โปรแกรมเพื่อการสืบค้นและคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น

SEARCHING AND CALCULATING FOR BASIC ORTHOGONAL FUNCTION

จริยา พรหมจักร

นพมาศ ตะลาด

ปราณี เปรียบสม

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2546

SEARCHING AND CALCULATING FOR BASIC ORTHOGONAL FUNCTION

JARIYA PROMAJUK

NOPPAMAS TALAD

PRANEE PRIABSOM

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2003

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมเพื่อการสืบค้นและคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น SEARCHING AND CALCULATING FOR BASIC ORTHOGONAL FUNCTION
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจริยา พรหมจักร 43050006 นางสาวนพมาศ ตะลาด 43050023 นางสาวปราณี เปรียบสม 43050028
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.สุนทร สุชาติเวชภูมิ อ.พรชัย ชัยสนิท

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2546

คณะกรรมการ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	อ.จินดา ไชยช่วย	
กรรมการ	อ.กัมปนาท นามงาม	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.สุนทร สุชาติเวชภูมิ	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	อ.พรชัย ชัยสนิท	

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมเพื่อการสืบค้นและคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจริยา พรหมจักร 43050006
	นางสาวนพมาศ ตะลาด 43050023
	นางสาวปราณี เปรียบสม 43050028
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2546
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.สุนทร สุชาติเวชภูมิ
	อ.พรชัย ชัยสนิท

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ จัดทำขึ้น โดยนำความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์และคอมพิวเตอร์มาใช้ในการสร้างโปรแกรมเพื่อสืบค้นและคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น ซึ่งมีการนำอนุกรมฟูเรียร์มาใช้ในการหาผลเฉลย โดยได้นำโปรแกรม Visual basic 6.0 มาใช้ในการสร้างอินเตอร์เฟซเพื่อรับค่าข้อมูลเข้า จากนั้นนำค่าข้อมูลเข้าที่ได้ไปประมวลผลโดยใช้โปรแกรม Mathematica มาช่วย เพื่อคำนวณหาฟังก์ชันต่างๆ และวาดกราฟของฟังก์ชัน

Special Project Title	SEARCHING AND CALCULATING FOR BASIC ORTHOGONAL FUNCTION
Student	Miss Jariya Promajuk 43050006
	Miss Noppamas Talad 43050023
	Miss Pranee Priabsom 43050028
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science , Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2003
Special Project Advisor	Asst.Prof.Sunthorn Suchatvejapoom
	Pornchai Chaisanit

ABSTRACT

This special project is a collection of the works on knowledge from Applied Mathematics and Computer for make software to searching and calculating basic orthogonal function.When we uses Fourier series for solve function. This program uses Visual basic 6.0 for create input interface and then bring the input value to calculate by uses Mathematica for calculate function and draw graph of function.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง ฟังก์ชันเชิงตั้งฉากและอนุกรมฟูเรียร์ สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีนั้น ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผศ. สุนทร สุชาติเวชภูมิ และ อ. พรชัย ชัยสนิท อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ไขปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสาทวิชาความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิผลได้ด้วยทุกประการ และขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่คอยเป็นกำลังใจ อีกทั้งยังสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ในการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้ รวมทั้งรุ่นพี่และเพื่อนๆ ที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ เป็นอย่างดีเกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2547

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

ฟังก์ชันตั้งฉากเป็นส่วนหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ และในปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีส่วนสำคัญในการนำมาใช้ศึกษา เพื่อให้ผู้ใช้มีความเข้าใจในวิชาที่ศึกษามากยิ่งขึ้น ทางคณะผู้จัดทำมีความสนใจและประสงค์ที่จะศึกษาวิธีการการนำคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการคำนวณหา Fourier series ต่างๆ จะทำให้สามารถแก้ปัญหาได้ชัดเจนขึ้น อีกทั้งยังสามารถนำมาเขียนกราฟเพื่อแสดงภาพการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันได้ ดังนั้นคณะผู้จัดทำจึงได้จัดทำโปรแกรมเพื่อการสืบค้นและคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น เพื่อเป็นประโยชน์กับผู้ที่สนใจศึกษาเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันเชิงตั้งฉากและการประยุกต์ ให้มีความเข้าใจในเนื้อหาเรื่องนี้มากยิ่งขึ้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อศึกษาการหาฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก

1.2.2 เพื่อศึกษาการหาค่าอนุกรมฟูเรียร์และแบบฝึกหัดต่างๆ

1.2.3 เพื่อสร้างโปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการสืบค้นและการคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้นและแสดงกราฟของฟังก์ชันได้

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

โปรแกรมที่จัดทำขึ้นจะเน้นในการหาค่าฟังก์ชันเชิงตั้งฉากและอนุกรมฟูเรียร์ในรูปแบบต่างๆ ในเบื้องต้น โดยการคำนวณนี้จะใช้โปรแกรม Mathematica ช่วยในการหาผลเฉลย อีกทั้งยังนำมาใช้ในการแสดงกราฟของฟังก์ชันได้ เพื่อที่จะได้ทราบว่าฟังก์ชันที่ใส่ค่าลงไปมีรูปกราฟแบบใดจะได้ทราบชัดเจนขึ้น

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.4.1 ทำการศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวกับฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก อนุกรมฟูเรียร์และแบบฝึกหัดต่างๆ

1.4.2 ทำการศึกษาที่มาและขั้นตอนของแต่ละวิธีที่จะนำมาใช้

1.4.3 ทำการศึกษาและเลือกโปรแกรมที่เหมาะสมสำหรับโปรแกรมนี้

1.4.4 ทำการเขียนโปรแกรมและใช้โปรแกรมสำเร็จรูปช่วยในการเขียนกราฟ

1.4.5 ทำการทดสอบโปรแกรมที่ได้สร้างขึ้น

1.4.6 ตรวจสอบข้อผิดพลาดและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นให้มีความถูกต้อง

1.4.7 ทำการรวบรวมข้อมูลและนำมาจัดทำเป็นเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

1.5 ข้อตกลงเบื้องต้น

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นนี้จะเรียกใช้โปรแกรม Mathematica ดังนั้นคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการติดตั้งจึงมีโปรแกรม Mathematica อยู่ด้วย คุณสมบัติของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เหมาะสมกับการใช้งานโปรแกรม Mathematica มีดังนี้

1.5.1 มี CPU Pentium II MMX ขึ้นไป

1.5.2 มีหน่วยความจำไม่น้อยกว่า 32 Mb

1.5.3 มีระบบปฏิบัติการ Window 98 , Me หรือ 2000

1.5.4 มีพื้นที่ว่างใน Hardisk มากกว่า 500 Mbขึ้นไป

1.5.5 มี CD-ROM

1.5.6 มี Display Card 8 Mb

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันเชิงตั้งฉากและอนุกรมฟูเรียร์

1.6.2 ช่วยในการสืบค้นข้อมูลเรื่องฟังก์ชันเชิงตั้งฉากและอนุกรมฟูเรียร์ได้สะดวกและง่ายต่อการใช้งาน

1.6.3 แสดงกราฟประกอบเพื่อช่วยให้เห็นภาพที่เกิดจากการแก้ปัญหาได้ชัดเจนขึ้น

บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

Jean Baptiste Joseph
Fourier

ยีน แบพทิส โจเซฟ ฟูเรียร์

(Jean Baptiste Joseph Fourier)

ค.ศ.1768 –1830

ประเทศ ฝรั่งเศส

ประวัติการศึกษาและการทำงาน

ฟูเรียร์ เป็นนักฟิสิกส์ ชาวฝรั่งเศส มีชีวิตอยู่ในช่วง ค.ศ.1768 – ค.ศ.1830 เขาเป็นผู้นำอนุกรมซึ่งเป็นผลรวมของฟังก์ชันตรีโกณซึ่งต่อมาเรียกว่า อนุกรมฟูเรียร์ และได้เป็นผู้ริเริ่มในการใช้อนุกรมนี้ศึกษาเกี่ยวกับการไหลของความร้อน

ในความเป็นจริงแล้ว ได้มีการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับอนุกรมนี้ตั้งแต่ ค.ศ.1740 โดยนักคณิตศาสตร์และนักฟิสิกส์หลายท่านเช่น **Benollui,D'Alambert,Lagrange** และ **Euler** ได้ค้นพบสูตรในรูปอินทิกรัล **(Integral Formulas)** ซึ่งต่อมาเรียกว่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์

ฟูเรียร์ได้ผนวกความคิดของตัวเองกับแนวคิดของนักคณิตศาสตร์และได้นำเสนอผลงาน ที่ **Paris Academy of Sciences** ในปีค.ศ. 1807 และปีค.ศ. 1811 โดยการนำไปประยุกต์ในเรื่องการนำความร้อน และได้เสนอแนวคิดว่า ฟังก์ชันที่ใช้แทนปัญหาเหล่านี้ควรจะอยู่ในรูปของอนุกรมฟังก์ชันตรีโกณ และได้มีการวิจารณ์ผลงานของเขาจนทำให้ไม่ได้รับการตีพิมพ์ แต่ต่อมาเขาได้พยายามพัฒนาแนวคิดดังกล่าวต่อไปจนเป็นที่ยอมรับและในปีค.ศ. 1822 เขาได้ตีพิมพ์เผยแพร่ **La Theorie Analytique de la Chaleur** ซึ่งทฤษฎีต่างๆ ที่พัฒนาขึ้นมามีผลต่อการเปลี่ยนแปลงในวงการคณิตศาสตร์ไม่ว่าจะเป็นทางด้าน **Modern Algebra** หรือ งานของ **Cantor** ที่เกี่ยวกับทฤษฎีเซต

ผลงาน

1. **Laorie The Analytique de la Chaleur** ซึ่งเป็นทฤษฎีที่ใช้อนุกรมฟูเรียร์ในการวิเคราะห์ การไหลของความร้อน
2. การประยุกต์อนุกรมฟูเรียร์ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เกี่ยวกับสมการคลื่น **(Wave Equation)** การไหลของความร้อน **(Heat Flow)** และ **Electrostatics**

