยนแปลงสถานะของระบบเสมือนจะเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา ทั้งนี้เป็นผลมาจากรากที่ไม่ต้องการที่นำมาสร้างระบบเสมือน และจากรูปที่ 2.6 สังเกตว่าช่วงเวลาตั้งแต่เริ่มต้นจนถึง 15 วินาที ค่าตัวควบคุมที่ได้นั้นจะเกิดจากการทำงานของตัวควบคุมส่วนที่เป็นเชิงเส้นมากกว่าส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น ต่อเมื่อเวลาผ่านไปมากกว่า 15 วินาทีแล้วตัวควบคุมส่วนที่เป็นเชิงเส้นในระบบจึงจะทำงานน้อยลงและปล่อยให้ตัวควบคุมส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นทำหน้าที่พยายามหักล้างผลกระทบที่เกิดจากตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนในระบบแทน



บทที่ 3

การประยุกต์ใช้งาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้งานเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน โดยใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปที่นำเสนอไว้ในบทที่ 2 โดยเนื้อหาในบทนี้จะแบ่งออกเป็น 4 ส่วนหลัก ส่วนแรกจะกล่าวถึงความสอดคล้องกับทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นเดิมที่เคยเสนอไว้สำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาแบบต่างๆ และจะแสดงให้เห็นข้อเด่นของทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปที่นำเสนอใหม่นี้ ส่วนที่สองจะเป็นการนำเอาเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมแบบเลื่อน (sliding control) มาปรับใช้งานและจะแสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมเสถียรภาพที่ออกแบบโดยเทคนิคนี้ สามารถควบคุมระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนให้มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้เช่นกัน ส่วนที่สามจะเป็นการปรับเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมนี้ไปใช้ระบบติดตามโมเดลอ้างอิง และส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงการใช้งานในกรณีที่ไม่สามารถคำนวณหารากที่ไม่ต้องการของระบบได้

3.1 ความสอดคล้องกับเทคนิคเดิม

เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมแบบคงทนสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาที่เสนอไว้เดิม [32] นั้นสามารถใช้ได้กับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาภายในชนิดทราบค่าทั้งแบบจุดและแบบกระจายเช่นเดียวกัน แต่มีรายละเอียดและใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นที่ต่างกันออกไป สามารถยกมาแสดงโดยสรุปได้ดังนี้

กำหนดให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_{dd}) ที่ต้องการศึกษานิยามโดย

$$(S_{dd}): \quad \dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_h + \Delta A_h(t)]x(t-h) + \int_{-r_m}^0 A_{r_m}(\theta)x(t-r_m-\theta)d\theta \\ + \int_{-r_m}^0 \Delta A_{r_m}(t)x(t-r_m-\theta)d\theta + [B + \Delta B(t)]u(t) + B\omega(t) \quad (3.1)$$

โดยที่

$x(t) \in R^n$ คือค่าสถานะของระบบที่เวลาปัจจุบัน

$u(t) \in R^m$ คือฟังก์ชันของสัญญาณควบคุม

$\omega(t) \in R^l$ คือ ฟังก์ชันของตัวรบกวนระบบ

A, A_h, B คือ เมทริกซ์คงที่ที่ทราบค่าและมีมิติในช่วง $[-r, 0]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$A_{r_m} \in L_1([-r_m, 0]; R^{n \times n})$ คือ แมทริกซ์ที่องค์ประกอบภายในแต่ละตัวสามารถอินทิเกรตได้ในช่วง $[-r, 0]$

$\Delta A(t), \Delta A_h(t), \Delta A_{r_m}(t), \Delta B(t)$ คือ แมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าแต่องค์ประกอบภายในแต่ละตัวมีความต่อเนื่องและสัมพันธ์กันเป็นฟังก์ชันที่มีค่าจำกัด

$h, r_m \in R^+$ คือ ค่าตัวหน่วงเวลาคงที่ที่ทราบค่า

กำหนดให้ค่าเริ่มต้นของระบบ (S_{dd}) นี้เป็น $x_0(\eta) \in C_d([-t_f, 0], R^n)$, $t_f = \max(h, r_m)$

และกำหนดให้ระบบมีคุณลักษณะเพิ่มเติมต่อไปนี้

- ค่าความไม่แน่นอนในระบบและตัวรบกวนระบบมีขนาดจำกัดและสามารถประมาณค่าสูงสุดหรือค่าขอบเขตได้
- ค่าความไม่แน่นอนที่แฝงอยู่ในโครงสร้างของตัวควบคุมมีขนาดไม่ใหญ่กว่าสัญญาณควบคุม
- ค่าความไม่แน่นอนในระบบและตัวรบกวนระบบเป็นชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่ โดยจะเข้าสู่ระบบทางช่องสัญญาณเดียวกับสัญญาณควบคุม หรือมีผลกระทบต่อระบบเหมือนสัญญาณควบคุมเท่านั้น
- ตัวระบบหลักสามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้

ซึ่งจากลักษณะของระบบข้างต้นจะสามารถเขียนเป็นพจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ว่า สำหรับเวลา $t \in R^+$ แล้วจะมีแมทริกซ์ต่อเนื่อง $H(t), H_h(t), H_{r_m}(t)$ และ $E(t)$ ที่สอดคล้องกับ

ก) $\Delta A(t) = BH(t)$

ข) $\Delta A_h(t) = BH_h(t)$

ค) $\Delta B(t) = BE(t)$

ง) $I + \frac{1}{2}(E(t) + E^T(t)) \geq \delta I$ สำหรับบางค่า $\delta > 0$

จ) $\Delta A_{r_m}(t) = BH_{r_m}(t)$

ฉ) จะมีค่า $\mu(x_r)$ และ $\mu_E(t)$ ซึ่งทำให้

$$\mu(x_t) \geq \left\| H(t)x(t) + H_h(t)x(t-h) + \int_{-r_m}^0 H_{r_m}(t)x(t-r_m-\theta)d\theta + \omega(t) \right\|$$

และ $\mu_E(t) \geq \|E(t)\|$

ช) สามารถหาข้อมูลของค่า δ , μ และ μ_E ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และทำให้เราสามารถจัดรูปสมการ (3.1) ใหม่ได้ดังนี้

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + \int_{r_m}^0 A_{r_m}(\theta)x(t-r_m-\theta)d\theta + B(u(t) + v(t)) \quad (3.2)$$

โดยที่

$$v(t) = H(t)x(t) + H_h(t)x(t-h) + \int_{r_m}^0 H_{r_m}(t)x(t-r_m-\theta)d\theta + E(t)u(t) + \omega(t) \quad (3.3)$$

นิยาม 3.1 : การแปลงเชิงเส้นสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาแบบกระจาย

กำหนดให้การแปลงเชิงเส้นสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาแบบกระจาย T_c นิยามโดย

$$\begin{aligned} z(t) &= (T_c(x))(t) \\ &= x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c\theta} A_h x(t-h-\theta)d\theta \\ &\quad + \int_{r_m}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c\tau} A_{r_m}(-r_m-\theta)x(t-r_m+\theta)d\tau d\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

นิยาม 3.2 : แมทริกซ์ A_c

กำหนดให้ แมทริกซ์ A_c นิยามโดย

$$A_c = A + e^{-hA_c} A_h + \int_{r_m}^0 e^{-(r_m+\theta)A_c} A_{r_m}(\theta)d\theta \quad (3.5)$$

และ

$$\sigma_u(S_{dd}) \subset \sigma(A_c) \subset \sigma(S_{dd}) \quad (3.6)$$

โดยที่

$$\sigma(S_{dd}) = \left\{ s \in \mathbb{C}; \det(sI - A - e^{-hs} A_h + \int_{r_m}^0 e^{-(r_m+\theta)A_c} A_{r_m}(\theta)d\theta) = 0 \right\},$$

และ

$$\sigma_u(S_{dd}) = \{s \in \sigma(S_{dd}); \operatorname{Re}(s) \geq 0\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 3.1 : การแปลงเชิงเส้น

จากเงื่อนไขและคุณลักษณะของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาที่กำหนดไว้ข้างต้น เราสามารถใช้การแปลงเชิงเส้นสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาแบบกระจายตาม นิยาม 3.1 ข้างต้นแปลงรูปสมการระบบ (3.2) ให้อยู่ในรูปสมการของระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาอยู่ภายใน (S_{do}) ได้ดังนี้

$$(S_{do}): \quad \dot{z}(t) = A_c z(t) + B(u(t) + v(t)) \quad (3.7)$$

เมื่อ A_c เป็นไปตามนิยาม 3.2 และจะได้ว่าคุณลักษณะของ $x(t)$ จะสอดคล้องกับคุณลักษณะของ $z(t)$ และจะทำให้วลีต่อไปนี้เป็นจริงด้วย

- 1) (A_c, B) เป็นคู่แมทริกซ์ที่ทำให้เสถียรได้
- 2) ถ้า $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$ แล้ว $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ ด้วย
- 3) ถ้า $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| \leq k_1, \exists k_1 < \infty$ แล้ว $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq k_2, \exists k_2 < \infty$ ด้วย

พิสูจน์

ดูรายละเอียดการพิสูจน์ที่ภาคผนวก ก.

ทฤษฎีบท 3.2 : ตัวควบคุมเสถียรภาพ

กำหนดให้มี $Q_R > 0$ และถ้าเราสามารถหาผลเฉลย P ที่เป็นค่าบวกแน่นอนได้จากสมการรีคาติสำหรับระบบเสมือน (3.7) ซึ่งนิยามโดยสมการ

$$A_c^T P + P A_c - P B B^T P + Q_R = 0 \quad (3.8)$$

แล้ว เราจะได้ตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา กำหนดอยู่ในรูปที่สอดคล้องกับที่แสดงไว้ในทฤษฎีบท 2.3 ดังนี้

$$u(t) = u_L(t) + u_N(t) \quad (3.9)$$

เมื่อ

$$u_L(t) = -\frac{1}{2} B^T P z(t) \quad (3.10)$$

$$u_N(t) = -\frac{\rho^2(x_t)B^T Pz(t)}{\delta(\rho(x_t)\|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t})} \quad (3.11)$$

โดยที่ค่าอัตราขยายไม่เชิงเส้นคือ

$$\rho(x_t) = \mu_E \|u_L(t)\| + \mu(x_t) \quad (3.12)$$

และ ϕ คือค่าจำนวนจริงบวกใดๆ

พิสูจน์

ดูรายละเอียดการพิสูจน์ที่ภาคผนวก ง.

ความสอดคล้องของทฤษฎีใหม่และการแก้ปัญหาลำจำกัดของการใช้งานเทคนิคเดิม

เมื่อเปรียบเทียบทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นเดิมที่นำมาสรุปไว้ข้างต้นกับทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปสำหรับระบบที่มีตัวนำเวลาที่นำเสนอไว้ในบทที่ 2 ทั้งสองทฤษฎีสามารถใช้งานได้กับระบบที่มีตัวนำเวลาชนิดทราบค่าทั้งแบบจุดและแบบกระจายได้เช่นเดียวกัน และสามารถใช้แปลงระบบที่มีตัวนำเวลาไปเป็นระบบเสมือนที่ไม่มีตัวนำเวลาได้เหมือนกัน เพียงแต่การใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปนั้นจำเป็นต้องจัดรูปสมการระบบตามรูปแบบของสมการ (3.1) ให้อยู่ในรูปทั่วไปตามสมการ (2.2) ก่อนจึงจะใช้งานทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปได้ และการใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปนี้สามารถแก้ปัญหาลำจำกัดในการใช้งานที่พบในทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นที่นำเสนอเดิมได้ ดังนี้ (ดูรายละเอียดข้อจำกัดของเทคนิคเดิมได้ใน ภาคผนวก ข.)

ข้อจำกัด 1 : ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้น

การจัดรูปสมการระบบให้อยู่ในรูปทั่วไปทำให้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปที่เสนอไว้สามารถใช้งานกับระบบที่มีโครงสร้างของตัวนำเวลาแตกต่างกันได้ทั้งหมด โดยไม่ต้องปรับปรุงแก้ไขทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปตามนิยาม 2.5 แต่อย่างใด และเราสามารถจัดรูปสมการระบบที่มีตัวนำเวลาให้อยู่ในรูปทั่วไปได้โดยกำหนดให้

$$\alpha(\theta) = AH_u(\theta) + \sum_{i=1}^k A_{hi}H_u(\theta + hi) + \sum_{i=1}^k \alpha_{di}(\theta) \int_{r_{mi}}^0 A_{r_{mi}}(\theta + r_{mi}) \quad (3.13)$$

เมื่อ

$H_u(\theta)$ คือ ฟังก์ชันหน่วยแบบเฮวิไซด์ที่อนุพันธ์ของมีค่าเท่ากับ 1 เฉพาะที่เวลาเท่ากับ 0 ส่วนเวลาอื่นๆ ที่เหลืออนุพันธ์จะมีค่าเป็น 0

$$\alpha_{di}(\theta) \text{ คือ ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่มีค่าเป็นดังนี้} \quad \alpha_{di}(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{เมื่อ } -r_{mi} \leq \theta \leq 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } -r \leq \theta \leq -r_{mi} \end{cases}$$

ข้อสังเกต

การจัดรูปสมการระบบให้อยู่ในรูปทั่วไปโดยใช้ฟังก์ชันพิเศษ $H_u(\theta)$ และ $\alpha_{di}(\theta)$ เข้ามาช่วยนั้นจะไม่ทำให้ระบบมีโครงสร้างเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมและการจัดรูปนี้ก็จะเป็นไปเพียงเพื่อสร้างการแปลงเชิงเส้นและคำนวณหาตัวควบคุมเสถียรภาพเท่านั้น ส่วนการจัดรูปค่าความไม่แน่นอนในระบบ $\beta(\theta)$ เพื่อให้สอดคล้องกับรูปทั่วไปนั้นสามารถทำได้โดยใช้รูปแบบเดียวกับสมการ (3.13) แต่เนื่องจากเงื่อนไขการใช้งานที่กำหนดให้ค่าความไม่แน่นอนที่ปรากฏในระบบต้องเป็นชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่ และสามารถนำไปรวมไว้กับค่าความไม่แน่นอนของตัวควบคุมและตัวรบกวนระบบตามที่นิยามโดยใช้สมการ (2.4) ซึ่งเรียกรวมกันเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน และเป็นส่วนที่ไม่ได้รับผลกระทบจากการแปลงเชิงเส้นโดยใช้ทฤษฎีการแปลงทั่วไป ดังนั้นเราอาจแยกค่าความไม่แน่นอนในระบบมารวมไว้ในตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนตามรูปแบบที่กำหนดได้โดยไม่จำเป็นต้องทำการแปลงให้อยู่ในรูปทั่วไปก่อน

ข้อจำกัด 2 : การคำนวณหาแมทริกซ์ A_c

ในทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไป ไม่จำเป็นต้องสร้างแมทริกซ์ A_c ขึ้นอีก เนื่องจากเราใช้แมทริกซ์จอร์แดน J ทำหน้าที่แทน A_c ในสมการระบบเสมือน ทำให้ปัญหาการหาค่าผกผันให้ Q หมดไปโดยปริยาย

ข้อจำกัด 3 : ในกรณีที่จำนวนราก $\sigma_u(S_d)$ มีจำนวนไม่เท่ากับมิติหรือขนาดของระบบ

จากนิยาม 2.4 จอร์แดนแมทริกซ์ J ซึ่งสร้างขึ้นจากรากที่ไม่ต้องการของระบบโดยตรง และมีขนาดเท่ากับจำนวนรากที่ไม่ต้องการหรือ $R^{n_p \times n_p}$ จะช่วยแก้ปัญหาในข้อจำกัด 3 กรณีที่ราก

ที่ไม่ต้องการของระบบมีจำนวนไม่เท่ากับมิติหรือขนาดของระบบได้ด้วย โดยผลจากการแปลงเชิงเส้นที่ใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปทำให้เราได้ระบบเสมือนที่มีมิติหรือขนาดเท่ากับจำนวนรากที่ไม่ต้องการเท่านั้น ไม่ต้องมีขนาดใหญ่อขึ้นเป็นจำนวนเท่าของมิติหรือขนาดของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาอีกต่อไป ซึ่งในบางกรณีระบบเสมือนอาจมีขนาดเล็กกว่าระบบหลักก็ได้

3.2 การใช้เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพแบบเลื่อน

จากบทที่ 2 ได้แสดงให้เห็นว่าเราสามารถใช้อัตราการแปลงเชิงเส้นทั่วไป แปลงลดรูประบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) ไปเป็นระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา (S_o) ซึ่งให้ผลตอบสนองที่สอดคล้องกัน และตัวควบคุมเสถียรภาพที่ได้จากการนำเอาเทคนิคการประมาณค่าต่ำสุด-สูงสุดของกัตแมนมาปรับใช้ สามารถสร้างเสถียรภาพให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาได้ ต่อไปจะแสดงให้เห็นว่าเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาแบบอื่นก็สามารถนำมาปรับใช้กับระบบเสมือนที่ได้จากการแปลงเชิงเส้นเพื่อออกแบบตัวควบคุมให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลามีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้เช่นกัน โดยในที่นี้เลือกเอาเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพแบบเลื่อน (sliding mode control design) ซึ่งผู้เขียนเคยนำเสนอไว้แล้วใน [35] มาแสดงเป็นตัวอย่าง

นิยาม 3.3 : พื้นผิวเลื่อน (sliding surface)

พื้นผิวเลื่อนหรือพื้นผิวสวิตช์ (switching surface) คือพื้นผิวที่กำหนดขึ้นเพื่อใช้บังคับลักษณะการเข้าสู่ 0 ของค่าความผิดพลาดของระบบ องค์ประกอบสำคัญคือขนาดของความผิดพลาดของระบบกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าความผิดพลาดนั้น ที่ความสัมพันธ์นิยามได้โดยสมการ

$$\mathcal{G}(t)\dot{\mathcal{G}}(t) \leq 0 \quad (3.14)$$

เมื่อ

$$\mathcal{G}(t) = Cz(t) \quad (3.15)$$

โดยที่

$C \in R^{m \times n_p}$ คือ แมทริกซ์เลื่อน

$z(t) \in R^{n_p}$ คือ ค่าสถานะของระบบที่เวลาปัจจุบัน

ทฤษฎีบท 3.3 : ตัวควบคุมเสถียรภาพแบบเลื่อน

หากเราสามารถสร้างระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา (S_o) ขึ้นจากระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_d) ได้โดยใช้ทฤษฎีบท 2.1 และเมื่อสมมติฐาน 2.1 เป็นจริงและเราสามารถสร้างพื้นผิวเลื่อนตามนิยาม 3.3 ข้างต้นได้แล้ว จะมีตัวควบคุมเสถียรภาพแบบเลื่อนสำหรับใช้ควบคุมให้ระบบเสมือน (S_o) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้ กำหนดโดย

$$u(t) = -(CB_o)^{-1} K \mathcal{G}(t) + u_N(t) + u_{eq}(t) \quad (3.16)$$

เมื่อ

$$u_{eq}(t) = -(CB_o)^{-1} C J z(t) \quad (3.17)$$

$$u_N(t) = \frac{\rho^2(x_t) B_o^T C^T \mathcal{G}(t)}{\delta(\rho(x_t) \|B_o^T C^T \mathcal{G}(t)\| + e^{-\phi t})} \quad (3.18)$$

โดยที่ค่าอัตราขยายไม่เชิงเส้นคือ

$$\rho(x_t) = \mu_E \left\| -(CB_o)^{-1} K \mathcal{G}(t) + u_{eq}(t) \right\| + \mu(x_t) \quad (3.19)$$

และ $K \in R^{m \times m}$ คือ เมทริกซ์ที่มีค่าบวกแน่นอน และ ϕ คือ จำนวนจริงบวกใดๆ

พิสูจน์

ดูรายละเอียดการพิสูจน์ที่ภาคผนวก จ.

และสามารถดูตัวอย่างการใช้งานตัวควบคุมแบบเลื่อน ได้จาก ตัวอย่างใน [35]

3.3 การประยุกต์ใช้กับระบบควบคุมชนิดติดตามโมเดลอ้างอิง

ในส่วนนี้จะเป็นการแสดงการนำเอาเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพโดยใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไป ที่นำเสนอมาประยุกต์ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบควบคุมชนิดติดตามโมเดลอ้างอิง โดยกำหนดให้ระบบที่เราต้องการควบคุมเป็นระบบที่มีตัวหน่วงเวลาที่นิยามตามสมการ (2.2) และระบบ โมเดลอ้างอิงกำหนดโดย

$$\dot{x}_m(t) = \int_{-r}^0 d\alpha_m(\theta)x_m(t+\theta) + B_m u_m(t) \quad (3.20)$$

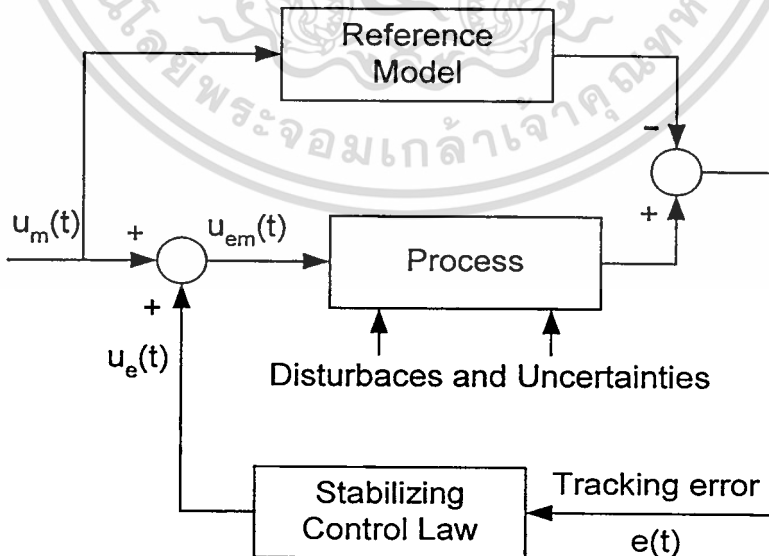
โดย u_m คือ สัญญาณคำสั่ง

และเรากำหนดให้ค่าความผิดพลาดในการติดตาม(tracking error) นิยามโดย

$$e(t) = x(t) - x_m(t) \quad (3.21)$$

จะได้

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \int_{-r}^0 d\alpha_m(\theta)e(t+\theta) + \int_{-r}^0 d\beta(\theta)x(t+\theta) + \int_{-r}^0 d(\alpha(\theta) - \alpha_m(\theta))x(t+\theta) \\ & + [B + \Delta B(t)]u(t) - B_m u_m(t) + B\omega(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$



รูปที่ 3.1 แผนภาพบล็อกแสดงระบบควบคุมชนิดติดตามโมเดลอ้างอิง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มีสมมติฐานเพิ่มเติมสำหรับกำหนดคุณลักษณะสำหรับระบบที่มีตัวห้วงเวลาชนิดติดตาม โมเดล
อ้างอิงดังนี้

สมมติฐาน 3.1 : เสถียรภาพของโมเดลอ้างอิง

กำหนดให้โมเดลอ้างอิงเป็น โมเดลของระบบที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ หรือกล่าวอีกนัย
หนึ่งก็คือรากทั้งหมดของโมเดลอ้างอิงในขณะที่ยัง ไม่มีสัญญาณคำสั่ง u_m เป็นรากที่เสถียร

สมมติฐาน 3.2 : ค่าความแตกต่างระหว่างระบบกับโมเดลอ้างอิง

ถ้าสามารถหาค่าความแตกต่างระหว่างระบบที่มีตัวห้วงเวลากับ โมเดลอ้างอิงได้และค่า
ความแตกต่างนั้นมีโครงสร้างที่สอดคล้องกับตัวควบคุมของระบบที่มีตัวห้วงเวลาแล้ว ก็จะสามารถ
ถอดเอาความแตกต่างนั้นเป็นเสมือนเป็นค่าความไม่แน่นอนชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าสู่ของ
ระบบชนิดติดตาม โมเดลอ้างอิงได้

กำหนดให้ค่าความแตกต่างระหว่างระบบกับโมเดลอ้างอิงนี้มีคุณสมบัติที่ถือเป็นเสมือนค่า
ความไม่แน่นอนชนิดสอดคล้องเงื่อนไขเข้าสู่ได้

นิยาม 3.4 : เงื่อนไขเข้าสู่เพิ่มเติม

จากสมมติฐาน 3.2 เราสามารถเขียนเป็นพจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ว่า สำหรับเวลา $t \in \mathcal{R}^+$
แล้วจะมีเมทริกซ์ต่อเนื่อง $H_m(\theta)$ และ $E_m(t)$ ที่สอดคล้องกับ

$$\text{ก) } \alpha(\theta) - \alpha_m(\theta) = BH_m(\theta)$$

$$\text{ข) } B - B_m = BE_m$$

และจากสมมติฐาน 2.1 สมมติฐาน 2.2 สมมติฐาน 2.3 ที่แสดงไว้ในบทที่ 2 และจากสมมติฐาน
3.1 สมมติฐาน 3.2 และนิยาม 3.4 ข้างต้นเราจะสามารถจัดรูปสมการ (3.22) ได้ใหม่เป็น

$$\dot{e}(t) = \int_{\mathcal{R}} d\alpha_m(\theta)e(t+\theta) + B(u_e(t) + v_e(t)) \quad (3.23)$$

เมื่อ

$$v_e(t) = \int_{\mathcal{R}} d(H(\theta) + H_m(\theta))x(t+\theta) + [E(t) + E_m]u_{em}(t) + E(t)u_e(t) + \omega(t) \quad (3.24)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$u_{em}(t) = u_e(t) + u_m(t) \quad (3.25)$$

สังเกตว่าหาก $e(t)$ มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับหรือลู่เข้าสู่ศูนย์แล้ว จะหมายถึงการที่ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา $x(t)$ สามารถให้ผลตอบสนองที่เหมือนกับโมเดลอ้างอิงสำหรับสัญญาณคำสั่ง $u_m(t)$ ที่กำหนดไว้ได้แล้วนั่นเอง ดังนั้นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบติดตามโมเดลอ้างอิงในกรณีนี้ก็คือการหาผลเฉลย $u_e(t)$ ให้กับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา

นิยาม 3.5 : การแปลงเชิงเส้นทั่วไปสำหรับระบบติดตามโมเดลอ้างอิง

กำหนดให้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปสำหรับระบบติดตามโมเดลอ้างอิงนิยามโดย

$$z_e(t) = Qe(t) + \int_r^0 \int_{t+\theta}^0 e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha_m(\theta) e(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

ทฤษฎีบท 3.4 : การแปลงเชิงเส้นทั่วไปสำหรับระบบติดตามโมเดลอ้างอิง

ถ้ากำหนดให้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปสำหรับระบบติดตามโมเดลอ้างอิงนิยามตามสมการ (3.26) เราสามารถใช้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปนี้แปลงรูปสมการค่าความผิดพลาดในการติดตาม (3.23) ให้อยู่ในรูปสมการค่าความผิดพลาดเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาอยู่ภายใน ได้ดังนี้

$$\dot{z}_e(t) = Jz_e(t) + B_Q(u_e(t) + v_e(t)) \quad (3.27)$$

เมื่อ

$$JQ = \int_r^0 e^{J\theta} Q d\alpha_m(\theta) \quad (3.28)$$

โดยที่ J คือ แมทริกซ์จอร์แดน และ Q คือ แมทริกซ์เงาของทางซ้ายของโมเดลอ้างอิง

พิสูจน์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ทำได้โดยการหาอนุพันธ์สมการ (3.26) โดยใช้ค่าตัวแปรตามสมการ (3.23) และสมการ (3.28) เข้าช่วยในการจัดรูปแบบ ซึ่งวิธีการพิสูจน์ที่ใช้เป็นแนวทางการพิสูจน์เดียวกันกับการแปลงเชิงเส้นอื่น

ทฤษฎีบท 3.5 : ตัวควบคุมเสถียรภาพ

หากสมมติฐาน นิยามและทฤษฎีบท ที่อ้างถึงข้างต้นเป็นจริงแล้ว เราจะได้ว่าตัวควบคุมเสถียรภาพ สำหรับระบบติดตามโมเดลอ้างอิงกำหนดโดย

$$u_e(t) = -\frac{\rho^2(e_t)B_Q^T P z_e(t)}{\rho(e_t)\|B_Q^T P z_e(t)\| + e^{-\phi t}} \quad (3.29)$$

เมื่อ

$$\rho(e_t) \geq \|v_e(t)\| \quad (3.30)$$

และ $P > 0$ คือผลเฉลยที่ได้จากสมการเลียปูนอฟ

$$J^T P + P J + I = 0 \quad (3.31)$$

ซึ่งตัวควบคุมเสถียรภาพ $u_e(t)$ ที่คำนวณได้นี้ จะใช้สำหรับปรับแก้ค่าความผิดพลาดในการติดตาม และทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาให้ผลตอบสนองเหมือนกับโมเดลอ้างอิงได้

พิสูจน์

ดูรายละเอียดการพิสูจน์ที่ภาคผนวก ฉ.

