การนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ไปใช้ปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

RUNGE-KUTTA METHOD WITH GAUSS-LEGENDRE QUADRATURE FORMULAS

สิริรัตน์ ขันติดิลกวงษา

SIRIRAT KHUNTIDILOKWONGSA

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2547

ISBN 974-9708-27-x

RUNGE-KUTTA METHOD WITH
GAUSS-LEGENDRE QUADRATURE FORMULAS

SIRIRAT KHUNTIDILOKWONGSA

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2004

ISBN 974-9708-27-x

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ไปใช้ปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

นักศึกษา นางสาวสิริรัตน์ ขันติดิลกวงษา

รหัสประจำตัว 45064102

ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

พ.ศ. 2547

อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข

บทคัดย่อ

เนื้อหาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะนำเสนอระเบียบวิธีที่พัฒนารูปแบบมาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งเป็นรูปแบบการประมาณค่าปริพันธ์ ให้อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณระหว่างจุดถ่วงกับค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบ มาใช้ในการกำหนดจุดของรูปแบบและจุดถ่วงในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยระเบียบวิธีดังกล่าวจะให้ผลเฉลยจากการแก้ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูป $O(h^{s+2})$ เมื่อ s คืออันดับของระเบียบวิธี

Thesis	Runge-Kutta Method with Gauss-Legendre Quadrature Formulas
Student	Ms. Sirirat Khuntidilokwongsa
Student ID	45064102
Degree	Master of Science
Programme	Applied Mathematics
Year	2004
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk

ABSTRACT

The Gauss-Lergendre quadrature formulas approximate the integral of the complicated functions by replacing the integral by the sum of the product of value of the function at the nodal points and its weights. In this research, we will use the points and weights from the Gauss-Lergendre quadrature formulas to be points and weights in the Runge-Kutta formulas. Then the local truncation errors are $O(h^{s+2})$ for the new Runge-Kutta formulas of order s

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาที่มีคุณค่าต่องานวิจัยนี้จาก รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณบิดา-มารดา ผู้ให้กำเนิด ให้กำลังใจและให้ความช่วยเหลือมาตลอด

ขอขอบคุณอาจารย์ที่เคารพทุกท่านที่ได้ประสิทธิประสาทวิชาความรู้และถ่ายทอดประสบการณ์ที่ดีให้กับผู้วิจัย

ขอขอบคุณ นางสาวสุธิตา มณีชัย ซึ่งมีส่วนช่วยในการตรวจทานและเสนอแนะการเขียนวิทยานิพนธ์ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ นักศึกษาทุกคนที่ให้คำแนะนำต่าง ๆ และ ยังให้กำลังใจต่อผู้วิจัยอย่างใกล้ชิดเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

สิริรัตน์ ขันติดิลกวงษา

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

คำย่อและสัญลักษณ์

RK	ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
RKN	ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้
b_{ij}	สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
a_j	สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
c_i	สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
α_i	สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้
β_{ij}	สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้
k_i	สถานะที่ i ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
h	ขนาดขั้น ที่ใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ของปัญหาค่าเริ่มต้น

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ปัญหาต่าง ๆ ที่อยู่ในงานวิจัย ทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และสาขาวิชาอื่น ๆ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า ดังรูปที่ 1.1 ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ตามกฎของเคอร์ชอร์ฟ (Kirchhoff's law)

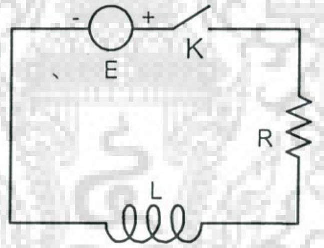
$$L\frac{dI}{dt}+RI=E$$

เมื่อ I แทน กระแสไฟฟ้า

E แทน ต้นกำเนิดไฟฟ้า

R แทน ค่าความต้านทาน

L แทน ค่าตัวนำไฟฟ้า



รูปที่ 1.1 แสดงวงจรไฟฟ้าแบบอนุกรม

สมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้อธิบายปัญหาต่างๆ มักจะมีการกำหนดเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้นให้กับสมการที่สร้างขึ้น และเรียกสมการในลักษณะนี้ว่า ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น (initial value problem) และสำหรับรูปแบบทั่วไปของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง ตามสมการ (1.1)

$$y' = f(x,y) \tag{1.1}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(x_0) = y_0$

โดยทั่วไปแล้วจะใช้คณิตศาสตร์เชิงวิเคราะห์ เพื่อหาผลเฉลยแท้จริง แต่ในบางปัญหาการหาผลเฉลยด้วยวิธีดังกล่าวมีความยุ่งยากและใช้เวลานานหรือในบางปัญหาก็ไม่สามารถหาผล

เฉลยแท้จริงได้ ดังนั้นการประมาณค่าด้วยคณิตศาสตร์เชิงตัวเลขจึงมีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาดังกล่าว โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นนี้ คือ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta method) ซึ่งเป็นกระบวนการทำซ้ำที่มีรูปแบบ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \quad , \qquad m = 1,2, \dots \tag{1.2}$$

โดยมีรูปแบบของฟังก์ชันส่วนเพิ่มคือ

$$\phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{1.3}$$

เมื่อ $$k_i = \begin{cases} f(x_m, y_m) & ; \quad i = 1 \\ f(x_m + hc_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j & ; \quad i = 1,2,\dots,s \end{cases}$$

และ $$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}$$

โดยที่ a_i, c_i และ b_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และ h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้น

จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาดังกล่าวข้างต้น มีนักวิจัยหลายท่านได้ทำการพัฒนาและปรับปรุงรูปแบบดังกล่าว เพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลเฉลยการศึกษาค้นคว้าพบว่า ระเบียบวิธีหนึ่งที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลายคือ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก โดยนักวิจัยชื่อ ไฟล์เบิร์ก (E. Fehlberg)

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยมุ่งหวังที่จะสร้างระเบียบวิธีใหม่ ซึ่งพัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ด้วยเหตุผลเช่นเดียวกับ ไฟล์เบิร์ก คือเพิ่มความถูกต้องของผลเฉลยจากการแก้ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง โดยการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งเป็นวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับประมาณหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน โดยจะทำให้อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณของจุดถ่วง (weighting coefficients) กับค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบ (function at the nodal points) ซึ่งเป็นรากของพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ มาปรับปรุงใช้เป็นจุดถ่วงและจุดของรูปแบบในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อสร้างระเบียบวิธีที่พัฒนารูปแบบมาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้เป็นจุดของรูปแบบและจุดถ่วงในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันเป็นประโยชน์สำหรับการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการหาผลเฉลย

1.3 ขอบเขตการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะทำการสร้างระเบียบวิธีที่พัฒนารูปแบบมาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 2, 3, 4, 5 และ 6 โดยการนำจุดของรูปแบบ และจุดถ่วงที่ได้มาจากรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์มาประยุกต์ใช้ เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x, y)$$

กับเงื่อนไขเริ่มต้น $$y(x_0) = y_0$$

โดยการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาสำหรับงานวิจัยนี้ ยังคงรักษาการเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบขั้นเดียว (one-step method)

1.4 ขั้นตอนของการศึกษา

ขั้นตอนที่ 1 : ศึกษาความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เพื่อใช้เป็นแนวทางในการวิจัย

ขั้นตอนที่ 2 : ทำการสร้างระเบียบวิธีที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 2-6 จากการนำรูปแบบของเกาส์เลอจองด์มาใช้ในการกำหนดค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบ

ขั้นตอนที่ 3 : เขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้จากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้

ขั้นตอนที่ 4 : สรุปผลการวิจัยและเขียนวิทยานิพนธ์

1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในการศึกษา

คำจำกัดความของคำศัพท์ที่ใช้ในงานวิจัย มีดังนี้

1. "ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา" ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ หมายถึง ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาแบบชัดแจ้ง (explicit Runge-Kutta method) ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{i} a_j k_j \qquad ; i = 1,2,\ldots,s$$

$$\text{โดยที่} \quad k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j)$$

เมื่อ $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}$ **และ** c_i, b_{ij}, a_j **เป็นค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง**

2. **ระเบียบวิธีแบบขั้นเดียว คือ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข** (numerical method) **ที่ใช้ข้อมูล** เฉพาะที่จุด x_n เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด x_{n+1} เช่น ระเบียบวิธีออยเลอร์ (Euler method)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ที่ใช้ในการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาในงานวิจัยนี้ โดยในส่วนความรู้พื้นฐานจะกล่าวถึง ลักษณะการประมาณค่านิยาม และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับ

- รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์
- ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

และในส่วนของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จะกล่าวถึงงานวิจัยซึ่งเกี่ยวกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ที่ผู้วิจัยศึกษาเพื่อเป็นแนวทางในการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาในงานวิจัย

2.1 ความรู้พื้นฐาน

2.1.1 รูปแบบเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre quadrature formulas)

ในปี ค.ศ. 1805 นักคณิตศาสตร์ชื่อ เกาส์ (C.F. Gauss) และ เลอจองด์ (A.M. Legendre) ได้สร้างรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน ให้อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณระหว่างจุดถ่วง w_i กับค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบ ξ_i ที่สอดคล้องกับ n จุดของเกาส์ รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์แสดงได้ดังสมการ 2.1

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \qquad (2.1)$$

เมื่อจุดของรูปแบบ ξ_i ; i = 1, 2,..., n เป็นจุดใดๆ ในช่วงปิด [-1,1] ซึ่งเป็นรากของพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ (Legendre orthogonal polynomials) $p_n(\xi)$ [1] ซึ่ง

$$p_n(\xi) = \begin{cases} 1 \ ; \ n = 0 \\ x \ ; \ n = 1 \\ \dfrac{1}{n}[(2n-1)\xi p_{n-1}(\xi) - (n-1)p_{n-2}(\xi)] \quad ; n > 1 \end{cases} \qquad (2.2)$$

และ $$w_i = \frac{1}{p'_n(\xi_i)} \int_{-1}^{1} \frac{p_n(\xi)}{(\xi - \xi_i)} d\xi \qquad (2.3)$$

สำหรับค่าจุดของรูปแบบ ξ_i และค่าจุดถ่วง w_i ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าจุดของรูปแบบ และจุดถ่วงสำหรับรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์

$\int_{-1}^{1} f(\xi)dx \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)$		
n	ξ_i	w_i
2	-0.577350269189626	1.0
	0.577350269189626	1.0
3	-0.774596669241483	0.555555555555556
	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556
4	-0.861136311594053	0.347854845137454
	-0.339981043584856	0.652145154862546
	0.339981043584856	0.652145154862546
	0.861136311594053	0.347854845137454
5	-0.906179845938664	0.236926885056189
	-0.535469310105683	0.478628670499366
	0.0	0.568888888888889
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.906179845938664	0.236926885056189

จากรูปแบบทั่วไปของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์จะเห็นได้ว่ารูปแบบดังกล่าว เป็นการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตในแกนโคออร์ดิเนต ξ จากลิมิต −1 ถึง 1 ซึ่งสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตในโคออร์ดิเนต x จากลิมิต a ถึง b ใด ๆ จะมีรูปแบบเกาส์-เลอจองด์เป็นไปตามทฤษฎีบท 2.1 [3]

ทฤษฎีบท 2.1 (The Gauss-Legendre Translation) กำหนดจุดของรูปแบบ ξ_i และจุดถ่วง w_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ n จุด สำหรับประมาณค่าปริพันธ์ในแกนโคออร์ดิเนต ξ จากลิมิต −1 ถึง 1 แล้วจะได้ว่า รูปแบบเกาส์-เลอจองด์สำหรับช่วงการหาปริพันธ์ a ถึง b มีรูปแบบคือ

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\xi_i)$$

พิสูจน์

ให้ ξ_i และ w_i ; i = 1, 2, ..., n เป็นค่าจุดของรูปแบบและค่าจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ n จุด ในการประมาณค่าปริพันธ์ในแกนโคออร์ดิเนต ξ จากลิมิต –1 ถึง 1

ซึ่งสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์ในแกนโคออร์ดิเนต x จากลิมิต a ถึง b จะได้ว่า

$$x = \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\xi$$

เพราะฉะนั้น

$$dx = \frac{b-a}{2}d\xi$$

ทำให้ได้ว่า รูปแบบเกาส์-เลอจองด์สำหรับช่วงการหาปริพันธ์ a ถึง b มีรูปแบบ คือ

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\xi)\frac{b-a}{2}d\xi \\ &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\xi)\,d\xi \\ &= \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\xi_i)\end{aligned}$$

