สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

โปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION FOR ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA

T051773

ฐิติวรรณ อัศวมั่นมงคล
ดุษฎี พิลาไชย
ลดาวัลย์ สุขชัย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2546

เลขหมู่..............................
เลขทะเบียน 51773
วัน,เดือน,ปี 29 ก.ค. 2547

๖..............................
๑..............................

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION FOR ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA

TITIWAN AUTSAWAMUNMONGKOL
DUTSADEE PILACHAI
LADAWAN SUKCHAI

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2003

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION FOR ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวฐิติวรรณ อัศวมั่นมงคล	43050013
	นางสาวดุษฎี พิลาไชย	43050016
	นางสาวลดาวัลย์ สุขชัย	43050039
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2547

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ. ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการ	อ.กัมปนาท นามงาม	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น
ชื่อนักศึกษา	นางสาวฐิติวรรณ อัศวมั่นมงคล 43050013
	นางสาวดุษฎี พิลาไชย 43050016
	นางสาวลดาวัลย์ สุขชัย 43050039
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2546
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

การศึกษาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเป็นเรื่องที่มีรายละเอียดและขั้นตอนในการหาผลเฉลยที่ค่อนข้างมาก เพื่อเป็นการเสริมกับการศึกษาในห้องเรียน จึงได้นำเทคโนโลยีสารสนเทศ ด้านสื่ออิเลคทรอนิกส์ในรูปแบบของอินเตอร์เน็ต มาพัฒนาสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นผ่านทางอินเตอร์เน็ต เพื่อความสะดวกกับผู้ที่สนใจศึกษา ค้นคว้า หรือทบทวนเกี่ยวกับเนื้อหาพีชคณิตเชิงเส้น ได้ดียิ่งขึ้น

รูปแบบของโปรแกรมช่วยสอนที่ออกแบบมา เพื่อให้ผู้ใช้สามารถเลือกศึกษาในส่วนที่ต้องการได้ ซึ่งในแต่ละส่วนประกอบไปด้วยนิยาม ทฤษฎีบท ตัวอย่าง และแบบฝึกหัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	COMPUTER ASSISTED INSTRICTION FOR ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA
Students	Miss Titiwan Autsawamunmongkol 43050013
	Miss Dutsadee Pilachai 43050016
	Miss Ladawan Sukchai 43050039
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Program	Applied Mathematics
Academic Year	2003
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk
	Assoc.Prof.Pakkinee Chitasakul

ABSTRACT

The study of elementary linear algebra has many details and steps in order to solve the problems. To exterminate the above difficulties and to help the user study, research and repeat a lesson for more understanding in the content of linear algebra. We will use the information technology with the electronics communication in the fashion of Internet application to create the computer-assisted instruction to be the media in the study of linear algebra.

Designed programs will help the user to choose any interested part of the content which each part contains definitions, theories, examples and exercises.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง โปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น สามารถสำเร็จลุล่วงด้วยดีคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และรศ.ภัคคินี ชิตสกุล อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ไขปัญหาต่างๆรวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่สนับสนุนทางด้านกำลังใจและทุนทรัพย์ ทำให้การทำปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จด้วยดี รวมทั้งเพื่อนๆ และพี่ ๆทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือเกี่ยวกับปัญหาพิเศษและสนับสนุนทางด้านกำลังใจไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2547

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

พีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นเป็นเรื่องหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับเมตริกซ์ เวกเตอร์ ตัวกำหนด และระบบสมการเชิงเส้น เป็นต้น เนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นนี้เป็นเรื่องที่แพร่หลาย แต่มีรายละเอียด และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องที่ยากแก่การทำความเข้าใจ ดังนั้นจึงนำคอมพิวเตอร์มาช่วยสร้างโปรแกรมช่วยสอน และความสะดวกกับผู้ที่สนใจศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเนื้อหาทางด้านนี้ จึงได้นำเสนอโปรแกรมช่วยสอนนี้ผ่านทางสื่ออินเตอร์เน็ต เพื่อเสริมกับการเข้าไปศึกษาในห้องเรียน

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นแก่ผู้ที่สนใจมากยิ่งขึ้น

1.2.2 สามารถนำสื่อการสอนนี้ไปในใช้ได้อย่างกว้างขวางบนสื่ออินเตอร์เน็ต

1.2.3 สามารถใช้งานได้ง่าย และสร้างความสนใจแก่ผู้ใช้งาน

1.2.4 เพื่อศึกษาเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียน ซึ่งสามารถใช้ในการสร้างและพัฒนาบทเรียนเรื่องอื่นๆ ต่อไป

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นโปรแกรมช่วยสอนพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น โดยจะครอบคลุมเนื้อหาในส่วนของพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.3.1 จัดทำสื่อการเรียนการสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.3.2 ได้รับการศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.3.3 จัดทำแบบฝึกหัดเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.4.2 ช่วยให้สามารถการแก้ปัญหาเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.4.3 โปรแกรมช่วยสอนสะดวกและง่ายต่อการใช้งาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.5.2 ศึกษาภาษาทางคอมพิวเตอร์ในการเขียนโปรแกรม

1.5.3 ศึกษาภาษาที่นำไปเขียนบนอินเตอร์เน็ต

1.5.4 สร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.5.5 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาให้มีประสิทธิภาพ

1.5.6 ปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอ

1.5.7 จัดทำเอกสารประกอบการใช้ปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1.6.1 กระดาษ A4

1.6.2 Mobile Rack

1.6.3 Hard disk 20.0 GB

1.6.4 คอมพิวเตอร์ Operation "window xp" Ram 64 MB up

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.1 ความหมายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน คือ การนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาใช้เพื่อช่วยเป็นสื่อการสอน โดยที่คอมพิวเตอร์ จะทำการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนแทนอาจารย์ผู้สอน และผู้เรียนสามารถเรียนเนื้อหาของบทเรียนได้ด้วยตนเอง นอกจากนั้นคอมพิวเตอร์ยังมีความสามารถในการตอบสนองต่อข้อมูลที่ผู้เรียนหรือผู้สอนป้อนเข้าไปได้ ซึ่งเป็นการช่วยเสริมสร้างความเข้าใจ และดึงดูดความสนใจของผู้เรียน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในปัจจุบันจะพบว่ามีการนำสื่อผสม (สื่อผสม คือ การผสมผสานผสานเนื้อหาหลาย ๆ ชนิด เช่น ข้อความ เสียง ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว ฯลฯ รวมเข้าด้วยกัน) หรือ มัลติมีเดียเข้ามาช่วยในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนซึ่งทำให้ผู้เรียนรู้สึกสนุกกับการเรียนและไม่รู้สึกเบื่อหน่าย

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นจะอาศัยหลักของแนวความคิดจากทฤษฎีการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่กระตุ้นหรือสิ่งเร้ากับการตอบสนองของผู้เรียน เพื่อประเมินการตอบสนองของผู้เรียน ให้ข้อมูลย้อนกลับเพื่อเป็นการสร้างเสริมแรงกระตุ้นในการเรียน และให้ผู้เรียนมีสิทธิที่จะเลือกสิ่งเร้าในลำดับต่อไป

กระบวนการเรียนการสอน คือ การสื่อสารข้อมูลระหว่างอาจารย์ผู้สอนและผู้เรียน เมื่อผู้เรียนได้รับรู้ข้อมูลแล้วประมวลผลก็แสดงว่ามีการเรียนรู้เกิดขึ้น

2.2.1 การสื่อสารในกระบวนการเรียนการสอน

2.2.1.1 การสื่อสารแบบทางเดียว หรือ ระบบวงจรเปิด (Open-Loop System)

เป็นการสื่อสารข้อมูลโดยเน้นไปทางผู้เรียนเพียงทางเดียว ซึ่งผู้เรียนไม่สามารถสื่อสารข้อมูลไปยังอาจารย์ผู้สอนได้เช่น การเรียนทางไกลจากตำราและเอกสารหรือการเรียนโดยผ่านดาวเทียมสำหรับผู้เรียนที่อยู่ในชนบท

2.2.1.2 การสื่อสารแบบสองทาง หรือ ระบบวงจรปิด (Close-Loop System)

เป็นการสื่อสารข้อมูลที่ผู้เรียนและอาจารย์ผู้สอนสามารถตอบโต้แลกเปลี่ยนข้อมูลและความคิดเห็นกันได้ เช่น การเรียนการสอนในห้องเรียน ซึ่งเป็นการสื่อสารข้อมูลที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด เพราะเมื่อผู้เรียนไม่เข้าใจเนื้อหาในบทเรียนก็สามารถถามอาจารย์ผู้สอนได้ทันที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2 การจัดการศึกษาตามเอกัตภาพ

เนื่องจากผู้เรียนมีความแตกต่างกันทั้งในด้านร่างกาย ความรู้ ความคิดความสามารถ และระดับสมอง จึงได้มีการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนให้เป็นเอกัตภาพตามระดับความสามารถของผู้เรียน ซึ่งเรียกว่า “การศึกษาตามเอกัตภาพ”

การศึกษาตามเอกัตภาพมี 3 ลักษณะ คือ

2.2.2.1 บทเรียนโปรแกรม (Programmed Instruction)

การเรียนการสอนแบบนี้จะทำการจัดเป็นหน่วยๆ โดยมีทั้งกระบวนการเรียนรู้ และกระบวนการวัดผลเรียบร้อย ซึ่งเมื่อผ่านเกณฑ์ในหน่วยหนึ่งก็สามารถเรียนหน่วยต่อไปได้ ซึ่งบทเรียนโปรแกรมแบบนี้ สกินเนอร์ (B.F. Skinner) เป็นผู้คิดค้นขึ้นมา

2.2.2.2 บทเรียนโมดูล (Module Instruction)

บทเรียนโมดูลจะทำการจัดเป็นชุดๆ (Package)ประกอบด้วยบทเรียน อุปกรณ์ สื่อการเรียนการสอนเพื่อการเรียนรู้แบบครบวงจร อยู่ในชุดการเรียนรู้ ซึ่งผู้เรียนสามารถทดสอบบทเรียนโดยหาประสบการณ์ด้วยตนเองได้

2.2.2.2 บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI : Computer Assisted Instruction)

บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นการพัฒนามาจากบทเรียนโปรแกรม แต่ต่างกันตรงที่บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะใช้คอมพิวเตอร์ในการนำเสนอบทเรียนโปรแกรม ซึ่งเป็นการจัดการสอนและการศึกษาที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

2.3 ลักษณะบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ในการที่จะนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในเป็นสื่อในการสอนได้นั้นจะต้องประกอบด้วยองค์ประกอบและอุปกรณ์ต่างๆดังต่อไปนี้

2.3.1 ฮาร์ดแวร์ (Hardware)

ฮาร์ดแวร์ คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นสื่อในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนให้แก่ผู้เรียนโดยเครื่องคอมพิวเตอร์นี้จำเป็นที่จะต้องมีความสามารถเพียงพอที่จะรองรับและสนับสนุนการทำงานของซอฟท์แวร์ (Software) ซึ่งจะนำมาสร้างเป็นบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.3.2 ซอฟท์แวร์ (Software)

ซอฟท์แวร์ คือ โปรแกรมปฏิบัติการและโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.3.3 คอร์สแวร์ (Coureware)

คอร์สแวร์ คือ บทเรียนที่ต้องการจะนำมาสร้างโปรแกรมช่วยสอนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งระกอบไปด้วย เนื้อหา ตัวอย่าง แบบฝึกหัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) สามารถแบ่งออกเป็น 5 ประเภท คือ

2.4.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์ ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งนำมาเสนอเนื้อหาแก่ผู้เรียน ไม่ว่าจะเป็นเนื้อหาใหม่ หรือ การทบทวนเนื้อหาเดิมก็ตาม ส่วนใหญ่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้จะมีแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัด เพื่อเป็นการทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนว่ามีความเข้าใจมากน้อยเพียงใด อย่างไรก็ตาม ผู้เรียนมีอิสระพอที่จะเลือกตัดสินใจว่าจะทำแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัดหรือไม่อย่างไร หรือ จะเลือกเนื้อหาส่วนไหน เพราะการเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นผู้เรียนสามารถควบคุมการเรียนของตนได้ตามความต้องการของตนเอง

2.4.2 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ต้องการมุ่งเน้นให้ผู้ใช้ทำแบบฝึกหัดจนสามารถเข้าใจเนื้อหาในบทเรียนนั้นๆได้ ซึ่งคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้เป็นประเภทที่ได้รับความนิยมมากโดยเฉพาะในระดับอุดมศึกษา ทั้งนี้เนื่องจากเป็นการเปิดโอกาสทำความเข้าใจบทเรียนที่สำคัญๆได้โดยที่ผู้สอนไม่ต้องเสียเวลาในชั้นเรียนเพื่อที่จะอธิบายเนื้อหาเดิมที่ผู้เรียนไม่เข้าใจซ้ำแล้วซ้ำอีก

2.4.3 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ ได้แก่ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสร้างแบบทดสอบ ซึ่งจะทำการจัดการทดสอบ การตรวจ การให้คะแนน การคำนวณ ผลสอบ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้ คือ การที่ผู้เรียนได้รับการประเมินผลจากแบบทดสอบย้อนกลับโดยทันที (immediate feedback) ซึ่งเป็นข้อจำกัดของการทดสอบที่ใช้กันอยู่ทั่วๆไป

2.4.4 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมส์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมส์ ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ทำให้ผู้ใช้มีความสนุกสนานเพลิดเพลินกับบทเรียนจนลืมไปว่ากำลังเรียนอยู่ ซึ่งเกมส์คอมพิวเตอร์ทางการศึกษาเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่สำคัญประเภทหนึ่ง เนื่องจากเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นตัวกระตุ้นให้เกิดความสนใจในการเรียน คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้นิยมใช้กับเด็กตั้งแต่ระดับประถมศึกษาไปจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นอกจากนี้ยังสามารถนำมาใช้ได้กับผู้เรียนในระดับอุดมศึกษาเพื่อเป็นการปูทางให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ และความรู้สึกที่ดีกับบทเรียนทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
มหาวิทยาลัยพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

2.4.5 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเหตุการณ์จำลอง

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเหตุการจำลอง ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่นำเสนอเนื้อหาของบทเรียนในรูปของการจำลองแบบ (Simulation) โดยการจำลองสถานการณ์ที่เหมือนจริงขึ้น และบังคับให้ผู้เรียนต้องตัดสินใจในการแก้ปัญหา โดยในตัวบทเรียนจะมีคำแนะนำเพื่อช่วยในการตัดสินใจของผู้เรียน และแสดงผลลัพธ์ในการตัดสินใจนั้นๆ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้คือ การลดค่าใช้จ่ายและลดอันตรายที่อาจเกิดขึ้นได้จากการเรียนรู้ที่เกิดจากสถานการณ์จริง

2.4.6 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่มีพื้นฐานมาจากการจำลองบทเรียนในลักษณะที่ปรากฏอยู่ในหนังสือแบบเรียน จึงมีส่วนประกอบที่คล้ายคลึงกับส่วนประกอบของหนังสือแบบเรียน คือ ปก คำนำ สารบัญ บทเนื้อหา แบบฝึกหัด เป็นต้น

2.4.7 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทกำหนดสถานการณ์ในการแก้ปัญหา

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทกำหนดสถานการณ์ในการแก้ปัญหา ได้แก่ การนำเสนอสถานการณ์ให้ผู้เรียนศึกษาแล้วตอบคำถามเพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์นั้นๆ

2.4.8 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทวินิจฉัยข้อบกพร่อง

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทวินิจฉัยข้อบกพร่องเป็นการถามคำถาม หรือ ทดสอบนักเรียน เพื่อดูว่าผู้เรียนยังมีจุดบกพร่องในมโนทัศน์นั้นๆ อย่างไร แล้วดำเนินการแก้ไขข้อบกพร่องที่พบนั้น

2.5 การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้ช่วยในการเรียนการสอนมีอยู่ 3 วิธีด้วยกัน ซึ่งแต่ละวิธีมีข้อได้เปรียบเสียเปรียบต่างกันออกไป ดังนี้

2.5.1 การใช้บทเรียนที่มีผู้อื่นได้สร้างไว้แล้ว ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือประหยัดเวลาและนำมาใช้ได้ทันที

แต่ข้อเสียคือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ดีมักมีราคาแพง และนอกจากนี้ยังอาจจะได้งานที่ไม่ตรงกับความต้องการเสียทีเดียว จึงต้องมีการประเมินคุณค่าของบทเรียนก่อน

2.5.2 การสร้างบทเรียนโดยใช้โปรแกรมช่วยสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยโปรแกรมช่วยสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นโปรแกรมที่เรียนรู้ได้ง่าย เนื่องจากการเขียนสคริปต์ต่างๆ ในโปรแกรมประเภทนี้จะใช้ภาษาระดับสูง กล่าวคือ ใกล้เคียงกับภาษามนุษย์

ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือได้ผลงานที่ออกมาดีและใช้งานได้ง่ายในเวลาไม่นานนักจึงทำให้ไม่เสียเวลา แต่ข้อเสียคือไม่เหมาะกับงานที่มีความซับซ้อน เช่น บทเรียนที่ต้องการความ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สามารถทางคณิตศาสตร์ ฯลฯ

2.5.3 การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยการเขียนโปรแกรมขึ้นเองโดยภาษาคอมพิวเตอร์ เช่น ภาษาซี ภาษาแอสแซมบลี และภาษาปาสคาล ฯลฯ

ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือ สามารถสร้างบทเรียนที่มีความสลับซับซ้อนและได้ซอฟท์แวร์ที่ทำงานได้รวดเร็ว แต่ข้อเสียคือใช้เวลาในการทำนานกว่า 2 วิธีแรก

2.6 ข้อดีและข้อจำกัดของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.6.1 ข้อดี

2.6.1.1 คอมพิวเตอร์จะช่วยเพิ่มแรงจูงใจและดึงดูดความสนใจในการเรียนรู้ให้แก่ผู้เรียน เนื่องจากการเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์นั้นเป็นประสบการณ์ที่แปลกใหม่

2.6.1.2 การใช้สี ภาพลายเส้นที่เคลื่อนไหว ตลอดจนเสียงดนตรี จะเป็นการเพิ่มความเหมือนจริงและเร้าใจ แก่ผู้เรียนทำให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นที่จะเรียนรู้ ทำแบบฝึกหัดหรือทำกิจกรรมต่างๆเหล่านี้ เป็นต้น

2.6.1.3 ลักษณะของโปรแกรมเป็นบทเรียนที่ทำให้เกิดความเป็นส่วนตัวแก่ผู้เรียน มีไว้สำหรับช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนช้า สามารถเรียนไปได้ตามความสามารถของตนเองได้อย่างสะดวก ไม่ต้องรีบเร่ง และเวลาตอบผิดไม่ต้องอายผู้อื่น