และสามารถดูตัวอย่างการใช้งานเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบควบคุมแบบติดตามโมเดลได้จาก ตัวอย่างใน [34]

3.4 กรณีที่คำนวณหารากไม่ได้และกรณีรากที่ไม่เสถียรซ้ำกัน

ในการนำเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาที่น่าสนใจไปใช้นั้น เจื่อนไขใช้งานที่สำคัญประการหนึ่งก็คือต้องสามารถระบุตำแหน่งของรากที่ไม่เสถียรหรือรากไม่ต้องการได้ทั้งหมด ซึ่งแม้เราสามารถนำเทคนิคของแมนิเตียส (MANITIUS) [42]. มาช่วยในการคำนวณหาตำแหน่งรากได้โดยสะดวกขึ้นก็ตาม บางครั้งการระบุตำแหน่งของรากที่ไม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต้องการทุกรากนั้นทำได้ยากหรือค่าที่คำนวณหาได้ก็อาจไม่ถูกต้องใกล้เคียงตามเป็นจริงเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงทางกายภาพของระบบ หรือพบว่าระบบนั้นไม่สามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้ มีรากที่ไม่ต้องการที่ตำแหน่งเดียวกันมากกว่า 1 ตัว ก็จะทำให้ไม่สามารถใช้เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพที่นำเสนอได้

วิธีการแก้ปัญหานี้สามารถทำได้โดยการนำเอาเทคนิคของเซอร์เรส [9] ที่มองตัวแปรหนึ่งช่วงเวลาเป็นเสมือนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนมาปรับปรุง โดยในกรณีข้างต้นเราสามารถเลือกให้ระบบมีรากที่ตำแหน่งที่ใกล้เคียงกับตำแหน่งเดิมที่ไม่ทราบค่าที่ถูกต้องหรือแตรรากที่ซ้ำที่กันออกเป็นรากสองรากที่วางอยู่ใกล้เคียงกับตำแหน่งเดิม แล้วถือเอาค่าความแตกต่างจากตำแหน่งที่เป็นจริงหรือค่าจริงนั้นเป็นค่าความไม่แน่นอนของระบบแทน

อีกวิธีหนึ่งที่สามารถใช้ได้ก็คือการสร้างโมเดลอ้างอิงที่เสถียรและมีคุณลักษณะที่ใกล้เคียงกับระบบที่ต้องการ แล้วนำเอาเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบติดตามโมเดลอ้างอิงมาปรับใช้ โดยถือเอาความแตกต่างระหว่างระบบจริงกับ โมเดลอ้างอิงเป็นเหมือนค่าความไม่แน่นอนของระบบ



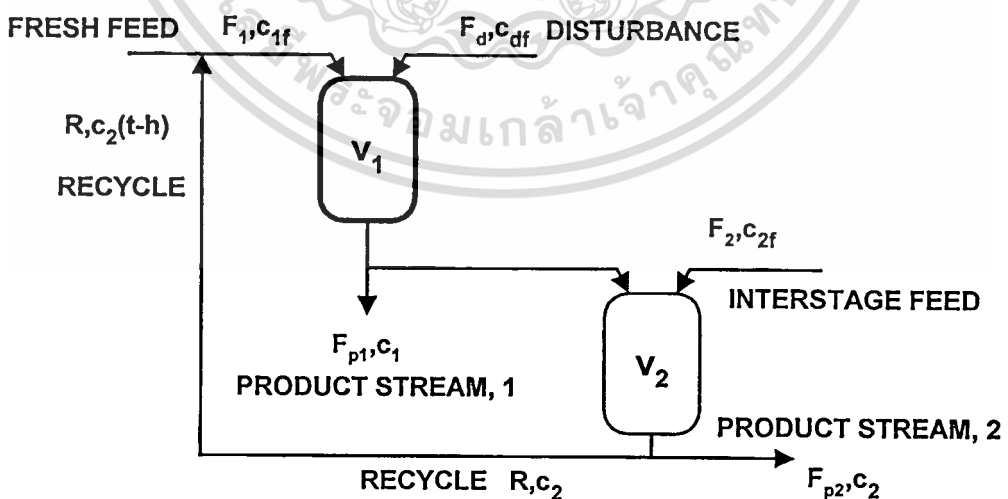
บทที่ 4

ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพ

ในบทนี้จะแสดงตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบผสมสารเคมีแบบสองถัง โดยใช้เทคนิคการแปลงเชิงเส้นทั่วไปที่ได้เสนอไว้ในบทที่ 2 รวมถึงแสดงตัวอย่างการปรับประยุกต์ใช้งานเทคนิคต่างๆ ที่เสนอเพิ่มเติมไว้ในบทที่ 3 เพื่อให้เห็นขั้นตอนการประยุกต์ใช้งานเพิ่มเติม ตัวอย่างที่ยกมาแสดงนี้เป็นตัวอย่างที่เคยนำเสนอไว้แล้วใน [41] เพื่อที่จะได้สามารถย้อนกลับไปเปรียบเทียบกับเทคนิคการออกแบบเดิมได้โดยสะดวก

4.1 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพกับระบบผสมสารเคมีแบบสองถัง

ในหัวข้อนี้จะใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปมาช่วยออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบผสมสารเคมีแบบสองถังที่มีการนำสารที่เหลือใช้กลับมาใช้ใหม่อีกครั้ง (recycled) และเป้าหมายในการควบคุมก็คือต้องการให้ระบบปรับค่าความเข้มข้นของสารเคมีไปสู่ค่าเป้าหมายที่ต้องการ ระบบผสมสารเคมีแบบสองถังมีคุณลักษณะดังแสดงในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ระบบผสมสารเคมีแบบสองถัง

ระบบผสมสารเคมีนี้ จะทำหน้าที่ผสมสารเคมีในถัง V_1 และ V_2 ให้ได้ความเข้มข้นตามที่ต้องการโดยมีการนำเอาสารที่เหลือใช้กลับมาใช้เป็นสารตั้งต้นใหม่ และตัวควบคุมในระบบจะทำหน้าที่ปรับค่าความเข้มข้นของสารตั้งต้น C_{1f} และ C_{2f} ที่ไหลลงสู่ถังผสม ในระบบมีตัวรบกวนเป็นสารที่มีความเข้มข้น C_{df} ที่เหลือมาจากกระบวนการอื่นลงสูงถึง V_1 และถ้ากำหนดให้อัตราการไหลของสารเคมีทั้งหมดในระบบคงที่ สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$V_1 \dot{c}_1(t) = F_1 c_{1f}(t) + R c_2(t-h) + F_d c_d(t) - (F_1 + R + F_d) c_1(t) - V_1 (k_1 + \delta k_1(t)) c_1(t) \quad (4.1ก)$$

และ

$$V_2 \dot{c}_2(t) = (F_1 + R + F_d - F_{p1}) c_1(t) + F_2 c_{2f}(t) - (F_{p2} + R) c_2(t) - V_2 (k_2 + \delta k_2(t)) c_2(t) \quad (4.1ข)$$

โดยที่

$$F_{p2} = F_1 + F_d - F_{p1} + F_2$$

และค่า $\delta k_1(t)$ และ $\delta k_2(t)$ คือค่าความผิดพลาดคลาดเคลื่อนของระบบนี้ซึ่งไม่รู้ค่าแน่นอน แต่เราสามารถประมาณขอบเขต δ_1 และ δ_2 ได้ดังสมการ

$$\delta_1 \geq \max_t \|\delta k_1(t)\|$$

$$\delta_2 \geq \max_t \|\delta k_2(t)\|$$

ถ้ากำหนดค่าเป้าหมายให้ระบบเป็น c_{1s} และ c_{2s} แล้วเราต้องการหาตัวควบคุมที่บังคับให้ c_1 และ c_2 ปรับตัวเข้าหาค่าเป้าหมาย c_{1s} และ c_{2s} ได้

ขั้นตอนที่ 1

โดยเริ่มจากกำหนดตัวแปรเสริมดังนี้

$$\theta_1 = \frac{V_1}{F_1 + R + F_d} \quad \theta_2 = \frac{V_2}{F_{p2} + R}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_1 = c_{1f} - c_{1fs} \quad u_2 = c_{2f} - c_{2fs}$$

$$x_1 = c_1 - c_{1s} \quad x_2 = c_2 - c_{2s} \quad d = c_{df} - c_{ds}$$

โดยที่ c_{ds} คือค่าหลักของตัวรบกวนระบบ และจะได้

$$c_{1fs} = -\frac{Rc_{2s} + F_d c_{ds} - (F_1 + R + F_d)c_{1s} - V_1 k_1 c_{1s}}{F_1}$$

$$c_{2fs} = -\frac{(F_1 + R + F_d - F_{p1})c_{1s} - (F_{p2} + R)c_{2s} - V_2 k_2 c_2}{F_2}$$

ซึ่งทำให้เราสามารถเขียนสมการ (4.1) ได้ใหม่ในรูป

$$\dot{x}_1(t) = -\left(\frac{i}{\theta_1} + k_1 + \delta k_1(t)\right)x_1(t) + \frac{R}{V_1}x_2(t-h) + \frac{F_1}{V_1}u_1(t) + \frac{F_d}{V_1}d(t) + \delta k_1(t)c_{1s} \quad (4.2ก)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\left(\frac{1}{\theta_2} + k_2 + \delta k_2(t)\right)x_2(t) + \frac{F_{p2} - F_2 + R}{V_2}x_1(t) + \frac{F_2}{V_2}u_2(t) + \delta k_2(t)c_{2s} \quad (4.2ข)$$

สมมติว่าเรากำหนดให้ระบบผสมสารเคมีมีค่าตัวแปรต่างๆ ดังนี้

$$k_1 = k_2 = 1 \quad h = 1$$

$$F_1 = 0.4 \quad F_2 = 0.5$$

$$F_{p1} = 0.5 \quad F_{p2} = 0.5$$

$$F_d = 0.1 \quad R = 0.25$$

$$\delta_1 = 0.4 \quad \delta_2 = 0.5 \quad d_{\max} = 0.125$$

$$\theta_1 = 0.75 \quad \theta_2 = 0.75$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้วเราสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ (4.2) ให้อยู่ในรูป

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + A_h x(t-h) + Bu(t) + \omega(t) \quad (4.3)$$

ได้ เมื่อ $x(t)$ คือค่าสถานะผิดพลาดจากค่าเป้าหมาย ณ เวลา t และ

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \text{ โดยที่ } \begin{cases} x_1(t) = c_1 - c_{1s} \\ x_2(t) = c_2 - c_{2s} \end{cases},$$

$$A = \begin{bmatrix} -1.75 & 0 \\ 0.25 & -1.75 \end{bmatrix}, \Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0.4\varpi(t) & 0 \\ 0 & 0.5\varpi(t) \end{bmatrix},$$

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta A_h(t) = 0,$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \Delta B(t) = 0,$$

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} \varpi(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} \varpi(t) & 0 \\ 0 & \varpi(t) \end{bmatrix}, \|\varpi(t)\| \leq 0.125,$$

และสามารถจัดรูปสมการระบบข้างต้นให้อยู่ในรูปทั่วไปตามสมการ (2.2) ได้ โดยจะได้ว่า

$$r = h = 1, \alpha(\theta) = \begin{bmatrix} -1.75 & 0 \\ 0.25 & -1.75 \end{bmatrix} H_u(\theta) + \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_u(\theta+1),$$

โดยที่ H_u คือ Heaviside Unit Function และเมื่อตรวจสอบตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน พบว่าเป็นชนิดสอดคล้องเงื่อนไขโดยจะได้

$$v(t) = \begin{bmatrix} \varpi(t) & 0 \\ 0 & \varpi(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2.5\varpi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 2

เลือกขอบเขตเสถียรภาพ v_0 เป็น 2 และคำนวณรากของระบบได้จำนวน 2 รากอยู่ที่ $\{-2.72791, -1.27667\}$ และได้อากที่ไม่เป็นที่ต้องการของระบบ $s_1 \approx -1.27667$

และเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\text{rank}\left[sI - \int_{-r}^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) | B\right] = 2$ ซึ่งเท่ากับขนาดของระบบสำหรับรากทั้งหมดที่อยู่ใน C_{-2}^+ และแสดงว่าระบบนี้สามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้สำหรับทุกรากที่มีค่ามากกว่า -2

ขั้นตอนที่ 3

จาก นิยาม 2.4 จะได้จอร์แดนเมทริกซ์ $J = -1.27667$ และเนื่องจากขนาดของจอร์แดนเมทริกซ์เท่ากับ 1 ซึ่งทำให้สามารถใช้ค่าคงที่ใดๆ เป็นเวกเตอร์เงาจงได้ ดังนั้นเรากำหนดเลือกให้เวกเตอร์เงาจงทางซ้ายของระบบ = 1 และจะได้ $Q = [1 \ 0]$

$$\dot{z}(t) = -1.27667z(t) + [0.4 \ 0]u(t) + v(t) \quad (4.4)$$

ขั้นตอนที่ 4

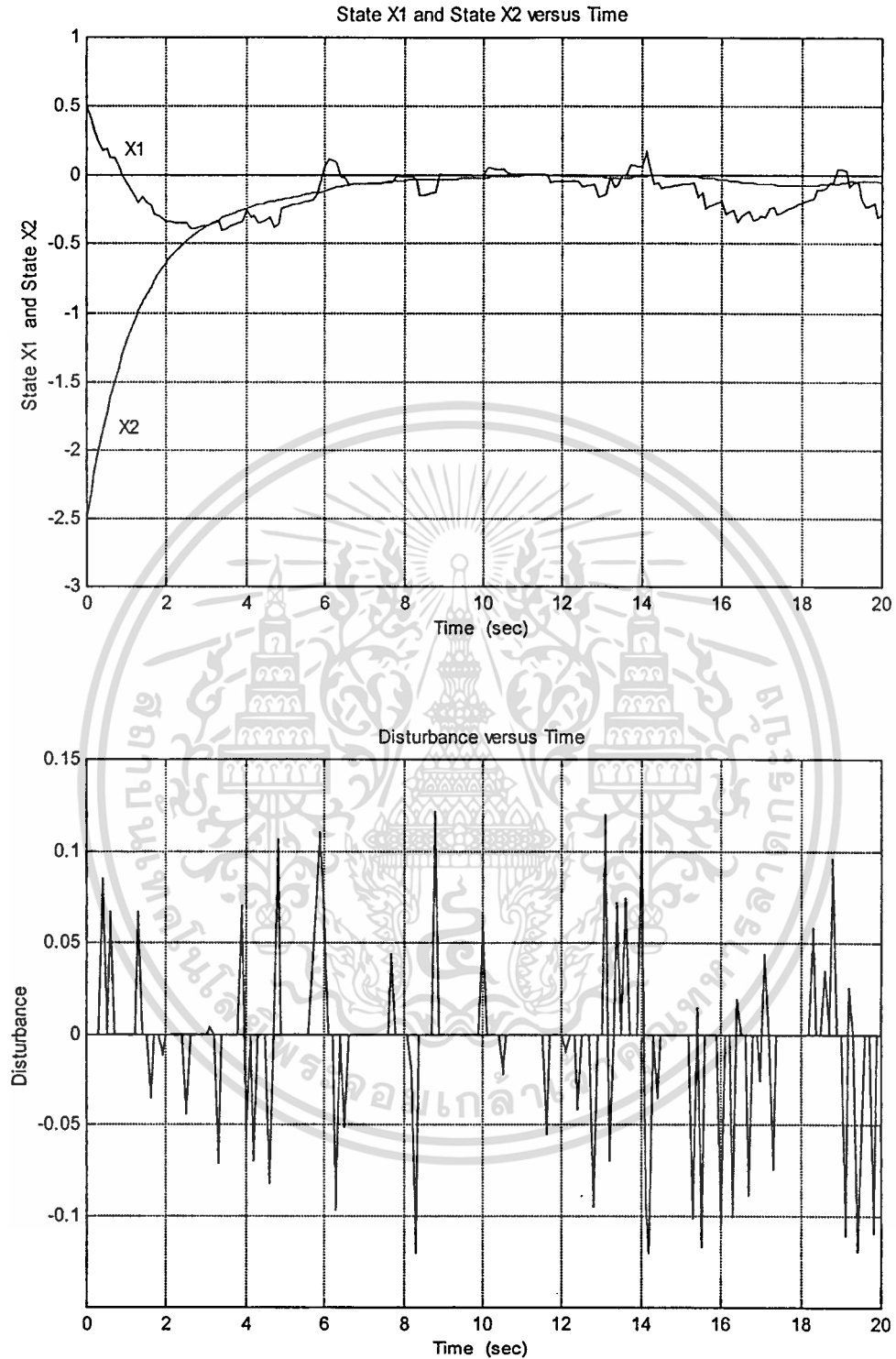
เลือกให้ $Q_R = 1$ ใช้โปรแกรมคำนวณจะได้ผลเฉลย $P = 0.3825$

ขั้นตอนที่ 5

กำหนดให้ $\delta = 1$, $\phi = 0.37$ และ $\rho(x_t) = \sqrt{(x_1(t) + c_{1s})^2 + (x_2(t) + c_{2s})^2} + 0.125$

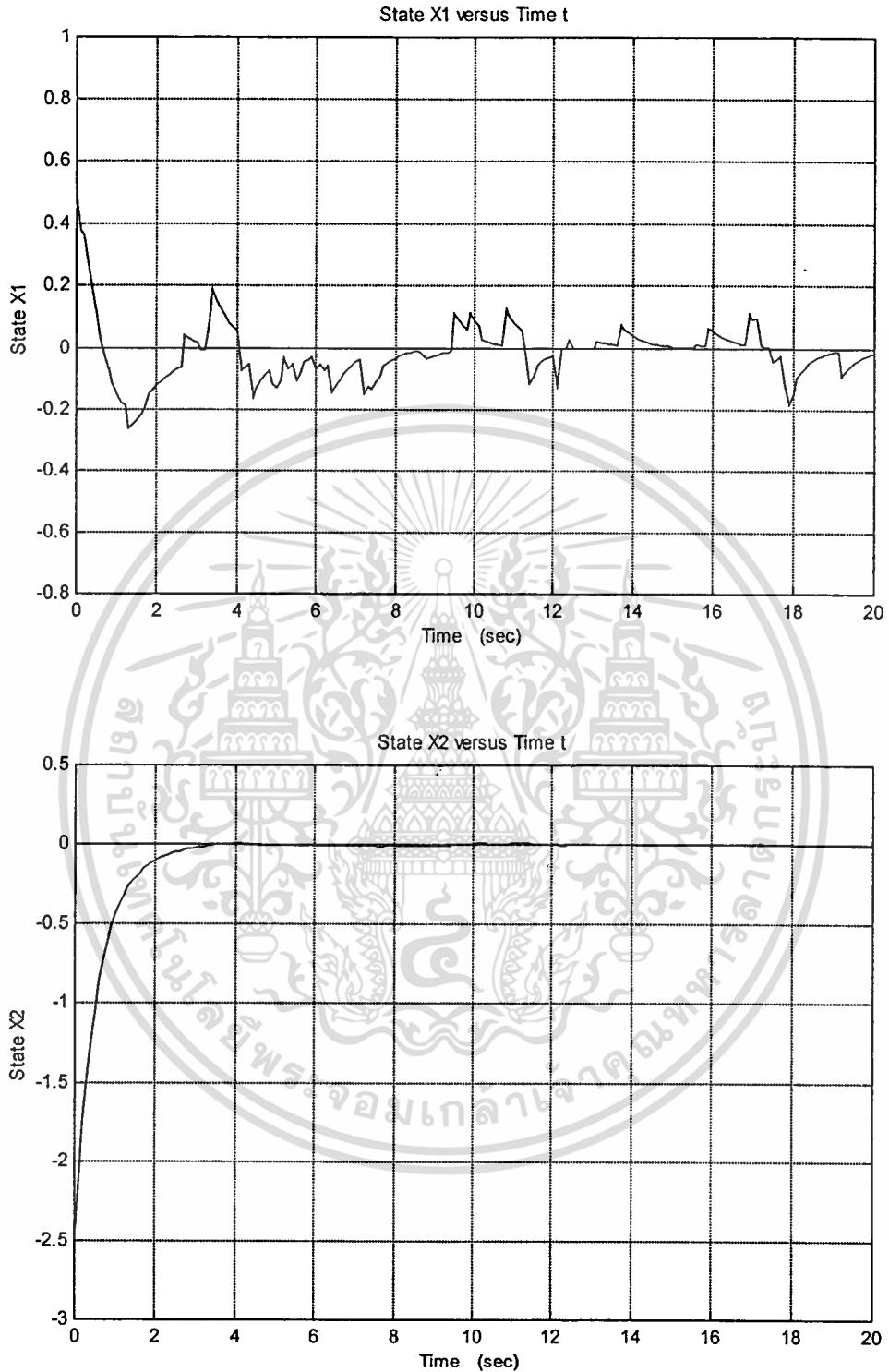
ก็จะได้อ่าตัวแปรทั้งหมดสำหรับตัวควบคุมเสถียรภาพของระบบผสมสารเคมีนี้

เมื่อกำหนดให้ค่าเป้าหมาย (set point) ของระบบ $c_{1s} = 0.5$, $c_{2s} = 1.0$ และค่าสถานะเริ่มต้น (initial condition) $x_0 = [0.5 \ -2.5]^T$ ที่เวลา $[-1, 0]$ แล้วค่าสถานะของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา ค่าสถานะของระบบเสมือน ตัวควบคุมเสถียรภาพที่ได้ ตัวรบกวนระบบและผลตอบสนองของระบบ จะแสดงอยู่ในรูปที่ 4.2 รูปที่ 4.3 รูปที่ 4.4 และรูปที่ 4.5 ตามลำดับ \square



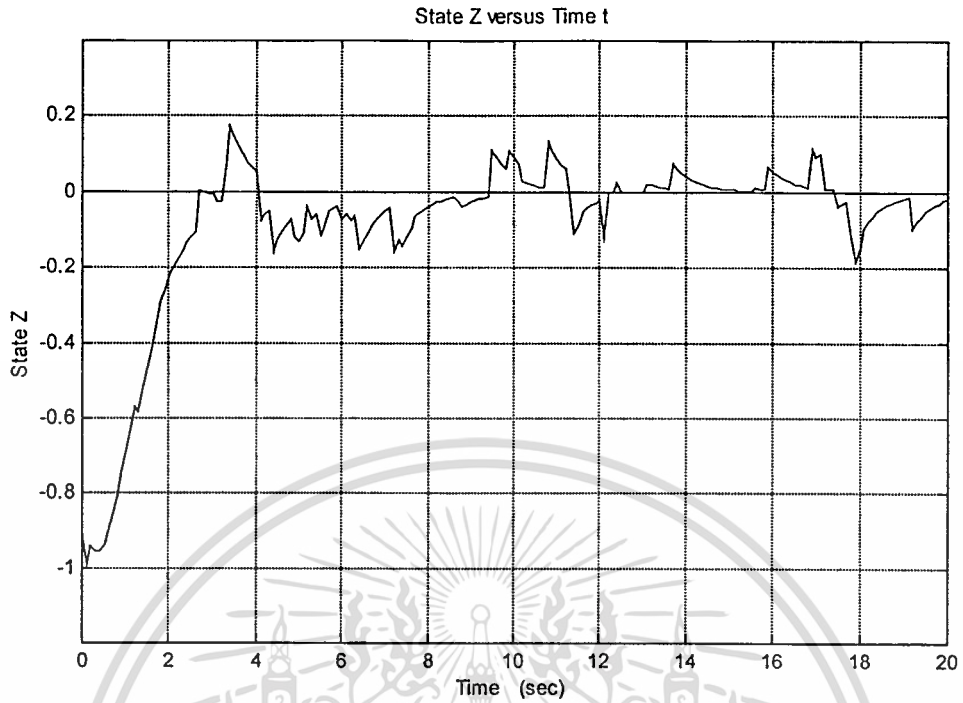
รูปที่ 4.2 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ และตัวรบกวนระบบ $w(t)$ ของระบบผสมสารเคมี
เมื่อไม่มีสัญญาณควบคุม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



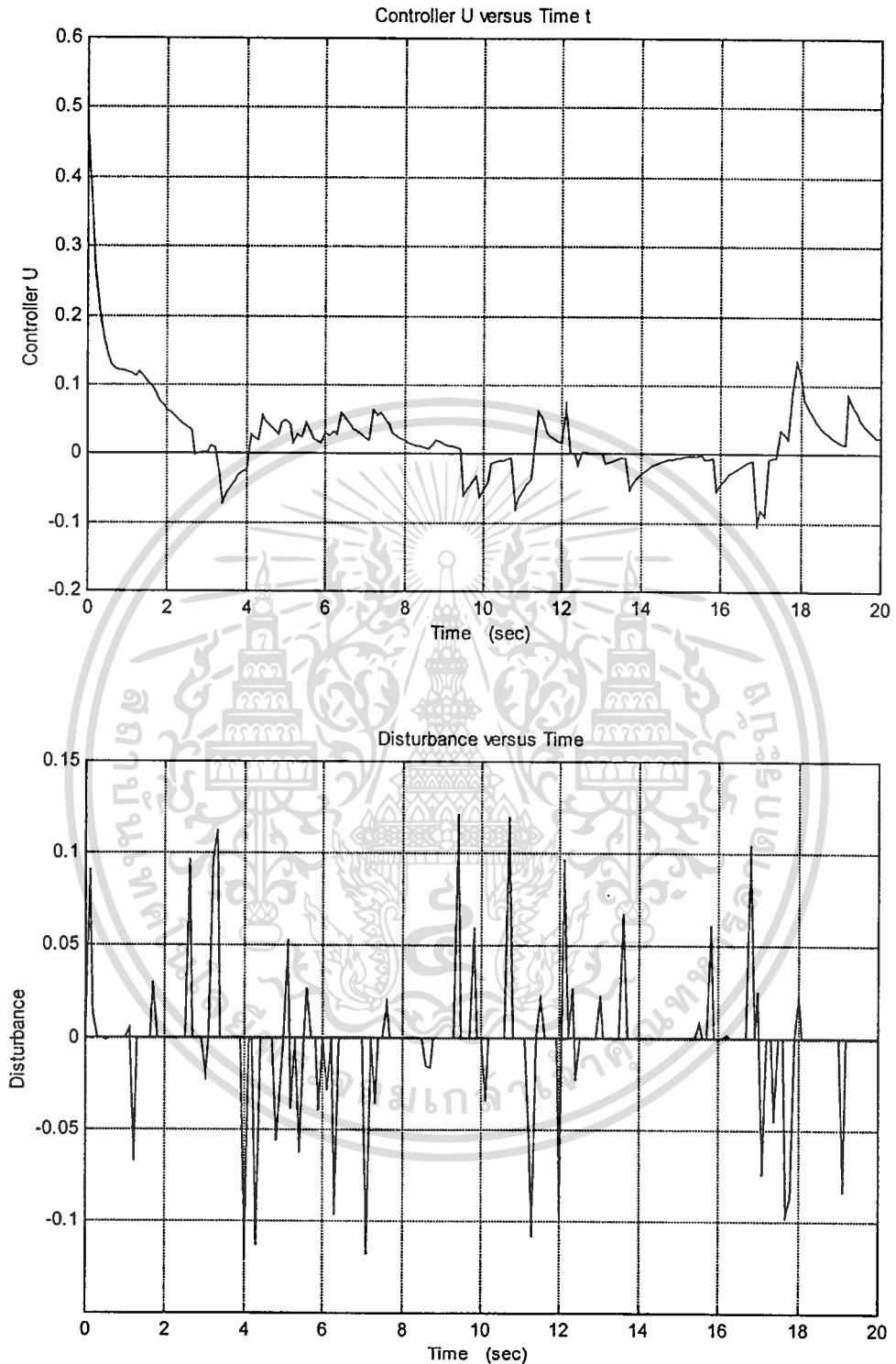
รูปที่ 4.3 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ ของระบบพสมสารเคมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



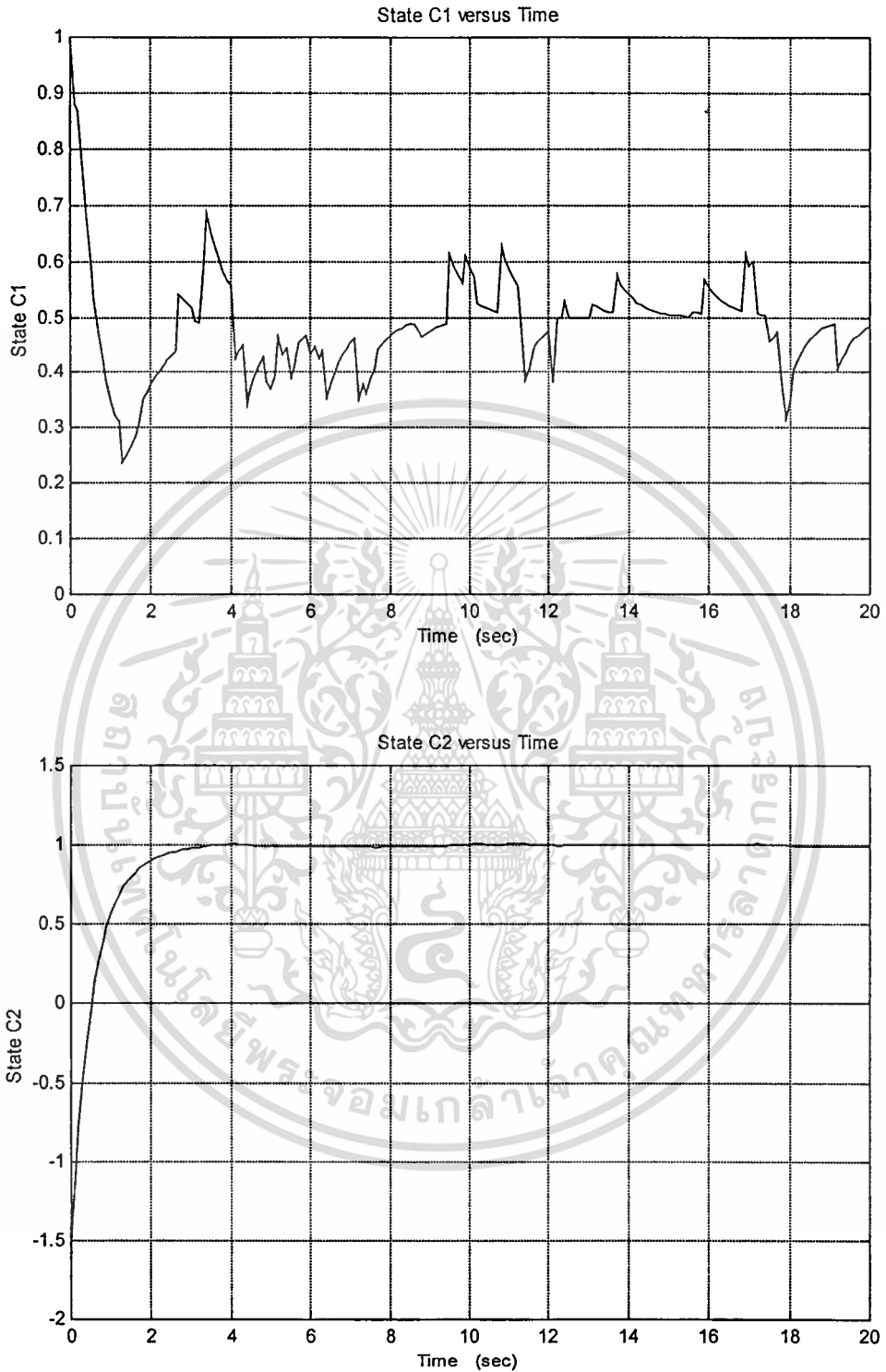
รูปที่ 4.4 กราฟแสดงค่าสถานะของระบบเสมือน $z(t)$ ของระบบผลมสารเคมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.5 กราฟแสดงค่าสถานะ $n(t)$ และตัวรบกวนระบบ $w(t)$ ของระบบผสมสารเคมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.6 กราฟแสดงค่าสถานะ $c(t)$ ของระบบผสมสารเคมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.2 แสดงสถานะของระบบเมื่อยังไม่มีตัวควบคุม สังเกตว่าแม้ผลตอบสนองของระบบจะช้าและได้รับผลกระทบจากตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนแต่ระบบยังคงรักษาเสถียรภาพไว้ได้อยู่ ทั้งนี้เนื่องจากรากทั้งหมดของระบบเป็นรากที่เสถียรนั่นเอง

ในรูปที่ 4.3 ถึงรูปที่ 4.6 แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่ออกแบบโดยเทคนิคการแปลงเชิงเส้นสามารถทำให้ระบบผสมสารเคมีมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้และให้ผลตอบสนองที่ดีกว่าเมื่อยังไม่มีตัวควบคุม สังเกตว่าระบบเสมือนที่ใช้ออกแบบตัวควบคุมนั้นมีขนาดเล็กกว่าขนาดของระบบผสมสารเคมี

4.2 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพกรณีที่ไม่ต้องการของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาไม่ได้

ในส่วนนี้จะแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพสำหรับกรณีที่ไม่สามารถหารากที่ไม่เสถียรของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาได้ ซึ่งได้กล่าวถึงไว้แล้วในบทที่ 3 มาแสดงตัวอย่างการใช้งานกับระบบผสมสารเคมีแบบสองถังที่นำเสนอไว้แล้วในหัวข้อ 4.1 โดยสมมติว่าไม่สามารถคำนวณหรือระบุตำแหน่งรากที่ไม่เสถียรหรือไม่เป็นที่ต้องการของระบบได้ และทำให้เราไม่สามารถสร้างระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาสำหรับใช้ออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพได้

วิธีแก้ปัญหาวิธีแรกปรับปรุงมาจากงานวิจัยของเซอร์เรสที่มองว่าตัวหน่วงเวลาที่ปรากฏในระบบเป็นเสมือนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนของระบบ แล้วออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพขึ้นโดยถือว่าระบบเป็นระบบที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาแต่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนแทน และจะทำให้สามารถเขียนสมการระบบ (4.3) ใหม่ได้เป็น

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + H(t)x(t) + H_h x(t-h) + \omega(t)) \quad (4.5)$$

เมื่อ $x(t)$ คือค่าสถานะคิดพลาคจากค่าเป้าหมาย ณ เวลา t และ

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad \begin{cases} x_1(t) = c_1 - c_{1s} \\ x_2(t) = c_2 - c_{2s} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1.75 & 0 \\ 0.25 & -1.75 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \Delta B(t) = 0,$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} \varpi(t) & 0 \\ 0 & \varpi(t) \end{bmatrix}$$

$$H_h = \begin{bmatrix} 0 & 0.625 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