$\square$

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นรากของพหุนามตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด [a,b] ตามฟังก์ชันถ่วง w(x) สมมติว่าสามารถหาค่า $A_1, A_2, ..., A_n$ ได้และการหาปริพันธ์

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f] \qquad (2.4)$$

ไม่มีความคลาดเคลื่อน สำหรับ f(x) ที่เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน n-1 แล้วรูปแบบ (2.4) จะไม่มีค่าความคลาดเคลื่อนเลย ถ้า f(x) เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน 2n-1

พิสูจน์ ดูเอกสารอ้างอิง [3]

2.1.2 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Methods)

ปี ค.ศ. 1895 นักคณิตศาสตร์ชื่อ รุงเง (C. Runge) ได้สร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้น ต่อมาในปี ค.ศ. 1901 นักคณิตศาสตร์ชื่อ คุตตา (W. Kutta) ได้ปรับปรุงวิธีการของรุงเง และให้ชื่อระเบียบวิธีใหม่นี้ว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Methods) [3] ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันมากในการประมาณค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x,y) \quad , \; y(x_0) = y_0 \tag{2.5}$$

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเป็นระเบียบวิธีแบบขั้นเดียว โดยรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ s คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \quad , \qquad m = 1,2,\ldots \tag{2.6}$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (increment function) $\phi(x_m, y_m; h)$ คือ ความชันเฉลี่ยตลอดขนาดขั้น h ซึ่งกำหนดให้มีรูปแบบโดยทั่วไป [3] ดังนี้

$$\phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{2.7}$$

เมื่อ
$$k_i = \begin{cases} f(x_m, y_m) & ; \; i = 1 \\ f(x_m + hc_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j & ; \; i = 1,2,\ldots,s \end{cases} \tag{2.8}$$

และ
$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \tag{2.9}$$

โดยที่ a_i, c_i และ b_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา , h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้นมีค่าเท่ากับ $x_{m+1} - x_m$ และ s เป็นอันดับของระเบียบวิธี

ต่อมา ในปี ค.ศ. 1964 นักคณิตศาสตร์ชื่อ บุชเชอร์ (J.C. Butcher) ได้เสนอ Butcher-array [4] เพื่อใช้ในการแสดงค่าสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ทำให้สะดวกต่อการพิจารณารูปแบบของระเบียบวิธีดังกล่าว ซึ่งรูปแบบของ Butcher-array แสดงดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดง Butcher-array สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาทั่วไป

$$
\begin{array}{c|c} c & B \\ \hline & a^T \end{array}
=
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1S} \\
c_2 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2S} \\
c_3 & b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3S} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_S & b_{S1} & b_{S2} & \cdots & b_{SS} \\
\hline
 & a_1 & a_2 & \cdots & a_S
\end{array}
$$

ปัจจุบันระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่นิยมใช้นั้น เป็นระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาแบบชัดแจ้ง (explicit Runge-Kutta method) ซึ่งมีรูปแบบตามสมการ (2.6)-(2.9) โดยสามารถแสดง Butcher-array ได้ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 แสดง Butcher-array สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาแบบชัดแจ้ง (explicit Rung-Kutta method)

$$
\begin{array}{c|c} c & B \\ \hline & a^T \end{array}
=
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & b_{21} & & & & \\
c_3 & b_{31} & b_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_S & b_{S1} & b_{S2} & \cdots & b_{S,S-1} & \\
\hline
 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{S-1} & a_S
\end{array}
$$

นิยาม 2.1 วิธีการขั้นเดียวที่มีรูปแบบตาม (2.6) สำหรับปัญหา (2.5) จะมีอันดับ p ถ้า p เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด ที่ทำให้ผลการกระจายฟังก์ชันรอบจุด x โดยวิธีเทย์เลอร์เป็นไปตามสมการ (2.10)

$$y(x+h) - y(x) - h\phi(x, y(x); h) = O(h^{p+1}) \tag{2.10}$$

เมื่อ y(x) เป็นผลเฉลยที่แท้จริงของปัญหา (2.5) [5]

จากนิยาม 2.1 ทำให้ได้ว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s จะให้ผลเฉลยในการคำนวณที่มีความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูป $O(h^{s+1})$ ซึ่งหมายความว่า ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการคำนวณโดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s จะแปรผันโดยตรงกับขนาดขั้น h อันดับ s+1 ด้วยเหตุนี้ทำให้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4 เป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4 คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_3)$$

เมื่อ (2.11)

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

ในช่วงต่อมาได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านทำการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีความถูกต้องเพิ่มมากยิ่งขึ้น ดังเช่น ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-เมอร์สัน [6] ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}k_1 + \frac{4}{6}k_4 + \frac{1}{6}k_5$$

เมื่อ

$$k_1 = hf(x_m, y_m)$$

$$k_2 = hf(x_m + \frac{1}{3}h, y_m + \frac{1}{3}hk_1) \qquad (2.12)$$

$$k_3 = hf(x_m + \frac{1}{3}h, y_m + \frac{1}{6}hk_1 + \frac{1}{6}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{8}hk_1 + \frac{3}{8}hk_3)$$

$$k_5 = hf(x_m + h, y_m + \frac{1}{2}hk_1 - \frac{3}{2}hk_3 + 2hk_4)$$

และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก เสนอไว้เมื่อปี ค.ศ. 1969 โดยนักวิจัยชื่อ ไฟล์เบิร์ก (E. Fehlberg) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการหนึ่งที่เป็นยอมรับ โดยระเบียบวิธีดังกล่าวเป็นระเบียบวิธีที่ปรับปรุงรูปแบบมาจากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (สมการ 2.6-2.9) กรณีที่ s = 5 โดยการตัดเทอม k_2 ออกจากฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (สมการ 2.7) เมื่อทำการหาสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีแล้ว จะได้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก มีรูปแบบคือ

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \tag{2.13}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{4}h, y_n + \tfrac{1}{4}hk_1) \\
k_3 &= hf(x_n + \tfrac{3}{8}h, y_n + \tfrac{3}{32}hk_1 + \tfrac{9}{32}k_2) \\
k_4 &= hf(x_n + \tfrac{12}{13}h, y_n + \tfrac{1932}{2197}hk_1 - \tfrac{7200}{2197}hk_2 + \tfrac{7296}{2197}hk_3) \\
k_5 &= hf(x_n + h, y_n + \tfrac{439}{216}hk_1 - 8hk_2 + \tfrac{3680}{513}hk_3 - \tfrac{845}{4104}hk_4)
\end{aligned}$$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งจากการศึกษาสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. ในปี ค.ศ. 2000 David Goeken และ Olin Johnson [7] ได้เสนองานวิจัยเรื่อง "Fifth-order Runge-Kutta with high order derivative approximations" เป็นงานวิจัยที่เสนอระเบียบวิธีที่ได้จากการปรับปรุงรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตากรณีที่ s = 5 โดยการตัดเทอม k_5 ออกจากฟังก์ชันส่วนเพิ่ม และทำการเพิ่มพจน์อนุพันธ์ในเทอม k_i สำหรับค่า i = 2, 3 และ 4 ทำให้ได้รูปแบบดังสมการ (2.12) ซึ่งระเบียบวิธีนี้ใช้สำหรับปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่อยู่ในรูปสมการออโตโน-มัสเท่านั้น

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5}{48}k_1 + \frac{27}{56}k_2 + \frac{125}{336}k_3 + \frac{1}{24}k_4$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n) \\
k_2 &= hf(y_n + \tfrac{1}{3}k_1 + \tfrac{1}{18}hf_yk_1) \qquad (2.14) \\
k_3 &= hf(y_n - \tfrac{152}{125}k_1 + \tfrac{252}{125}k_2 - \tfrac{44}{125}hf_yk_1) \\
k_4 &= hf(y_n + \tfrac{19}{2}k_1 - \tfrac{72}{7}k_2 + \tfrac{25}{14}k_3 + \tfrac{5}{2}hf_yk_1)
\end{aligned}$$

2. ในปี ค.ศ. 2003 Xinyuan Wu [8] ได้เสนองานวิจัย "A class of Runge-Kutta formulae of order three and four with reduced evaluations of function" ซึ่งเป็นงานวิจัยที่เสนอระเบียบวิธีที่ได้จากการปรับปรุงรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา กรณีที่ s = 3 และ s = 4 โดยทำการเพิ่มพจน์อนุพันธ์ f' ในฟังก์ชันส่วนเพิ่ม $\phi(t_n, y_n; h)$ (สมการ 2.5) ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งระเบียบวิธีที่ได้จะเป็นระเบียบวิธีแบบหลายขั้น (multi-step method) และใช้สำหรับปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่อยู่ในรูปสมการออโตโนมัสเช่นเดียวกัน โดยรูปแบบหนึ่งที่ได้จากงานวิจัยนี้คือ

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = \frac{3}{2}y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} + h(&\frac{1}{2}f_n + \frac{121}{192}f(y_n + \frac{8}{11}hf_n) \\
&+ \frac{23}{192}f(y_n - \frac{44}{23}hf_n + \frac{44}{23}hf(y_n + \frac{8}{11}hf_n)) \\
&- \frac{121}{192}f(y_{n-1} + \frac{8}{11}hf_{n-1}) - \frac{23}{192}hf(y_{n-1} - \frac{44}{23}hf_{n-1} \\
&+ \frac{44}{23}f(y_{n-1} + \frac{8}{11}hf_{n-1})))
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

ในบทนี้ผู้วิจัยได้กล่าวถึงรายละเอียดต่าง ๆ เกี่ยวกับ รูปแบบเกาส์-เลอจองด์ และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เพื่อใช้ในการศึกษาลักษณะการสร้างระเบียบวิธีที่ได้จากงานวิจัยดังกล่าว ซึ่งเป็นส่วนสำคัญสำหรับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาในงานวิจัยนี้ โดยการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งขั้นตอนการสร้างจะกล่าวถึงในบทต่อไป

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้ได้กล่าวถึงวิธีการดำเนินงานวิจัย โดยขั้นแรกจะแสดงการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งเป็นระเบียบวิธีพื้นฐานสำหรับงานวิจัยนี้ และขั้นต่อมาจะแสดงการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

3.1 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ในส่วนนี้จะแสดงการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

เนื่องจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เป็นระเบียบวิธีที่ใช้กระบวนการทำซ้ำ เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s จะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่จุดของรูปแบบ s จุด บนช่วง $[x_m, x_{m+1}]$ เพื่อประมาณค่า $y(x_{m+1})$ จากกระบวนการดังกล่าว ทำให้ได้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s มีรูปแบบทั่วไปดังต่อไปนี้

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{3.1}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\beta_{11}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_{21}k_1 + h\beta_{22}k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_S = f(x_m + h\alpha_{S-1}, y_m + h\beta_{s-1,1}k_1 + h\beta_{s-1,2}k_2 + \dots + h\beta_{s-1,s-1}k_{s-1})$$

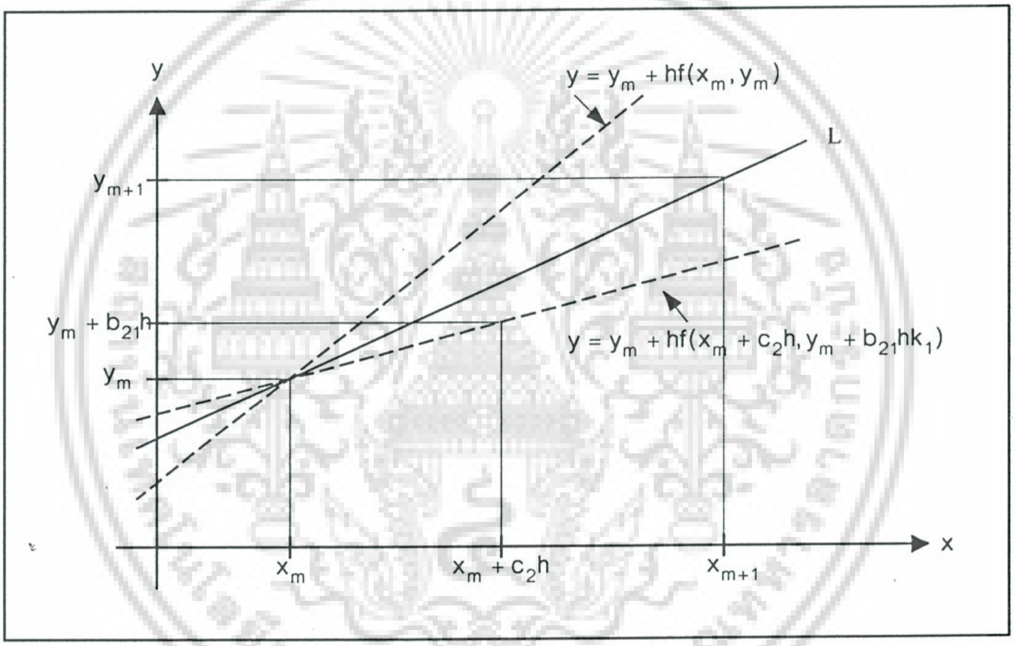
จากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ s นำมาพิจารณาในกรณีที่ s= 2 จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2)$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m, y_m) \tag{3.2}$$

$$k_2 = f(x_m + c_2h, y_m + b_{21}hk_1)$$

กล่าวคือ ระเบียบวิธี (3.2) จะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีความชันเท่ากับค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่จุดของรูปแบบ 2 จุด คือ x_m และ $x_m + c_2h$; $0 < c_2 \le 1$ เมื่อ h คือขนาดขั้น ซึ่งมีค่าเท่ากับ $x_{m+1} - x_m$ เพื่อประมาณค่า $y(x_{m+1})$ ดังเช่นเส้นตรง L ในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงการประมาณค่า $y(x_{m+1})$ โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 2