ในปี ค.ศ. 1807 Fourier ได้เสนอทฤษฎีว่าเราอาจจะเขียน**ฟังก์ชัน**ใดๆ ให้เป็น**การรวมเชิงเส้น** (Linear combination) ของฟังก์ชัน sine และ cosine ปัจจุบันนี้เราเรียกการรวมเชิงเส้นนี้ว่า **อนุกรมฟูเรียร์** ซึ่งกลายเป็นเครื่องมือที่สำคัญยิ่งในการวิเคราะห์ปรากฏการณ์ที่มี คาบครบรอบ (period) เช่น การสั่นสะเทือน การเคลื่อนที่ของคลื่นและดาวนพเคราะห์ เป็นต้น

2.1 ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก (Orthogonal function)

ในปัจจุบันนี้อนุกรมฟูเรียร์ เป็นเพียงส่วนหนึ่งของทฤษฎีทั่วไปซึ่งกล่าวว่าเราอาจจะเขียนการกระจายของฟังก์ชันใดๆ ให้อยู่ในแบบอนุกรมของฟังก์ชันในระบบเชิงตั้งฉากได้

นิยาม ฟังก์ชันสองฟังก์ชัน f_1 และ f_2 เป็น ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก บนช่วง $[a,b]$ ถ้า

$$(f_1,f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx = 0 \qquad (2.1)$$

หมายเหตุ สมการ 2.1 นี้คล้ายกับการนิยามผลคูณสเกลาร์ระหว่างสองเวกเตอร์ในระบบ n มิติ จากสมการ 2.1 จะเห็นได้ว่าผลคูณภายในของ f_1 และ f_2 มีคุณสมบัติขั้นต้นดังนี้

$$(f_1,f_2) = (f_2,f_1) \; ; \; (cf_1,f_2) = (f_1,cf_2) = c(f_1,f_2) \; ; \; c = \text{ค่าคงที่}$$
$$(f_1+f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g) \; , \; (f,g_1+g_2) = (f,g_1) + (f,g_2)$$

นิยาม (norm or generalized length)

norm ของ orthogonal function ϕ_n คือ

$$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n,\phi_n)}$$

หรือ $$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2\,dx}$$

นิยาม ให้ $S = \{\phi_0,\phi_1,\phi_2,\ldots\}$ เป็นเซตของฟังก์ชันซึ่งแต่ละฟังก์ชันอาจอินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ ถ้า

$$(\phi_m,\phi_n) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad m \neq n$$

เราเรียก S เป็น**ระบบเชิงตั้งฉาก** (Orthogonal system) บนช่วง $[a,b]$ และถ้าแต่ละสมาชิกฟังก์ชัน ϕ_n **มีนอร์มเท่ากับหนึ่ง** เราเรียก S เป็น**ระบบเชิงตั้งฉากปกติ** (Orthonormal system)

นิยาม เราเรียกเซต $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ ว่าเป็นเซต**ที่ไม่อิสระเชิงเส้น** (linearly dependent) บนช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อเราสามารถหาค่าคงที่ $c_0, c_1, \ldots, c_n$ (ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน) ซึ่งทำให้สมการ 2.2 เป็นจริงทุกค่า x ใน $[a,b]$

$$c_0\phi_0(x)+c_1\phi_1(x)+\ldots+c_n\phi_n(x)=0 \tag{2.2}$$

ถ้าสมการ 2.2 เป็นจริงอย่างเดียวเมื่อทุก $c_k=0, k=0,1,2,\ldots,n$ เราเรียก $\{\phi_k\}_0^n$ ว่าเป็น**เซตอิสระเชิงเส้น** (linearly independent) บนช่วง $[a,b]$

ในกรณี**เซตไม่จำกัด** (infinite set) $\{\phi_n\}_0^\infty$ จะเป็นเซตอิสระเชิงเส้นก็ต่อเมื่อทุกๆ **สับเซต** (subset) เป็นเซตอิสระเชิงเส้นบนช่วง $[a,b]$ **จะเห็นได้ว่าระบบฟังก์ชันเชิงตั้งฉากทุกระบบเป็นระบบอิสระเชิงเส้นเสมอ** เพราะถ้าสมการ 2.2 เป็นจริง เราคูณภายในสมการ 2.2 ด้วย $\phi_k(x)$ จะได้

$$c_k(\phi_k,\phi_k)=c_k=0 \quad \text{ทุกค่า } k$$

<u>ตัวอย่าง 2.1.1</u> $\{x^n\}_0^\infty$ เป็นเซตของฟังก์ชันซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันบนช่วง $[-1,1]$ จงสร้างออร์โทโกนัลเซต

<u>วิธีทำ</u> $$f_0(x)=1, \|f_0\|^2=\int_{-1}^{1}dx=2, \|f_0\|=\sqrt{2}$$

ให้ $\phi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ให้ $g_1(x)=x-c_{11}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\because (g_1,\phi_0)=0, \because \int_{-1}^{1}\left(x-c_{11}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}dx=0, c_{11}=0,$

$\because g_1(x)=x, \|g_1\|=\sqrt{\dfrac{2}{3}},$ ให้ $\phi_1(x)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$

ให้ $g_2(x)=x^2-c_{11}\phi_0(x)-c_{22}\phi_1(x)$

$\because (g_2,\phi_0)=0$ จะได้ $c_{21}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\because (g_2,\phi_1)=0$ จะได้ $c_{22}=0; \therefore g_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$

แต่ $\|g_2\|=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}, \therefore \phi_2(x)=\sqrt{\dfrac{5}{2}}\left(\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$

ดำเนินวิธีการเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จะได้เซตของพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$\phi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}, \phi_1=\sqrt{\frac{3}{2}}x, \phi_2=\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}\right), \ldots$$ **ตอบ**

2.2 อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเฉพาะระบบฟังก์ชันตรีโกณมิติ sine และ cosine เท่านั้นและจะเรียก **อนุกรมฟูเรียร์เทียบกับฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านี้แต่เพียงสั้น ๆ ว่าอนุกรมฟูเรียร์**

นิยาม Fourier series ของ $f(x)$ ในช่วง $(-p,p)$ เมื่อ $p>0$ และ

$$f(x+2p)=f(x)$$

เช่น $\sin x, \cos x$ มีคาบครบรอบเท่ากับ 2π แต่ $\tan x$ มีคาบครบรอบเท่ากับ π เป็นต้น แทนฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งมีคาบครบรอบ 2π ด้วยอนุกรมแบบ

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right) \tag{2.3}$$

เราเรียกอนุกรมทางขวามือของสูตรนี้ว่าอนุกรมตรีโกณมิติ ถ้าอนุกรมนี้ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วงใด ๆ ซึ่งมีความยาว 2π เราก็อาจจะหาค่า a_0, a_n, b_n ได้เพราะ $\{1, \cos nx, \sin nx\}_1^{\infty}$ เป็นเซตออร์โทโกนัลในช่วงใด ๆ ที่มีความยาว 2π ด้วย จะได้สูตรสำหรับการหา a_0, a_n, b_n ดังนี้

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx \tag{2.4}$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx \tag{2.5}$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx \tag{2.6}$$

เราเรียกสูตร (2.4) – (2.6) ซึ่งใช้หา a_0, a_n, b_n ว่าสูตรของออยเลอร์-ฟูเรียร์ และเรียกอนุกรม (2.3) ซึ่งได้ค่า a_0, a_n, b_n จาก (2.4) - (2.6) ว่าอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน f(x)

ทฤษฎี 1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าต่อเนื่องตลอดทุก x และมีคาบครบรอบ 2π ถ้าอนุกรมตรีโกณมิติ 2.3 ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอไปสู่ $f(x)$ ตลอดทุกค่าของ x ก็จะหาค่าสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n ได้จาก 2.5 และ 2.6 ตามลำดับ

พิสูจน์ ให้ $s_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$

เนื่องด้วยลำดับ $\{s_m(x)\}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอไปสู่ $f(x)$ ดังนั้น $s_m(x)\cos nx$ ก็จะลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอไปสู่ $f(x)\cos nx$ สำหรับแต่ละค่า n ที่คงที่ นั่นคือ

$$|s_m(x)\cos nx-f(x)\cos nx|=|s_m(x)-f(x)||\cos nx|\le|s_m(x)-f(x)|$$

และเทอมหลังจะมีค่าลู่เข้าสู่ศูนย์อย่างสม่ำเสมอเมื่อ $m\to\infty$

ในทำนองเดียวกัน $s_m(x)\sin nx$ ก็จะลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอไปสู่ $f(x)\sin nx$ ดังนั้นก็อาจอินทิเกรตอนุกรมสำหรับ $s_m(x)\cos nx$ และ $s_m(x)\sin nx$ ทีละเทอมๆ ก็จะได้สัมประสิทธิ์

a_n, b_n เช่นเดียวกับสมการ 2.5 และสมการ 2.6 โดยอาศัยคุณสมบัติที่ $\{1, \cos nx, \sin nx\}_1^\infty$ เป็นเซตออร์โทโกนัลบน $[c, c+2\pi]$

ทฤษฎี 1 นี้ใช้ได้สำหรับฟังก์ชันซึ่งมีคาบครบรอบ 2π แต่ที่จริงแล้วเราอาจจะแทนฟังก์ชันหลายประเภทด้วยอนุกรมฟูเรียร์ได้ ไม่ว่าฟังก์ชันนั้นจะมีการกระจายแบบเทเลอร์ได้หรือไม่ ปัญหาที่เกิดขึ้นก็คือฟังก์ชันนั้นๆ จะต้องมีสมบัติอย่างไร (นอกจากความต่อเนื่องตามทฤษฎี 1)