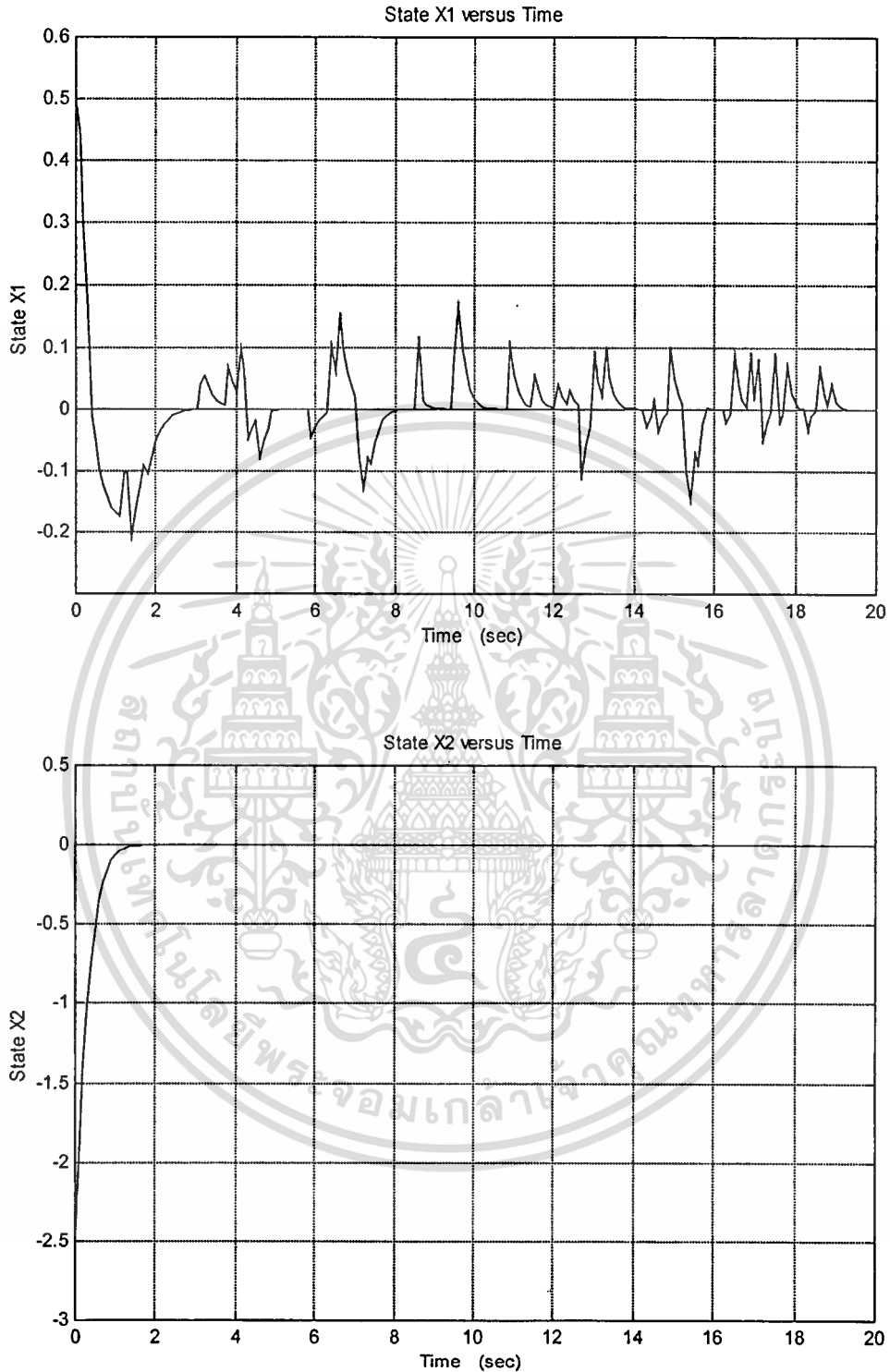
$$\omega(t) = \begin{bmatrix} 2.5\varpi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|\varpi(t)\| \leq 0.125,$$

จากนั้นเลือกให้ $Q_R = I$ ใช้โปรแกรมคำนวณจะได้ผลเฉลย $P = \begin{bmatrix} 0.2847476 & 0.0193671 \\ 0.0193670 & 0.2800934 \end{bmatrix}$

ถ้ากำหนดให้ $\delta = 1$, $\phi = 0.37$ และ $\rho(x_t) = \sqrt{(x_1(t) + c_{1s})^2 + (x_2(t) + c_{2s})^2} + 5$

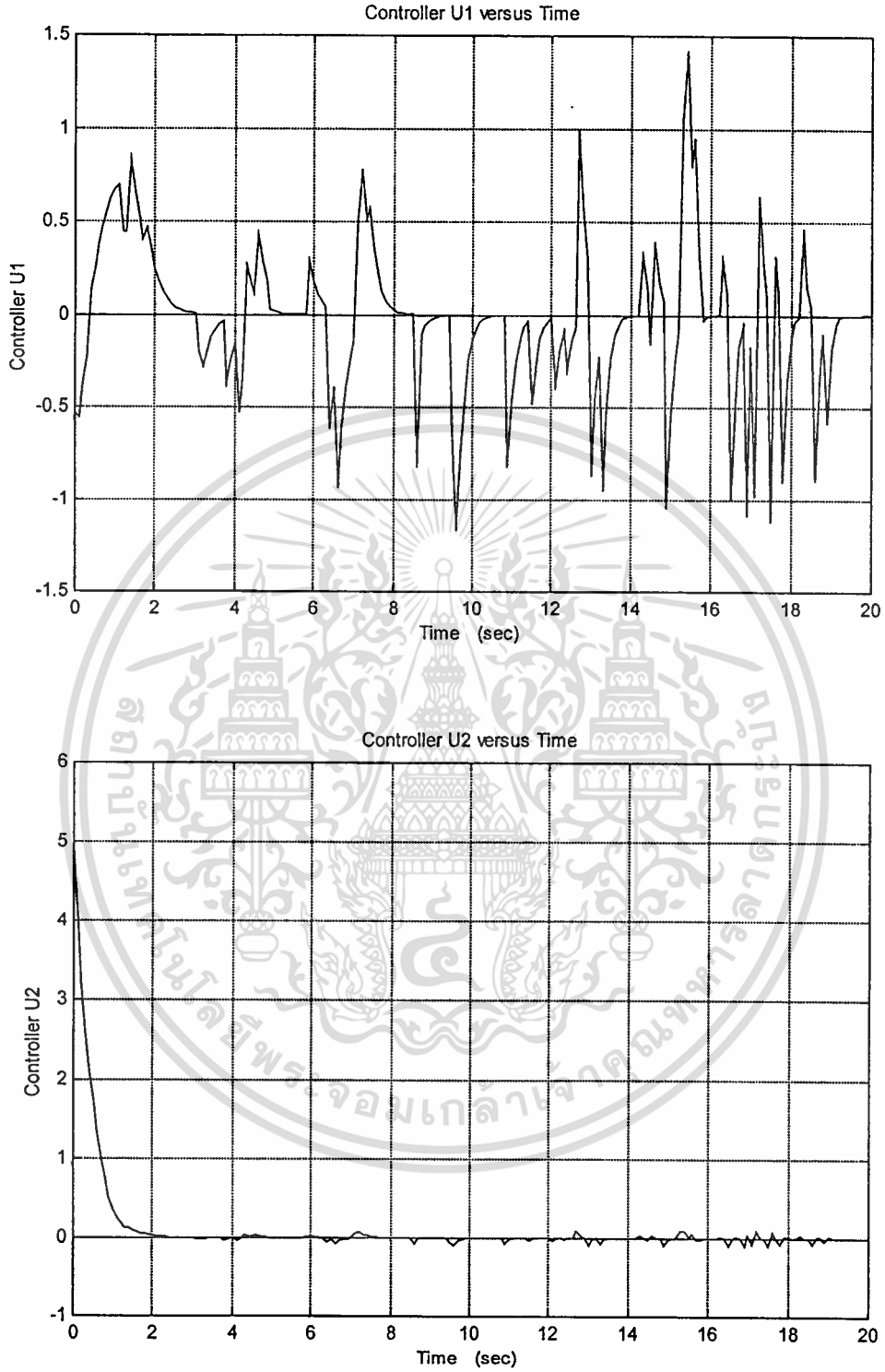
ก็จะได้ค่าตัวแปรทั้งหมดสำหรับตัวควบคุมเสถียรภาพของระบบผสมสารเคมีนี้

เมื่อกำหนดให้ค่าเป้าหมาย (set point) ของระบบ $c_{1s} = 0.5$, $c_{2s} = 1.0$ และค่าสถานะเริ่มต้น $x_0 = [0.5 \quad -2.5]^T$ ที่เวลา $[-1, 0]$ แล้วค่าสถานะของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา ตัวควบคุมเสถียรภาพที่ได้ และผลตอบสนองของระบบจะแสดงอยู่ในรูปที่ 4.6 รูปที่ 4.7 และรูปที่ 4.8 ตามลำดับ \square



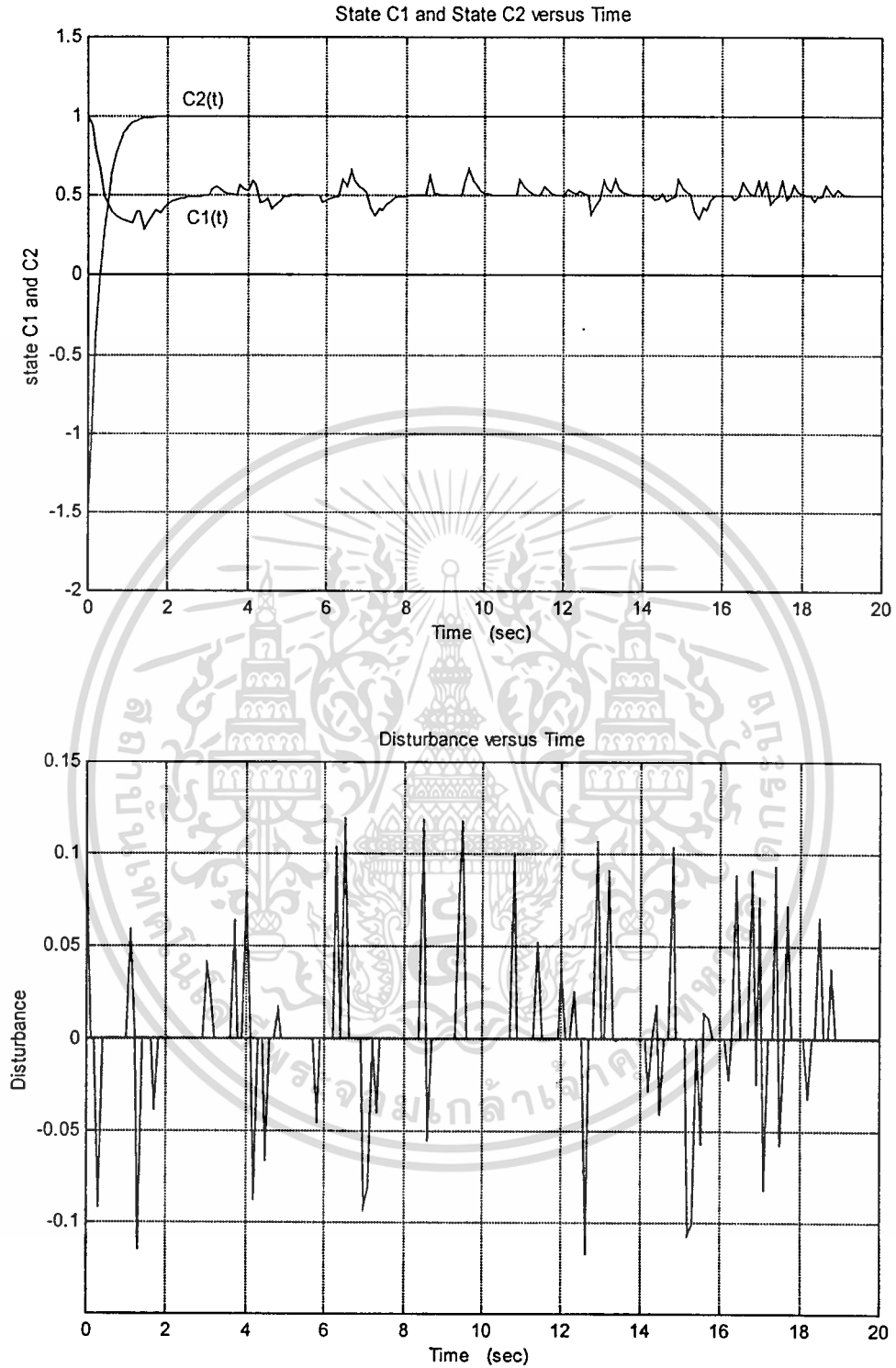
รูปที่ 4.7 กราฟแสดงค่าสถานะ $x(t)$ ของระบบผสมสารเคมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.8 กราฟแสดงค่าสถานะ $u(t)$ ของระบบผสมสารเคมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.9 กราฟแสดงค่าสถานะ $c(t)$ และตัวรบกวนระบบ $w(t)$ ของระบบพสมสารเคมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากผลจำลองที่ได้แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่ออกแบบได้นี้สามารถควบคุมให้ระบบมีผลตอบสนองที่ดีกว่าเมื่อยังไม่มีตัวควบคุม และตัวควบคุมที่ได้สามารถควบคุมให้ระบบผสมสารเคมีแบบสองถังที่มีการป้อนกลับสารเหลือใช้ มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้เช่นเดียวกัน เพียงแต่การออกแบบตัวควบคุมโดยนำเอาเทคนิคการแปลงเชิงเส้นมาปรับใช้นั้น มีการคำนวณที่น้อยกว่าเนื่องจากคำนวณสร้างตัวควบคุมจากระบบเสมือนที่มีขนาดเล็กลงเมื่อเทียบกับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา และเมื่อเปรียบเทียบสัญญาณควบคุมในรูปที่ 4.5 กับรูปที่ 4.8 จะเห็นว่าตัวควบคุมที่ออกแบบได้จากการใช้เทคนิคการแปลงเชิงเส้นก็ใช้พลังงานสิ้นเปลืองน้อยกว่าด้วย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

บทสรุป

จากทฤษฎีและตัวอย่างที่ได้นำมาเสนอทั้งหมดนี้ ได้แสดงให้เห็นว่าเราสามารถออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน โดยใช้เทคนิคการแปลงเชิงเส้นได้ ถ้าหากระบบที่เราต้องการศึกษาวิเคราะห์มีคุณสมบัติตรงตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนมีผลกระทบกับระบบในลักษณะเดียวกันกับตัวควบคุมและมีขนาดไม่มากไปกว่าความสามารถในการควบคุมของตัวควบคุม ตัวหน่วงเวลาที่ปรากฏในระบบต้องเป็นตัวหน่วงเวลาที่ทราบค่าหรือสามารถประมาณค่าได้และมีค่าคงที่ การออกแบบโดยใช้เทคนิคการแปลงเชิงเส้นนี้ทำได้โดยง่ายและให้ผลการควบคุมที่ดีสามารถทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้

หลักการการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบดังกล่าว ได้นำแนวคิดจากทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นทั่วไปของเฟียกเบคซิชกับเพียร์สัน มาปรับปรุงพัฒนาเพิ่มเพื่อให้สามารถใช้งานกับระบบที่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนรวมอยู่ภายในด้วย เริ่มจากการจัดรูปสมการระบบให้อยู่ในรูปทั่วไปก่อน แล้วใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นมาช่วยแปลงลดรูประบบที่มีตัวหน่วงเวลาไปเป็นระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลา หลังจากนั้นจึงนำระบบเสมือนที่ได้ไปวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา เทคนิคการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพที่ได้นำเสนออยู่นอกจากจะช่วยให้สามารถออกแบบตัวควบคุมที่สามารถควบคุมระบบให้มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้ง่ายขึ้นและช่วยลดข้อจำกัดในการใช้งาน (ดูภาคผนวก ข.) แล้ว ยังมีข้อดีดังต่อไปนี้

1. ไม่จำเป็นต้องคิดแปลงรูปแบบการแปลงเชิงเส้นทุกครั้งที่มีการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของตัวหน่วงเวลาที่อยู่ในระบบหรือใช้กับระบบที่โครงสร้างของตัวหน่วงเวลาแตกต่างกันออกไป
2. ไม่จำเป็นต้องหาผลเฉลยของค่าผกผันให้เมทริกซ์ของเวกเตอร์เจาะจงทางซ้าย
3. ขนาดของระบบเสมือนมีขนาดใหญ่เท่ากับจำนวนรากที่ไม่เป็นที่ต้องการเท่านั้น

นอกจากนี้แม้ว่าระบบจะมีเงื่อนไขบางประการที่ไม่สอดคล้องกันกับเงื่อนไขการใช้งาน เช่น มีรากที่ไม่ต้องการซ้ำกัน หรือไม่สามารถคำนวณหาค่ารากได้ เราก็สามารถนำเทคนิคการวิเคราะห์และออกแบบที่ประยุกต์ขยายเพิ่มเติมมาปรับใช้งานได้ เช่น การกำหนดรากโดยการประมาณให้ระบบแล้วถือเอาค่าความผิดพลาดจากการประมาณเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทน หรือกำหนดโมเดลอ้างอิงที่เสถียรขึ้นแล้วออกแบบตัวควบคุมที่บังคับให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาที่ต้องการควบคุมปรับตัวตามโมเดลที่กำหนดไว้

สำหรับแนวทางการพัฒนาต่อ ผู้ที่สนใจสามารถทำการวิจัยเพื่อลดข้อจำกัดการใช้งานหรือปรับปรุงประสิทธิภาพให้สูงขึ้นก็ได้ อาทิเช่น อาจนำตัวควบคุมแบบปรับค่าได้ (adaptive controller) มาใช้สำหรับกรณีที่ไม่สามารถหาคำราคาที่ถูกต้องแม่นยำได้หรือไม่สามารถประมาณค่าขอบเขตของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนได้ หรือปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมให้เป็นแบบอื่นที่มีปัญหาหรือข้อจำกัดน้อยลงและมีประสิทธิภาพมากขึ้น หรือปรับขยายให้เทคนิคการออกแบบนี้สามารถใช้งานครอบคลุมระบบที่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนชนิดไม่สอดคล้องเงื่อนไขเข้าคู่ (unmatched uncertainties) ได้ เป็นต้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] D.H. ELLER, J.K.AGGARWAL and H.T.BANKS, "Optimal control of linear time-delay systems", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-14, No. 6, 1969, pp 678-687.
- [2] D.W ROSS, "Controller design for time lag systems via a quadratic criterion", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-16, No. 6, 1971, pp 664-672.
- [3] M. BARSZCZ and A.W.OLBROT, "Stability for a linear differential-difference System", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-24, No. 2, 1979, pp 368-369.
- [4] M. IKEDA and T.ASHIDA, "Stabilization of linear systems with time-varying delay", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-24, No. 2, 1979, pp 369-370.
- [5] Y.A. FIAGBEDZI and A.E. PEARSON, "Feedback stabilization of state delayed systems via a reducing transformation", *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, VOL 1, December 1985, pp 128-129.
- [6] Y.A. FIAGBEDZI and A.E. PEARSON, "Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-31, No. 9, September 1986, pp 847-855.
- [7] Y.A. FIAGBEDZI and A.E. PEARSON, "A multistage reduction technique for feedback stabilization distributed time lag systems", *AUTOMATICA*, VOL. 23, No. 3, 1987, pp 311-326.
- [8] Y.A. FIAGBEDZI and A.E. PEARSON, "Output Feedback stabilization of delay systems via generalization of the transformation method", *International Journal of Control*, Vol. 51, No. 4, 1990, pp.801-822.
- [9] E. CHERES, S. GUTMAN and Z.J. PALMOR, "Stabilization of uncertain dynamical systems including state delay", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-34, No. 11, 1989, PP 1199-1203.
- [10] S. PHOOJARUENCHANACHAI and K. FURUTA, "Stability and stabilization of uncertain linear with time-varying state delays", *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Honolulu, 1990, pp 1622-1623.
- [11] S. PHOOJARUENCHANACHAI and K. FURUTA, "Finite dimensional controller design for stabilization of uncertain time-delay systems", *Trans. Soc. Instrum. Contr. Eng.*, VOL. 28, No. 3, 1992, pp 326-333.
- [12] S. PHOOJARUENCHANACHAI and K. FURUTA, "Deterministic control of uncertain state delayed systems", *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Tucson, VOL 3, 1992, pp 2870-2875.
- [13] S. PHOOJARUENCHANACHAI and K. FURUTA, "Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-37, No. 7, July 1992, pp 1022-1026.
- [14] Te-Jen SU and Chuan-Guey HUANG, "Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-37, No. 10, October 1992, pp 1056-1059.
- [15] Eitaku NOBUYAMA, "Robust stabilization of time-delay systems via reduction to delay-free model matching problems", *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, USA, 1992, pp 357-358.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [16] N. LUO and M. de la SEN, "State feedback sliding mode control of a class of uncertain time delay systems", *IEE Proceedings-D*, Vol. 140, No. 4, July 1993, pp 256-274.
- [17] A. SHIMEMURA, K. UCHIDA, E. SHIMEMURA and S. ISHIJIMA, "Robust stabilization of a systems with delay in control", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 39, No. 8, August 1994, pp 1694-1698.
- [18] S.K. NGUANG, "Robust stabilization for a class of time-delay nonlinear systems", *IEE Proceeding on CONTROL THEORY APPLICATIONS*, VOL. 141, No. 5, SEPTEMBER 1994, pp 285-288.
- [19] M.S. MAHMOUD and N.F. AL-MUTHAIRI, "Quadratic stabilization of continuous time systems with state-delay and norm-bounded time-varying uncertainties", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 39, No. 10, October 1994, pp 2135-2139.
- [20] H. WU and K. MIZUKAMI, "Linear and nonlinear stabilizing continuous controllers of uncertain dynamical systems including state delay", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 41, No. 1, January 1996, pp 116-121.
- [21] S.I NICULESCU, J.M. DION and L. DUGARD, "Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 41, No. 5, May 1996, pp 742-744.
- [22] H. TRINH and M. ALDEEN, "Output tracking for linear uncertain time-delay Systems", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 143, No. 6, November 1996, pp 481-488.
- [23] K. UAHCHINKUL, Y. PREMPRANEERACH and S. PHOOJARUENCHA-NACHAI, "Stabilization of Uncertain Time-delay System", Proceeding of the RESTECS'96, Faculty of Engineering, KMITL, Bangkok, Thailand, 1996, pp E-33-35.
- [24] กมล เอื้อชินกุล, ร.ศ. โยธิน เปรมปราณีรัชต์ และสุธี ผู้เจริญชนะชัย, "การสร้างเสถียรภาพของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา", *การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 19 เล่มที่ 1 พ.ศ. 2539* หน้า CT42-CT46
- [25] L.M. FRIDMAN, E.I. SHUSTIN and E.M. FRIDMAN, "Steady modes and sliding modes in the relay control systems with time delay", *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996, pp 4601-4605.
- [26] S. OUCHERIAH, "Global stabilization of a class of linear continuous time-delay systems with saturating controls", *IEEE Transaction on CIRCUIT AND SYSTEMS-I: Fundamental theory and applications*, VOL 43, No. 12, December 1996, pp 1012-1015.
- [27] Y.-J. SUN, J.-G. HSIEH and H.-C. YANG, "On the stability of uncertain systems with multiple time-varying delay", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 42, No. 1, January 1997, pp 101-105.
- [28] X. LI and C.E. De SOUZA, "Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay", *AUTOMATICA*, VOL. 33, No. 9, 1997, pp 1657-1662.
- [29] R. EL-KHAZALI, "Variable structure robust control of uncertain time-delay systems", *AUTOMATICA*, VOL. 34, No. 3, 1998, pp 327-332.
- [30] S. PHOOJARUENCHANACHAI, K. UAHCHINKUL and Y. PREMPRANEE-RACH, "Robust stabilization of state delayed system", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 145, No. 1, 1998, pp 87-91.

- [31] Y.-Y. CAO, Y.-X. SUN and J. LAM, "Delay-dependent robust H-infinity control for uncertain systems with time-varying delays", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 145, No. 3, 1998, pp 338-344.
- [32] M.-S. YANG, P.-L. LIU and H.-C. LU, "Output feedback stabilization of uncertain dynamic systems with multiple state delays via sliding mode control strategy", *Proceeding of ISIE'99*, Bled, Slovenia, 1999, pp 1147-1152.
- [33] S. PHOOJARUENCHANACHAI, K. UAHCHINKUL, J. NGAMWIWIT and Y. PREMPRANEERACH, "Robust stabilization of uncertain linear system with distributed state delay", *IEICE Trans. - Fundamental*, Vol. E82A, No. 9, 1999, pp 1911-1918.
- [34] K. UAHCHINKUL, J. NGAMWIWIT and S. PHOOJARUENCHANACHAI, "Robust stabilization of uncertain delayed systems: application to model-following systems", *Proceeding of SICE 2000*, Japan, 2000.
- [35] K. UAHCHINKUL, J. NGAMWIWIT and S. PHOOJARUENCHANACHAI, "Sliding mode robust control of uncertain delay systems: Generalize transformation approach", *Proceeding of the KACC 2000*, Korea, 2000.
- [36] J.-X XU and W.-J. CAO, "Synthesized sliding mode and time-delay control for a class of matched and unmatched uncertain systems", *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000, pp 2609-2614.
- [37] M. JANKOVIC, "Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 46, No. 7, July 2001, pp 1048-1060.
- [38] X. LI and S. YURKOVICH, "Sliding Mode Control of Delayed Systems With Application to Engine Idle Speed Control", *IEEE Transaction on CONTROL SYSTEM TECHNOLOGY*, VOL 9, No. 6, November 2001, pp 802-810.
- [39] K. UAHCHINKUL, J. NGAMWIWIT and S. PHOOJARUENCHANACHAI, "Global Stabilization of uncertain time-delay systems", *Proceeding of the ISCIT 2001*, Thailand, 2001, pp 709-712.
- [40] S. XU, P.V. DOOREN, R. STEFAN and J. LAM, "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 47, No. 7, July 2002, pp 1122-1128.
- [41] กมล เอื้อชินกุล, "การสร้างเสถียรภาพของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา", วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2541.
- [42] S. GUTMAN, "Uncertain dynamical systems A Lyapunov min-max approach", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-24, No. 6, 1979, pp 437-443.
- [43] S. GUTMAN, "Properties of min-max controllers in uncertain dynamical system", *SIAM J Control and Optimization*, VOL. 20, 1982, pp 850-861.
- [44] G. SONG and R. MUKHERJEE, "A comparative study of conventional nonsmooth time-invariant and smooth time-varying robust compensators", *IEEE Transaction on CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, VOL 6, No. 4, July 1998, pp 571-576.
- [45] A.Z. MANITIUS and A.W. OLBROT, "Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 24, No. 4, August 1979, pp 541-553.
- [46] Z. QU, "Global Stabilization of Nonlinear Systems with a Class of Unmatched Uncertainties", *Systems & Control letters*, Vol.18, 1992, pp.301-307.

- [47] I.S. SOKOLNIKOFF and R.M. REDHEFFER, **Mathematics of Physics and Modern Engineering**, McGraw-Hill, 1966.
- [48] T. Kailath, **Linear Systems**, Pentice-Hall, 1980.
- [49] H.Górecki, S.Fuksa, P.Grabowski and A.Korytowski, **Analysis and Synthesis of Time Delay Systems**, John Willey & Sons, 1989
- [50] N.E.LEONARD and W.S.LEVINE, **Using MATLAB to Analyze and Design Control Systems**, Benjamin/Cummings, 1992.
- [51] P.C.PARKS and V.HAHN, **Stability Theory**, Prentice Hall, 1993.
- [52] Zoran Gajić and Muhammad Tahir Javed Qureshi, **Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control**, Academic Press, 1995
- [53] S.TØFFNER-CLAUSEN, **System Identification and Robust Control : A case study approach**, Springer-Verlag, 1996.
- [54] วิพันธ์ ปรีชาพานิช, “พีชคณิตเชิงเส้นประยุกต์และสมการสเททสเปซ”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, กรุงเทพมหานคร, พ.ศ. 2533
- [55] วิพันธ์ ปรีชาพานิช, “การวิเคราะห์ระบบแนวใหม่”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, กรุงเทพมหานคร, พ.ศ. 2533
- [56] “ศัพท์เทคนิควิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร”, สมาคมวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย, กันยายน 2541





ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก.

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 2.1

กำหนดให้รูปทั่วไป (Stieltjes Integral) ของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแน่นอนอน (S_d) นิยามโดยสมการ

$$(S_d): \quad \dot{x}(t) = \int_r^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + B[u(t) + v(t)] \quad (ก.1)$$

และกำหนดให้การแปลงเชิงเส้นทั่วไปนิยามโดย

$$z(t) = Qx(t) + \int_r^0 \int_{+\theta}^t e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau \quad (ก.2)$$

โดยที่สมการแมททริกซ์คุณลักษณะทางซ้าย ตามนิยาม 2.4 คือ

$$JQ = \int_r^0 e^{J\theta} Q d\alpha(\theta). \quad (ก.3)$$

เราสามารถหาอนุพันธ์ของสมการ (ก.2) ได้เป็น

$$\dot{z}(t) = Q\dot{x}(t) + \frac{d}{dt} \int_r^0 \int_{+\theta}^t e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau$$

และเราอาศัยสูตรของลีบนิซ (*Leibniz's formula*) ช่วยในการหาอนุพันธ์ของอินทิกรัลจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_r^0 \int_{+\theta}^t e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau &= \int_r^0 e^{J\theta} Q d\alpha(\theta)x(t) - Q \int_r^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) \\ &\quad + J \int_r^0 \int_{+\theta}^t e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (ก.4)$$

แทนค่าจากสมการ (ก.1) และ (ก.4) ลงไปจะได้

$$\dot{z}(t) = Q \left[\int_r^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + B[u(t) + v(t)] \right] + \int_r^0 e^{J\theta} Q d\alpha(\theta)x(t)$$

$$\begin{aligned}
& -Q \int_r^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + J \int_r^0 \int_{+\theta}^t e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau \\
& = \int_r^0 e^{J\theta} Q d\alpha(\theta)x(t) + J \int_r^0 \int_{+\theta}^t e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau \\
& + QB[u(t) + v(t)]
\end{aligned}$$

และเมื่อแทนค่าจากสมการ (ก.2) และ (ก.3) ลงไปจะได้สมการระบบที่ไม่มีตัวห้วงเวลาเป็น

$$(S_o): \quad \dot{z}(t) = Jz(t) + B_Q[u(t) + v(t)] \quad (ก.4)$$

เมื่อ $B_Q = QB$

ซึ่งผลที่ได้จากการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรของลีบนิชเข้าช่วย แสดงให้เห็นได้ว่าการแปลงเชิงเส้นที่กำหนดโดยสมการ (ก.2) และนิยามของสมการเมทริกซ์คุณลักษณะทางซ้าย (ก.3) สามารถใช้แปลงลดรูปสมการ (ก.1) ซึ่งเป็นสมการระบบที่มีตัวห้วงเวลาให้อยู่ในรูปของระบบเสมือนที่ไม่มีตัวห้วงเวลาตามที่นิยามโดยสมการ (ก.4) ได้ □

ภาคผนวก ข.