จากสมการ (3.2) ตามเงื่อนไขของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (สมการ 2.9) จะได้ว่า $c_2 = b_{21}$ และเมื่อทำการกระจาย k_1 และ k_2 ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้ว่า

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + c_2h, y_m + b_{21}f(x_m, y_m))$$

$$= f(x_m, y_m) + h(c_2f_x + b_{21}ff_y) + O(h^2)$$

ดังนั้น $$y_{m+1} = y_m + h(a_1 + a_2)f(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}(a_2(c_2 f_x + b_{21} f f_y)) + O(h^3) \tag{3.3}$$

กำหนดให้ $y(x_{m+1})$ เป็นผลเฉลยแท้จริงของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

ซึ่งสามารถเขียน $y(x_{m+1})$ ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$y(x_{m+1}) = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}(f_x + f f_y) + O(h^3) \tag{3.4}$$

นำสมการ (3.3) และ (3.4) มาเทียบสัมประสิทธิ์ในเทอม h จะได้ว่า

$$a_1 + a_2 = 1,\ a_2 c_2 = \frac{1}{2} \text{ และ } a_2 b_{21} = \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

เรียกเงื่อนไข (3.5) ว่าเป็น เงื่อนไขอันดับ (order conditions) ของระเบียบวิธี (3.2)

จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าว กำหนดให้ $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ จะได้ $b_{21} = c_2 = 1$ ดังนั้น ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 2 มีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$\text{โดยที่} \quad k_1 = f(x_m, y_m) \tag{3.6}$$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + k_1)$$

และให้ผลเฉลยในการแก้ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น ที่มีความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูป $O(h^3)$ จากการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาดังกล่าว จะเป็นพื้นฐานในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ในอันดับสูงขึ้น ซึ่งจะมีรูปแบบทั่วไปตามสมการ (2.6)-(2.9) โดยการเพิ่มพจน์ของการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี ซึ่งรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 3 และ 4 สามารถแสดงโดยใช้ Butcher-array ได้ดังตารางที่ 3.1 โดยที่ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 3 และ 4 จะให้ผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นมีความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูป $O(h^4)$ และ $O(h^5)$ ตามลำดับ

ตารางที่ 3.1 แสดง Butcher-array สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ 3 และ 4

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ 3 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ 4

3.2 การประยุกต์ใช้รูปแบบเกาส์-เลอจองด์สำหรับสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ในหัวข้อนี้จะแสดงการสร้างระเบียบวิธีที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ โดยจะใช้สัญลักษณ์ RKN แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้จากงานวิจัยนี้

สำหรับการนำรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์มาใช้ในการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา จะได้ระเบียบวิธี RKN อันดับ s ที่มีรูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \quad , \qquad m = 1, 2, \ldots$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม $\phi(x_m, y_m; h)$ เป็นค่าความชันเฉลี่ยที่แต่ละจุดของรูปแบบที่นำมาจากรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ โดยกำหนดให้มีรูปแบบทั่วไปดังสมการ (3.7)

$$\phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{3.7}$$

โดยที่ $k_i = \begin{cases} f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\beta_{11} f(x_m, y_m)) & ; \quad i = 1 \\ f(x_m + h\alpha_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j & ; \quad i = 2, 3, \ldots, s \end{cases}$

เมื่อ β_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา, h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้น และค่า a_i, α_i จะถูกกำหนดโดยรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งเกิดจากการแปลงจุดของรูปแบบ

$\xi_i \in [-1,1]$ และจุดถ่วง w_i ; $i = 1, 2,\ldots, s$ ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ s จุด เป็นจุดของรูปแบบ $\psi_i \in [x_m, x_{m+1}]$ และจุดถ่วง a_i ; $i = 1, 2,\ldots, s$ สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ s ซึ่งมีความสัมพันธ์สำหรับการแปลงจุดของรูปแบบ คือ

$$\psi_i = x_m + \frac{h}{2}(\xi_i + 1) \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{3.8}$$

เมื่อ $h = x_{m+1} - x_m$

จากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธี RKN ดังกล่าว นำมาใช้สำหรับการสร้างระเบียบวิธี RKN อันดับต่าง ๆ โดยมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำจุดของรูปแบบ และจุดถ่วงจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ มาปรับปรุงใช้เป็นจุดของรูปแบบ และจุดถ่วงในระเบียบวิธี RKN ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ของสมการ (3.8)

ขั้นตอนที่ 3 สร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าของระเบียบวิธี โดยการนำรูปแบบที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 มากระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ และเทียบสัมประสิทธิ์ในเทอม h กับอนุกรมกำลังเทย์เลอร์ของเทอม $y(x_{m+1})$

ซึ่งสามารถแสดงรายละเอียดต่าง ๆ ได้ดังต่อไปนี้

3.2.1 ระเบียบวิธี RKN อันดับ 2

ในส่วนนี้จะแสดงการสร้างระเบียบวิธี RKN อันดับ 2 ซึ่งรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีอันดับ 2 สำหรับการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2)$$

โดยที่ (3.9)

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y + \beta_{11} h f(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y + \beta_{21} h k_1)$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ a_1, a_2 , α_1 และ α_2 ของระเบียบวิธี (3.9) ถูกกำหนดจากการปรับปรุงใช้จุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 2 จุด ในระเบียบวิธี ซึ่งค่าจุดของรูปแบบและจุดถ่วงสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 2 แสดงดังตารางที่ 3.2 เมื่อ $h = x_{m+1} - x_m$

ตารางที่ 3.2 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 2

	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		ระเบียบวิธี RKN อันดับ 2	
	จุดของรูปแบบ ξ_i	จุดถ่วง w_i	จุดของรูปแบบ ψ_i	จุดถ่วง a_i
i =1	-2131/3691	1	$x_m + \frac{780}{3691}h$	1/2
2	213/3691	1	$x_m + \frac{780}{989}h$	1/2

เพราะฉะนั้นจากสมการ (3.8) จะได้ว่า

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{3.10}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y + \beta_{11} hf(x_m, y_m))$$
$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y + \beta_{21} hk_1)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \frac{780}{3691}$ และ $\alpha_2 = \frac{780}{989}$

จากสมการ (3.10) ทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าที่เหลือ คือ β_{11} และ β_{21} ซึ่งสามารถทำได้โดยการนำ k_1 และ k_2 มากระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังต่อไปนี้

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf)$$
$$= f + h[\alpha_1 f_x + \beta_{11} ff_y] + O(h^2)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} hk_1)$$
$$= f + h[\alpha_2 f_x + \beta_{21} ff_y] + O(h^2)$$

เพราะฉะนั้นจะได้รูปแบบของระเบียบวิธี (3.10) ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ คือ

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}[(\alpha_1 + \alpha_2)f_x + (\beta_{11} + \beta_{21})ff_y] + O(h^3) \tag{3.11}$$

ถ้า $y(x_{m+1})$ เป็นผลเฉลยจริงของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.12}$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังสมการ (3.13)

$$y(x_{m+1}) = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + O(h^3) \tag{3.13}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.11) และ (3.13) นำมาเทียบสัมประสิทธิ์ในเทอม h จะได้เงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธี (3.10) คือ

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\beta_{11} + \beta_{21} = 1$$

จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าว ทำให้สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าของระเบียบวิธี โดยกำหนดให้ $\beta_{11} = \alpha_1$ จะได้ว่า $\beta_{21} = \alpha_2$ เพราะฉะนั้น รูปแบบของระเบียบวิธี RKN อันดับ 2 คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

โดยที่ (3.14)

$$k_1 = f(x_m + \frac{780}{3691}h, y_m + \frac{780}{3691}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{780}{989}h, y_m + \frac{780}{989}hk_1)$$

จากกระบวนการสร้างระเบียบวิธี RKN อันดับ 2 ดังกล่าว จะเป็นพื้นฐานในการสร้างระเบียบวิธี RKN ในอันดับสูงขึ้น และต่อไปผู้วิจัยจะแสดงการสร้างระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 ซึ่งมีรูปแบบของกระบวนการสร้างเช่นเดียวกันนี้

3.2.2 ระเบียบวิธี RKN อันดับ 3

สำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 3 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีซึ่งมีรูปแบบทั่วไปตามสมการ (3.6) กรณีที่ $s = 3$ และมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่ 3.3 เมื่อ $h = x_{m+1} - x_m$

ตารางที่ 3.3 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 3

	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		ระเบียบวิธี RKN อันดับ 3	
	จุดของรูปแบบ ξ_i	จุดถ่วง w_i	จุดของรูปแบบ ψ_i	จุดถ่วง a_i
$i=1$	-3409/4401	5/9	$x_m + \frac{63}{559}h$	5/18
2	0	8/9	$x_m + \frac{1}{2}h$	8/18
3	3409/4401	5/9	$x_m + \frac{496}{559}h$	5/18

จะได้ว่า ระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 มีรูปแบบทั่วไป คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3)$$

โดยที่ (3.15)

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf(x_m, y_m))$$
$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} hk_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} hk_1 + \beta_{32} hk_2)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \frac{63}{559}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ และ $\alpha_3 = \frac{496}{559}$

สร้างเงื่อนไขของระเบียบวิธี เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบ โดยการกระจาย k_1, k_2 และ k_3 ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf)$$
$$= f + h[\alpha_1 f_x + \beta_{11} ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_1^2 f_{xx} + 2\alpha_1\beta_{11} ff_{xy} + f^2 f_{yy}] + O(h^3)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} h k_1)$$

$$= f + h[\alpha_2 f_x + \beta_{21} ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_2^2 f_{xx} + 2\alpha_2\beta_{21} ff_{xy} + 2\alpha_1\beta_2 f_x f_y + \beta_{21}^2 f^2 f_{yy}$$

$$+ \beta_{11}\beta_{21} ff_y^2] + O(h^3)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2)$$

$$= f + h[\alpha_3 f_x + (\beta_{31} + \beta_{32}) ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_3^2 f_{xx} + 2\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) ff_{xy}$$

$$+ 2(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) f_x f_y + (\beta_{31} + \beta_{32})^2 f^2 f_{yy} + 2(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32}) ff_y^2] + O(h^3)$$

แทนค่า k_1, k_2 และ k_3 ที่ได้จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการ (3.15) จะได้ว่า

$$y_{m+1} = y_m + [\frac{5}{18} + \frac{8}{18} + \frac{5}{18}]hf + h^2[(\frac{5}{18}\alpha_1 + \frac{8}{18}\alpha_2 + \frac{5}{18}\alpha_3) f_x + (\frac{5}{18}\beta_{11} + \frac{8}{18}\beta_{21}$$

$$+ \frac{5}{18}(\beta_{31} + \beta_{32})) ff_y] + h^3[(\frac{5}{36}\alpha_1^2 + \frac{8}{36}\alpha_2^2 + \frac{5}{36}\alpha_3^2) f_{xx} + (\frac{5}{18}\alpha_1\beta_{11}$$

$$+ \frac{8}{18}\alpha_2\beta_{21} + \frac{5}{18}\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})) ff_{xy} + (\frac{5}{18}(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + \frac{8}{18}\alpha_1\beta_{21}) f_x f_y + (\frac{5}{36}\beta_{11}^2$$

$$+ \frac{8}{36}\beta_{21}^2 + \frac{5}{36}(\beta_{31} + \beta_{32})^2) f^2 f_{yy} + (\frac{8}{18}\beta_{11}\beta_{21} + \frac{5}{18}(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32})) ff_y^2] + O(h^4)$$