การที่กำหนดให้อนุกรม 2.3 ต้องลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอนั้นก็เกิดข้อขัดแย้งได้ กล่าวคือถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใดๆ เราสามารถหา a_n, b_n ได้จากสมการ 2.5 และสมการ 2.6 แต่ก็มีอนุกรมฟูเรียร์ของ **ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง** ไม่ลู่เข้าไปสู่ฟังก์ชันนั้นๆ และก็มีอนุกรมฟูเรียร์ของ **ฟังก์ชันที่ไม่มีความต่อเนื่อง** ลู่เข้าไปสู่ฟังก์ชันนั้นๆ ได้ ในกรณีที่ f ไม่มีความต่อเนื่องอนุกรม 2.3 ก็จะไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ เราจะศึกษาถึงอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่ไม่มีความต่อเนื่องต่อไป

นิยาม เราเรียกฟังก์ชัน f **มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ** (piecewise continuous) บน $[a,b]$ ถ้าต่อเมื่อเราสามารถแบ่ง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ ซึ่งสามารถนับจำนวนได้ถ้วน โดยที่ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ และ f มีความต่อเนื่องในช่วงย่อย (x_{k-1}, x_k) นอกจากนี้เราสามารถหาลิมิตข้างเดียวของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าสู่จุดปลายทั้งสองของแต่ละช่วงย่อย

รูปที่ 2.1 ฟังก์ชันที่ความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ

ถ้า x_i เป็นจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง กล่าวคือ

$f(x_i+) \neq f(x_i-)$ เราอาจนิยาม f ที่จุด x_i ได้จาก

$$f(x_i) = \frac{f(x_i+) + f(x_i-)}{2} \tag{2.7}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ก็ต่อเมื่อ f **มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนนับบนช่วง $[a,b]$ และค่าของ f กระโดดขึ้น (หรือลง) บนจุดที่ไม่ต่อเนื่องนั้นด้วยขนาดจำกัด** (finite jump)

เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่มี**ความเรียบเป็นช่วงๆ** (piecewise smooth) ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และ f' ก็มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ด้วย

เราอาจนิยามอินทิกรัลของฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ โดยมีความไม่ต่อเนื่องที่ $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ ใน $[a,b]$ ได้ดังนี้ (เมื่อ $x_0 = a$ และ $x_n = b$)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \tag{2.8}$$

ถ้านิยาม $F(x)$ โดยอินทิกรัล $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[a,b]$ ฟังก์ชัน F และ F' ก็จะมีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ที่จริงแล้ว F เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องตลอดบน $[a,b]$ ซึ่งจะเห็นได้จาก

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \le M|x_2 - x_1|$$

เมื่อ x_1, x_2 เป็นจุดใดๆ ใน $[a,b]$ และ $|f(x)| \le M$ ตลอดทุก x บน $[a,b]$ แต่ที่ได้นี้แสดงว่า F มีความต่อเนื่องตลอดและมีความเรียบเป็นช่วงๆ

เมื่อ f มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ด้วย ดังนั้นก็อาจหาค่า a_n และ b_n จากสมการ 2.5 และสมการ 2.6 ได้โดยอาศัยสมการ 2.7 จึงอาจขยายอนุกรมฟูเรียร์ไปใช้กับฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ได้ดังนี้

ทฤษฎี 2 ถ้า f มี**ความเรียบเป็นช่วงๆ** และนิยามค่าของฟังก์ชันตรงจุดที่ไม่ต่อเนื่องด้วยสมการ 2.7 และ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคาบครบรอบ 2π อนุกรมฟูเรียร์ของ f ก็จะลู่เข้า (แบบเป็นจุดๆ) ไปสู่ $f(x)$ สำหรับแต่ละค่าของ x และถ้าหากว่า f มีความเรียบตลอดช่วงปิด $[c,d]$ ใดๆ แล้ว อนุกรมฟูเรียร์นั้นก็จะลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[c,d]$

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x) = x$ บน $[-\pi, \pi]$

<u>วิธีทำ</u> จาก 2.5 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0, n = 1,2,3,...$

และ $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$

จาก 2.6 $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}; n = 1,2,3,,...$$

$$\therefore x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ...\right)$$ **ตอบ**

หมายเหตุ ควรจำค่าของ sine และ cosine ของมุมที่เป็นผลคูณของ $\frac{\pi}{2}$ และ π ไว้ เช่น

$\sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n, \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n+1}, \cos(2n-1)\frac{\pi}{2} = 0, n = 0,1,2,3,...$

อนุกรมในตัวอย่าง 2.2.1 นี้ลู่เข้าไปสู่ $f(x) = x$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$ เราอาจขยายการลู่เข้านี้ออกไปตลอดทุกค่าจริงของ x ได้ โดยใช้คุณสมบัติว่า $f(x)$ มีคาบครบรอบ 2π กล่าวคือ $f(x+2\pi) = f(x)$ ตลอดทุกค่า x และจะเขียนกราฟของ $f(x)$ ในช่วงอื่นๆ ได้ดังใน รูป 2.2

รูปที่ 2.2 $f(x)$ **มีคาบครบรอบ** 2π

ตรงจุดปลายของช่วงย่อยๆ ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องเราจะใช้สมการ 2.7 หาค่าของฟังก์ชันตรงจุดไม่ต่อเนื่องเหล่านั้น เช่น $f(\pi) = \dfrac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = \dfrac{-\pi+\pi}{2} = 0$ เป็นต้น เมื่อให้ $x = \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\frac{n\pi}{2} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)}$$

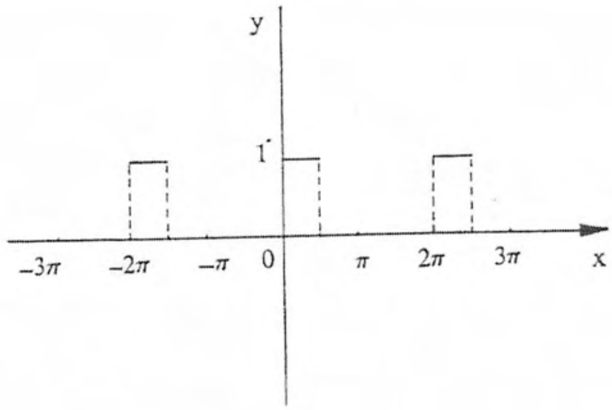
นั่นคือ $\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

และถ้าให้ $x = \pi$ อนุกรมในตัวอย่าง 2.2.1 จะลู่เข้าไปสู่ $f(\pi) = 0$

<u>ตัวอย่าง 2.2.2</u> จงหาอนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ 1 & ; 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u> กราฟของ $f(x)$ ในช่วง $(-3\pi, 3\pi)$ มีลักษณะดังในรูป 2.3



รูปที่ 2.3 $f(x)$ ในช่วง $(-3\pi, 3\pi)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & ; n = even \\ \dfrac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi} & ; n = 2m-1;\ m = 1,2,3\ldots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\sin nx\,dx = \frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}$$

$$\therefore b_{2m} = \frac{1-(-1)^m}{2m\pi},\ b_{2m-1} = \frac{1}{(2m-1)\pi};\ m = 1,2,3,\ldots$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \ldots\right]$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left[\sin x + \sin 2x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right]$$

ณ จุด $x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ อนุกรมจะลู่เข้าสู่ค่า $\frac{1}{2}$ **ตอบ**

2.3 ฟังก์ชันคาบ (Periodic function)

ฟังก์ชันเป็นคาบ คือ ฟังก์ชันใดๆ ที่นิยามโดย

$$f(t) = f(t + T) \tag{2.9}$$

สำหรับทุกค่าของ t ค่าต่ำสุดของ T ซึ่งเป็นไปตาม 2.9 เรียกว่า **คาบ** (period) ของฟังก์ชัน คาบของ $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ คือ เลขจำนวนบวกใดๆ โดยสามารถหาผลเฉลยได้จากสูตรอยู่ในช่วง $[-p, p]$ ซึ่งจะมีการจัดรูปแบบฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ;-p < x < 0 \\ f_2(x) & ;0 < x < p \end{cases} \tag{2.10}$$

Fourier series คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x \right) \tag{2.11}$$

เมื่อ

$$a_0 = \frac{1}{p}\left[\int_{-p}^{0} f_1(x)dx + \int_{0}^{p} f_2(x)dx\right] \tag{2.12}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\left[\int_{-p}^{0} f_1(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx + \int_{0}^{p} f_2(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx\right] \tag{2.13}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\left[\int_{-p}^{0} f_1(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx + \int_{0}^{p} f_2(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx\right] \tag{2.14}$$

2.3.1 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (Even and Odd function)

ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์นี้ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่ จะทำให้หา a_n และ b_n ได้สะดวกยิ่งขึ้น

นิยาม เรากล่าวว่า $f_1(x)$ เป็น**ฟังก์ชันคู่** (even function) ก็ต่อเมื่อ

$f_1(x) = f_1(-x)$ สำหรับทุกค่าของ x ในโดเมนของ f

และกล่าวว่า $f_2(x)$ เป็น**ฟังก์ชันคี่** (odd function) ก็ต่อเมื่อ

$f_2(x) = -f_2(-x)$ สำหรับทุกค่าของ x ในโดเมนของ f

ดังนั้นอินทิกรัลของ f_1 และ f_2 ซึ่งเป็นฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่บนช่วง $[-c, c]$ เมื่อ c เป็นเลขใดๆ จะได้ผลว่า

$$\int_{-c}^{c} f_1(x)dx = 2\int_{0}^{c} f_1(x)dx\ ,\ \int_{-c}^{c} f_2(x)dx = 0$$

ผลคูณระหว่างฟังก์ชันคู่สองฟังก์ชัน และผลคูณระหว่างฟังก์ชันคี่สองฟังก์ชันจะมีผลเป็นฟังก์ชันคู่ แต่ผลคูณระหว่างฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่จะได้ผลเป็นฟังก์ชันคี่

Fourier series ของฟังก์ชัน f บน $(-p, p)$ คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right)$$

เมื่อ

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

ถ้า f เป็น **ฟังก์ชันคู่** (even function) บน $(-p, p)$ แล้ว

Fourier cosine series คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x \tag{2.15}$$

เมื่อ

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,dx \tag{2.16}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \tag{2.17}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0 \tag{2.18}$$