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 2.2

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2 นี้จะใช้วิธีทดสอบค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ [48] พิสูจน์ย้อนเพื่อแสดงว่าทฤษฎีบท 2.2 นั้นเป็นเท็จ โดยการตั้งสมมติฐานที่เป็นนิเสธกับทฤษฎีบทนี้ขึ้นมาแล้ว พิสูจน์ว่ามันเป็นจริงได้หรือไม่ หากเป็นจริงได้ก็แสดงว่าทฤษฎีบทนี้ไม่ถูกต้อง หากเป็นเท็จก็แสดงว่าทฤษฎีบทนี้เป็นจริง

สมมติฐาน ข.1: (J, B_Q) เป็นคู่เมทริกซ์ที่ไม่สามารถควบคุมได้อย่างบริบูรณ์

คู่เมทริกซ์ (J, B_Q) เป็นคู่เมทริกซ์ที่ไม่สามารถควบคุมได้อย่างบริบูรณ์ (non-completely controllable) และจะมีค่าเวกเตอร์เฉพาะทางซ้าย $v_Q \in R^n$ ที่ไม่เป็นศูนย์ซึ่งทำให้ $v_Q(sI - J) = 0$ และ $v_Q B_Q = 0$ ได้ สำหรับบางค่าของ $s_l \in C_{-v_0}^+$

พิสูจน์

กำหนดให้เวกเตอร์เฉพาะทางซ้าย

$$v_Q = [\alpha_1, \beta_1 \mid \alpha_2, \beta_2 \mid \dots \mid \alpha_{n_c}, \beta_{n_c} \mid \alpha_{1+2n_c}, \dots, \alpha_{n_p}] \in R^{n_p} \text{ โดยที่ } \alpha_i, \beta_i \in R$$

กรณีที่ 1

ในกรณีที่ราก s_l ไม่ได้เป็นสมาชิกในเมทริกซ์จอร์แดน J จะทำให้ $v_Q = 0$ ได้และจะแย้งกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ v_Q เป็นเวกเตอร์เฉพาะทางซ้ายของ J และต้องไม่เป็นศูนย์

กรณีที่ 2

ในกรณีที่ราก s_l เป็นสมาชิกในเมทริกซ์จอร์แดน J หรือเป็นสมาชิกใน Λ_u^+ หรือ Λ_u^- หรือ Λ_r^- เลือกพิจารณาให้ $s_l \in \Lambda_u^+$ และสามารถระบุได้โดยเมทริกซ์สมมาตร D_l เมื่อ $1 \leq l \leq n_c$ และจากเงื่อนไขที่ $s_l \notin D_k$ เมื่อ $k \neq l$ จะทำให้ได้

$$v_Q = [0 \ 0 \ \dots \ \alpha_l \ \beta_l \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

โดยที่ (α_l, β_l) คือเวกเตอร์เฉพาะของ D_l ซึ่งจะได้ว่า $\beta_l = j\alpha_l$

แทนค่าเวกเตอร์เจาะจงทางซ้ายที่ได้ลงในสมการที่กำหนดในสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 0 &= v_Q \int_{-r}^0 e^{J\theta} Q d\beta(\theta) \\
 &= \int_{-r}^0 \alpha_1 [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ j \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} e^{(D_1\theta)} \\ e^{(D_2\theta)} \\ \vdots \\ e^{(D_{n_c}\theta)} \\ e^{(D_{1+n_c}\theta)} \end{bmatrix} Q d\beta(\theta) \\
 &= \alpha_1 \int_{-r}^0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & e^{(s_1\theta)} & j e^{(s_1\theta)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{Re} q_1 \\ \operatorname{Im} q_1 \\ \operatorname{Re} q_2 \\ \operatorname{Im} q_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} q_{n_c} \\ \operatorname{Im} q_{n_c} \\ \operatorname{Re} q_{1+2n_c} \\ \vdots \\ \operatorname{Re} q_{n_p} \end{bmatrix} d\beta(\theta) \\
 &= \alpha_1 \bar{q}_1 \int_{-r}^0 e^{(s_1\theta)} d\beta(\theta)
 \end{aligned}$$

โดยที่เครื่องหมาย ขีดบน หมายถึงค่าสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน และเนื่องจาก α_1 เป็นจำนวนจริง จะทำให้ได้ว่า

$$\alpha_1 q_1 \int_{-r}^0 e^{(s_1\theta)} d\beta(\theta) = 0 \quad (\text{ข.1})$$

และเนื่อง q_1 คือเวกเตอร์เจาะจงทางซ้ายของรากของระบบที่มีตัวห่วยเวลา s_1 ซึ่งจะทำให้ได้

$$\alpha_1 q_1 \Delta(s_1) = 0 \quad (\text{ข.2})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราสามารถรวมสมการ (ข.1) และสมการ (ข.2) ได้เป็น

$$\alpha_1 q_1 M(s_1) = 0 \quad (\text{ข.3})$$

เมื่อ

$$M(s) = \left[\Delta(s) \int_{-r}^0 e^{(s\theta)} d\beta(\theta) \right]$$

และจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลาสามารถทำให้เสถียรเชิงสเปกตรัมได้สำหรับรากที่ไม่เป็นที่ต้องการทั้งหมด $M(s)$ จะมีแรงค์เท่ากับ n โดยที่ค่าองค์ประกอบหลักภายในไม่เป็นศูนย์ ซึ่งจะทำได้ว่า $\alpha_1 q_1 = 0$ และเนื่องจาก q_1 เป็นค่าเวกเตอร์เงาะจง ดังนั้นสมการ (ข.3) จะเป็นจริงเมื่อ $\alpha_1 = 0$ เท่านั้น และทำให้ v_Q เวกเตอร์เงาะจงทางซ้ายของ J เป็นศูนย์ไปด้วย

ผลที่ได้ข้างต้นนี้เป็นจริงสำหรับ $s_1 \in \Lambda_u^-$ หรือ $s_1 \in \Lambda_u^+$ ด้วยเช่นกัน และแสดงให้เห็นว่าเราไม่สามารถหาค่าเวกเตอร์เงาะจงทางซ้ายของ J (v_Q) ที่ไม่เป็นศูนย์ได้ และได้ว่าคู่เมทริกซ์ (J, B_Q) ไม่เป็นคู่เมทริกซ์ที่ไม่สามารถควบคุมได้อย่างบริบูรณ์ หรือคู่เมทริกซ์ (J, B_Q) เป็นคู่เมทริกซ์ที่สามารถควบคุมได้อย่างบริบูรณ์นั่นเอง \square

ภาคผนวก ค.

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 3.1

เริ่มจากการกำหนดให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_{dd}) อยู่ในรูปสมการสถานะ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + \int_{-r_m}^0 A_{r_m}(\theta)x(t-r_m-\theta)d\theta + B(u(t) + v(t)) \quad (ค.1)$$

และกำหนดให้การแปลงเชิงเส้น T_c นิยามโดย

$$\begin{aligned} z(t) &= (T_c(x))(t) \\ &= x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c\theta} A_h x(t-h-\theta)d\theta \\ &\quad + \int_{-r_m}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c\tau} A_{r_m}(-r_m-\theta)x(t-r_m+\theta)d\tau d\theta \end{aligned} \quad (ค.2)$$

และ

$$A_c = A + e^{-hA_c} A_h + \int_{-r_m}^0 e^{-(r_m+\theta)A_c} A_{r_m}(\theta)d\theta \quad (ค.3)$$

อาศัยสูตรของลีบนิซช่วยในการหาอนุพันธ์ของตัวอินทิกรัลจะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 e^{A_c\theta} A_h x(t-h-\theta)d\theta &= e^{-hA_c} A_h x(t) - A_h x(t-h-\theta) \\ &\quad + A_c \int_{-h}^0 e^{A_c\theta} A_h x(t-h-\theta)d\theta \end{aligned} \quad (ค.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-r_m}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c\tau} A_{r_m}(-r_m-\theta)x(t-r_m+\theta)d\tau d\theta &= \\ \int_{-r_m}^0 \left[e^{-\theta A_c} A_{r_m}(-r_m-\theta)x(t) - A_{r_m}(-r_m-\theta)x(t+\theta) \right. \\ &\quad \left. + A_c \int_{-\theta}^0 e^{A_c\tau} A_{r_m}(-r_m-\theta)x(t-\tau+\theta)d\tau \right] d\theta \end{aligned} \quad (ค.5)$$

ทำการหาอนุพันธ์ของ T_c ได้เป็น

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \dot{x}(t) + \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \\ &+ \frac{d}{dt} \int_{-r_m}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_{r_m}(-r_m-\theta) x(t-r_m+\theta) d\tau d\theta\end{aligned}$$

แทนค่า $\dot{x}(t)$ จากสมการ (ค.4) และอนุพันธ์ในสมการ (ค.5) ลงไป จะได้

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Ax(t) + A_h x(t-h) + \int_{-r_m}^0 A_{r_m}(\theta) x(t-r_m-\theta) d\theta + B(u(t) + v(t)) \\ &+ e^{-hA_c} A_h x(t) - A_h x(t-h-\theta) + A_c \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \\ &+ \int_{-r_m}^0 \left[e^{-\theta A_c} A_{r_m}(-r_m-\theta) x(t) - A_{r_m}(-r_m-\theta) x(t+\theta) + A_c \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_{r_m}(-r_m-\theta) x(t-\tau+\theta) d\tau \right] d\theta \\ &= A_c \left[x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta + \int_{-r_m}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_{r_m}(-r_m-\theta) x(t-r_m+\theta) d\tau d\theta \right] \\ &+ B(u(t) + v(t)) + \left[A + e^{-hA_c} A_h + \int_{-r_m}^0 e^{-(r_m+\theta)A_c} A_{r_m}(\theta) d\theta - A_c \right] x(t)\end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า $z(t)$ ตามสมการ (ค.2) และ A_c ตามสมการ (ค.3) ลงไปจะได้

$$(S_{do}) : \quad \dot{z}(t) = A_c z(t) + B(u(t) + v(t))$$

และจะได้ว่าผลตอบสนองของ $\dot{x}(t)$ ต่อระบบที่มีตัวหน่วงเวลาตามสมการ (3.2) จะคล้อยตามผลตอบสนองของ $\dot{z}(t)$ ต่อระบบเสมือนที่ไม่มีตัวหน่วงเวลาตามสมการ (3.7) และจะทำให้วลีคณิตศาสตร์ต่อไปนี้เป็นจริงด้วย

- 1) (A_c, B) เป็นคู่เมทริกซ์ที่ทำให้เสถียรได้
- 2) ถ้า $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$ แล้ว $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ ด้วย
- 3) ถ้า $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| \leq k_1, \exists k_1 < \infty$ แล้ว $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq k_2, \exists k_2 < \infty$ ด้วย

พิสูจน์ว่า (A_c, B) เป็นคู่เมทริกซ์ที่ทำให้เสถียรได้ โดยใช้วิธีทดสอบค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง [48] เริ่มจากการสมมติว่าคู่เมทริกซ์ (A_c, B) เป็นคู่เมทริกซ์ที่ไม่สามารถควบคุมได้อย่างบริบูรณ์ (non-completely controllable) และจะมีค่าเวกเตอร์เจาะจงทางซ้าย $v' \in R^n$ ที่ไม่เป็นศูนย์ซึ่งทำให้ $v'(sI - A_c) = 0$ และ $v'B = 0$ ได้ สำหรับบางค่าของ $s \in C$

$$\begin{aligned} 0 &= v'[sI - A_c | B] \\ &= v'[sI - A - e^{-hA_c} A_h - \int_{-r_m}^0 e^{-(r_m+\theta)A_c} A_{r_m}(\theta) d\theta | B] \\ &= v'[\Delta(s') | B] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\Delta(s')$ และ B ไม่เป็นศูนย์ ส่งผลให้ $v' = 0$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าคู่เมทริกซ์ (A_c, B) เป็นคู่เมทริกซ์ที่สามารถควบคุมได้อย่างบริบูรณ์

และพิสูจน์ว่าผลตอบสนองของ $\hat{x}(t)$ จะแปรตามผลตอบสนองของ $\hat{z}(t)$ ได้ตามข้อ 2) และ 3) โดยเริ่มจากการแปลงลาปลาซสมการ (ก.2)

$$\begin{aligned} Z(s) &= L\{z(t)\} \\ &= L\left\{x(t) + \int_h^0 e^{A_c\theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta + \int_{-r_m}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c\alpha} A_{r_m}(-r_m-\theta) x(t-\alpha+\theta) d\alpha d\theta\right\} \\ &= X(s) + \int_h^0 e^{A_c\theta} A_h L\{x(t-h-\theta)\} d\theta \\ &\quad + \int_{-r_m}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c\alpha} A_{r_m}(-r_m-\theta) L\{x(t-\alpha+\theta)\} d\alpha d\theta \\ &= X(s) + \int_h^0 e^{A_c\theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta X(s) + \int_h^0 e^{A_c\theta} A_h \int_{(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\theta \\ &\quad + \int_{-r_m}^0 \int_{(r_m+\theta)}^0 e^{A_c\alpha} A_{r_m}(\theta) e^{-s(r_m+\alpha+\theta)} d\alpha d\theta X(s) \\ &\quad + \int_{-r}^0 \int_{(r+\theta)}^0 e^{A_c\alpha} A_r(\theta) \int_{(r+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(r+\alpha+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\alpha d\theta \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= \left[I + \int_h^0 e^{A_c \theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta + \int_{r_m}^0 \int_{(r_m+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_{r_m}(\theta) e^{-s(r_m+\alpha+\theta)} d\alpha d\theta \right] X(s) \\
&\quad + \int_h^0 e^{A_c \theta} A_h \int_{(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\theta \\
&\quad + \int_{r_m}^0 \int_{(r_m+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_{r_m}(\theta) \int_{(r_m+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(r_m+\alpha+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\alpha d\theta \quad (\text{ค.6})
\end{aligned}$$

ถ้ากำหนดให้

$$I + \int_h^0 e^{A_c \theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta + \int_{r_m}^0 \int_{(r_m+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_{r_m}(\theta) e^{-s(r_m+\alpha+\theta)} d\alpha d\theta = (sI - A_c)^{-1} \Delta(s)$$

$$\text{โดยที่ } \Delta(s) = \left[sI - A - e^{-hs} A_h - \int_{r_m}^0 e^{-(r_m+\theta)A_c} A_{r_m}(\theta) d\theta \right]$$

และ

$$\begin{aligned}
\Psi(s) &= \int_h^0 e^{A_c \theta} A_h \int_{(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\theta \\
&\quad + \int_{r_m}^0 \int_{(r_m+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_{r_m}(\theta) \int_{(r_m+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(r_m+\alpha+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\alpha d\theta
\end{aligned}$$

เราสามารถจัดรูปสมการ (ค.6) ได้ใหม่เป็น

$$X(s) = \Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s) - \Delta^{-1}(s)(sI - A_c)\Psi(s) \quad (\text{ค.7})$$

ถ้าเรากำหนดให้ $t = \tau + h + \theta$ จะได้ว่า

$$\int_{(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau = \int_0^{(h+\theta)} e^{-st} x_0(t-h-\theta) dt$$

และกำหนดให้ $x_0(\tau) = 0, \forall \tau \notin [-h, 0]$ คือค่าเริ่มต้นของระบบ แล้วเราจะได้

$$\begin{aligned}
\int_{(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau &= \int_0^\infty e^{-st} x_0(t-h-\theta) dt \\
&= L\{x_0(t-h-\theta)\}.
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรากำหนดให้ $t = \tau + r_m + \alpha + \theta$ จะได้ว่า

$$\int_{-(r_m+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(r_m+\alpha+\theta)} x_0(\tau) d\tau = \int_0^{r_m+\alpha+\theta} e^{-st} x_0(t-r_m-\alpha-\theta) dt$$

และกำหนดให้ $x_0(\tau) = 0, \forall \tau \notin [-r, 0]$ คือค่าเริ่มต้นของระบบ แล้วเราจะได้

$$\begin{aligned} \int_{-(r_m+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(r_m+\alpha+\theta)} x_0(\tau) d\tau &= \int_0^\infty e^{-st} x_0(t-r_m-\alpha-\theta) dt \\ &= L\{x_0(t-r_m-\alpha-\theta)\}. \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า

$$\begin{aligned} \psi(t) &= L^{-1}\{\Psi(s)\} \\ &= L^{-1}\left\{ \int_h^0 e^{A_c\theta} A_h L\{x_0(t-h-\theta)\} d\theta \right\} \\ &\quad + L^{-1}\left\{ \int_{r_m}^0 \int_{(r_m+\theta)}^0 e^{A_c\alpha} A_{r_m}(\theta) L\{x_0(t-r_m-\alpha-\theta)\} d\alpha d\theta \right\} \\ &= \int_h^0 e^{A_c\theta} A_h x_0(t-h-\theta) d\theta \\ &\quad + \int_{r_m}^0 \int_{(r_m+\theta)}^0 e^{A_c\alpha} A_{r_m}(\theta) x_0(t-r_m-\alpha-\theta) d\alpha d\theta \end{aligned}$$

และจากผลที่ได้ ถ้ากำหนดให้ $t_f = \max(h, r_m)$ จะสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

$$\psi(t) = 0, \forall t > t_f \quad (\text{ท.8})$$

ผลจากค่าเริ่มต้น (initial value) จะหมดไปเมื่อเวลาผ่านไปมากกว่าค่าตัวหน่วงเวลา t_f เมื่อและทำให้เราสามารถวิเคราะห์ต่อได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| L^{-1}\{\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s)\}(t) \right\| \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| L^{-1}\{\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)\Psi(s)\}(t) \right\| \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| L^{-1} \left\{ \Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s) \right\} (t) \right\|$$

นั่นคือผลตอบสนองของ $x(t)$ ในระบบหลักที่มีตัวหน่วงเวลา (S_{dd}) จะแปรเปลี่ยนไปในทิศทางเดียวกันกับผลตอบสนองของ $z(t)$ ในระบบเสมือน (S_{do}) □



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ง.

พินิจ ทฤษฎีบท 3.2

กำหนดให้เลียบูโนฟฟังก์ชันเป็น

$$V_z(t) = z^T(t)Pz(t) \quad (ง.1)$$

หาอนุพันธ์ของ V_z จะได้

$$\dot{V}_z = z^T(t) \left[A_c^T P + P A_c \right] z(t) + 2z^T(t)PB(u(t) + v(t))$$

แทนค่าตัวควบคุมจากสมการ (3.9) ลงไป แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= z^T(t) \left[A_c^T P + P A_c - P B B^T P \right] z(t) + 2z^T(t)PB(u_N(t) + v(t)) \\ &= -z^T(t)Q_R z(t) + 2z^T(t)PB(u_N(t) + v(t)) \end{aligned} \quad (ง.2)$$

แทนค่า $v(t)$ สมการ (3.3) ลงในสมการ (ง.2) จะได้

$$\dot{V}_z = -z^T(t)Q_R z(t) + \beta(t) + \alpha(t) \quad (ง.3)$$

โดยที่

$$\beta(t) = 2z^T(t)PB \left\{ H(t)x(t) + H_h(t)x(t-h) + \int_r^0 H_r(t)x(t-r-\theta)d\theta + \omega(t) + E(t)u_L(t) \right\} \quad (ง.4)$$

และ

$$\alpha(t) = 2z^T(t)PB(I + E(t))u_N(t) \quad (ง.5)$$

เมื่อแทนค่า $u_N(t)$ จากสมการ (3.11) ลงไปจะได้

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -2k(t)z^T(t)PB(I + E(t))B^T Pz(t) \\ &= -2k(t)z^T(t)PB \left(I + \frac{1}{2}(E^T(t) + E(t)) \right) B^T Pz(t) \\ &\leq -2k(t)z^T(t)PB\delta B^T Pz(t) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

$$k(t) = \frac{\rho^2(x_t)}{\delta(\rho(x_t)\|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t})} \quad (ง.6)$$

และจะทำให้ได้ว่า

$$\alpha(t) \leq -2k(t)\delta\|B^T Pz(t)\|^2 \quad (ง.7)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\beta(t) \leq 2\|B^T Pz(t)\|\rho(x_t) \quad (ง.8)$$

เมื่อเอาสมการ (ง.7) รวมกับ (ง.8) จะได้

$$\alpha(t) + \beta(t) \leq 2\left(-k(t)\delta\|B^T Pz(t)\|^2 + \rho(x_t)\|B^T Pz(t)\|\right) \quad (ง.9)$$

แทนค่า $k(t)$ จากสมการ (ง.6) ลงไปจะได้

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \beta(t) &\leq 2\left(-\frac{\rho^2(x_t)\|B^T Pz(t)\|^2}{\rho(x_t)\|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t}} + \rho(x_t)\|B^T Pz(t)\|\right) \\ &\leq 2\left(\frac{e^{-\phi t}\rho(x_t)\|B^T Pz(t)\|}{\rho(x_t)\|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t}}\right) \\ &\leq 2e^{-\phi t} \end{aligned}$$

แทนค่ากลับลงไปในสมการ (ง.3) จะได้

$$\begin{aligned} V_z(t) &= -z^T(t)Qz(t) + \alpha(t) + \beta(t) \\ &\leq -z^T(t)Qz(t) + 2e^{-\phi t} \end{aligned}$$

จากข้างต้น สามารถพิสูจน์ได้ว่า $z(t)$ จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลาเป็นอนันต์

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\|^2 = 0 \quad (ง.10)$$

ซึ่งหมายความว่าตัวควบคุมเสถียรภาพที่ออกแบบขึ้นใหม่นี้สามารถควบคุมให้สถานะ $z(t)$ ของระบบเสมือนตามสมการ (3.7) ลู่เข้าสู่ 0 ได้เมื่อเวลาเป็นอนันต์ นั่นหมายความว่าตัวควบคุมเสถียรภาพที่เราออกแบบขึ้นใหม่นี้สามารถควบคุมให้ระบบเสมือน มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้ และจากทฤษฎีบท 3.1 จะเห็นว่าถ้าหากตัวควบคุมที่ออกแบบขึ้นใหม่นี้สามารถควบคุมให้ $z(t)$ ลู่เข้าสู่ 0 ได้แล้ว ตัวควบคุมเดียวกันนี้ก็จะสามารถควบคุมให้สถานะ $x(t)$ ของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาตามสมการ (3.1) ลู่เข้าสู่ 0 ได้ด้วย หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าตัวควบคุมที่เราออกแบบขึ้นใหม่นี้สามารถทำให้ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้เช่นกัน \square



ภาคผนวก จ.

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 3.3

กำหนดให้เลียปูโนฟฟังก์ชันเป็น

$$2V(t) = g^T(t)g(t) \quad (จ.1)$$

ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (จ.1) จะได้

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= g^T(t)\dot{g}(t) \\ &= g^T(t)[CJz(t) + CB_Q(u(t) + v(t))] \\ &= g^T(t)[-Kg(t) + CB_Q(u_N(t) + v(t))] \\ &= -g^T(t)Kg(t) + g^T(t)CB_Q \left\{ u_N(t) + E(t)u_N(t) + \omega(t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-r}^0 dH(\theta)x(t+\theta) + E(t)\left[-(CB_Q)^{-1}Kg(t) + u_{eq}(t)\right] \right\} \\ &\leq -g^T(t)Kg(t) - \frac{\rho^2(x_t)g^T(t)CB_Q\delta B_Q^T C^T g(t)}{\delta\left(\rho(x_t)\|B_Q^T C^T g(t)\| + e^{-\phi t}\right)} \\ &\quad + \rho(x_t)g^T(t)CB_Q \\ &= -g^T(t)Kg(t) + \left(\frac{e^{-\phi t}\rho(x_t)\|B_Q^T C^T g(t)\|}{\rho(x_t)\|B_Q^T C^T g(t)\| + e^{-\phi t}} \right) \end{aligned}$$

$$\dot{V}(t) \leq -g^T(t)Kg(t) + e^{-\phi t}.$$

จากข้างต้น สามารถพิสูจน์ได้ว่า $g(t)$ จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลาเป็นอนันต์

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|g(t)\|^2 = 0$$

และจากสมการ (3.18) จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $z(t)$ จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลาเป็นอนันต์ด้วยเช่นกัน \square

ภาคผนวก ฉ.

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 3.5

กำหนดให้เลียบูโนฟฟังก์ชันเป็น

$$V_{z_e}(t) = z_e^T(t) P z_e(t) \quad (ฉ.1)$$

หาอนุพันธ์ของ V_{z_e} จะได้

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_e} &= z_e^T(t) [J^T P + P J] z_e(t) + 2z_e^T(t) P B_Q (u_e(t) + v_e(t)) \\ &= -z_e^2(t) + 2z_e^T(t) P B_Q (u_e(t) + v_e(t)) \\ &\leq -z_e^2(t) + 2z_e^T(t) P B_Q (u_e(t) + \rho(e_t)) \end{aligned} \quad (ฉ.2)$$

แทนค่า $u_e(t)$ จากสมการ (3.32) ลงในสมการ (ฉ.2) จะได้

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_e} &\leq -z_e^2(t) + \left(\frac{\rho^2(e_t) \|B_Q^T P z_e(t)\|^2}{\rho(e_t) \|B_Q^T P z_e(t)\| + e^{-\phi t}} + \rho(e_t) \|B_Q^T P z_e(t)\| \right) \\ &\leq -z_e^2(t) + 2 \left(\frac{e^{-\phi t} \rho(e_t) \|B_Q^T P z_e(t)\|}{\rho(e_t) \|B_Q^T P z_e(t)\| + e^{-\phi t}} \right) \\ &\leq -z_e^2(t) + 2e^{-\phi t} \end{aligned}$$

จากข้างต้น สามารถพิสูจน์ได้ว่า $z_e(t)$ จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลาเป็นอนันต์

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\|^2 = 0 \quad (ฉ.3)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าความผิดพลาดระหว่างระบบกับโมเดลอ้างอิง $\dot{e}(t)$ ก็ลดลงเป็นศูนย์ด้วยเช่นเดียวกัน \square

ภาคผนวก ข.

ปัญหาและข้อจำกัดในการใช้งาน

การแปลงเชิงเส้นสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (S_{dd}) ข้างต้นนั้นแม้จะช่วยให้สามารถคำนวณหาตัวควบคุมเสถียรภาพแบบคงทนสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาได้สะดวกและง่ายขึ้นเมื่อเทียบกับใช้วิธีการคำนวณค่าโดยตรง แต่ในการนำเอาเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพโดยใช้ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นตามนิยาม 3.1 ไปประยุกต์ใช้งาน ยังคงพบปัญหาและข้อจำกัดในการใช้งานดังนี้

ข้อจำกัด 1 : ทฤษฎีการแปลงเชิงเส้น

การแปลงเชิงเส้นที่เสนอไว้ตามนิยาม 3.1 นั้นมีรูปแบบที่สามารถใช้งานได้กับระบบที่มีโครงสร้างของตัวหน่วงเวลาสอดคล้องตรงกันที่กำหนดไว้แล้วเท่านั้น ไม่สามารถใช้งานกับระบบที่มีโครงสร้างของตัวหน่วงเวลาหรือรูปสมการแตกต่างออกไปได้ เช่น ถ้าระบบที่ต้องการวิเคราะห์มีโครงสร้างของตัวหน่วงเวลาเป็น

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_{h1}x(t-h1) + A_{h2}x(t-h2) + \int_{r_m}^0 A_{r_m}(\theta)x(t-r_m-\theta)d\theta + B(u(t) + v(t)) \quad (ข.1)$$

ก็จะทำให้ไม่สามารถนำการแปลงเชิงเส้นที่นิยามไว้ตามสมการ (3.4) มาใช้ในการออกแบบตัวควบคุมเสถียรภาพให้กับระบบที่มีตัวหน่วงเวลาได้ทันที ต้องมีการปรับปรุงทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นใหม่ให้สอดคล้องกับ โครงสร้างระบบที่เปลี่ยนแปลงไปเสียก่อน โดยในกรณีนี้จะการแปลงเชิงเส้นจะถูกปรับเปลี่ยนมาเป็น

$$\begin{aligned} z(t) &= (T_c(x))(t) \\ &= x(t) + \int_{h1}^0 e^{A_c\theta} A_{h1}x(t-h1-\theta)d\theta + \int_{h1}^0 e^{A_c\theta} A_{h2}x(t-h2-\theta)d\theta \\ &\quad + \int_r^0 \int_{\theta}^0 e^{A_c\tau} A_{r_m}(-r_m-\theta)x(t-r_m+\theta)d\tau d\theta \end{aligned} \quad (ข.2)$$

สังเกตว่าหากระบบมีโครงสร้างที่แตกต่างออกไปอีก เช่น มีตัวหน่วงเวลาแบบจุดมากกว่า 2 จุด หรือ มีตัวหน่วงเวลาแบบกระจายมากกว่า 1 ช่วง ก็จะต้องปรับปรุงทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นใหม่ให้สอดคล้อง

คล่องกับ โครงสร้างระบบที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งทำให้ไม่สะดวกในการนำไปใช้งานกับระบบจริง เพราะต้องมีการปรับเปลี่ยนการแปลงเชิงเส้นทุกครั้งที่น่าไปใช้กับระบบที่มีโครงสร้างแตกต่างกัน

ข้อจำกัด 2 : การคำนวณหาเมทริกซ์ A_c

ในทฤษฎีการแปลงเชิงเส้นที่เสนอไว้ นั้น เมทริกซ์ A_c ในระบบเสมือนจะสามารถคำนวณหาได้จากสมการ

$$A_c = Q^{-1}JQ \quad (\text{ช.3})$$

โดยที่ Q และ J คือ เวกเตอร์เจาะจงและเมทริกซ์จอร์แดนของระบบตามที่ได้นิยามไว้ใน [39] สังเกตว่าหากเกิดกรณีที่ Q ไม่สามารถหาค่าผกผันได้ ก็จะทำให้ไม่สามารถสร้างเมทริกซ์ A_c สำหรับระบบเสมือนขึ้นมาได้และทำให้ไม่สามารถคำนวณค่าให้ตัวควบคุมเสถียรภาพได้ แม้ว่าระบบที่มีตัวหน่วงเวลานั้นจะมีคุณสมบัติทั้งหมดถูกต้องตามเงื่อนไขการใช้งานก็ตาม

ข้อจำกัด 3 : ในกรณีที่จำนวนราก $\sigma_u(S_{dd})$ มีจำนวนไม่เท่ากับมิติหรืออันดับของระบบ ในกรณีที่รากที่ไม่เสถียรของระบบ $\sigma_u(S_{dd})$ มีจำนวนไม่เท่ากับมิติหรืออันดับของระบบแล้ว เมทริกซ์ A_c และระบบเสมือนที่ได้จากการแปลงเชิงเส้นจะมีขนาดใหญ่เท่ากับ pn ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$pn \geq N^+$$

เมื่อกำหนดให้

n คือ ขนาดหรือมิติของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา

p คือ เลขจำนวนเต็มบวก

N^+ คือ จำนวนรากที่ไม่เสถียรซึ่งมีจำนวนจำกัด

ซึ่งเมื่อรากที่ไม่เป็นที่ต้องการมีจำนวนน้อยกว่ามิติหรือขนาดของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา ระบบเสมือนที่ได้จะมีขนาดเท่ากับมิติหรืออันดับของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาซึ่งเป็นมิติที่เล็กที่สุดที่ได้จากการแปลงเชิงเส้นนี้ และในกรณีที่รากที่ไม่เป็นที่ต้องการมีจำนวนมากกว่ามิติหรือขนาดของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา ระบบเสมือนที่ได้จะมีขนาดใหญ่โตขึ้นเป็นจำนวนเท่าของมิติหรือขนาด

ของระบบที่มีตัวห้วงเวลา ซึ่งจะเป็นการเพิ่มภาระในการคำนวณหาค่าผลเฉลยให้กับตัวควบคุม
เสถียรภาพ

สามารถดูตัวอย่างเพิ่มเติมได้จาก ตัวอย่างการคำนวณใน [6~7, 36] และบทที่ 4 ใน [39]



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

<u>ชื่อผู้เขียน</u>	นายกมล เอื้อชินกุล	
<u>วันเดือนปีเกิด</u>	วันจันทร์ ที่ ๑๕ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๑๒	
<u>สถานที่เกิด</u>	เขตพระโขนง กรุงเทพมหานคร	
<u>สถานที่ศึกษา</u>		
พ.ศ. ๒๕๒๔	ระดับประถม	โรงเรียนวัดใหม่ช่องลม
พ.ศ. ๒๕๓๐	ระดับมัธยม	โรงเรียนมัธยมสาธิต มศว. ประสานมิตร
พ.ศ. ๒๕๓๕	ระดับปริญญาตรี	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ. ๒๕๔๑	ระดับปริญญาโท	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ผลงานทางวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์

- [1] กมล เอื้อชินกุล, เก่งกิจ คำรักษ์, รศ.ดร.โยธิน เปรมปราณีรัชต์, “ระบบควบคุมแบบปรับตัวเองได้”, การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 16, พ.ศ. 2536
- [2] กมล เอื้อชินกุล, รศ.ดร.โยธิน เปรมปราณีรัชต์, ดร.สุธี ผู้เจริญชนะชัย, “การสร้างเสถียรภาพของระบบที่มีตัวหน่วงเวลา”, การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 19, เล่มที่ 1, พ.ศ. 2539, หน้า CT42-CT46.
- [3] K. UAHCHINKUL, Y. PREMPRANEERACH and S. PHOOJARUENCHANACHAI, “Stabilization of Uncertain Time-delay System”, Proceeding of the RESTECS’96, Faculty of Engineering, KMITL, 1996, pp E-33-35.
- [4] S. PHOOJARUENCHANACHAI, K. UAHCHINKUL and Y. PREMPRANEERACH, “Robust Stabilization of State Delayed System”, IEE Proceedings - Control Theory and Applications, Vol. 145, Issue. 1, 1998
- [5] S. PHOOJARUENCHANACHAI, K. UAHCHINKUL, J. NGAMWIWIT and Y. PREMPRANEERACH, “Robust stabilization of uncertain linear system with distributed state delay”, *IEICE Trans. - Fundamental*, Vol. E82A, No. 9, 1999, pp 1911-1918.
- [6] K. UAHCHINKUL, J. NGAMWIWIT and S. PHOOJARUENCHANACHAI, “Robust stabilization of uncertain delayed systems: application to model-following systems”, *Proceeding of SICE 2000*, Japan, 2000.