(3.16)

แต่เนื่องจาก

$$y(x_{m+1}) = y_m + hf + \frac{h^2}{2}[f_x + ff_y] + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f^2 f_{yy} + ff_y^2] + O(h^4)$$

(3.17)

เมื่อ $y(x_{m+1})$ เป็นผลเฉลยจริงของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (3.12)

เพราะฉะนั้นจากสมการ (3.16) และ (3.17) นำมาเทียบสัมประสิทธิ์ในเทอมของ h จะได้เงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธี (3.15) คือ

$$\frac{5}{18}\beta_{11} + \frac{8}{18}\beta_{21} + \frac{5}{18}(\beta_{31} + \beta_{32}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{18}\alpha_1\beta_{11} + \frac{8}{18}\alpha_2\beta_{21} + \frac{5}{18}\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{18}(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + \frac{8}{18}\alpha_1\beta_{21} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{36}\beta_{11}^2 + \frac{8}{36}\beta_{21}^2 + \frac{5}{36}(\beta_{31} + \beta_{32})^2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{18}\beta_{11}\beta_{21} + \frac{5}{18}(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32}) = \frac{1}{6}$$

คำนวณหาค่าของ β_{11}, β_{21}, β_{31} และ β_{32} จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าว จะได้ว่า

$$\beta_{11} = \frac{63}{559}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = -\frac{174}{433} \text{ และ } \beta_{32} = \frac{2491}{2354}$$

เพราะฉะนั้นระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 มีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{63}{559}h, y_m + \frac{63}{559}hf(x_m, y_m)) \tag{3.18}$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{496}{559}h, y_m - \frac{74}{433}hk_1 + \frac{2491}{2354}hk_2)$$

3.2.3 ระเบียบวิธี RKN อันดับ 4

สำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์ - เลอจองด์แบบ 4 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีซึ่งมีรูปแบบทั่วไปตามสมการ (3.6) กรณีที่ s = 4 จะมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่ 3.4 เมื่อ $h = x_{m+1} - x_m$ จะได้ว่าระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 มีรูปแบบทั่วไป คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_3)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11}hf(x_m, y_m)) \tag{3.19}$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31}hk_1 + \beta_{32}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41}hk_1 + \beta_{42}hk_2 + \beta_{43}hk_3)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \frac{77}{1109}$, $\alpha_2 = \frac{364}{1103}$, $\alpha_3 = \frac{739}{1103}$ และ $\alpha_4 = \frac{1032}{1109}$

ตารางที่ 3.4 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 4

	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		ระเบียบวิธี RKN อันดับ 4	
	จุดของรูปแบบ ξ_i	จุดถ่วง w_i	จุดของรูปแบบ ψ_i	จุดถ่วง a_i
i =1	-955/1109	527/1515	$x_m + \frac{77}{1109}h$	527/3030
2	-375/1103	988/1515	$x_m + \frac{364}{1103}h$	988/3030
3	375/1103	988/1515	$x_m + \frac{739}{1103}h$	988/3030
4	955/1109	527/1515	$x_m + \frac{1032}{1109}h$	527/3030

จากระเบียบวิธี (3.19) ขั้นตอนต่อไปคือ ทำการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี ซึ่งขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้แสดงรายละเอียดต่าง ๆ ไว้ในภาคผนวก ก. เพราะฉะนั้นในส่วนนี้จึงจะแสดงเฉพาะเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธีที่ได้จากขั้นตอนการสร้างเท่านั้น โดยเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 แสดงดังต่อไปนี้

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3(\beta_3 + \beta_4) + a_4(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7) = \frac{1}{2}$$

$$a_1\alpha_1\beta_1 + a_2\alpha_2\beta_2 + a_3\alpha_3(\beta_3 + \beta_4) + a_4\alpha_4(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7) = \frac{1}{3}$$

$$a_2\alpha_1\beta_2 + a_3(\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4) + a_4(\alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6 + \alpha_3\beta_7) = \frac{1}{6}$$

$$a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2 + a_3(\beta_3 + \beta_4)^2 + a_4(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7)^2 = \frac{1}{6}$$

$$a_1\alpha_1^2\beta_1 + a_2\alpha_2^2\beta_2 + a_3\alpha_3^2(\beta_3 + \beta_4) + a_4\alpha_4^2(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7) = \frac{1}{4}$$

$$a_2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + a_3\alpha_3(\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4) + a_4\alpha_4(\alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6 + \alpha_3\beta_7) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}(a_1\alpha_1\beta_1^2 + a_2\alpha_2\beta_2^2 + a_3\alpha_3(\beta_3 + \beta_4)^2 + a_4\alpha_4(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7)^2 = \frac{1}{8}$$

$$a_2\alpha_1^2\beta_2 + a_3(\alpha_2^2\beta_4 + \alpha_1^2\beta_3) + a_4(\alpha_1^2\beta_5 + \alpha_2^2\beta_6 + \alpha_3^2\beta_7) = \frac{1}{24}$$

$$a_1\beta_1^3 + a_2\beta_2^3 + a_3(\beta_3 + \beta_4)^3 + a_4(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7)^3 = \frac{1}{4}$$

จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าว คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า ได้ดังต่อไปนี้

$$\beta_{11} = \frac{77}{1109}, \beta_{21} = \frac{364}{1103}, \beta_{31} = -\frac{362}{1175}, \beta_{32} = \frac{803}{821},$$

$$\beta_{41} = \frac{1379}{1602}, \beta_{42} = -\frac{1249}{1742} \text{ และ } \beta_{43} = \frac{1664}{2115}$$

เพราะฉะนั้นระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 จะมีรูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_4)$$

โดยที่
$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_m + \frac{77}{1109}h, y_m + \frac{77}{1109}hf(x_m, y_m)) \\
k_2 &= f(x_m + \frac{364}{1103}h, y_m + \frac{364}{1103}hk_1) \\
k_3 &= f(x_m + \frac{739}{1103}h, y_m - \frac{362}{1175}hk_1 + \frac{803}{821}hk_2) \\
k_4 &= f(x_m + \frac{1032}{1109}h, y_m + \frac{1379}{1602}hk_1 - \frac{1249}{1742}hk_2 + \frac{1664}{2115}hk_3)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

3.2.4 ระเบียบวิธี RKN อันดับ 5 และ 6

สำหรับการสร้างระเบียบวิธี RKN อันดับ 5 และ 6 ในขั้นตอนการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี ค่อนข้างจะมีความยุ่งยากและซับซ้อน เพื่อความสะดวกในการพิจารณากระบวนการสร้างระเบียบวิธี ดังนั้น ในส่วนนี้จึงจะแสดงเฉพาะรูปแบบ ซึ่งในส่วนของเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธีผู้วิจัยได้แสดงรายละเอียดไว้ในภาคผนวก ก. เพราะฉะนั้นแล้วจากการแปลงค่าจุดของรูปแบบและค่าจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 5 จุด จะได้ว่า ระเบียบวิธี RKN อันดับ 5 จะมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วง แสดงดังตารางที่ 3.5

ตารางที่ 3.5 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์และค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบที่ปรับปรุงสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 5

	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		ระเบียบวิธี RKN อันดับ 5	
	จุดของรูปแบบ ξ_i	จุดถ่วง w_i	จุดของรูปแบบ ψ_i	จุดถ่วง a_i
i =1	-1613/1780	589/2486	$x_m + \frac{230}{4903}h$	589/4972
2	-5333/9904	1075/2246	$x_m + \frac{4568}{19795}h$	1075/4492
3	0	512/900	$x_m + \frac{1}{2}h$	512/1800
4	5333/9904	1075/2246	$x_m + \frac{15227}{19795}h$	1075/4492
5	1613/1780	598/2486	$x_m + \frac{1280}{1343}h$	589/4972

เพราะฉะนั้นระเบียบวิธี RKN อันดับ 5 มีรูปแบบทั่วไป คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{589}{4972}k_1 + \frac{1075}{4492}k_2 + \frac{512}{1800}k_3 + \frac{1075}{4492}k_4 + \frac{589}{4972}k_5\right)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf(x_m, y_m)) \tag{3.21}$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} hk_1 + \beta_{32} hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41} hk_1 + \beta_{42} hk_2 + \beta_{43} hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \alpha_5 h, y_m + \beta_{51} hk_1 + \beta_{52} hk_2 + \beta_{53} hk_3 + \beta_{54} hk_4)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \frac{230}{4903}$, $\alpha_2 = \frac{4568}{19795}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = \frac{15227}{19795}$ และ $\alpha_5 = \frac{1280}{1343}$

จากการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าที่เหลือได้ดังต่อไปนี้

$$\beta_{11} = \frac{63}{1343}, \beta_{21} = \frac{4569}{19795}, \beta_{31} = -\frac{1163}{3926},$$

$$\beta_{32} = \frac{676}{849}, \beta_{41} = \frac{1578}{1513}, \beta_{42} = -\frac{2989}{2531},$$

$$\beta_{43} = \frac{265}{293}, \beta_{51} = -\frac{701}{684}, \beta_{52} = \frac{5338}{2441},$$

$$\beta_{53} = -\frac{1675}{833} \text{ และ } \beta_{54} = \frac{412}{685}$$

เพราะฉะนั้น รูปแบบของระเบียบวิธี RKN อันดับ 5 คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{589}{4972}k_1 + \frac{1075}{4492}k_2 + \frac{512}{1800}k_3 + \frac{1075}{4492}k_4 + \frac{589}{4972}k_5 \right)$$

โดยที่ (3.22)

$$k_1 = f\left(x_m + \frac{63}{1343}h, y_m + \frac{63}{1343}hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{4568}{19795}h, y_m + \frac{4568}{19795}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{1}{2}h, y_m - \frac{1163}{3926}hk_1 + \frac{676}{849}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + \frac{15227}{19795}h, y_m + \frac{1578}{1513}hk_1 - \frac{2989}{2531}hk_2 + \frac{265}{293}hk_3\right)$$

$$k_5 = f\left(x_m + \frac{1280}{1343}h, y_m - \frac{701}{684}hk_1 + \frac{5338}{2441}hk_2 - \frac{1675}{833}hk_3 + \frac{412}{685}hk_4\right)$$

และสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 6 เมื่อทำการแปลงค่าจุดของรูปแบบและค่าจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 6 จุด จะได้ว่า ระเบียบวิธี RKN อันดับ 6 มีค่าจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงไว้ดังตารางที่ 3.6

ตารางที่ 3.6 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบที่ปรับปรุงสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 6

	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		ระเบียบวิธี RKN อันดับ 6	
	จุดของรูปแบบ ξ_i	จุดถ่วง w_i	จุดของรูปแบบ ψ_i	จุดถ่วง a_i
i =1	-1367/1466	141/823	$x_m + \frac{13}{385}h$	141/1646
2	-525/794	1118/3099	$x_m + \frac{269}{1588}h$	559/3099
3	-629/2636	2501/5345	$x_m + \frac{761}{1999}h$	2501/10690
4	629/2636	2501/5345	$x_m + \frac{1238}{1999}h$	2501/10690
5	525/794	1118/3099	$x_m + \frac{1319}{1588}h$	559/3099
6	1367/1466	141/823	$x_m + \frac{372}{385}h$	141/1646

ซึ่งรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธี RKN อันดับ 6 ที่มีค่าจุดของรูปแบบและค่าจุดถ่วงดังแสดงในตารางที่ 3.6 สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.23)

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{141}{1646}k_1 + \frac{559}{3099}k_2 + \frac{2501}{10690}k_3 + \frac{2501}{10690}k_4 + \frac{559}{3099}k_5 + \frac{141}{1646}k_6 \right)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf(x_m, y_m)) \tag{3.23}$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} hk_1 + \beta_{32} hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41} hk_1 + \beta_{42} hk_2 + \beta_{43} hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \alpha_5 h, y_m + \beta_{51} hk_1 + \beta_{52} hk_2 + \beta_{53} hk_3 + \beta_{54} hk_4)$$

$$k_6 = f(x_m + \alpha_5 h, y_m + \beta_{61} hk_1 + \beta_{62} hk_2 + \beta_{63} hk_3 + \beta_{64} hk_4 + \beta_{65} hk_5)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \frac{13}{385}$, $\alpha_2 = \frac{269}{1588}$, $\alpha_3 = \frac{761}{1999}$, $\alpha_4 = \frac{1238}{1999}$, $\alpha_5 = \frac{1319}{1588}$ **และ** $\alpha_6 = \frac{372}{385}$