2.6.1.4 เป็นการช่วยขยายขีดความสามารถของผู้สอนในการควบคุมผู้เรียนได้อย่างใกล้ชิด เนื่องจากสามารถบรรจุเนื้อหาข้อมูลได้ง่าย และมีความสะดวกในการนำมาใช้

2.6.1.5 ความสามารถของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการบันทึกคะแนนจากการทำแบบทดสอบ และพฤติกรรมต่างๆของผู้เรียน ไว้ใช้ในการวางแผนบทเรียนในขั้นต่อไปได้

2.6.1.6 ความสามารถในการเก็บข้อมูลของเครื่อง ทำให้สามารถนำมาใช้ได้ในลักษณะของการศึกษาเป็นรายบุคคลได้เป็นอย่างดี โดยสามารถกำหนดบทเรียนให้แก่ผู้เรียนแต่ละคนได้ตามความต้องการและแสดงผลความก้าวหน้าของผู้เรียนให้เห็นได้ทันที

2.6.2 ข้อจำกัด

2.6.2.1 การออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการเรียนการสอนนั้นนับว่ายังมีน้อยมากเมื่อเทียบกับการออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในวงการด้านอื่นๆ ทำให้โปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีจำนวน และขอบเขตที่จำกัดที่จะนำมาใช้ในวิชาต่างๆ

2.6.2.2 อุปกรณ์ยังขาดคุณภาพมาตราฐานระดับเดียวกัน เพื่อให้สามารถใช้ได้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ต่างระบบกัน เป็นต้นว่าซอฟท์แวร์ที่ผลิตขึ้นมาใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบของ IBM ไม่สามารถใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ของ Macintosh ได้

2.6.2.3 การที่จะให้อาจารย์ผู้สอนออกแบบโปรแกรมบทเรียนเองนั้น นับว่าเป็นงานที่ต้องอาศัยเวลา สติปัญญา และความสามารถ เป็นอย่างมาก จึงทำให้เป็นการเพิ่มภาระให้แก่อาจารย์ผู้สอนมากยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
เมตริกซ์

ในการศึกษาเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นนั้น เราต้องมีความรู้ที่จำเป็นที่เกี่ยวกับเมตริกซ์ เพื่อให้ง่ายต่อการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่าง ๆ ได้ ดังที่จะกล่าวต่อไปนี้

3.1.1 เมตริกซ์

<u>นิยาม 3.1</u> เมตริกซ์คือกลุ่มของตัวเลข หรือฟังก์ชั่นซึ่งเขียนจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากภายในเครื่องหมาย [ ] และเรียกจำนวนแต่ละจำนวนในกลุ่มที่จัดนี้ว่า สมาชิกของเมตริกซ์

โดยทั่วไป เราจะใช้อักษรอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ A , B , C , ... แทนเมตริกซ์ และใช้อักษรอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก a , b , c , ... แทนสมาชิกของเมตริกซ์

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ รูปแบบทั่วไปจะเขียนได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

สามารถเขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ซึ่ง a_{ij} จะแทนสมาชิกของเมตริกซ์ ในแถวที่ i หลักที่ j โดยที่มีทั้งหมด m แถว n หลัก

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> กำหนดเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> จาก

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $a_{11} = 5$, $a_{12} = -2$, $a_{13} = 1$

$a_{21} = 3$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 4$ □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 3.2 เมตริกซ์ที่มีแถวเดียวหรือมีขนาด $1 \times n$ จะเรียกเมตริกซ์นั้นว่า เมตริกซ์แถวหรือเวกเตอร์แถว เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

นิยาม 3.3 เมตริกซ์ที่มีหลักเดียว หรือมีขนาด $m \times 1$ จะเรียกเมตริกซ์นั้นว่า เมตริกซ์หลักหรือเวกเตอร์หลัก เช่น $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

นิยาม 3.4 เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน $(m = n)$ จะเรียกเมตริกซ์นั้นว่า เมตริกซ์จัตุรัสจะเขียนแทนด้วย $[a_{ij}]_{n \times n}$

เช่น $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

นิยาม 3.5 $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ที่มี $a_{ij} = 0$ สำหรับทุกๆ $i \neq j$ จะเรียกเมตริกซ์ A ว่าเป็น เมตริกซ์ทแยงมุม หรืออาจกล่าวได้ว่าเมตริกซ์ทแยงมุมคือเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมด ยกเว้นสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

เช่น
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

นิยาม 3.6 เมตริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกทุกตัวบนแนวทแยงมุมหลักเท่ากันหมด จะเรียกเมตริกซ์ นั้นว่า เมตริกซ์สเกลาร์

เช่น
$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ } c \neq 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 3.7 เมตริกซ์เฉียงที่มีสมาชิกทุกตัวบนแนวทแยงมุมหลัก มีค่าเท่ากับ 1 จะเรียกเมตริกซ์นั้นว่า เมตริกซ์เอกลักษณ์ จะเขียนแทนด้วย I_n หรือ I

เช่น
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

นิยาม 3.8 เมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็น 0 หมด จะเรียกเมตริกซ์นั้นว่าเมตริกซ์ศูนย์

เช่น
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

นิยาม 3.9 สมมูลของเมตริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เราจะกล่าวได้ว่า A = B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A และ B ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

เช่น $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว A = B

ก็ต่อเมื่อ $a_{11} = 4$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = -1$

3.1.2 พีชคณิตของเมตริกซ์

พีชคณิตของเมตริกซ์ประกอบด้วยการบวก ลบ การคูณด้วยค่าคงที่และการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ นอกจากนี้ยังมีการทรานสโพส ซึ่งจะขอกล่าวถึงดังนี้

นิยาม 3.10 การบวกเมตริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ดังนั้น

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>นิยาม 3.11</u> การลบเมตริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ดังนั้น

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 3.2</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหา $A + B$ และ $A - B$

<u>วิธีทำ</u>

$$A + B = \begin{bmatrix} -4+5 & 6+(-1) & 3+0 \\ 0+3 & 1+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4-5 & 6-(-1) & 3-0 \\ 0-3 & 1-1 & 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

<u>นิยาม 3.12</u> การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ k เป็น สเกลาร์ใดๆ แล้วผลคูณของสเกลาร์ k กับ เมตริกซ์ A คือ $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$ หรือ

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} = Ak$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง 3.3</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ –3A

<u>วิธีทำ</u>

$$-3A = \begin{bmatrix} -3\cdot 1 & -3\cdot 2 & -3\cdot(-3) \\ -3\cdot 4 & -3\cdot(-5) & -3\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -12 & 15 & -18 \end{bmatrix}$$

□

<u>นิยาม 3.13</u> การคูณระหว่างเมตริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times k}$ แล้วผลคูณของเมตริกซ์ A และ B คือ $AB = C = [c_{ij}]_{m\times k}$

โดยที่

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \ldots, k$ จากนิยามจะได้ว่า AB จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อจำนวนหลักของเมตริกซ์ A ต้องเท่ากับ จำนวนแถวของเมตริกซ์ B นั่นคือ

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3.4 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

จงหา AB

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 2+3\cdot 1 & 4\cdot 5+3\cdot 6 \\ 7\cdot 2+2\cdot 1 & 7\cdot 5+2\cdot 6 \\ 9\cdot 2+0\cdot 1 & 9\cdot 5+0\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 38 \\ 16 & 47 \\ 18 & 45 \end{bmatrix} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 3.5 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

จงหา AB และ BA

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\cdot 1+3\cdot 2 & 9\cdot(-4)+3\cdot 5 \\ (-2)\cdot 1+0\cdot 2 & (-2)\cdot(-4)+0\cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\cdot 1+(-4)\cdot(-2) & 1\cdot 3+(-4)\cdot 0 \\ 2\cdot 9+5\cdot(-2) & 2\cdot 3+5\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \qquad \square$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง 3.6</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

จงหา AB และ BA

<u>วิธีทำ</u>

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

□

<u>ข้อสังเกต</u> (1) โดยทั่วไป $AB \neq BA$

(2) ถ้า $AB = 0$ แล้ว A หรือ B ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ 0

<u>ตัวอย่าง 3.7</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

จงหา AB และ AC

<u>วิธีทำ</u>

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = AC$$

จะเห็นได้ว่า $AB = AC$ โดยที่ $B \neq C$

□

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $AB = AC$ แล้ว B ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ C

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>นิยาม 3.14</u> การทรานสโพสของเมตริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ แล้วทรานสโพสของเมตริกซ์ A คือเมตริกซ์ $A^t = [a^t_{ij}]_{n\times m}$ เมื่อ $a^t_{ij} = a_{ij}$

ดังนั้น
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^t$$

<u>ตัวอย่าง 3.8</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหา A^t

<u>วิธีทำ</u>
$$A^t = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ □

3.1.3 คุณต่าง ๆ ของพีชคณิตของเมตริกซ์

<u>ทฤษฎีบท 3.1</u> คุณสมบัติการบวกของเมตริกซ์

ถ้า A , B , C และ 0 เป็นเมตริกซ์ที่สามารถบวกกันได้แล้ว

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A = 0 + A$
4. $A + (-A) = 0$
5. ถ้า $A + B = A + C$ แล้ว $B = C$

<u>ทฤษฎีบท 3.2</u> คุณสมบัติการคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่สามารถบวกหรือคูณกันได้และ c กับ d เป็นสเกลาร์ใดๆ

1. $c(A + B) = cA + cB$
2. $(c + d)A = cA + dA$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

3. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

4. $(cd)A = c(dA) = d(cA)$

ทฤษฎีบท 3.3 คุณสมบัติการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

ถ้า A , B , C และ I_n ซึ่งเป็นเมตริกซ์ที่สามารถบวกหรือคูณกันได้

1. $AI_n = AI_n = A$

2. $(AB)C = A(BC)$

3. $A(B+C) = AB+AC$

4. $(A+B)C = AC+BC$

5. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ เมื่อ c เป็นสเกลาร์ใดๆ

6. ถ้า 0 เป็นเมตริกซ์ศูนย์ และ 0A กับ B0 สามารถหาค่าได้ แล้ว $0A = 0$ และ $B0 = 0$

ทฤษฎีบท 3.4 คุณสมบัติของการทรานสโพส

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่สามารถบวกหรือคูณกันได้ และ c เป็นสเกลาร์ใดๆ

1. $(A^t)^t = A$

2. $(A+B)^t = A^t + B^t$

3. $(AB)^t = B^tA^t$

4. $(cA)^t = cA^t$

3.1.4 เมตริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษ

นิยาม 3.15 กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ถ้า $A^t = A$ จะเรียก A ว่าเป็นเมตริกซ์สมมาตร

นิยาม 3.16 กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ถ้า $A^t = -A$ จะเรียก A ว่าเป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร

เช่น $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -3 \\ -9 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A^t = A$ และ $B^t = -B$

ดังนั้น A เป็นเมตริกซ์สมมาตร และ B เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
51773

<u>ทฤษฎีบท 3.5</u> ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ จะมีเมตริกซ์สมมาตร S และเมตริกซ์เสมือนสมมาตร K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ $A = S + K$

<u>ทฤษฎีบท 3.6</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร จะได้ว่า

1. kA เป็นเมตริกซ์สมมาตร สำหรับจำนวนจริง k ทุกจำนวน
2. $AA^t = A^tA$
3. A^2 เป็นเมตริกซ์สมมาตร

<u>ทฤษฎีบท 3.7</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร จะได้ว่า

1. kA เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร สำหรับจำนวนจริง k ทุกจำนวน
2. $AA^t = A^tA$
3. A^2 เป็นเมตริกซ์สมมาตร

<u>นิยาม 3.17</u> ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ สมาชิกของเมตริกซ์ที่อยู่บนเส้นทแยงมุมจากมุมบนซ้ายสุดมายังมุมล่างขวาสุดเรียกว่า สมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

เช่น
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

สมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก คือ -1 , 0 , 2

<u>นิยาม 3.18</u> ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ จะเรียก A ว่าเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$, สำหรับ i, j ทุกตัวที่ $i > j$

เช่น
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

แต่ ถ้า $i \geq j$ จะเรียกว่าเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนแท้จริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>นิยาม 3.19</u> ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ จะเรียก A ว่าเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านล่างก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$, สำหรับ i, j ทุกตัวที่ $i < j$

เช่น $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

แต่ ถ้า $i \leq j$ จะเรียกว่าเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านล่างแท้จริง

เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

<u>นิยาม 3.20</u> เราเรียกเมตริกซ์ที่เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน หรือ เมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านล่าง ว่า เมตริกซ์เชิงสามเหลี่ยม

3.1.5 อินเวอร์สของเมตริกซ์

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ จะพบว่า

$$AI = IA = A$$

เราเรียก I ว่าเป็นเอกลักษณ์การคูณของเมตริกซ์ และถ้าสามารถหาเมตริกซ์ B ที่ทำให้

$$AB = BA = I$$

เราเรียก B ว่าเป็น เมตริกซ์ผกผันของ A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>นิยาม 3.21</u> A เป็นเมตริกซ์ขนาด n×n ถ้ามีเมตริกซ์ B ซึ่งทำให้ AB = BA = I แล้วจะกล่าวว่า B เป็นเมตริกซ์ผกผันของA สามารถเขียนแทนด้วย A^{-1} นั่นคือ BA^{-1} และ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

<u>นิยาม 3.22</u> ถ้าเมตริกซ์ A มีอินเวอร์ส เรากล่าวได้ว่า A เป็นนันซิงกูลาร์เมตริกซ์ และถ้าเมตริกซ์ A หาอินเวอร์สไม่ได้กล่าวได้ว่า A เป็น ซิงกูลาร์เมตริกซ์

<u>ทฤษฎีบท 3.8</u> ถ้าเมตริกซ์ A มีอินเวอร์ส เมตริกซ์ที่เป็นอินเวอร์สของ A จะมีเพียงเมตริกซ์เดียวเท่านั้น

<u>ทฤษฎีบท 3.9</u> ถ้า A และ B ต่างก็เป็น นันซิงกูลาร์เมตริกซ์ AB จะเป็น นันซิงกูลาร์เมตริกซ์ด้วยและ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>ตัวอย่าง 3.9</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหา $(AB)^{-1}$ และ $B^{-1}A^{-1}$

<u>วิธีทำ</u> $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{24} & \frac{5}{24} \\ \frac{10}{24} & -\frac{2}{24} \end{bmatrix}$

$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{bmatrix} -\frac{13}{24} & \frac{5}{24} \\ \frac{10}{24} & -\frac{2}{24} \end{bmatrix}$$

$$= (AB)^{-1}$$

จะเห็นได้ว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ □

3.2 การดำเนินการตามแถวและหลักของเมตริกซ์

จากการลดตัวแปรของระบบสมการเชิงเส้น เช่น ระบบสมการเชิงเส้นหนึ่งที่นำมาเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

จากการลดตัวแปรจะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ซึ่งในการทำการลดตัวแปรได้ด้วยการดำเนินการ 3 อย่างที่ไม่ทำให้ค่าคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต้องเปลี่ยนไป ดังที่จะกล่าวถึงดังนี้

<u>นิยาม 3.23</u> การดำเนินการตามแถว(หลัก)บนเมตริกซ์ A คือ การดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. การสลับแถว(หลัก) ที่ i กับแถว(หลัก) ที่ j ของเมตริกซ์ A แทนด้วย $R_i \leftarrow R_j$ $(C_i \leftrightarrow C_j)$
2. การคูณแถว(หลัก) ที่ i ของเมตริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง $c \neq 0$ แทนด้วย cR_i (cC_i)
3. การคูณแถว(หลัก) ที่ i ของเมตริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง c แล้วนำไปบวกกับแถว(หลัก) ที่ j ของเมตริกซ์ A เมื่อ $i \neq j$ แทนด้วย $cR_i + R_j$ $(cC_i + C_j)$

<u>นิยาม 3.24</u> ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $m \times n$ เราจะกล่าวว่า A สมมูลกับ B ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากการกระทำตามแถว(หลัก)บนเมตริกซ์ A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.1 เมตริกซ์มูลฐาน

เมตริกซ์มูลฐานที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เกิดจากการกระทำการตามแถว หรือหลักดำเนินการพื้นฐานต่อเมตริกซ์ โดยเมตริกซ์มูลฐานจะนำไปใช้ประโยชน์ของการหาเมตริกซ์ผกผัน และบางส่วนเกี่ยวกับดีเทอร์มีแนนท์

<u>นิยาม 3.25</u> เราเรียกเมตริกซ์จัตุรัสว่า เมตริกซ์มูลฐานแบบที่ 1, 2 และ 3 ถ้าเมตริกซ์นั้นได้มาจากการกระทำแบบที่ 1 ,2 และ 3 ตามลำดับบนเมตริกซ์เอกลักษณ์เพียงครั้งเดียวเท่านั้น

<u>ตัวอย่าง 3.10</u> $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า E_1 ได้จากการสลับที่ระหว่างแถวที่ 1 และแถวที่ 3 ของ I_3 ซึ่งเป็นการกระทำตามแถวแบบที่ 1 ดังนั้น E_1 จึงเป็นเมตริกซ์มูลฐานแบบที่ 1

E_2 ได้จากการคูณแถวที่ 2 ของ I_3 ด้วย -2 ซึ่งเป็นการกระทำตามแถวแบบที่ 2 ดังนั้น E_2 เป็นเมตริกซ์มูลฐานแบบที่ 2

E_3 ได้จากการเอา 2 เท่าของแถวที่ 2 บวกเข้ากับแถวที่ 1 ของ I_3 ซึ่งเป็นการกระทำตามแถวแบบที่ 3 ดังนั้น E_3 เป็นเมตริกซ์มูลฐานแบบที่ 3

E_4 ได้จากการเอา 3 เท่าของคอลัมน์ที่ 1 บวกกับคอลัมน์ที่ 3 ของ I_3 ซึ่งเป็นการกระทำตามคอลัมน์แบบที่ 3 ดังนั้น E_4 เป็นเมตริกซ์มูลฐานแบบที่ 3

E_5 ได้จากการเอา 3 เท่าของแถวที่ 3 บวกเข้ากับแถวที่ 1 และเอา 2 คูณแถวที่ 2 ของ I_3 ดังนั้น E_5 ไม่ใช่เมตริกซ์มูลฐาน เพราะว่าต้องเป็นการกระทำบน I_3 ถึง 2 ครั้ง จึงจะได้ E_5 □

<u>ทฤษฎีบท 3.10</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมตริกซ์ซึ่งได้จากการกระทำตามแถว (หลัก) แบบที่ 1 ,2 หรือ 3 ของเมตริกซ์ A และให้ E เป็นเมตริกซ์มูลฐานซึ่งได้จาก $I_m(I_n)$ โดยการกระทำแบบเดียวกับที่กระทำบนเมตริกซ์ A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $B = EA \quad (B = AE)$

ตัวอย่าง 3.11 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} , \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า B ได้จากการคูณแถวที่ 2 ของ A ด้วย 3 ถ้าเราเอา 3 คูณแถวที่ 2 ของ I_3 จะได้

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B$$ □

จากทฤษฎีบท 3.10 สรุปได้ว่า การกระทำตามแถวบนเมตริกซ์ A ซึ่งมีขนาด $m \times n$ หนึ่งครั้งก็เหมือนกับการนำเมตริกซ์มูลฐานที่ได้จากการกระทำแบบเดียวกันบน I_m คูณเข้าไปข้างหน้าเมตริกซ์ A หนึ่งครั้ง และการกระทำตามหลักบนเมตริกซ์ A หนึ่งครั้งก็เหมือนกับการนำเมตริกซ์มูลฐานที่ได้จากการกระทำแบบเดียวกันบน I_n คูณเข้า ไปข้างหลังเมตริกซ์ A หนึ่งครั้ง

ทฤษฎีบท 3.11 ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว A จะสมมูลทางแถวหรือสมมูลทางหลักกับ $B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$ $(B = AE_1 E_2 \ldots E_{k-1} E_k)$ เมื่อ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ เป็นเมตริกซ์มูลฐาน

ทฤษฎีบท 3.12 เมตริกซ์มูลฐานทุกเมตริกซ์เป็นนันซิงกูลาร์และมีอินเวอส์เป็นเมตริกซ์มูลฐานแบบเดียวกัน

3.2.2 เมตริกซ์ในรูปแบบลดรูปเป็นขั้น

รูปแบบของเมตริกซ์ ที่สามารถนำมาใช้ประโยชน์กับการหารากของระบบสมการเชิงเส้น รูปแบบดังกล่าวเรียกว่า "Echelon" ซึ่งแบ่งออกเป็นการลดรูปเป็นขั้นทางแถว และการลดรูปเป็นขั้นทางหลัก ในที่นี้จะกล่าวถึงเมตริกซ์ที่อยู่ในรูปการลดรูปเป็นขั้นทางแถวเท่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 3.26 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ กล่าวได้ว่าเมตริกซ์ A อยู่ในรูป row echelon ถ้า A มีลักษณะดังนี้

1. แถวที่มีสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมด (ถ้ามี) จะอยู่ล่างสุดของเมตริกซ์
2. สมาชิกทุกในแถวไม่เป็น 0 ทั้งหมดแล้ว สมาชิกตัวแรกในแถวจะต้องเป็นเลข 1 เรียกว่าเลข 1 นำหน้า
3. ใน 2 แถวใด ๆ ที่อยู่ถัดกันที่ไม่มีสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมด เลข 1 นำหน้าในแถวลางจะปรากฏทางขวามือของ เลข 1 นำหน้าในแถวบน

จากนิยาม ถ้าให้แถวที่ไม่ใช่ศูนย์ (หมายถึง แถวที่มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่เป็น 0) ของเมตริกซ์ A มี k แถว และให้ c_i เป็นคอลัมน์ที่มี 1 เป็นตัวแรกในแถวที่ i ปรากฏอยู่ ดังนั้น $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$

ตัวอย่าง 3.12 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A ไม่อยู่ในรูปการลดรูปเป็นขั้นทางแถวเพราะว่าแถวที่เป็นศูนย์คือแถวที่ 2 ซึ่งไม่เป็นไปตามนิยาม 3.26 ข้อ 1

B ไม่อยู่ในรูปการลดรูปเป็นขั้นทางแถวเพราะว่าสมาชิกที่ไม่ใช่ 0 ตัวแรกในแถวที่ 2 คือ 3 ซึ่งไม่เป็นตามนิยาม 3.26 ข้อ 2 □

นิยาม 3.27 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ กล่าวได้ว่าเมตริกซ์ A อยู่ในรูปแบบลดทอนรูปเป็นขั้นทางแถว ถ้า A มีเลข 1 นำหน้าของแต่ละแถวเมื่อปรากฏอยู่ในคอลัมน์ใดแล้ว สมาชิกตัวอื่น ๆ ในคอลัมน์นั้นจะเป็น 0 ทั้งหมด

ทฤษฎีบท 3.13 เมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ใดๆ จะสมมูลทางแถว หรือสมมูลทางหลักกับเมตริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบลดรูปเป็นขั้นทางแถวหรือรูปแบบการลดรูปเป็นขั้นทางหลักเสมอ

ทฤษฎีบท 3.14 เมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ใดๆ จะสมมูลทางแถว หรือสมมูลทางหลักกับเมตริกซ์ที่อยู่ในรูปลดทอนรูปเป็นขั้นทางแถวเสมอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ทฤษฎีบท 3.15</u> ถ้า A เมตริกซ์ขนาด m×n ใดๆ แล้ว A จะสมมูลกับเมตริกซ์ที่อยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} I_k & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเรียกว่ารูปแบบปกติ

<u>ตัวอย่าง 3.13</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

การกระทำตามแถวของเมตริกซ์ A ดังนิยาม 3.26 จะได้เมตริกซ์ซึ่งอยู่ในรูปแบบลดทอนรูปเป็นขั้นทางแถวดังนี้

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_1 + R_3 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3 \leftarrow (-\frac{1}{3})R_3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบลดทอนรูปเป็นขั้นทางแถว

ใช้การกระทำตามหลักแบบที่ 1 บนเมตริกซ์ B ดังนี้

$$\begin{array}{r} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

ซึ่งอยู่ในรูป $\begin{bmatrix} I_2 & 0_{2\times3} \\ 0_{2\times2} & 0_{2\times3} \end{bmatrix}$

ใช้การกระทำตามหลักแบบที่ 3 บนเมตริกซ์ C ดังนี้

$$\begin{array}{r} \\ C_4 \leftarrow (-3)C_1 + C_4 \\ C_5 \leftarrow 2C_1 + C_5 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ C_4 \leftarrow C_2 + C_4 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_5 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

จะเห็นว่า D อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} I_2 & 0_{2\times3} \\ 0_{2\times2} & 0_{2\times3} \end{bmatrix}$ □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ทฤษฎีบท 3.16</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด n×n ซึ่งอยู่ในรูปแบบลดทอนรูปเป็นขั้นทางแถว ถ้า A ไม่มีแถวใดที่เป็น 0 ทั้งแถวแล้ว $A = I_n$

<u>หมายเหตุ</u> ในการกระทำตามแถว เราอาจเขียนแสดงการกระทำออกมาในสัญลักษณ์ตัว R_i หมายถึงแถวที่ i หรือ C_i หมายถึงหลักที่ i โดยมีลูกศรชี้แสดงไปยังแถว หรือหลักสุดท้ายที่ได้เปลี่ยนแปลงไป เช่น $R_1 \leftarrow R_1 - R_3$ อธิบายได้ว่า นำแถวที่ 1 มาลบกับแถวที่ 3 กลายมาเป็นแถวที่ 1 ใหม่ เป็นต้น

3.3 ดีเทอร์มิแนนท์

ดีเทอร์มิแนนท์คือตัวเลขที่คู่กับเมตริกซ์จัตุรัสทุก ๆ เมตริกซ์ กล่าวคือ เมตริกซ์จัตุรัสหนึ่ง ๆ จะมีจำนวนจริง 1 จำนวนกำกับอยู่ และเรียกจำนวนนั้นว่า "ดีเทอร์มิแนนท์" ของเมตริกซ์จัตุรัสนั้น ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์เป็นคุณสมบัติอย่างหนึ่งของเมตริกซ์จัตุรัส และมีประโยชน์อย่างมากในการนำไปประยุกต์ใช้ เช่น การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

<u>นิยาม 3.28</u> $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด n×n ดีเทอร์มิแนนท์ของ A จะแทนด้วยสัญลักษณ์ det (A) หรือ |A| คือ

$$\det(A) = \sum (\pm)\, a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

โดยที่ $j_1\, j_2 \ldots j_n$ คือ การจัดลำดับของสมาชิกในเซต S = { 1 , 2 , ... , n } ส่วนเครื่องหมาย (±) ข้างหน้า $a_{1j_1}\, a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ จะเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับ $j_1\, j_2 \ldots j_n$ กล่าวคือ ถ้าเป็นการจัดลำดับคู่ จะเป็นเครื่องหมายบวก และถ้าเป็นการจัดลำดับคี่ จะเป็นเครื่องหมายลบ
สำหรับการบวก (ภายใต้เครื่องหมาย ±) นั้นจะบวกเทอม $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$ เป็นจำนวน n! เทอม ขึ้นอยู่กับการจัดลำดับ $j_1\, j_2 \ldots j_n$ ซึ่งมีอยู่ n! ชุด

<u>นิยาม 3.29</u> กำหนด $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 2 × 2 แล้ว det (A) นิยาม ดังนี้

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง 3.14</u> กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา det (A)

<u>วิธีทำ</u> $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (4)(-1)$

$= 10 + 4$

$= 14$ □

<u>นิยาม 3.30</u> กำหนด

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ขนาด 3 × 3 แล้ว det (A) นิยาม ดังนี้

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - \\ (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{matrix}$$

จากนิยาม เราจะสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ได้ง่ายๆ โดยการนำเอาสมาชิกใน 2 หลักแรกของ A มาเขียนต่อทางขวามือ ดังนี้

$$\begin{array}{|ccc|cc} & & & - & - \;\; - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & & + & + \;\; + \end{array}$$

คือ $\det(A) = \begin{matrix} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - \\ (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{matrix}$

<u>ตัวอย่าง 3.15</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

จงหา det (A)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>วิธีทำ</u>

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 9 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -8 & 4 & 6 \end{array}\right.$$

$$= (-48 + 0 - 42) - (84 + 108 + 0)$$

$$= -90 - 192$$

$$= -282$$

□

<u>นิยาม 3.31</u> กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $n > 2$ แล้วไมเนอร์ของสมาชิก a_{ij} ของ A คือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ย่อยของ A ซึ่งเกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j เขียนแทนด้วย M_{ij} ออกกล่าวคือ

<u>นิยาม 3.32</u> กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $n > 2$ แล้วโคแฟคเตอร์ของสมาชิก a_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ กับ M_{ij} เขียนแทนด้วย A_{ij} และเมตริกซ์ของ A_{ij} เขียนว่า cof(A)

<u>ตัวอย่าง 3.16</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

จงหา M_{23} และ A_{23}

<u>วิธีทำ</u>

จาก
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

แล้ว
$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

แล้ว
$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

□

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>นิยาม 3.33</u> $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $n > 2$ ดีเทอร์มิแนนท์ ของ A นิยามดังนี้

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

<u>ข้อสังเกต</u> จากนิยาม เราต้องหา det (A) โดยการกระจายตามแถวที่ 1

<u>ตัวอย่าง 3.17</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ A_{23}

<u>วิธีทำ</u> จาก A พิจารณา $A_{23} = (-1)^{2+3}|A_{23}|$

โดยที่ A_{23} เป็นเมตริกซ์ใหม่ที่ได้จากการตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ออก

ดังนั้น $$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(18 - 24) = 6$$ □

<u>ทฤษฎีบท 3.17</u> กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $n > 2$ แล้วสำหรับทุกๆแถว ที่ $i = 1,2,3,\ldots,n$ จะได้ว่า

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{(ใช้แถวที่ i ในการคิด)}$$

หรือ $$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{(ใช้แถวที่ j ในการคิด)}$$

<u>ข้อสังเกต</u> จากทฤษฎีบท เราจะเลือกแถวหรือหลักใดก็ได้ ค่าของ det (A) จะต้องเท่ากันทั้งหมด ดังนั้น เราจึงควรเลือกกระจายตามแถวหรือตามหลัก ที่มีเลข 0 หลายๆตัว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง 3.18</u> จงหา det (A) เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> 1. ใช้แถวในการกระจาย (สมมติใช้แถวที่ 1)

$$|A| = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(6-63) - 3\,(5-56) + 4\,(45-48)$$

$$= 27$$

ใช้หลักในการกระจาย (สมมติใช้หลักที่ 2)

$$|A| = 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 9\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -3\,(5-56) + 6\,(2-32) - 9\,(14-20)$$

$$= 27$$

$\square$

<u>ตัวอย่าง 3.19</u> จงหา det (A) เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$|A| = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -(1-14-25) = 38$$

$\square$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.1 คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์

คุณสมบัติต่าง ๆ ของดีเทอร์มิแนนท์ จะเป็นสิ่งที่ทำให้การหาดีเทอร์มิแนนท์ง่ายขึ้น หรือในบางกรณี อาจทราบได้เลยว่าดีเทอร์มิแนนท์เป็นศูนย์หรือไม่ ซึ่งอาจเพียงพอในการนำเอาไปประยุกต์ใช้

<u>ทฤษฎีบท 3.18</u> ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากการคูณแถวหรือ หลัก ใดหนึ่งของเมตริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง c แล้ว det (B) = c det (A)

<u>ทฤษฎีบท 3.19</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และ k เป็นจำนวนจริงแล้ว $\det(kA) = k^n \det(A)$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, $2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 8 \\ 4 & -10 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(A) = -10$

ดังนั้น $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 2^3(-10) = -80$

<u>ทฤษฎีบท 3.20</u> ถ้าแถว (หลัก) ใดของ A มีสมาชิกทุกตัวเป็น 0 แล้ว det (A) = 0

<u>ทฤษฎีบท 3.21</u> ถ้าเมตริกซ์ B เกิดจากการสลับที่ของแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งของเมตริกซ์ A จะได้ det (B) = - det (A)

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

จะพบว่าเมตริกซ์ B เกิดจาก การสลับหลักที่ 1 กับ 2 ของเมตริกซ์ A

แล้วจาก $\det(A) = 76$ ดังนั้น $\det(B) = -76$

<u>ทฤษฎีบท 3.22</u> ดีเทอร์มิแนนท์ของ A และ A^t มีค่าเท่ากัน นั่นคือ $\det(A) = \det(A^t)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A^t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

<u>ทฤษฎีบท 3.23</u> ถ้าเมตริกซ์ A มีแถว (หลัก) คู่หนึ่งเหมือนกัน แล้ว $\det(A) = 0$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก หลักที่ 1 และหลักที่ 3 เหมือนกัน ดังนั้น $\det(A) = 0$

<u>ทฤษฎีบท 3.24</u> ถ้าเมตริกซ์ A มีแถวหนึ่งเป็น k เท่า ของอีกแถว(หรือ หลัก) ใด ๆ แล้ว $\det(A) = 0$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก หลักที่ 1 เป็น 3 เท่า ของหลักที่ 3 ดังนั้น $\det(A) = 0$

<u>ทฤษฎีบท 3.25</u> ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $k \neq p$
ถ้าเมตริกซ์ B เกิดจากการนำค่า b ไปคูณหลัก (แถว) ที่ k แล้วนำไปบวกกับหลัก (แถว) ที่ p ของเมตริกซ์ A แล้ว $\det(A) = \det(B)$ นั่นคือ จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + ka_1 & b_2 + ka_2 & b_3 + ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = 6$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

เกิดจาก การนำ -2 ไปคูณแถวที่ 1 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2 ดังนั้น $\det(B) = 6$

<u>หมายเหตุ</u> ความหมายของทฤษฎีบทนี้ คือ ถ้านำค่าคงที่ไปคูณหลัก (หรือ แถว) ใด ๆ แล้วนำไปบวกกับอีกหลัก (หรือ แถว) หนึ่งที่ไม่ใช่หลัก (หรือ แถว) เดิมแล้วดีเทอร์มินันท์จะไม่เปลี่ยนแปลง

<u>ทฤษฎีบท 3.26</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์เชิงสามเหลี่ยมแล้ว det (A) จะเท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = (2)(5)(9) = 90$

<u>ทฤษฎีบท 3.27</u> ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA)$$

<u>ตัวอย่าง 3.20</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> จงหา det (BA) และ det (AB)

จะได้ว่า $\det(A) = 20$ และ $\det(B) = 12$

ดังนั้น $\det(A) \cdot \det(B) = 240$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -3 & -1 & -6 \\ 5 & 25 & 30 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 22 & 10 & 26 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\det(AB) = 240$ และ $\det(BA) = 240$ □

3.3.1.1 การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ที่มีขนาดมากกว่า 2×2

การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ที่มีขนาดมากกว่า 2×2 เป็นส่วนหนึ่งในการประยุกต์การใช้ดีเทอร์มีแนนท์ นอกเหนือจากการหาโดยเมตริกซ์เอกลักษณ์ (นิยาม 3.21) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 3.28 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$ จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว A จะเป็น นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และถ้า $\det(A) = 0$ แล้ว A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ เพราะ $\det(A) = ad - bc$

ตัวอย่าง 3.21 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ A^{-1}

วิธีทำ จาก

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(3)(-1) - (2)(-1)}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \square$$

<u>นิยาม 3.34</u> ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาห์เมตริกซ์ที่ $A^{-1} = A^{t}$ เราเรียก A ว่าเป็น เมตริกซ์เชิงตั้งฉาก

<u>ตัวอย่าง 3.22</u> กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า A เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก

<u>วิธีทำ</u> $\det(A) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

ดังนั้น
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$= A^{t}$$

ดังนั้น A เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก $\square$

<u>นิยาม 3.35</u> แอดจอยต์เมตริกซ์ ของเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$, $n > 2$ คือ ทรานสโพสของ cof (A) ซึ่งสามารถแทนด้วย adj (A)

<u>ทฤษฎีบท 3.29</u> ถ้าเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$, $n > 2$ จะได้ว่า

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$$

<u>ทฤษฎีบท 3.30</u> ถ้าเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$, $n \geq 2$ และ $\det(A) \neq 0$ จะได้ว่า A มีอินเวอร์ส

และ
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj} A)$$

ทฤษฎีเหล่านี้ช่วยให้เราสามารถหาอินเวอรส์ของเมตริกซ์ที่มีขนาดมากกว่า 2×2 ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง 3.23</u> กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ cof (A) , adj (A) , A^{-1}

<u>วิธีทำ</u> $\det(A) = 2\cdot(-18) - 0\cdot(-11) + 1\cdot(10)$

$= -46$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$

$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$

$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$

ดังนั้น

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

จาก

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj} A)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{-46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{46} & \frac{11}{46} & \frac{10}{46} \\ -\frac{2}{46} & -\frac{14}{46} & \frac{4}{46} \\ -\frac{4}{46} & -\frac{5}{46} & \frac{8}{46} \end{bmatrix} \qquad \square$$

<u>หมายเหตุ</u> ในการหา A^{-1} เราต้องหา det A ก่อน เพราะว่าถ้า det A = 0 แล้ว A^{-1} หาค่าไม่ได้ กล่าวคือ A^{-1} **จะมีค่าก็ต่อเมื่อ** det $A \neq 0$

3.4 ค่าลำดับขั้นของเมทริกซ์

จากการอธิบายวิธีการกำจัดค่าของเกาส์ที่เป็นวิธีการที่มีความสำคัญอย่างมากสำหรับระบบสมการเชิงเส้นมาแล้วนั้น เราจะได้คำตอบจากการหาด้วยวิธีการอื่นที่น่าสนใจ โดยเราจะกล่าวถึงบางเรื่องที่จำเป็นในเนื้อหา ดังนี้

3.4.1 ปริภูมิเวกเตอร์

<u>นิยาม 3.36</u> ให้ V เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง ($V \neq 0$) โดยสมาชิกของ V มีการกระทำ 2 อย่างคือ "การบวกเวกเตอร์" กับ "การคูณสเกลาร์" ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $\oplus$ " และ " $\odot$ " ตามลำดับแล้ว เราเรียก V ว่า "ปริภูมิเวกเตอร์"

ถ้าเป็นไปตามลักษณะคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\alpha \oplus \beta$ จะต้องอยู่ในเซต V สำหรับทุกๆ สมาชิก α , β ใน V
2. $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$ สำหรับทุกๆ สมาชิก α , β ใน V
3. $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$ สำหรับทุกๆ สมาชิก α , β , γ ใน V
4. ใน V จะต้องมีสมาชิก θ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $\alpha \oplus \theta = \alpha = \theta \oplus \alpha$ สำหรับทุกๆ สมาชิก α ใน V
5. สำหรับแต่ละ α ใน V จะต้องมี $-\alpha$ ใน V เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $\alpha \oplus (-\alpha) = \theta = (-\alpha) \oplus \alpha$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. $c \odot \alpha$ จะต้องอยู่ในเซต V สำหรับทุกๆ สมาชิก α ใน V และ c ใน F
7. $c \odot (\alpha \oplus \beta) = (c \odot \alpha) \oplus (c \odot \beta)$ สำหรับทุกๆ สมาชิก α , β ใน V และ c ใน F
8. $(c + d) \odot \alpha = (c \odot \alpha) \oplus (d \odot \alpha)$ สำหรับทุกๆ สมาชิก α ใน V และสมาชิก c , d ใน F
9. $c \odot (d \odot \alpha) = (cd) \odot \alpha$ สำหรับทุกๆ สมาชิก α ใน V และสมาชิก c , d ใน F
10. $1 \odot \alpha = \alpha = \alpha \odot 1$ สำหรับทุกๆ สมาชิก α ใน V

<u>หมายเหตุ</u>

1. สำหรับแต่ละสมาชิกใน V เราเรียกว่า เวกเตอร์
2. สำหรับแต่ละสมาชิกใน F เราเรียกว่า สเกลาร์
3. เราเรียกเวกเตอร์ θ ใน V ว่า "เวกเตอร์ศูนย์"
4. เมื่อกล่าวถึงปริภูมิเวกเตอร์ใด ๆ เราต้องกำหนดเซต V , เซต F และการกระทำ 2 อย่างคือ $\oplus$ กับ $\odot$ ซึ่งเป็นไปตามคุณสมบัติของนิยามทั้งหมด
5. มีข้อน่าสังเกตว่าเซต V โดยตัวของมันเองนั้น เราเรียกว่าปริภูมิเวกเตอร์ยังไม่ได้ จะต้องมีการกระทำที่สอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 10 ข้อตามนิยาม 3.36 ที่กล่าวมาด้วย

3.4.2 อิสระเชิงเส้นและไม่อิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์

<u>นิยาม 3.37</u> กำหนดให้ $S = \{\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V และ $\alpha \in V$ เรียก α ว่าเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S ถ้ามีตัวเลขจำนวนจริง $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ ที่ทำให้

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$$

<u>นิยาม 3.38</u> ให้เซต $S = \{\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_k\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ที่ต่างกันในปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วเราเรียกเซต S ว่าเป็นไม่อิสระเชิงเส้น ถ้ามีค่าคงที่ $a_1 , a_2 , \dots , a_k$ ที่เป็นจำนวนจริงซึ่งมีบางตัวไม่เท่ากับ 0 ซึ่งทำให้

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_k\alpha_k = \theta$$

มิฉะนั้นแล้วจะเรียกเซต S ว่า อิสระเชิงเส้น นั่นคือ S จะเป็นอิสระเชิงเส้น ถ้า

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_k\alpha_k = \theta \quad \text{จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ}$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \quad \text{เท่านั้น}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง 3.24</u>

กำหนดเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์

$$a_{(1)} = [3 \quad 0 \quad 2 \quad 2]$$

$$a_{(2)} = [-6 \quad 42 \quad 24 \quad 54]$$

$$a_{(3)} = [21 \quad -21 \quad 0 \quad -15]$$

เป็นอิสระต่อกัน เนื่องจากสามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นได้ดังนี้

$$6a_{(1)} - \tfrac{1}{2}a_{(2)} - a_{(3)} = 0$$

โดย 2 ใน 3 เวกเตอร์แรกเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเพราะ $c_1a_{(1)}+c_2a_{(2)}=0$ ได้ $c_2=0$ และ $c_1=0$ □

3.4.3 ค่าลำดับขั้นของเมทริกซ์

กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

<u>นิยาม 3.39</u> ให้ S เป็นเซตของเวกเตอร์และ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ โดย

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

ค่าลำดับขั้นหลักของ A คือจำนวนเวกเตอร์ในเซตอิสระเชิงเส้นสูงสุดของ S

ให้ T เป็นเซตของเวกเตอร์และ $T = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$

โดย $\beta_j = [a_{j1} \quad a_{j2} \quad a_{j3} \quad \cdots \quad a_{jm}]$

ค่าลำดับขั้นแถวของ A คือจำนวนเวกเตอร์ในเซตย่อยอิสระเชิงเส้นสูงสุดของ A

α_j เรียกว่าเวกเตอร์หลักของ A

β_j เรียกว่าเวกเตอร์แถวของ A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>นิยาม 3.40</u> ค่าสูงสุดของจำนวนของแถวที่เป็นอิสระต่อกันของเมทริกซ์ $A = [a_{nm}]$ จะเรียกว่าค่าลำดับขั้นของ A เขียนได้ว่า rank A

<u>นิยาม 3.41</u> กำหนดให้ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วจะกล่าวได้ว่า S แผ่ทั่ว V ถ้าทุก ๆ เวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S เขียนว่า $V = \langle S \rangle$

<u>นิยาม 3.42</u> ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่แผ่ทั่วบนเซต S และ T ตามลำดับแล้วเรียก V ว่าปริภูมิเวกเตอร์หลัก และเรียก W ว่าปริภูมิเวกเตอร์แถว

บางครั้งอาจเรียกปริภูมิเวกเตอร์หลักสั้นๆ ว่า "ปริภูมิหลัก" และปริภูมิเวกเตอร์แถวว่า "ปริภูมิแถว"

<u>ทฤษฎีบท 3.31</u> ค่าลำดับขั้นของเมทริกซ์ A เท่ากับจำนวนสูงสุดของเวกเตอร์หลักที่เป็นอิสระต่อกันของเมตริกซ์ A และจะได้ว่า A และ A^T จะมีค่าลำดับขั้นเหมือนกัน

<u>ตัวอย่าง 3.25</u> จงหาค่าลำดับขั้นแถว และค่าลำดับขั้นหลักของ A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -7 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T = \{[1 \quad 4 \quad 2 \quad -3 \quad 7], [1 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 3], [4 \quad 1 \quad -7 \quad 3 \quad -2]\}$$

จาก S จะทราบว่า S เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และ
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ เป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

แต่ $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น และได้ว่า ค่าลำดับขั้นหลักของ A = 2

จาก T จะทราบว่า T เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น เนื่องจาก

$a_1[1 \quad 4 \quad 2 \quad -3 \quad 7] + a_2[1 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 3] + a_3[4 \quad 1 \quad -7 \quad 3 \quad -2] = 0$

$7\,[1 \quad 4 \quad 2 \quad -3 \quad 7] - 15\,[1 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 3] + 2[4 \quad 1 \quad -7 \quad 3 \quad -2] = 0$

โดย

$\frac{7}{15}[4 \quad 1 \quad -7 \quad 3 \quad -2] + \frac{2}{15}[4 \quad 1 \quad -7 \quad 3 \quad -2] = [1 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 3]$

ดังนั้น T เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น แต่เซต

$$\{[1 \quad 4 \quad 2 \quad -3 \quad 7], [4 \quad 1 \quad -7 \quad 3 \quad -2]\}$$

เป็นเซตอิสระเชิงเส้น และค่าลำดับขั้นแถวของ A = 2 □

<u>ทฤษฎีบท 3.32</u> ถ้า $A = [a_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ ดังนั้นค่าลำดับขั้นแถวของ A = ค่าลำดับขั้นหลักของ A

การที่เมตริกซ์ใด ๆ มีค่าลำดับขั้นแถวเท่ากับค่าลำดับขั้นหลัก ดังนั้นไม่จำเป็นที่จะต้องกล่าวถึงค่าลำดับขั้นแถวหรือหลักแต่อย่างไร แต่น่าจะกล่าวรวมกันไปเลย นั้นคือเรียกรวมกับไปว่า ค่าลำดับขั้นของ A

นั้นคือ rank A = row rank A = column rank A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหาค่าลำดับขั้นจะหาโดยการกระทำทางแถวและหลักกับเมตริกซ์ จนเหลือเมตริกซ์ย่อยที่เป็นเมตริกซ์เอกลักษ์ แล้วค่าลำดับขั้นของเมตริกซ์นั้นจะเท่ากับจำนวนแถว หรือหลักของเมตริกซ์ย่อยนั้น

<u>ตัวอย่าง 3.26</u> จงหาค่าลำดับขั้นของ A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> จาก สลับหลัก 1 กับหลักที่ 3 จะได้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 2R_1 \\ R_5 \rightarrow R_5 - 2R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -16 & -16 & 10 & -22 \\ 0 & 8 & 8 & -1 & 15 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 \rightarrow -\frac{1}{3} R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 16R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 8R_2 \\ R_5 \rightarrow R_5 + 5R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3 \rightarrow -\dfrac{1}{22}R_3 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 15R_3 \\ R_5 \rightarrow R_5 + 5R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ R_1 \rightarrow R_1 - 4R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ C_5 \rightarrow C_5 - C_3 \\ C_5 \rightarrow C_5 - 2C_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_1 \\ C_3 \rightarrow C_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าลำดับขั้น A = 3 □

<u>ทฤษฎีบท 3.33</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ จะมีคำตอบได้เพียงคำตอบเดียวก็ต่อเมื่อค่าลำดับขั้น A เท่ากับ n

<u>ทฤษฎีบท 3.34</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ $Ax = b$ เป็นระบบสมการเชิงเส้น และ B เป็นออกเมนท์เมตริกซ์ $[A : b]$ ดังนั้นระบบสมการเชิงเส้นนี้จะมีคำตอบก็ต่อเมื่อ

ค่าลำดับขั้น A = ค่าลำดับขั้น B

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5 ระบบสมการเชิงเส้น

คำว่าระบบสมการหมายถึง สมการหลายๆ สมการมารวมกัน เกิดเป็นระบบขึ้น เรียกว่า ระบบสมการ ปัญหาที่สำคัญในบทนี้ส่วนใหญ่เกี่ยวกับ การหาผลเฉลยของระบบสมการ ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น รวมทั้งวิธีพิจารณาว่าระบบสมการเชิงเส้นนั้น มีผลเฉลยหรือไม่

ต่อไปเราจะกล่าวถึงระบบของสมการเชิงเส้น ที่ประกอบด้วย สมการเชิงเส้น m สมการและ n ตัวแปร เขียนได้ดังนี้

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

โดยที่ $x_1, \dots, x_n$ เรียกว่า ตัวแปรไม่ทราบค่า

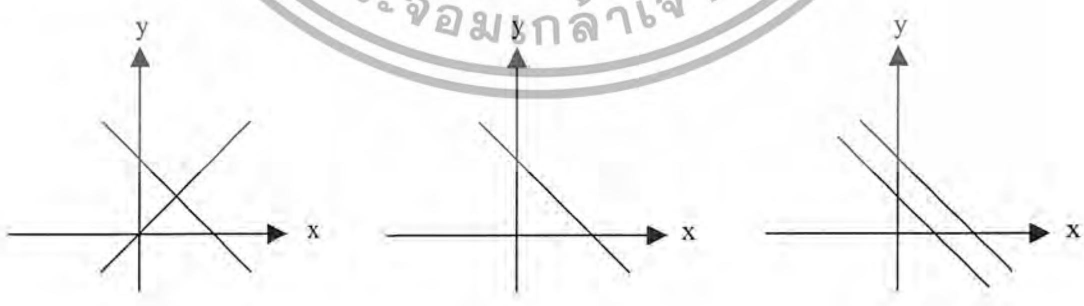
a_{ij} คือ สัมประสิทธิ์ของระบบสมการ

b_i คือ ค่าคงที่ ถ้า b_i เป็น 0 ทั้งหมด เราจะเรียกระบบสมการนี้ว่า "ระบบสมการเอกพันธ์" แต่ถ้ามีบางตัวที่ไม่เป็น 0 จะเรียกระบบสมการนี้ว่า "ระบบสมการ ไม่เอกพันธ์"

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นนั้น จะเห็นได้ว่ามีผลเฉลย 3 แบบ คือ

1. มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว
2. มีผลเฉลยหลายๆผลเฉลย
3. ไม่มีผลเฉลย

รูปกราฟที่ปรากฏด้านล่างนี้แสดงตามรูปแบบของผลเฉลยตามลำดับ



กรณีที่ 1 กรณีที่ 2 กรณีที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีการพื้นฐานในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นคือ การแทนที่ระบบสมการที่กำหนดมาให้ด้วยระบบสมการใหม่ซึ่งมีผลเฉลยเดียวกันกับระบบสมการเดิม แต่เป็นระบบสมการที่ง่ายต่อการหาผลเฉลย ซึ่งระบบสมการใหม่สามารถหามาได้โดยอาศัยวิธีการต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. สลับที่กันระหว่างสองสมการใดๆ
2. คูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงที่ ที่ไม่เท่ากับศูนย์
3. บวกสมการใดสมการหนึ่งด้วย k เท่าของอีกสมการหนึ่ง

ซึ่งจะพบว่าการกระทำ ดังกล่าว เหมือนกันกับการดำเนินการเบื้องต้นบนเมตริกซ์ ดังที่กล่าวไปแล้ว

3.5.1 กฎของคราเมอร์

กฎของคราเมอร์เป็นหนึ่งในการประยุกต์ของดีเทอร์มิแนนท์ที่นำมาใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นดังที่จะกล่าวถึงดังนี้

ทฤษฎีบท 3.35 กำหนดให้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

เป็นระบบสมการซึ่งมี n สมการและ n ตัวแปร และให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งทำให้สามารถเขียนระบบสมการข้างต้นได้ในรูป $AX = B$

เมื่อ
$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ถ้า $|A| \neq 0$ แล้วจะได้ว่า ระบบสมการนี้มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว ดังนี้

$$x_1 = \frac{|A_1|}{A} \quad , \quad x_2 = \frac{|A_2|}{A} \quad , \ldots , \quad x_n = \frac{|A_n|}{A}$$

โดยที่ A_i เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์ A โดยการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยเมตริกซ์ B

ตัวอย่าง 3.27 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$2x - 3y = 7$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$3x + 5y = 1$$

วิธีทำ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการนี้คือ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

และให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $Ax = b$

พิจารณาเมตริกซ์ A จะได้ว่า $|A| = 19 \neq 0$ ดังนั้นจากกฎของคราเมอร์

จะได้ว่า

$$x = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}(38) = 2$$

$$y = \frac{1}{19}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{19}(-19) = -1$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นคือ $x = 2$, $y = -1$ □

3.5.2 การหาผลเฉลยโดยวิธี Gauss Elimination และ Gauss – Jordan Reduction

การแก้สมการหาผลเฉลยนั้น ก็คือการหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ซึ่งก็มีอยู่หลายวิธี แต่วิธีที่ง่ายที่สุด และเป็นวิธีที่เราคุ้นเคยมาแล้ว คือการแก้สมการ โดยวิธีกำจัดตัวไม่ทราบค่าให้น้อยลง

ตัวอย่าง 3.28 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$$

วิธีทำ

ทำสัมประสิทธิ์ของ x_1 ในสมการแรกให้เป็น 1 โดยเอา 2 หารสมการแรก จะได้ระบบสมการใหม่คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 &= 8 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \qquad \text{.........(3.1)} \\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 16
\end{aligned}
$$

การทำสัมประสิทธิ์ของสมการแรกให้เป็น 1 นั้น เราอาจใช้วิธีสลับที่ระหว่างสมการแรก และสมการที่ 3 ของ (3.1) ก็ได้

จากสมการ (3.1) ใช้สมการแรกเป็นหลักในการกำจัด x_1 ให้หมดไปจากสมการที่ 2 และสมการที่ 3 โดยเอา –3 คูณสมการแรกแล้วนำไปบวกกับสมการที่ 2 และเอา –1 คูณสมการแรก แล้วนำไปบวกกับสมการที่ 3 จะได้ระบบสมการใหม่คือ

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 &= 8 \\
\frac{1}{2}x_2 - 5x_3 &= -14 \\
\frac{5}{2}x_2 + x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

ทำสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในสมการที่ 2 ให้เป็น 1 โดยเอา 2 คูณตลอดสมการที่ 2 จะได้ระบบสมการใหม่คือ

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 &= 8 \\
x_2 - 10x_3 &= -28 \\
\frac{5}{2}x_2 + x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

ใช้สมการที่ 2 เป็นหลักในการกำจัด x_2 ให้หมดไปจากสมการที่ 3 โดยเอา คูณสมการที่ 2 แล้วบวกกับสมการที่ 3 จะได้

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 &= 8 \\
x_2 - 10x_3 &= -28 \\
26x_3 &= 78
\end{aligned}
$$

ทำสัมประสิทธิ์ของ x_3 ในสมการที่ 3 ให้เป็น 1 โดยเอา 26 หารตลอดสมการที่ 3 จะได้

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 &= 8 \\
x_2 - 10x_3 &= -18 \qquad \text{.........(3.2)} \\
x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นเราจะได้ค่า $x_3 = 3$ แทนค่า x_3 ในสมการที่ 2 จะได้ $x_2 = 2$
แทนค่า x_2 และ x_3 ในสมการแรกจะได้ $x_1 = 1$ ดังนั้น (1 , 2 , 3) เป็นผลเฉลยของระบบสมการนี้ □

วิธีการแก้สมการ โดยทำระบบสมการ ให้อยู่ในแบบ (2) นั้น เราเรียกว่า "Gauss Elimination" และจากสมการ (3.2) ถ้าเราทำต่อไป ดังนี้

ใช้สมการที่ 2 เป็นหลัก กำจัด x_2 ให้หมดไปจากสมการแรก โดยเอา $-\frac{1}{2}$ คูณสมการที่ 2 แล้วนำไปบวกกับสมการแรก จะได้

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_3 &= 22 \\ x_2 - 10x_3 &= -28 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

นำสมการที่ 3 เป็นหลัก กำจัด x_3 ให้หมดไปจากสมการแรกและสมการที่ 2 โดยเอา –7 คูณสมการที่ 3 แล้วนำไปบวกกับสมการแรก และเอา 10 คูณสมการที่ 3 แล้วนำไปบวกกับสมการที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \qquad \text{..........(3.3)} \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