- [7] K. UAHCHINKUL, J. NGAMWIWIT and S. PHOOJARUENCHANACHAI, “Sliding mode robust control of uncertain delay systems: Generalize transformation approach”, *Proceeding of the KACC 2000*, Korea, 2000.
- [8] K. UAHCHINKUL, J. NGAMWIWIT and S. PHOOJARUENCHANACHAI, “Global Stabilization of uncertain time-delay systems”, *Proceeding of the ISCIT 2001*, Thailand, 2001, pp 709-712.

ประวัติการทำงาน

- พ.ศ. ๒๕๓๕ เป็นผู้ช่วยวิจัย ที่ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
- พ.ศ. ๒๕๓๗ เป็นผู้ช่วยนักวิจัย ที่หน่วยปฏิบัติการวิจัยและบริการคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้า
ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ
สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ
กระทรวงวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม
- พ.ศ. ๒๕๔๕ เป็นนักวิจัย ศูนย์ทดสอบผลิตภัณฑ์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์
โครงการความร่วมมือระหว่าง
สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ
และสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง



ตัวอย่างผลงานวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Robust stabilisation of a state delayed system

S. Phoojaruenchanachai
K. Uahchinkul
Y. Prempraneerach

Indexing terms: Robust control, Time-delay system, Control system design

Abstract: In the paper, the authors present a method for stabilising uncertain time-delay systems. The systems under consideration are described by linear state delayed equations whose coefficient matrices contain norm-bounded time-varying elements. Using some matching conditions, they can take time-varying elements and re-form the equation into a linear state delayed equation with disturbances. They then apply a linear transformation technique to reduce the uncertain systems to those where nominal systems are delay-free. Consequently, they can derive a suitable controller for the perturbed systems, and will prove that the controller can robustly stabilise the closed-loop systems against perturbation. Finally, a control system design for the two-tank chemical reactor with a delayed repeat cycle will be illustrated to show the applicability of the proposed method.

1 Introduction

It is well known that time delay is frequently a source of instability. On the other hand, it is reasonable to include uncertain parameters and disturbances in practical control systems containing modelling errors, linearisation approximations etc. Therefore, the problem of robust stabilisation of state delayed systems with uncertain parameters has received considerable attention from many researchers, and many solution approaches have been proposed [1-6].

In this paper we consider a class of time-delay systems containing uncertain parameters and additive disturbances [7]. Determination of controller parameters can be divided into two parts. First, the linear transformation proposed by Fiagbedzi and Pearson [2, 8] is used to transform the original problem into an equivalent one which is easier to solve. Next, by using the well-known Lyapunov min-max approach of Gutman

© IEE, 1998

IEE Proceedings online no. 19981584

Paper first received 27th November 1996 and in revised form 11th August 1997

S. Phoojaruenchanachai is with the Computer System Technology Laboratory, National Electronics and computer Technology Center, National Science and Technology Development Agency, 73/1 Rama VI Road, Rajatavi, Bangkok 10400, Thailand

K. Uahchinkul and Y. Prempraneerach are with the Department of Control Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongsong Road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 145, No. 1, January 1998

[9], a suitable stabilising control law is derived in the second part. Finally, an example of product stream control of a chemical reactor is given.

2 Problem formulation

Consider a class of uncertain time-delay systems (S_d) which is defined by the following state equations:

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_h + \Delta A_h(t)]x(t-h) + [B + \Delta B(t)]u(t) + Bw(t) \quad (1)$$

where $x \in R^n$ is the current value of the system state, $u(t) \in R^m$ is control function, $w(t) \in R^l$ is the additive disturbance A, A_h, B are known constant matrices of appropriate dimensions, $\Delta A(t), \Delta A_h(t), \Delta B(t)$ are matrices whose elements are continuous, unknown but bounded functions, $h \in R^+$ is a known constant delay time and let the initial function of the system be specified as $x_0(\eta) \in C_d[-h, 0]; R^n$ where C_d denotes the Banach space of continuous vector-valued functions defined on an interval $[-h, 0]$ taking values in R^n with norm: $\|\varphi\|_d := \sup_{-h \leq \eta \leq 0} \|\varphi(\eta)\|$ where $\varphi \in C_d[-h, 0]; R^n$.

We propose a method of controller design for stabilising an uncertain time-delay system.

3 Assumptions and transformation technique

3.1 Assumptions

Before proposing our controllers, the following assumptions are made throughout.

3.1.1 Assumption 1: The nominal system of (S_d) (i.e. the system (S_d) for which $\Delta A(t) = \Delta A_h(t) = 0, \Delta B(t) = 0, w(t) = 0$) are spectrally stabilisable.

3.1.2 Assumption 2: For all $t \in R^+$, there exist continuous matrix functions $H(t), H_h(t)$, and $E(t)$ of appropriate dimensions such that:

- $\Delta A(t) = BH(t)$
- $\Delta A_h(t) = BH_h(t)$
- $\Delta B(t) = BE(t)$
- $I + \frac{1}{2}(E(t) + E^T(t)) \geq \delta I$ for some scalar $\delta > 0$
- there are scalar $\mu(x_t)$ and $\mu_E(t)$ such that

$$\mu(x_t) \geq \|H(t)x(t) + H_h(t)x(t-h) + w(t)\|$$

and

$$\mu_E(t) \geq \|E(t)\|$$

where x_t is the restriction function of x to the interval $[t-h, t]$ translated to $[-h, 0]$ (i.e. $x_t \in C_d$ and $x(\eta) = x(t+\eta), -h \leq \eta \leq 0$).

Note that, if matching conditions defined in

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Assumption 2 are satisfied, we can rewrite system (S_d) to the form:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + B(u(t) + v(t)) \quad (2)$$

where

$$v(t) = H(t)x(t) + H_h(t)x(t-h) + E(t)u(t) + w(t) \quad (3)$$

3.2 Transformation technique

Consider the linear transformation T_c defined by:

$$\begin{aligned} z(t) &= (T_c(x))(t) \\ &= x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \end{aligned} \quad (4)$$

where $A_c \in R^{n \times n}$ is a matrix yet to be defined.

Proposition 3.1: Let the matrix A_c be defined by:

$$A_c = A + e^{-hA_c} A_h \quad (5)$$

and

$$\sigma_u(S_d) \subset \sigma(A_c) \subset \sigma(S_d) \quad (6)$$

where

$$\sigma(S_d) = \{s \in C; \det(sI - A - e^{-hs} A_h) = 0\}$$

and

$$\sigma_u(S_d) = \{s \in \sigma(S_d); \text{Re}(s) \geq 0\}$$

Then, $\dot{x}(t)$ satisfies eqn. 1 and hence eqn. 2, if and only if $\dot{z}(t)$ satisfies the system of the form (S_0):

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B(u(t) + v(t)) \quad (7)$$

Consequently, by this linear transformation, asymptotic stability of $z(t)$ implies asymptotic stability of $x(t)$. Furthermore, the following properties are true:

- (a) (A_c, B) is a stabilisable pair,
- (b) if $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$, then $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$
- (c) if $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| \leq k_1$, $\exists k_1 < \infty$, then $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq k_2$, $\exists k_2 < \infty$

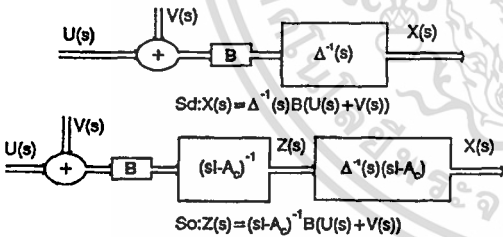


Fig. 1 Block diagram of (S_d) and (S_0)

Proof: By using the Leibnitz's formula [10], it is straightforward to verify that eqn. 2 in conjunction with the transformation eqn. 4 yields eqn. 7; see the Appendix (Section 9.1). Property (a) follows from Theorem 3.2 of [8]. To show the property (b) and (c), are obtained using Laplace transform eqn. 4 after some rearrangement (see also Fig. 1),

$$X(s) = \Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s) + \Delta^{-1}(s)(sI - A_c)\Psi(s) \quad (8)$$

where $\Delta(s) = [sI - A - e^{-hs} A_h]$, and,

$$\Psi(s) = \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} \int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\theta$$

Next by setting $t = \tau + h + \theta$, observe that:

$$\begin{aligned} \int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau &= \int_0^{(h+\theta)} e^{-st} x_0(t-h-\theta) dt \\ \text{Since } x_0(\tau) &= 0, \forall \tau \notin [-h, 0], \text{ we have:} \\ \int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau &= \int_0^\infty e^{-st} x_0(t-h-\theta) dt \\ &= L\{x_0(t-h-\theta)\} \end{aligned}$$

This implies that:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= L^{-1}\{\Psi(s)\} \\ &= L^{-1}\left\{\int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h L\{x_0(t-h-\theta)\} d\theta\right\} \\ &= \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x_0(t-h-\theta) d\theta \end{aligned}$$

and hence,

$$\psi(t) = 0, \quad \forall t > h$$

Note here that eqn. 6 implies that all eigenvalues of the transfer function $\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)$ are stable. Consequently, it can be verified that:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left\|L^{-1}\{\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s)\}(t)\right\| \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \left\|L^{-1}\{\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)\Psi(s)\}(t)\right\| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\|L^{-1}\{\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s)\}(t)\right\| \end{aligned}$$

The above analysis implies that $\psi(t)$ does not influence the stability of $x(t)$ and it can be verified that the stability of $z(t)$ implies the asymptotic stability of $x(t)$.

4 Controller design

Theorem 4.1: Suppose there exists a transformation satisfying the hypothesis of proposition 3.1. Then, for given $Q > 0$, there exist a positive definite solution P to the Riccati equation:

$$A_c^T P + P A_c - P B B^T P + Q = 0 \quad (9)$$

Furthermore, a stabilising control law is given by:

$$u(t) = u_L(t) + u_N(t) \quad (10)$$

where

$$u_L(t) = -\frac{1}{2} B^T P z(t) \quad (11)$$

and

$$u_N(t) = -\frac{\rho^2(x_t) B^T P z(t)}{\delta(\rho(x_t)) \|B^T P z(t)\| + e^{-\phi t}} \quad (12)$$

where the nonlinear gain:

$$\rho(x_t) = \mu_E \|u_L(t)\| + \mu(x_t) \quad (13)$$

and $\phi \in R^+$ and δ is the positive scalar defined in Assumption 3.1.2 (d).

Proof:

First, we take the positive definite function:

$$V_z(t) = z^T(t) P z(t) \quad (14)$$

as the Lyapunov function candidate for the system (eqn. 7) with control (eqn. 10). Applying with the Riccati equation, the following is obtained for the derivative of V_z :

$$\dot{V}_z = -z^T(t) [A_c^T P + P A_c] z(t) + 2z^T(t) P B (u(t) + v(t))$$

By using the Control law (eqn. 10), it can be verified that:

$$\dot{V}_z(t) \leq -z^T(t)Qz(t) + 2e^{-\phi t}$$

then we have

$$\lambda_{\min}(P)\|z(t)\|^2 \leq V_z(t) \leq \lambda_{\max}(P)\|z(t)\|^2$$

and

$$\dot{V}_z(t) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|z(t)\|^2 + 2e^{-\phi t}$$

Next, observe that:

$$\dot{V}_z(t) \leq -\lambda V_z(t) + 2e^{-\phi t}$$

where

$$\lambda = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$$

Now, let

$$s(t) := \dot{V}_z(t) + \lambda V_z(t) - 2e^{-\phi t}$$

then we have

$$s(t) \leq 0$$

and

$$\dot{V}_z(t) = s(t) - \lambda V_z(t) + 2e^{-\phi t}$$

So it can be verified that:

$$\begin{aligned} \dot{V}_z(t) &= V_z(0)e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda t} [s(t) + 2e^{-\phi t}] dt \\ &\leq V_z(0)e^{-\lambda t} + 2e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda t} e^{-\phi t} dt \\ &= V_z(0)e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \left[\frac{e^{t(\lambda-\phi)} - 1}{(\lambda-\phi)} \right] \end{aligned}$$

Consequently,

$$\|z(t)\|^2 \leq \frac{V_z(0)e^{-\lambda t}}{\lambda_{\min}(P)} + \frac{2e^{-\lambda t}}{\lambda_{\min}(P)} \left[\frac{e^{t(\lambda-\phi)} - 1}{(\lambda-\phi)} \right]$$

Since the stability of $z(t)$ implies the stability of $x(t)$ as shown in proposition 3.1, we can now conclude that closed-loop system is asymptotically stable.

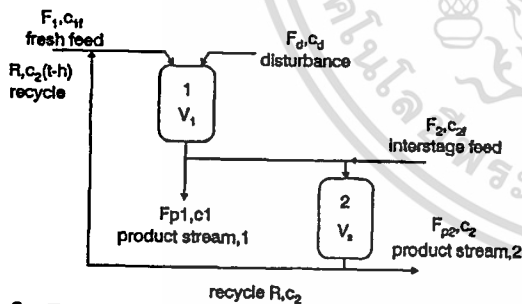


Fig.2 Two stage chemical reactor train with delay recycle

5 Illustrative example

Now we show how to control the two-stage chemical reactor with a delayed recycle stream, shown in Fig. 2. A reactor recycle not only increases the overall conversion but also reduces the cost of a reaction and therefore, it is very popular in industry. To recycle, the input to be recycled must be separated, from the yields, then travel through pipes after separation. This total time of recycle introduced delays in the state.

Consider the irreversible reaction $A \rightarrow B$ with negligible heat effect which is carried out in the two-stage

reactor system. Reactor temperature is maintained constant so that only the composition of product streams from the two reactors c_1, c_2 needs to be controlled. The manipulated variables are the feed compositions to the two reactors, c_{1f}, c_{2f} and the process disturbance is an extra feed stream, F_d whose composition c_d varies because it comes from another processing unit. The flow rates to the reactor system are fixed and only the compositions vary. Suppose, at the input, that the fresh feed of pure A is to be mixed with the recycle stream of unreacted A with recycle flow rate R . Let t be the instant of time. Then the material balance equations for the reactor system are:

$$\begin{aligned} V_1 \dot{c}_1 &= F_1 c_{1f}(t) + R c_2(t-h) + F_d c_d(t) \\ &\quad - (F_1 + R + F_d) c_1(t) - V_1 (k_1 + \delta k_1(t)) c_1(t) \end{aligned} \quad (16)$$

and

$$\begin{aligned} V_2 \dot{c}_2 &= (F_1 + R + F_d - F_{p1}) c_1(t) + F_2 c_{2f}(t) \\ &\quad - (F_{p2} + R) c_2(t) - V_2 (k_2 + \delta k_2(t)) c_2(t) \end{aligned} \quad (17)$$

where the second product stream, F_{p2} , is given by:

$$F_{p2} = F_1 + F_d - F_{p1} + F_2$$

Note that the time-varying parameters $\delta k_1(t)$ and $\delta k_2(t)$ represent uncertainties of the system. In practice, exact values of both of parameters are unknown. Nevertheless, it is reasonable to assume that their upper bound values are known; i.e. the information δ_1 and δ_2 such that:

$$\delta_1 = \max_t \|\delta k_1(t)\|$$

and

$$\delta_2 = \max_t \|\delta k_2(t)\|$$

respectively, are available. For any given set point (c_{1s}, c_{2s}), our objective is to find a state feedback controller that makes c_1 and c_2 converge to c_{1s}, c_{2s} , respectively. To achieve this, we define the variables:

$$\theta_1 = \frac{V_1}{F_1 + R + F_d}, \quad \theta_2 = \frac{V_2}{F_{p2} + R}$$

$$u_1 = c_{1f} - c_{1fs}, \quad u_2 = c_{2f} - c_{2fs}$$

$$x_1 = c_1 - c_{1s}, \quad x_2 = c_2 - c_{2s}, \quad d = c_d - c_{ds}$$

where c_{ds} is a constant nominal value of the disturbance c_d , and c_{1fs}, c_{2fs} can be obtained from:

$$c_{1fs} = -\frac{R c_{2s} + F_d c_{ds} - (F_1 + R + F_d) c_{1s} - V_1 k_1 c_{1s}}{F_1}$$

$$c_{2fs} = -\frac{(F_1 + R + F_d - F_{p1}) c_{1s} - (F_{p2} + R) c_{2s} - V_2 k_2 + 2 c_{2s}}{F_2}$$

Consequently, the material balance eqns. 15 and 16 can be described by:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\left(\frac{1}{\theta_1} + k_1 + \delta k_1(t) \right) x_1(t) \\ &\quad + \frac{R}{V_1} x_2(t-h) + \frac{F_1}{V_1} u_1(t) + \frac{F_d}{V_1} d(t) + \delta k_1(t) c_{1s} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -\left(\frac{1}{\theta_2} + k_2 + \delta k_2(t) \right) x_2(t) \\ &\quad + \frac{F_{p2} - F_2 + R}{V_2} x_1(t) + \frac{F_2}{V_2} u_2(t) + \delta k_2(t) c_{2s} \end{aligned} \quad (19)$$

Note that $(c_1(t), c_2(t)) \rightarrow (c_{1s}, c_{2s})$ whenever $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow (0, 0)$; therefore, the objective can be achieved by stabilising the above system described by eqns. 18 and 19. Next, define a state vector:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

It can now be verified that the state space description for eqns. 18 and 19 is of the form (S_d) with:

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\theta_1} + k_1\right) & 0 \\ \frac{F_{p2} - F_2 + R}{V_2} & -\left(\frac{1}{\theta_2} + k_2\right) \end{bmatrix}$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} \delta k_1(t) & 0 \\ 0 & \delta k_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\|\delta k_1(t)\| \leq \delta_1, \quad \|\delta k_2(t)\| \leq \delta_2$$

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R}{V_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_h(t) = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{F_1}{V_1} & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{V_2} \end{bmatrix}, \quad \Delta B(t) = 0$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} \frac{F_d d(t)}{F_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|\delta k_1(t)\| \leq d_{\max}$$

To illustrate the proposed controller design, let us choose:

$$k_1 = k_2 = 1, \quad v_1 = v_2 = 1$$

$$F_1 = 0.4, \quad F_2 = 0.5$$

$$F_{p1} = 0.5, \quad F_{p2} = 0.5$$

$$F_d = 0.1, \quad R = 0.25, \quad h = 1$$

$$\delta_1 = 0.4, \quad \delta_2 = 0.5, \quad \delta_3 = 0.5$$

so that:

$$\theta_1 = 0.75, \quad \theta_2 = 0.5$$

and hence:

$$A = \begin{bmatrix} -1.75 & 0 \\ 0.25 & -1.75 \end{bmatrix}, \quad A_h = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} \frac{\delta k_1(t)}{0.4} & 0 \\ 0 & \frac{\delta k_2(t)}{0.5} \end{bmatrix}, \quad \|H(t)\| \leq 1$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} \frac{d(t)}{4} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|w(t)\| \leq 0.125$$

Note here that the nominal system is stable. It can be verified that $s_1 = -2.72791$ and $s_2 = -1.27667$ are the poles of the nominal system. Based on the procedure given in [8] with $\alpha(A_c) = \{s_1, s_1\}$, the required matrix parameter A_c of the transformation is then determined to be:

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.75 & 1.851497 \\ 0.25 & -2.254575 \end{bmatrix}$$

Next, solve to Lyapunov equation (2.3.12) with $Q = I$ to obtain:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3093344 & 0.165341 \\ 0.165341 & 0.357552 \end{bmatrix}$$

A suitable control law is then given by eqn. 9 with $\delta = 1$, $\phi = 0.5$ and:

$$\rho(x_t) = \sqrt{(x_1(t) + c_{s1})^2 + (x_2(t) + c_{s2})^2} + 0.125$$

Suppose that set point is chosen as:

$$c_{1s} = 0.5, \quad c_{2s} = 1.0$$

Simulations are now presented for the corresponding closed-loop system. In these simulations, the uncertain parameters are taken to be as follows:

$$\delta k_1(t) = 0.4 \sin(2t), \quad \delta k_2(t) = 0.5 \sin(2t)$$

$$d(t) = 0.5 \sin(2t)$$

The initial condition is taken to be $x_0 = [-0.4 \ -1.0]^T$ on $[-1, 0]$. The results of these simulations are shown in Fig. 3.

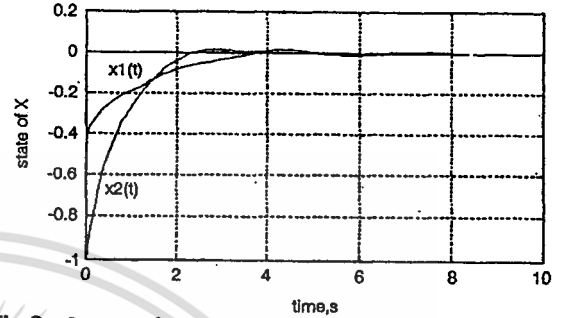


Fig. 3 Response of state x versus time

6 Conclusion

We have presented a computational method to stabilise uncertain systems including known constant time delay. By using the matching conditions, we can change the system model (eqn. 1) into new model (eqn. 2) that is easier for analysis. We then use a linear transformation [2] to reduce the delay system model with A_c , which has been chosen so that $\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)$ is stable. This explains why stability of $z(t)$ can imply stability of $x(t)$.

In comparison with [7], the advantage we presented is the control law (eqn. 10); by changing constant ϵ to $e^{-\epsilon t}$ it converges to zero. It therefore controls the system more efficiently with better performance. Finally, we show how to apply the proposed stabilisation method to set point control of a chemical reactor train with delay recycle.

7 Acknowledgment

This work is partly supported by National Electronics and Computer Technology Center (NECTEC), National Science and Technology Development Agency (NSTDA), Ministry of Science Technology and Environment, Thailand.

8 References

- 1 CHERES, E., GUTMAN, S., and PALMOR, Z.J.: 'Stabilisation of uncertain dynamical systems including state delay', *IEEE Trans.*, 1989, AC-34, (11), pp. 1199-1203
- 2 FIAGBEDZI, Y.A., and PEARSON, A.B.: 'Feedback stabilisation of state delayed systems via a reducing transformation'. Proceedings of the IEEE conference on *Decision control*, 1985, Vol. 1, pp. 128-129
- 3 PHOOJARUENCHANACHAI, S., and FURUTA, K.: 'Finite dimensional controller design for stabilisation of uncertain time-delay systems', *Trans. Soc. Instrum. Contr. Eng.*, 1992, 28, (3), pp. 326-333
- 4 PHOOJARUENCHANACHAI, S., and FURUTA, K.: 'Memoryless stabilisation of uncertain linear systems including time-varying state delays', *IEEE Trans.*, 1992, AC-37, (7), pp. 1022-1026
- 5 NGUANG, S.K.: 'Robust stabilisation for a class of time-delay nonlinear systems', *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 1994, 141, (5), pp. 285-288

- 6 WU, H., and MIZUKAMI, K.: 'Linear and nonlinear stabilising continuous controllers of uncertain dynamical systems including state delay', *IEEE Trans.*, 1996, AC-41, (1), pp. 116-121
- 7 PHOJARUENCHANACHAI, S., and FURUTA, K.: 'Deterministic control of uncertain state delayed systems', Proceedings of IEEE conference on *Decision and control*, Tucson, 1992, Vol. 3, pp. 2870-2875
- 8 FIAGBEDZI, Y.A., and PEARSON, A.E.: 'Feedback stabilisation of linear autonomous time lag systems', *IEEE Trans.*, 1986, AC-31, (9), pp. 847-855
- 9 GUTMAN, S.: 'Uncertain dynamical systems: a Lyapunov min-max approach', *IEEE Trans.*, 1979, AC-24, (6), pp. 437-443
- 10 SOKOLNIKOFF, I.S., and REDHEFFER, R.M.: 'Mathematics of physics and modern engineering' (McGraw-Hill, 1966)

9 Appendix

9.1 Supplementary proof of Proposition 3.1

From the hypothesis of Proposition 3.1, we have:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + B(u(t) + v(t)) \quad (20)$$

with the auxiliary output:

$$\begin{aligned} z(t) &= (T_c(x))(t) \\ &= x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \end{aligned} \quad (21)$$

where the matrix A_c is defined by:

$$A_c = A + e^{-hA_c} A_h \quad (22)$$

By using the Leibnitz's formula [10], it can be verified that:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \\ &= e^{-hA_c} A_h x(t) - A_h x(t-h) \\ &\quad + A_c \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) + \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \\ &= Ax(t) + A_h x(t-h) + b(u(t) + v(t)) \\ &\quad + e^{-hA_c} A_h x(t) - A_h x(t-h) \\ &\quad + A_c \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \\ &= A_c \left[x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta \right] \end{aligned}$$

$$+ B(u(t) - v(t)) + [A + e^{-hA_c} A_h - A_c]x(t)$$

which is equivalent to:

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B(u(t) + v(t))$$

as in eqns. 21 and 22.

Next, to show eqn. 8, Laplace transform eqn. 21 to obtain:

$$\begin{aligned} Z(s) &= L\{z(t)\} \\ &= L\left\{x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta\right\} \\ &= X(s) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h L\{x(t-h-\theta)\} d\theta \end{aligned}$$

Since, for any scalar $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} L\{x(t-\alpha)\} &= \int_0^\infty e^{-st} x(t-\alpha) dt \\ &= e^{-s\alpha} X(s) + \int_{-\alpha}^0 e^{-s(\tau+\alpha)} x_0(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

where $x_0 \in C_d([- \alpha, 0]; R^n)$ denote the initial function. Consequently,

$$\begin{aligned} Z(s) &= X(s) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta X(s) \\ &\quad + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h \int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\theta \\ &= \left[I + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta \right] X(s) \\ &\quad + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h \int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\theta \end{aligned} \quad (23)$$

Note here that:

$$I + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta = (sI - A_c)^{-1} \Delta(s) \quad (24)$$

where $\Delta(s) = [sI - A - e^{-hs} A_h]$. This can be verified easily by direct integration and then using eqn. 22. Finally, direct substitution of eqn. 24 in eqn. 23 yields the required result.

平成元年12月2日第三種郵便物認可 平成11年9月20日印刷 平成11年9月25日発行 第333号(毎月1回25日発行)

ISSN 0916-8508

ICEE TRANSACTIONS

on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences

Special Section on Nonlinear Theory and Its Applications



**VOL.E82-A
NO.9
SEPTEMBER 1999**

A PUBLICATION OF THE ENGINEERING SCIENCES SOCIETY

EIC The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers

Kikai-Shinko-Kaikan Bldg., 5-8, Shibakoen, 3 chome, Minato-ku, TOKYO, 105-0011 JAPAN

PAPER

Robust Stabilization of Uncertain Linear System with Distributed State Delay

Suthee PHOOJARUENCHANACHAI[†], Kamol UAHCHINKUL^{††*}, Jongkol NGAMWIWIT^{††},
and Yothin PREMPRANEERACH^{††}, *Nonmembers*

SUMMARY In this paper, we present the theoretical development to stabilize a class of uncertain time-delay system. The system under consideration is described in state space model containing distributed delay, uncertain parameters and disturbance. The main idea is to transform the system state into an equivalent one, which is easier to analyze its behavior and stability. Then, a computational method of robust controller design is presented in two parts. The first part is based on solving a Riccati equation arising in the optimal control theory. In the second part, the finite dimensional Lyapunov min-max approach is employed to cope with the uncertainties. Finally, we show how the resulting control law ensures asymptotic stability of the overall system.

key words: robust stabilization, time-delay system, control system design

Notation

$R := (-\infty, \infty)$, the real number

$R^+ := [0, \infty)$, the positive real number

$R^n :=$ Any real n -dimensional linear vector space over the real

$R^{n \times m} :=$ A set of $n \times m$ matrices with elements in R

$I :=$ Identical matrix

Let $x \in R^n$ then:

$x^T :=$ Transpose of x

$\|x\| := (x^T x)^{\frac{1}{2}}$ the Euclidean Norm of x

Let $M \in R^{n \times m}$ then:

$M^T :=$ Transpose of M

$\|M\| :=$ Spectrum norm of maximum singular value of M

Let M be $n \times n$ symmetric matrices, then:

$\lambda_{\min}(M) :=$ minimum eigenvalue of M

$\lambda_{\max}(M) :=$ maximum eigenvalue of M

Manuscript received November 16, 1998.

Manuscript revised March 17, 1999.

[†]The author is with Computer and Automation Technology Laboratory, National Electronics and Computer Technology Center, National Science and Technology Development Agency, 73/1 Rama VI Road, Rajatevi, Bangkok 10400, Thailand.

^{††}The authors are with the Department of Control Engineering, Faculty of Engineering and Research Center of Communications and Information Technology, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrong Road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand.

*The author is also with Electrical Electronics and Computer Product Research and Test Center. The Jointventure Project of National Science and Technology Development Agency and King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand.

Let M be any square matrix, then
 $\sigma(M) := \{s = C; \det(sI - M) = 0\}$

1. Introduction

It is well known that uncertain parameters and disturbance in practical control system such as modeling errors, linearization approximations, etc., are always found and disturb the system. On the other hand, the time delay which commonly encountered in various engineering systems is frequently a source of instability. Therefore, the problem of robust stabilization of state delayed system with uncertain parameters have received considerable attention of many researchers, and many solution approaches have been proposed, see, for example [1]–[9] and reference therein. One approach which frequently applied to deterministic robust control is by means of the so-called “second method” of Lyapunov. The design is based on a nominal linearization of given system with time-varying, non-linear uncertain elements of the system and the extraneous disturbances grouped into an unknown but bounded function. Only knowledge of compact sets bounding the system uncertainties is required. Furthermore, if they satisfy certain matching conditions, complete insensitivity to the system variations can be achieved, see, for example [1]–[8] and reference therein. Other often-used approach is based on H_∞ control theory of which resulting control law is linear [9], [10].

In this paper, A class of linear system containing constant known distributed state delay, uncertain parameters and additive disturbances are presented. Determination of controller parameters can be divided into two parts. First, base on the improved Fiagbedzi and Pearson theorem [11]–[13], the linear transformation is utilized to reduce the original problem into an equivalent one which is easier to find the solution. Next, by using the well-known Lyapunov min-max approach of Gutman [14], a suitable stabilizing control law is derived.