จากรูปแบบดังกล่าว นำมาใช้ในการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี ซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก ก. ซึ่งจากเงื่อนไขอันดับดังกล่าวสามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าได้ดังต่อไปนี้

$$\beta_{11} = \frac{13}{385}, \beta_{21} = \frac{269}{1588}, \beta_{31} = -\frac{217}{853}, \beta_{32} = \frac{1763}{2776},$$

$$\beta_{41} = \frac{587}{573}, \beta_{42} = -\frac{248}{197}, \beta_{43} = \frac{829}{971}, \beta_{51} = -\frac{2333}{1339},$$

$$\beta_{52} = \frac{2153}{639}, \beta_{53} = -\frac{688}{431}, \beta_{54} = \frac{1743}{2179}, \beta_{61} = \frac{1033}{742},$$

$$\beta_{62} = -\frac{850}{487}, \beta_{63} = \frac{734}{1017}\ \beta_{64} = \frac{1499}{3150}\ \text{และ}\ \beta_{65} = \frac{317}{2602}$$

เพราะฉะนั้น จากสมการ (3.23) จะได้ว่าระเบียบวิธี RKN อันดับ 6 มีรูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{141}{1646}k_1 + \frac{559}{3099}k_2 + \frac{2501}{10690}k_3 + \frac{2501}{10690}k_4 + \frac{559}{3099}k_5 + \frac{141}{1646}k_6\right) \tag{3.24}$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m + \frac{13}{385}h, y_m + \frac{13}{385}hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{269}{1588}h, y_m + \frac{269}{1588}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{761}{1999}h, y_m - \frac{217}{853}hk_1 + \frac{1763}{2776}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + \frac{1238}{1999}h, y_m + \frac{587}{573}hk_1 - \frac{248}{197}hk_2 + \frac{829}{971}hk_3\right)$$

$$k_5 = f\left(x_m + \frac{1319}{1588}h, y_m - \frac{2333}{1339}hk_1 + \frac{2153}{639}hk_2 - \frac{688}{431}hk_3 + \frac{1743}{2179}hk_4\right)$$

$$k_6 = f\left(x_m + \frac{372}{385}h, y_m + \frac{1033}{742}hk_1 - \frac{850}{487}hk_2 + \frac{734}{1017}hk_3 + \frac{1499}{3150}hk_4 + \frac{317}{2602}hk_5\right)$$

ขั้นตอนวิธี (algorithm)

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ s จากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้

$$k_i = \begin{cases} f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\beta_{11} f(x_m, y_m)) & ; \quad i = 1 \\ f(x_m + h\alpha_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij} k_j & ; \quad i = 2,3,\ldots,s \end{cases}$$

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{j=1}^{s} a_j k_j$$

เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

มีดังนี้

ข้อมูลเข้า : ค่าเริ่มต้น x_0, y_0

ช่วงของการหาผลเฉลย [a,b]

ขนาดขั้น h

$n = (b-a)/h$

for m = 0 to n do

begin

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + h\beta_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + h\beta_{31} k_1 + h\beta_{32} k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_s = f(x_m + \alpha_s h, y_m + h\beta_{s1} k_1 + h\beta_{s2} k_2 + \ldots + h\beta_{s,s-1} k_{s-1})$$

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{j=1}^{s} a_j k_j$$

end.

ข้อมูลออก : ค่า x, y

บทที่ 4
ผลของงานวิจัย

ในบทนี้จะแสดงการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ (RKN) ซึ่งได้แสดงการสร้างไว้ในหัวข้อ 3.2 โดยในการทดสอบจะนำระเบียบวิธีดังกล่าวมาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง และแสดงการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้ กับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาของ Goeken และ Johnson พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี RKN กับปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่เกิดขึ้นในทางวิทยาศาสตร์ ดังต่อไปนี้

4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในส่วนนี้จะแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่มีรูปแบบ

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

โดยในส่วนแรกจะแสดงการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น ที่ได้จากระเบียบวิธี RKN กับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา พร้อมทั้งระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาในงานวิจัยของ Goeken และ Johnson ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่มีวิธีการแบบขั้นเดียว และปรับปรุงรูปแบบมาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยที่รูปแบบทั้งหมดของระเบียบวิธีที่นำมาใช้สำหรับการเปรียบเทียบ สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ 2

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) \tag{4.1}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + k_1)$$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ 3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{4.2}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h,\ y_m - k_1 + 2k_2)$$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ 4

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_3) \tag{4.3}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

4. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก

$$y_{m+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \tag{4.4}$$

โดยที่

$$k_1 = hf(x_m, y_m)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}hk_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}hk_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}hk_1 - \frac{7200}{2197}hk_2 + \frac{7296}{2197}hk_3)$$

$$k_5 = hf(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}hk_1 - 8hk_2 + \frac{3680}{513}hk_3 - \frac{845}{4104}hk_4)$$

5. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาของ Goeken และ Johnson

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5}{48}k_1 + \frac{27}{56}k_2 + \frac{125}{336}k_3 + \frac{1}{24}k_4 \tag{4.5}$$

โดยที่

$$k_1 = hf(y_n)$$

$$k_2 = hf(y_n + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{18}hf_y k_1)$$

$$k_3 = hf(y_n - \frac{152}{125}k_1 + \frac{252}{125}k_2 - \frac{44}{125}hf_y k_1)$$

$$k_4 = hf(y_n + \frac{19}{2}k_1 - \frac{72}{7}k_2 + \frac{25}{14}k_3 + \frac{5}{2}hf_y k_1)$$

6. **ระเบียบวิธี** RKN **อันดับ** 2

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{4.6}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{780}{3691}h, y_m + \frac{780}{3691}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{780}{989}h, y_m + \frac{780}{989}hk_1)$$

7. **ระเบียบวิธี** RKN **อันดับ** 3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3) \tag{4.7}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{63}{559}h, y_m + \frac{63}{559}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{496}{559}h, y_m - \frac{74}{433}hk_1 + \frac{2491}{2354}hk_2)$$

8. **ระเบียบวิธี** RKN **อันดับ** 4

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_3) \tag{4.8}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{77}{1109}h, y_m + \frac{77}{1109}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{364}{1103}h, y_m + \frac{364}{1103}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{739}{1103}h, y_m - \frac{362}{1175}hk_1 + \frac{803}{821}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{1032}{1109}h, y_m + \frac{1379}{1602}hk_1 - \frac{1249}{1742}hk_2 + \frac{1664}{2115}hk_3)$$

9. ระเบียบวิธี RKN อันดับ 5

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{589}{4972}k_1 + \frac{1075}{4492}k_2 + \frac{512}{1800}k_3 + \frac{1075}{4492}k_4 + \frac{589}{4972}k_5 \right) \qquad (4.9)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{63}{1343}h, y_m + \frac{63}{1343}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{4568}{19795}h, y_m + \frac{4568}{19795}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m - \frac{1163}{3926}hk_1 + \frac{676}{849}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{15227}{19795}h, y_m + \frac{1578}{1513}hk_1 - \frac{2989}{2531}hk_2 + \frac{265}{293}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \frac{1280}{1343}h, y_m - \frac{701}{684}hk_1 + \frac{5338}{2441}hk_2 - \frac{1675}{833}hk_3 + \frac{412}{685}hk_4)$$

10. ระเบียบวิธี RKN อันดับ 6

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{141}{1646}k_1 + \frac{559}{3099}k_2 + \frac{2501}{10690}k_3 + \frac{2501}{10690}k_4 + \frac{559}{3099}k_5 + \frac{141}{1646}k_6 \right) \qquad (4.10)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{13}{385}h, y_m + \frac{13}{385}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{269}{1588}h, y_m + \frac{269}{1588}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{761}{1999}h, y_m - \frac{217}{853}hk_1 + \frac{1763}{2776}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{1238}{1999}h, y_m + \frac{587}{573}hk_1 - \frac{248}{197}hk_2 + \frac{829}{971}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \frac{1319}{1588}h, y_m - \frac{2333}{1339}hk_1 + \frac{2153}{639}hk_2 - \frac{688}{431}hk_3 + \frac{1743}{2179}hk_4)$$

$$k_6 = f(x_m + \frac{372}{385}h, y_m + \frac{1033}{742}hk_1 - \frac{850}{487}hk_2 + \frac{734}{1017}hk_3 + \frac{1499}{3150}hk_4 + \frac{317}{2602}hk_5)$$

จากระเบียบวิธีดังกล่าว กำหนดให้มีเงื่อนไขในการคำนวณ ดังต่อไปนี้

เงื่อนไขที่ 1 กำหนดให้ขนาดขั้น $h = 0.1$ และพิจารณาผลการคำนวณ $y(x_m)$ ที่ $m = 1$ ซึ่งใช้สำหรับการเปรียบเทียบเพื่อแสดงประสิทธิภาพของแต่ละระเบียบวิธี

เงื่อนไขที่ 2 พิจารณาค่า $y(x_m)$ จากการคำนวณโดยใช้ขนาดขั้น $h = 0.001$

รุงเง-คุตตา อันดับ 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ทั้งนี้เนื่องจากสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ s ซึ่งมีรูปแบบของการประมาณค่า $y(x_{m+1})$ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \tag{4.13}$$

จะมี local truncation error : e_{m+1} ที่จุด x_{m+1} ดังนี้

$$e_{m+1} = y(x_{m+1}) - y_{m+1} = y(x_{m+1}) - y_m - h\phi(x_m, y_m; h) \tag{4.14}$$

เมื่อทำการกระจายและพิจารณาสมการ (4.14) ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ที่ x_m จะได้ว่า

$$e_{m+1} = \frac{1}{(s+2)!} h^{s+2} y^{(s+2)}(\zeta_m) \tag{4.15}$$

โดยที่ $x_{m+1} \le \zeta_m \le x_{m+1}$

กำหนด $\left|y^{(s+2)}(\zeta_m)\right| \le M$ เมื่อ M เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น

$$\left|e_{m+1}\right| \le \frac{1}{(s+2)!} M h^{s+2} = O(h^{s+2}) \tag{4.16}$$

จากสมการ (4.16) แสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธี RKN อันดับ s จะให้ผลเฉลยในการแก้ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น มีความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูป $O(h^{s+2})$ โดยที่ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ s จะให้ผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นอยู่ในรูป $O(h^{s+1})$ จึงทำให้ผลเฉลยจากระเบียบวิธี RKN มีอันดับความถูกต้องสูงกว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และเนื่องจากความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย จะแปรผันตรงข้ามกับอันดับของระเบียบวิธีที่นำมาใช้ นั่นคือ สำหรับอันดับของระเบียบวิธีที่สูงขึ้นจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่มีค่าน้อยลง แต่เมื่อพิจารณาผลเฉลยจากระเบียบวิธี RKN อันดับ 5 และ 6 ของแต่ละปัญหาพบว่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมีค่ามากกว่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจากระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 ทั้งนี้เกิดจากค่าจุดของรูปแบบและค่าจุดถ่วงจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ที่นำมาปรับปรุงใช้ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากค่าผลเฉลยในปัญหา A (ตารางที่ 4.1) ซึ่งเป็นปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่ค่าของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับค่าจุดของรูปแบบ และค่าจุดถ่วงของระเบียบวิธีเท่านั้น เพราะฉะนั้นสำหรับปัญหาที่ต้องการความถูกต้องของผลเฉลยในอันดับสูง สามารถนำระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 ซึ่งจะให้อันดับความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยอยู่ในรูป $O(h^6)$ ด้วยเหตุนี้ ในส่วนต่อไปผู้วิจัยจะนำระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 ไปใช้แสดงการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นประยุกต์ และทำการเปรียบเทียบ

ความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น ดังต่อไปนี้

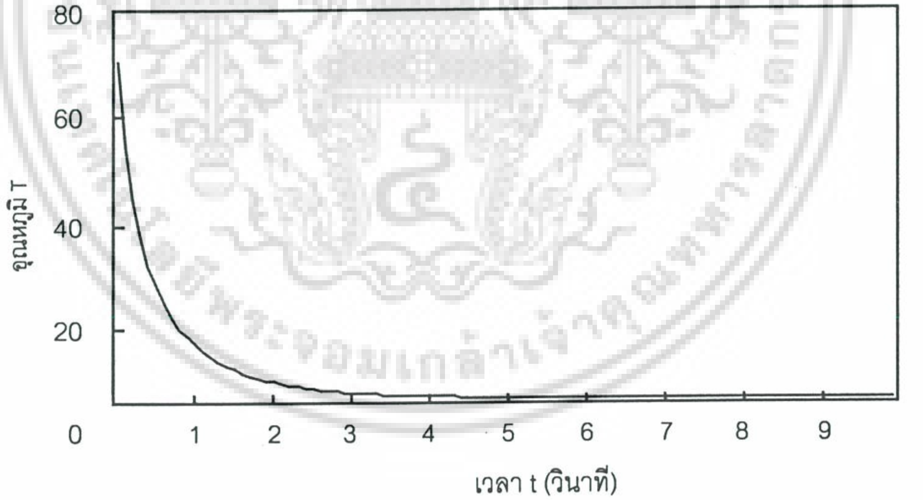
ปัญหา E : (การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ) ในการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของก้อนมวลเนื่องจากการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อนตลอดผิวรอบนอกนั้น หากค่าสัมประสิทธิ์ของการพาความร้อนขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของก้อนมวลนั้นด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ T กับเวลา t จะอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$\frac{dT}{dt} + (a + bT)T = 0$$