จากระบบสมการ (3.3) เห็นว่า เราสามารถบอกได้ทันทีว่า ผลเฉลยของระบบสมการนี้ คือ (1 , 2 , 3) โดยไม่ต้องใช้วิธีแทนค่า อย่างเช่นวิธี Gauss Elimination

การหาผลเฉลยสมการ โดยวิธีทำให้อยู่ในรูป (5.3) นี้เราเรียกว่า "Gauss – Jordan Reduction"

จะเห็นว่าการกระทำซึ่งเราใช้กระทำกับระบบสมการนั้นมีอยู่ 3 ชนิดคือ

1. สลับที่ระหว่างสมการที่ i และสมการที่ j
2. เอาตัวคงค่า $c \neq 0$ คูณสมการที่ i
3. เอา c เท่าของสมการที่ i ไปบวกกับสมการที่ j

การกระทำทั้ง 3 นี้ก็เหมือนกันกับการกระทำตามแถวบนเมตริกซ์นั้นเอง เพื่อให้การแก้สมการง่ายขึ้น เราจึงเขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั้นคือระบบสมการ (3.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$AX = B$$

เมื่อ A คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งมีขนาด $m \times n$ และ X คือเมตริกซ์ของตัวไม่ทราบค่า ซึ่งมีขนาด $n \times 1$ ส่วน B คือเมตริกซ์ของตัวคงค่าซึ่งมีขนาด $m \times 1$ และเราเรียกเมตริกซ์

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ . & \cdots & . & . \\ . & \cdots & . & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

เรียกว่า ออกเมนท์เมตริกซ์

<u>ตัวอย่าง 3.29</u> จงหาออกเมนท์เมตริกซ์ของระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 5 \\ -2x_1 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u> ถ้าเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของระบบสมการนี้คือ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นออกเมนท์เมตริกซ์ของระบบสมการนี้คือ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

□

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ทฤษฎีบท 3.36</u> ให้ $AX = B$ และ $CX = D$ เป็นระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งมี m สมการและมีตัวไม่ทราบค่า n ตัว ถ้า $[A|B]$ และ $[C|D]$ สมมูลทางแถวกันแล้ว ระบบสมการ $AX = B$ และ $CX = D$ จะ สมมูลกัน นั่นคือมีผลเฉลยเหมือนกัน

จากทฤษฎีนี้ แสดงว่าถ้าเรามีระบบสมการ $AX = B$ ซึ่งออกเมนท์เมตริกซ์ของระบบนี้คือ $[A|B]$ เมื่อกระทำตามแถวบนเมตริกซ์ $[A|B]$ จนกระทั่งได้เมตริกซ์ใหม่คือ $[C|D]$ นั่นคือ $[A|B]$ สมมูลทางแถวกับ $[C|D]$ ดังนั้นผลเฉลยของระบบ $CX = D$ ก็คือผลเฉลยของระบบ $AX = B$

ถ้า $[C|D]$ อยู่ในรูปที่จะอ่านค่าของตัวแปรได้โดยง่าย ก็จะหาผลเฉลยของระบบ $AX = B$ ได้โดยง่าย เช่นกัน

<u>ตัวอย่าง 3.30</u> จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 16 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u> ออกเมนท์เมตริกซ์ของระบบนี้คือ

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

$$R \leftarrow (\frac{1}{2})R_1 \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow (\ \ 3)R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (\ \ 1)R_1 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & -5 & -14 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 8 \end{array}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$R_2 \leftarrow 2R_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -10 & \vdots & -28 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow (-\frac{5}{2})R_2 + R_3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -10 & \vdots & -28 \\ 0 & 0 & 26 & \vdots & 78 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{26}R_3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -10 & \vdots & -28 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -10 & \vdots & -28 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$ สมมูลกับออกเมนท์เมตริกซ์ของระบบสมการนี้

ซึ่งเป็นระบบที่หาค่า x_1, x_2 และ x_3 ได้ดังกล่าวแล้วในตัวอย่าง 3.30 จะเห็นว่าออกเมนท์เมตริกซ์อยู่ในรูปแบบลดรูปเป็นขั้นทางแถว

ถ้าผลเฉลยกระทำบนเมตริกซ์ ดังกล่าวนี้ ต่อไปให้อยู่ในรูปแบบลดทอนรูปเป็นขั้นทางแถว ดังนี้

$$R_1 \leftarrow (-\frac{1}{2})R_2 + R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 22 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow (-7)R_3 + R_1 \\ R_2 \leftarrow 10R_3 + R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

สมมูลออกเมนท์เมตริกซ์ของระบบสมการ

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_3 = 3$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบนี้คือ (1,2,3) โดยไม่ต้องใช้การแทนค่าเลย □

สรุปได้ว่า <u>หลักสำคัญ</u>ในการหาผลเฉลยของระบบสมการก็คือ พยายามทำออกเมนท์เมตริกซ์ของระบบนั้น ๆ ให้อยู่ในรูปแบบลดรูปเป็นขั้นทางแถวหรือ รูปแบบลดทอนรูปเป็นขั้นทางแถว

<u>ตัวอย่าง 3.31</u> จงหาผลเฉลยของระบบสมการซึ่งมีออกเมนท์เมตริกซ์เป็น

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

ระบบสมการนี้มี 4 สมการ และตัวไม่ทราบค่า 5 ตัว นั่นคือ ระบบสมการนี้ มีจำนวนสมการน้อยกว่าจำนวนตัวไม่ทราบค่า จากแถวที่ 4 ของเมตริกซ์ ถ้าเขียนกลับให้อยู่ในรูปสมการจะได้

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 2x_5 = 9$$

หรือ $$x_4 = 9-2x_5$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาแถวที่ 3,2 และ 1 จะได้

$$x_3 = 7-2x_4-3x_5 = 7-2(9-2x_5)-3x_5 = -11 + x_5$$

$$x_2 = 7-2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2+5x_5$$

$$x_1 = 6-2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_x = -1-10x_5$$

จะเห็นว่าค่าของ x_1 , x_2 , x_3 และ x_4 ขึ้นอยู่กับค่าของ x_5 ถ้าให้ $x_5 = r$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$x_1 = -1-10r$$

$$x_2 = 2+5r$$

$$x_3 = -11+r$$

$$x_4 = 9-2r$$

$x_5 = r$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $r = 1$ ผลเฉลยของระบบสมการคือ (-11,7,-10,7,1)

ถ้า $r = 0$ ผลเฉลยของระบบสมการคือ (-1,2,-11,9,0)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือระบบสมการนี้มีผลเฉลยได้หลายชุด ผลเฉลยทั่ว ๆ ไป ของระบบสมการนี้คือ (-1-10r,2+5r,-11+9r,9-2r,r) ผลเฉลยเฉพาะ ของระบบนี้คือ (-11,7,-10,7,1) และ (-1,2,-11,9,0) เป็นต้น □

ตัวอย่าง 3.32 จงหาผลเฉลยของระบบสมการซึ่งมีออกเมนท์เมตริกซ์เป็น

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ระบบสมการนี้ไม่มีผลเฉลย ทั้งนี้เพราะถ้าเราเขียนแถวที่ 3 ของเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปสมการจะได้

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

ซึ่งไม่มีทางเป็นไปได้เลย □

3.5.3 ระบบสมการแบบเอกพันธ์

ในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะระบบสมการเชิงเส้น เมื่อ $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ นั่นคือ เราจะพิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

เราจะเรียกระบบสมการเชิงเส้นชนิดนี้ว่า **ระบบเอกพันธ์** เขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ จะได้

$$AX = 0$$

ผลเฉลยของระบบเอกพันธ์ที่เห็นง่ายๆ คือ (0 , 0 , … , 0) เราจะเรียกผลเฉลยที่เป็น 0 ทั้งหมดนี้ว่าผลเฉลยชัด

แต่ถ้ามีตัวใดตัวหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งตัวไม่เป็น 0 เราจะเรียกผลเฉลยชนิดนี้ว่าผลเฉลยไม่ชัด เช่น (0 , 0 , 3 , … , 0) เป็นผลเฉลยไม่ชัด

ดังนั้นระบบเอกพันธ์ทุกระบบเป็นระบบที่แน่นอน เพราะว่าอย่างน้อยจะมี (0 , 0 , … , 0) หรือ $X = 0$ เป็นผลเฉลยของระบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหาผลเฉลยของระบบเอกพันธ์เราใช้วิธีกำจัดตัวแปร ที่เรียกว่า Gauss Elimination และ Gauss – Jordan Reduction เช่นเดียวกับการหาผลเฉลยของระบบไม่เอกพันธ์ ดังกล่าวแล้วข้างต้น

<u>ตัวอย่าง 3.33</u> จงหาผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์ซึ่งมีออกเมนท์เมตริกซ์เป็น

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

<u>วิธีทำ</u> จากเมตริกซ์ ตัวแปรมีค่า ดังนี้

$$x_4 = -x_5$$
$$x_3 = -3x_5$$
$$x_1 = -2x_5$$

จะเห็นว่าสมาชิกในหลักที่ 2 เป็น 0 ทั้งหมด นั่นคือสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในทุกสมการเป็น 0 นั่นเอง แสดงว่าไม่ว่า x_2 จะเป็นจำนวนจริงใดๆ ก็จะสอดคล้องกับสมการทั้ง 4 นั้น

ถ้าเราให้ $x_2 = s$ และ $x_5 = r$ ให้ เมื่อ s และ r เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้นจะได้

$$x_1 = -2r$$
$$x_2 = 5$$
$$x_3 = -3r$$
$$x_4 = -4r$$
$$x_5 = r$$

แสดงว่าระบบสมการนี้มีผลเฉลยได้หลายชุดขึ้นอยู่กับค่าของ r และ s ค่าของ r และ s นี้อาจจะเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ เช่น ถ้า r = 0 จะได้ (0 , 5 , 0 , 0 , 0) เป็นผลเฉลยของระบบนี้ และถ้า r = 1 จะได้ (-2 , 5 , -3 , -4 , 1) เป็นผลเฉลยของระบบซึ่งเป็นผลเฉลยไม่ชัด □

จะเห็นว่าระบบสมการที่มีจำนวนสมการน้อยกว่าจำนวนตัวแปร จะทำให้ออกเมนท์เมตริกซ์ของระบบสมการนั้นมีจำนวนแถวน้อยกว่าจำนวนหลัก เมื่อเราทำออกเมนท์เมตริกซ์นั้นให้อยู่ในรูปแบบลดทอนรูปเป็นขั้นทางแถวแล้ว จำนวนแถวที่ไม่เป็น 0 จะน้อยกว่าจำนวนหลักแน่นอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้ามีแถวที่เป็น 0 ทั้งหมดอยู่ด้วย เราไม่ต้องพิจารณาแถวที่เป็น 0 นั้น ให้พิจารณาเฉพาะแถวที่เป็น 0 น้อยที่สุดมาก่อน ซึ่งเราจะได้ค่าของตัวแปรบางตัวในรูปของตัวแปรตัวอื่น ๆ ตัวแปรที่เหลือและเราสามารถเลือกตัวแปรตัวอื่นๆ นั้น โดยให้เป็นจำนวนจริงใดๆ ก็ได้

<u>ทฤษฎีบท 3.37</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่ง $m < n$ แล้ว ระบบสมการ $AX = 0$ จะมีผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยไม่ชัด

<u>ทฤษฎีบท 3.38</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $AX = 0$ เป็นระบบสมการที่มีผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยชัดอย่างเดียวแล้ว เมตริกซ์ A จะสมมูลทางแถวกับ I_n

<u>ทฤษฎีบท 3.39</u> เมตริกซ์ A จะเป็นนันซิงกูลาร์ก็ต่อเมื่อ A เป็นผลคูณของเมตริกซ์ขั้นมูลฐาน

<u>ทฤษฎีบท 3.40</u> เมตริกซ์ A เป็นนันซิงกูลาร์ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ A สมมูลทางแถวกับ I_n

<u>ทฤษฎีบท 3.41</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ดังนั้น A จะเป็นนันซิงกูลาร์ก็ต่อเมื่อ A สมมูลกับ I_n

<u>ทฤษฎีบท 3.42</u> ระบบสมการ $AX = 0$ จะมีผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยชัดอย่างเดียว ก็ต่อเมื่อ A เป็นนันซิงกูลาร์

<u>ทฤษฎีบท 3.43</u> ระบบสมการ $AX = 0$ จะมีผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยไม่ชัดเพียงหนึ่งเดียว ก็ต่อเมื่อ A เป็นซิงกูลาร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
การดำเนินการพัฒนาโปรแกรม

4.1 ขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรม

4.1.1 ศึกษาภาษาที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์ ได้แก่ Java Script , และ HTML

4.1.2 ศึกษาการเขียนเว็บเพจด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Macremedia Dreamweaver Mx และการเขียนภาษา HTML

4.1.3 สร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์

4.1.4 ทดสอบการใช้งาน และแก้ไขข้อบกพร่อง

4.1.5 จัดพิมพ์คู่มือ และการใช้โปรแกรม

4.2 ภาษา HTML

HTML (HyperText Markup Language) เป็นรูปแบบหนึ่งของภาษา SGML (Standard Generalized Markup Language) นิยมใช้กันทั่วไปบนอินเตอร์เน็ต เหมือนเราใช้โปรแกรมระบบปฏิบัติการ DOS ซึ่งถูกตัดแยกออกมาจากโปรแกรมระบบปฏิบัติการ UNIX เช่นเดียวกับ HTML ซึ่งเป็นภาษาหลักสำหรับการสร้างเว็บเพจ แฟ้มเอกสาร HTML ที่สร้างขึ้นจะนำไปแสดงได้ด้วยโปรแกรม Web browser เช่น โปรแกรม Internet Explorer และ Netscape Navigator

HTML เป็นภาษาที่ง่ายต่อการเรียนรู้และการเขียน ซึ่งจัดว่าง่ายกว่าภาษาคอมพิวเตอร์ที่เคยมีมา แต่ก่อให้เกิดคุณประโยชน์ขึ้นมากมายจนทำให้เราลืมไปว่านี่เป็นเพียงส่วนหนึ่งของภาษาใหญ่ที่มีขีดความสามารถสูงกว่า

ปัจจุบันภาษา HTML ได้ถูกกำหนดมาตรฐานให้สูงขึ้น มีขีดความสามารถสูงขึ้น และมีองค์ประกอบในการสร้างฐานข้อมูลที่ดีขึ้น

4.3 HTML ทำงานอย่างไร

การใช้บริการอินเตอร์เน็ตไม่ว่าจะเป็น E-mail, FTP, Gopher, Telnet หรือบริการอื่นๆ ที่ต้องเชื่อมต่ออุปกรณ์ภายในอันซับซ้อนของ Hardware ที่สามารถทำงานได้ด้วยโปรแกรมเฉพาะที่ทำงานบนอินเตอร์เน็ตเท่านั้น

WWW แบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็น Client และส่วนที่เป็น Server เหมือนกับในระบบเครือข่ายทั่วไป ทั้งสองส่วนจะถูกเชื่อมโยงถึงกันผ่านทางอินเตอร์เน็ตโดยมี HTML เป็นฐานข้อมูลที่สำคัญ เมื่อ Web browser ส่งข้อความร้องขอข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบของไฟล์ HTML จาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งานอยู่ผ่าน Modem หรืออุปกรณ์สื่อสารข้อมูลอื่นไปยังศูนย์บริการอินเตอร์เน็ต (ISP) ตาม protocol ที่กำหนดไว้ผ่านทาง URLs (Uniform Resource Locators) และเมื่อข้อมูลเดินทางมาถึง Web Server ศูนย์บริการปลายทางที่ผู้ใช้ต้องการ ณ ที่นี้เครื่อง Web Server ของศูนย์จะทำการอ่านข้อมูลที่ถูกส่งมาและจะทำงานตามคำสั่งที่กำหนด โดยอาจมีการเชื่อมโยงไปยัง Web Server อื่นอีก หลังจากจบสิ้นกระบวนการแล้วจะทำการรับส่งข้อมูลคำตอบย้อนกลับมายังเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งาน โปรแกรม Web Server ที่เครื่องคอมพิวเตอร์ของเราก็จะแปลงสัญญาณคำสั่งและแสดงผลเป็นข้อความ รูปภาพ เสียง ให้เราใช้งานต่อไป

ปัจจุบัน Web Server ที่ให้บริการกันอยู่ทั่วทุกมุมโลกนั้น ข้อมูลที่บริการส่วนใหญ่ไม่เสียค่าบริการใดๆ เราเสียเพียงค่าโทรศัพท์เท่านั้น แต่ได้ประโยชน์จากมันมากมาย ด้วยความสามารถอันยอดเยี่ยมของ HTML ข้อมูลจากแหล่งต่างๆ จะถูกนำมาแสดงตรงหน้าผู้ใช้ โดยเครื่องคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่ประมวลผลข้อมูลผ่าน protocol HTML เป็น protocol

4.4 การสร้างเว็บเพจด้วย Macromedia Dreamweaver Mx

ในการสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์นี้จะนำโปรแกรม Macremedia Dreamweaver Mx มาช่วยในการสร้าง ซึ่งโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ภาษา HTML โดยที่ผู้ใช้ไม่ต้องเขียนโปรแกรมเอง เนื่องจากตัวโปรแกรมมี tool ต่างๆ ให้เลือกใช้เพื่อช่วยในการออกแบบเว็บเพจอยู่มากมาย โดยโปรแกรมจะแปลงให้เป็นภาษา HTML ใน source code ให้เองโดยอัตโนมัติ แต่ผู้สร้างเว็บเพจควรมีความรู้เกี่ยวกับภาษา HTML เพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพในการสร้างเว็บเพจให้ดียิ่งขึ้น

การเขียนคำสั่ง (tags) ที่ใช้ในภาษา HTML ส่วนใหญ่ต้องประกอบด้วยคำสั่งเปิดและคำสั่งปิดคู่กันเสมอ

- คำสั่งเปิดประกอบด้วย < ตามด้วยคำสั่ง และปิดท้ายด้วย > เช่น <HTML>
- คำสั่งปิดมีรูปแบบเหมือนคำสั่งเปิด แต่เพิ่มเครื่องหมาย / หน้าชื่อคำสั่งนั้น เช่น </HTML>
- และในแต่ละส่วนคำสั่งเปิดอาจมีส่วนขยายอื่น (Attribute) ผสมอยู่ด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 โครงสร้างพื้นฐานของภาษา HTML

<HTML>	
<HEAD>	ส่วนหัวของโปรแกรม
<TITLE> ชื่อโปรแกรมหรือข้อมูลที่ต้องการแสดง </TITLE>	
</HEAD>	
<BODY>	เป็นตัวคุมโปรแกรมทั้งหมด
... คำสั่ง หรือข้อความที่ต้องการแสดง	ส่วนเนื้อหาที่ต้องการแสดงผลทั้งหมด
</BODY>	
</HTML>	

ตัวอย่างคำสั่งในภาษา HTML

1. **คำสั่ง HTML**

   คำสั่งนี้เป็นคำสั่งเริ่มต้นของการเขียนโปรแกรม HTML

   <html> </html>

2. **คำสั่ง HEAD**

   คำสั่งนี้ใช้กำหนดข้อความในส่วนที่เป็นชื่อเรื่อง

   <head> </head>

3. **คำสั่ง TITLE**

   คำสั่งนี้เป็นส่วนแสดงชื่อของโปรแกรม โดยจะแสดงบนไตเติลบาร์ของ Web browaer และคำสั่งนี้จะอยู่ระหว่าง <head> และ </head>

   <body> </body>

4. **คำสั่ง BODY**

   คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงเนื้อหาต่างๆ

   <body> </body>

ตารางที่ 4.2 Attribute ของ body

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Background = " ชื่อแฟ้มรูปภาพ "	กำหนดรูปภาพของ background

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. คำสั่ง FRAMESET

คำสั่งนี้ใช้ในการแบ่ง frame

<frameset> <frame> </frameset>

ตารางที่ 4.3 Attribute ของ frameset

รูปแบบคำสั่ง	**ความหมาย**
Cols = " พื้นที่ส่วนที่ 1 , พื้นที่ส่วนที่ 2 , ... "	กำหนดพื้นที่ของแต่ละ Column เป็นเปอร์เซ็นต์หรือขนาดของ pixel

6. คำสั่ง FRAME

คำสั่งนี้ใช้กำหนดว่าแต่ละ frame จะแสดงข้อมูลจากแฟ้มข้อมูล HTML ใด

<frame>

ตารางที่ 4.4 Attribute ของ frame

รูปแบบคำสั่ง	**ความหมาย**
Src = " แฟ้มข้อมูล HTML "	กำหนดแฟ้มข้อมูล HTML ที่แสดงใน frame นั้น
Noresize	คำสั่งไม่ให้ผู้ใช้ปรับขนาดของ frame เอง
Frameborder = " Yes หรือ No "	กำหนดให้แสดงกรอบ frame หรือ ไม่
Scrolling = " Yes หรือ No "	กำหนดแถบที่ใช้เลื่อนหน้าจอ
Name = " ชื่อ frame "	กำหนดชื่อให้ frame นั้น
Bordercolor = " รหัสสี "	กำหนดสีของกรอบรอบ frame

7. คำสั่ง FONT

คำสั่งนี้ใช้ในการกำหนด font ของโปรแกรม HTML

ตารางที่ 4.5 Attribute ของ font

รูปแบบคำสั่ง	**ความหมาย**
Face = " ชื่อ font "	กำหนดชื่อ font
Color = " #รหัสสี "	กำหนดสีของตัวอักษร
Size = " ขนาดตัวอักษร "	กำหนดขนาดของตัวอักษร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. คำสั่ง BASEFONT

คำสั่งนี้ใช้ในการกำหนด font มาตราฐานของโปรแกรม HTML นั้นๆ

<basefont>

ตารางที่ 4.6 Attribute ของ basefont

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Face = " ชื่อ font "	กำหนดชื่อ font
Color = " #รหัสสี "	กำหนดสีของตัวอักษร
Size = " ขนาดตัวอักษร "	กำหนดขนาดของตัวอักษร

9. คำสั่ง CENTER

คำสั่งนี้ใช้จัดตำแหน่งของข้อความหรือรูปให้อยู่ตรงกลาง

<center> </center>

10. คำสั่ง IMG

คำสั่งนี้ใช้แทรกรูปภาพในโปรแกรม HTML

ตารางที่ 4.7 Attribute ของ img

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Src = " ชื่อไฟล์รูป "	กำหนดโฟลเดอร์ที่เก็บไฟล์รูป
Alt = " ข้อความ "	กำหนดชข้อความที่ใช้อธิบายรูป ในขณะที่รูปยังอยู่ในระหว่างการโหลด
Border = " ขนาดกรอบ "	กำหนดขนาดกรอบของรูป
Height = " ความสูงของรูป "	กำหนดความสูงของรูปปื็น pixel
Width = " ความกว้างของรูป "	กำหนดความกว้างของรูปเป็น pixel
Align = " ตำแหน่ง "	กำหนดตำแหน่งของรูป

11. คำสั่ง BR

คำสั่งนี้ใช้ในการขึ้นบรรทัดใหม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

12. คำสั่ง B

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความเป็นตัวหนา

13. คำสั่ง U

คำสั่งนี้ใช้ในการขีดเส้นใต้ข้อความ

<u> </u>

14. คำสั่ง P

คำสั่งนี้ใช้จัดข้อความให้เป็น Paragraph

<p> </p>

15. คำสั่ง HR

คำสั่งนี้ใช้ในการสร้างเส้นกั้นหน้า

<hr>

16. คำสั่ง A

คำสั่งนี้ใช้ในการเชื่อมโยงเนื้อหาใน page ต่างๆ

<a>

ตารางที่ 4.8 Attribute ของ A

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Href = " ชื่อแฟ้มข้อมูล HTML "	กำหนด URL หรือแฟ้มข้อมูลที่ต้องการเชื่อมโยง
Target = " ชื่อ frame "	กำหนด frame ที่ต้องการให้แสดงผลการเชื่อมโยง

17. คำสั่ง TABLE

<table> </table>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.9 Attribute ของ table

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Align = " ตำแหน่ง "	กำหนดตำแหน่งของตาราง
Cellpadding = " ขนาด "	กำหนดระยะห่างระหว่างข้อความและตาราง มีหน่วยเป็น pixel หรือเปอร์เซ็นต์
Cellspaceing = " ขนาด "	กำหนดระยะห่างระหว่างข้อความและตาราง มีหน่วยเป็น pixel หรือเปอร์เซ็นต์
Border = " ขนาด "	กำหนดขนาดของกรอบตาราง มีหน่วยเป็น pixel หรือเปอร์เซ็นต์
Bordercolor = " #รหัสสี "	กำหนดสีของกรอบตาราง
Bgcolor = " #รหัสสี "	กำหนดสี background ของตาราง

18. คำสั่ง TR

คำสั่งนี้ใช้ในการสร้างแถวของตาราง ซึ่งคำสั่งนี้อยู่ระหว่างคำสั่ง<table> และ</table>

<tr> </tr>

19. คำสั่ง TH

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความในแต่ละช่องตาราง โดยมักใช้กับข้อความที่เป็นหัวเรื่อง ซึ่งคำสั่งนี้อยู่ระหว่างคำสั่ง <table> และ </table>

<th> </th>

ตารางที่ 4.10 Attribute ของ th

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Align = " ตำแหน่ง "	กำหนดตำแหน่งของข้อความในแต่ละช่อง

20. คำสั่ง TD

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความที่เป็นรายละเอียดในแต่ละช่องตาราง

<td> </td>

ตารางที่ 4.11 Attribute ของ td

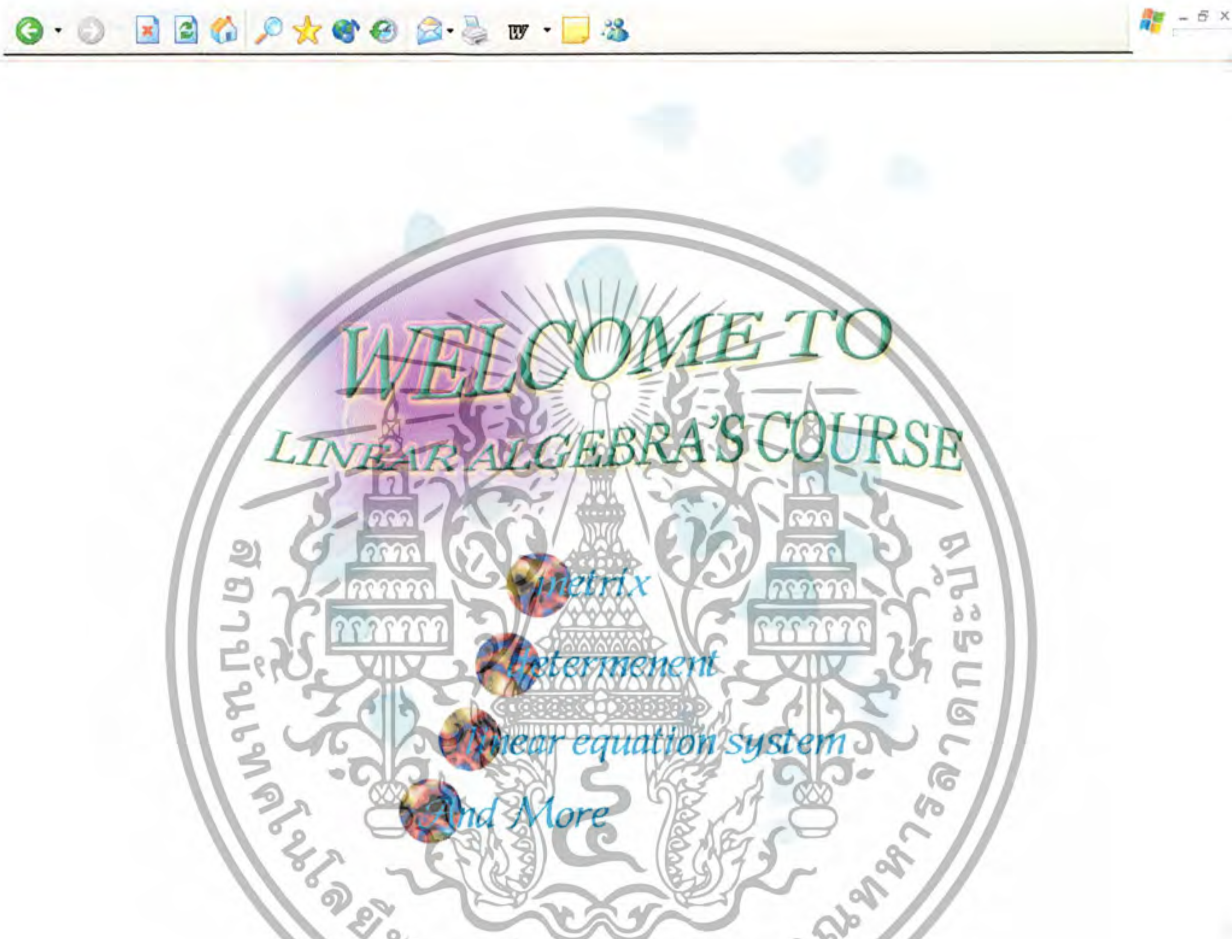
รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Align = " ตำแหน่ง "	กำหนดตำแหน่งของข้อความในแต่ละช่อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5 คู่มือการใช้งาน

4.5.1 หน้าจอต่าง ๆ ในการทำงาน

เมื่อเข้าสู่เว็บเพจ โดยเข้าผ่านทาง Browser โปรแกรม internet explorer พิมพ์ URL ชื่อว่า www.math19.com/algebra/index.html แล้วทำการเข้าสู่เว็บเพจโปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น จะปรากฏดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.1 หน้าจอต้อนรับ

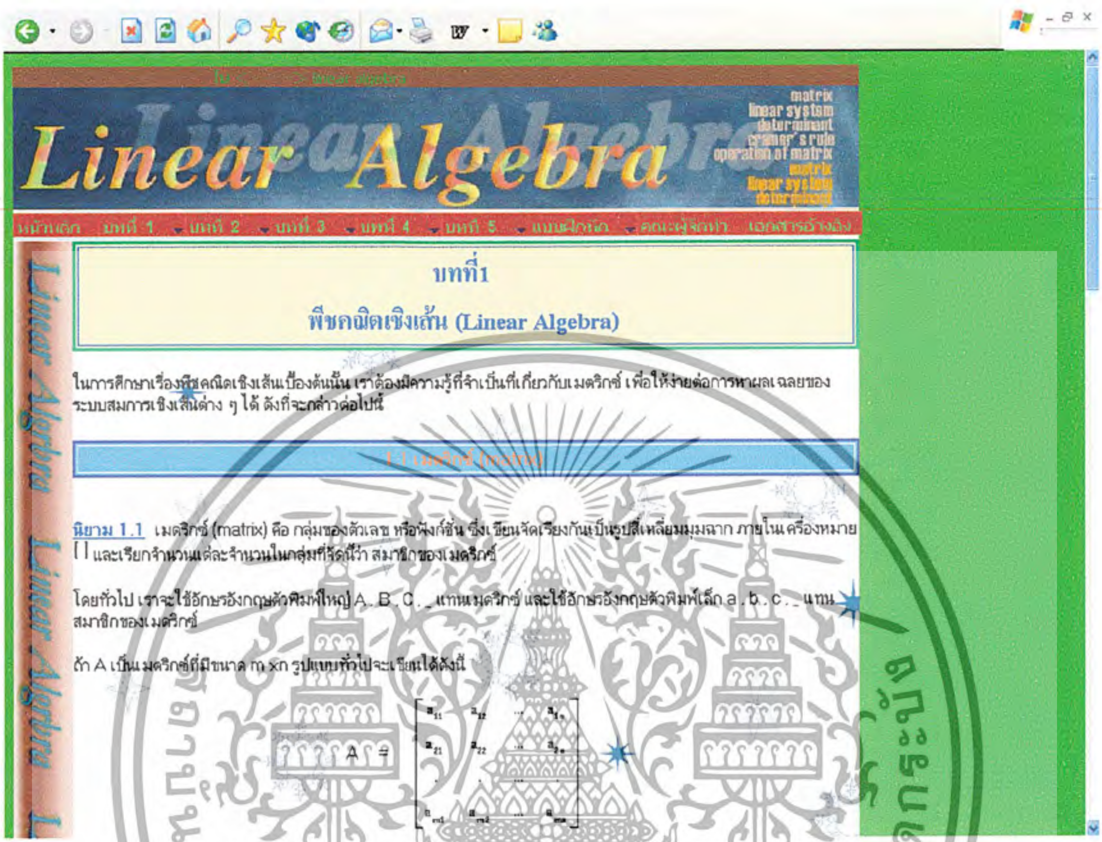
ซึ่งเป็นหน้าจอต้อนรับ และเมื่อชี้เมาส์ไปยังอักษรต่าง ๆ ในเว็บเพจก็สามารถที่จะลิงค์ไปตามหน้าเว็บเพจที่เกี่ยวข้องกันได้ แต่ในการที่จะเข้าไปสู่เนื้อหาตามลำดับแล้ว ผู้ใช้ก็จะชี้เมาส์ที่รูปนี้

รูปที่ 4.2 ลิงค์ที่นำเข้าสู่หน้าจอทำงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพื่อเข้าสู่การศึกษาตามลำดับขั้น

เมื่อออกมาจากหน้าจอต้อนรับ หน้าจอการทำงานต่อมาจะเป็นไปดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.3 หน้าจอทำงาน

ในหน้าจอการทำงานนี้ จะมีเมนูเพื่อการใช้งาน

โดยมีลักษณะการใช้งาน และคำสั่งดังนี้

1. หน้าหลัก

หน้าหลัก คือหน้าจอแรกสุดของการเข้าสู่โปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นนี้

2. บทที่ 1

เป็นการกล่าวถึงเนื้อหาบทที่ 1 โดยแบ่งเมนูย่อยออกเป็น

- เมตริกซ์
- พีชคณิตของเมตริกซ์
- คุณสมบัติของการกระทำระหว่างเมตริกซ์
- เมตริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษ
- อินเวอร์สของเมตริกซ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. บทที่ 2

เป็นการกล่าวถึงเนื้อหาบทที่ 2 โดยแบ่งเมนูย่อยออกเป็น

- เมตริกซ์ขั้นมูลฐาน
- เมตริกซ์ในรูปแบบลดรูปเป็นขั้น

4. บทที่ 3

เป็นการกล่าวถึงเนื้อหาบทที่ 3 โดยแบ่งเมนูย่อยออกเป็น

- คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์
- การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ที่มีขนาดมากกว่า 2 × 2

5. บทที่ 4

เป็นการกล่าวถึงเนื้อหาบทที่ 4 โดยแบ่งเมนูย่อยออกเป็น

- ปริภูมิเวกเตอร์
- อิสระเชิงเส้นและไม่อิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์
- ค่าลำดับขั้นของเมทริกซ์

6. บทที่ 5

เป็นการกล่าวถึงเนื้อหาบทที่ 5 โดยแบ่งเมนูย่อยออกเป็น

- กฎของคราเมอร์
- การหาผลเฉลยโดยวิธี Gauss Elimination และ Gauss – Jordan Reduction
- ระบบสมการแบบเอกพันธ์

7. แบบฝึกหัด

แบบฝึกที่ใช้ในการทดสอบเนื้อหาที่ได้ศึกษามา จากโปรแกรมช่วยสอนนี้

8. คณะผู้จัดทำ

แสดงรายละเอียดของคณะผู้จัดทำโปรแกรมช่วยสอนนี้

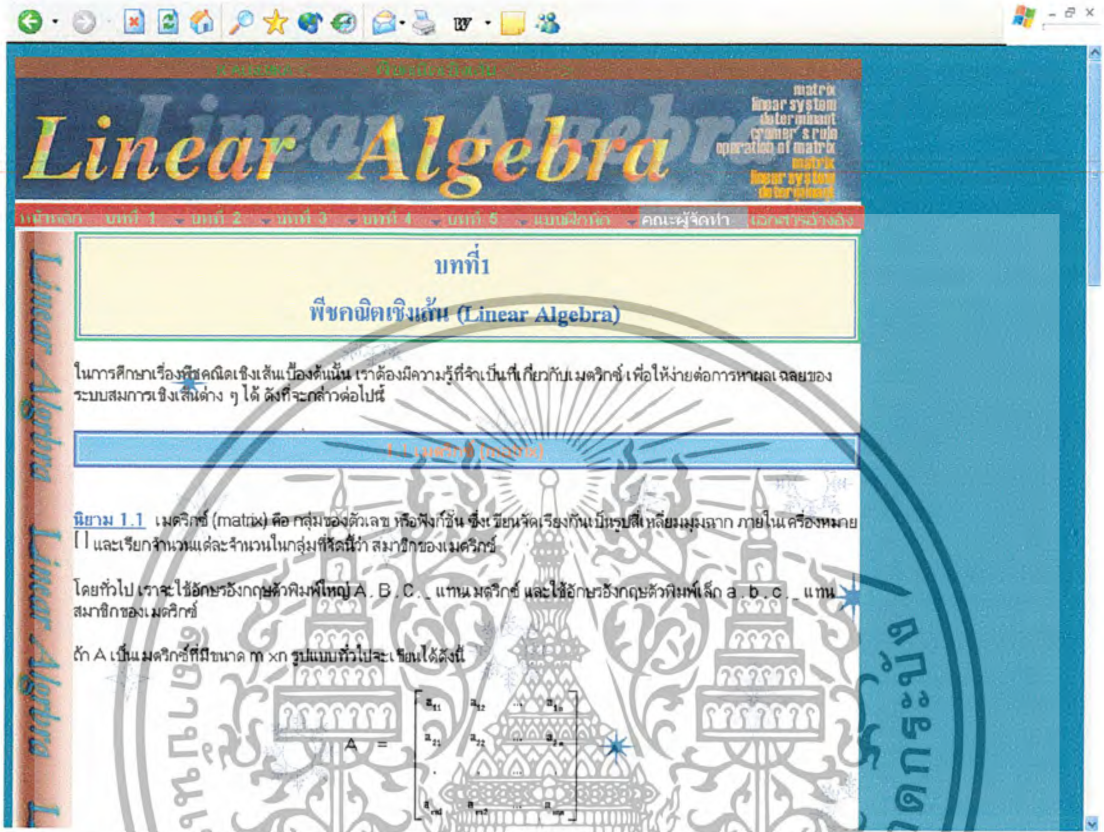
9. เอกสารอ้างอิง

แสดงรายการ รายละเอียดที่มาของเนื้อหา และเอกสารอื่น ๆ ที่ทำให้โปรแกรมนี้สำเร็จออกมาได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6 ลักษณะการทำงาน

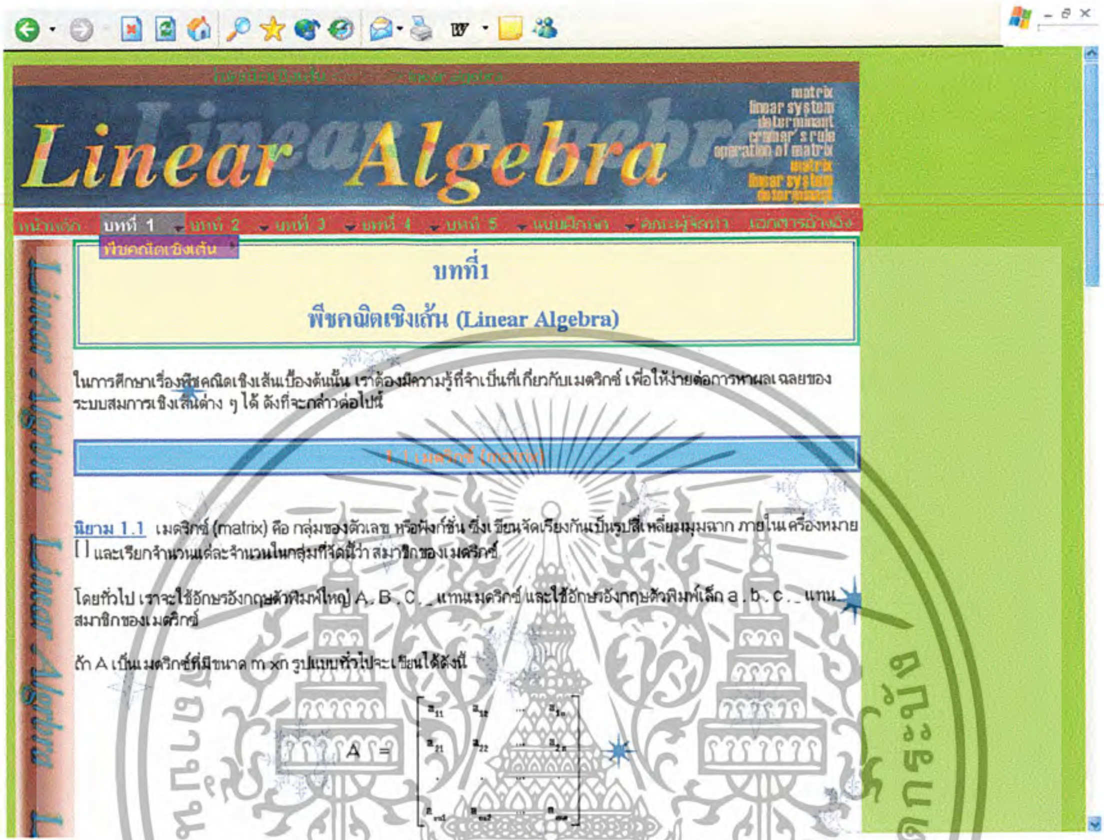
เนื้อหาที่ถูกแบ่งออกเป็น 5 บทเรียนผู้ใช้จะสามารถเข้าไปได้ตามที่ต้องการจะศึกษา เป็นเช่นว่าเมื่อผู้ใช้ศึกษาจากบทที่ 1 ไปเรื่อย ๆ ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.4 หน้าจอทำงานแรก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

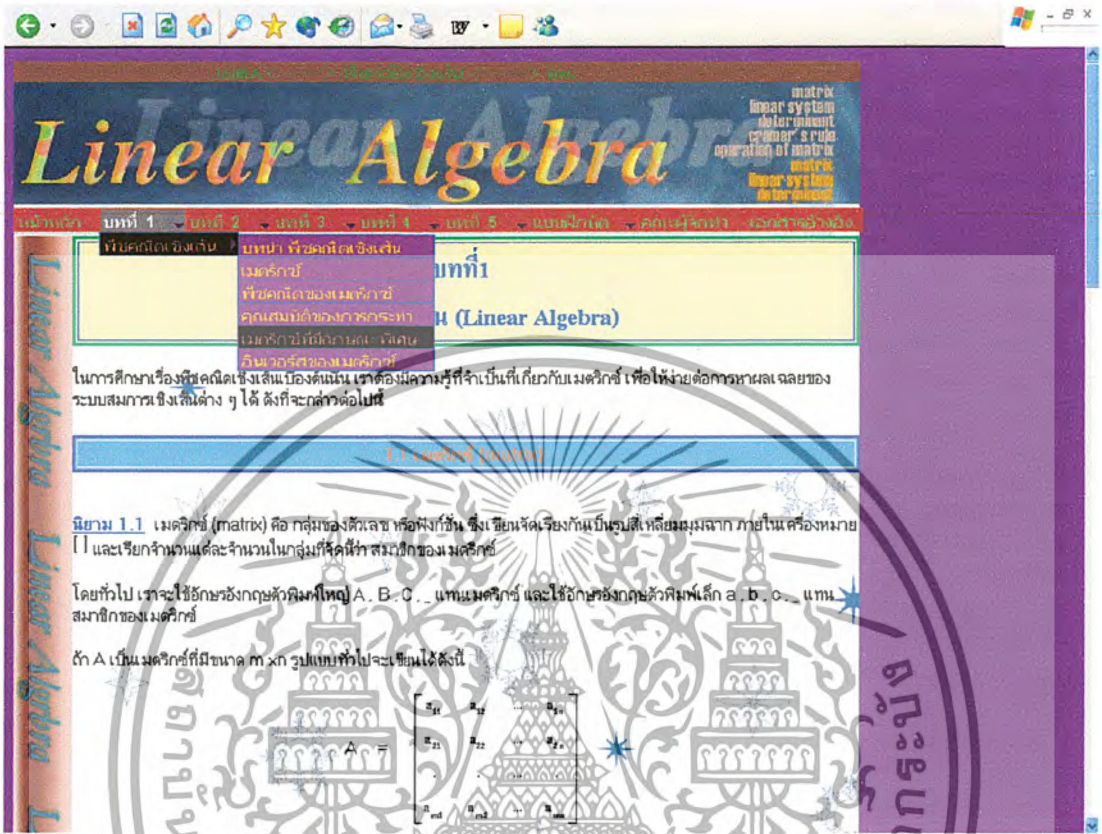
เมื่อผู้ใช้ต้องการจะไปยังเนื้อหาอื่น ก็เลื่อนเมาส์ไปยังเมนูทำงาน เป็นเช่นว่า ผู้ใช้ต้องการศึกษาเรื่องเมตริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษซึ่งอยู่ในบทที่ 1 ผู้ใช้จะกระทำดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.5 หน้าจอการทำงานเมื่อเลือกเมนูทำงาน บทที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

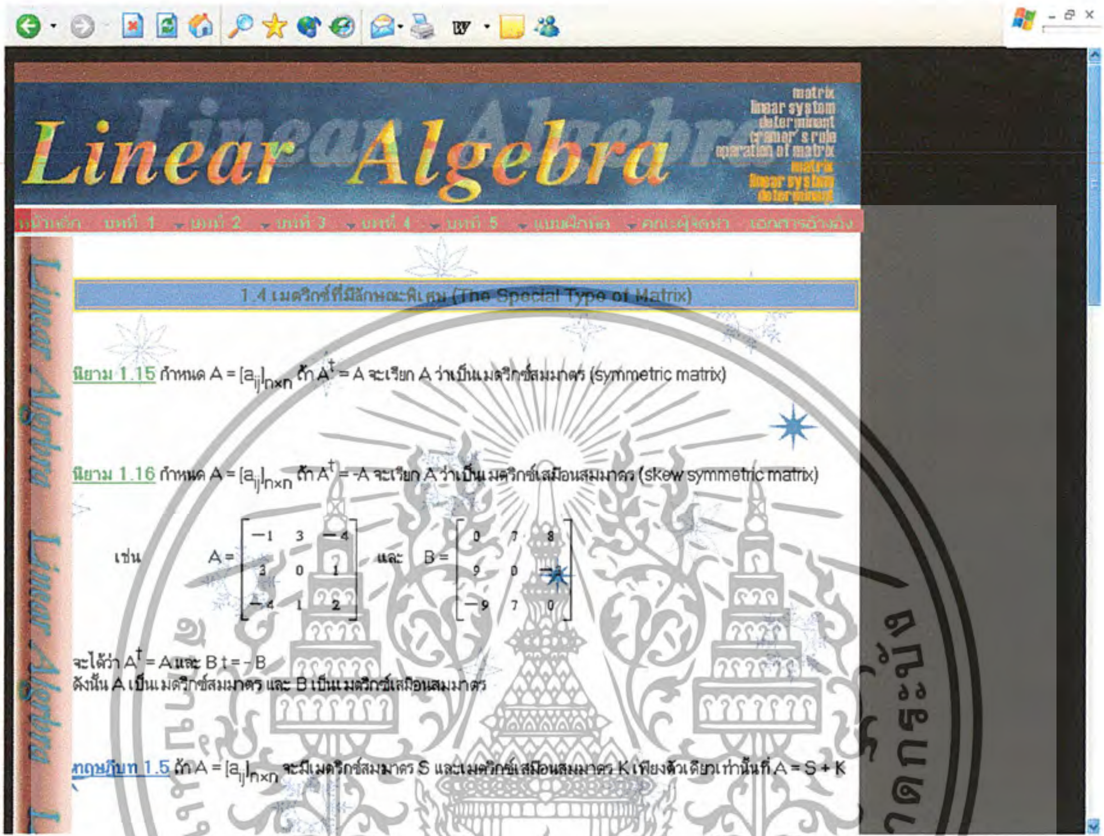
จากนั้นเลื่อนเมาส์ไปยัง "พีชคณิตเชิงเส้น" ดังรูปต่อไปนี้ แล้วเลือกเมาส์ไปที่เมนูย่อย "เมตริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษ"



รูปที่ 4.6 หน้าจอการทำงานเมื่อเลือกเมนูย่อย เมตริกซ์ลักษณะพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

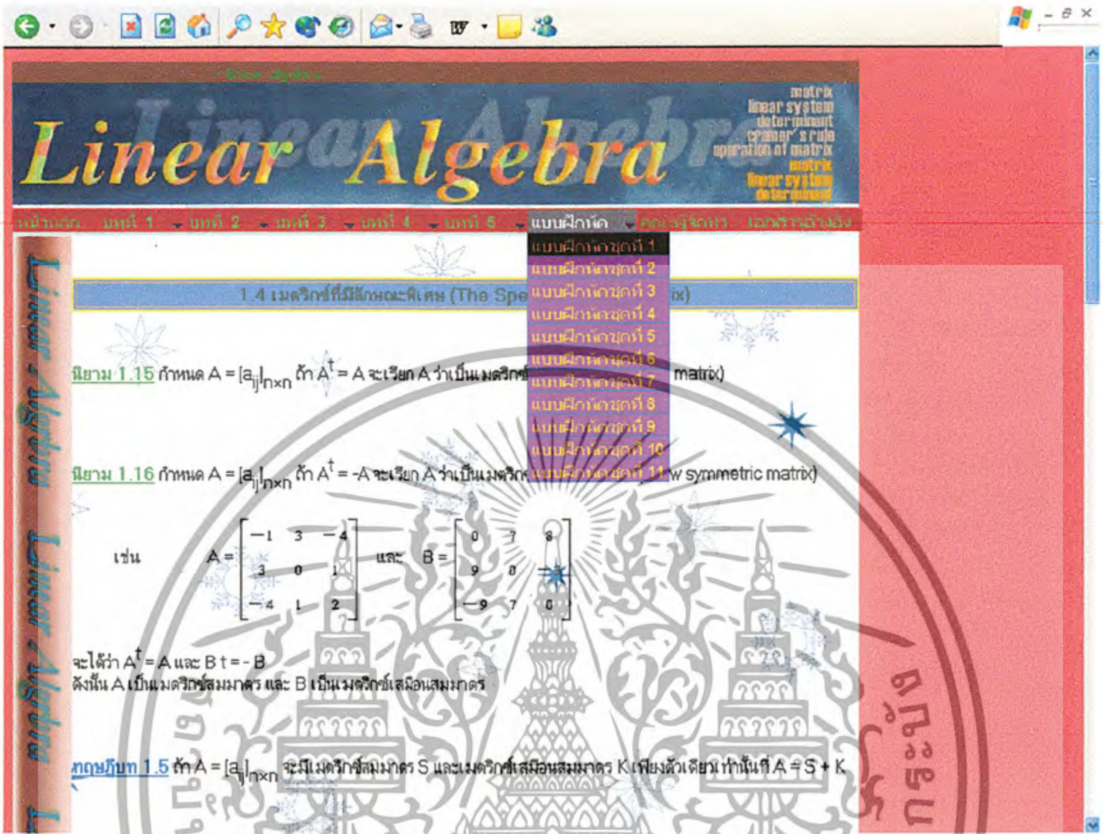
เมื่อคลิ๊กที่เมนูย่อย "เมตริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษ" หน้าจอเนื้อหาของเมตริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษก็จะปรากฏดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.7 หน้าจอการทำงานของเมตริกซ์ที่มีลักษณะพิเศษ

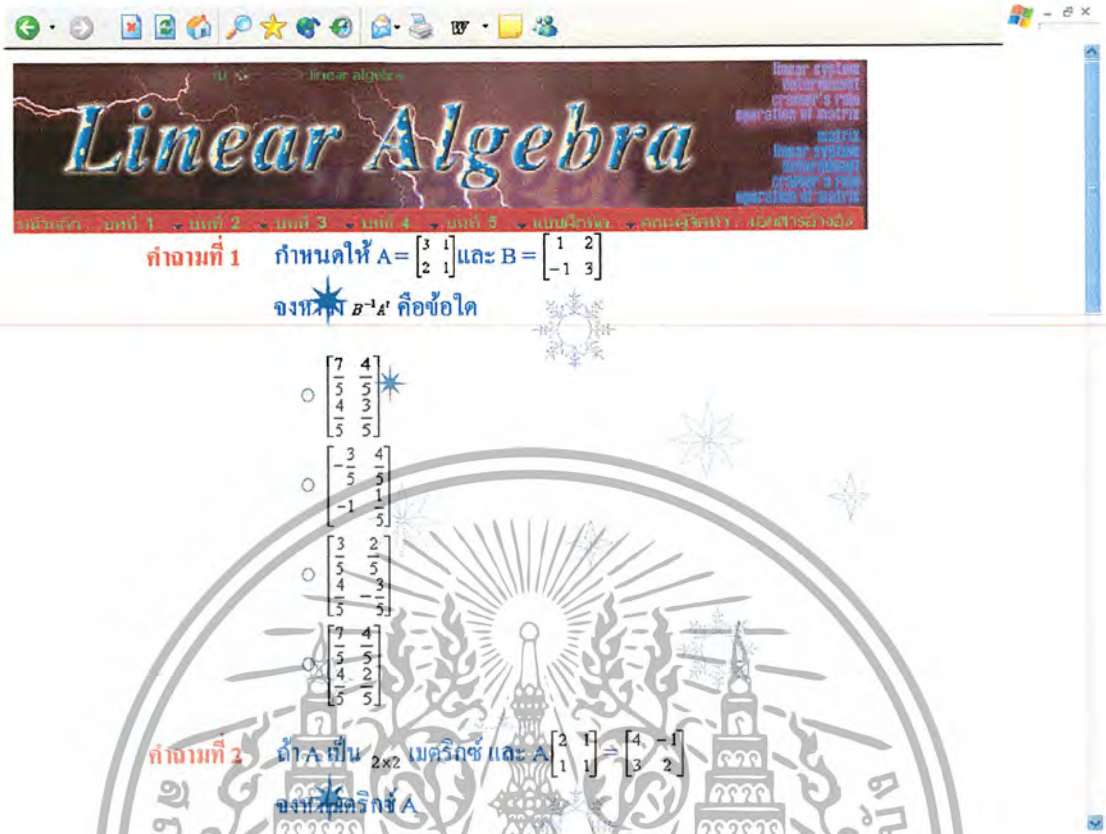
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อผู้ใช้ต้องการที่จะทำแบบฝึกหัด สามารถทำได้ เป็นเช่นว่าต้องการที่จะทำแบบฝึกหัดที่ 1 เลือกเมนู โดยชี้เมาส์ไปที่แบบฝึกหัด แล้วเลือกเมนูย่อยแบบฝึกหัดที่ 1 ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.8 หน้าจอการทำงานเมื่อเลือกเมนูทำงาน แบบฝึกหัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.9 หน้าจอการทำงานของแบบฝึกหัดที่ 1

โดยที่ด้านล่างของหน้าจอจะมี 3 คำสั่งดังนี้

รูปที่ 4.10 เมนูด้านล่างของหน้าจอแบบฝึกหัด

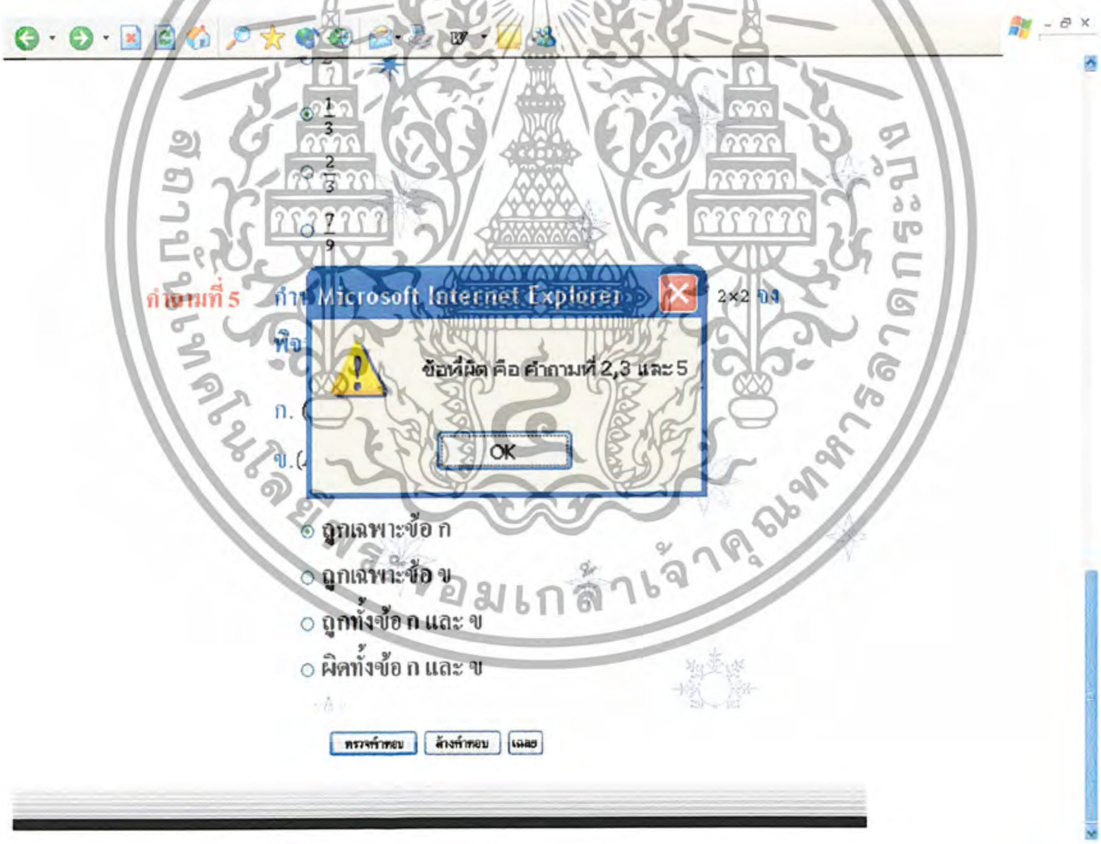
1. ตรวจคำตอบ กดเมื่อต้องการตรวจคำตอบ
2. ล้างคำตอบ กดเมื่อต้องการล้างคำตอบในข้อที่ทำมาก่อนหน้าทั้งหมด
3. เฉลย กดเพื่อไปยังหน้าจอเฉลย ที่มีวิธีทำและคำอธิบาย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อผู้ใช้เลือกคำตอบไม่ครบ หรือทำไม่ครบทุกข้อจะปรากฏข้อความเตือนดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 4.11 ข้อความเตือนเมื่อเลือกคำตอบไม่ครบ

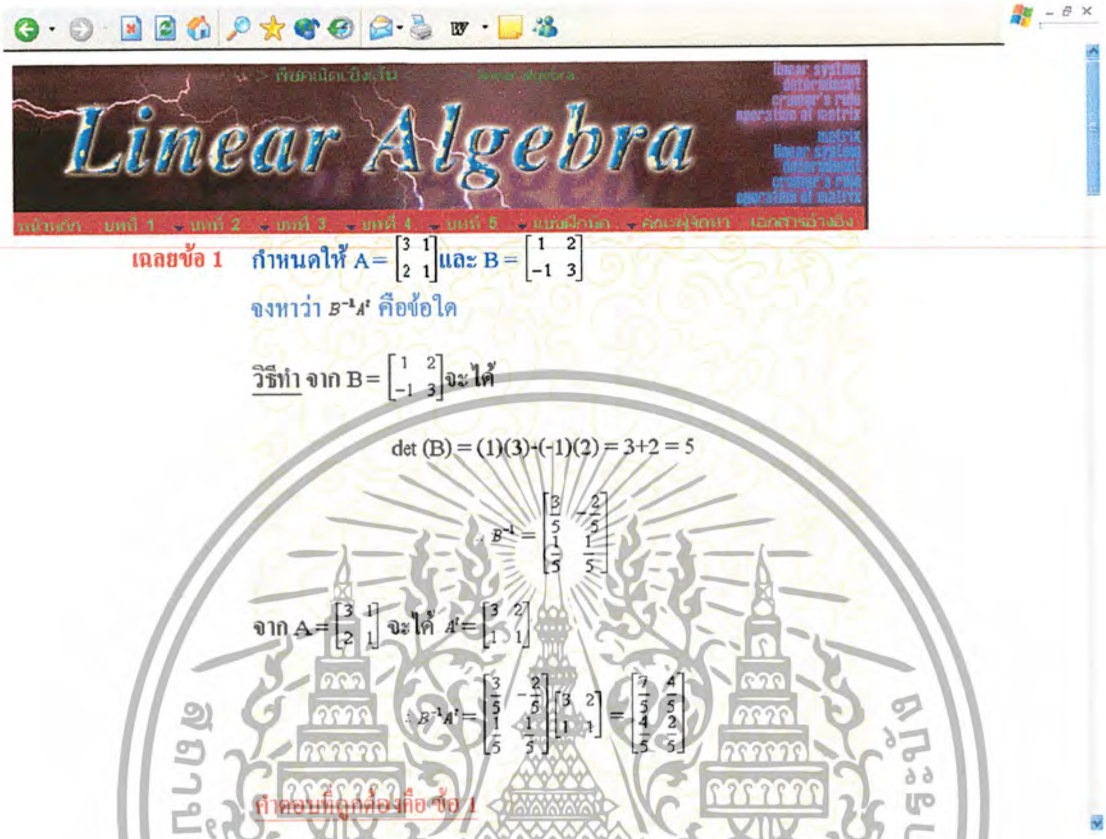
กรณีที่ผู้ใช้ทำแบบฝึกหัดครบทุกข้อ แล้วกดตรวจคำตอบ โปรแกรมจะแสดงข้อความสรุปผลการทำแบบฝึกหัดดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.12 หน้าจอเมื่อตรวจคำตอบ และข้อความสรุปการทำแบบฝึกหัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

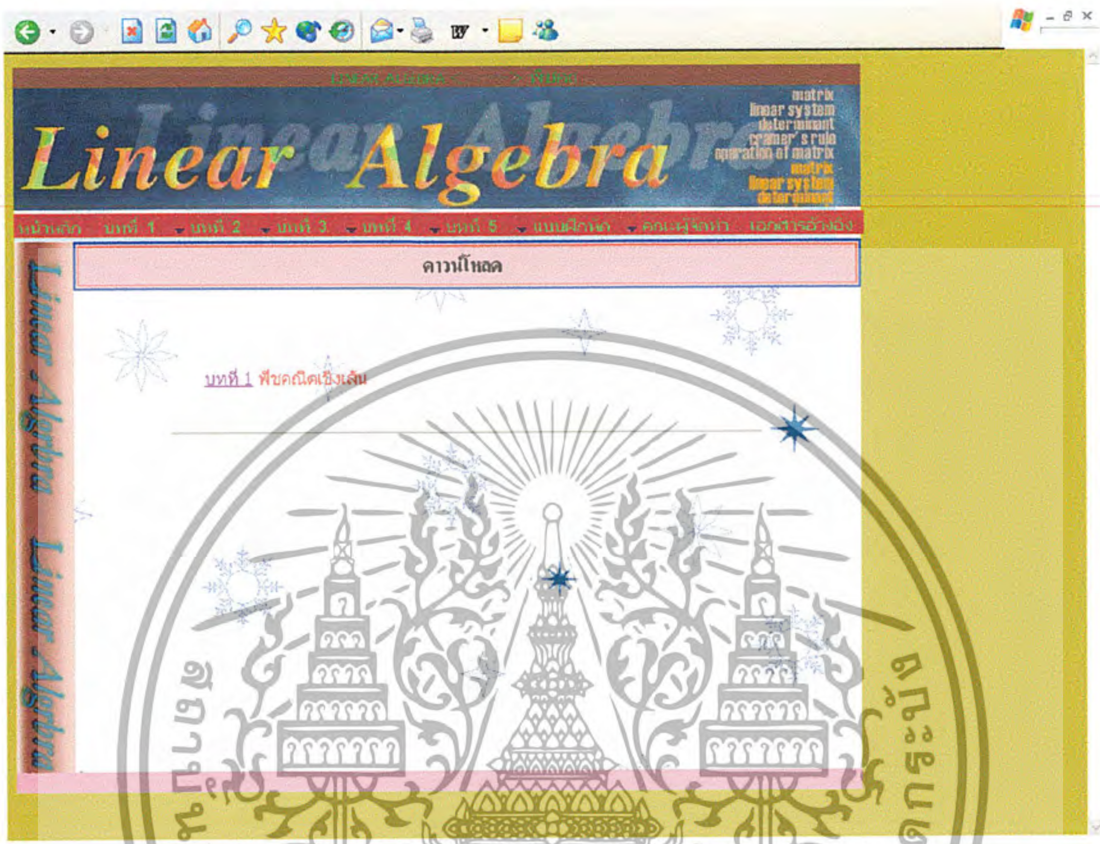
เมื่อผู้ใช้ต้องการกดเลือกเฉลย หน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดจะปรากฏดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.13 หน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในตอนท้ายของเมนูทำงานของทุกบท จะมีการให้ดาวน์โหลดเนื้อหา ดังที่จะทำการดาวน์โหลดเนื้อหาบทที่ 1 ได้รูปต่อไปนี้

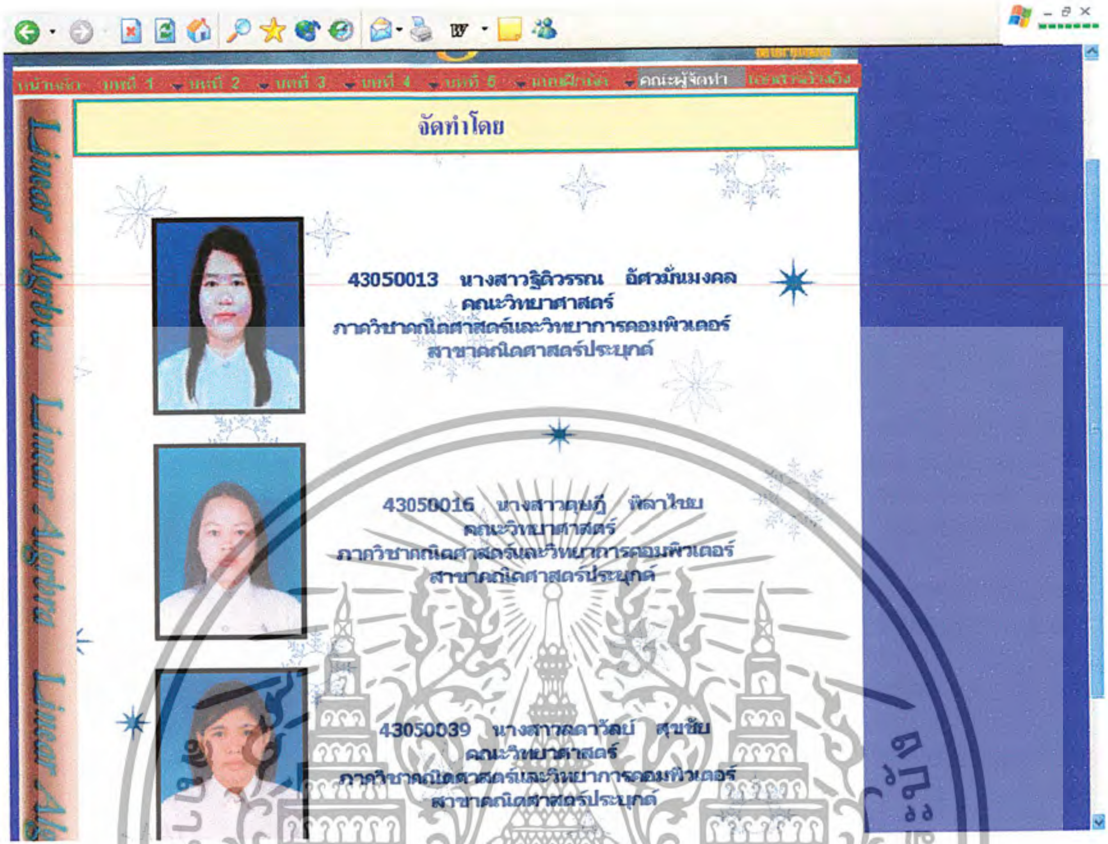


รูปที่ 4.14 หน้าจอดาวน์โหลดบทที่ 1

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

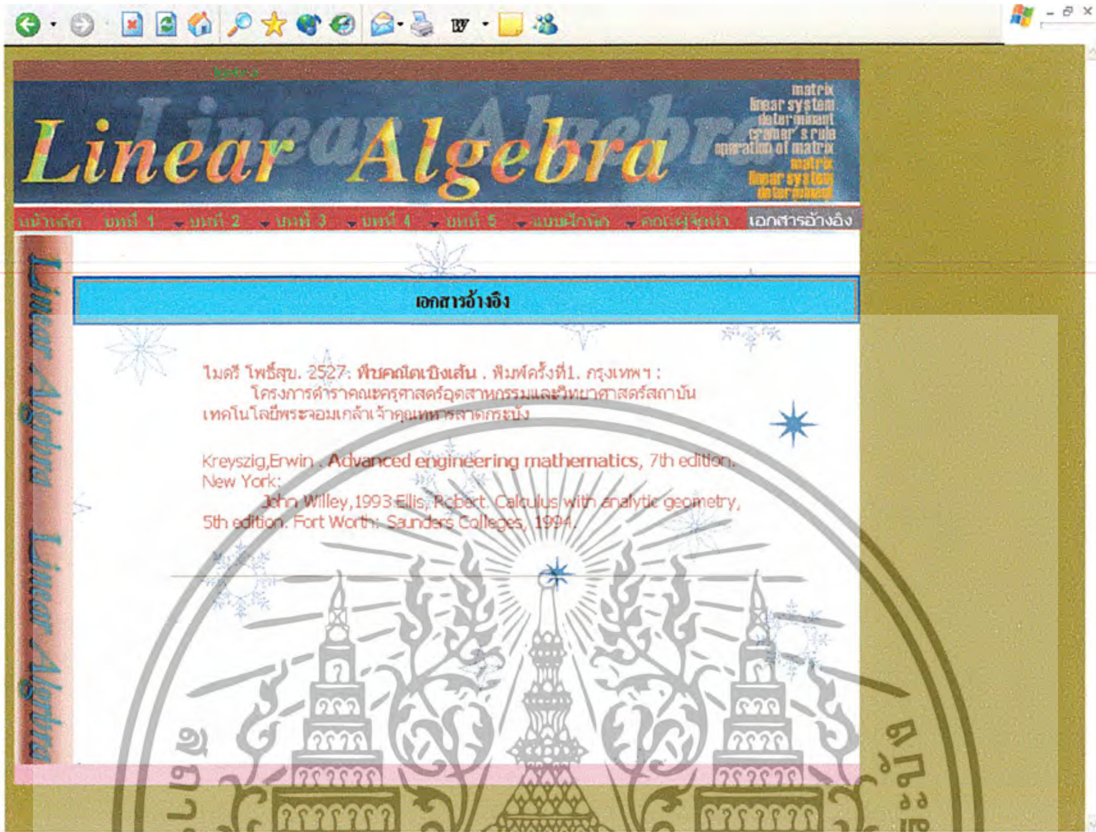
เมื่อเลือกเมนูคณะผู้จัดทำ จะปรากฏหน้าจอดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.15 หน้าจอคณะผู้จัดทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเลือกเมนูเอกสารอ้างอิง จะปรากฏหน้าจอดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.16 หน้าจอเอกสารอ้างอิง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

การนำเสนอเนื้อหาการเรียนการสอนมาประยุกต์ใช้ผ่านสื่ออิเลกทรอนิกส์ผ่านทางอินเตอร์เน็ตนั้น ทางคณะผู้จัดทำเรียกชื่อโปรแกรมนี้ว่า "โปรแกรมช่วยสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น" โดยแบ่งการทำงานออกเป็น 2 ส่วนคือ

5.1.1 ส่วนของเนื้อหา เป็นส่วนรายละเอียดของเนื้อหาและภาพประกอบ ซึ่งในส่วนนี้จะเป็นส่วนที่อธิบายถึงนิยาม หลักการคำนวณ และมีตัวอย่างประกอบที่จะทำให้เข้าใจยิ่งขึ้น

5.1.2 ส่วนของแบบฝึกหัด เป็นส่วนที่เป็นโจทย์ปัญหาระคน พร้อมตรวจสอบความถูกผิดเมื่อทำเสร็จในแต่ละช่วงและมีเฉลยเมื่อต้องการทราบวิธีการทำที่ถูกต้อง

จากการประเมินผลระบบ โดยรวมพบว่าโปรแกรมสามารถแสดงเนื้อหา และประมวลผลเป็นไปได้ด้วยดี

5.2 ข้อจำกัด

5.2.1 เนื้อหาที่นำมาทำโปรแกรมนี้ เป็นเพียงส่วนหนึ่งของพีชคณิตเชิงเส้นเท่านั้น

5.2.2 แบบฝึกหัดอาจจะยังไม่สามารถใช้ทดสอบวัดความรู้ของผู้ที่เข้ามาศึกษา ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากนัก

5.2.3 บางหน้าจอมีเนื้อหามากจึงทำให้การใช้งานยังเกิดความยุ่งยาก

5.3 ข้อเสนอแนะ

5.3.1 ในการใช้สื่อด้านอิเลกทรอนิกส์ ในรูปแบบของอินเตอร์เน็ต คอมพิวเตอร์ที่จะใช้ควรจะมีประสิทธิภาพรองรับการทำงานได้ เช่น ความเร็วของ CPU ประเภทของโปรแกรม Explorer และอาจมีปัญหาอื่น ๆ อีกได้

5.3.2 การพัฒนาสื่อการเรียนการสอนสามารถทำได้โดยง่าย หากแต่ต้องอาศัยเวลาในการพัฒนา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

ทวีชัย หงษ์สุมาลย์ และสงวนชัย สุวรรณชวะศิริ. 2544. **ใส่ลูกเล่นให้เว็บไซต์ด้วย Java Script.** พิมพ์ครั้งที่ 1. นนทบุรี : สำนักพิมพ์ อินโฟเพรส.

ไมตรี โพธิ์สุข. 2527. **พีชคณิตเชิงเส้น** . พิมพ์ครั้งที่1. กรุงเทพฯ : โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เบนซ์ อุดตมธนินทร์ และพิรมล สุระพงษ์ชัย. **ลูกเล่นกราฟฟิกบนเว็บ**. กรุงเทพฯ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

ประชา พฤกษ์ประเสริฐ และคณะ. **Adobe Photoshop 6**. กรุงเทพฯ : บริษัท เอช เอ็น กรุ๊ป จำกัด

พันจันทร์ ธนวัฒนเสถียร และคณะ. **คู่มือการเรียนรู้และเทคนิคการสร้างเว็บเพจ Macromedia Dreamweaver Mx**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

พันจันทร์ ธนวัฒนเสถียร และคณะ. **สร้าง Web page Step By Step**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

Kreyszig,Erwin . **Advanced engineering mathematics,** 7th edition. New York: John Willey, 1993.Ellis, Robert. Calculus with analytic geometry, 5th edition. Fort Worth: Saunders Colleges, 1994.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดรรชนี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ม.

ร.

ว.

อ.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้