This paper is organized as follow. In the next section, we introduce the uncertain system considered here and the state-feedback based transformation technique. In Sect. 3, we derive the required robust control law. A numerical example in Sect. 4 demonstrates the proposed control method. Some final remarks and conclu-

sion appear in Sect. 5.

2. Problem Formulation

Consider a class of uncertain time-delay system (S_d) which is defined by the following state equations

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_h + \Delta A_h(t)]x(t - h) \\ & + \int_{-r}^0 A_r(\theta)x(t - r - \theta)d\theta \\ & + \int_{-r}^0 \Delta A_r(t)x(t - r - \theta)d\theta \\ & + [B + \Delta B(t)]u(t) + B\omega(t), \end{aligned} \tag{1}$$

where $x \in R^n$ is the current value of the system state, $u(t) \in R^m$ is the control function, $\omega(t) \in R^l$ is the additive disturbance A, A_h, B are known constant matrices of appropriate dimensions, $A_r \in L_1([-r, 0]; R^{n \times n})$ is a matrix whose elements are integrable functions on $[-r, 0]$, $\Delta A(t), \Delta A_h(t), \Delta A_r(t), \Delta B(t)$ are matrices whose elements are continuous, unknown but bounded functions, $h, r \in R^+$ is a known constant delay time and the initial function of system be specified as $x_0(\eta) \in C_d([-t_f, 0]; R^n), t_f = \max(h, r)$.

2.1 Assumptions

Before proposing our controllers, the following assumptions are made throughout here.

Assumption 2.1: The nominal system of (S_d); i.e., the system (S_d) which $\Delta A(t) = \Delta A_h(t) = \Delta A_r(t) = 0, \Delta B(t) = 0, \omega(t) = 0$ are spectrally stabilizable.

Assumption 2.2: For all $t \in R^+$ there are exist continuous matrix functions $H(t), H_h(t), H_r(t)$ and $E(t)$ of appropriate dimensions such that

- a) $\Delta A(t) = BH(t),$
- b) $\Delta A_h(t) = BH_h(t),$
- c) $\Delta B(t) = BE(t),$
- d) $I + \frac{1}{2}(E(t) + E^T(t)) \geq \delta I$ for some scalar $\delta > 0,$
- e) $\Delta A_r(t) = BH_r(t)$
- f) there are scalar $\mu(x_t)$ and $\mu_E(t)$ such that

$$\begin{aligned} \mu(x_t) \geq & \left\| H(t)x(t) + H_h(t)x(t - h) \right. \\ & \left. + \int_{-r}^0 H_r(t)x(t - r - \theta)d\theta + \omega(t) \right\|, \end{aligned}$$

and

$$\mu_E(t) \geq \|E(t)\|$$

- g) information δ, μ and μ_E are available.

Note here that physical meaning of matching conditions defined in Assumption 2.2 is all disturbance and uncertainty effects disturb into the system though the same

channel as the control. And if matching conditions are satisfies, we can rewrite system (S_d) to the form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & Ax(t) + A_hx(t - h) \\ & + \int_{-r}^0 A_r(\theta)x(t - r - \theta)d\theta \\ & + B(u(t) + v(t)), \end{aligned} \tag{2}$$

where

$$\begin{aligned} v(t) = & H(t)x(t) + H_h(t)x(t - h) \\ & + \int_{-r}^0 H_r(t)x(t - r - \theta)d\theta \\ & + E(t)u(t) + \omega(t) \end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Transformation Technique

We begin with the linear transformation T_c defined by

$$\begin{aligned} z(t) = & (T_c(x))(t) \\ = & x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c\theta} A_hx(t - h - \theta)d\theta \\ & + \int_{-r}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c\tau} A_r(-r - \theta)x(t - r + \theta)d\tau d\theta \end{aligned} \tag{4}$$

where $A_c \in R^{n \times n}$ is a matrix yet to be defined.

Proposition 2.1: Let the matrix A_c be defined by

$$A_c = A + e^{-hA_c} A_h + \int_{-r}^0 e^{-(r+\theta)A_c} A_r(\theta)d\theta, \tag{5}$$

and

$$\sigma_u(S_d) \subset \sigma(A_c) \subset \sigma(S_d), \tag{6}$$

where

$$\begin{aligned} \sigma(S_d) = & \left\{ s \in C; \det \left(sI - A - e^{-hs} A_h \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{-r}^0 e^{-(r+\theta)s} A_r(\theta)d\theta \right) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

and

$$\sigma_u(S_d) = \{s \in \sigma(S_d); \text{Re}(s) \geq 0\},$$

Then, $\dot{x}(t)$ satisfies (1) and hence (2), if and only if $\dot{z}(t)$ satisfies the system of the form (S_o)

$$\dot{z}(t) = A_cz(t) + B(u(t) + v(t)) \tag{7}$$

Furthermore, the following properties are true:

- (a) (A_c, B) is a stabilizable pair,
- (b) if $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0,$ then $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0,$
- (c) if $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| \leq k_1, \exists k_1 < \infty,$ then $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq k_2, \exists k_2 < \infty,$

Proof: By using the *Leibniz's formula*[15], it is straightforward to verify that (2) in conjunction with the transformation (4) yields (7); see Appendix. Property (a) follows from Theorem 3.2 of [12]. To show the properties (b) and (c), using Laplace transform (4) to obtain, after some rearrangement

$$X(s) = \Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s) + \Delta^{-1}(s)(sI - A_c)\Psi(s), \tag{8}$$

where

$$\Delta(s) = \left[sI - A - e^{-hs}A_h - \int_{-r}^0 e^{-(r+\theta)s}A_r(\theta)d\theta \right],$$

and

$$\Psi(s) = \int_{-h}^0 e^{A_c\theta}A_h \int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)}x_0(\tau)d\tau d\theta + \int_{-r}^0 \int_{-(r+\theta)}^0 e^{A_c\alpha}A_r(\theta) \cdot \int_{-(r+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(\tau+r+\alpha+\theta)}x_0(\tau)d\tau d\alpha d\theta$$

Next by setting $t = \tau + h + \theta$,

$$\int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)}x_0(\tau)d\tau = \int_0^{(h+\theta)} e^{-st}x_0(t-h-\theta)dt.$$

Since $x_0(\tau) = 0, \forall \tau \notin [-t_f, 0]$, we have

$$\int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)}x_0(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-st}x_0(t-h-\theta)dt = L\{x_0(t-h-\theta)\}$$

where the operator $L\{\cdot\}$ is defined as the Laplace Transform.

Furthermore, by setting $t = \tau + r + \alpha + \theta$,

$$\int_{-(r+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(\tau+r+\alpha+\theta)}x_0(\tau)d\tau = \int_0^{(r+\alpha+\theta)} e^{-st}x_0(t-r-\alpha-\theta)dt$$

Since $x_0(\tau) = 0, \forall \tau \notin [-t_f, 0]$, we have

$$\int_{-(r+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(\tau+r+\alpha+\theta)}x_0(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-st}x_0(t-r-\alpha-\theta)dt = L\{x_0(t-r-\alpha-\theta)\}.$$

This implies that

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= L^{-1}\{\Psi(s)\} \\ &= L^{-1}\left\{ \int_{-h}^0 e^{A_c\theta}A_h L\{x_0(t-h-\theta)\}d\theta \right\} \\ &\quad + L^{-1}\left\{ \int_{-r}^0 \int_{-(r+\theta)}^0 e^{A_c\alpha}A_r(\theta) \cdot L\{x_0(t-r-\alpha-\theta)\}d\alpha d\theta \right\} \\ &= \int_{-h}^0 e^{A_c\theta}A_h x_0(t-h-\theta)d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^0 \int_{-(r+\theta)}^0 e^{A_c\alpha}A_r(\theta) \cdot x_0(t-r-\alpha-\theta)d\alpha d\theta \end{aligned}$$

and hence,

$$\Psi(t) = 0, \forall t > t_f = \max(h, r).$$

Note here that (6) implies that all eigenvalues of the transfer function $\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)$ are stable. Consequently, it can be verified that

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|L^{-1}\{\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s)\}(t)\| \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \|L^{-1}\{\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)\Psi(s)\}(t)\| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|L^{-1}\{\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)Z(s)\}(t)\|. \end{aligned}$$

The above analysis implies that $\Psi(t)$ does not influence stability of $x(t)$. Furthermore, asymptotic stability of $z(t)$ implies asymptotic stability of $x(t)$ since $\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)$ is stable. \square

3. Controller Design and Stability Result

In this section we present a suitable controller design, which is based on the Min-Max Approach of Gutman, to stabilize $z(t)$. Next we will proof that the controller can make the system asymptotically stable.

Theorem 3.1: Suppose there exists a transformation satisfying the hypothesis of proposition 2.1. Then, for given $Q > 0$, there exist a positive definite solution P to the Riccati equation

$$A_c^T P + P A_c - P B B^T P + Q = 0 \tag{9}$$

Furthermore, a control law, which render closed-loop systems asymptotically stable, is given by

$$u(t) = u_L(t) + u_N(t) \tag{10}$$

where

$$u_L(t) = -\frac{1}{2}B^T P z(t) \tag{11}$$

and

$$u_N(t) = -\frac{\rho^2(x_t)B^T Pz(t)}{\delta(\rho(x_t)\|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t})} \tag{12}$$

where the nonlinear gain

$$\rho(x_t) = \mu_E \|u_L(t)\| + \mu(x_t), \tag{13}$$

and $\phi \in R^+$ and δ is the positive scalar defined in Assumption 2.2 d).

Proof: First, we take the positive definite function

$$V_z(t) = z^T(t)Pz(t) \tag{14}$$

as Lyapunov function candidate for the system (7) with control (10). Applying with the Riccati equation, the following is obtained of the derivative of V_z

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= -z^T(t) [A_c^T P + P A_c] z(t) \\ &\quad + 2z^T(t)PB(u(t) + v(t)) \end{aligned}$$

Substitute $u_L(t)$ in the above equality to get

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= -z^T(t) [A_c^T P + P A_c - P B B^T P] z(t) \\ &\quad + 2z^T(t)PB(u_N(t) + v(t)) \\ &= -z^T(t)Qz(t) + 2z^T(t)PB(u_N(t) + v(t)) \end{aligned}$$

since $v(t)$ still has same value as defined in (3), we have

$$\dot{V}_z = -z^T(t)Qz(t) + \alpha(t) + \beta(t)$$

where

$$\alpha(t) = 2z^T(t)PB(I + E(t))u_N(t)$$

and

$$\begin{aligned} \beta(t) &= 2z^T(t)PB \left\{ H(t)x(t) + H_h(t)x(t-h) \right. \\ &\quad + \int_{-r}^0 H_r(t)x(t-r-\theta)d\theta + \omega(t) \\ &\quad \left. + E(t)u_L(t) \right\} \end{aligned}$$

Consequently from $u_N(t)$ defined in (12), $\alpha(t)$ becomes

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -2k(t)z^T(t)PB(I + E(t))B^T Pz(t) \\ &= -2k(t)z^T(t)PB \left(I + \frac{1}{2} (E^T(t) + E(t)) \right) \\ &\quad \cdot B^T Pz(t) \\ &\leq -2k(t)z^T(t)PB\delta B^T Pz(t) \end{aligned}$$

where

$$k(t) = \frac{\rho^2(x_t)}{\delta(\rho(x_t)\|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t})} \tag{15}$$

Hence,

$$\alpha(t) \leq -2k(t)\delta \|B^T Pz(t)\|^2 \tag{16}$$

On the other hand,

$$\beta(t) \leq 2 \|B^T Pz(t)\| \rho(x_t) \tag{17}$$

Combining (16) with (17) to get

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \beta(t) &\leq 2 \left(-k(t)\delta \|B^T Pz(t)\|^2 + \rho(x_t)\|B^T Pz(t)\| \right) \end{aligned} \tag{18}$$

(15) and (18) imply that

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \beta(t) &\leq 2 \left(-\frac{\rho^2 \|B^T Pz(t)\|^2}{\rho \|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t}} \right. \\ &\quad \left. + \rho(x_t)\|B^T Pz(t)\| \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{e^{-\phi t} \rho \|B^T Pz(t)\|}{\rho \|B^T Pz(t)\| + e^{-\phi t}} \right) \\ &\leq 2e^{-\phi t} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \dot{V}_z(t) &= -z^T(t)Qz(t) + \alpha(t) + \beta(t) \\ &\leq -z^T(t)Qz(t) + 2e^{-\phi t} \end{aligned}$$

By using [17], it can be verified that closed-loop system (7) with control law (10) is asymptotically stable.

4. Numerical Example and Simulation

Consider the following uncertain system with distributed time delay with its linear part as defined in

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + [A_h + \Delta A_h(t)]x(t-h) \\ &\quad + \int_{-r}^0 A_r(\theta)x(t-r-\theta)d\theta + Bu(t) + \omega(t) \end{aligned} \tag{19}$$

where

$$\begin{aligned} A &= \frac{8e^{-\frac{\pi}{4}} - 8}{65}, \quad A_h = e, \quad A_r(\theta) = \sin(8\theta), \\ B &= 1, \quad |\Delta A_h(t)| \leq 3, \quad |\omega(t)| \leq 0.5, \\ h &= 1, \quad r = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Therefore, it can be verified by using the numerical algorithm proposed in [15] that $\sigma_u = \{1\}$, consequently A_c has chosen to be 1. Next, we choose Q to be 3 then P becomes 3 and the nonlinear gain

$$\rho(x_t) = \mu(x_t) = \|3 \cdot x(t-h) + 0.5\|$$

Then, the resulting control law with $\delta = 1$ is

$$u(t) = -\frac{3}{2} \cdot z(t) - \frac{3 \cdot \rho^2(x_t) \cdot z(t)}{3 \cdot \rho(x_t) \cdot \|z(t)\| + e^{-\phi t}} \tag{20}$$

Using the controller described and let ϕ be 0.15, the response of the system (19) with controller are given

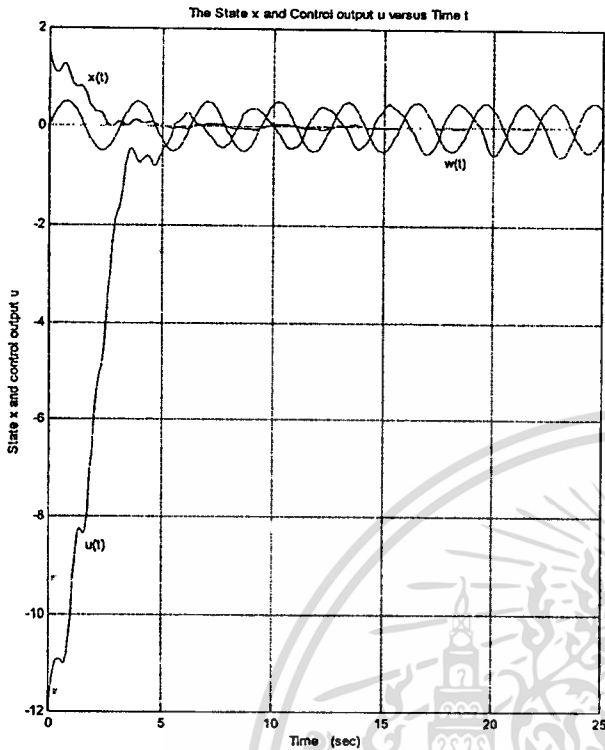


Fig. 1 Simulation result.

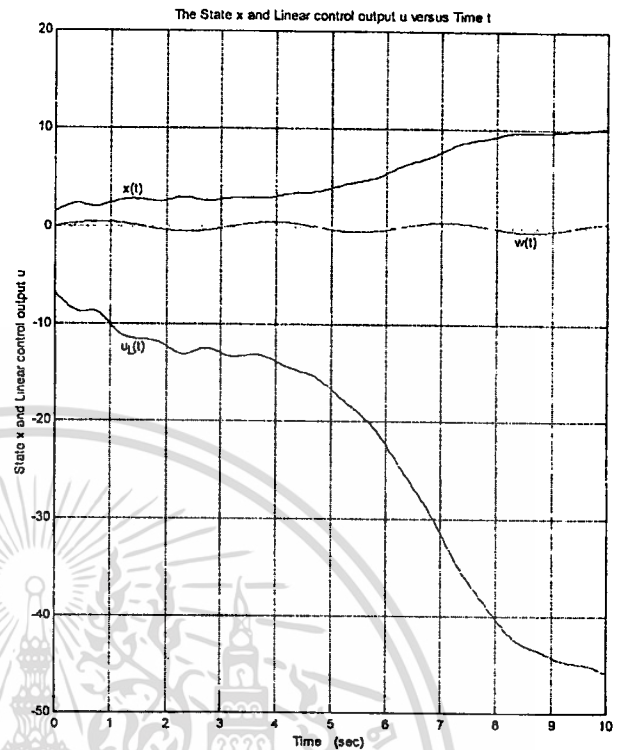


Fig. 2 Simulation result without nonlinear control law.

in the Fig. 1 shown below. Furthermore, Fig. 2 shows the response of system (19) with only linear control law (11). It can be observed that the control law without nonlinear part can not stabilize the system. In the other hand, the nonlinear part is sufficient to control the effect of uncertainties and disturbance for stabilizing the system.

5. Concluding Remarks

We have presented a method to stabilize uncertain system with distributed time delay. By using matching condition defined in Assumption 2.2, we can change system model (1) into new model (7) that easier to be applied with the special linear transformation. The transformation is used to reduce the system state model so that we can obtain a stabilizing condition as shown in Proposition 2.1. In the other word, choosing A_c , such that $\Delta^{-1}(s)(sI - A_c)$ stable, paves the way to feasible design of the robust controller. And it explains why stability of $z(t)$ can imply stability of $x(t)$. As a consequence, we obtain a new design of robustly stabilizing controller for the system.

In General, the problem of determining the roots of systems has been considered by many authors. Base on Manitus method [16], Fiagbedzi and Pearson had proposed the solution for distributed systems in 1987,

see [13] for references.

Finally, we note that the applicability of our approach is not limited to stabilization problem. For instance, it is feasible to extend our result in Sect. 3 to cope with the model-following control of which concept is proposed in [7].

Acknowledgment

The authors gratefully acknowledge for the helpful comment of reviewers especially concerning in Sect. 3.

This work is partly supported by National Science and Technology Development Agency. Ministry of Science Technology and Environment. The Thai Royal Government.

References

- [1] E. Cheres, S. Gutman, and Z.J. Palmor, "Stabilization of uncertain dynamical systems including state delay," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.34, no.11, pp.1199-1203, 1989.
- [2] S. Phoojaruenchanachai and K. Furuta, "Finite dimensional controller design for stabilization of uncertain time-delay systems," *Trans. Soc. Instrum. Contr. Eng.*, vol.28, no.3, pp.326-333, 1992.
- [3] S. Phoojaruenchanachai and K. Furuta, "Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.37, no.7, pp.1022-1026, July 1992.

[4] S. Phoojaruenchanachai and K. Furuta, "Deterministic control of uncertain state delayed systems," Proc. IEEE Conference on Decision and Control, TUSCON, vol.3, pp.2870-2875, 1992.

[5] S.K. Nguang, "Robust stabilization for a class of time-delay nonlinear systems," IEE Proc. Control Theory Applications, vol.141, no.5, pp.285-288, Sept. 1994.

[6] H. Wu and K. Mizukami, "Linear and nonlinear stabilizing continuous controllers of uncertain dynamical systems including state delay," IEEE Trans. Autom. Control, vol.41, no.1, pp.116-121, Jan. 1996.

[7] K. Uahchinkul, Y. Prempraneerach, and S. Phoojaruenchanachai, "Stabilization of Uncertain Time-delay System," Proc. RESTECS'96, Faculty of Engineering, Kmitl, pp.E-33-35, 1996.

[8] S. Phoojaruenchanachai, K. Uahchinkul, and Y. Prempraneerach, "Robust Stabilization of State Delayed System," IEE Proc. Control Theory and Applications, vol.145, Issue.1, 1998.

[9] H. Kokame, H. Kobayashi, and T. Mori, "Robust H_∞ performance for linear delay differential systems with time-varying uncertainties," IEEE Trans. Autom. Control, vol.43, no.2, pp.223-226, Feb. 1998.

[10] A. Kojoma, K. Uchida, E. Shimemura, and S. Ishijima, "Robust stabilization of a system with delays in control," IEEE Trans. Autom. Control, vol.39, pp.1694-1698, 1994.

[11] Y.A. Fiagbedzi and A.E. Pearson, "Feedback stabilization of state delayed systems via a reducing transformation," Proc. IEEE Conf. Decision Contr., vol.1, pp.128-129, Dec. 1985.

[12] Y.A. Fiagbedzi and A.E. Pearson, "Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems," IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-31, no.9, pp.847-855, Sept. 1986.

[13] Y.A. Fiagbedzi and A.E. Pearson, "A multistage reduction technique for feedback stabilization distributed time lag systems," Automatica, vol.23, no.3, pp.311-326, 1987.

[14] S. Gutman, "Uncertain dynamical systems a Lyapunov min max approach," IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-24, no.6, pp.437-443, 1979.

[15] I.S. Sokolnikoff and R.M. Redheffer, Mathematics of Physics and Modern Engineering, McGraw-Hill, 1966.

[16] A. Manitius, H. Tran, G. Payre, and R. Roy, "Computation of eigenvalues associated with functional differential equations," SIAM Journal on Science and Statistics of Computing, vol.8, pp.222-247, 1987.

[17] Z. Qu, "Global stablization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties," Systems & Control letters, vol.18, pp.301-307, 1992.

$$z(t) = (T_c(x))(t) = x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta + \int_{-r}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_r(-r-\theta) x(t-r+\theta) d\tau d\theta \tag{A.2}$$

where the matrix A_c be defined by

$$A_c = A + e^{-hA_c} A_h + \int_{-r}^0 e^{-(r+\theta)A_c} A_r(\theta) d\theta, \tag{A.3}$$

By using the *Leibniz's formula* [12], it can be verified that

$$\frac{d}{dt} \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta = e^{-hA_c} A_h x(t) - A_h x(t-h-\theta) + A_c \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta$$

and

$$\frac{d}{dt} \int_{-r}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_r(-r-\theta) x(t-r+\theta) d\tau d\theta = \int_{-r}^0 \left[e^{-\theta A_c} A_r(-r-\theta) x(t) - A_r(-r-\theta) x(t+\theta) + A_c \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_r(-r-\theta) x(t-\tau+\theta) d\tau \right] d\theta$$

Hence,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) + \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta + \frac{d}{dt} \int_{-r}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_r(-r-\theta) \cdot x(t-r+\theta) d\tau d\theta \\ &= Ax(t) + A_h x(t-h) + \int_{-r}^0 A_r(\theta) x(t-r-\theta) d\theta + B(u(t) + v(t)) + e^{-hA_c} A_h x(t) - A_h x(t-h-\theta) + A_c \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta + \int_{-r}^0 \left[e^{-\theta A_c} A_r(-r-\theta) x(t) - A_r(-r-\theta) x(t+\theta) + A_c \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_r(-r-\theta) x(t-\tau+\theta) d\tau \right] d\theta \\ &= A_c \left[x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t-h-\theta) d\theta + \int_{-r}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c \tau} A_r(-r-\theta) \right. \end{aligned}$$

Appendix: Supplementary Proof of Proposition 2.1

From the hypothesis of Proposition 2.1, we have

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + \int_{-r}^0 A_r(\theta) x(t-r-\theta) d\theta + B(u(t) + v(t)) \tag{A.1}$$

with the auxiliary output

$$\begin{aligned}
 & \cdot x(t - \tau + \theta) d\tau d\theta \Big] \\
 & + B(u(t) + v(t)) + \left[A + e^{-hA_c} A_h \right. \\
 & \left. + \int_{-r}^0 e^{-(r+\theta)A_c} A_r(\theta) d\theta - A_c \right] x(t) \\
 & \cdot \int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\theta \\
 & + \int_{-r}^0 \int_{-(r+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_r(\theta) \\
 & \cdot \int_{-(r+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(r+\alpha+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\alpha d\theta \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

which is equivalent to

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B(u(t) + v(t)),$$

owing to (A.2) and (A.3).

Next, to show (8), Laplace transform (A.2) to obtain

$$\begin{aligned}
 Z(s) &= L\{z(t)\} \\
 &= L\left\{ x(t) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h x(t - h - \theta) d\theta \right. \\
 & \left. + \int_{-r}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c \alpha} A_r(-r - \theta) \right. \\
 & \left. \cdot x(t - \alpha + \theta) d\alpha d\theta \right\} \\
 &= X(s) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h L\{x(t - h - \theta)\} d\theta \\
 & + \int_{-r}^0 \int_{-\theta}^0 e^{A_c \alpha} A_r(-r - \theta) \\
 & \cdot L\{x(t - \alpha + \theta)\} d\alpha d\theta.
 \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
 Z(s) &= X(s) + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta X(s) \\
 & + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h \int_{-(h+\theta)}^0 e^{-s(\tau+h+\theta)} \\
 & \cdot x_0(\tau) d\tau d\theta \\
 & + \int_{-r}^0 \int_{-(r+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_r(\theta) e^{-s(r+\alpha+\theta)} \\
 & \cdot d\alpha d\theta X(s) \\
 & + \int_{-r}^0 \int_{-(r+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_r(\theta) \\
 & \cdot \int_{-(r+\alpha+\theta)}^0 e^{-s(r+\alpha+\theta)} x_0(\tau) d\tau d\alpha d\theta \\
 & = \left[I + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta \right. \\
 & \left. + \int_{-r}^0 \int_{-(r+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_r(\theta) e^{-s(r+\alpha+\theta)} d\alpha d\theta \right] \\
 & \cdot X(s) \\
 & + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h
 \end{aligned}$$

Note here that

$$\begin{aligned}
 I + \int_{-h}^0 e^{A_c \theta} A_h e^{-s(h+\theta)} d\theta \\
 + \int_{-r}^0 \int_{-(r+\theta)}^0 e^{A_c \alpha} A_r(\theta) e^{-s(r+\alpha+\theta)} d\alpha d\theta \\
 = (sI - A_c)^{-1} \Delta(s) \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

where $\Delta(s) = [sI - A - e^{-hs} A_h - \int_{-r}^0 e^{-(r+\theta)A_c} A_r(\theta) d\theta]$, this can be verified easily by direct integration and then using (A.3). Finally, direct substitution (A.5) in (A.4) yields the required result.



Suthee Phoojaruenchanachai graduated from King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL), Bangkok in 1986. With scholarship support from the Japanese government, he received M.Eng. and D.Eng. from Tokyo Institute of Technology in 1990 and 1993 respectively, both in control engineering. Since August 1993 he has held a position of researcher at CTL. His research activities currently focus on information technology development for manufacturing automation and telemedicine. His responsibility is mainly project leading to develop prototypes of several products; e.g., calcium scoring software, medical image converter, and CNC simulator. As an invited lecturer of KMITL, he also conducts courses on stability theory and robust control. He has a broad research background with expertise in such areas as practical applications of modern control theory, development of electromechanical systems, computed tomography and medical informatics. He has authored over 20 publications in these areas.

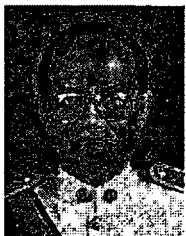


Kamol Uahchinkul was born in Bangkok, in 1969. He received his B.Eng. in Control Engineering and Master degrees in Electrical Engineering from King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL), Thailand in 1992 and 1998, respectively. Since July 1993, he has been with Product Research and Test Center, National Electronics and Computer Technology Center, Thailand, where he is currently an Associate Researcher. He is presently a Ph.D. candidate at the KMITL. His research interests include robust control, optimum control, adaptive control for delayed system.



Jongkol Ngamwiwit received her B.E. degree in electrical engineering from KMITL in 1972 and M.E. and Doctor of Engineering, from Tokai University, Japan in 1977 and 1987, respectively. Her research interests include optimal control. She is a member of the society of Instrument and control Engineering (SICE). And now, she is Assoc. Prof. at Department of Control Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of

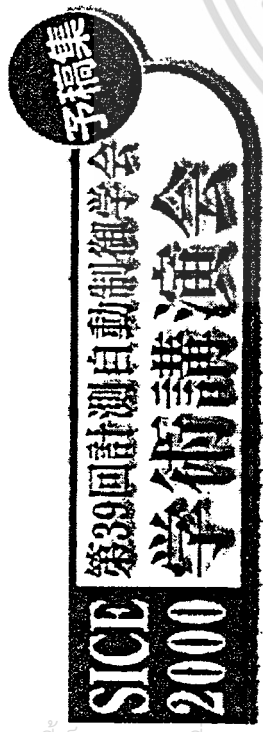
Technology Ladkrabang.



Yothin Prempraneerach received his Bachelor degree in Telecommunication Engineering from KMITL in 1971. He was awarded with the Japan International Cooperation Agency (JICA) scholarship and the Japan Society Promotion of Science (JSPS) scholarship to continue his further education in Japan and received the M.S.E.E. and D.Eng. in Control Engineering from Nihoh University, in 1974 and 1983, respectively. Since 1983, he has

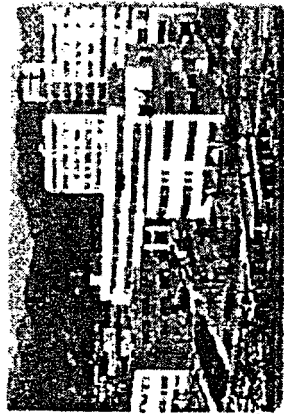
been an Associate Professor at Department of Control Engineering, KMITL. Yothin has been conducting research and development in the field of Control Engineering and received several research funds and awards from JICA and JSPS. Since 1992, he has been helping NECTEC in establishing of the Electromagnetic Compatibility (EMC) Research and Service Laboratory in collaborated with KMITL. He has also been conducting several pioneer research and testing services in the field of EMC. During the establishment of the laboratory, he has been visiting several EMC laboratories in many countries. Until 1997, the EMC Research and Service Laboratory underwent a transition from being one of NECTEC's laboratory to become the Product Research and Test Center (PTEC), he was then invited to be the director of PTEC.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



July 26-28, 2000 Izuka, Japan

九州工業大学情報工学部



- ④ CD-ROM発行にあたり
- ④ Technical Program Schedule & Contents
- ④ Search of Papers in Japanese
- ④ Search of Papers in English
- ④ 使用方法



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Robust Stabilization of Uncertain Delayed Systems: Application to Model-Following Systems

K. Uahchinkul^{1*}, J. Ngamwiwit¹ and S. phoojaruenchanachai²

¹ Department of Control Engineering, Faculty of Engineering and ReCCIT, KMITL, Thailand

² Computer and Automation Technology Laboratory, NECTEC, NSTDA, Thailand

knjongko@kmitl.ac.th

Abstract: In this paper, we present the theoretical development to stabilize a class of uncertain time-delay system and its application to model-followings systems. The system under consideration is described in state space model containing state delay, uncertain parameters and disturbance. The main idea is to reduce the state of system into an equivalent one, by employing generalize transformation, which is easier to analyze its behavior and stability. Then, the min-max approach is employed to find the stabilizing control law. After that, a class of model-following system is introduced for controlling the error between the model and process. With the extended theorem, the suitable control law that guarantees model tracking is derived. Finally, two numerical simulations are illustrated to show the algorithm for applying the proposed theorems and the effectiveness of the designed control law in stabilizing the controlled systems.

Key words: Robust Stabilization, Time-delay Systems, Control Systems Design, Model-Following Systems.

1. Introduction

It is well known that the problem of robust stabilization of state delayed systems with uncertain parameters have received considerable attention of many researchers, and many solution approaches have been proposed, see, for example [1~8] and reference therein. In this paper, a class of linear system containing known state delay, uncertain parameters and additive disturbances are presented in general form. Determination of controller parameters can be divided into two parts. First, base on the improved theorem of Fiagbedzi and Pearson [9], the generalize linear transformation is utilized to reduce the original problem into an equivalent one which is easier to find the solution. Next, by using the well-known Lyapunov min-max approach of Gutman [10], a suitable stabilizing control law is derived. After that, a class of model-following system is introduced for controlling the error between the model and process. With the extended theorem, the suitable control law that guarantees model-tracking is derived.