กำหนดให้อุณหภูมิเริ่มต้น $T_0 = 100$ โดย $a = 1$ และ $b = 0.03$ เพื่อหาผลเฉลย T(t) ในช่วงเวลา $0 \le t \le 10$ โดยใช้ขนาดขั้น $h = 0.1$ ในการคำนวณ โดยมีผลเฉลยแม่นตรงคือ

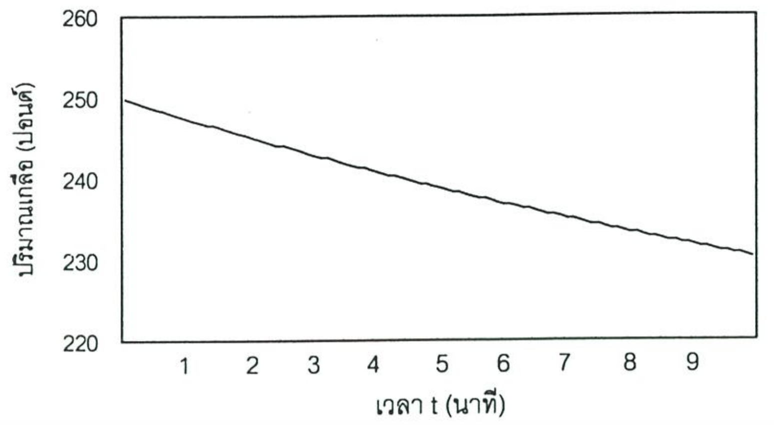
$$T(t) = aT_0\, e^{-at} / (a + bT_0(1 - e^{-at}))$$

สำหรับปัญหาดังกล่าว จากการคำนวณโดยระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 สามารถแสดงผลการคำนวณ T(t) ที่เวลา t บนช่วง $0 \le t \le 10$ ได้ดังรูปที่ 4.1



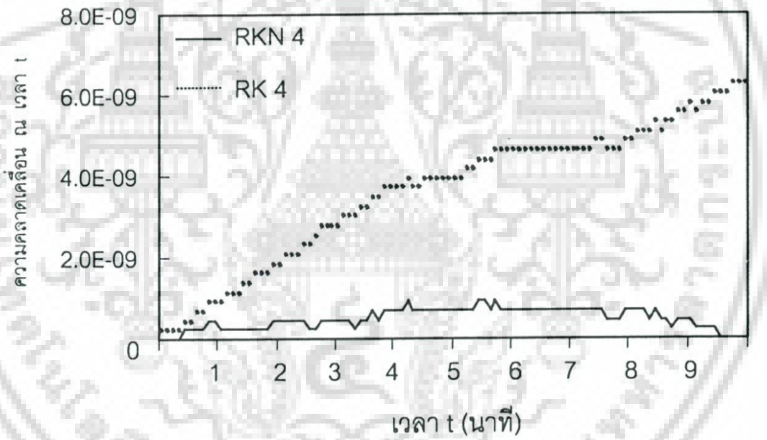
รูปที่ 4.1 แสดงกราฟผลเฉลยของปัญหา E โดยระเบียบวิธี RKN อันดับ 4

จากผลเฉลยของปัญหา E ซึ่งได้จากการคำนวณโดยระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 นำมาใช้เพื่อแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย พร้อมทั้งค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจากการคำนวณโดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 (RK 4) ณ เวลา t ต่าง ๆ บนช่วง $0 \le t \le 10$ แสดงดังกราฟรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.3 กราฟแสดงผลเฉลยสำหรับปัญหา F โดยใช้ระเบียบวิธี RKN อันดับ 4

จากผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณสำหรับปัญหา F ในรูปที่ 4.4 ได้แสดงความคลาดเคลื่อนของที่เกิดขึ้นในการคำนวณที่เวลา t ต่าง ๆ บนช่วง $0 \le t \le 10$ พร้อมทั้งแสดงความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณโดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.4 กราฟแสดงความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยของปัญหา F โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 (rk4) และระเบียบวิธี RKN อันดับ 4

ในบทนี้ ผู้วิจัยได้แสดงผลการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธี RKN โดยนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง เพื่อแสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์กและระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากงานวิจัยของ Goeken และ Johnson รวมทั้งนำระเบียบวิธี RKN ในการแก้ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นเชิงประยุกต์ และเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น และได้ว่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธี RKN อยู่ในรูป $O(h^{s+2})$ เมื่อ h คือ ขนาดขั้นที่ใช้ในการคำนวณ

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะทำการสรุปผลของการสร้างระเบียบวิธี ที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาใช้ในการกำหนดจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา พร้อมทั้งข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา สำหรับผู้ที่สนใจจะศึกษา ดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้นำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาใช้ปรับปรุง จะได้รูปแบบทั่วไปสำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา s สถานะ อันดับ s ในงานวิจัยนี้ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{i=1}^{s} a_i k_i$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\beta_{11} f(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\beta_{31} k_1 + h\beta_{32} k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_s = f(x_m + h\alpha_s, y_m + h\beta_{s1} k_1 + h\beta_{s2} k_2 + \dots + h\beta_{s,s-1} k_{s-1})$$

ซึ่ง β_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา, h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้นมีค่าเท่ากับ $x_{m+1} - x_m$ และสำหรับค่า a_i, α_i จะถูกกำหนดโดยรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ จากการแปลงจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ มาใช้เป็นจุดของรูปแบบและจุดถ่วงในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยสามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาสำหรับงานวิจัย ได้ดังต่อไปนี้

1. ระเบียบวิธี RKN 2 สถานะ อันดับ 2

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{5.1}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{780}{3691}h, y_m + \frac{780}{3691}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{780}{989}h, y_m + \frac{780}{989}hk_1)$$

2. ระเบียบวิธี RKN 3 สถานะ อันดับ 3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3) \qquad (5.2)$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m + \frac{63}{559}h, y_m + \frac{63}{559}hf(x_m, y_m))$

$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{496}{559}h, y_m - \frac{74}{433}hk_1 + \frac{2491}{2354}hk_2)$$

3. ระเบียบวิธี RKN 4 สถานะ อันดับ 4

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_3)$$

(5.3)

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{77}{1109}h, y_m + \frac{77}{1109}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{364}{1103}h, y_m + \frac{364}{1103}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{739}{1103}h, y_m - \frac{362}{1175}hk_1 + \frac{803}{821}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{1032}{1109}h, y_m + \frac{1379}{1602}hk_1 - \frac{1249}{1742}hk_2 + \frac{1664}{2115}hk_3)$$

4. ระเบียบวิธี RKN 5 สถานะ อันดับ 5

$$y_{m+1} = y_m + h(\frac{589}{4972}k_1 + \frac{1075}{4492}k_2 + \frac{512}{1800}k_3 + \frac{1075}{4492}k_4 + \frac{589}{4972}k_5) \qquad (5.4)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{63}{1343}h, y_m + \frac{63}{1343}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{4568}{19795}h, y_m + \frac{4568}{19795}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m - \frac{1163}{3926}hk_1 + \frac{676}{849}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{15227}{19795}h, y_m + \frac{1578}{1513}hk_1 - \frac{2989}{2531}hk_2 + \frac{265}{293}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \frac{1280}{1343}h, y_m - \frac{701}{684}hk_1 + \frac{5338}{2441}hk_2 - \frac{1675}{833}hk_3 + \frac{412}{685}hk_4)$$

5. ระเบียบวิธี RKN 6 สถานะ อันดับ 6

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{141}{1646}k_1 + \frac{559}{3099}k_2 + \frac{2501}{10690}k_3 + \frac{2501}{10690}k_4 + \frac{559}{3099}k_5 + \frac{141}{1646}k_6 \right) \tag{5.5}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{13}{385}h, y_m + \frac{13}{385}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{269}{1588}h, y_m + \frac{269}{1588}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{761}{1999}h, y_m - \frac{217}{853}hk_1 + \frac{1763}{2776}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{1238}{1999}h, y_m + \frac{587}{573}hk_1 - \frac{248}{197}hk_2 + \frac{829}{971}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \frac{1319}{1588}h, y_m - \frac{2333}{1339}hk_1 + \frac{2153}{639}hk_2 - \frac{688}{431}hk_3 + \frac{1743}{2179}hk_4)$$

$$k_6 = f(x_m + \frac{372}{385}h, y_m + \frac{1033}{742}hk_1 - \frac{850}{487}hk_2 + \frac{734}{1017}hk_3 + \frac{1499}{3150}hk_4 + \frac{317}{2602}hk_5)$$

จากการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธี RKN อันดับ 2-6 กับปัญหา A, B, C และ D โดยใช้ขนาดขั้น $h = 0.1,\ 10^{-3}$ และ 10^{-5} ดังกล่าวไว้ในหัวข้อ 4.1 แสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธี (5.1) ถึง ระเบียบวิธี (5.5) สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

และให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำสูงขึ้น โดยความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจะอยู่ในรูป $O(h^{s+2})$ เมื่อ h คือขนาดขั้นที่ใช้ในการคำนวณ และ s คือ อันดับของระเบียบวิธี และสำหรับระเบียบวิธีที่เหมาะสมที่จะนำไปใช้คือ ระเบียบวิธี RKN อันดับ 2 และ ระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 ซึ่งจะให้ผลเฉลยที่มีความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูป $O(h^4)$ และ $O(h^5)$ ตามลำดับ เนื่องจากมีรูปแบบที่สะดวกสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นมากกว่าระเบียบวิธี RKN ในอันดับสูงขึ้น และสำหรับปัญหาที่ต้องการความถูกต้องในอันดับสูงสามารถใช้ระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 ซึ่งให้ผลเฉลยที่มีความคลาดเคลื่อนอยู่ในรูป $O(h^6)$ ดังแสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยของปัญหา E และ F ในบทที่ 4

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการการสร้างระเบียบวิธี RKN ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เป็นการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่มีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ สำหรับนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง ซึ่งลักษณะเด่นของระเบียบวิธี RKN คือเป็นระเบียบวิธีที่มีจุดของรูปแบบอยู่ในช่วง (x_m, x_{m+1}) โดยจะเรียกรูปแบบของระเบียบวิธีที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า รูปแบบเปิด (open formulas) ในขณะที่ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบปิด (close formulas) กล่าวคือ ในฟังก์ชันส่วนเพิ่มของระเบียบวิธีจะใช้จุด x_m และ x_{m+1} ในเซตของจุดของรูปแบบ และในหัวข้อนี้ผู้วิจัยได้เสนอแนวทางในการศึกษาวิจัยเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนี้

1. กำหนดขนาดขั้น h ที่เหมาะสมในการคำนวณสำหรับระเบียบวิธี RKN ซึ่งจะมีผลสำหรับความแม่นยำของผลเฉลย และจำนวนของกระบวนการทำซ้ำในการคำนวณ
2. เปลี่ยนแปลงลักษณะการวางจุดของรูปแบบบนช่วง (x_m, x_{m+1}) ในฟังก์ชันส่วนเพิ่ม ซึ่งจะเป็นการสร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่มีรูปแบบเปิด ลักษณะอื่นที่แตกต่างจากระเบียบวิธี RKN ในงานวิจัยนี้ เช่น การนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ไปใช้ในการกำหนดจุดของรูปแบบและจุดถ่วงในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาแบบไม่ชัดแจ้ง (implicit Runge-Kutta method) ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$k_i = f(x_m + c_i h, y_m + h\sum_{j=1}^{s} b_{ij}k_j)$$

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{j=1}^{s} a_j k_j$$

อย่างไรก็ตามผู้วิจัยหวังว่าระเบียบวิธีที่สร้างขึ้นในงานวิจัยนี้ จะเป็นระเบียบวิธีที่สามารถพัฒนาไปสู่ระเบียบวิธีที่เหมาะสมในการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