ถ้า f เป็น **ฟังก์ชันคี่** (odd function) บน $(-p, p)$ แล้ว

Fourier sine series คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{p}x \tag{2.19}$$

เมื่อ

$$a_0 = 0; n = 0,1,2,... \tag{2.20}$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx \tag{2.21}$$

หมายเหตุ เราเรียกอนุกรมของฟังก์ชันคี่ว่า**อนุกรมฟูเรียร์ไซน์** และอนุกรมของฟังก์ชันคู่ว่า **อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์**

ข้อควรจำ

* ผลคูณของฟังก์ชันคู่สองฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคู่
* ผลคูณของฟังก์ชันคี่สองฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคู่
* ผลคูณของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่เป็นฟังก์ชันคี่

* ผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันคู่สองฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคู่

* ผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันคี่สองฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคี่

2.4 Half Range Expansion

การกระจายฟังก์ชันที่นิยามไว้เพียงครึ่งช่วง (half-range expansion) ฟังก์ชันใดๆ ที่นิยามไว้เพียงครึ่งหนึ่งของช่วงคือ $0 < x < p$ ด้วยอนุกรมตรีโกณมิติ

ถ้า $y = f(x)$ นิยามบนช่วง $0 < x < p$ เพื่อจะให้ $f(x)$ นิยามบน $-p < x < p$

เราจะได้ Fourier series คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{p}x\right)$$

เมื่อ

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx \tag{2.22}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{2n\pi}{p}xdx \tag{2.23}$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{2n\pi}{p}xdx \tag{2.24}$$

ถ้า f เป็น **ฟังก์ชันคู่** (even function) บน $(0, p)$ แล้ว

Fourier cosine series คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x \tag{2.25}$$

เมื่อ
$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx \tag{2.26}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx \tag{2.27}$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx = 0 \tag{2.28}$$

ถ้า f เป็น **ฟังก์ชันคี่** (odd function) บน $(0, p)$ แล้ว

Fourier sine series คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{p}x \tag{2.29}$$

เมื่อ
$$a_n = 0; n = 0,1,2,... \tag{2.30}$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx \tag{2.31}$$

<u>ตัวอย่าง 2.4.1</u> จงหา (ก) อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (ข) อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ของฟังก์ชัน $f(x) = x + 1$ เมื่อ $0 < x < \pi$

<u>วิธีทำ</u> (ก) สร้าง $F(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันคี่

โดย $F(x) = \begin{cases} x - 1 & ; -\pi < x < 0 \\ x + 1 & ; 0 < x < \pi \end{cases}$

กราฟของ $F(x)$ มีคาบครบรอบ 2π ในช่วง $(-3\pi, 3\pi)$ เป็นดังในรูปที่ 2.4 ค่าของฟังก์ชัน ณ จุดไม่ต่อเนื่อง $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ เท่ากับศูนย์

$a_n = 0$ ทุกค่า $n = 0, 1, 2, \ldots$

รูปที่ 2.4 F(x) มีคาบครบรอบ 2π ในช่วง $(-3\pi, 3\pi)$ ในฟังก์ชันคี่

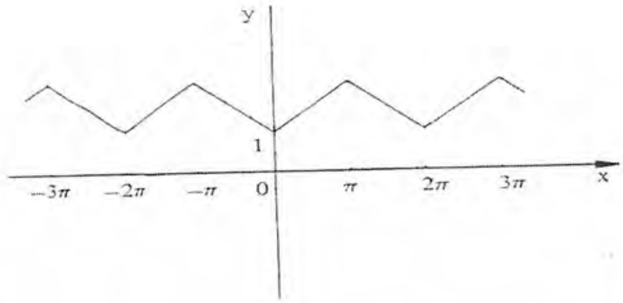
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} \left[1 - (\pi + 1) \cos n\pi \right]$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{\pi} \left[(\pi + 2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{(\pi + 2)}{3} \sin 3x - \frac{\pi}{4} \sin 4x + \ldots \right]$$

(ข) สร้าง $F(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันคู่

โดยให้ $F(x) = \begin{cases} -x + 1 & ; -\pi < x < 0 \\ x + 1 & ; 0 < x < \pi \end{cases}$

กราฟของ $F(x)$ มีคาบครบรอบ 2π ในช่วง $(-3\pi, 3\pi)$ มีลักษณะดังในรูปที่ 2.5 มีความต่อเนื่องตลอดทุกค่า x



รูปที่ 2.5 F(x) มีคาบครบรอบ 2π ในช่วง $(-3\pi,3\pi)$ ในฟังก์ชันคู่

$\therefore b_n = 0$ ทุกค่า $n = 1,2,3,...$

และ $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx dx = \dfrac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx = \pi + 2$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + ...\right)$$ **ตอบ**

หมายเหตุ เราสร้างฟังก์ชัน $F(x)$ ขึ้นเพื่อใช้ในการเขียนกราฟเท่านั้น การหาค่า a_n และ b_n เราหาจากนิยามของ $f(x)$ ในช่วง $(0,\pi)$ ที่กำหนดให้ อนุกรมที่ได้จะลู่เข้าแบบเป็นจุดๆ สู่ $f(x)$ หรือ $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$ แล้วแต่ว่า f ต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องที่จุด x นั้นๆ

การกระจายในช่วงอื่น ๆ ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความเรียบเป็นช่วง ๆ และมีนิยามบนช่วง $[c-\pi, c+\pi]$ เราอาจนิยามให้ f เป็นฟังก์ชันมีคาบครบรอบ 2π และขยายนิยามได้ตลอดทุกค่าจริงของ x อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ ก็คงมีลักษณะเช่นเดียวกับสมการ 2.4 ส่วนสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ a_n และ b_n ก็คงหาได้จากสมการ 2.5 และสมการ 2.6 เช่นเดิม ทั้งนี้เพราะการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีคาบครบรอบ 2π ย่อมได้ผลลัพธ์เท่ากัน กล่าวคือ

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \ ; n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \ ; n = 1,2,3,...$$

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันมีความเรียบเป็นช่วงๆ บนช่วง $[-L,L]$ ก็อาจจะหาการกระจายของ $f(x)$ ในช่วงนี้ได้ โดยการเปลี่ยนตัวแปรจาก x ไปเป็น y ด้วยสมการ $y = \dfrac{\pi x}{L}$ จะได้

$$f(x) = f\left(\frac{Ly}{\pi}\right) = g(y) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$ ช่วง $[-L,L]$ ก็จะเปลี่ยนเป็นช่วง $[-\pi,\pi]$

อนุกรมฟูเรียร์ของ $g(y)$ คือ

$$g(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos ny+b_n\sin ny\right);-\pi<y<\pi$$

ซึ่ง $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\cos nydy$ และ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\sin nydy$

ก็จะเปลี่ยนเป็น

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right);-L<x<L$$

โดยที่ $$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\\ b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\end{aligned}\right\}\quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.25}$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันคี่บน $[-L,L]$ การกระจายของ $f(x)$ จะเป็นอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ
$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ ซึ่ง $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

และถ้า f เป็นฟังก์ชันคู่บน $[-L,L]$ การกระจายของ $f(x)$ จะเป็นอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์
คือ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$ ซึ่ง $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$

เมื่อนิยามของฟังก์ชัน f มีเพียงครึ่งช่วง คือบน $[0,L]$ เราก็อาจนิยามให้ F เป็นการขยายของ f จนเต็มช่วง $[-L,L]$ เพื่อให้ได้อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ หรืออนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

<u>ตัวอย่าง 2.4.2</u> กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & ;-1<x<0\\ x-1 & ;0<x<1\end{cases}$$

จงหาการกระจายของ f เป็นอนุกรมฟูเรียร์บน $(-1,1)$ และเขียนกราฟของ f ซึ่งมีคาบครบรอบเท่ากับ 2 บนช่วง $[-3,3]$

<u>วิธีทำ</u> f เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น $a_n=0$ ทุกค่า $n=0,1,2,\ldots$ และ

$$b_n=2\int_0^1(x-1)\sin n\pi xdx=-\frac{2}{n\pi},n=1,2,\ldots$$

$$\therefore f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x,-1<x<1$$

ค่าของฟังก์ชันที่ $x=0,\pm1,\pm2,\ldots$ เท่ากับศูนย์ อนุกรมที่ได้ลู่เข้าสู่ $f(x)$ ทุก x และลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ x เป็นเลขจำนวนเต็ม นอกจากนี้ $f(x+2n)=f(x)$ ทุกค่า ของ x และ $n=\pm1,\pm2,\ldots$

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงาน

3.1 กระบวนการและการพัฒนาระบบ

3.1.1 การศึกษาค้นคว้า

ปัญหาพิเศษฉบับนี้คณะผู้จัดทำได้ทำการศึกษาค้นหาความรู้ทางเกี่ยวกับฟังก์ชันเชิงตั้งฉากซึ่งประกอบด้วย Orthogonal function, Full range, Periodic function, Half range Cosine series, Half range sine series, Fourier series on $0 < x < p$ เพื่อนำข้อมูลเหล่านี้มาใช้ในการเขียนโปรแกรม

3.1.2 ขั้นตอนการดำเนินงาน

3.1.2.1 ทำการศึกษาหลักการและความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก ที่ต้องนำมาใช้ในการวางแผนงาน

3.1.2.2 ทำการศึกษาระบบและวิธีการใช้งาน Mathematica เพื่อใช้ในการคำนวณและวาดกราฟ

3.1.2.3 ทำการศึกษาระบบและวิธีการใช้งาน Visual basic 6.0 เพื่อนำมาใช้ในการพัฒนาระบบ

3.1.2.4 แสดงขั้นตอนการดำเนินงาน โดยทำการออกแบบ Flow Chart ของระบบงานและกำหนด input และ output ของ Flow Chart ในระบบ

3.2 การออกแบบระบบ

ประกอบด้วย 3 ส่วนต่อไปนี้ คือ

- ส่วนนำข้อมูลเข้า

เป็นระบบที่นำเข้าข้อมูล โดยสามารถรับค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอ็กโปเนนเชียล โพลีโนเมียล และค่าคงที่ ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรเพียงตัวเดียว คือ ค่า x

- ส่วนวิเคราะห์และประมวลผล

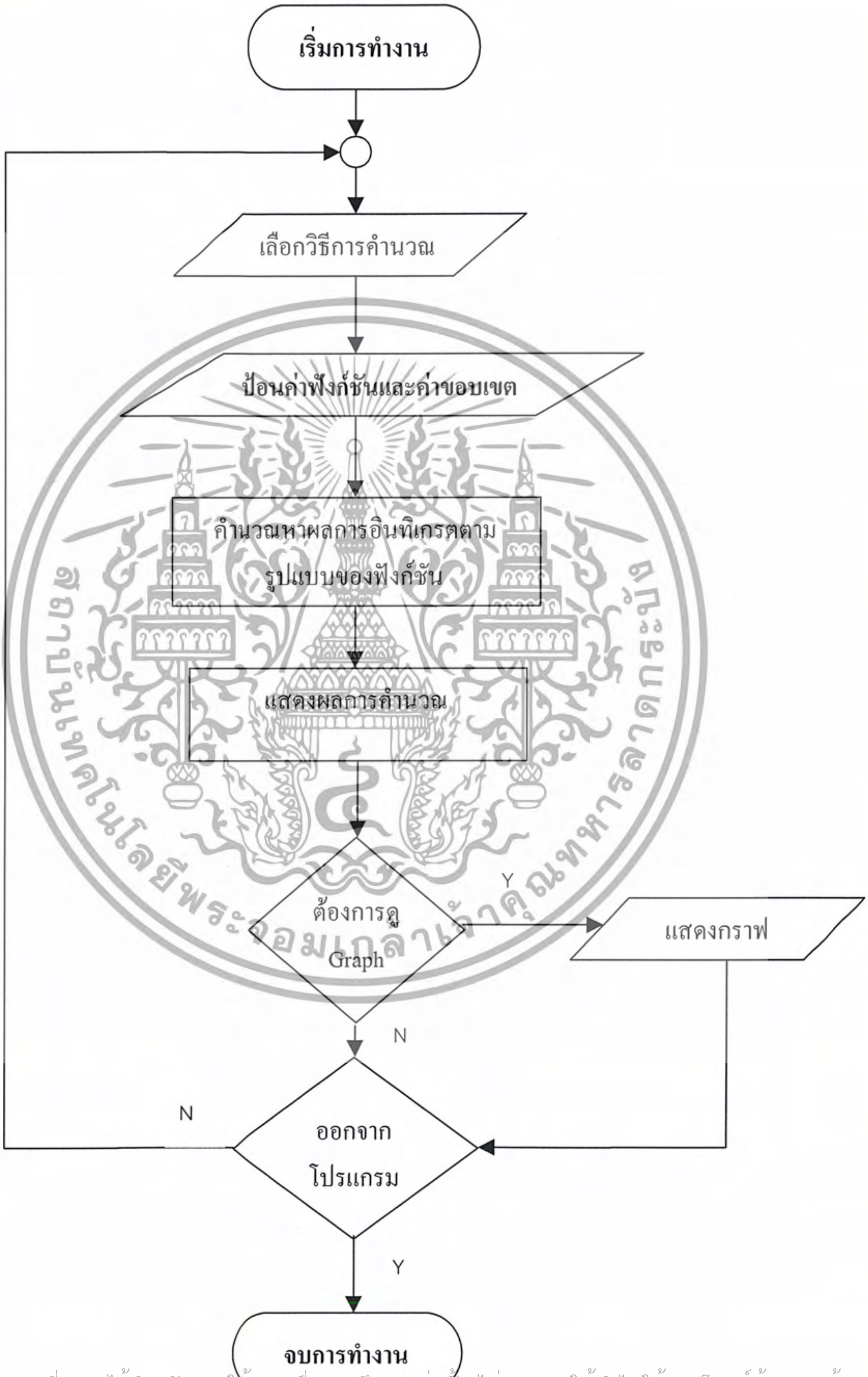
จากข้อมูลส่วนนำเข้า นำข้อมูลฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่ได้มาวิเคราะห์และนำไปคำนวณหาค่า a_0, a_n, b_n จากนั้นนำข้อมูลค่า a_0, a_n, b_n ที่ได้มาและนำไปคำนวณหาค่า Fourier series

- ส่วนแสดงผล

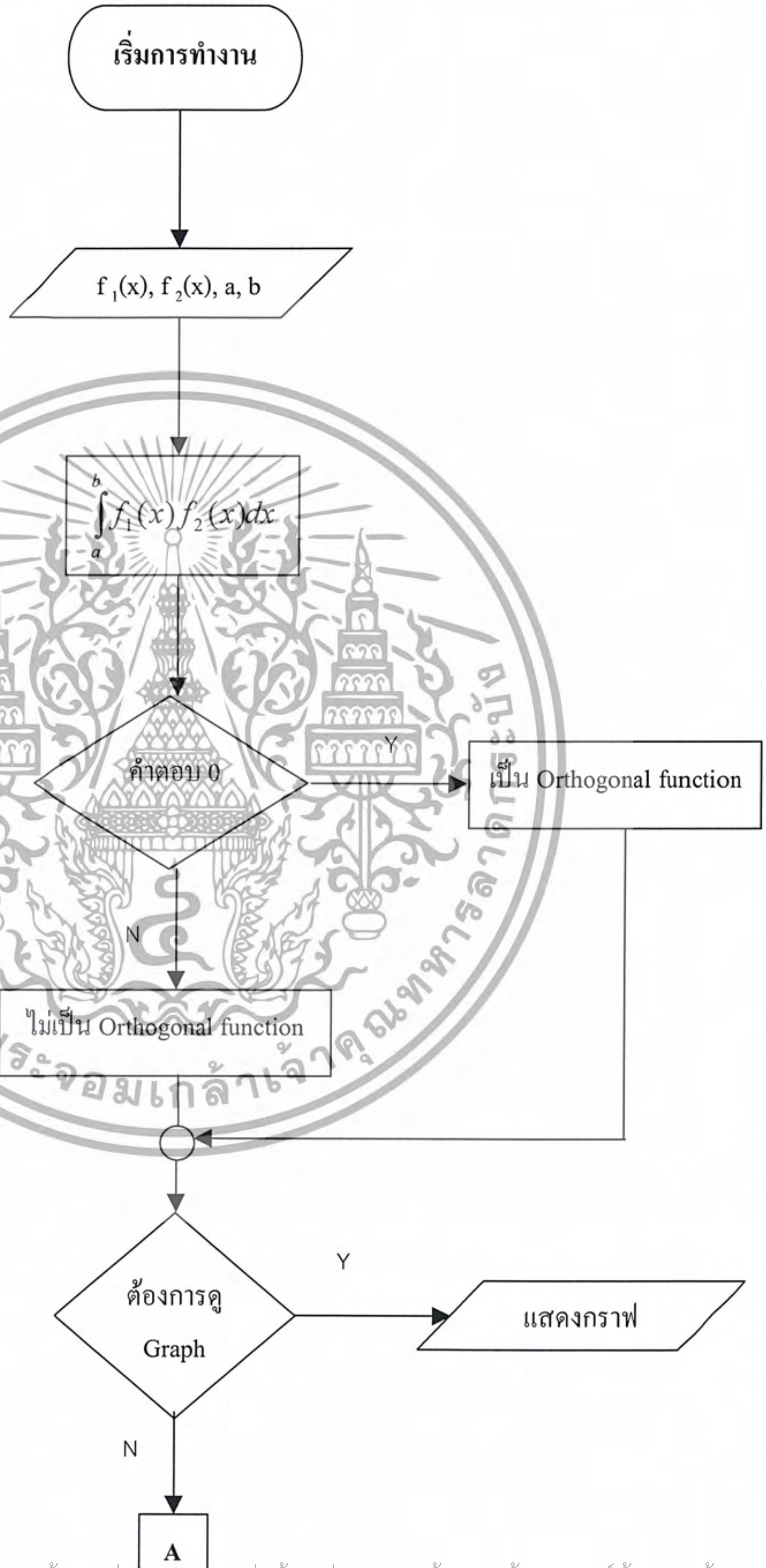
นำข้อมูลส่วนที่ได้จากการประมวลผลมาแสดงทางจอภาพ จะประกอบด้วย ค่า a_0, a_n, b_n และค่า Fourier series