2. Basic Theorem

In this section, we will present the main idea to design control law for delayed systems, with uncertain parameters and disturbance, via the generalize linear transformation.

Consider a class of uncertain time-delay system (S_d) which is defined by the following equations

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + \int_{-r}^0 d\beta(\theta)x(t+\theta) + [B + \Delta B(t)]u(t) + B\omega(t), \quad (1)$$

where $x(t) \in R^n$ is the current value of the system state, $u(t) \in R^m$ is the control function, $\omega(t) \in R^l$ is the additive disturbance, $\alpha(\cdot) \in L_1([-r, 0]; R^{n \times n})$ is a matrix valued functions of bounded variation on $[-r, 0]$, $\beta(\theta) \in L_1([-r, 0]; R^{n \times n})$ is an integrable matrix whose elements are continuous, unknown but bounded functions on $[-r, 0]$, $\Delta B(t)$ is a matrix whose elements are continuous, unknown but bounded functions, $r \in R^+$ is a max-known constant delay time and the initial function of system be specified as $x_0(\eta) \in C_d([r, 0]; R^n)$. The integrals indicated above are Stieltjes integrals and it is enough to consider one uniform delay, r , since the functions of bounded variation can be extended, without change of variation, to $[-r, 0]$ [9].

Assumptions

Before proposing our controllers, the following assumptions are made throughout here.

Assumption 2.1:

The nominal system of (S_d), i.e., the system (S_d) which $\int_{-r}^0 d\beta(\theta) = 0$, $\Delta B(t) = 0$, $\omega(t) = 0$ is spectrally stabilizable.

* The author is a doctor student and also with Product Research and Test Center, the Join-Venture Project of National Science and Technology Development Agency and King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Thailand.

Assumption 2.2:

The continuous matrix functions $H(\theta)$ and $E(t)$ of appropriate dimensions, for all $t \in R^+$, exist such that

- a) $\beta(\theta) = BH(\theta)$,
- b) $\Delta B(t) = BE(t)$,
- c) $I + \frac{1}{2}(E(t) + E^T(t)) \geq \delta I$ for some scalar $\delta > 0$,
- d) scalar $\mu(x_t)$ and $\mu_E(t)$ exist such that

$$\mu(x_t) \geq \left\| \int_{-r}^0 dH(\theta)x(t+\theta) + \omega(t) \right\|,$$

and

$$\mu_E(t) \geq \|E(t)\|$$

- e) information δ , μ and μ_E are available.

Note that if matching conditions defined in Assumption 2.2 are satisfied, we can rewrite system (S_d) to the form

$$\dot{x}(t) = \int_r^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + B(u(t) + v(t)), \quad (2)$$

where

$$v(t) = \int_r^0 dH(\theta)x(t+\theta) + E(t)u(t) + \omega(t). \quad (3)$$

2.1 Transformation Technique

Let $v_0 \geq 0$ be given for desired the margin of stability. Define $C_{-v_0}^+ = \{s \in C : \text{Re } s \geq -v_0\}$ and denote its complement in C by $C_{-v_0}^-$ so that $C = C_{-v_0}^+ \cup C_{-v_0}^-$.

For the given v_0 , the open-loop unstable spectrum of (S_d) is a set of eigenvalues given by

$$\sigma_u(S_d) = \{s \in C : \text{Re } s \geq -v_0, \det \Delta(s) = 0\} \subset C_{-v_0}^+,$$

where $\Delta(s) = \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) \right]$.

Following [8], the left characteristic matrix equation (l.c.m.e.) is given by

$$JQ = \int_r^0 e^{J\theta} Q d\alpha(\theta). \quad (4)$$

Suppose $\sigma_u(S_d) = \Lambda_u^+ \cup \Lambda_u^- \cup \Lambda_u^r$, where Λ_u^+ denotes a set of cardinality n_c consisting of the complex elements of $\sigma_u(S_d)$ with positive imaginary parts, Λ_u^- denotes the complex conjugate of Λ_u^+ , and Λ_u^r denotes the set of cardinality n_r consisting of the real elements of $\sigma_u(S_d)$ so that $n_p = \#\sigma_u(S_d) = 2n_c + n_r$, where $\#$ denotes cardinality.

For $k=1,2,\dots,n_c$, let $(q_1, q_2, \dots, q_{n_c})$ be the left eigenvectors of (S_d) corresponding to the element of

Λ_u^+ and $(q_{1+2n_c}, q_{2+2n_c}, \dots, q_{n_p})$ be the left eigenvectors corresponding to the element of Λ_u^r , then let

$$Q = \text{row} \begin{bmatrix} \text{Re } q_1 & \text{Im } q_1 & \text{Re } q_2 & \text{Im } q_2 & \dots & \text{Re } q_{n_c} \\ \text{Im } q_{n_c} & q_{1+2n_c} & q_{2+2n_c} & \dots & q_{n_p} \end{bmatrix} \quad (5)$$

where $Q \in R^{n_p \times n}$.

To obtain the Jordan matrix identifiable with $\sigma_u(S_d)$, let

$$D_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & -\varpi_k \\ \varpi_k & \sigma_k \end{pmatrix}$$

denote the Jordan sub-block corresponding to

$$s_k = \sigma_k + j\varpi_k \in \Lambda_u^+, k=1,2,\dots,n_c,$$

and $D_{1+n_c} = \text{diag}\{s_{1+2n_c}, s_{2+2n_c}, \dots, s_{n_p}\}$ denote the diagonal matrix corresponding to Λ_u^r . Then the Jordan matrix becomes

$$J = \text{diag}\{D_1, D_2, \dots, D_{n_c}, D_{1+n_c}\} \quad (6)$$

where $J \in R^{n_p \times n_p}$.

Proposition 2.1.1:

Let Q be as defined by (5). Under linear transformation

$$z(t) = Qx(t) + \int_r^0 \int_{+\theta}^{t+\theta-r} e^{J(t+\theta-r)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau \quad (7)$$

(2) is reduced to the delay-free system (S_o) as

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + B_Q(u(t) + v(t)), \quad (8)$$

where $z(t) \in R^{n_p}$ and $B_Q \in R^{n_p \times m}$ is given by $B_Q = QB$.

Proof: By using differential under integral, it is straightforward to verify that (2) in conjunction with the transformation (7);

Proposition 2.1.2:

The ordinary pair (J, B_Q) is completely controllable if (S_d) is v_0 spectrally stabilizable, i.e. if

$$\text{rank} \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) \right] B = n \text{ for all } s \in C_{-v_0}^-$$

Proof: follows from Proposition 2 of [9]

2.2 Controller Design

In this section we present a suitable controller design, which is based on the Min-Max approach of Gutman [10], to stabilize $z(t)$. Next we will proof that the controller can make the system asymptotically stable.

Theorem 2.2.1:

Suppose there exist a transformation satisfying the hypothesis of Proposition 2.1. Then, for given $Q_R > 0$, there exist a positive definite solution P satisfied to the following Riccati equation

$$J^T P + PJ - PB_Q B_Q^T P + Q_R = 0. \quad (9)$$

Furthermore, a stabilizing control law which implies system asymptotic stable, is given by

$$u(t) = u_L(t) + u_N(t) \quad (10)$$

where

$$u_L(t) = -\frac{1}{2} B_Q^T P z(t) \quad (11)$$

and

$$u_N(t) = -\frac{\rho^2(x_t) B_Q^T P z(t)}{\delta(\rho(x_t)) \|B_Q^T P z(t)\| + e^{-\phi t}} \quad (12)$$

where the nonlinear gain

$$\rho(x_t) = \mu_E \|u_L(t)\| + \mu(x_t), \quad (13)$$

and where $\phi \in R^+$, δ is the positive scalar defined in Assumption 2.2-c.

Proof: First, we take the positive definite function

$$V_z(t) = z^T(t) P z(t) \quad (14)$$

as Lyapunov function candidate for the system (8) with control (10), and apply the Riccati equation to the derivative of V_z

$$\dot{V}_z = -z^T(t) [J^T P + PJ] z(t) + 2z^T(t) P B_Q (u(t) + v(t)).$$

Substitute $u_L(t)$ in the above equality to get

$$\dot{V}_z = -z^T(t) Q_R z(t) + 2z^T(t) P B_Q (u_N(t) + v(t)).$$

Let $\gamma(t) = 2z^T(t) P B_Q (u_N(t) + v(t))$,

from $v(t)$ defined in (3), we consequently get

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 2z^T(t) P B_Q \left\{ u_N(t) + E(t) u_N(t) \right. \\ &\quad \left. + \int_r^t dH(\theta) x(t+\theta) + E(t) u_L(t) + \omega(t) \right\} \\ &\leq 2 \left[z^T(t) P B_Q \delta u_N(t) + \rho(x_t) \|B_Q^T P z(t)\| \right]. \end{aligned}$$

Next, substitute $u_N(t)$ in the above equality to get

$$\gamma(t) \leq 2e^{-\phi t}.$$

Therefore,

$$\dot{V}_z(t) \leq -z^T(t) Q_R z(t) + 2e^{-\phi t}.$$

It can be verified that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\|^2 = 0. \quad (15)$$

Since stability of $z(t)$ implies stability of $x(t)$ as shown in Proposition 2.1 and Proposition 2.2, we can now conclude that the closed-loop system is asymptotically stable.

3. Application to Model-Following Control

In this section, we apply the results obtained in previous section to model-following control for the system (S_d). Let a reference model be given by

$$\dot{x}_m(t) = \int_r^t d\alpha_m(\theta) x_m(t+\theta) + B_m u_m(t), \quad (16)$$

where u_m is a command signal. Next, define the tracking error state

$$e(t) = x(t) - x_m(t). \quad (17)$$

Then

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_r^t d\alpha_m(\theta) e(t+\theta) + \int_r^t d\beta(\theta) x(t+\theta) \\ &\quad + \int_r^t d(\alpha(\theta) - \alpha_m(\theta)) x(t+\theta) \\ &\quad + [B + \Delta B(t)] u(t) - B_m u_m(t) + B \omega(t). \end{aligned} \quad (18)$$

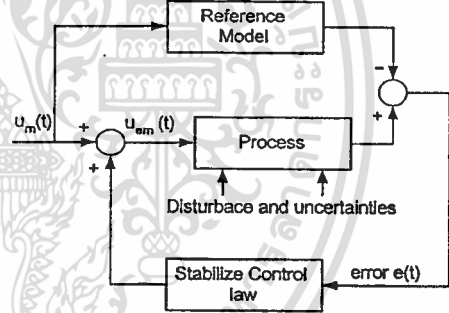


Fig. 1 Block diagram of model-following systems

In addition to Assumption 2.1 and 2.2, we make the following assumptions.

Assumption 3.1:

The reference model (16) is asymptotically stable; i.e., all poles of (16) in absence of u_m lie within the open left-half plane.

Assumption 3.2:

The continuous matrix functions $H_m(\theta)$ and E_m of appropriate dimensions, for all $t \in R^+$, exist such that

$$f) \quad \alpha(\theta) - \alpha_m(\theta) = B H_m(\theta),$$

$$g) \quad B - B_m = B E_m.$$

Now let the control law be given by

$$u_{em}(t) = u_e(t) + u_m(t), \quad (19)$$

where $u_e(t)$ is to be defined later. By using (19), in conjunction with Assumption 2.1, 2.2, 3.1 and 3.2, then (18) can be rewritten into the following form

$$\dot{e}(t) = \int_{-r}^0 d\alpha_m(\theta)e(t+\theta) + B(u_e(t) + v_e(t)) \quad (20)$$

where

$$v_e(t) = \int_{-r}^0 d(H(\theta) + H_m(\theta))x(t+\theta) + [E(t) + E_m]u_{em}(t) + E(t)u_e(t) + \omega(t). \quad (21)$$

Note here that asymptotic stability of $e(t)$ implies that $x(t)$ asymptotically tracks $x_m(t)$ for all bounded command signals $u_m(t)$. Consequently, the problem can be solved by finding $u_e(t)$, which robustly stabilizes (20) against $v_e(t)$. Clearly, Proposition 2.1, 2.2 and Theorem 2.1 can now be applied to solve this stabilization problem. For instance, we first define the transformation

$$z_e(t) = Qe(t) + \int_{-r}^0 \int_{\theta}^0 e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha_m(\theta)e(\tau) d\tau \quad (22)$$

to get the system

$$\dot{z}_e(t) = Jz_e(t) + B_Q(u_e(t) + v_e(t)). \quad (23)$$

where

$$JQ = \int_{-r}^0 e^{J\theta} Q d\alpha_m(\theta). \quad (24)$$

The final step is to apply the ultimate bounded control. It can be shown that a suitable control law is given by (19) with

$$u_e(t) = -\frac{\rho^2(e_t)B_Q^T P z_e(t)}{\delta(\rho(e_t))\|B_Q^T P z_e(t)\| + e^{-\mu t}} \quad (25)$$

where

$$\mu(e_t) \geq \left\| \int_{-r}^0 d(H(\theta) + H_m(\theta))x(t+\theta) + (E(t) + E_m)u_m(t) + \omega(t) \right\| \quad (26)$$

and $P > 0$ is a solution to the Lyapunov equation

$$J^T P + P J + I = 0 \quad (27)$$

where I is the $n_p \times n_p$ unity matrix.

4. Numerical Examples

Example 1

To illustrate the theorem in simplest case, consider the first-order (scalar) system

$$\dot{x}(t) = \frac{8e^{\frac{\pi}{4}} - 8}{65}x(t) + (\Delta A_h(t) - e)x(t-1) + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin(8\theta)x(t - \frac{\pi}{4} - \theta)d\theta + u(t) + \omega(t). \quad (28)$$

Remark 4.1: The above system can be displayed in terms of Stieltjes integrals as in (1) by taking $r=1$,

$$\alpha(\theta) = \frac{8e^{\frac{\pi}{4}} - 8}{65}H_u(\theta) + eH_u(\theta+1) + \alpha_d(\theta) \frac{\cos\left(8\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{8},$$

$$\beta(\theta) = \Delta A_h(t)H_u(\theta+1), \quad \|\Delta A_h(t)\| \leq 0.5 \text{ and } \|\omega(t)\| \leq 0.5,$$

where H_u denotes the Heaviside Unit Function with its derivative is the dirac delta function, and

$$\alpha_d(\theta) = \begin{cases} \theta & 0 \geq \theta \geq -\frac{\pi}{4} \\ -1 & -\frac{\pi}{4} \geq \theta \geq -1. \end{cases}$$

Consequently, under proposed assumptions, $v(t)$ becomes

$$v(t) = \Delta A_h(t)x(t-1) + \omega(t). \quad (29)$$

Controller design

From (28), it can be verified that unstable pole of the system $\sigma_u(S_d)$ is found to be 1.

(i) Check spectral stabilizability. Since

$$\text{rank} \left[sI - \int_{-r}^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) B \right] = 1.$$

(ii) As $n = 1$, any constant is an eigenvector. Thus the system left eigenvector may be taken = 1.

Fig 2. is the responses of control system with generalized feedback control law defined in (10) with $P=3, \delta=1, \phi=0.5$. It is seen from the figure that the control law can stabilize the controlled system composed uncertainties and disturbance.

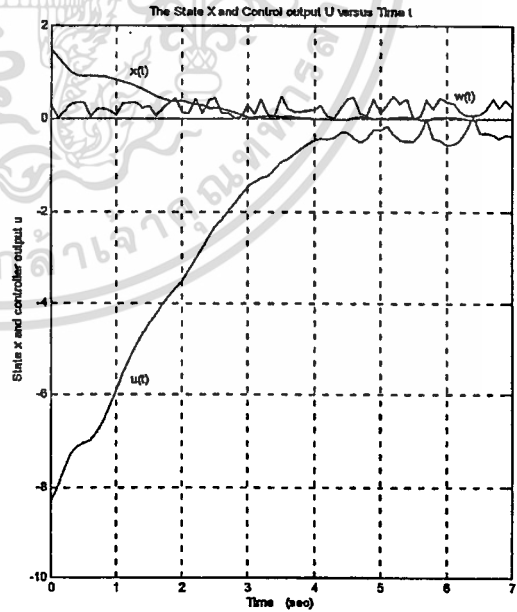


Fig. 2 Simulation results for example 1

The Model-Following System

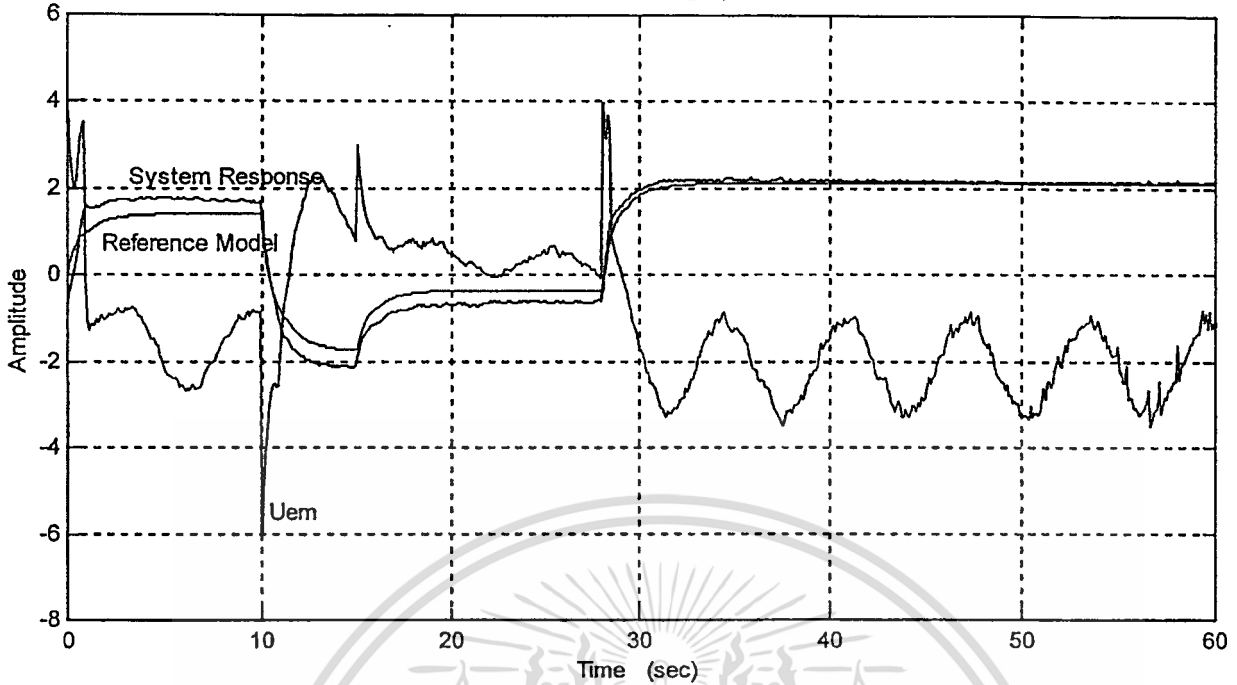


Fig. 3 Simulation results for example 2

Example 2

In order to apply the proposed control law to a model-following system, consider the system be defined as in (1) where $r = 1$, $\alpha(\theta) = 0.5H_u(\theta) + e^{-1}H_u(\theta+1)$, $B = 1$, $\Delta B = 0$, $\beta(\theta) = -0.2\cos(t-\theta)H_u(\theta)$ and $\|\omega(t)\| \leq 0.5$ with want to control to follow the stable reference model, as defined in (16) where $r = 1$, $\alpha_m(\theta) = -2H_u(\theta) + e^{-1}H_u(\theta+1)$ and $B_m = 1.15$.

Remark 4.2: Under the proposed assumptions in Section 3, $\dot{e}(t)$ becomes as defined in (20) when $v_e(t)$

$$v_e(t) = \int_{-1}^0 d(H(\theta) + H_m(\theta))x(t+\theta) + E_m u(t) + \omega(t).$$

For $B = 1$, the following designed parameters can be defined as $H(\theta) = \beta(\theta)$, $H_m(\theta) = 2.5H_u(\theta)$ and $E_m = -0.15$.

Controller design

It can be verified that the pole of the model is -1.

(i) Check spectral stabilizability. Since

$$\text{rank} \left[sI - \int_{-1}^0 e^{s\theta} d\alpha_m(\theta) B \right] = 1$$

(ii) As $n = 1$, any constant is an eigenvector. Thus the system left eigenvector may be taken = 1.

The responses of the model-following system with a suitable control law, as defined in (25) with $P = 1, \delta = 1, \phi = 0.01$, are illustrated in Fig 3. It is

observed from the figure that the system can track the model and the tracking error approaches to zero when time t approaches infinity.

Remark 4.3: For some larger delayed systems that the system poles cannot be determined, the program of Manitius [11] is one of most helpful tools used to compute the system poles.

5. Concluding Remarks

A new control law used to stabilize the uncertain delayed systems had been presented in Section 2. The method of designing the control law is based on the generalize transformation, that utilized to reduce the delayed system to a delay-free system. It has been shown that, if both of disturbance and uncertainties disturb the system though the same channel of the control, and if the system is spectrally stabilizable, the proposed robust control law guarantees the asymptotically stability of the controlled system. Moreover, it has been proved in Section 3 that the proposed control law u_{em} , with the extended theorem stated in this paper, guarantees that the controlled system can track the model for all uncertainties and disturbance, when the model-following systems is introduced.

6. Acknowledgment

This work is partly supported by National Science and Technology Development Agency (NECTEC), Ministry of Science Technology and Environment (NSTDA), the Thai Royal Government. This work is also partially supported by Japan International Co-operation Agency (JICA).

7. Reference

- [1] E. Cheres, S. Gutman and Z.J. Palmor, "Stabilization of uncertain dynamical systems including state delay", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-34, No. 11, PP 1199-1203, 1989.
- [2] S. Phoojaruenchanachai and K. Furuta, "Finite dimension controller design for stabilization of uncertain time-delay systems", *Trans.Soc.Instrum.Contr.Eng.*, VOL. 28, No. 3, pp 326-333, 1992.
- [3] S. Phoojaruenchanachai and K. Furuta, "Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-37, No. 7, pp 1022-1026, July 1992.
- [4] S. Phoojaruenchanachai and K. Furuta, "Deterministic control of uncertain state delayed systems", *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, TUSCON*, VOL. 3, pp 2870-2875, 1992.
- [5] K. Uahchinkul, Y. Prempraneerach and S. Phoojaruenchanachai, "Stabilization of Uncertain Time-delay System", *Proceeding of the RESTECS'96*, Faculty of Engineering, KMITL, pp E-33-35, 1996.
- [6] S. Phoojaruenchanachai, K. Uahchinkul and Y. Prempraneerach, "Robust Stabilization of State Delayed System", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 145, Issue. 1, pp 87-91, 1998.
- [7] S. Phoojaruenchanachai, K. Uahchinkul, J. Ngamwiwit and Y. Prempraneerach, "Robust Stabilization of Uncertain Linear System with Distributed state Delay", *IEICE Trans. - Fundamental*, Vol. E82A, No. 9, pp 1911-1918, 1999.
- [8] A.Kojima, K.Uchida, E.Shimemura and S.ISHIJIMA, "Robust Stabilization of a system with delays in control", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL 39, pp 1694-1698, 1994.
- [9] Y.A. Fiagbedzi and A. E. Pearson, "Output Feedback stabilization of delay systems via generalization of the transformation method", *International Journal of Control*, VOL. 51, No. 4, pp 801-822, 1990.
- [10] S. Gutman, "Uncertain dynamical systems A Lyapunov min max approach", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-24, No. 6, pp 437-443, 1979.
- [11] A. Manitius, H. Tran, G. Payre and R. ROY, "Computation of eigenvalues associated with functional differential equations", *SIAM Journal on Science and Statistics of Computing*, Vol. 8, pp 222-247, 1987
- [12] I.S. Sokolnikoff and R.M.Redheffer, "Mathematics of Physics and Modern Engineering", McGraw-Hill, 1966.

KACC 2000 15th Korea Automatic Control Conference

October, 19~21, 2000
Hyundai Learning Center



Sliding Mode Robust Control of Uncertain Delay Systems: Generalize Transformation Approach

K. Uahchinkul[†], J. Ngamwiwit^{*} and S. Phoojaruenchanachai^{**}

^{*} Department of Control Engineering, Faculty of Engineering and ReCCIT, KMITL, Thailand
(Tel : 66-2-326-9989; Fax : 66-2-326-9989 ; E-mail: knjongko@kmitl.ac.th)

^{**} Computer and Automation Technology Laboratory, NECTEC, NSTDA, Thailand
(Tel : 66-2-644-8150; Fax : 66-2-644-8137)

Abstract

In this paper, the theoretical development to stabilize a class of uncertain time-delay systems via sliding mode control is presented. The system under consideration is described in state space model containing state delay, uncertain parameters and disturbance. The main idea is to reduce the state of delayed system, by employing the generalize linear transformation, into an equivalent one with no delay inside, which is easier to analyze its behavior and stability. Then, the sliding control approach is employed to find the stabilizing control law. Finally, a numerical simulation is illustrated to show the algorithm for applying the proposed theorems and the effectiveness of the designed control law in stabilizing the controlled systems.

1. Introduction

Time delays can be found in various engineering systems such as chemical processes, pneumatic/hydraulic systems, biological systems and economic systems. Compared to systems without delay, the presence of delay makes it more difficult to achieve the stability of the systems. On the other hand, it is reasonable to include uncertain parameters and disturbance in practical control systems containing modeling errors, linearization approximations, etc. Therefore, the problem of robust stabilization of delayed systems with uncertain parameters has received considerable attention of many researchers, and many solution approaches have been proposed. Therein Cheres (1989) stabilize time-delay systems by assuming that the delayed state is the uncertainties of the systems. Phoojaruenchanachai (1998, 1999) employed the improved linear transformation to reduce the delay systems to delay-free systems and used it to design the control law.

In this paper, a class of linear systems containing known delay, uncertain parameters and additive disturbances are presented in the most general autonomous delay systems. Determination of controller parameters can be divided into two parts. First, base on the improved theorem of Fiagbedzi and Pearson (1990), the generalize linear transformation is utilized to reduce the original problem into an equivalent one which is easier to find the solution. Next, Sliding mode control (SMC), which its design is based on Utkin (1978), is derived. Finally, the numerical example is illustrated to show applicability of the proposed method.

2. Problem Formulation

In this section, we will present the main idea to design control law for delayed systems, with uncertain parameters and disturbance, via the generalize linear transformation.

Consider a class of uncertain time-delay system (S_d)

which is defined by the following equations

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + \int_{-r}^0 d\beta(\theta)x(t+\theta) + [B + \Delta B(t)]u(t) + B\omega(t), \quad (1)$$

where $x(t) \in R^n$ is the current value of the system state, $u(t) \in R^m$ is the control function, $\omega(t) \in R^l$ is the additive disturbance, $\alpha(\cdot) \in L_1[-r, 0]; R^{n \times n}$ is a matrix valued functions of bounded variation on $[-r, 0]$, $\beta(\theta) \in L_1[-r, 0]; R^{n \times n}$ is an integrable matrix whose elements are continuous, unknown but bounded functions on $[-r, 0]$, $\Delta B(t)$ is a matrix whose elements are continuous, unknown but bounded functions, $r \in R^+$ is a max-known constant delay time and the initial function of system be specified as $x_0(\eta) \in C_d[r, 0; R^n]$. The integrals indicated above are Stieltjes integrals, the distributed integral from, and it is enough to consider one uniform delay, r , since the functions of bounded variation can be extended, without change of variation, to $[-r, 0]$.

Assumptions

Before proposing our controllers, the following assumptions are made throughout here.

Assumption 2.1:

The nominal system of (S_d), i.e., the system (S_d) which

$$\int_{-r}^0 d\beta(\theta) = 0, \Delta B(t) = 0, \omega(t) = 0 \text{ is spectrally stabilizable.}$$

Assumption 2.2:

The continuous matrix functions $H(\theta)$ and $E(t)$ of appropriate dimensions, for all $t \in R^+$, exist such that

- $\beta(\theta) = BH(\theta)$,
- $\Delta B(t) = BE(t)$,
- $I + \frac{1}{2}(E(t) + E^T(t)) \geq \delta I$ for some scalar $\delta > 0$,
- scalar $\mu(x_t)$ and $\mu_E(t)$ exist such that

$$\mu(x_t) \geq \left\| \int_{-r}^0 dH(\theta)x(t+\theta) + \omega(t) \right\|,$$

and

$$\mu_E(t) \geq \|E(t)\|$$

[†] The author is a doctor student and also with Product Research and Test Center, the Join-Venture Project of National Science and Technology Development Agency and King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Thailand.

e) information μ and μ_E are available.

Note that if matching conditions defined in Assumption 2.2 are satisfied, we can rewrite system (S_d) to the form

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + B(u(t) + v(t)), \quad (2)$$

where

$$v(t) = \int_{-r}^0 dH(\theta)x(t+\theta) + E(t)u(t) + \omega(t). \quad (3)$$

3. Generalize Linear Transformation

Let $v_0 \geq 0$ be given for desired the margin of stability.

Define $C_{-v_0}^+ = \{s \in C : \text{Re } s \geq -v_0\}$ and denote its complement

in C by $C_{-v_0}^-$ so that $C = C_{-v_0}^+ \cup C_{-v_0}^-$.

For the given v_0 , the open-loop unstable spectrum of (S_d) is a set of eigenvalues given by

$$\sigma_u(S_d) = \{s \in C : \text{Re } s \geq -v_0, \det \Delta(s) = 0\} \subset C_{-v_0}^+,$$

$$\text{where } \Delta(s) = \left[sI - \int_{-r}^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) \right].$$

Following [4], the left characteristic matrix equation (l.c.m.e.) is given by

$$JQ = \int_{-r}^0 e^{J\theta} Q d\alpha(\theta). \quad (4)$$

Suppose $\sigma_u(S_d) = \Lambda_u^+ \cup \Lambda_u^- \cup \Lambda_u^r$, where Λ_u^+ denotes a set of cardinality n_c consisting of the complex elements of $\sigma_u(S_d)$ with positive imaginary parts, Λ_u^- denotes the complex conjugate of Λ_u^+ , and Λ_u^r denotes the set of cardinality n_r consisting of the real elements of $\sigma_u(S_d)$ so that $n_p = \#\sigma_u(S_d) = 2n_c + n_r$, where $\#$ denotes cardinality.

For $k = 1, 2, \dots, n_c$, let $(q_1, q_2, \dots, q_{n_c})$ be the left eigenvectors of the original systems (S_d) corresponding to the element of Λ_u^+ and $(q_{1+2n_c}, q_{2+2n_c}, \dots, q_{n_p})$ be the left eigenvectors corresponding to the element of Λ_u^r , then let

$$Q = \text{row} \begin{bmatrix} \text{Re } q_1 & \text{Im } q_1 & \text{Re } q_2 & \text{Im } q_2 & \dots & \text{Re } q_{n_c} \\ \text{Im } q_{n_c} & q_{1+2n_c} & q_{2+2n_c} & \dots & q_{n_p} \end{bmatrix} \quad (5)$$

where $Q \in R^{n_p \times n}$.

To obtain the Jordan matrix identifiable with $\sigma_u(S_d)$, let

$$D_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & -\varpi_k \\ \varpi_k & \sigma_k \end{pmatrix}$$

denote the Jordan sub-block corresponding to

$$s_k = \sigma_k + j\varpi_k \in \Lambda_u^+, k = 1, 2, \dots, n_c,$$

and $D_{1+n_c} = \text{diag}(s_{1+2n_c}, s_{2+2n_c}, \dots, s_{n_p})$ denote the diagonal matrix corresponding to Λ_u^r . Then the Jordan matrix becomes

$$J = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_{n_c}, D_{1+n_c}) \quad (6)$$

where $J \in R^{n_p \times n_p}$.