ภาคผนวก

ในส่วนนี้จะแสดงกระบวนการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 และทำการแสดงเงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 5 และ 6 ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปที่ประกอบด้วยจุดของรูปแบบและจุดถ่วง ซึ่งปรับปรุงรูปแบบมาจากจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ โดยรูปแบบสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_3)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} hk_1 + \beta_{32} hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41} hk_1 + \beta_{42} hk_2 + \beta_{43} hk_3)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \frac{77}{1109}$, $\alpha_2 = \frac{364}{1103}$, $\alpha_3 = \frac{739}{1103}$ และ $\alpha_4 = \frac{1032}{1109}$

เพราะฉะนั้นจากรูปแบบดังกล่าว ทำการกระจายเทอม k_1, k_2, k_3 และ k_4 ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ว่า

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf)$$

$$= f + h[\alpha_1 f_x + \beta_{11} ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_1^2 f_{xx} + 2\alpha_1\beta_{11} ff_{xy} + \beta_{11}^2 f^2 f_{yy}] + \frac{h^3}{6}[\alpha_1^3 f_{xxx} + 3\alpha_1\beta_{11}^2 f^2 f_{xyy}$$

$$+ 3\alpha_1^2\beta_{11} ff_{xxy} + \beta_{11}^3 f^3 f_{yyy}] + O(h^4)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} hk_1)$$

$$= f + h[\alpha_2 f_x + \beta_{21} ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_2^2 f_{xx} + 2\alpha_2\beta_{21} ff_{xy} + 2\alpha_1\beta_{21} f_x f_y + \beta_{21}^2 f^2 f_{yy} + \beta_{11}\beta_{21} ff_y^2]$$

$$+ \frac{h^3}{6}[\alpha_2^3 f_{xxx} + 3\alpha_2^2\beta_{21} ff_{xxy} + 6\alpha_1\alpha_2\beta_{21} f_x f_{xy} + 3\alpha_2\beta_{21}^2 f^2 f_{xyy} + 6(\alpha_1 + \alpha_2)\beta_{11}\beta_{21} ff_y f_{xy}$$

$$+ 3\alpha_1^2\beta_{21} f_y f_{xx} + 6\alpha_1\beta_{21}^2 ff_x f_{yy} + \beta_{21}^3 f^3 f_{yyy} + (3\beta_{11}^2\beta_{21} + 6\beta_{11}\beta_{21}^2) f^2 f_y f_{yy}] + O(h^4)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31}hk_1 + \beta_{32}hk_2)$$

$$= f + h[\alpha_3 f_x + (\beta_{31} + \beta_{32})ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_3^2 f_{xx} + 2\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})ff_{xy} + 2(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32})f_x f_y$$

$$+ (\beta_{31} + \beta_{32})^2 f^2 f_{yy} + 2(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32})ff_y^2] + \frac{h^3}{6}[\alpha_3^3 f_{xxx} + 3\alpha_3^2(\beta_{31} + \beta_{32})ff_{xxy}$$

$$+ 6\alpha_3(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32})f_x f_{xy} + 6(\alpha_1\beta_{11}\beta_{31} + \alpha_2\beta_{21}\beta_{32} + \alpha_3\beta_{11}\beta_{31} + \alpha_3\beta_{21}\beta_{32})ff_y f_{xy}$$

$$+ 3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 f^2 f_{xyy} + 3(\alpha_1^2\beta_{31} + \alpha_2^2\beta_{32})f_y f_{xx} + 6(\beta_{31} + \beta_{32})(\alpha_1\beta_{31}$$

$$+ \alpha_2\beta_{32})ff_x f_{yy} + 6(\beta_{31} + \beta_{32})(\beta_1\beta_3 + \beta_{21}\beta_{32})f^2 f_y f_{yy} + (\beta_{31} + \beta_{32})^3 f^3 f_{yyy}$$

$$+ \alpha_1\beta_{21}\beta_{32} f_x f_y^2 + \beta_{11}\beta_{21}\beta_{32} ff_y^3] + O(h^4)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41}hk_1 + \beta_{42}hk_2 + \beta_{43}hk_3)$$

$$= f + h[\alpha_4 f_x + (\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_4^2 f_{xx} + 2\alpha_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})ff_{xy}$$

$$+ 2(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43})f_x f_y + (\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^2 f^2 f_{yy} + 2(\beta_{11}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{42}$$

$$+ \beta_{43}(\beta_{31} + \beta_{32}))ff_y^2] + \frac{h^3}{6}[\alpha_4^3 f_{xxx} + 3\alpha_4^2(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})ff_{xxy} + 6\alpha_4(\alpha_1\beta_{41}$$

$$+ \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43})f_x f_{xy} + 6(\alpha_1\beta_{11}\beta_{41} + \alpha_2\beta_{21}\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}(\beta_{31} + \beta_{32}) + \alpha_4(\beta_{11}\beta_{41}$$

$$+ \beta_{21}\beta_{42} + \beta_{43}(\beta_{31} + \beta_{32})))ff_y f_{xy} + 3\alpha_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^2 f^2 f_{xyy} + 3(\alpha_1^2\beta_{41}$$

$$+ \alpha_2^2\beta_{42} + \alpha_3^2\beta_{43})f_y f_{xx} + 6(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43})ff_x f_{yy} + 6(\beta_{41} + \beta_{42}$$

$$+ \beta_{43})(\beta_{11}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{42} + \beta_{43}(\beta_{31} + \beta_{32}))f^2 f_y f_{yy} + (\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^3 f^3 f_{yyy} + (\alpha_1\beta_{21}\beta_{42}$$

$$+ \beta_{43}(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32})f_x f_y^2 + (\beta_{11}\beta_{21}\beta_{42} + \beta_{43}(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32}))ff_y^3] + O(h^4)$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่าระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์มีรูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h[(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4)f_x + (a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21} + a_3(\beta_{31} + \beta_{32})$$

$$+ a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}))ff_y] + \frac{h^2}{2}[(a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_3^2 + a_4\alpha_4^2)f_{xx}$$

$$+ 2(a_1\alpha_1\beta_{11} + a_2\alpha_2\beta_{21} + a_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}))ff_{xy}$$

$$+ (a_2\alpha_1\beta_{12} + a_3(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + a_4(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}))f_x f_y$$

$$
\begin{aligned}
&+ (a_1\beta_{11}^2 + a_2\beta_{21}^2 + a_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^2)f^2 f_{yy} \\
&+ 2(a_2\beta_{11}\beta_{21} + a_3(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32}) + a_4(\beta_{11}\beta_{41} + \beta_{21}\beta_{42} + \beta_{43}(\beta_{31} \\
&+ \beta_{32})))ff_y^2] + \frac{h^3}{6}[(a_1\alpha_1^3 + a_2\alpha_2^3 + a_3\alpha_3^3 + a_4\alpha_4^3)f_{xxx} + 3(a_1\alpha_1^2\beta_{11} + a_2\alpha_2^2\beta_{21} \\
&+ a_3\alpha_3^2(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4^2(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}))ff_{xxy} + 6(a_2\alpha_1\alpha_2\beta_{11} \\
&+ a_3\alpha_3(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + a_4\alpha_4(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}))f_x f_{xy} \\
&+ 6(a_3\beta_{11}\beta_{21}(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3((\alpha_1 + \alpha_3)\beta_{11}\beta_{31} + (\alpha_2 + \alpha_4)\beta_{21}\beta_{32}) \\
&+ a_4(\alpha_1\beta_{11}\beta_{41} + \alpha_2\beta_{21}\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}(\beta_{31} + \beta_{32}) + \alpha_4(\beta_{11}\beta_{41} \\
&+ \beta_{21}\beta_{42} + \beta_{43}(\beta_{31} + \beta_{32}))))ff_y f_{xy} + 3(a_1\alpha_1\beta_{11}^2 + a_2\alpha_2\beta_{21}^2 + a_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 \\
&+ a_4\alpha_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^2)f^2 f_{xyy} + 3(a_2\alpha_1^2\beta_{21} + a_3(\alpha_2^2\beta_{32} + \alpha_1^2\beta_{31}) \\
&+ a_4(\alpha_1^2\beta_{41} + \alpha_2^2\beta_{42} + \alpha_3^2\beta_{43}))f_y f_{xx} + 6(a_2\alpha_1\beta_{21}^2 + a_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})(\alpha_2\beta_{32} + \alpha_1\beta_{31}) \\
&+ a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}))ff_x f_{yy} + 6(a_2(\beta_{11}^2\beta_{21} + \beta_{21}^2\beta_{11}) \\
&+ a_3(\beta_{11}^2\beta_{31} + \beta_{21}^2\beta_{32} + (\beta_{31} + \beta_{32})(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32})) + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})(\beta_{11}\beta_{41} \\
&+ \beta_{21}\beta_{42} + \beta_{43}(\beta_{31} + \beta_{32})))f^2 f_y f_{yy} + (a_1\beta_{11}^3 + a_2\beta_{21}^3 + a_3(\beta_{31} + \beta_{32})^3 + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} \\
&+ \beta_{43})^3)f^3 f_{yyy} + (a_3\alpha_1\beta_{21}\beta_{32} + a_4(\alpha_1\beta_{21}\beta_{42} + \beta_{43}(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}))f_x f_y^2 \\
&+ (a_3\beta_{11}\beta_{21}\beta_{32} + a_4(\beta_{11}\beta_{21}\beta_{42} + \beta_{43}(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32})))ff_y^3] + O(h^5)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

เมื่อ $a_1 = \frac{527}{3030}$, $a_2 = \frac{982}{3030}$, $a_3 = \frac{982}{3030}$ และ $a_4 = \frac{527}{3030}$

โดยที่รูปแบบของ $y(x_{m+1})$ ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ คือ

$$
\begin{aligned}
y(x_{m+1}) &= y_m + hf + \frac{h^2}{2}[f_x + ff_y] + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f^2 f_{yy} + ff_y^2] \\
&+ \frac{h^4}{24}[f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + f_{xx} f_y + 5ff_y f_{xy} + f^3 f_{yyy} + 3ff_x f_{yy} \\
&+ 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f_x f_y^2 + ff_y^3] + O(h^5)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

เมื่อ $y(x_{m+1})$ เป็นผลเฉลยจริงของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น

สำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 5 ซึ่งมีรูปแบบจากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 5 จุดมาปรับปรุงใช้ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{589}{4972}k_1 + \frac{1075}{4492}k_2 + \frac{512}{1800}k_3 + \frac{1075}{4492}k_4 + \frac{589}{4972}k_5 \right)$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} h f(x_m, y_m))$ (3)

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} h k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41} h k_1 + \beta_{42} h k_2 + \beta_{43} h k_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \alpha_5 h, y_m + \beta_{51} h k_1 + \beta_{52} h k_2 + \beta_{53} h k_3 + \beta_{54} h k_4)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \frac{230}{4903}$, $\alpha_2 = \frac{4568}{19795}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = \frac{15227}{19795}$ และ $\alpha_5 = \frac{1280}{1343}$

จะได้ว่าเงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธี (3) แสดงดังต่อไปนี้

$$a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21} + a_3(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}) + a_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54}) = \frac{1}{2}$$

$$a_1\alpha_1\beta_{11} + a_2\alpha_2\beta_{21} + a_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})$$

$$+ a_5\alpha_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54}) = \frac{1}{3}$$

$$a_1\beta_{11}^2 + a_2\beta_{21}^2 + a_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^2 + a_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54})^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_1\alpha_1\beta_{11}^2 + a_2\alpha_2\beta_{21}^2 + a_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 + a_4\alpha_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^2$$

$$+ a_5\alpha_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54})^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_2\alpha_1\beta_{21}^2 + a_3(\beta_{31} + \beta_{32})(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43})$$

$$+ a_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54})(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52} + \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) = \frac{1}{8}$$

$$a_2\alpha_1\beta_{21} + a_3(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + a_4(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43})$$

$$+ a_5(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52} + \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) = \frac{1}{6}$$

$$a_1\alpha_1^2\beta_{11} + a_2\alpha_2^2\beta_{21} + a_3\alpha_3^2(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4^2(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})$$

$$+ a_5\alpha_5^2(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54}) = \frac{1}{4}$$

$$a_2\alpha_1^2\beta_{21} + a_3(\alpha_2^2\beta_{32} + \alpha_1^2\beta_{31}) + a_4(\alpha_1^2\beta_{41} + \alpha_2^2\beta_{42} + \alpha_3^2\beta_{43})$$

$$+ a_5(\alpha_1^2\beta_{51} + \alpha_2^2\beta_{52} + \alpha_3^2\beta_{53} + \alpha_4^2\beta_{54}) = \frac{1}{12}$$

$$a_1\alpha_1^3\beta_{11} + a_2\alpha_2^3\beta_{21} + a_3\alpha_3^3(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4^3(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}) +$$

$$a_5\alpha_5^3(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54}) = \frac{1}{5}$$

$$a_2\alpha_1\alpha_2^2\beta_{21} + a_3\alpha_3^2(\alpha_2\beta_{32} + \alpha_1\beta_{31}) + a_4\alpha_4^2(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43})$$

$$+ a_5\alpha_5^2(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52} + \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) = \frac{1}{10}$$

$$a_2\alpha_1^2\alpha_2\beta_{21} + a_3\alpha_3(\alpha_2^2\beta_{32} + \alpha_1^2\beta_{31}) + a_4\alpha_4(\alpha_1^2\beta_{41} + \alpha_2^2\beta_{42} + \alpha_3^2\beta_{43})$$

$$+ a_5\alpha_5(\alpha_1^2\beta_{51} + \alpha_2^2\beta_{52} + \alpha_3^2\beta_{53} + \alpha_4^2\beta_{54}) = \frac{1}{15}$$

$$a_2\alpha_1\alpha_2\beta_{21} + a_3\alpha_3(\alpha_2\beta_{32} + \alpha_1\beta_{31}) + a_4\alpha_4(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43})$$

$$+ a_5\alpha_5(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52} + \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) = \frac{1}{8}$$

$$a_2\alpha_1^3\beta_{21} + a_3(\alpha_2^3\beta_{32} + \alpha_1^3\beta_{31}) + a_4(\alpha_1^3\beta_{41} + \alpha_2^3\beta_{42} + \alpha_3^3\beta_{43})$$

$$+ a_5(\alpha_1^3\beta_{51} + \alpha_2^3\beta_{52} + \alpha_3^3\beta_{53} + \alpha_4^3\beta_{54}) = \frac{1}{20}$$