3.3 ขั้นตอนการดำเนินงาน

แสดงเป็น System Flow Diagram ได้ดังนี้

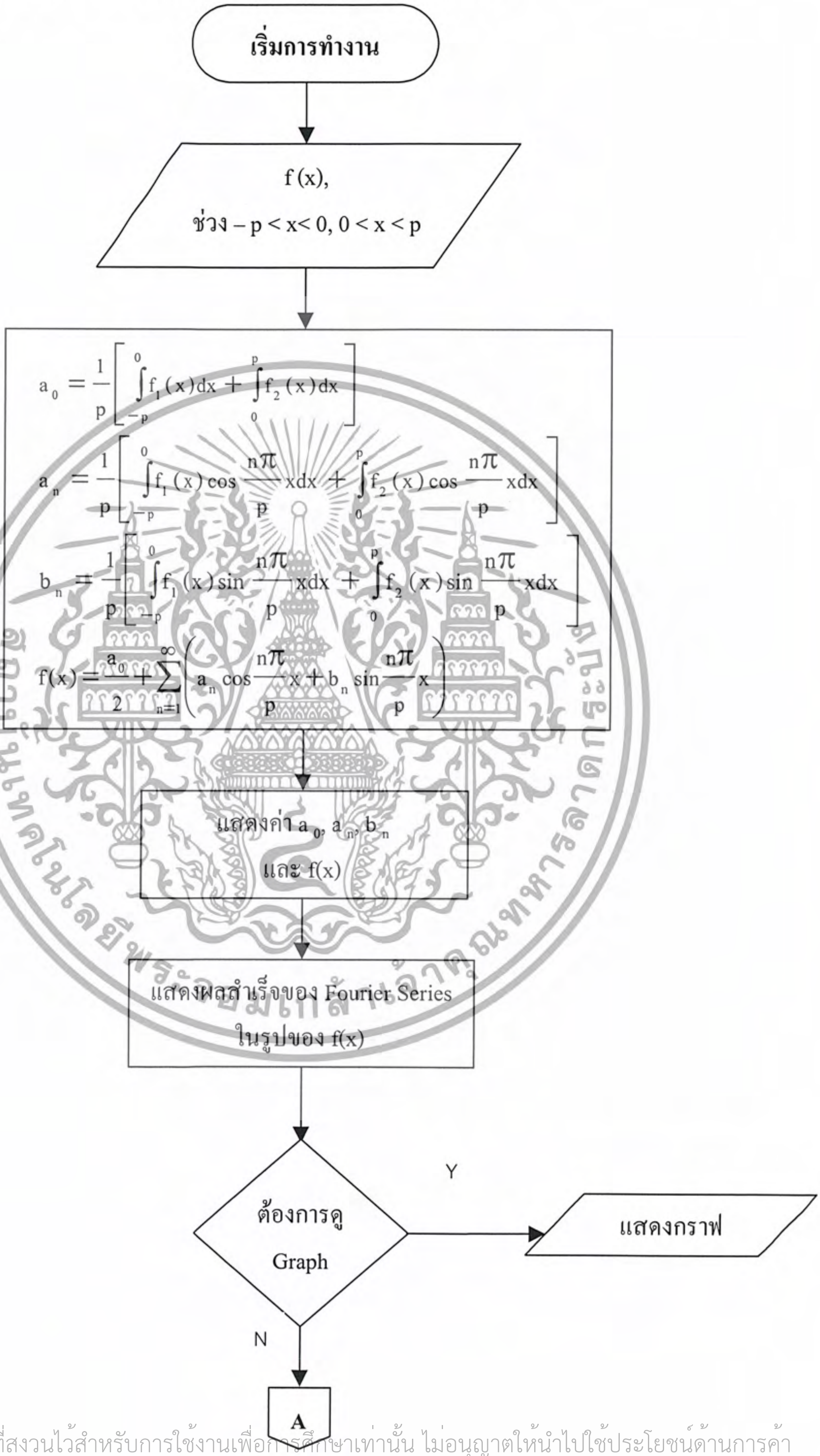


อัลกอริทึมในการหา Orthogonal function แสดงได้ดังนี้

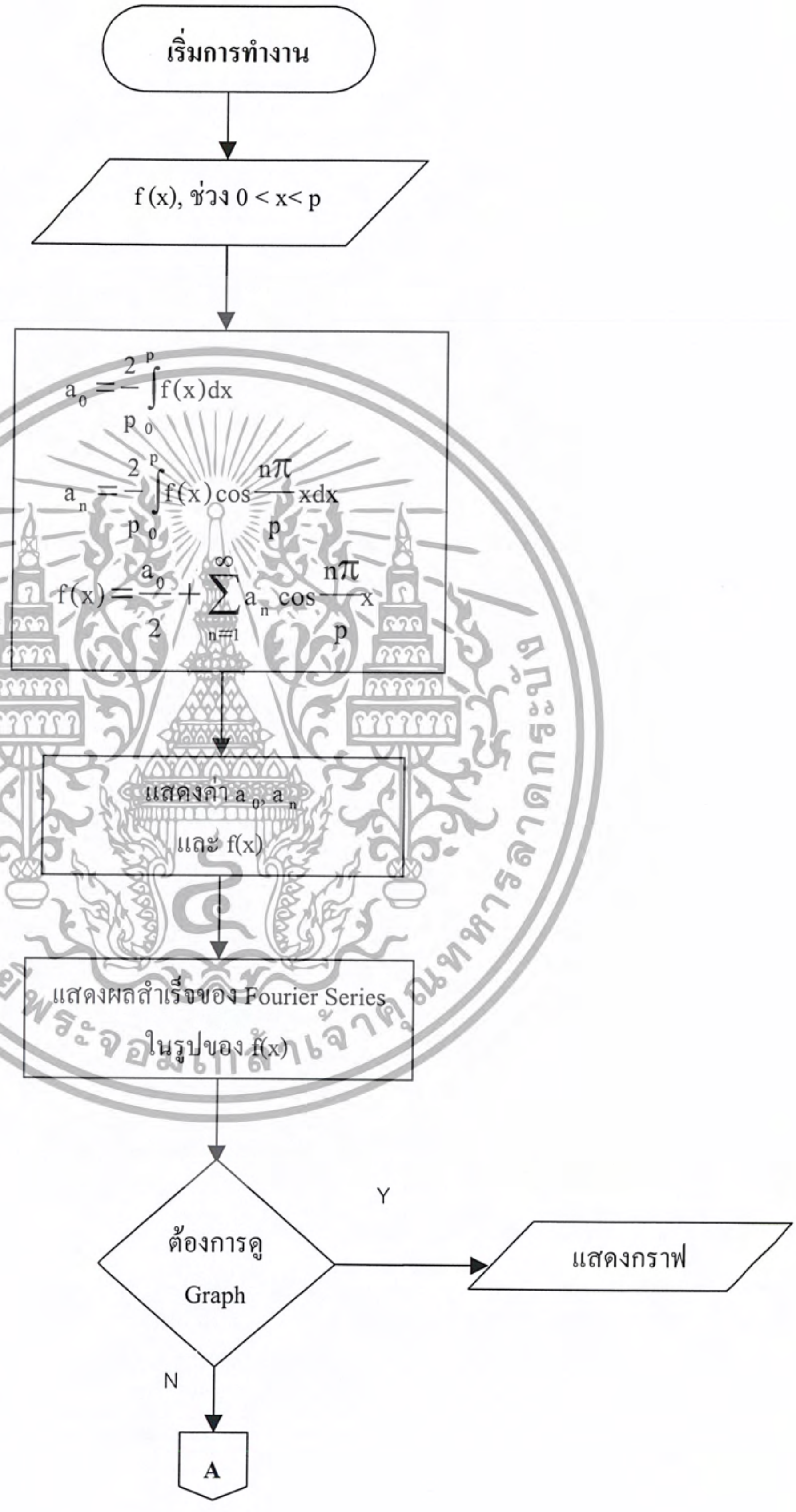


อัลกอริทึมในการคำนวณแบบ Fullrange แสดงได้ดังนี้

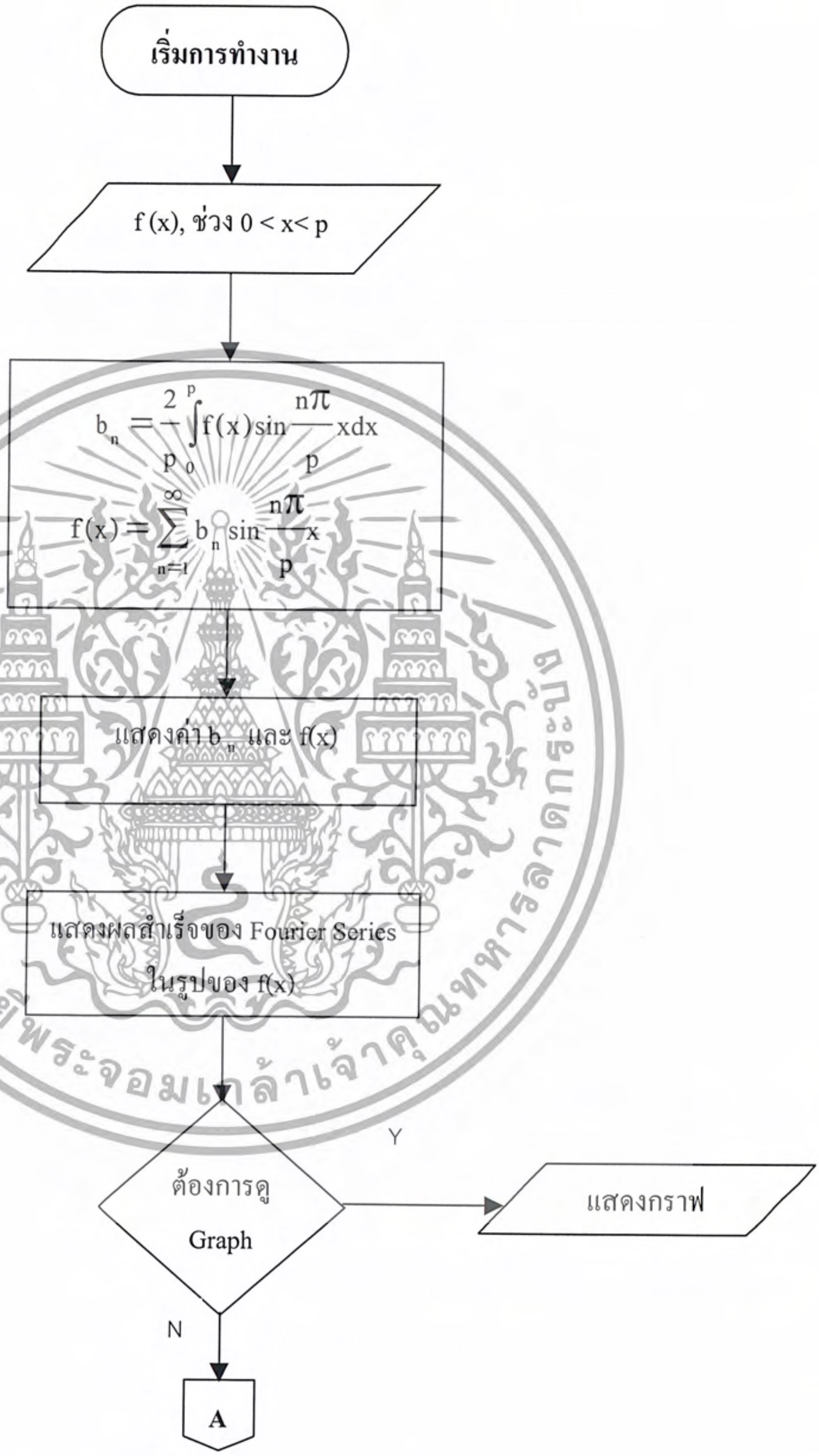
อัลกอริทึมในการคำนวณแบบ Periodic function แสดงได้ดังนี้



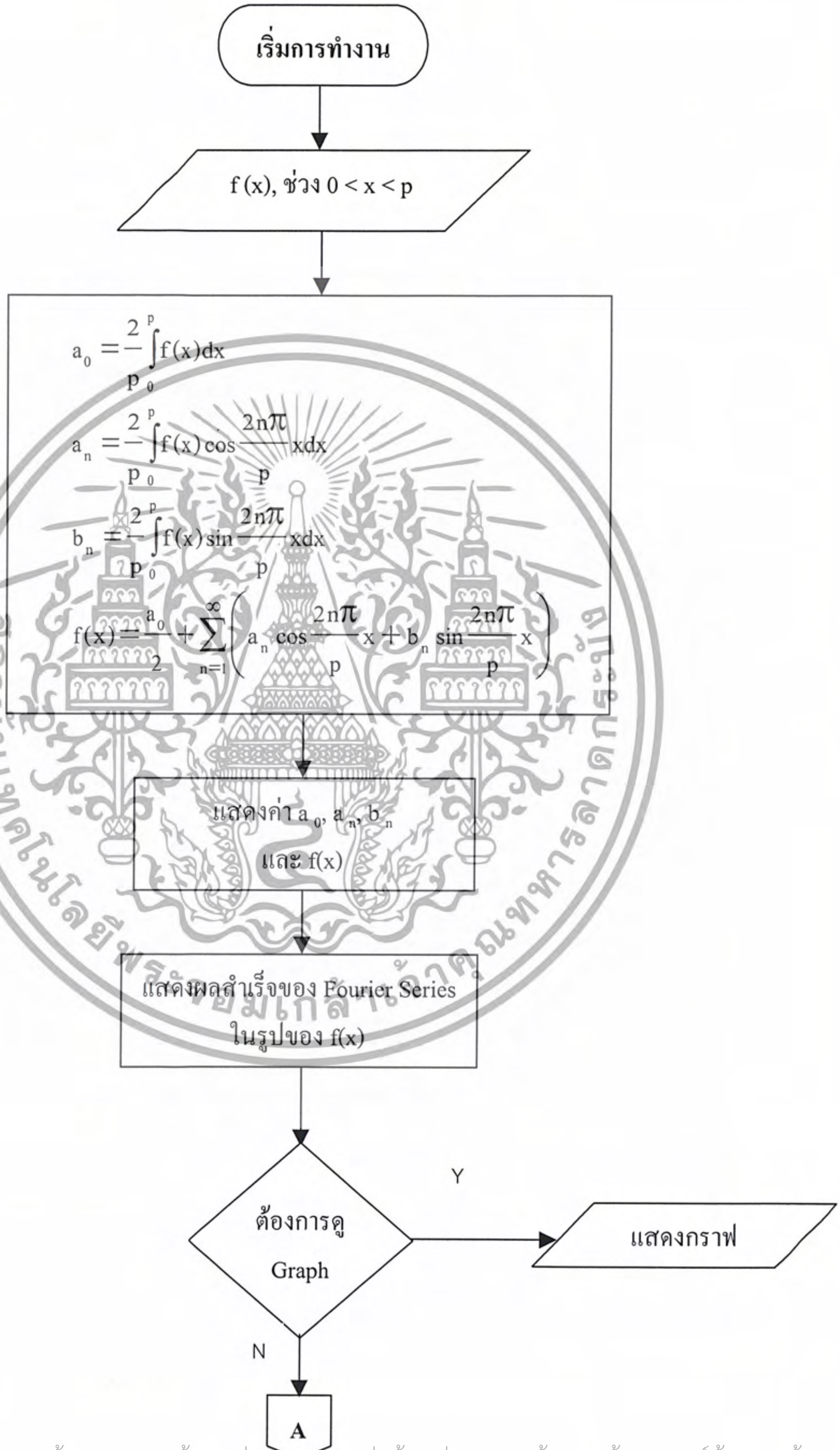
อัลกอริทึมในการคำนวณแบบ Halfrange Cosine series แสดงได้ดังนี้



อัลกอริทึมในการคำนวณแบบ Halfrange Sine series แสดงได้ดังนี้



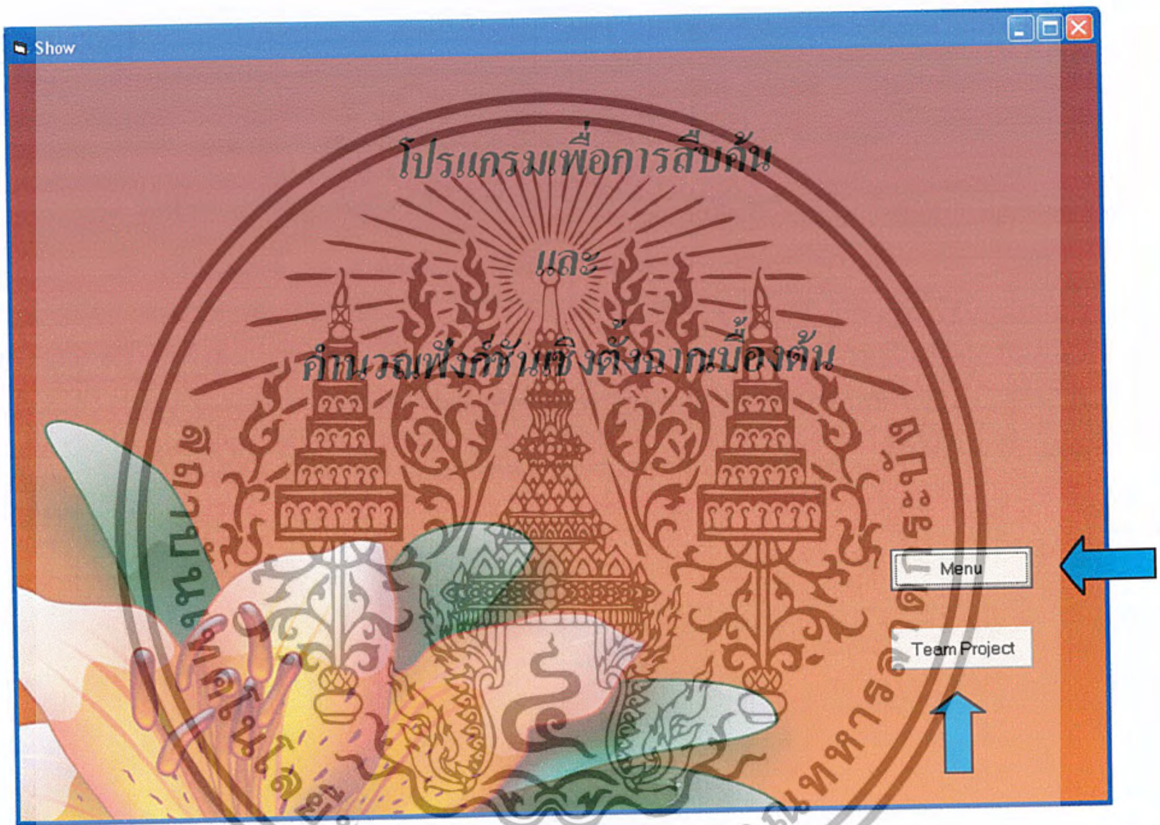
อัลกอริทึมในการคำนวณแบบ Fourier series on $0 < x < p$ แสดงได้ดังนี้