Proposition 3.1:

Let Q be as defined by (5). Under linear transformation

$$z(t) = Qx(t) + \int_{-r}^0 \int_{+\theta}^t e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau \quad (7)$$

(2) is reduced to the delay-free system (S_o) as

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + B_Q(u(t) + v(t)), \quad (8)$$

where $z(t) \in R^{n_p}$ and $B_Q \in R^{n_p \times m}$ is given by $B_Q = QB$.

Then, $\dot{x}(t)$ satisfies (1) and hence (2), if and only if $\dot{z}(t)$ satisfies (8).

Proof : By using differential under integral, it is straightforward to verify that (2) in conjunction with the transformation (7); \square

Proposition 3.2:

The ordinary pair (J, B_Q) is completely controllable if (S_d) is v_0 spectrally stabilizable, i.e. if

$$\text{rank} \left[sI - \int_{-r}^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) B \right] = n \text{ for all } s \in C_{-v_0}^+$$

Proof : follows from Proposition 2 of [4] \square

4. Design of a sliding mode controller

Suppose there exists a transformation satisfying the hypothesis of proposition 3.1. and all unwanted poles are placed in the Jordan matrix J . Then the sliding surface is defined as $\mathcal{G} = Cz(t) = 0$. The ideal sliding mode exist if there is finite time t_x such that

$$Cz(t) = 0, \quad C\dot{z}(t) = 0 \quad t \geq t_x,$$

where $C \in R^{m \times n_p}$ is the sliding mode matrix.

Theorem 4.1:

Suppose there exists a generalize linear transformation satisfying the hypothesis of proposition 3.1. Then, the SMC, which render closed-loop systems asymptotically stable, is given by

$$u(t) = -(CB_Q)^{-1} K \mathcal{G}(t) + u_N(t) + u_{eq}(t) \quad (9)$$

where $K \in R^{m \times m}$ is a positive definite matrix, equivalent control for nominal system is determined by

$$u_{eq}(t) = -(CB_Q)^{-1} C J z(t) \quad (10)$$

and

$$u_N(t) = \frac{\rho^2(x_t) B_Q^T C^T \mathcal{G}(t)}{\delta \left(\rho(x_t) \| B_Q^T C^T \mathcal{G}(t) \| + e^{-\phi t} \right)} \quad (11)$$

where the nonlinear gain

$$\rho(x_t) = \mu_E \left\| -(CB_Q)^{-1} K \mathcal{G}(t) + u_{eq}(t) \right\| + \mu(x_t), \quad (12)$$

and where δ is the positive scalar defined in assumption 2.2 and $\phi \in R^+$ is a value chosen by designer.

Proof : Consider the Lyapunov function

$$2V(t) = \vartheta^T(t)\vartheta(t). \quad (13)$$

Differentiating V with respect to time yields

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \vartheta^T(t)\dot{\vartheta}(t) \\ &= \vartheta^T(t)[CJz(t) + CB_Q(u(t) + v(t))] \\ &= \vartheta^T(t)[-K\vartheta(t) + CB_Q(u_N(t) + v(t))] \\ &= -\vartheta^T(t)K\vartheta(t) + \vartheta^T(t)CB_Q \left\{ u_N(t) + E(t)u_N(t) + \omega(t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-r}^0 dH(\theta)x(t+\theta) + E(t) \left(-(CB_Q)^{-1}K\vartheta(t) + u_{eq}(t) \right) \right\} \\ &\leq -\vartheta^T(t)K\vartheta(t) - \frac{\rho^2(x_t)\vartheta^T(t)CB_Q\delta B_Q^T C^T \vartheta(t)}{\delta \left(\rho(x_t) \|B_Q^T C^T \vartheta(t)\| + e^{-\phi t} \right)} \\ &\quad + \rho(x_t)\vartheta^T(t)CB_Q \\ &= -\vartheta^T(t)K\vartheta(t) + \left(\frac{e^{-\phi t}\rho(x_t)\|B_Q^T C^T \vartheta(t)\|}{\rho(x_t)\|B_Q^T C^T \vartheta(t)\| + e^{-\phi t}} \right) \\ \dot{V}(t) &\leq -\vartheta^T(t)K\vartheta(t) + e^{-\phi t}. \end{aligned}$$

This analysis implies that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vartheta(t)\|^2 = 0 \quad (14)$$

Since stability of $\vartheta(t)$ implies stability of $z(t)$ due to choose sliding matrix C and then stability of $z(t)$ implies stability of $x(t)$ as shown in the proposition 3.1, we now can conclude that closed-loop system is asymptotically stable \square

5. Numerical Simulation

To illustrate the theorem in simplest case, consider the first-order (scalar) system

$$\dot{x}(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \Delta A_h x(t-1) + \int_{-1}^0 x(t+\theta)d\theta + u(t) + \omega(t) \quad (15)$$

Remark 4.1 :

The above system can be displayed in terms of Stieltjes integrals as in (1) by taking $r=1$, $\alpha(\theta) = -\frac{\pi}{2}H_u(\theta+1) + \theta$,

$$\beta(\theta) = \Delta A_h(t)H_u(\theta+1), \quad B=1, \quad \|\Delta A_h(t)\| \leq 0.1 \text{ and } \|\omega(t)\| \leq 0.1,$$

where H_u denotes the Heaviside Unit Function with its derivative is the dirac delta function,

Consequently, under proposed assumptions, $v(t)$ becomes

$$v(t) = \Delta A_h(t)x(t-1) + \omega(t). \quad (16)$$

Controller design

From (15), with the help of the program of Manitius (1978), it can be verified that system spectrum in C_{-1}^+ is found to be

$$\sigma_u(S_d) = \{\sigma \pm j\omega\}$$

where $\sigma = -0.110353352$, $\omega = 0.957922819$.

Thus, $\Lambda_u^+ = \{s_1\} = \{\sigma + j\omega\}$, $\Lambda_u^- = \{s_2\} = \{\sigma - j\omega\}$

(i) Check spectral stabilizability. Since

$$\text{rank} \left[sI - \int_{-r}^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) \middle| B \right] = 1.$$

For all s , this verifies condition of spectral controllability.

(ii) As $n = 1$, any constant is an eigenvector. Thus for $s_1 \in \Lambda_u^+$ the system left eigenvector may be taken as $q_1 = 1$.

By (5) the Q matrix becomes

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

The Jordan matrix is obtained by inspection (6) as

$$J = \begin{bmatrix} -0.110353352 & -0.957922819 \\ 0.957922819 & -0.110353352 \end{bmatrix}$$

(iii) We choose the sliding surface $\vartheta(t) = [1 \ 2]z(t)$

Fig 1. is the responses of control system with SMC defined in (10) with $\delta=1$ and $\phi=1$. It is seen from the figure that the proposed SMC can stabilize the controlled system composed uncertainties and disturbance.

6. Concluding Remark

In this paper, we consider the robust sliding mode control problem for uncertain systems with known time delay. When all conditions are satisfied, we can employ the generalize linear transformation to change systems model (1) into new model (8) that is easier for analysis its behavior. We then proof that the SMC, which designed on the equivalent system, can stabilize the uncertain time delay system.

7. Acknowledgment

This work is partly supported by National Science and Technology Development Agency (NECTEC), Ministry of Science Technology and Environment (NSTDA), the Thai Royal Government. This work is also partially supported by Japan International Co-operation Agency (JICA).

8. References

- [1] E. Cheres, S. Gutman and Z.J. Palmor, "Stabilization of uncertain dynamical systems including state delay", *IEEE Transaction on AUTOMATIC CONTROL*, VOL. AC-34, No. 11, PP 1199-1203, 1989.
- [2] S. Phoojaruenchanachai, K. Uahchinkul and Y. Prempraneerach, "Robust Stabilization of State Delayed System", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol. 145, Issue. 1, pp 87-91, 1998.
- [3] S. Phoojaruenchanachai, K. Uahchinkul, J. Ngamwiwit and Y. Prempraneerach, "Robust Stabilization of Uncertain Linear System with Distributed state Delay", *IEICE Trans. - Fundamental*, Vol. E82A, No. 9, pp 1911-1918, 1999.
- [4] Y.A. Fiagbedzi and A. E. Pearson, "Output Feedback stabilization of delay systems via generalization of the transformation method", *International Journal of Control*, VOL. 51, No. 4, pp 801-822, 1990.

[5] Utkin, V.I. and K.D. Young, "Methods for construction of discontinuity planes in multidimensional variable structure systems", *Auto. Remote Control*, No 39, pp 1466-1470, 1978.

[6] A. Manitius, H. Tran, G. Payre and R. ROY, "Computation of eigenvalues associated with functional differential equations", *SIAM Journal on Science and Statistics of Computing*, Vol. 8, pp 222-247, 1987.

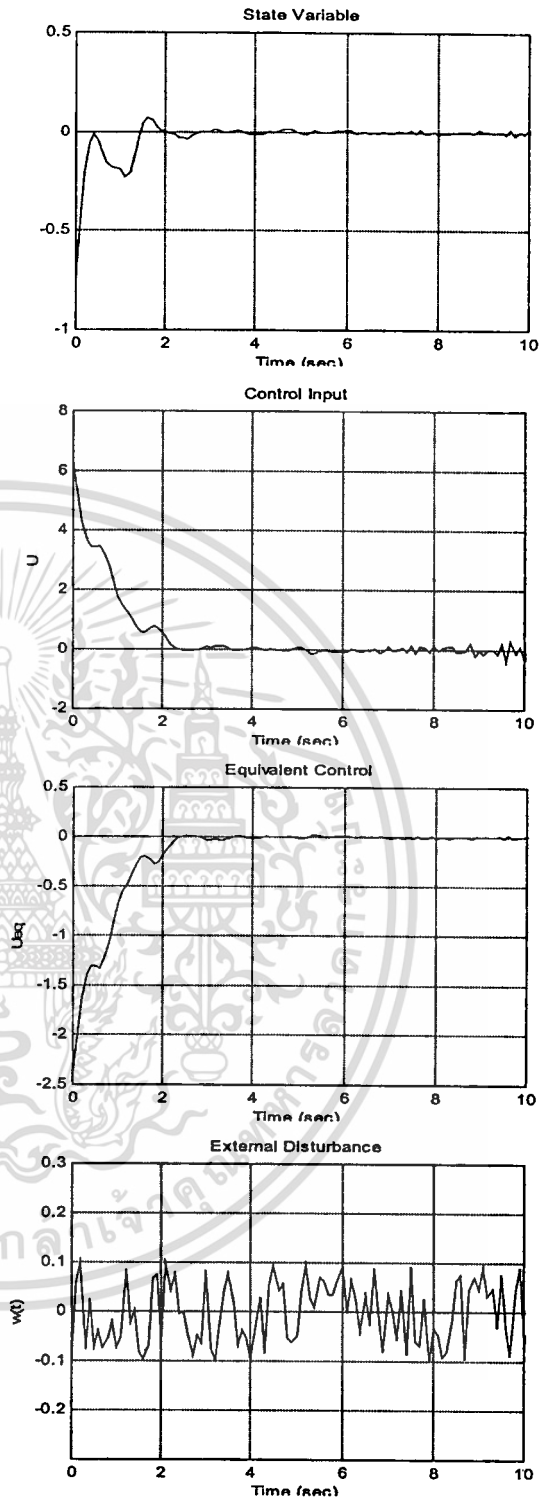
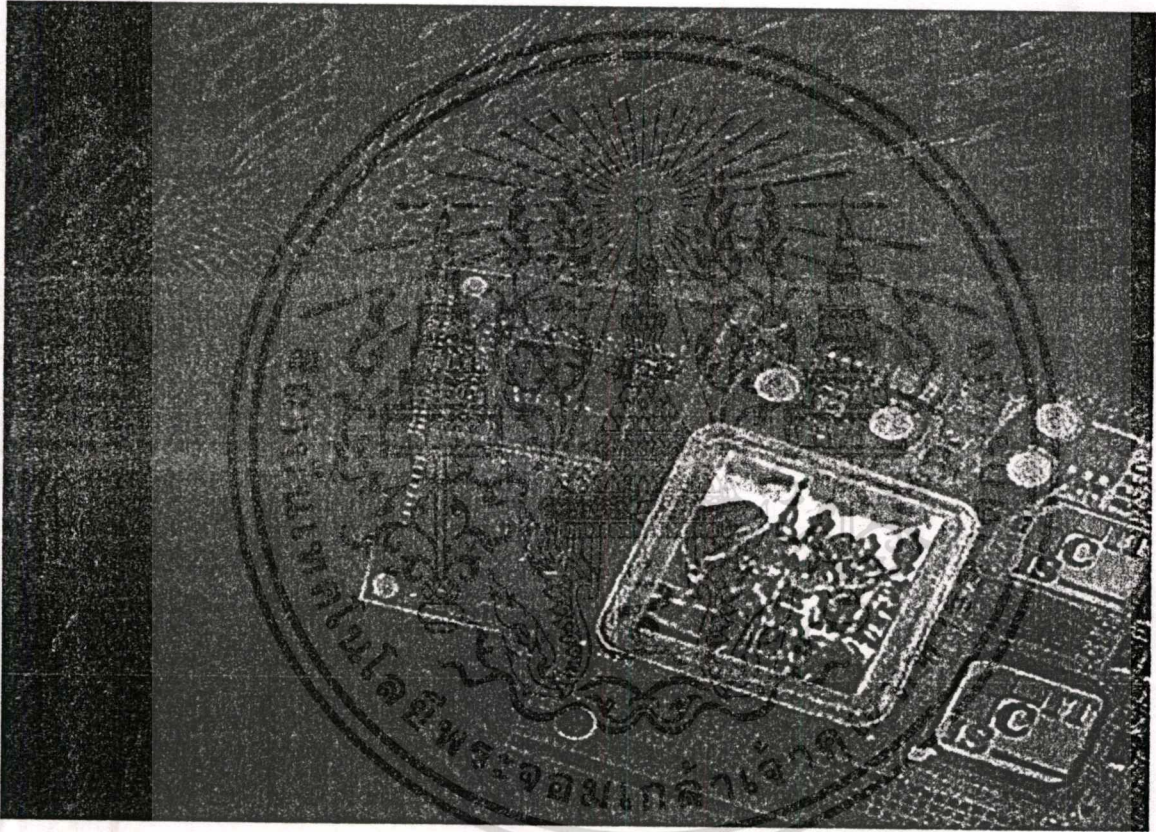


Fig 1. Responses of Numerical Example

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

PROCEEDINGS

2001 International Symposium on Communications and Information Technology ISCIT 2001



The Merging Decade of Communication Systems and Information Technology

November 14 - 16, 2001

Chiang Mai Orchid Hotel, Chiang Mai, Thailand



ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

GLOBAL STABILIZATION OF UNCERTAIN TIME-DELAY SYSTEMS

Kamol UAHCHINKUL*[†], Jongkol NGAMWIWIT* and Suthee PHOOJARUENCHANACHAI

*Department of Control Engineering
Faculty of Engineering and ReCCIT
KMITL

Chalongkrung Road, Ladkrabang,
Bangkok 10520 Thailand

Phone: +66-2326-9986, Fax: +66-2326-9986

Email: kukamol@kmitl.ac.th, knjongko@kmitl.ac.th.

Computer and Automation Technology
Laboratory

NECTEC, NSTDA

73/1 Rama VI Road, Rajatevi,
Bangkok 10400 Thailand

Phone: +66-2644-8150, Fax: +66-2644-8137

Email: suthee@notes.nectec.or.th

[†] The author is also with Electrical and Electronic Product Test Center. The Joinventer Project of NSTDA and KMITL.

ABSTRACT

In this paper, global and asymptotic stabilization of uncertain time-delay systems, which violate the matching condition, is investigated. A class of unmatched uncertainties, called equivalently matched uncertainties, is defined. The main idea is to transform the system state into an equivalent one, which is easier to analyze its behavior and stability. Then, a computational method of robust controller design is presented in two parts. The first part is based on solving a Riccati equation arising in the optimal control theory. In the second part, the finite dimensional Lyapunov min-max approach is employed to cope with the uncertainties.

1. INTRODUCTION

Stabilization of a time-delay system with significant uncertainties has been widely interested since the last decade. A common approach is to control the system unstable pole(s) and treat the uncertainties in system deterministically. Then, if the information about the maximum size of the uncertainties and delay are available, the Lyapunov direct method can be used to design a suitable control. In many cases, the resulting control achieves certain stability performance for the uncertain delayed-system. In the case that the system consist of distributed know delay, consider a class of uncertain time-delay system (S_d) which can be used instead of all type of others known delay system, is defined by the following Stieltjes integral state equations

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + \xi(t) + B[u(t) + v(t)] \quad (1)$$

where $x \in R^n$ is the current value of the system state, $u(t) \in R^m$ is the control function, $\xi(t)$ is the 'unmatched' uncertainties, and $v(t)$ is the

'matched' uncertainties. Both $\xi(t)$ and $v(t)$ are assumed to be bounded in magnitude, usually in their Euclidean norm denoted by $\|\cdot\|$. $r \in R^+$ is a max-known constant delay time,

$\alpha(\cdot) \in L_1([-r, 0]; R^{n \times n})$ is a matrix valued functions of bounded variation on $[-r, 0]$, and the initial function of system be specified as $x_0(\eta) \in C_d([r, 0]; R^n)$.

If $\xi(t) = 0$, in [1] when there is the information about the maximum magnitude of delay part and all requirements are met, Gutman had presented his feedback control with supposed that the delay part is the uncertainties of system. [2] presented the stabilize control law with the concession of the delay. In [3], the concept of linear transformation, with proposed by Fiagbedzi and Pearson [4], had been used to reduce the original delay system to equivalent delay-free system, and then the suitable control had been proposed from the equivalent system, which is easier to find the solution, to stabilize the original system. Those results on global stability hold in general only if $\xi(t) = 0$. In the case that there are unmatched uncertainties, a common approach is to apply the available controllers as if there were no unmatched uncertainties. This method will inevitably result in a threshold on the size of the unmatched uncertainties. The unmatched uncertainties is then required to be smaller than the threshold value so that a stability result holds locally with respect to the size of the uncertainties. Since unmatched uncertainties are common in control practice, it is important to design a feedback control guaranteeing global stability in the presence of significant unmatched uncertainties. As result was proposed in [5] which shows that stability can be achieved for any initial condition if the unmatched uncertainties was defined as equivalent matched.

The objective of this paper is to apply a class of

unmatched uncertainties $\xi(t)$ such that the time-delay system (1) can be stabilized globally and asymptotically as long as a bounding function on $\xi(t)$ is available.

2. PROBLEM FORMULATION

Before proposing our controllers, the following assumptions are made throughout here.

Assumption 1:

The nominal system of (S_d) , which is defined by

$$\int_r^0 d\alpha(\theta)x(t+\theta) + Bu(t),$$

is spectrally stabilizable.

Assumption 2:

For all $t \in R^+$, the uncertainties $\xi(t)$ and $v(t)$ are bounded; namely there are known non-negative, continuous functions $\rho(x_t)$ and $\rho_1(x_t)$ such that

$$\|v(t)\| \leq \rho(x_t), \quad \|\xi(t)\| \leq \rho_1(x_t)$$

3. TRANSFORMATION TECHNIQUE

Let $v_0 \geq 0$ be given for desired the margin of stability. Define $C_{-v_0}^+ = \{s \in C : \text{Re } s \geq -v_0\}$ and denote its complement in C by $C_{-v_0}^-$ so that $C = C_{-v_0}^+ \cup C_{-v_0}^-$.

For the given v_0 , the open-loop unstable spectrum of (S_d) is a set of eigenvalues given by

$$\sigma_u(S_d) = \{s \in C : \text{Re } s \geq -v_0, \det \Delta(s) = 0\} \subset C_{-v_0}^+,$$

$$\text{where } \Delta(s) = \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) \right].$$

Following [6], the left characteristic matrix equation (l.c.m.e.) is given by

$$JQ = \int_r^0 e^{J\theta} Q d\alpha(\theta). \quad (2)$$

Suppose $\sigma_u(S_d) = \Lambda_u^+ \cup \Lambda_u^- \cup \Lambda_u^r$, where Λ_u^+ denotes a set of cardinality n_c consisting of the complex elements of $\sigma_u(S_d)$ with positive imaginary parts, Λ_u^- denotes the complex conjugate of Λ_u^+ , and Λ_u^r denotes the set of cardinality n_r consisting of the real elements of $\sigma_u(S_d)$ so that $n_p = \#\sigma_u(S_d) = 2n_c + n_r$, where $\#$ denotes cardinality.

For $k = 1, 2, \dots, n_c$, let $(q_1, q_2, \dots, q_{n_c})$ be the

left eigenvectors of the original systems (S_d) corresponding to the element of Λ_u^+ and $(q_{1+2n_c}, q_{2+2n_c}, \dots, q_{n_c})$ be the left eigenvectors corresponding to the element of Λ_u^r , then let

$$Q = \text{row} \begin{bmatrix} \text{Req}_1 & \text{Imq}_1 & \text{Req}_2 & \text{Imq}_2 & \dots & \text{Req}_{n_c} \\ \text{Imq}_{n_c} & q_{1+2n_c} & q_{2+2n_c} & \dots & q_{n_c} \end{bmatrix} \quad (3)$$

where $Q \in R^{n_r \times n}$.

To obtain the Jordan matrix identifiable with $\sigma_u(S_d)$, let

$$D_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & -w_k \\ w_k & \sigma_k \end{pmatrix}$$

denote the Jordan sub-block corresponding to

$$s_k = \sigma_k + jw_k \in \Lambda_u^+, k = 1, 2, \dots, n_c,$$

and $D_{1+n_c} = \text{diag}\{s_{1+2n_c}, s_{2+2n_c}, \dots, s_{n_r}\}$ denote the diagonal matrix corresponding to Λ_u^r . Then the Jordan matrix becomes

$$J = \text{diag}\{D_1, D_2, \dots, D_{n_c}, D_{1+n_c}\} \quad (4)$$

where $J \in R^{n_r \times n_r}$.

Proposition 1:

Let Q be as defined by (3). Under linear transformation

$$z(t) = Qx(t) + \int_r^0 \int_{+\theta}^t e^{J(t+\theta-\tau)} Q d\alpha(\theta)x(\tau) d\tau \quad (5)$$

(1) is reduced to the delay-free system (S_o) as

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + \xi_Q(t) + B_Q(u(t) + v(t)), \quad (6)$$

where $z(t) \in R^{n_r}$, $\xi_Q(t) \in R^{n_r \times l}$ is given by

$\xi_Q(t) = Q\xi(t)$. and $B_Q \in R^{n_r \times m}$ is given by $B_Q = QB$. Then, $\dot{z}(t)$ satisfies (1), if and only if $\dot{z}(t)$ satisfies (6).

Proof: By using differential under integral, it is straightforward to verify that (1) in conjunction with the transformation (5);

Proposition 2:

The ordinary pair (J, B_Q) is completely controllable if (S_d) is v_0 spectrally stabilizable, i.e. if

$$\text{rank} \left[sI - \int_r^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) B \right] = n \text{ for all } s \in C_{-v_0}^+$$

Proof: follows from Proposition 2 of [4]

Assumption 3:

Follow from the definition of equivalently matched uncertainties in [5], the unmatched uncertainties $\xi_Q(t)$ is equivalent matched. That is, the bounding function $\rho'(z_t)$ defined by

$$\|z^T(t)PB_Q\xi_Q(t)\| \leq \rho'(z_t),$$

for all time, where P is a positive definite solution to Riccati equation yet to be defined.

4. CONTROLLER DESIGN AND RESULT

In this section we present a suitable controller design, which is based on the Min-Max Approach of Gutman, to stabilize $z(t)$.

Theorem 1 :

Suppose there exists a transformation satisfying the hypothesis of proposition 1. Then, for given $Q_R > 0$, there exist a positive definite solution P to the Riccati equation

$$J^T P + PJ - PB_Q B_Q^T P + Q_R = 0 \quad (7)$$

Furthermore, a stabilizing control law, with implies systems asymptotic stable, is given by

$$u(t) = u_L(t) + u_{N1}(t) + u_{N2}(t) \quad (8)$$

where

$$u_L(t) = -\frac{1}{2} B_Q^T P z(t) \quad (9)$$

and

$$u_{N1}(t) = \frac{\rho^2(x_t) B_Q^T P z(t)}{\rho(x_t) \|B_Q^T P z(t)\| + e^{-\phi t}} \quad (10)$$

and

$$u_{N2}(t) = -\frac{\rho'(z_t)}{\|B_Q^T P z(t)\|} \cdot \frac{\mu(z_t)}{\|\mu(z_t)\| + e^{-\phi t}} \quad (11)$$

where

$$\mu(z_t) = \rho'(z_t) \cdot \frac{B_Q^T P z(t)}{\|B_Q^T P z(t)\|}$$

and $\phi \in R^+$

Proof: First, we take the positive definite function

$$V_z(t) = z^T(t) P z(t) \quad (12)$$

as Lyapunov function candidate for the system (6) with control (7). Applying with the Riccati equation, the following is obtained of the derivative of V_z

$$\dot{V}_z = z^T(t) [J^T P + PJ] z(t) + 2z^T(t) P B_Q (u(t) + v(t)) + 2z^T(t) P \xi_Q(t)$$

Substitute $u_L(t)$ in the above equality to get

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= z^T(t) [J^T P + PJ - PB_Q B_Q^T P] z(t) \\ &\quad + 2z^T(t) P B_Q (u_{N1}(t) + u_{N2}(t) + v(t)) \\ &\quad + 2z^T(t) P \xi_Q(t) \\ &= -z^T(t) Q_R z(t) + 2z^T(t) P B_Q (u_{N1}(t) + v(t)) \\ &\quad + 2z^T(t) P (B_Q u_{N2}(t) + \xi_Q(t)) \end{aligned}$$

Consequently from $u_{N1}(t)$ defined in (10) that

$$\begin{aligned} &2z^T(t) P B_Q (u_{N1}(t) + v(t)) \\ &\leq 2 \left(\frac{\rho^2(x_t) \|B_Q^T P z(t)\|^2}{\rho(x_t) \|B_Q^T P z(t)\| + e^{-\phi t}} + \rho(x_t) \|B_Q^T P z(t)\| \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{e^{-\phi t} \rho(x_t) \|B_Q^T P z(t)\|}{\rho(x_t) \|B_Q^T P z(t)\| + e^{-\phi t}} \right) \\ &\leq 2e^{-\phi t} \end{aligned}$$

Similarly, from $u_{N2}(t)$ defined in (11) that

$$\begin{aligned} &2z^T(t) P (B_Q u_{N2}(t) + \xi_Q(t)) \\ &\leq 2 \left(-\frac{\|\mu(z_t)\|^2}{\|\mu(z_t)\| + e^{-\phi t}} + \|\mu(z_t)\| \right) \\ &\leq 2e^{-\phi t} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\dot{V}_z(t) \leq -z^T(t) Q_R z(t) + 4e^{-\phi t}$$

Finally, we can verified that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\|^2 = 0$$

Since stability of $z(t)$ implies stability of $x(t)$ as shown in proposition 1, we can now conclude that closed-loop system is asymptotically stable. \square

5. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

To illustrate the concept of proposed theorem and the equivalently matched uncertainties, let us consider the uncertain time-delay system described by

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + \int_{-1}^0 G x(t+\theta) d\theta + Bu(t) \quad (13)$$

where

$$A_0 = \begin{bmatrix} \omega(t) & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} & \omega'(t) \\ 0 & \omega'(t) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and $\|v(t)\| = \|\omega'(t)\| \leq 0.25$

Remark 1 :

Since $r = 1$, the above system can be displayed in terms of Stieltjes integrals as in (1) by taking

$$\alpha(\theta) = A_0 H_u(\theta) + A_1 H_u(\theta+1) + \theta G,$$

$$\xi(t) = [\omega(t) \ 0]x(t), \quad v(t) = [0 \ \omega'(t)]x(t-1),$$

where H_u denotes the Heaviside Unit Function with its derivative is the dirac delta function.

Controller design

From (13), with the help of the program of [6], it can be verified that system spectrum in C_{-1}^+ is found to be $\sigma_u(S_d) = \{s_1, s_2, s_3\}$

Where $s_1 = j\frac{\pi}{2}, s_2 = -j\frac{\pi}{2}, s_3 = 0.7145564$

(i) Check spectral stabilizability. Since

$$\text{rank} \left[sI - \int_{-r}^0 e^{s\theta} d\alpha(\theta) | B \right] = 2 = n$$

For all $s \in C_{-1}^+$, this verifies condition of spectral controllability.

(ii) As $n_c = \# \Lambda_u^+ = 1$. Corresponding to $s_1 \in \Lambda_u^+$, compute the system left q_1 from $q_1 \Delta(s_1)$ to obtain $q_1 = \left(-\frac{2}{\pi}, 1 \right) + j \left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}, 0 \right)$. And for $s_3 \in \Lambda_u^r$ the real eigenvalue, the system left eigenvector q_3 is similarly found from $q_3 \Delta(s_3)$ as $q_3 = (0, 1)$. By (3), we get

$$Q = \begin{bmatrix} -2/\pi & 1 \\ 2/\pi + \pi/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The Jordan matrix is obtained by inspection (4) as

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\pi/2 & 0 \\ \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

(iii) With $Q_R = I$ and the control matrix given as $B_Q = QB = \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} \right) \ 1 \right]^T$ the solution matrix P from (7) will be computed as

$$P = \begin{bmatrix} 1.6185530 & 0.2017791 & -2.3118047 \\ 0.201779 & 1.1261857 & -1.9542276 \\ -2.3118047 & -1.9542276 & 8.8476814 \end{bmatrix}$$

(iv) Finally, as a consequence, we have a suitable control as defined in (8) where $\rho'(z_t)$ can be computed as defined in assumption 3

5. CONCLUSIONS

Global and asymptotic stabilization of uncertain time-delay systems in the absence of matching conditions is considered. A class of unmatched uncertainties, called equivalently matched uncertainties, is defined. It has been shown that, if the nominal system is spectrally stabilizable, the proposed robust control law guarantees asymptotic stability of the uncertain time-delay system for all matched and equivalently matched uncertainties as long as bounded size of the uncertainties are available. These results are achieved by using the linear transformation of Fiagbedzi and Pearson, and by making a judicious of Lyapunov function such that the unmatched uncertainties become equivalently matched.

ACKNOWLEDGMENT

This work is partly supported by National Science and Technology Development Agency, Ministry of Science Technology and Environment, The Thai Royal Government.

REFERENCES

- [1] E. CHERES, S. GUTMAN and Z.J. PALMOR, "Stabilization of uncertain dynamical systems including state delay", IEEE Trans. on AUTOMATIC CONTROL, Vol. AC-34, No.11, pp.1199-1203, 1989.
- [2] S.K. NGUANG, "Robust stabilization for a class of time-delay nonlinear systems", IEE Proceeding on Control Theory and Applications, Vol. 141, No. 5, pp.285-288, September 1994.
- [3] S. PHOJARUENCHANACHAI, K. UAHCHINKUL and Y. PREMPRANEERACH, "Robust Stabilization of State Delayed System", IEE Proceeding on Control Theory and Applications, Vol. 145, No. 1, pp.87-91, January 1998.
- [4] Y.A. FIAGBEDZI and A. E. PEARSON, "Output Feedback stabilization of delay systems via generalization of the transformation method", International Journal of Control, Vol. 51, No. 4, pp.801-822, 1990.
- [5] Z. Qu, "Global Stabilization of Nonlinear Systems with a Class of Unmatched Uncertainties", Systems & Control letters, Vol.18, pp.301-307, 1992.
- [6] A.MANITUS, H. TRAN, G. PAYRE and R. ROY, "Computation of eigenvalues associated with functional differential equations", SIAM Journal on Science and Statistics of Computing, Vol. 8, pp. 222-247, 1987.