โดยที่ $a_1 = \frac{589}{4972}$, $a_2 = \frac{1075}{4492}$, $a_3 = \frac{512}{1800}$, $a_4 = a_1$ และ $a_5 = a_2$

และสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 6 ซึ่งมีรูปแบบจากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 6 จุดมาปรับปรุงใช้ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{141}{1646}k_1 + \frac{559}{3099}k_2 + \frac{2501}{10690}k_3 + \frac{2501}{10690}k_4 + \frac{559}{3099}k_5 + \frac{141}{1646}k_6\right)$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11}hf(x_m, y_m))$ (4)

$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21}hk_1)$

$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31}hk_1 + \beta_{32}hk_2)$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41}hk_1 + \beta_{42}hk_2 + \beta_{43}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \alpha_5 h, y_m + \beta_{51}hk_1 + \beta_{52}hk_2 + \beta_{53}hk_3 + \beta_{54}hk_4)$$

$$k_6 = f(x_m + \alpha_5 h, y_m + \beta_{61}hk_1 + \beta_{62}hk_2 + \beta_{63}hk_3 + \beta_{64}hk_4 + \beta_{65}hk_5)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \frac{13}{385}$, $\alpha_2 = \frac{269}{1588}$, $\alpha_3 = \frac{761}{1999}$, $\alpha_4 = \frac{1238}{1999}$, $\alpha_5 = \frac{1319}{1588}$ และ $\alpha_6 = \frac{372}{385}$

จะได้ว่าเงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธี (4) คือ

$$a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21} + a_3(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}) + a_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54})$$
$$+ a_6(\beta_{61} + \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65}) = \frac{1}{2}$$

$$a_1\alpha_1\beta_{11} + a_2\alpha_2\beta_{21} + a_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}) + a_5\alpha_5(\beta_{51} + \beta_{52}$$
$$+ \beta_{53} + \beta_{54}) + a_6\alpha_6(\beta_{61} + \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65}) = \frac{1}{3}$$

$$a_1\beta_{11}^2 + a_2\beta_{21}^2 + a_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^2 + a_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54})^2$$
$$+ a_6(\beta_{61} + \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65})^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_1\alpha_1\beta_{11}^2 + a_2\alpha_2\beta_{21}^2 + a_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 + a_4\alpha_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})^2$$
$$+ a_5\alpha_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54})^2 + a_6\alpha_6(\beta_{61} + \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65})^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_2\alpha_1\beta_{21}^2 + a_3(\beta_{31} + \beta_{32})(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + a_4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42}$$
$$+ \alpha_3\beta_{43}) + a_5(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54})(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52} + \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) + a_6(\beta_{61}$$
$$+ \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65})(\alpha_1\beta_{61} + \alpha_2\beta_{62} + \alpha_3\beta_{63} + \alpha_4\beta_{64} + \alpha_5\beta_{65}) = \frac{1}{8}$$

$$a_2\alpha_1\beta_{21} + a_3(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + a_4(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}) + a_5(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52}$$
$$+ \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) + a_6(\alpha_1\beta_{61} + \alpha_2\beta_{62} + \alpha_3\beta_{63} + \alpha_4\beta_{64} + \alpha_5\beta_{65}) = \frac{1}{6}$$

$$a_1\alpha_1^2\beta_{11} + a_2\alpha_2^2\beta_{21} + a_3\alpha_3^2(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4^2(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})$$
$$+ a_5\alpha_5^2(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54}) + a_6\alpha_6^2(\beta_{61} + \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65}) = \frac{1}{4}$$

$$a_2\alpha_1^2\beta_{21} + a_3(\alpha_2^2\beta_{32} + \alpha_1^2\beta_{31}) + a_4(\alpha_1^2\beta_{41} + \alpha_2^2\beta_{42} + \alpha_3^2\beta_{43}) + a_5(\alpha_1^2\beta_{51} + \alpha_2^2\beta_{52}$$
$$+ \alpha_3^2\beta_{53} + \alpha_4^2\beta_{54}) + a_6(\alpha_1^2\beta_{61} + \alpha_2^2\beta_{62} + \alpha_3^2\beta_{63} + \alpha_4^2\beta_{64} + \alpha_5^2\beta_{65}) = \frac{1}{12}$$

$$a_1\alpha_1^3\beta_{11} + a_2\alpha_2^3\beta_{21} + a_3\alpha_3^3(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4^3(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}) + a_5\alpha_5^3(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54}) + a_6\alpha_6^3(\beta_{61} + \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65}) = \frac{1}{5}$$

$$a_2\alpha_1\alpha_2^2\beta_{21} + a_3\alpha_3^2(\alpha_2\beta_{32} + \alpha_1\beta_{31}) + a_4\alpha_4^2(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}) + a_5\alpha_5^2(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52} + \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) + a_6\alpha_6^2(\alpha_1\beta_{61} + \alpha_2\beta_{62} + \alpha_3\beta_{63} + \alpha_4\beta_{64} + \alpha_5\beta_{65}) = \frac{1}{10}$$

$$a_2\alpha_1^2\alpha_2\beta_{21} + a_3\alpha_3(\alpha_2^2\beta_{32} + \alpha_1^2\beta_{31}) + a_4\alpha_4(\alpha_1^2\beta_{41} + \alpha_2^2\beta_{42} + \alpha_3^2\beta_{43}) + a_5\alpha_5(\alpha_1^2\beta_{51} + \alpha_2^2\beta_{52} + \alpha_3^2\beta_{53} + \alpha_4^2\beta_{54}) + a_6\alpha_6(\alpha_1^2\beta_{61} + \alpha_2^2\beta_{62} + \alpha_3^2\beta_{63} + \alpha_4^2\beta_{64} + \alpha_5^2\beta_{65}) = \frac{1}{15}$$

$$a_2\alpha_1\alpha_2\beta_{21} + a_3\alpha_3(\alpha_2\beta_{32} + \alpha_1\beta_{31}) + a_4\alpha_4(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}) + a_5\alpha_5(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52} + \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) + a_6\alpha_6(\alpha_1\beta_{61} + \alpha_2\beta_{62} + \alpha_3\beta_{63} + \alpha_4\beta_{64} + \alpha_5\beta_{65}) = \frac{1}{8}$$

$$a_2\alpha_1^3\beta_{21} + a_3(\alpha_2^3\beta_{32} + \alpha_1^3\beta_{31}) + a_4(\alpha_1^3\beta_{41} + \alpha_2^3\beta_{42} + \alpha_3^3\beta_{43}) + a_5(\alpha_1^3\beta_{51} + \alpha_2^3\beta_{52} + \alpha_3^3\beta_{53} + \alpha_4^3\beta_{54}) + a_6(\alpha_1^3\beta_{61} + \alpha_2^3\beta_{62} + \alpha_3^3\beta_{63} + \alpha_4^3\beta_{64} + \alpha_5^3\beta_{65}) = \frac{1}{20}$$

$$a_1\alpha_1^4\beta_{11} + a_2\alpha_2^4\beta_{21} + a_3\alpha_3^4(\beta_{31} + \beta_{32}) + a_4\alpha_4^4(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}) + a_5\alpha_5^4(\beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54}) + a_6\alpha_6^4(\beta_{61} + \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65}) = \frac{1}{6}$$

$$a_2\alpha_1\alpha_2^3\beta_{21} + a_3\alpha_3^3(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + a_4\alpha_4^3(\alpha_1\beta_{41} + \alpha_2\beta_{42} + \alpha_3\beta_{43}) + a_5\alpha_5^3(\alpha_1\beta_{51} + \alpha_2\beta_{52} + \alpha_3\beta_{53} + \alpha_4\beta_{54}) + a_6\alpha_6^3(\alpha_1\beta_{61} + \alpha_2\beta_{62} + \alpha_3\beta_{63} + \alpha_4\beta_{64} + \alpha_5\beta_{65}) = \frac{1}{12}$$

$$a_2\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_{21} + a_3\alpha_3^2(\alpha_1^2\beta_{31} + \alpha_2^2\beta_{32}) + a_4\alpha_4^2(\alpha_1^2\beta_{41} + \alpha_2^2\beta_{42} + \alpha_3^2\beta_{43}) + a_5\alpha_5^2(\alpha_1^2\beta_{51} + \alpha_2^2\beta_{52} + \alpha_3^2\beta_{53} + \alpha_4^2\beta_{54}) + a_6\alpha_6^2(\alpha_1^2\beta_{61} + \alpha_2^2\beta_{62} + \alpha_3^2\beta_{63} + \alpha_4^2\beta_{64} + \alpha_5^2\beta_{65}) = \frac{1}{18}$$

$$a_2\alpha_1^3\alpha_2^2\beta_{21} + a_3\alpha_3(\alpha_1^3\beta_{31} + \alpha_2^3\beta_{32}) + a_4\alpha_4(\alpha_1^3\beta_{41} + \alpha_2^3\beta_{42} + \alpha_3^3\beta_{43}) + a_5\alpha_5(\alpha_1^3\beta_{51} + \alpha_2^3\beta_{52} + \alpha_3^3\beta_{53} + \alpha_4^3\beta_{54}) + a_6\alpha_6(\alpha_1^3\beta_{61} + \alpha_2^3\beta_{62} + \alpha_3^3\beta_{63} + \alpha_4^3\beta_{64} + \alpha_5^3\beta_{65}) = \frac{5}{12}$$

เมื่อ $a_1 = \frac{141}{1646}$, $a_2 = \frac{559}{3099}$, $a_3 = \frac{2501}{10690}$, $a_4 = a_1$, $a_5 = a_2$ และ $a_6 = a_3$

เอกสารอ้างอิง

[1] สุวรรณ ถังมณี. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข** 1. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. 2531.

[2] ไมตรี โพธิ์สุข. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**. กรุงเทพฯ : โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2529.

[3] สุวรรณ ถังมณี. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข** 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. 2531.

[4] E. Hairer, S.P. Norsett and G. Wanner. **Solving Ordinary Differential Equations**. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. 1993.

[5] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2546.

[6] ภัคคินี ชิตสกุล. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข**. กรุงเทพฯ : โครงการตำราวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2535.

[7] Goeken D., Johnson O. "Fifth-order Runge-Kutta with Higher Order Derivative Approximations" **Electronic Journal of Differential Equations**, vol. 2, 1999. pp. 1-9.

[8] Xinyuan W. "A Class of Runge-Kutta Formulae of Order Three and Four with Reduced Evaluations of Function" **Applied Mathematics and Computation**, vol. 146, 2003. pp 417-432.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นางสาวสิริรัตน์ ขันติดิลกวงษา
วัน เดือน ปีเกิด	7 กุมภาพันธ์ 2524 ที่กรุงเทพมหานคร
ที่อยู่	180 ซ. สุขุมวิท 95 ถ. สุขุมวิท แขวงบางจาก เขตพระโขนง กรุงเทพฯ 10250 โทร 0-2311-5313
ประวัติการศึกษา	2545 วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง