# การประยุกต์วิธีนิวตันเพื่อหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น

# APPLICATIONS OF NEWTON'S METHOD TO SOLVE NONLINEAR EQUATIONS



ชัยรัตน์ มดนาค

CHAIRAT MODNAK



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2545

ISBN 974-648-593-8

# APPLICATIONS OF NEWTON'S METHOD TO SOLVE NONLINEAR EQUATIONS

CHAIRAT MODNAK

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2002

ISBN 974-648-593-8

| | |
|---|---|
| **หัวข้อวิทยานิพนธ์** | **การประยุกต์วิธีนิวตันเพื่อหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น** |
| **นักศึกษา** | **นายชัยรัตน์ มดนาค** |
| **รหัสประจำตัว** | **41065301** |
| **ปริญญา** | **วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต** |
| **สาขาวิชา** | **คณิตศาสตร์ประยุกต์** |
| **พ.ศ.** | **2545** |
| **อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์** | **ผศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์** |

# บทคัดย่อ


ในการแก้ปัญหาสมการไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบตามสมการ (1.1) โดยทั่วไปนั้นนิยมใช้วิธีนิวตัน

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

และ เอ.เอ็ม.ออสโทรพ์สกี้ ได้ประยุกต์วิธีนิวตัน ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ(1.1) ซึ่งมีลำดับวิธีการคือ

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)} \tag{1.2}$$

เมื่อ $y_n, x_n$ นิยามใน บานาชสเปซ X (Banach Space X) จากการศึกษาของ เอ.เอ็ม.ออสโทรพ์สกี้ แสดงให้เห็นว่าสามารถประยุกต์วิธีนิวตันให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้นได้

ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีตามแบบ เอ.เอ็ม.ออสโทรพ์สกี้ วิธีนิวตัน และวิธีต่างๆ เพื่อประยุกต์ใน การแก้ปัญหาสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งวิธีที่ได้คือ

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; L_n = y_n - \left(\frac{f(y_n)(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)}\right), \; x_{n+1} = L_n - \frac{f(L_n)}{f'(L_n + \frac{1}{2}(L_n - y_n))}$$

ผลเฉลยที่ได้จากตัวอย่างต่างๆโดยวิธีการเชิงตัวเลขนั้น จะเห็นว่าวิธีที่ผู้วิจัยนำเสนอนั้น มีความเร็วของการลู่เข้าสู่ผลเฉลยมากกว่าวิธีนิวตันและวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ โดยที่จำนวนของงานที่ทำในปัญหาเดียวกันนั้น มีความแตกต่างกันไม่มากนัก ดังนั้นจึงเป็นวิธีหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นอีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจ และพัฒนาให้ดีขึ้นต่อไปในอนาคตได้

| | |
|---|---|
| **Thesis Title** | Applications of Newton's Method to solve Nonlinear Equations |
| **Student** | Mr. Chairat Modnak |
| **Student ID.** | 41065301 |
| **Degree** | Master of Science |
| **Programme** | Applied Mathematics |
| **Year** | 2002 |
| **Thesis Adviser** | Assistant Professor Praiboon Pantaragphong |

# ABSTRACT


To solve the nonlinear equation which is in the form of equation (1.1). In general by using Newton's method

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

A.M.Ostrowski applied Newton's method to solve the equation in (1.1) which the operator is in the form (1.2)

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)} \tag{1.2}$$

where $y_n, x_n$ defined in Banach space X .We know from his thesis now that it has better efficiency.

In this researching, we will study the method as A.M. Ostrowski Newton's Method and other methods to apply for solving the nonlinear equations. After we have been studied about these for a long time we got the following method;

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ L_n = y_n - \left(\frac{f(y_n)(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)}\right), \ x_{n+1} = L_n - \frac{f(L_n)}{f'(L_n + \frac{1}{2}(L_n - y_n))}$$

Consequently, the numerical programming an examples,it shows that the rate of convergence is more rapidly than the Newton's Method and the A.M.Ostrowski with a little difference of computational penalty.So that,this method will be interested to slove the nonlinear equations and to develop for more high efficiency in the future.

# กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาในเรื่องการหาผลเฉลยโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข และการเขียนโปรแกรมภาษาปาสคาล รวมทั้งได้ทดสอบตรวจเทียบแก้ไข และเสนอแนะแนวทางในหลายๆด้านในการทำวิทยานิพนธ์จาก ผศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ รวมทั้งให้กำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์จากท่านและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.อำพล ธรรมเจริญ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ที่ช่วยแนะนำแนวทางและตรวจทานในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ซึ่งมีส่วนให้ผู้วิจัยได้รับความรู้และแนวทางในการแก้ไขเป็นอย่างมาก

ขอขอบพระคุณ คุณแม่ของผู้วิจัย ที่ให้กำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์เสมอมา

ขอขอบคุณเพื่อนๆ นักศึกษาทุกคนที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำต่างๆ ช่วยในด้านการให้คำปรึกษา และชี้แนะแนวทางเพื่อปรับปรุงให้ดีขึ้นจนสำเร็จสมบูรณ์ และยังเป็นกำลังใจต่อผู้วิจัยอย่างใกล้ชิดตลอดมา

สุดท้ายขอขอบคุณบัณฑิตวิทยาลัย ที่ได้ให้ทุนสนับสนุนการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

ชัยรัตน์ มดนาค

# สารบัญ

หน้า

# สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

# สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

# สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วิธีนิวตัน(Newton's method)[4] เป็นวิธีที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาสมการไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูป $f(x)=0$ กันมาก แต่ก็ยังมีผู้วิจัยจำนวนมากที่พยายามหาวิธีที่ดีกว่า หรือประยุกต์วิธีนิวตันให้ใช้ได้ดีกว่าเดิม วิธีของ เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ (A.M.Ostrowski) ได้ประยุกต์วิธีนิวตัน เพื่อแก้ปัญหาของสมการไม่เชิงเส้นในบานาชสเปซ ซึ่งผลจากการศึกษาของผู้วิจัย แสดงให้เห็นว่าเป็นวิธีที่ได้ประสิทธิภาพที่ดียิ่งขึ้น หรือกล่าวได้ว่า ได้ความรวดเร็วสู่ผลเฉลยดีขึ้น โดยดูได้จากการอ้างอิงผลจากผลเฉลยเชิงตัวเลข

เนื่องจากมีบางปัญหาของสมการไม่เชิงเส้น วิธีนิวตันหาผลเฉลยได้ไม่ดี โดยเฉพาะการหาผลเฉลยของสมการที่มีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งค่า ซึ่งเป็นปัญหาของวิธีนิวตัน ดังนั้นแนวทางในการหาผลเฉลยของสมการนั้นจึงถูกยกขึ้นมาพิจารณาว่า จะหาผลเฉลยของปัญหานั้นด้วยวิธีการใด

ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีของ เอ.เอ็ม.ออสโทรพ์สกี้ เพราะเห็นว่าเป็นวิธีที่น่าสนใจ เนื่องจากผู้วิจัยได้เห็นปัญหาของนิวตันบางปัญหาที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ดังนั้นการที่ เอ.เอ็ม.ออสโทรพ์สกี้ ได้ประยุกต์วิธีนิวตันมาใช้นั้น อาจจะมีปัญหาบางปัญหาที่ทำให้หาผลเฉลยได้ไม่ดีพอ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ศึกษาการนำวิธีของเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้และวิธีนิวตันในการแก้ปัญหาที่อยู่ในรูปของสมการไม่เชิงเส้น โดยที่จุดมุ่งหมายของงานวิจัยนี้ก็คือได้วิธีที่นำไปใช้ในการหาผลเฉลยได้ความรวดเร็วของการลู่เข้าสู่ผลเฉลยได้ดียิ่งขึ้น โดยแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยด้วยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์

## 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อหาวิธีที่จะนำมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น ด้วยการประยุกต์วิธีนิวตันและวิธีของ เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้

## 1.3 สมมติฐานของงานวิจัย

ได้วิธีที่นำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น และผลจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นไปตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัย

## 1.4 ขอบเขตของการศึกษา

1.4.1 จะหาวิธีในการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นและยืนยันการลู่เข้าสู่ผลเฉลยด้วยทฤษฎี

1.4.1 แสดงตัวอย่างเปรียบเทียบเพื่อสนับสนุนงานวิจัย

## 1.5 ขั้นตอนของการวิจัย

1.5.1 ค้นคว้าเอกสารและข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

1.5.2 วิเคราะห์แนววิธีการประยุกต์ในการหาผลเฉลย

1.5.3 หาวิธีในการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น และดูแนวโน้มที่เป็นไปได้โดยผลขั้นต้นจากวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical method)

1.5.4 เปรียบเทียบผลเฉลยที่ใช้ในการหาผลเฉลยด้วยตัวอย่าง โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาปาสคาลเวอร์ชัน 7 (PASCAL VERSION 7)

1.5.5 สรุปผลและเขียนวิทยานิพนธ์

โดยสามารถเขียนสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

**ตารางที่ 1.1** ตารางเวลาและแผนการดำเนินงาน

| แผนการดำเนินงาน | เดือน | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1.. ค้นคว้าเอกสารและ ข้อ มูลที่เกี่ยวข้อง | ● | | | | ● | | | | | | | |
| 2. วิเคราะห์แนววิธีการประยุกต์เพื่อหาผลเฉลย | | | | | | ● | ● | | | | | |
| 3.หาวิธีเพื่อหาผลเฉลยของของสมการไม่เชิงเส้น แนวโน้มโดยผลขั้นต้นจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ | | | | | | | | ● | | ● | | |
| 4. เปรียบเทียบผลเฉลย | | | | | | | | | | | ● | |
| 5.สรุปผลและเขียนวิทยานิพนธ์ | | | | | | | | | | | | ● |

โดยที่ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ค้นคว้าหางานวิจัยและหนังสือที่เกี่ยวข้องโดยศึกษาและวิเคราะห์ข้อมูลต่างๆที่ได้อย่างละเอียดซึ่งได้ข้อมูลส่วนใหญ่ในประเทศไทยจากห้องสมุดสถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย ห้องสมุดคณะวิทยาศาสตร์และห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ห้องสมุดคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล ห้องสมุด TIAC ชั้นสามตึก NECTECH และข้อมูลประกอบจากการค้นคว้าผ่านอินเตอร์เนต

# บทที่ 2
# ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

## 2.1 นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

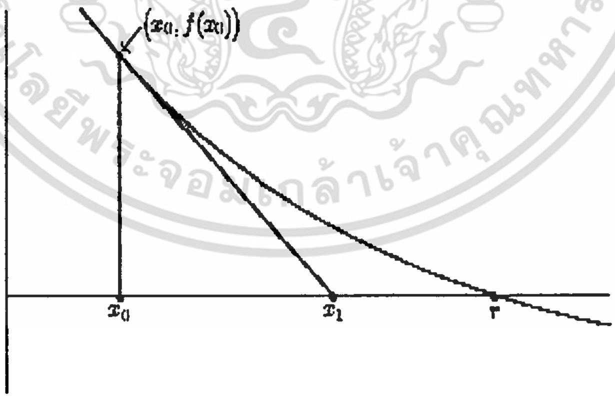
**นิยาม 2.1.1** วิธีนิวตัน [4]

เป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาที่อยู่ในรูปของสมการไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูป $f(x)=0$ ซึ่งเป็นการประมาณค่าของฟังก์ชันโดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ (Taylor polynomial) กำลังที่น้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่ง นั่นคืออยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ,n=0,1,2,... \qquad (2.1)$$

โดยที่ $x_0$ เป็นจุดเริ่มต้นที่กำหนดให้

ซึ่งจะเห็นได้ว่าวิธีนิวตันจะใช้ในการแก้ปัญหาของฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และอนุพันธ์ต้องไม่เท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 2.2




**รูปที่ 2.1** กราฟของวิธีนิวตัน

**นิยาม 2.1.2** วิธี เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ [4]

เป็นวิธีที่ประยุกต์วิธีนิวตันเพื่อใช้แก้ปัญหาที่อยู่ในรูปของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งวิธีที่ประยุกต์ได้คือ

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)} \tag{2.2}$$

โดยที่ลำดับ $y_n$ และ $x_n$ อยู่ในบานาชสเปซ X ถ้า $x_n$ ลู่เข้าสู่ $p_0$ ของ $f(x)$ จะได้

$$\frac{x_{n+1} - p_0}{(x_n - p_0)^4} \rightarrow \frac{1}{24}\frac{f''(p_0)}{f'(p_0)^3}[3f''(p_0)^2 - 2f'(p_0)f''(p_0)]$$

สมมติให้ $f'(p_0) \neq 0$ เราจะได้อันดับของการลู่เข้าเช่นเดียวกับวิธีนิวตันทำสองครั้งติดต่อกัน

**ทฤษฎี 2.1.3** (Newton's Method Theorem)

สมมติให้ $f \in C^2[a,b]$ และมี $p \in [a,b]$ โดยที่ $f(p) = 0$ ถ้า $f'(p) \neq 0$ $f', f''$ ต่อเนื่องและมีขอบเขต แล้วมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ลำดับ $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ กำหนดโดย

$$p_k = g(p_{k-1}) = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})} \quad ,k =,2,...$$

ลู่เข้าสู่ $p$ สำหรับการประมาณค่าช่วงใดๆ $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$

**พิสูจน์** พิจารณาจากพหุนามเทย์เลอร์ เมื่อ $n = 1$

$$f(x) = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0) + \frac{f''(c)(x - p_0)^2}{2!} \tag{2.3}$$

โดยที่ $c$ อยู่ระหว่าง $p_0$ และ $x$ แทน $x = p$ ในสมการ (1) และใช้ $f(p) = 0$ จะได้

$$0 = f(p_0) + f'(p_0)(p - p_0) + \frac{f''(c)(p - p_0)^2}{2!} \tag{2.4}$$

ถ้า $p_0$ มีค่าใกล้กับ $p$ มากพอ พจน์สุดท้ายจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับผลรวมของสองเทอมแรก ดังนั้นมันสามารถตัดทิ้งได้และใช้การประมาณค่าเพียง

$$0 \approx f(p_0) + f'(p_0)(p - p_0) \tag{2.5}$$

และจะได้ $p$ จากสมการ (2.5)

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

ซึ่งจะได้ $p$ ต่อๆไป นั่นคือ

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \tag{2.6}$$

เมื่อแทน $p_{k-1}$ ใน $p_0$ จะได้รูปทั่วๆไปของนิวตัน ในการพิสูจน์การลู่เข้านั้น เนื่องจาก $f'(p) \neq 0$ และ $f'$ ต่อเนื่อง มี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ สำหรับ $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$ $\subset [a,b]$ ดังนั้น $g$ นิยาม และต่อเนื่องบนช่วง $[p - \delta_1, p + \delta_1]$ อีกทั้ง

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

สำหรับ $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$ เนื่องจาก $f \in C^2[a,b]$ ได้ว่ามี $g \in C^1[p - \delta_1, p + \delta_1]$ โดยข้อสมมติฐาน $f(p) = 0$ ดังนั้น

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0\frac{f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

เนื่องจาก $g'(x)$ ต่อเนื่อง ได้สำหรับจำนวนบวกใดๆ $k < 1$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < \delta < \delta_1$ และ $|g'(x)| \leq k$ สำหรับ $x \in [p - \delta, p + \delta]$

ซึ่งถ้า $x \in [p - \delta, p + \delta]$ จาก Mean Value Theorem ได้ว่าสำหรับบางจำนวน $\xi$ ระหว่าง $x$ และ $p$ ได้ $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p|$

ดังนั้น $|g(x)-p| = |g(x)-g(p)| = |g'(\xi)||x-p| \le k|x-p| < |x-p|$ เนื่องจาก $x \in [p-\delta, p+\delta]$ ได้ $|x-p| < \delta$ ดังนั้น $|g(x)-p| < \delta$ ซึ่งเหตุผลนี้สรุปได้ว่า

$g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งไปยังตัวมันเอง นั่นคือ $g:[p-\delta, p+\delta] \to p-\delta, p+\delta]$

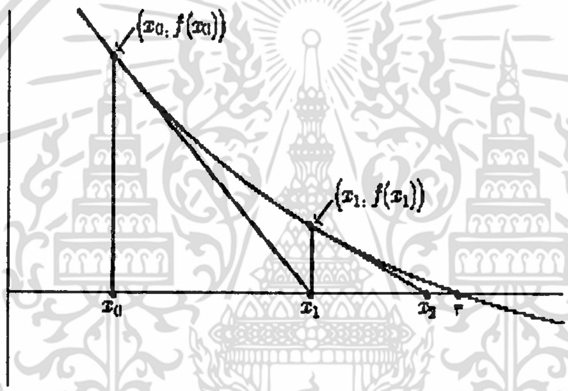
ดังนั้นจะเห็นว่า $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ สอดคล้องกับข้อสมมติฐานต่างๆของ Fixed-Point Theorem

ดังนั้น $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$p_k = g(p_{k-1}) \ , n = 1,2,3,...,$$

ลู่เข้าสู่ $p$ สำหรับ $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$

ซึ่งรูปที่2.2 แสดงถึงการลู่เข้าของวิธีนิวตัน




**รูปที่ 2.2** กราฟของการลู่เข้าของวิธีนิวตัน

**นิยาม 2.1.4** อันดับของราก (Order of a Root)

สมมติให้ $f(x)$ และอนุพันธ์ของมัน $f'(x),...,f^{(M)}(x)$ นิยามและต่อเนื่องบนช่วงที่มี $x = p$ อยู่ เราจะบอกได้ว่า $f(x) = 0$ มีรากของอันดับ $M$ ที่ $x = p$ ก็ต่อเมื่อ

$$f(p) = 0, f'(p) = 0, f''(p) = 0,..., f^{(M-1)}(p) = 0 \text{ และ } f^{(M)}(p) \ne 0$$

**นิยาม 2.1.5 อันดับของการลู่เข้า** (Order of Convergence)

สมมติว่า $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ $p$ และกำหนดให้ $e_n = p - p_n$ สำหรับ $n \ge 0$ ถ้ามีค่าคงที่บวกสองค่า $A$ และ $R$ และ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|p-p_{n+1}|}{|p-p_n|^R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^R}=A$$

แล้วลำดับนี้ เรากล่าวว่าลำดับลู่เข้าเป็นอันดับ $R$

ถ้า $p$ คือรากเดียว การลู่เข้าของลำดับจากวิธีนิวตันจะเป็นกำลังสอง และ

$$|e_{n+1}|\approx\frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|}|e_n|^2$$

สำหรับ $n$ ที่มีค่ามากพอ

ถ้า $p$ คือ รากหลายราก(multiple root) ของลำดับ $M$ การลู่เข้าจะเป็นเชิงเส้น และ

$$|e_{n+1}|\approx\frac{M-1}{M}|e_n|$$

สำหรับ $n$ ที่มีค่ามากพอ

**ทฤษฎี 2.1.6** (Acceleration of Newton's Method Iteration)

สมมติให้วิธีนิวตันก่อเกิดลำดับซึ่งลู่เข้าแบบเชิงเส้นสู่ราก $x=p$ ด้วยอันดับ $M>1$ แล้ว

$$p_n=p_{n-1}-\frac{Mf(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

จะก่อเกิดลำดับ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ ลู่เข้าแบบกำลังสองสู่ราก $p$

**ทฤษฎี 2.1.7** สมมติให้ $f$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ บนช่วง $[a,b]$ ;

(a) $f(a)f(b)<0$

(b) $f'$ ไม่มี $p$ ที่ทำให้เป็นศูนย์ใน $[a,b]$

(c) $f''$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายใน $[a,b]$

(d) $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|,\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|<b-a$

แล้วสำหรับ $x_0 \in [a,b]$ กระบวนการทำซ้ำของนิวตันลู่เข้าสู่ผลเฉลย $s$ ของ $f(x)=0$ ใน $[a,b]$

**พิสูจน์**

อันดับแรก พิจารณาจาก (a) ได้ว่า $f$ มี $p$ ที่ทำให้เป็นศูนย์ในช่วงที่กำหนดให้ และ เนื่องจาก $f'$ มีเครื่องหมายคงที่ในช่วง $[a,b]$ ยังคงได้ $f$ เป็น ฟังก์ชันทางเดียวอย่างแท้จริง และดังนั้น $p$ มีเพียงหนึ่งเดียว

โดยการสมมติให้ $f(a) < 0 < f(b)$ และดังนั้น $f''(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in [a,b]$ สิ่งที่ได้ตามมาคือ $f'(x) > 0$ ตลอดช่วงและดังนั้น ได้

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \begin{cases} \leq 0 & ,x < s \\ \geq 0 & ,x > s \end{cases}$$

โดย Mean Value Theorem ถ้า $x < s$ แล้ว

$$g(x) - s = g(x) - g(s) = (x-s)g'(\xi) \geq 0$$

เนื่องจากว่า $s > \xi > x$ และดังนั้น $g'(\xi) \leq 0$ ซึ่งจะได้ว่า $x_0 < s$ แล้ว $x_1 \geq s$ ถ้า $x > s$ จะได้เหมือนกัน ซึ่งคือ $g(x)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$x_n \geq s \quad \text{เมื่อ} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

ต่อไป ถ้า $x_n > s$ แล้ว

$$x_{n+} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

เนื่องจาก $f(x_n), f'(x_n) > 0$

ซึ่งในท้ายที่สุดแล้ว ได้ว่าสำหรับ $n \geq 1$

$$x_n > x_{n+1} > s$$

การมีขอบเขตนี้แสดงได้ว่าลำดับทางเดียวต้องลู่เข้า และลิมิตของมันคือ fixed point ของ $g$

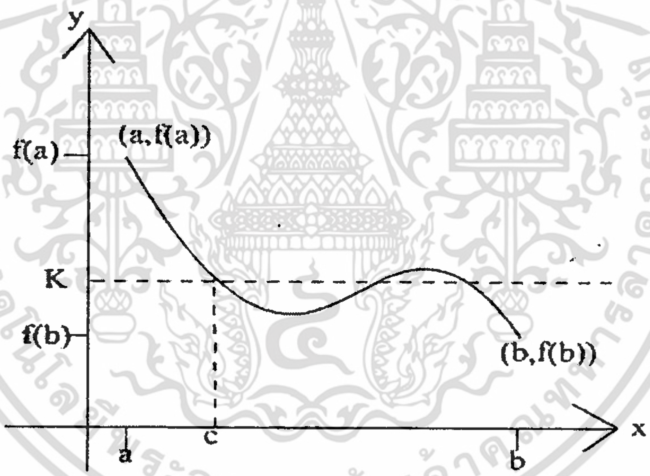
เนื่องจาก $s$ เป็น fixed point เพียงหนึ่งเดียวของ $g$ ที่อยู่ภายในช่วงที่กำหนดให้ และ $g([s,b]) \subseteq [s,b]$ ดังนั้นได้ว่า

$$g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} < a + (b-a) = b$$

นั่นคือได้ข้อ (d) สำหรับ $x \in [a,s]$ และจากการประยุกต์ของ Mean Value Theorem แสดงได้ว่า $g(a) - g(x) \geq 0$ และดังนั้น $g([a,b]) \subseteq [s,b]$ ด้วยเหมือนกัน ดังนั้น สำหรับค่าเริ่มต้นใดๆ $x_0$ กระบวนการทำซ้ำยังคงอยู่ในช่วง $[a,b]$

**ทฤษฎี 2.1.8** (Intermediate Value Theorem)

ถ้า $f \in C[a,b]$ และ $K$ คือจำนวนใดๆระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วมี $c$ ใน $(a,b)$ ซึ่ง $f(c) = K$ ดังรูปที่ 2.3




**รูปที่ 2.3** กราฟของ Intermediate Value Theorem

จากที่กล่าวมาแล้ว จะเห็นว่าข้อจำกัดในการหาผลเฉลยของวิธีนิวตันก็คือ $f'(p) \neq 0$ โดยที่ $p$ คือผลเฉลยของ $f(x) = 0$ จากนิยามของนิวตัน จะเห็นว่าถ้า $f'(p_n)$ ลู่เข้าสู่ศูนย์ พร้อมๆกันกับ $f(p_n)$ วิธีนิวตันจะเกิดความยากลำบากในการหาค่าราก โดยเฉพาะถ้า $f'(p) = 0$ เมื่อ $f(p) = 0$ เพื่อพิจารณาความยากลำบากนี้ เราจึงให้นิยามต่อไปนี้

**นิยาม 2.1.9**

ผลเฉลย $p$ ของ $f(x)=0$ เรียกว่าเป็น zero of multiplicity $m$ ของ $f$ ถ้า $f(x)$ สามารถ เขียนได้เป็น $f(x)=(x-p)^m q(x)$ สำหรับ $x \neq p$ โดยที่ $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$

จุดสำคัญของนิยามนี้คือ $q(x)$ ซึ่งไม่เป็นศูนย์ ที่ผลเฉลย $p$ ของ $f(x)$ ซึ่งทฤษฎีต่อไปนี้เป็นทฤษฎีที่ง่ายต่อการเข้าใจของการมีรากของฟังก์ชันที่มี multiplicity 1

**ทฤษฎี 2.1.10** $f \in C^1[a,b]$ มีรากเชิงเดียว( simple zero) ที่ $p$ ในช่วง $(a,b)$ ก็ต่อเมื่อ $f(p)=0$ แต่ $f'(p)\neq 0$

ซึ่งจะเห็นว่าสำหรับการประมาณค่าของฟังก์ชันที่ช่วงใดๆที่มี $p$ อยู่ แล้ววิธีนิวตันจะลู่เข้าแบบกำลังสองสู่ $p$ ซึ่ง $p$ คือ simple zero ซึ่งในบางปัญหานั้นการลู่เข้าของวิธีนิวตันนั้นเป็นเชิงเส้นไม่ได้เป็นแบบกำลังสอง ตัวอย่างเช่น เมื่อรากของสมการนั้นไม่ใช่ simple จึงเป็นเหตุให้วิธีนิวตันมีความเร็วของการลู่เข้าช้ากว่าปกติ วิธีหนึ่งที่ใช้แก้ปัญหานี้ก็คือ การกำหนดฟังก์ชัน

$$\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

ถ้า $p$ คือรากหนึ่งของ $f$ เมื่อมี zero of multiplicity $m \geq 1$ และ $f(x)=(x-p)^m q(x)$ แล้ว

$$\mu(x)=\frac{(x-p)^m q(x)}{m(x-p)^{m-1}q(x)+(x-p)^m q'(x)}$$

$$=\frac{(x-p)q(x)}{mq(x)+(x-p)q'(x)}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\mu(x)$ ยังคงมีรากหนึ่งที่ $p$ วิธีนิวตันสามารถประยุกต์สำหรับฟังก์ชัน $\mu$ ได้

$$g(x)=x-\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}=x-\frac{\dfrac{f(x)}{f'(x)}}{\{[f'(x)]^2-[f(x)][f''(x)]\}/[f'(x)]^2}$$

หรือ

$$g(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - [f(x)][f''(x)]}$$

ในการหาผลเฉลยของสมการที่มีหลายค่ารากนั้น มีหลายวิธีที่สามารถแก้ไขปัญหาการลู่เข้าที่กล่าวมาแล้วข้างต้นของนิวตันได้ วิธีที่ง่ายที่สุดของการมีรากสมการอันดับ $r$ คือ

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0,1,2,...$$

ซึ่งวิธีนี้ทำให้การลู่เข้าของนิวตันกลับมาเป็นกำลังสอง ดูเหมือนว่าจะแก้ไขปัญหาการมีหลายค่ารากได้ แต่ในความเป็นจริงแล้วเราไม่สามารถรู้จำนวนรากที่ซ้ำกันได้ในฟังก์ชันที่ยากต่อการจัดให้อยู่ในรูปของนิยามที่กล่าวมาข้างต้น ซึ่งเราอาจจะเดาค่าของ $r$ และดูว่าการลู่เข้าเป็นกำลังสองแล้วหรือยัง หรือเดาค่า $r$ หลายๆครั้งและดูผลที่เกิดขึ้น ซึ่งเกิดความยุ่งยากมากขึ้นในการหารากของสมการ จึงเป็นข้อจำกัดที่ไม่อาจหลีกเลี่ยงได้ของวิธีนี้ ปัญหาที่เกิดขึ้นกับวิธีนี้ยังมีอีกมาก อย่างเช่น การเดาค่าเริ่มต้น $x_0$ ซึ่ง ถ้าโชคดีเดาค่า $x_0$ แล้วทำให้การลู่เข้าเป็นกำลังสอง ผลที่ออกมาก็จะดีตามไปด้วย แต่ถ้าโชคร้าย ถึงแม้เลือกค่า $x_0$ ที่อยู่ระหว่างสองค่ารากแล้ว(หรือหลายค่าราก) โอกาสที่จะทำให้ลำดับลู่ออกก็มี

## 2.2 ตัวอย่าง

**ตัวอย่าง 2.2.1** การหาผลเฉลยโดยใช้วิธีนิวตัน

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = 9x^{7/3} + 4x^2 - 36x + 9$$

ถ้าใช้วิธีนิวตัน ขั้นแรกหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งก่อน ซึ่งได้

$$f'(x) = 21x^{4/3} + 8x - 36$$

ดังนั้นจากความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของนิวตัน จะได้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{9x_n^{7/3} + 4x_n^2 - 36x_n + 9}{21x_n^{4/3} + 8x_n - 36}$$

ดังนั้น ถ้าเลือก $x_0 = 0$ จะได้

$$x_1 = x_0 - \frac{9x_0^{7/3} + 4x_0^2 - 36x_0 + 9}{21x_0^{4/3} + 8x_0 - 36}$$

$$= 0.250034032409973$$

$$x_2 = x_1 - \frac{9x_1^{7/3} + 4x_1^2 - 36x_1 + 9}{21x_1^{4/3} + 8x_1 - 36}$$

$$= 0.269699212133369$$

และพิจารณาเมื่อ n มีค่าต่างๆ ดังตารางข้างล่างนี้

**ตารางที่ 2.1** ตารางแสดงค่าของกระบวนการทำซ้ำของนิวตันเมื่อ n มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 8

| | |
|---|---|
| N=0 | X[1]=0.250034032409973 |
| N=1 | X[2]=0.269699212133369 |
| N=2 | X[3]=0.269856153130975 |
| N=3 | X[4]=0.269856095894508 |
| N=4 | X[5]=0.269856095919272 |
| N=5 | X[6]=0.269856095919261 |
| N=6 | X[7]=0.269856095919261 |
| N=7 | X[8]=0.269856095919261 |
| N=8 | X[9]=0.269856095919261 |
| | |

**ตัวอย่าง 2.2.2** การหาผลเฉลยโดยวิธี เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้

จากฟังก์ชันเดียวกัน โดยใช้วิธีของ เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ หาผลเฉลย ซึ่งจาก

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{และ} \quad x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)} \tag{2.7}$$

ดังนั้นจะได้

$$y_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= x_0 - \frac{9x_0^{7/3} + 4x_0^2 - 36x_0 + 9}{21x_0^{4/3} + 8x_0 - 36}$$

$$= 0.250034032409973$$

นำค่า $y_0$ ที่ได้แทนในสมการของ เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ ได้ผลดังตาราง

**ตารางที่ 2.2** ตารางแสดงค่าของกระบวนการทำซ้ำของวิธี เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้

| | |
|---|---|
| N=0 | X[1]=0.26977563 |
| N=1 | X[2]=0.26985610 |
| | |

ซึ่งจะเห็นได้ว่าวิธีของ เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ ลู่เข้าเร็วกว่าวิธีของนิวตัน

# บทที่ 3

# ทฤษฎีหลักและผลการดำเนินการวิจัย

## 3.1 ทฤษฎีหลักที่ใช้ในงานวิจัย

จากวิธีของ เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ ซึ่งเป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

ซึ่งวิธีของเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้คือ

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

และ

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)} \tag{3.2}$$

วิธีที่ผู้วิจัยได้ประยุกต์วิธีนิวตันกับวิธีของเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ ไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น โดยประยุกต์เข้ากับวิธีจุดกลางและหาผลเฉลยโดยวิธีนิวตันซ้ำอีกครั้งโดยวิธีที่ได้คือ

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ L_n &= y_n - \left( \frac{f(y_n)(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)} \right) \\ x_{n+1} &= L_n - \frac{f(L_n)}{f'(L_n + \frac{1}{2}(L_n - y_n))} \end{aligned} \tag{3.3}$$

ผู้วิจัยได้พิจารณาการลู่เข้าของ เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้จะเห็นว่าวิธีของเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้จะคล้ายๆ กับวิธีของ Secant กับวิธีนิวตัน ผู้วิจัยได้ศึกษาเพิ่มเติมการหาผลเฉลยโดยใช้วิธี Fourier Bounds สำหรับกระบวนการทำซ้ำของวิธีนิวตัน โดยที่วิธีนี้อยู่ในรูป

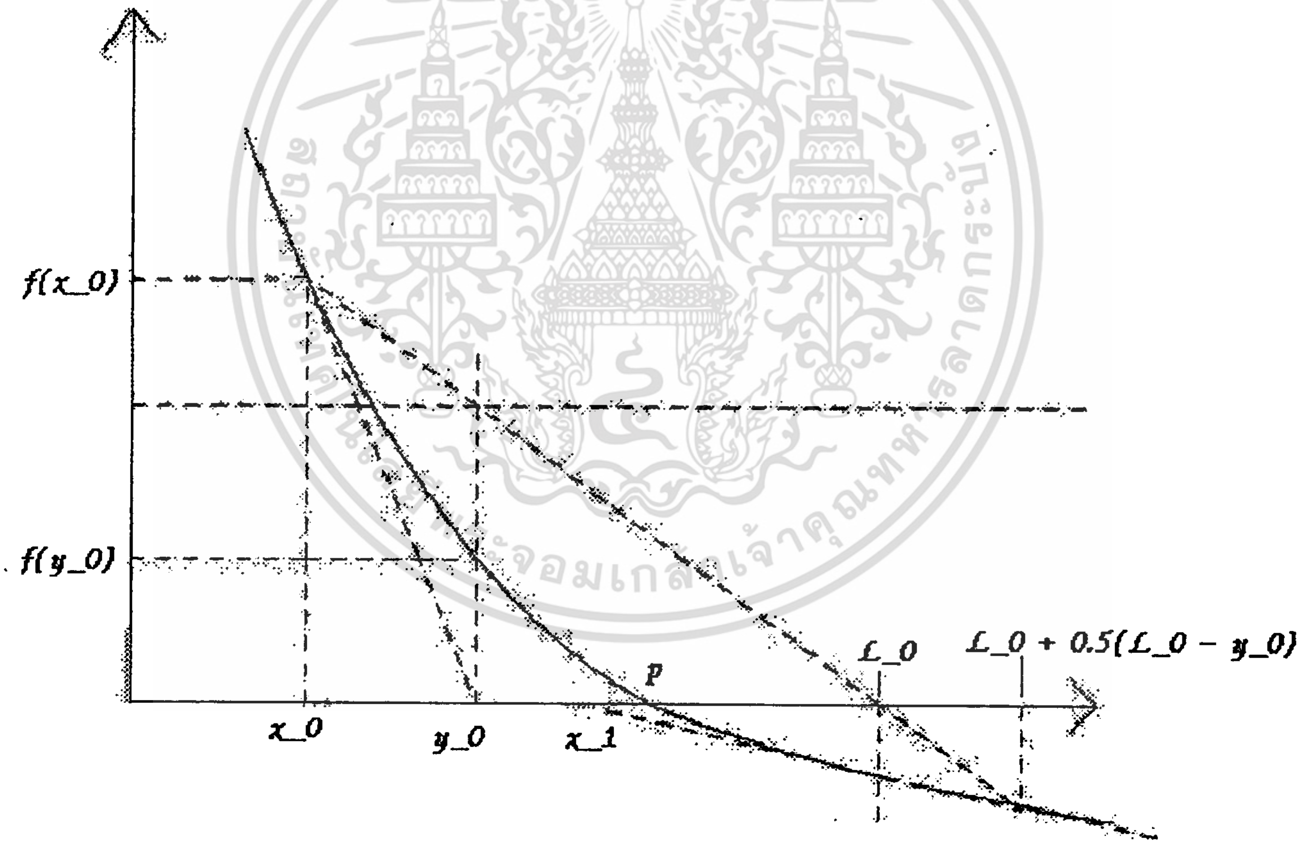
$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

โดยที่ $x_n$ ได้จากกระบวนการทำซ้ำของวิธีนิวตัน ซึ่งจุด $y_{n+1}$ คือจุดตัดของเส้นตรงที่ผ่าน $[y_n, f(y_n)]$ กับเส้นความชัน $f'(x_n)$ และแกน $x$ ดังนั้นผู้วิจัยจึงพิจารณาทั้งสองวิธี โดยเลือก

โดยที่ $x_n$ ได้จากกระบวนการทำซ้ำของวิธีนิวตัน ซึ่งจุด $y_{n+1}$ คือจุดตัดของเส้นตรงที่ผ่าน $[y_n, f(y_n)]$ กับเส้นความชัน $f'(x_n)$ และแกน $x$ ดังนั้นผู้วิจัยจึงพิจารณาทั้งสองวิธี โดยเลือกจุด $L_n$ ซึ่งเป็นจุด $x_{n+1}$ ของวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ มาพิจารณากับวิธีนี้และพิจารณาจุดอื่นมาแทน $x_n$ ซึ่งผู้วิจัยเห็นว่าจุด $L_n$ และ จุด $y_n$ จากวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ น่าจะเป็นประโยชน์ เนื่องจาก $L_n$ เป็นจุดที่ทำให้ลำดับ $x_{n+1}$ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยได้เร็วกว่าวิธีนิวตัน ผู้วิจัยจึงได้พิจารณาใช้จุด

$$L_n + \frac{1}{2}(L_n - y_n)$$

แทนจุดอนุพันธ์ของวิธีนิวตันในครั้งที่สอง โดยใช้ผลการทดลองจากวิธีการเชิงตัวเลขเบื้องต้นชี้ให้เห็นว่ามีความเร็วของการลู่เข้าเร็วกว่าในกรณีแรก ผู้วิจัยจึงได้พิจารณาจุดนี้เป็นหลักในงานวิจัยนี้ ซึ่งแสดงการลู่เข้าสู่ผลเฉลยของวิธีของผู้วิจัยดังกราฟต่อไปนี้




**รูปที่ 3.1** กราฟแสดงการลู่เข้าของวิธีผู้วิจัย

ผู้วิจัยได้แสดงการเปรียบเทียบทั้งสามวิธีด้วยผลเฉลยเชิงตัวเลขดังตัวอย่างที่จะกล่าวในหัวข้อ 3.4

## 3.2 การวิเคราะห์จำนวนรอบการทำซ้ำ

ในหัวข้อนี้จะเป็นการวิเคราะห์จำนวนรอบการทำซ้ำ เปรียบเทียบของวิธีนิวตัน ตาม (2.1) วิธีของเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ ตาม (2.2) และวิธีของผู้วิจัย ตาม (3.3)

เนื่องจากวิธีที่กล่าวมาแล้วข้างต้นนั้น โดยเฉพาะวิธีของเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ และวิธีที่ผู้วิจัยนั้น มีการคำนวณซ้อนกันหลายครั้ง จึงเกิดปัญหาขึ้นมาว่า การที่ทำให้จำนวนรอบของการลู่เข้านั้นลดลง เพียงพอที่จะสรุปว่า เป็นวิธีที่มีความเร็วของการลู่เข้าเร็วกว่าจริงหรือไม่ แล้วจำนวนงานที่ทำลดลงด้วยหรือไม่ ซึ่งผู้วิจัยกำลังจะกล่าวดังต่อไปนี้

1) วิธีนิวตัน ในแต่ละรอบจะมีการคำนวณเพื่อหาค่า $x_{n+1}$ จำนวน 1 ครั้ง สมมติว่าจำนวนรอบทั้งหมด $n$ ครั้ง ก็จะมีการคำนวณ n ครั้ง

2) วิธี เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ ในแต่ละรอบที่ทำการดำเนินการหาค่า $x_{n+1}$ จะมีการคำนวณ 2 ครั้ง คือ คำนวณค่า $y_n$ และคำนวณค่า $x_{n+1}$ ดังนั้นในปัญหาเดียวกัน ถ้าเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ได้ $m$ รอบ และวิธีนิวตันคำนวณได้ $n$ รอบ วิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ คำนวณหาผลเฉลยได้เร็วกว่าวิธีนิวตัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{3}{2}m \le n$ รอบ หรือ $m \le \frac{2n}{3}$ รอบ

3) วิธีที่ผู้วิจัยเสนอ ในแต่ละรอบที่ทำการคำนวณค่า $x_{n+1}$ จะมีการคำนวณ 3 ครั้ง ซึ่งคือคำนวณค่า $y_n, L_n$ และ $x_{n+1}$ ดังนั้นในปัญหาเดียวกัน ถ้าวิธีที่ผู้วิจัยนำเสนอ คำนวณได้ $k$ รอบ จะถือว่าดีกว่าวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ ก็ต่อเมื่อ $\frac{5}{2}k \le \frac{3}{2}m$ หรือ $k \le \frac{3}{5}m$ และจะถือว่าดีกว่าวิธีนิวตันก็ต่อเมื่อ $\frac{5}{2}k \le n$ หรือ $k \le \frac{2n}{5}$

วิธีสรุปเปรียบเทียบจำนวนรอบสูงสุดที่ทำของวิธีที่คิด ไม่ควรเกินค่าดังต่อไปนี้

| วิธี | จำนวนรอบสูงสุด |
|---|---|
| นิวตัน | $n$ |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | $\frac{2n}{3}$ |
| วิธีที่ผู้วิจัยนำเสนอ | $\frac{2n}{5}$ |

## 3.3 โปรแกรมที่ใช้ทดลองผล

โปรแกรมที่ใช้ทดสอบผล เขียนด้วยภาษาปาสคาล แปลด้วย Turbo Pascal Version 7 ซึ่งโปรแกรมที่ได้มีความยาวมากเป็นเพราะว่า ผู้วิจัยจำเป็นต้องให้โปรแกรมแสดงผลออกมาทั้งหมด เพื่อง่ายต่อการเปรียบเทียบ โดยให้มีคำสั่งแสดงออกในลักษณะไฟล์ สำหรับการหาค่าผลเฉลยของแต่ละวิธีดังนี้

3.3.1. โปรแกรมวิธีนิวตัน

โดยที่ในโปรแกรมที่ยกตัวอย่างมานี้ เป็นโปรแกรมสำหรับการคำนวณค่าของตัวอย่างที่ 3.2.6 เพื่อหาผลเฉลยของ $y = x^{10} - 1$ และ $f'(x) = 10x^9$ โดยเริ่มต้นค่า $x_0 = 0.5$ ส่วนในตัวอย่างอื่นๆ สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันได้ โดยเปลี่ยนตรงบริเวณอักษรทึบ

```
Program Newton;
uses crt;
var
  TOL,P0,D,X0,F0,E,FX0,A,B,M,C,P_0:real;
  I,NO,FLAG:integer;
  OK:boolean;
  AA:char;
  OUP:text;
  NAME:string[14];
function F(X:real):real;
  begin
    F:=exp(10*ln(x))-1
  end;
function FX(X:real):real;
  begin
    FX:=10*exp(9*ln(x))
  end;
procedure INPUT;
  begin
  clrscr;
```

(โปรแกรมต่อ)

```
writeln('Newtons method');
write('Have the functions F and F''been created in the program');
writeln('Enter Y or N');
readln(AA);
if (AA='Y') or (AA='y') then
  begin
     OK:=false;
     writeln('Input initial approximation');
     readln(X0);
     while (not OK) do
       begin
        writeln('Input tolerance');
        readln(TOL);
        if (TOL<=0.0) then writeln('Tolerance must be positive')
        else OK:=true
       end;
     OK:=false;
     while (not OK) do
      begin
        write('Input maximum number of iterations');
        writeln('-no decimal point');
        readln(NO);
        if (NO<=0) then writeln('Must be positive integer')
        else OK:=true
      end
  end
else
  begin
    write('The program will end so that the functions F and F'' ');
    writeln('can be created');
    OK:=false
```

(โปรแกรมต่อ)

```
        end
    end;
procedure OUTPUT;
  begin
    writeln('Select output destination');
    writeln('1.Screen');
    writeln('2.Text file');
    writeln('Enter 1 or 2');
    readln(FLAG);
    if (FLAG=2) then
      begin
        write('Input the file name in the form-');
        writeln('drive:name.ext');
        writeln('for example:A:OUTPUT.DTA');
        readln(NAME);
        assign(OUP,NAME)
      end
    else assign(OUP,'CON');
    rewrite(OUP);
    writeln(OUP,'NEWTONS METHOD');
    writeln('Select amount of output');
    writeln('1.Answer only');
    writeln('2.All untermediate approximations');
    writeln('Enter 1 or 2');
    readln(FLAG);
    if FLAG=2 then
      begin
        writeln(OUP,'I':3,' ','X':14,' ','F(X)':14)
      end
    end;
  begin
```

(โปรแกรมต่อ)

```
 INPUT;
if (OK) then
 begin
  OUTPUT;
  F0:=F(X0);
  I:=1;OK:=true;
  while((I<=NO)and OK) do
   begin
    FX0:=FX(X0);
    X0:=X0-F0/FX0;
    F0:=F(X0);                  วิธีนิวตัน
    if (FLAG=2) then
     begin
      writeln(OUP,I:3,' ',X0:20:14,' ',F0:20:14)
     end;
   if (abs(F0/FX0)<TOL) then
     begin
      writeln(OUP);
      writeln(OUP,'Approximate solution=',X0:20:14);
      writeln(OUP,'with F(X)=',F0:20:14);
      writeln(OUP,'Number of iterations=',I);
      writeln(OUP,'Tolerance=',TOL:20:14);
      OK:=false
    end
   else
     I:=I+1;
   end;
  if OK then
   begin
    writeln(OUP,'Iteration number',NO,'gave approximation',X0);
    writeln(OUP,'with F(X)=',F0,'not within tolerance',TOL)
```

(โปรแกรมต่อ)

```
        end;
         close(OUP);
    end;
    writeln('End program');
    readln;
end.
```

3.3.2. โปรแกรมวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้

โดยที่ในโปรแกรมที่ยกตัวอย่างมานี้ เป็นโปรแกรมสำหรับการคำนวณค่าของตัวอย่างที่ 3.2.6 เพื่อหาผลเฉลยของ $y = x^{10} - 1$ และ $f'(x) = 10x^9$ โดยเริ่มต้นค่า $x_0 = 0.5$ ส่วนในตัวอย่างอื่นๆ สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันได้ โดยเปลี่ยนตรงบริเวณอักษรทึบ

```
Program A_M_Method;
uses crt;
var
  TOL,P0,D,X0,F0,E,FX0,A,B,M,C,P_0:real;
  I,NO,FLAG:integer;
  OK:boolean;
  AA:char;
  OUP:text;
  NAME:string[14];
function F(X:real):real;
  begin
    F:=exp(10*ln(x))-1
  end;
function FX(X:real):real;
  begin
    FX:=10*exp(9*ln(x))
  end;
procedure INPUT;
  begin
```

(โปรแกรมต่อ)

```
clrscr;
  writeln('A.M.Method');
  write('Have the functions F and F''been created in the program');
  writeln('Enter Y or N');
  readln(AA);
  if (AA='Y') or (AA='y') then
   begin
     OK:=false;
     writeln('Input initial approximation');
     readln(X0);
     while (not OK) do
      begin
       writeln('Input tolerance');
       readln(TOL);
       if (TOL<=0.0) then writeln('Tolerance must be positive')
       else OK:=true
      end;
     OK:=false;
     while (not OK) do
      begin
       write('Input maximum number of iterations');
       writeln('-no decimal point');
       readln(NO);
       if (NO<=0) then writeln('Must be positive integer')
       else OK:=true
      end
   end
  else
   begin
    write('The program will end so that the functions F and F'' ');
    writeln('can be created');
```

(โปรแกรมต่อ)

```
      OK:=false
      end
    end;
procedure OUTPUT;
  begin
    writeln('Select output destination');
    writeln('1.Screen');
    writeln('2.Text file');
    writeln('Enter 1 or 2');
    readln(FLAG);
    if (FLAG=2) then
      begin
        write('Input the file name in the form-');
        writeln('drive:name.ext');
        writeln('for example:A:OUTPUT.DTA');
        readln(NAME);
        assign(OUP,NAME)
      end
    else assign(OUP,'CON');
    rewrite(OUP);
    writeln(OUP,'A.M.Method');
    writeln('Select amount of output');
    writeln('1.Answer only');
    writeln('2.All untermediate approximations');
    writeln('Enter 1 or 2');
    readln(FLAG);
    if FLAG=2 then
      begin
        writeln(OUP,'I':3,' ','X':14,' ','F(X)':14)
      end
    end;
```

(โปรแกรมต่อ)

```
begin
   INPUT;
   if (OK) then
    begin
     OUTPUT;
     F0:=F(X0);
     I:=1;OK:=true;
     while((I<=NO)and OK) do
      begin
       P0:=X0-F0/FX(X0);
       X0:=P0-((F(P0)*(P0-X0))/(2*F(P0)-F0));
       F0:=F(X0);
```

วิธี เอ.เอ็ม.ออส
โทร์พสกี้

```
       if (FLAG=2) then
        begin
         writeln(OUP,I:3,' ',X0:20:14,' ',F0:20:14)
        end;
       if (abs(F0/FX0)<TOL) then
        begin
         writeln(OUP);
         writeln(OUP,'Approximate solution=',X0:20:14);
         writeln(OUP,'with F(X)=',F0:20:14);
         writeln(OUP,'Number of iterations=',I);
         writeln(OUP,'Tolerance=',TOL:20:14);
         OK:=false
        end
       else
         I:=I+1;
       end;
      if OK then
       begin
        writeln(OUP,'Iteration number',NO,'gave approximation',X0:20:14);
```

(โปรแกรมต่อ)

```
          writeln(OUP,'with F(X)=',F0:20:14,'not within tolerance',TOL)
        end;
     close(OUP);
  end;
  writeln('End program');
  readln;
end.
```

3.3.3. วิธีของผู้วิจัยที่นำเสนอ

โดยที่ในโปรแกรมที่ยกตัวอย่างมานี้ เป็นโปรแกรมสำหรับการคำนวณค่าของตัวอย่างที่ 3.2.6 เพื่อหาผลเฉลยของ $y = x^{10} - 1$ และ $f'(x) = 10x^9$ โดยเริ่มต้นค่า $x_0 = 0.5$ ส่วนในตัวอย่างอื่นๆ สามารถเปลี่ยนฟังก์ชันได้ โดยเปลี่ยนตรงบริเวณอักษรทึบ

```
Program WE_Method;
uses crt;
var
  TOL,P0,D,X0,Z0,F0,E,FX0,A,B,M,C,P_0:real;
  I,NO,FLAG:integer;
  OK:boolean;
  AA:char;
  OUP:text;
  NAME:string[14];
function F(X:real):real;
  begin
     F:=exp(10*ln(x))-1
  end;
function FX(X:real):real;
  begin
     FX:=10*exp(9*ln(x))
  end;
procedure INPUT;
  begin
```

(โปรแกรมต่อ)

```
clrscr;
  writeln('WE Method');
  write('Have the functions F and F"been created in the program');
  writeln('Enter Y or N');
  readln(AA);
  if (AA='Y') or (AA='y') then
    begin
      OK:=false;
      writeln('Input initial approximation');
      readln(X0);
      while (not OK) do
        begin
          writeln('Input tolerance');
          readln(TOL);
          if (TOL<=0.0) then writeln('Tolerance must be positive')
          else OK:=true
        end;
      OK:=false;
      while (not OK) do
        begin
          write('Input maximum number of iterations');
          writeln('-no decimal point');
          readln(NO);
          if (NO<=0) then writeln('Must be positive integer')
          else OK:=true
        end
    end
  else
    begin
      write('The program will end so that the functions F and F" ');
      writeln('can be created');
```

(โปรแกรมต่อ)

```
      OK:=false
      end
    end;
procedure OUTPUT;
  begin
    writeln('Select output destination');
    writeln('1.Screen');
    writeln('2.Text file');
    writeln('Enter 1 or 2');
    readln(FLAG);
    if (FLAG=2) then
      begin
        write('Input the file name in the form-');
        writeln('drive:name.ext');
        writeln('for example:A:OUTPUT.DTA');
        readln(NAME);
        assign(OUP,NAME)
      end
    else assign(OUP,'CON');
    rewrite(OUP);
    writeln(OUP,'We Method');
    writeln('Select amount of output');
    writeln('1.Answer only');
    writeln('2.All untermediate approximations');
    writeln('Enter 1 or 2');
    readln(FLAG);
    if FLAG=2 then
      begin
        writeln(OUP,'I':3,' ','X':14,' ','F(X)':14)
      end
    end;
```

(โปรแกรมต่อ)

```
begin
  INPUT;
  if (OK) then
   begin
    OUTPUT;
    F0:=F(X0);
    I:=1;OK:=true;
    while((I<=NO)and OK) do
     begin

      P0:=X0-F0/FX(X0);
      E:=P0-((F(P0)*(P0-X0))/(2*F(P0)-F0));
     X0:=E-(F(E)/FX(E+(1/2)*(E-P0))));
      F0:=F(X0);
      if (FLAG=2) then
       begin
        writeln(OUP,I:3,' ',X0:20:14,' ',F0:20:14)
       end;
     if (abs(F0/FX0)<TOL) then
       begin
        writeln(OUP);
        writeln(OUP,'Approximate solution=',X0:20:14);
        writeln(OUP,'with F(X)=',F0:20:14);
        writeln(OUP,'Number of iterations=',I);
        writeln(OUP,'Tolerance=',TOL:20:14);
        OK:=false
      end
     else
        I:=I+1;
     end;
    if OK then
```

วิธีผู้วิจัย

(โปรแกรมต่อ)

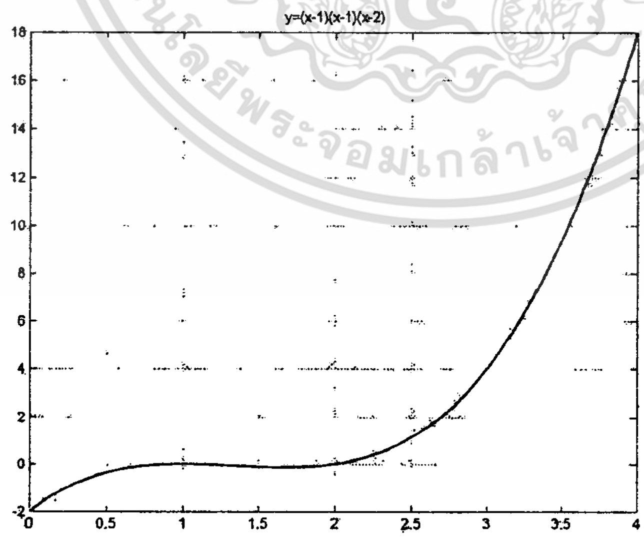
```
        begin
         writeln(OUP,'Iteration number',NO,'gave approximation',X0:20:14);
         writeln(OUP,'with F(X)=',F0:20:14,'not within tolerance',TOL)
        end;
      close(OUP);
    end;
    writeln('End program');
    readln;
end.
```

## 3.4 ตัวอย่างของงานวิจัย

ตัวอย่างต่างๆต่อไปนี้ เป็นตัวอย่างที่ได้มาจากหนังสือ numerical analysis ทั่วๆไป รวมทั้งผู้วิจัยได้ทำการค้นหาตัวอย่างที่ยังเป็นปัญหาสำหรับวิธีนิวตันทางอินเตอร์เนตด้วย ดังต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 3.2.1** ต่อไปพิจารณาสมการ[8]

$$f(x)=(x-1)^3(x-2) \text{ และ } f'(x)=(x-1)^3+3(x-2)(x-1)^2$$




**รูปที่ 3.2** กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=(x-1)^3(x-2)$

มีรากสมการเป็น x=1 และ x=2 โดยการเลือกค่าเริ่มต้นด้วย $x_0 = 0.9, 1.9$ ผู้วิจัยจะเปรียบเทียบจำนวนของการทำซ้ำของแต่ละวิธีในการเลือกค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกันไป และให้ค่าผิดพลาดไม่เกิน 0.0000001

**วิธีทำ** เริ่มด้วยวิธีนิวตันโดยการเลือก $x_0 = 0.9$ ซึ่งได้การประมาณค่าผลเฉลยดังตารางที่ 3.1

**ตารางที่ 3.1** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 0.9$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.93235294118 | 0.00033050228 |
| 2 | 0.95443556919 | 0.00009890737 |
| 3 | 0.96940624483 | 0.00002951113 |
| 4 | 0.97950424165 | 0.00000878624 |
| 5 | 0.98629072757 | 0.00000261190 |
| 6 | 0.99083997722 | 0.00000077562 |
| 7 | 0.99388410775 | 0.00000023016 |
| 8 | 0.99591861610 | 0.00000006826 |
| 9 | 0.99727723656 | 0.00000002024 |
| 10 | 0.99818400364 | 0.00000000600 |
| 11 | 0.99878897022 | 0.00000000178 |
| 12 | 0.99919248412 | 0.00000000053 |
| 13 | 0.99946158370 | 0.00000000016 |
| 14 | 0.99964102362 | 0.00000000005 |
| 15 | 0.99976066810 | 0.00000000001 |
| 16 | 0.99984043904 | 0.00000000000 |
| 17 | 0.99989362320 | 0.00000000000 |
| 18 | 0.99992908087 | 0.00000000000 |
| 19 | 0.99995272002 | 0.00000000000 |
| 20 | 0.99996847977 | 0.00000000000 |
| 21 | 0.99997898640 | 0.00000000000 |
| 22 | 0.99998599088 | 0.00000000000 |
| 23 | 0.99999066057 | 0.00000000000 |
| 24 | 0.99999377370 | 0.00000000000 |
| 25 | 0.99999584913 | 0.00000000000 |

**ตารางที่ 3.1** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 0.99999723275 | 0.00000000000 |
| 27 | 0.99999815517 | 0.00000000000 |
| 28 | 0.99999877011 | 0.00000000000 |
| 29 | 0.99999918007 | 0.00000000000 |
| 30 | 0.99999945338 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.99999945338 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =30 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.2** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตันสำหรับหลายค่าราก เมื่อเลือก $x_0 = 0.9$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.99705882353 | 0.00000002552 |
| 2 | 0.99999712776 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.99999712776 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

และวิธีต่อไป คือ วิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ ซึ่งจัดสมการอยู่ในรูปเดียวกันกับวิธีนิวตัน โดยการเลือก $x_0 = 0.9$ และได้ผลเฉลยดังตารางที่ 3.2

**ตารางที่ 3.3** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 0.9$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.95671018994 | 0.00008463734 |
| 2 | 0.98146598572 | 0.00000648461 |
| 3 | 0.99210563625 | 0.00000049587 |
| 4 | 0.99664512787 | 0.00000003789 |
| 5 | 0.99857567950 | 0.00000000289 |
| 6 | 0.99939555485 | 0.00000000022 |

**ตารางที่ 3.3** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 0.99974353485 | 0.00000000002 |
| 8 | 0.99989119051 | 0.00000000000 |
| 9 | 0.99995383730 | 0.00000000000 |
| 10 | 0.99998041563 | 0.00000000000 |
| 11 | 0.99999169144 | 0.00000000000 |
| 12 | 0.99999647515 | 0.00000000000 |
| 13 | 0.99999850461 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.99999850461 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =13 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.4** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 0.9$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.00043767950 | 0.00000019161 |
| 2 | 0.99999999851 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.99999999851 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.5** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 0.9$ ของตัวอย่างที่ 3.2.1

| วิธี | จำนวนครั้ง | N | 2N/3 | 2N/5 |
|---|---|---|---|---|
| นิวตัน | 30 | 30 | 20 | 12 |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | 13 | | | |
| ผู้วิจัย | 2 | | | |

**ตารางที่ 3.5** (ต่อ)

| |
|---|
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 |

**ตารางที่ 3.6** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 1.9$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2.0500000000 | 0.05788125000 |
| 2 | 2.0062500000 | 0.00636792145 |
| 3 | 2.0001143293 | 0.00011436849 |
| 4 | 2.0000000392 | 0.00000003920 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =2.0000000392 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000003920 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =4 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.7** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออส โทร์พสกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 1.9$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2.0039803220 | 0.00402804032 |
| 2 | 2.0000000044 | 0.00000000439 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =2.0000000044 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000439 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

ต่อไปจะเป็นวิธีของผู้วิจัย ซึ่งได้เลือกค่าเริ่มต้นเดียวกันกับวิธีของนิวตัน และวิธีของ เอ.เอ็ม.ออส โทร์พสกี้ เพราะว่าเป็นการแก้ปัญหาที่อยู่ในรูปแบบเดียวกัน และหลังจากนั้นผู้วิจัยได้สรุปผลความเร็วของการลู่เข้าของทั้งสามวิธีซึ่งสามารถดูได้จากตารางที่ 3.9

**ตารางที่ 3.8** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 1.9$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.9994496204 | -0.00054947131 |
| 2 | 2.0000000000 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =2.0000000000 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

ตารางที่ 3.9 นี้ได้แสดงผลสรุป เปรียบเทียบของวิธีการเชิงตัวเลข ทั้งสามวิธีของตัวอย่างที่ 3.2.1 ซึ่งสามารถดูได้จากตารางที่จะแสดงต่อไปนี้

**ตารางที่ 3.9** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 1.9$ ของตัวอย่างที่ 3.2.1

| **วิธี** | **จำนวนครั้ง** | **N** | **2N/3** | **2N/5** |
|---|---|---|---|---|
| นิวตันหลายค่าราก | 2 | 4 | 3 | 2 |
| นิวตัน | 4 | | | |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | 2 | | | |
| ผู้วิจัย | 2 | | | |
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 | | | | |

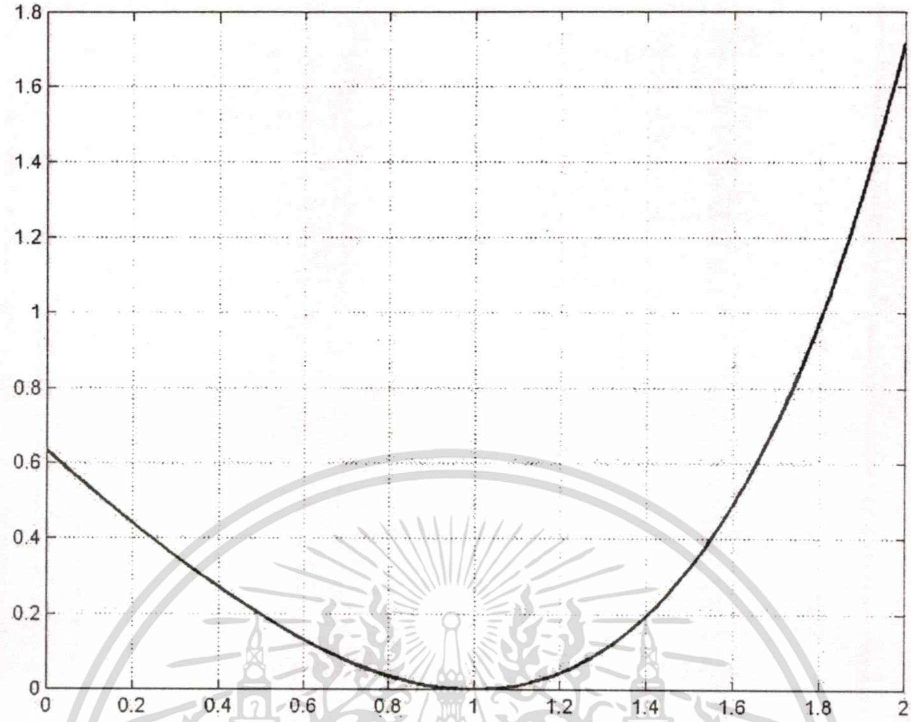
ซึ่งในตัวอย่างนี้จะเห็นว่าวิธีของผู้วิจัย สามารถลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วกว่าวิธีของนิวตัน โดยการเลือก $x_0 = 0.9$ ยืนยันได้ว่าดีกว่าเพราะว่าจำนวนครั้งของผู้วิจัยคือ 12น้อยกว่า N/3 = 14 และเมื่อเลือก $x_0 = 1.9$ ความเร็วของการลู่เข้าดีกว่าวิธีนิวตันเพราะว่าจำนวนครั้งของผู้วิจัยคือ2ซึ่งเท่ากับN/3 = 2

**ตัวอย่าง 3.2.2** พิจารณาฟังก์ชัน[23]

$$f(x) = (x-1)(e^{x-1} - 1)$$

และ

$$f'(x) = (x-1)(e^{x-1}) + (e^{x-1} - 1)$$




**รูปที่ 3.3** กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=(x-1)(e^{x-1}-1)$

ซึ่งผู้วิจัยได้แสดงการประมาณค่าผลเฉลยโดยตาราง เพื่อเปรียบเทียบให้เห็นผลทางตัวเลขที่ชัดเจน ดังนั้นผู้วิจัยจะแยกเป็นตารางละวิธี โดยแต่ละวิธีเลือก $x_0 = 1.5$ และค่าขอบเขตความผิดพลาด 0.0000001 โดยที่วิธีนิวตันและวิธี เอ.เอ็ม.ออสโทรว์พสกี้

**ตารางที่ 3.10** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 1.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.2798081464 | 0.09034333215 |
| 2 | 1.1494477548 | 0.02408990242 |
| 3 | 1.0774796930 | 0.00624178648 |
| 4 | 1.0394852976 | 0.00159027842 |
| 5 | 1.0199368874 | 0.00040146819 |
| 6 | 1.0100180457 | 0.00010086563 |
| 7 | 1.0050215575 | 0.00002527946 |
| 8 | 1.0025139294 | 0.00000632779 |
| 9 | 1.0012577545 | 0.00000158294 |

**ตารางที่ 3.10** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 1.0006290750 | 0.00000039586 |
| 11 | 1.0003145870 | 0.00000009898 |
| 12 | 1.0001573058 | 0.00000002475 |
| 13 | 1.0000786560 | 0.00000000619 |
| 14 | 1.0000393288 | 0.00000000155 |
| 15 | 1.0000196646 | 0.00000000039 |
| 16 | 1.0000098323 | 0.00000000010 |
| 17 | 1.0000049162 | 0.00000000002 |
| 18 | 1.0000024581 | 0.00000000001 |
| 19 | 1.0000012290 | 0.00000000000 |
| 20 | 1.0000006145 | 0.00000000000 |
| 21 | 1.0000003073 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.00000030730 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =21 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.11** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์สกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 1.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.1413497631 | 0.02146077327 |
| 2 | 1.0366013942 | 0.00136448068 |
| 3 | 1.0092343351 | 0.00008566788 |
| 4 | 1.0023139175 | 0.00000536041 |
| 5 | 1.0005788141 | 0.00000033512 |
| 6 | 1.0001447245 | 0.00000002095 |
| 7 | 1.0000361824 | 0.00000000131 |
| 8 | 1.0000090457 | 0.00000000008 |
| 9 | 1.0000022614 | 0.00000000001 |
| 10 | 1.0000005654 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.0000005654 |

**ตารางที่ 3.11** (ต่อ)

| | |
|---|---|
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | =10 |
| ค่าความผิดพลาด | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.12** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 1.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.00043767950 | 0.0000019161 |
| 2 | 0.99999999851 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.99999999851 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

ตารางที่ 3.13 นี้ได้แสดงผลสรุป เปรียบเทียบของวิธีการเชิงตัวเลข ทั้งสามวิธีของตัวอย่างที่ 3.2.2 ซึ่งสามารถดูได้จากตารางที่จะแสดงต่อไปนี้

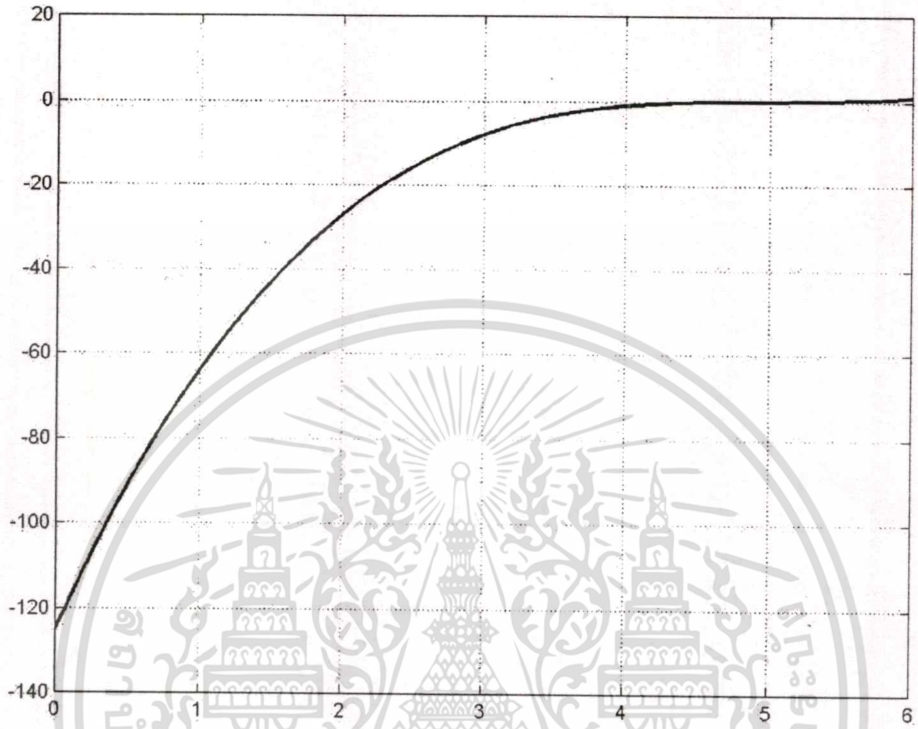
**ตารางที่ 3.13** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 1.5$ ของตัวอย่างที่ 3.2.2

| วิธี | จำนวนครั้ง | N | 2N/3 | 2N/5 |
|---|---|---|---|---|
| นิวตัน | 21 | 21 | 14 | 8 |
| เอ.เอ็ม.ออสโทรว์พสกี้ | 10 | | | |
| ผู้วิจัย | 2 | | | |
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 | | | | |

ซึ่งในตัวอย่างนี้จะเห็นว่าวิธีของผู้วิจัย สามารถลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วกว่าวิธีของนิวตัน โดยการเลือก $x_0 = 1.5$ และยืนยันได้ว่าดีกว่าจากจำนวนครั้งของผู้วิจัยคือ 2 ซึ่งน้อยกว่า 2N/5 = 8

**ตัวอย่างที่ 3.2.3** กำหนดฟังก์ชัน[16]

$$f(x) = (x-5)^3 = 0 \text{ และ } f'(x) = 3(x-5)^2$$




**รูปที่ 3.4** กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = (x-5)^3 = 0$

**วิธีทำ** โดยการเลือก $x_0 = 4$ สำหรับทุกวิธี จะได้ผลดังตารางที่ 3.14 3.15 3.16 3.17 และสรุปผลความเร็วของการลู่เข้าด้วยตารางที่ 3.18

**ตารางที่ 3.14** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 4$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 4.3333333333 | -0.29629629629 |
| 2 | 4.5555555556 | -0.08779149520 |
| 3 | 4.7037037037 | -0.02601229487 |
| 4 | 4.8024691358 | -0.00770734663 |
| 5 | 4.8683127572 | -0.00228365826 |
| 6 | 4.9122085048 | -0.00067663948 |
| 7 | 4.9414723365 | -0.00020048577 |
| 8 | 4.9609815577 | -0.00005940319 |

**ตารางที่ 3.14** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 4.9739877051 | -0.00001760095 |
| 10 | 4.9826584701 | -0.00000521510 |
| 11 | 4.9884389801 | -0.00000154521 |
| 12 | 4.9922926534 | -0.00000045784 |
| 13 | 4.9948617689 | -0.00000013566 |
| 14 | 4.9965745126 | -0.00000004019 |
| 15 | 4.9977163417 | -0.00000001191 |
| 16 | 4.9984775612 | -0.00000000353 |
| 17 | 4.9989850408 | -0.00000000105 |
| 18 | 4.9993233605 | -0.00000000031 |
| 19 | 4.9995489070 | -0.00000000009 |
| 20 | 4.9996992713 | -0.00000000003 |
| 21 | 4.9997995142 | -0.00000000001 |
| 22 | 4.9998663428 | 0.00000000000 |
| 23 | 4.9999108952 | 0.00000000000 |
| 24 | 4.9999405968 | 0.00000000000 |
| 25 | 4.9999603979 | 0.00000000000 |
| 26 | 4.9999735986 | 0.00000000000 |
| 27 | 4.9999823991 | 0.00000000000 |
| 28 | 4.9999882660 | 0.00000000000 |
| 29 | 4.9999921774 | 0.00000000000 |
| 30 | 4.9999947849 | 0.00000000000 |
| 31 | 4.9999965233 | 0.00000000000 |
| 32 | 4.9999976822 | 0.00000000000 |
| 33 | 4.9999984548 | 0.00000000000 |
| 34 | 4.9999989699 | 0.00000000000 |
| 35 | 4.9999993132 | 0.00000000000 |
| 36 | 4.9999995422 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =4.9999995422 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =36 |

**ตารางที่ 3.14** (ต่อ)

| | |
|---|---|
| ค่าความผิดพลาด | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.15** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตันสำหรับหลายค่าราก เมื่อเลือก $x_0 = 4$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 5.000000000000 | 0.000000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =5.000000000000 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =1 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.16** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทรว์สกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 4$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 4.5757575758 | -0.07635584495 |
| 2 | 4.8200183655 | -0.00583021506 |
| 3 | 4.9236441551 | -0.00044517100 |
| 4 | 4.9676066112 | -0.00003399141 |
| 5 | 4.9862573502 | -0.00000259544 |
| 6 | 4.9941697849 | -0.00000019818 |
| 7 | 4.9975265754 | -0.00000001513 |
| 8 | 4.9989506684 | -0.00000000116 |
| 9 | 4.9995548290 | -0.00000000009 |
| 10 | 4.9998111396 | -0.00000000001 |
| 11 | 4.9999198774 | 0.00000000000 |
| 12 | 4.9999660086 | 0.00000000000 |
| 13 | 4.9999855794 | 0.00000000000 |
| 14 | 4.9999938822 | 0.00000000000 |
| 15 | 4.9999974046 | 0.00000000000 |
| 16 | 4.9999988989 | 0.00000000000 |
| | | |

**ตารางที่ 3.16** (ต่อ)

| | |
|---|---|
| ผลเฉลย | =4.9999988989 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | =0.0000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | =16 |
| ค่าความผิดพลาด | =0.0000010000 |

**ตารางที่ 3.17** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 4$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 4.8529292929 | -0.00318110893 |
| 2 | 4.9783702071 | -0.00001011945 |
| 3 | 4.9968188911 | -0.00000003219 |
| 4 | 4.9995321521 | -0.00000000010 |
| 5 | 4.9999311933 | 0.00000000000 |
| 6 | 4.9999898806 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =4.9999898806 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.0000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =6 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.0000010000 |

ตารางที่ 3.16 นี้ได้แสดงผลสรุป เปรียบเทียบของวิธีการเชิงตัวเลข ทั้งสามวิธีของตัวอย่างที่ 3.2.3 ซึ่งสามารถดูได้จากตารางที่จะแสดงต่อไปนี้

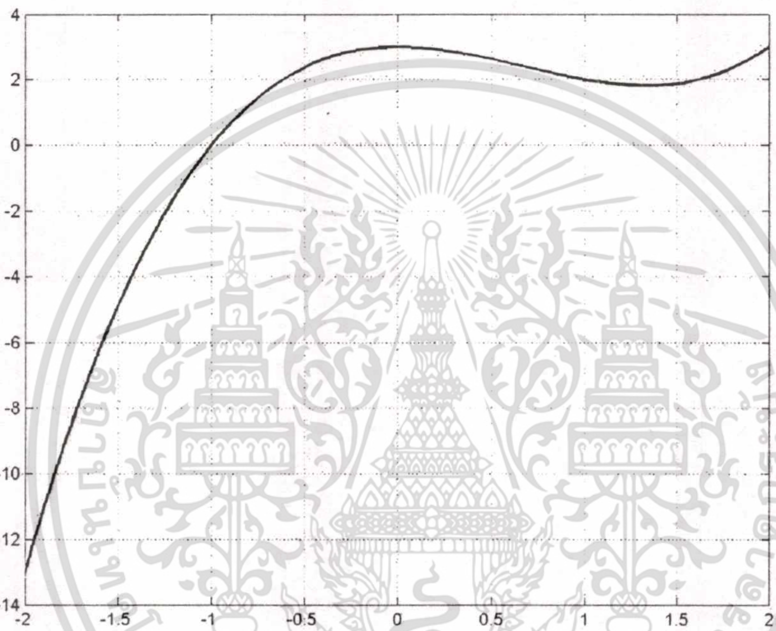
**ตารางที่ 3.18** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 4$ ของตัวอย่างที่ 3.2.3

| วิธี | จำนวนครั้ง | N | 2N/3 | 2N/5 |
|---|---|---|---|---|
| นิวตันหลายค่าราก | 1 | 36 | 24 | 14 |
| นิวตัน | 36 | | | |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | 16 | | | |
| ผู้วิจัย | 6 | | | |
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 | | | | |

ซึ่งในตัวอย่างนี้จะเห็นว่าวิธีของผู้วิจัย สามารถลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วกว่าวิธีของนิวตัน โดยการเลือก $x_0 = 4$ จะเห็นว่าจำนวนครั้งของผู้วิจัยได้ 6 ซึ่งน้อยกว่า 2N/5 = 14 ซึ่งสอดคล้องกับวิธีการเชิงตัวเลขในตัวอย่างอื่นๆของผู้วิจัย ส่วนวิธีนิวตันสำหรับหลายค่ารากนั้นได้ 1 ซึ่งจะเห็นว่ามีความกว่าของผู้วิจัยสำหรับฟังก์ชันที่ไม่ได้มีค่ารากเชิงเดียว

**ตัวอย่างที่ 3.2.4** กำหนดให้ฟังก์ชัน[22]

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3 \text{ และ } f'(x) = 3x^2 - 4x$$




**รูปที่ 3.5** กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$

**วิธีทำ** โดยการเริ่มต้นค่าที่ $x_0 = 0.5$ โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลขสำหรับทั้งสามวิธี สามารถแสดงดังตารางที่ 3.19 3.20 และ 3.21 โดยที่ผู้วิจัยได้สรุปผล เปรียบเทียบความเร็วของการลู่เข้า ดังตารางที่ 3.22

**ตารางที่ 3.19** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2.6000000000 | 7.0560000000 |
| 2 | 1.8858299595 | 2.5939708472 |
| 3 | 1.0559568833 | 1.9473495001 |
| 4 | 3.2721463054 | 16.6207959990 |
| 5 | 2.3988493746 | 5.2951700802 |

**ตารางที่ 3.19 (ต่อ)**

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1.7082984870 | 2.1487322233 |
| 7 | 0.5901322460 | 2.5090049999 |
| 8 | 2.4970176287 | 6.0989531450 |
| 9 | 1.7973733929 | 2.3454043889 |
| 10 | 0.8600214229 | 2.1568298386 |
| 11 | 2.6262134733 | 7.3189925769 |
| 12 | 1.9076886731 | 2.6640535967 |
| 13 | 1.0972250270 | 1.9131467185 |
| 14 | 3.5588395839 | 22.7432320640 |
| 15 | 2.6016594040 | 7.0724108873 |
| 16 | 1.8872208720 | 2.5983255623 |
| 17 | 1.0586531980 | 1.9449887783 |
| 18 | 3.2881911975 | 16.9281826070 |
| 19 | 2.4103482341 | 5.3840323926 |
| 20 | 1.7190190259 | 2.1696938004 |
| 21 | 0.6281741866 | 2.4586736810 |
| 22 | 2.4783474807 | 5.9381088783 |
| 23 | 1.7808319986 | 2.3049387956 |
| 24 | 0.8167289676 | 2.2107035465 |
| 25 | 2.5632475949 | 6.7006708825 |
| 26 | 1.8547610016 | 2.5003577485 |
| 27 | 0.9929761244 | 2.0070728639 |
| 28 | 2.9725336403 | 11.5932646900 |
| 29 | 2.1794377639 | 3.8523202211 |
| 30 | 1.4830795789 | 1.8630205915 |
| 31 | -1.3131704569 | -2.7132862963 |
| 32 | -1.0529264466 | -0.3846394277 |
| 33 | -1.0018974781 | -0.0133003553 |
| 34 | -1.0000025667 | -0.0000179671 |
| 35 | -1.0000000000 | 0.0000000000 |
| | | |

**ตารางที่ 3.19** (ต่อ)

| | |
|---|---|
| ผลเฉลย | =-1.0000000000 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | =35 |
| ค่าความผิดพลาด | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.20** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทรพ์สกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.3100548446 | 1.81588597660 |
| 2 | 11.2331486940 | 1168.07221460000 |
| 3 | 5.1932547076 | 89.12174244100 |
| 4 | 2.6169074984 | 7.22470892600 |
| 5 | 0.9282354682 | 2.07654508190 |
| 6 | 1.7270169502 | 2.18580415530 |
| 7 | 1.6316473004 | 2.01934458550 |
| 8 | 1.3111606476 | 1.81578717010 |
| 9 | 11.7199327590 | 1338.09909210000 |
| 10 | 5.3988126157 | 102.06579514000 |
| 11 | 2.7082013666 | 8.19419998040 |
| 12 | 1.0849551517 | 1.92287537960 |
| 13 | 2.2158539407 | 4.05984472390 |
| 14 | -3.3092535620 | -55.14248066000 |
| 15 | -1.3603562855 | -3.21857192180 |
| 16 | -1.0023221673 | -0.01628214604 |
| 17 | -1.0000000000 | -0.00000000005 |
| | | |
| ผลเฉลย | =-1.0000000000 | |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | =-0.00000000005 | |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | =17 | |
| ค่าความผิดพลาด | =0.00000010000 | |

**ตารางที่ 3.21** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2.67197701950 | 7.79755385280 |
| 2 | 2.54014756760 | 6.48522097680 |
| 3 | 3.92289874330 | 32.59174748700 |
| 4 | -0.41802316070 | 2.57746650140 |
| 5 | -0.96537756820 | 0.23640496105 |
| 6 | -0.99999999974 | 0.00000000179 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =-0.99999999974 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000179 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =6 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

ตารางที่ 3.20 นี้ได้แสดงผลสรุป เปรียบเทียบของวิธีการเชิงตัวเลข ทั้งสามวิธีของตัวอย่างที่ 3.2.4 ซึ่งสามารถดูได้จากตารางที่จะแสดงต่อไปนี้

**ตารางที่ 3.22** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 0$ ของตัวอย่างที่ 3.2.4

| วิธี | จำนวนครั้ง | N | 2N/3 | 2N/5 |
|---|---|---|---|---|
| นิวตัน | 35 | | | |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | 17 | 35 | 14 | 9 |
| ผู้วิจัย | 6 | | | |
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 | | | | |

ซึ่งในตัวอย่างนี้จะเห็นว่าวิธีของผู้วิจัย สามารถลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วกว่าวิธีของนิวตัน โดยการเลือก $x_0 = 0$ ซึ่งจะเห็นว่าจำนวนครั้งของผู้วิจัยนั้นน้อยกว่า 2N/5

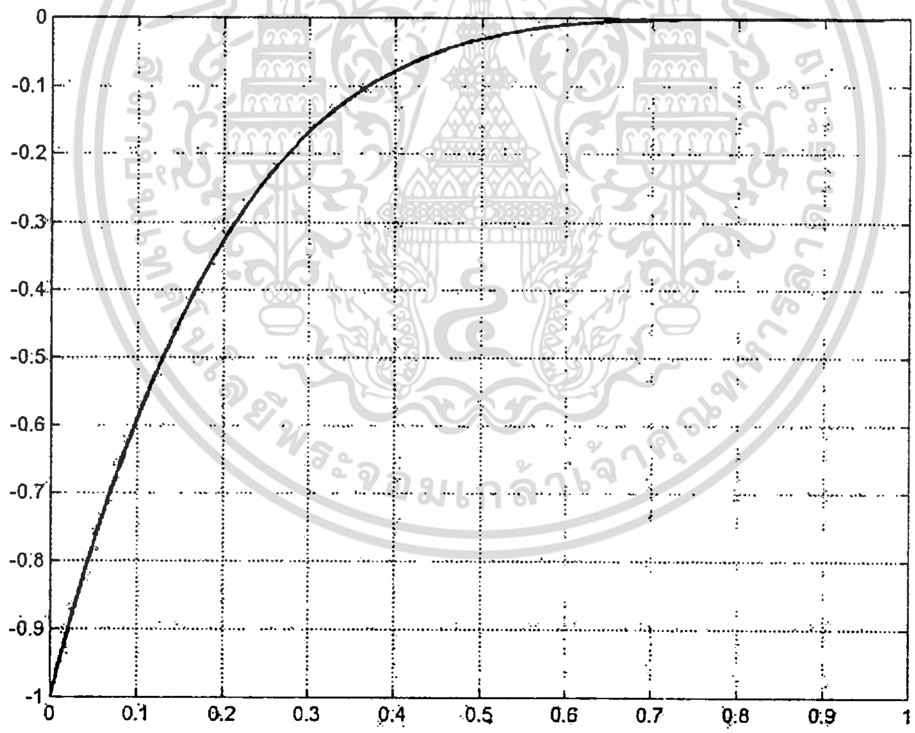
ตัวอย่างต่อไปนี้ เป็นตัวอย่างที่น่าสนใจมาก เนื่องมาจากว่า เป็นตัวอย่างที่ความเร็วของการลู่เข้าของวิธีของนิวตันช้ามาก และเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีของเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ และวิธีของผู้วิจัยแล้ว ก็ยังสอดคล้องกับผลสรุปของตัวอย่างอื่นๆที่ผ่านมา ถึงแม้ว่าวิธีของผู้วิจัยจะได้จำนวนครั้งของการลู่เข้าถึง 35 ครั้งก็ตาม ซึ่งถ้าพูดถึงในหลักของวิธีการเชิงตัวเลขแล้วไม่น่าจะเป็นที่ยอมรับได้

เนื่องจากจำนวนครั้งของการลู่เข้านั้นมากเกินไป ดังนั้นจึงเป็นสิ่งที่ดีถ้ามีผู้วิจัยอื่นนำแนวทางวิธีของผู้วิจัยนี้ไปพัฒนาต่อ อีกทั้งผู้วิจัยยังได้พิจารณาวิธีการหาค่ารากที่มากกว่าหนึ่งค่าของนิวตันด้วย

ในตัวอย่างที่ 3.2.5 นี้เป็นตัวอย่างของฟังก์ชัน $y=(x-1)^5$ โดยที่ผู้วิจัยได้ค้นพบตัวอย่างนี้จากหนังสือ Numerical Analysis ทั่วไปตามห้องสมุด และเป็นปัญหาที่ค้างไว้ให้กับนักศึกษาในการหาวิธีต่างๆที่คิดว่าสามารถแก้ปัญหาของการลู่เข้าของวิธีนิวตันได้ โดยผู้วิจัยได้นำปัญหาดังกล่าวมาแสดงในงานวิจัยนี้ โดยใช้วิธีการหาผลเฉลยทั้งสามวิธี เพื่อแสดงการเปรียบเทียบ โดยเลือกค่าเริ่มต้น $x_0=2$ และแสดงผลของวิธีการเชิงตัวเลขดังตารางที่ 3.23 3.24 3.25 และ 3.26 โดยที่ผลสรุปของวิธีต่างๆ แสดงดังตารางที่ 3.27

**ตัวอย่างที่ 3.2.5** จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ [9]

$$y=(x-1)^5 \text{ และ } f'(x)=5(x-1)^4$$




**รูปที่ 3.6** กราฟของฟังก์ชัน $y=(x-1)^5$

โดยการเริ่มต้น $x_0=2$ จะได้วิธีการเชิงตัวเลขของวิธีต่างๆ ดังนี้

**ตารางที่ 3.23** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 2$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.8000000000 | 0.32768000000 |
| 2 | 1.6400000000 | 0.10737418240 |
| 3 | 1.5120000000 | 0.03518437209 |
| 4 | 1.4096000000 | 0.01152921505 |
| 5 | 1.3276800000 | 0.00377789319 |
| 6 | 1.2621440000 | 0.00123794004 |
| 7 | 1.2097152000 | 0.00040564819 |
| 8 | 1.1677721600 | 0.00013292280 |
| 9 | 1.1342177280 | 0.00004355614 |
| 10 | 1.1073741824 | 0.00001427248 |
| 11 | 1.0858993459 | 0.00000467681 |
| 12 | 1.0687194767 | 0.00000153250 |
| 13 | 1.0549755814 | 0.00000050217 |
| 14 | 1.0439804651 | 0.00000016455 |
| 15 | 1.0351843721 | 0.00000005392 |
| 16 | 1.0281474977 | 0.00000001767 |
| 17 | 1.0225179981 | 0.00000000579 |
| 18 | 1.0180143985 | 0.00000000190 |
| 19 | 1.0144115188 | 0.00000000062 |
| 20 | 1.0115292150 | 0.00000000020 |
| 21 | 1.0092233720 | 0.00000000007 |
| 22 | 1.0073786976 | 0.00000000002 |
| 23 | 1.0059029581 | 0.00000000001 |
| 24 | 1.0047223665 | 0.00000000000 |
| 25 | 1.0037778932 | 0.00000000000 |
| 26 | 1.0030223145 | 0.00000000000 |
| 27 | 1.0024178516 | 0.00000000000 |
| 28 | 1.0019342813 | 0.00000000000 |
| 29 | 1.0015474251 | 0.00000000000 |
| 30 | 1.0012379400 | 0.00000000000 |
| 31 | 1.0009903520 | 0.00000000000 |

**ตารางที่ 3.23** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 32 | 1.0007922816 | 0.00000000000 |
| 33 | 1.0006338253 | 0.00000000000 |
| 34 | 1.0005070602 | 0.00000000000 |
| 35 | 1.0004056482 | 0.00000000000 |
| 36 | 1.0003245186 | 0.00000000000 |
| 37 | 1.0002596148 | 0.00000000000 |
| 38 | 1.0002076919 | 0.00000000000 |
| 39 | 1.0001661535 | 0.00000000000 |
| 40 | 1.0001329228 | 0.00000000000 |
| 41 | 1.0001063382 | 0.00000000000 |
| 42 | 1.0000850706 | 0.00000000000 |
| 43 | 1.0000680565 | 0.00000000000 |
| 44 | 1.0000544452 | 0.00000000000 |
| 45 | 1.0000435561 | 0.00000000000 |
| 46 | 1.0000348449 | 0.00000000000 |
| 47 | 1.0000278759 | 0.00000000000 |
| 48 | 1.0000223007 | 0.00000000000 |
| 49 | 1.0000178406 | 0.00000000000 |
| 50 | 1.0000142725 | 0.00000000000 |
| 51 | 1.0000114180 | 0.00000000000 |
| 52 | 1.0000091344 | 0.00000000000 |
| 53 | 1.0000073075 | 0.00000000000 |
| 54 | 1.0000058460 | 0.00000000000 |
| 55 | 1.0000046768 | 0.00000000000 |
| 56 | 1.0000037414 | 0.00000000000 |
| 57 | 1.0000029932 | 0.00000000000 |
| 58 | 1.0000023945 | 0.00000000000 |
| 59 | 1.0000019156 | 0.00000000000 |
| 60 | 1.0000015325 | 0.00000000000 |
| 61 | 1.0000012260 | 0.00000000000 |
| 62 | 1.0000009808 | 0.00000000000 |

**ตารางที่ 3.23** (ต่อ)

| | |
|---|---|
| ผลเฉลย | =1.0000009808 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | =0.0000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | =62 |
| ค่าความผิดพลาด | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.24** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตันสำหรับหลายค่าราก เมื่อเลือก $x_0 = 2$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.000000000000 | 0.000000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.00000000000 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =1 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.25** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทรพ์สกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 2$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.6098421541 | 0.08435041120 |
| 2 | 1.3719074530 | 0.00711499187 |
| 3 | 1.2268048422 | 0.00060015249 |
| 4 | 1.1383151536 | 0.00005062311 |
| 5 | 1.0843504112 | 0.00000427008 |
| 6 | 1.0514404365 | 0.00000036018 |
| 7 | 1.0313705466 | 0.0000003038 |
| 8 | 1.0191310817 | 0.00000000256 |
| 9 | 1.0116669401 | 0.00000000022 |
| 10 | 1.0071149919 | 0.00000000002 |
| 11 | 1.0043390220 | 0.00000000000 |
| 12 | 1.0026461185 | 0.00000000000 |
| 13 | 1.0016137146 | 0.00000000000 |
| 14 | 1.0009841112 | 0.00000000000 |
| 15 | 1.0006001525 | 0.00000000000 |

**ตารางที่ 3.25** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 1.0003659983 | 0.00000000000 |
| 17 | 1.0002232012 | 0.00000000000 |
| 18 | 1.0001361175 | 0.00000000000 |
| 19 | 1.0000830102 | 0.00000000000 |
| 20 | 1.0000506231 | 0.00000000000 |
| 21 | 1.0000308721 | 0.00000000000 |
| 22 | 1.0000188271 | 0.00000000000 |
| 23 | 1.0000114816 | 0.00000000000 |
| 24 | 1.0000070019 | 0.00000000000 |
| 25 | 1.0000042701 | 0.00000000000 |
| 26 | 1.0000026041 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.00000260410 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =26 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.26** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัยเมื่อเลือก $x_0 = 2$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.3695790263 | 0.00689503674 |
| 2 | 1.1365886567 | 0.00004754153 |
| 3 | 1.0504803028 | 0.00000032780 |
| 4 | 1.0186564611 | 0.00000000226 |
| 5 | 1.0068950367 | 0.00000000002 |
| 6 | 1.0025482610 | 0.00000000000 |
| 7 | 1.0009417838 | 0.00000000000 |
| 8 | 1.0003480635 | 0.00000000000 |
| 9 | 1.0001286370 | 0.00000000000 |
| 10 | 1.0000475415 | 0.00000000000 |
| 11 | 1.0000175704 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.0000175704 |

**ตารางที่ 3.26 (ต่อ)**

| | |
|---|---|
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | =11 |
| ค่าความผิดพลาด | =0.0000010000 |

ตารางที่ 3.27 นี้ได้แสดงผลสรุป เปรียบเทียบของวิธีการเชิงตัวเลข ทั้งสามวิธีของตัวอย่างที่ 3.2.5 ซึ่งสามารถดูได้จากตารางที่จะแสดงต่อไปนี้

ตารางที่ 3.27 ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 2$ ของตัวอย่างที่ 3.2.5

<table>
<tr><th>วิธี</th><th>จำนวนครั้ง</th><th>N</th><th>2N/3</th><th>2N/5</th></tr>
<tr><td>นิวตันหลายค่าราก</td><td>1</td><td rowspan="4">62</td><td rowspan="4">41</td><td rowspan="4">25</td></tr>
<tr><td>นิวตัน</td><td>62</td></tr>
<tr><td>เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้</td><td>26</td></tr>
<tr><td>ผู้วิจัย</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="5">กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5</td></tr>
</table>

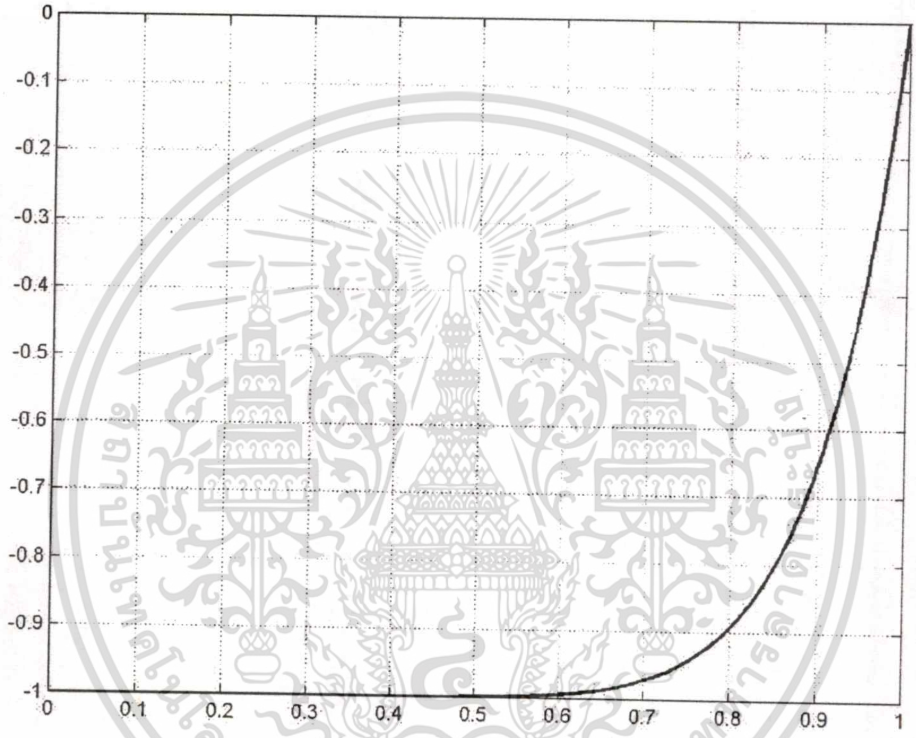
ซึ่งในตัวอย่างนี้จะเห็นว่าวิธีของผู้วิจัย สามารถลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วกว่าวิธีของนิวตัน โดยการเลือก $x_0 = 2$ แต่จำนวนครั้งของผู้วิจัยคือ 11 ซึ่งมากกว่าวิธีนิวตันสำหรับการหาค่ารากที่มีหลายค่าอยู่ 10 แต่ก็เป็นปัญหาอีกปัญหาหนึ่งที่วิธีนิวตันมีความลู่เข้าช้ามาก ซึ่งผู้วิจัยจะศึกษาปรับปรุงเพื่อใช้กับปัญหานี้ให้ดีขึ้นต่อไปในอนาคต

ในตัวอย่างสุดท้ายนี้ ลักษณะของตัวอย่างจะเหมือนกับตัวอย่างที่ 3.2.5 ซึ่งตัวอย่างนี้ผู้วิจัยได้พบมาจากเว็ปไซต์ของมหาวิทยาลัยคอร์แนล[11]ประเทศสหรัฐอเมริกา โดยเป็นหัวข้อการวิจัยในเรื่อง "Fractal Image Processing by Newton's Method" ซึ่งผู้วิจัยได้พบระหว่างการศึกษาเรื่องการหาผลเฉลยของฟังก์ชันที่ยากต่อการหาผลเฉลยโดยการสังเกตด้วยภาพ หรือเส้นโครงร่าง (Contour) โดยที่วิธีของผู้วิจัยสามารถลดจำนวนครั้งของการลู่เข้าได้มากพอสมควรเมื่อเทียบกับวิธีของนิวตัน ซึ่งเป็นประโยชน์สำหรับการหาผลเฉลยด้วยภาพ กล่าวคือ ไม่จำเป็นต้องหาผลเฉลยโดยการสังเกตด้วยภาพ และนำมาวิเคราะห์ เนื่องจากเสียเวลามาก

**ตัวอย่างที่ 3.2.6** กำหนดให้ฟังก์ชัน[11]

$$y = x^{10} - 1 \text{ และ } f'(x) = 10x^9$$

**วิธีทำ** ในตัวอย่างนี้ผู้วิจัยได้เริ่มต้นค่า $x_0 = 0.5$ และใช้วิธีการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยดังตารางที่ 3.29 3.30 3.31และ 3.32 พร้อมทั้งผลสรุป เปรียบเทียบทั้งสามวิธีดังตารางที่ 3.33




**รูปที่ 3.7** กราฟของฟังก์ชัน $y = x^{10} - 1$

**ตารางที่ 3.28** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตันเมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 51.6500000000 | 135114904480000000.00000000000 |
| 2 | 46.4850000000 | 47111654130000000.00000000000 |
| 3 | 41.8365000000 | 16426818073000000.00000000000 |
| 4 | 37.6528500000 | 5727677301300000.00000000000 |
| 5 | 33.8875650000 | 1997117586800000.00000000000 |
| 6 | 30.4988085000 | 696351844860000.00000000000 |
| 7 | 27.4489276500 | 242802875030000.00000000000 |

**ตารางที่ 3.28 (ต่อ)**

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 24.7040348850 | 84660127717000.00000000000 |
| 9 | 22.2336313960 | 29519161271000.00000000000 |
| 10 | 20.0102682570 | 10292695105000.00000000000 |
| 11 | 18.0092414310 | 3588840873700.00000000000 |
| 12 | 16.2083172880 | 1251351437600.00000000000 |
| 13 | 14.5874855590 | 436319267270.00000000000 |
| 14 | 13.1287370030 | 152135121500.00000000000 |
| 15 | 11.8158633030 | 53046236848.00000000000 |
| 16 | 10.6342769730 | 18496079117.00000000000 |
| 17 | 9.5708492755 | 6449184014.30000000000 |
| 18 | 8.6137643481 | 2248691421.80000000000 |
| 19 | 7.7523879137 | 784070216.94000000000 |
| 20 | 6.9771491233 | 273388379.91000000000 |
| 21 | 6.2794342135 | 95324633.58500000000 |
| 22 | 5.6514907988 | 33237644.27700000000 |
| 23 | 5.0863417359 | 11589249.69500000000 |
| 24 | 4.5777076062 | 4040921.24180000000 |
| 25 | 4.1199369589 | 1408981.85130000000 |
| 26 | 3.7079435554 | 491281.33012000000 |
| 27 | 3.3371499546 | 171298.94394000000 |
| 28 | 3.0034369073 | 59727.98466300000 |
| 29 | 2.7030982450 | 20825.59662500000 |
| 30 | 2.4328013995 | 7261.17265350000 |
| 31 | 2.1895547592 | 2531.55047970000 |
| 32 | 1.9706857398 | 882.43324773000 |
| 33 | 1.7738402371 | 307.42176658000 |
| 34 | 1.5970313480 | 106.92806963000 |
| 35 | 1.4388079314 | 37.02141119500 |
| 36 | 1.2987113427 | 12.64980150900 |
| 37 | 1.1783547156 | 4.16131590480 |
| 38 | 1.0833497535 | 1.22682910260 |
| 39 | 1.0236646612 | 0.26350541901 |

**ตารางที่ 3.28** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 40 | 1.0023160242 | 0.02340311717 |
| 41 | 1.0000239343 | 0.00023936868 |
| 42 | 1.0000000026 | 0.00000002578 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.00000000260 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000002578 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =42 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.29** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตันสำหรับหลายค่ารากเมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 512.00000000000 | 1237940039300000000000000000.000000000000 |
| 2 | 0.00000000000 | -1.000000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.00000000000(ไม่สามารถหาผลเฉลยได้) |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =-1.000000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.30** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทรพ์สกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 26.0750000000 | 145292491430000.0000000000 |
| 2 | 20.4633708030 | 12875726372000.0000000000 |
| 3 | 16.0594264470 | 1141038521600.0000000000 |
| 4 | 12.6032597610 | 101118093850.0000000000 |
| 5 | 9.8908984779 | 8961019904.4000000000 |
| 6 | 7.7622674262 | 794119772.5900000000 |
| 7 | 6.0917413899 | 70374378.9390000000 |
| 8 | 4.7807311230 | 6236531.4827000000 |
| 9 | 3.7518651481 | 552677.0327600000 |
| 10 | 2.9444255733 | 48977.5372390000 |

**ตารางที่ 3.30** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 2.3107827913 | 4340.01459840000 |
| 12 | 1.8137445506 | 384.26646321000 |
| 13 | 1.4257675003 | 33.71259724500 |
| 14 | 1.1387897550 | 2.66805225720 |
| 15 | 1.0068467941 | 0.07061645860 |
| 16 | 1.0000000790 | 0.0000079011 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.00000007900 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000079011 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =16 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.31** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | -1099.18705230000 | 2574637202200000000000000000000.0000000000 |
| 2 | -691.31111128000 | 24930751654000000000000000000.0000000000 |
| 3 | -434.78591892000 | 241409693570000000000000000.0000000000 |
| 4 | -273.44967006000 | 2337620660500000000000000.0000000000 |
| 5 | -171.98055136000 | 22635670805000000000000.0000000000 |
| 6 | -108.16363405000 | 219185944680000000000.0000000000 |
| 7 | -68.02729517600 | 2122423442300000000.0000000000 |
| 8 | -42.78436952900 | 20551871035000000.0000000000 |
| 9 | -26.90835011500 | 199008074740000.0000000000 |
| 10 | -16.92345391300 | 1927036898500.0000000000 |
| 11 | -10.64365860900 | 18659902181.0000000000 |
| 12 | -6.69411038590 | 180687743.2000000000 |
| 13 | -4.21012327900 | 1749636.7016000000 |
| 14 | -2.64787684020 | 16941.51233400000 |
| 15 | -1.66573741690 | 163.46194143000 |
| 16 | -1.07315431720 | 1.02591756780 |
| 17 | -0.99993939066 | -0.00060592814 |
| 18 | -1.00000000000 | 0.00000000000 |

**ตารางที่ 3.31** (ต่อ)

| | |
|---|---|
| ผลเฉลย | =-1.00000000000 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | =18 |
| ค่าความผิดพลาด | =0.00000010000 |

ตารางที่ 3.32 นี้ได้แสดงผลสรุป เปรียบเทียบของวิธีการเชิงตัวเลข ทั้งสามวิธีของตัวอย่างที่ 3.2.6 ซึ่งสามารถดูได้จากตารางที่จะแสดงต่อไปนี้

**ตารางที่ 3.32** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 0.5$ ของตัวอย่างที่ 3.2.6

| วิธี | จำนวนครั้ง | N | 2N/3 | 2N/5 |
|---|---|---|---|---|
| นิวตันหลายค่าราก | หาไม่ได้ | 42 | 28 | 17 |
| นิวตัน | 42 | | | |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | 16 | | | |
| ผู้วิจัย | 18 | | | |
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 | | | | |

ซึ่งในตัวอย่างนี้จะเห็นว่าวิธีของผู้วิจัย สามารถลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วกว่าวิธีของนิวตัน โดยการเลือก $x_0 = 0.5$ แต่จำนวนครั้งของผู้วิจัยคือ 18 ซึ่งมากกว่า 2N/5 อยู่ 1 ซึ่งเป็นปัญหาที่ผู้วิจัยคิดว่าวิธีที่ผู้วิจัยนำเสนอนั้นสามารถเป็นทางเลือกอีกทางหนึ่งของการนำไปใช้ได้

**ตัวอย่างที่ 3.2.7** กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 + x - 1 \text{ และ } f'(x) = 2x + 1$$

โดยการเริ่มต้น $x_0 = 0$

**วิธีทำ** ในตัวอย่างนี้ผู้วิจัยได้เริ่มต้นค่า $x_0 = 0$ และใช้วิธีการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยดังตารางที่ 3.33 3.34 และ 3.35 พร้อมทั้งผลสรุป เปรียบเทียบทั้งสามวิธีดังตารางที่ 3.36

**ตารางที่ 3.33** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 0$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.00000000000 | 1.00000000000 |
| 2 | 0.66666666667 | 0.11111111111 |
| 3 | 0.61904761905 | 0.00226757370 |
| 4 | 0.61803444782 | 0.00000102652 |
| 5 | 0.61803398875 | 0.00000000000 |
| ผลเฉลย | | =0.61803398875 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =5 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.34** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออส โทร์สกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 0$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.66666666667 | 0.11111111111 |
| 2 | 0.61803444782 | 0.00000102652 |
| 3 | 0.61803398875 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.61803398875 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =3 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.35** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 0$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.63333333333 | 0.03444444444 |
| 2 | 0.61803398875 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.61803398875 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.36** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 0$ ของตัวอย่างที่ 3.2.7

| วิธี | จำนวนครั้ง | N | 2N/3 | 2N/5 |
|---|---|---|---|---|
| นิวตัน | 5 | 5 | 3 | 2 |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | 3 | | | |
| ผู้วิจัย | 2 | | | |
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 | | | | |

**ตัวอย่างที่ 3.2.8** กำหนดฟังก์ชัน

$$x - \cos x = 0; [0, \frac{\pi}{2}] \text{ และได้ } f'(x) = 1 + \sin x$$

โดยการเริ่มต้น $x_0 = 0$

**วิธีทำ** ในตัวอย่างนี้ผู้วิจัยได้เริ่มต้นค่า $x_0 = 0$ และใช้วิธีการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยดังตารางที่ 3.37 3.38 และ 3.39 พร้อมทั้งผลสรุป เปรียบเทียบทั้งสามวิธีดังตารางที่ 3.40

**ตารางที่ 3.37** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 0$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.99999999999 | 0.45969769412 |
| 2 | 0.75036386784 | 0.01892307382 |
| 3 | 0.73911289091 | 0.00004645590 |
| 4 | 0.73908513338 | 0.00000000028 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.73908513338 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000028 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =4 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.38** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 0$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.76049869821 | 0.03600634148 |
| 2 | 0.73908513843 | 0.00000000873 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.73908513843 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000873 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.39** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 0$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.74154791015 | 0.00412397281 |
| 2 | 0.73908513322 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.73908513322 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.40** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 0$ ของตัวอย่างที่ 3.2.8

| วิธี | จำนวนครั้ง | N | 2N/3 | 2N/5 |
|---|---|---|---|---|
| นิวตัน | 4 | 4 | 3 | 2 |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | 2 | | | |
| ผู้วิจัย | 2 | | | |
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 | | | | |

**ตัวอย่างที่ 3.2.9** กำหนดฟังก์ชัน

$$\sin x - e^{-x} = 0 \;\; ;0 \le x \le 1 \text{ และ } f'(x) = \cos x + e^{-x}$$

เริ่มต้นค่า $x_0 = 0.5$

**วิธีทำ** ในตัวอย่างนี้ผู้วิจัยได้เริ่มต้นค่า $x_0 = 0.5$ และใช้วิธีการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยดังตารางที่ 3.41 3.42 และ 3.43 พร้อมทั้งผลสรุป เปรียบเทียบทั้งสามวิธีดังตารางที่ 3.44

**ตารางที่ 3.41** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.58564381697 | -0.00401127721 |
| 2 | 0.58852941263 | -0.00000462025 |
| 3 | 0.58853274398 | -0.00000000001 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.58853274398 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =-0.00000000001 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =3 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.42** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.58852871524 | -0.00000558746 |
| 2 | 0.58853274398 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.58853274398 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.43** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 0.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.58853273007 | -0.00000001929 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =0.58853273007 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =-0.00000001929 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =1 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.44** ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 0.5$ ของตัวอย่างที่ 3.2.9

<table>
<tr><th>วิธี</th><th>จำนวนครั้ง</th><th>N</th><th>2N/3</th><th>2N/5</th></tr>
<tr><td>นิวตัน</td><td>3</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">1</td></tr>
<tr><td>เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้</td><td>2</td></tr>
<tr><td>ผู้วิจัย</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="5">กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5</td></tr>
</table>

**ตัวอย่างที่ 3.2.10** กำหนดฟังก์ชัน

$$\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0 \text{ ;} 1.2 \le x \le 2 \text{ และ } f'(x) = \frac{1}{x-1} - \sin(x-1)$$

เริ่มต้นค่า $x_0 = 1.5$

**วิธีทำ** ในตัวอย่างนี้ผู้วิจัยได้เริ่มต้นค่า $x_0 = 1.5$ และใช้วิธีการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยดังตารางที่ 3.45 3.46 และ 3.47 พร้อมทั้งผลสรุป เปรียบเทียบทั้งสามวิธีดังตารางที่ 3.48

**ตารางที่ 3.45** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีนิวตัน เมื่อเลือก $x_0 = 1.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.37870677430 | -0.04184951316 |
| 2 | 1.39713581330 | -0.00130437649 |

**ตารางที่ 3.45** (ต่อ)

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1.39774783700 | -0.00000135896 |
| 4 | 1.39774847600 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.39774847600 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =-0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =4 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.46** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ เมื่อเลือก $x_0 = 1.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.39763781150 | -0.00023540642 |
| 2 | 1.39774847600 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.39774847600 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

**ตารางที่ 3.47** ผลเฉลยโดยใช้การประมาณค่าด้วยวิธีของผู้วิจัย เมื่อเลือก $x_0 = 1.5$

| N | x | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.39773809760 | -0.00002207317 |
| 2 | 1.39774847600 | 0.00000000000 |
| | | |
| ผลเฉลย | | =1.39774847600 |
| ค่าของ $f(x)$ ที่ผลเฉลย | | =-0.00000000000 |
| จำนวนของกระบวนการทำซ้ำ | | =2 |
| ค่าความผิดพลาด | | =0.00000010000 |

ตารางที่ 3.48 ตารางสรุปผลเมื่อเลือก $x_0 = 1.5$ ของตัวอย่างที่ 3.2.10

| วิธี | จำนวนครั้ง | N | 2N/3 | 2N/5 |
|---|---|---|---|---|
| นิวตัน | 4 | 4 | 3 | 2 |
| เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | 2 | | | |
| ผู้วิจัย | 2 | | | |
| กำหนดสัญลักษณ์ ให้ N=จำนวนครั้งของวิธีนิวตัน<br>2N/3=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย3<br>2N/5=จำนวนครั้งของวิธีนิวตันคูณด้วย2 หารด้วย 5 | | | | |

## 3.5 สรุปผลจากตัวอย่าง

จากตัวอย่างผู้วิจัยได้สรุปผลของแต่ละตัวอย่างดังนี้

ตารางที่ 3.49 ตารางสรุปจากตัวอย่างต่างๆ

| | | | จำนวนรอบในการทำงาน | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ฟังก์ชัน | $x_0$ | จำนวนราก | วิธีนิวตัน | วิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ | วิธีของผู้วิจัย |
| 1. $f(x)=(x-1)^3(x-2)$ และ $f'(x)=(x-1)^3+3(x-2$ | 0.9 | 2 | 30 | 20 | 12 |
| | 1.9 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2. $f(x)=(x-1)(e^{x-1}-1)$ และ $f'(x)=(x-1)(e^{x-1})+(e^x$ | 1.5 | 1 | 21 | 14 | 8 |
| 3. $f(x)=(x-5)^3=0$ และ $f'(x)=3(x-5)^2$ | 4 | 3 | 36 | 24 | 14 |
| 4. $f(x)=x^3-2x^2+3$ และ $f'(x)=3x^2-4x$ | 0.5 | 1 | 35 | 14 | 9 |

**ตารางที่ 3.49 (ต่อ)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5. $y=(x-1)^5$ และ $f'(x)=5(x-1)^4$ | 2 | 5 | 62 | 41 | 25 |
| 6. $y=x^{10}-1$ และ $f'(x)=10x^9$ | 0.5 | 10 | 42 | 28 | 17 |
| 7. $f(x)=x^2+x-1$ และ $f'(x)=2x+1$ | 0 | 1 | 5 | 3 | 2 |
| 8. $x-\cos x=0;[0,\frac{\pi}{2}]$ และได้ $f'(x)=1+\sin x$ | 0 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| 9. $\sin x-e^{-x}=0\ ;0\le x\le 1$ และ $f'(x)=\cos x+e^{-x}$ | 0.5 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 10. $\ln(x-1)+\cos(x-1)=0$ ; และ $f'(x)=\frac{1}{x-1}-\sin(x-1)$ | 1.5 | 1 | 4 | 3 | 2 |

# บทที่ 4

# สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

ผลจากงานวิจัยนี้ได้แสดงข้อเปรียบเทียบการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นของวิธีนิวตัน เอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ และวิธีที่ผู้วิจัยได้ประยุกต์ทั้งสองวิธีนี้เข้าด้วยกัน จะเห็นว่าผลเฉลยสามารถสรุปได้คือ เป็นวิธีที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยได้เร็วกว่าวิธีนิวตัน และวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ สำหรับสมการที่เป็นรากอันดับสูง ในบางตัวอย่างที่ผู้วิจัยได้นำเสนอที่มีค่ารากซ้ำกันมากกว่าหนึ่งค่านั้น โดยการใช้วิธีนิวตันที่ใช้สำหรับการแก้ไขปัญหานี้โดยตรง ได้ความเร็วของการลู่เข้าเร็วมาก และลู่เข้าสู่ผลเฉลยได้เร็วกว่าวิธีของผู้วิจัย และวิธีเอ.เอ็ม.ออสโทร์พสกี้ แต่โดยปกติแล้วเราไม่ทราบค่ารากและไม่ทราบว่าเป็นสมการที่มีค่ารากอันดับสูงหรือไม่ ดังนั้นวิธีการหารากอันดับสูง จึงไม่เหมาะสม เพราะว่าใช้หารากเชิงเดียวได้ไม่ดี และมีความยุ่งยากสำหรับสมการที่มีความซับซ้อน ส่วนสมการที่มีรากเชิงเดียวนั้น ทั้งสามวิธีให้ความเร็วของการลู่เข้าไม่แตกต่างกัน

ในกรณีศึกษาถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นนั้น ผู้วิจัยเห็นว่าการหาผลเฉลยด้วยวิธีนิวตัน ยังเป็นวิธีที่ง่ายต่อการใช้งานและผลเฉลยที่ได้มีความเร็วในการลู่เข้าอยู่ในเกณฑ์ดี ดังนั้นในงานวิจัยในหลายๆงานที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น ส่วนใหญ่ก็ยังมีความเกี่ยวข้องกับวิธีนิวตัน กล่าวคือ มองวิธีนิวตันเป็นต้นแบบ หรือไม่ก็ พัฒนาวิธีนิวตันให้ดีขึ้น

# เอกสารอ้างอิง


[1] Ezquerro J.A. and Hernandez M.A. "Remark on the Convergence of the Midpoint Method under Mild Differentiability Conditions". Journal of Computational and Applied Mathematics.vol.98.1997.pp 305-309.

[2] Gutierrez J.M. and Hernandez M.A. "Third Order Iterative Methods for Operators with Bounded Second Derivative". Journal of Computational and Applied Mathematics.vol.82.1997.pp 171-183.

[3] Eugene A.Herman. Convergence Approximation and Differential Equations. John Wiley & Sons.Inc.1986

[4] Ostrowski A.M. Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces. Academic Press New york and London.1973

[5] Ortega J.M. and Rheinboldt W.C. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Serveral Variables. Academic Press New york and London.1970.

[6] Lothar Collatz.Functional Analysis and Numerical Mathematics. Academic Press New York and London.1966.

[7] Curtis F. Gerald and Patrick O. Wheatley. Applied Numerical Analysis.7th Ed. Addison Wesley.1996.

[8] Derek R. and O'Conner. "Mathematical Review." [Online]. Available :http://www.yahoo.com/mathematical_review. 2001.

[9] Sean Mauch. Introduction to Method of Applied Mathematics. Mauch Publishing Company,un-Incorporated.2000

[10] Hosking Joe and Joyce Turner. First Steps In Numerical Analysis.2nd Ed. A member of the Hodder Headline Group.1996

[11] Mathematics Department of Cornell University. "Example of Newton's Method" [Online]. Available :http://www.maths.cornell.edu. 2001.

[12] Paul Hsieh."Paul Hsieh's Collection of Division Approximations." [Online]. Available :http://www.azillionmonkeys.com/qed/adiv.html. 2001.

[13] BSH-MS. "Fractals and Newton's Method-Problem Pages." [Online]. Available:http://www.bhs-ms.org/fractal/fractal1.htm. 2001.

[14] BRE. "Biosystems Modeling Techniques-Regression." [Online]. Available :http://biosys.bre.orst.edu/BRE571/regress/nonlin.htm. 2001.

[15] CS.UTAH.Newton's. "Method Tutorial." [Online]. Available: http://www.cs.utah.edu/~zachary/ispmma/applets/Root/Newton.html. 2001.

[16] CS.WISC. "Roots." [Online]. Aviable :http://www.cs.wisc.edu/~deboor/412/roots.pdf. 2001.

[17] Help.Unc. "Help-Mathematica." [Online] . Available :http://help.unc.edu/statistical/classes/handouts /intro_mathematica.pdf. 2001.

[18] Mac. "Newton's Method." [Online]. Available :http://homepage.mac.com/delaneyrm/Newton.html. 2001.

[19] SHAP LAB. "Researcher position for 2000." [Online]. Available :http://www.lems.brown.edu/vision/extra /SHAPE/News/PostDoc2001.html. 2001.

[20] MA.IUP. "Newton's Method." [Online]. Available :http://www.ma.iup.edu/projects/CalcDEMma/newton/newton.html. 2001.

[21] MA.IUP. "An Example:The length of Suspended Cable." [Online]. Available :http://www.ma.iup.edu/projects/CalcDEMma/newton/newton2.html. 2001.

[22] MA.IUP. "Finding Roots." [Online]. Available :http://www.ma.iup.edu/projects/CalcDEMma/newton/newton4.html. 2001.

[23] Mapleapps. "L22-Newton's Method." [Online]. Available :http://www.mapleapps.com/powertools/CalcI/html/L22-newtonsMethod.html. 2001.

[24] Marlboro. "Physics and Mathematics Lab." [Online]. Available :http://www.marlboro.edu/~mahoney/courses/Fall98/CompPhysLab.html. 2001.

[25] Math Arizona. "Mathematics Examples." [Online]. Available :http://www.math.arizona.edu/software/azmath.html. 2001.

[26] Richard L.Burden and Faires J.Douglas . **Numerical Analysis**. PWS publishing company.1993

[27] Dennis S. "RF 21 Feature Nonlinear Function Minimizer." [Online]. Available :http://www.members.aol.com/rf21exe/solver.html. 1983

[28] Curtis F.G and Patrick O.W. **Applied Numerical Analysis**. Fifth Edition. Addison-Wesley Publishing Company. 1994.pp.209.

[29] Podisuk M. "Modified Newton Iterative Method for Solving Systems of Nonlinear Equations." SEA Bull. Math.,Vol.15 , No.2(1991), pp.123-130.

[30] James M.Otega. "Numerical Analysis, A second Course." Society for Industrail and Applied Mathematics(SIAM). 1990.

# ประวัติผู้เขียน

นายชัยรัตน์ มดนาค เกิดเมื่อวันที่ 3 กันยายน 2518 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาวิทยาศาสตรบัณฑิต ( คณิตศาสตร์ ) จากมหาวิทยาลัยนเรศวร ปีการศึกษา 2540 และได้รับทุนพัฒนาอาจารย์สาขาขาดแคลน ( คณิตศาสตร์ ) ศึกษาต่อในระดับ ปริญญาโท-เอก ประเทศสหรัฐอเมริกาในปีเดียวกัน แต่เนื่องจากในปี 2540 เกิดวิกฤติเศรษฐกิจจึงเข้าโครงการชะลอตัวศึกษาต่อภายในประเทศ ณ.สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปัจจุบันรับราชการ ตำแหน่งอาจารย์ระดับ 3 สังกัดภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์มหาวิทยาลัยนเรศวร อ.เมือง จ.พิษณุโลก