บทที่ 4
ผลการดำเนินงาน

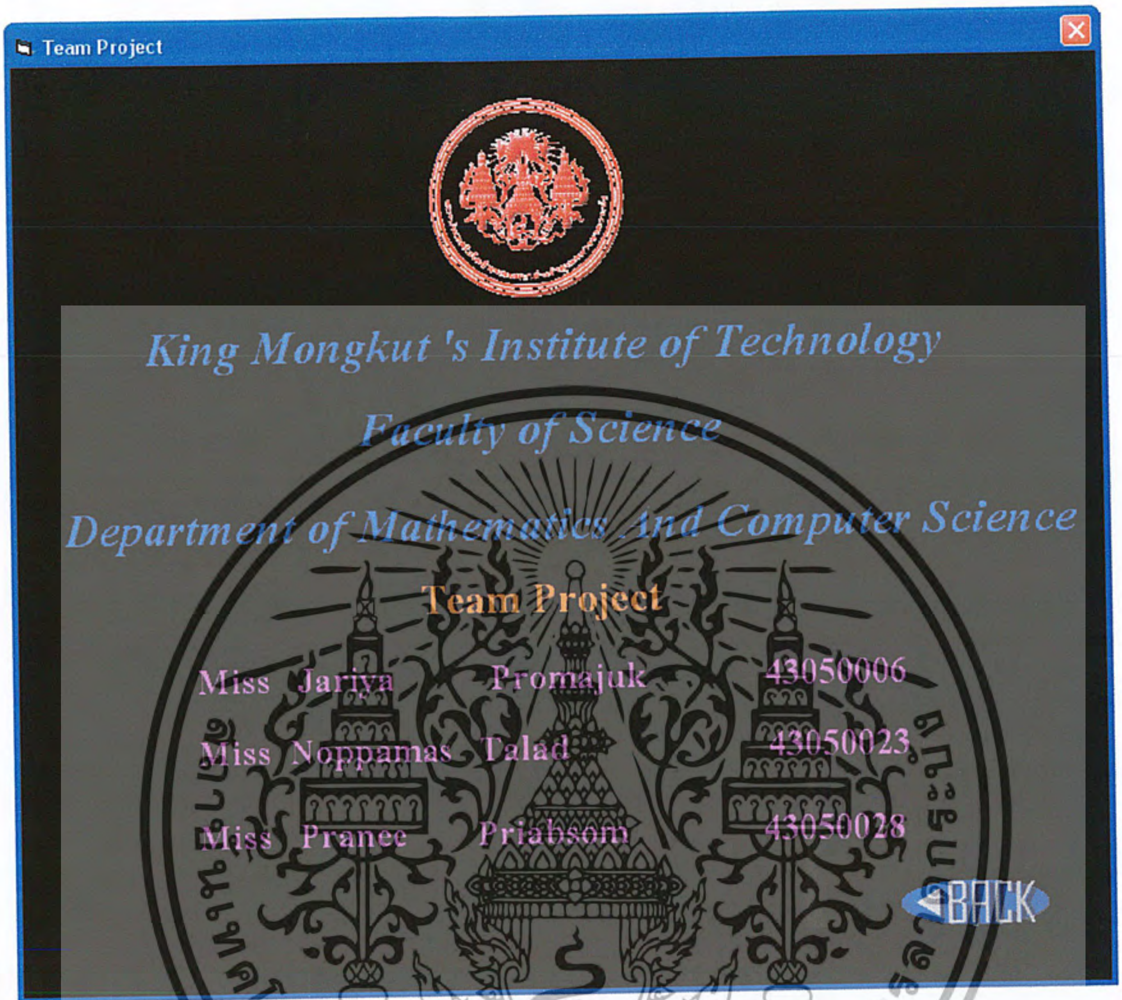
4.1 ขั้นตอนต่าง ๆ ในการทำงานของโปรแกรม

4.1.1 เมื่อทำการรันโปรแกรมจะปรากฏหน้าจอเริ่มการทำงานดังนี้



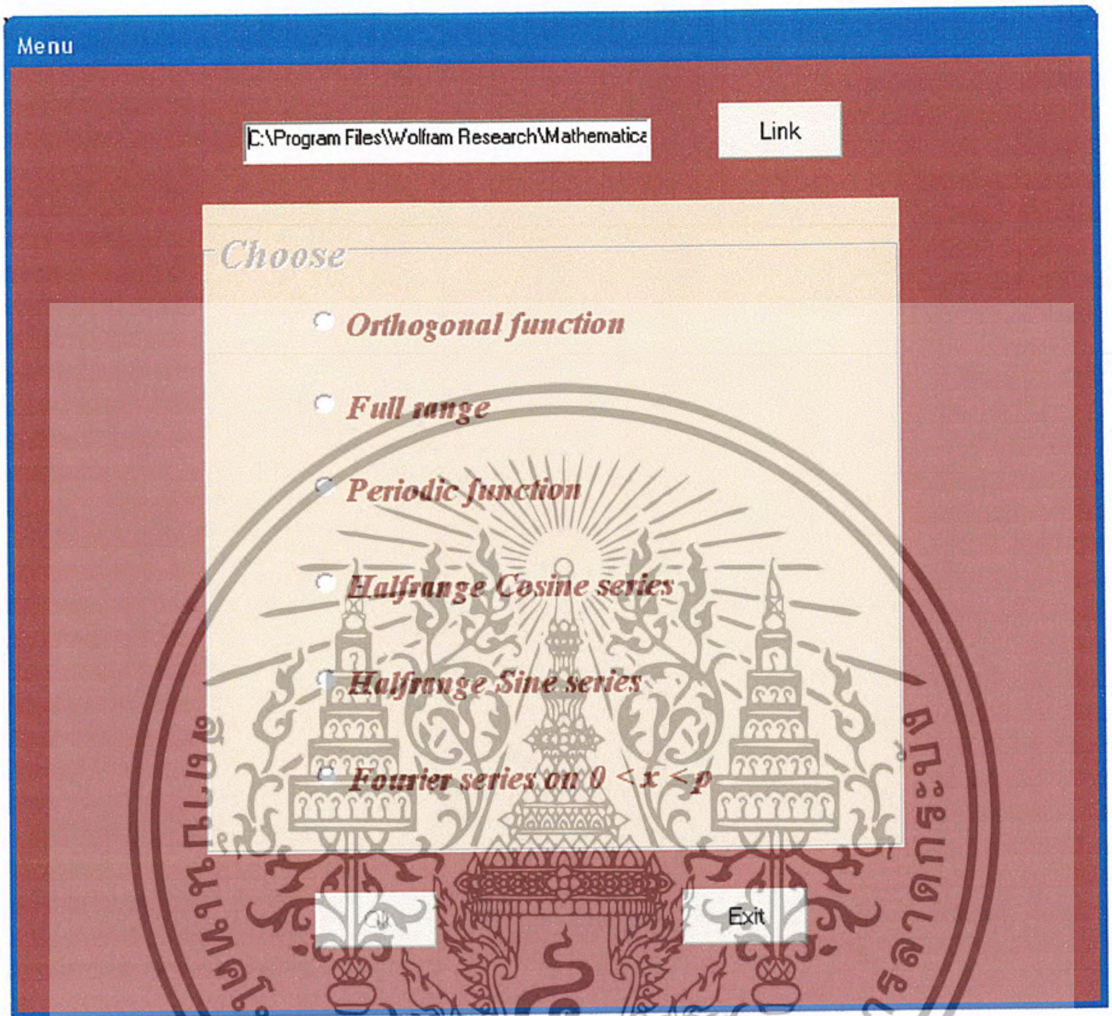
รูปที่ 4.1 แสดงหน้าจอเริ่มการทำงาน

เมื่อกดปุ่ม Team Project จะปรากฏหน้าจอ Team Project ดังนี้



รูปที่ 4.2 หน้าจอแสดงรายชื่อผู้จัดทำ

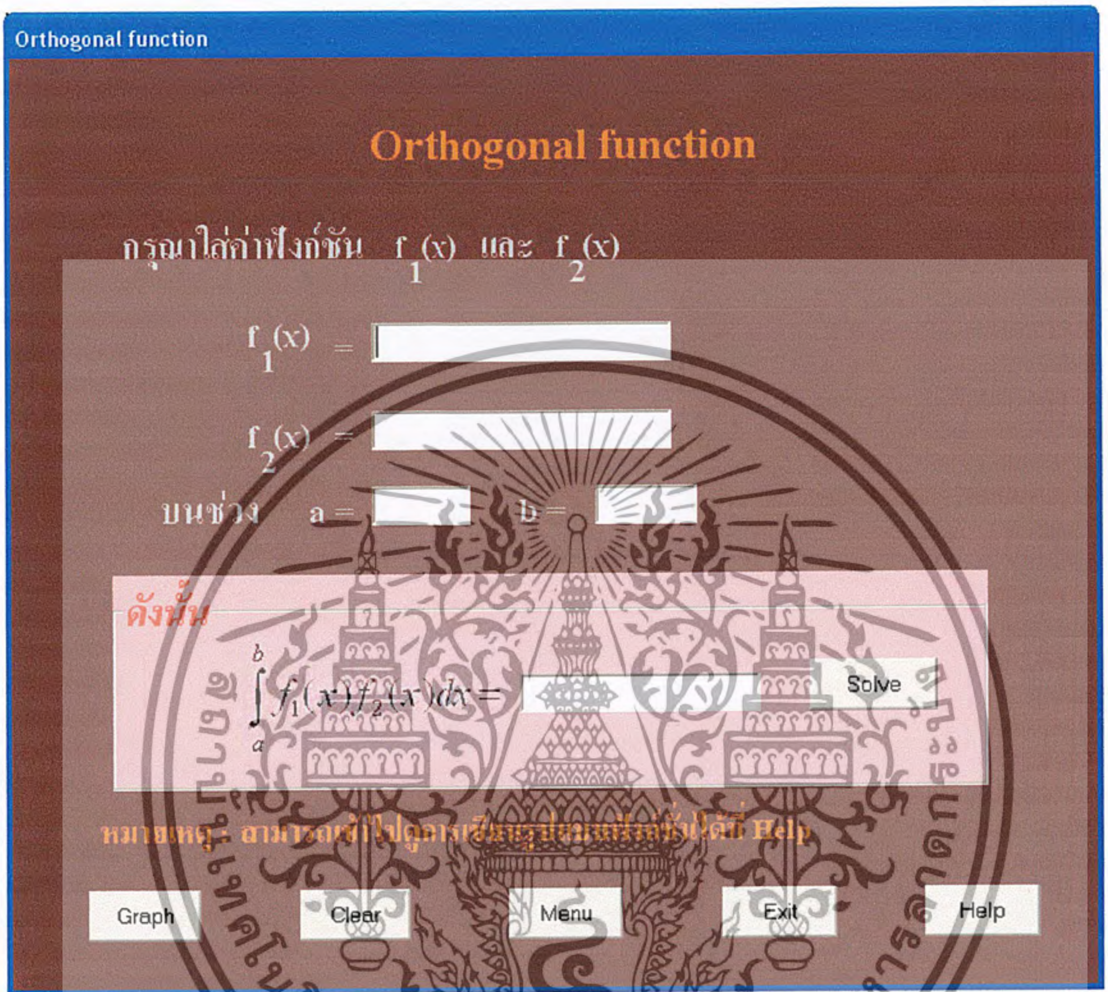
เมื่อกดปุ่ม Menu จะปรากฎหน้าจอหลักของโปรแกรมดังนี้



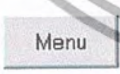
รูปที่ 4.3 แสดงหน้าจอหลัก

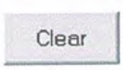
4.1.2 การเชื่อมต่อกับโปรแกรม Mathematica ซึ่งจากรูปที่ 4.3 โดยเลือกกดปุ่ม 

4.1.3 เมื่อเลือกรูปแบบการคำนวณ Orthogonal function จะปรากฏหน้าจอดังนี้

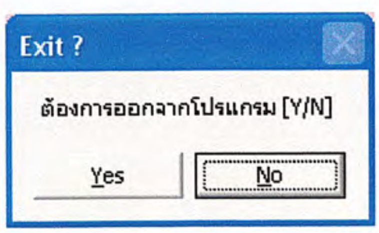


รูปที่ 4.4 แสดงหน้าจอใส่ค่า Input Orthogonal function

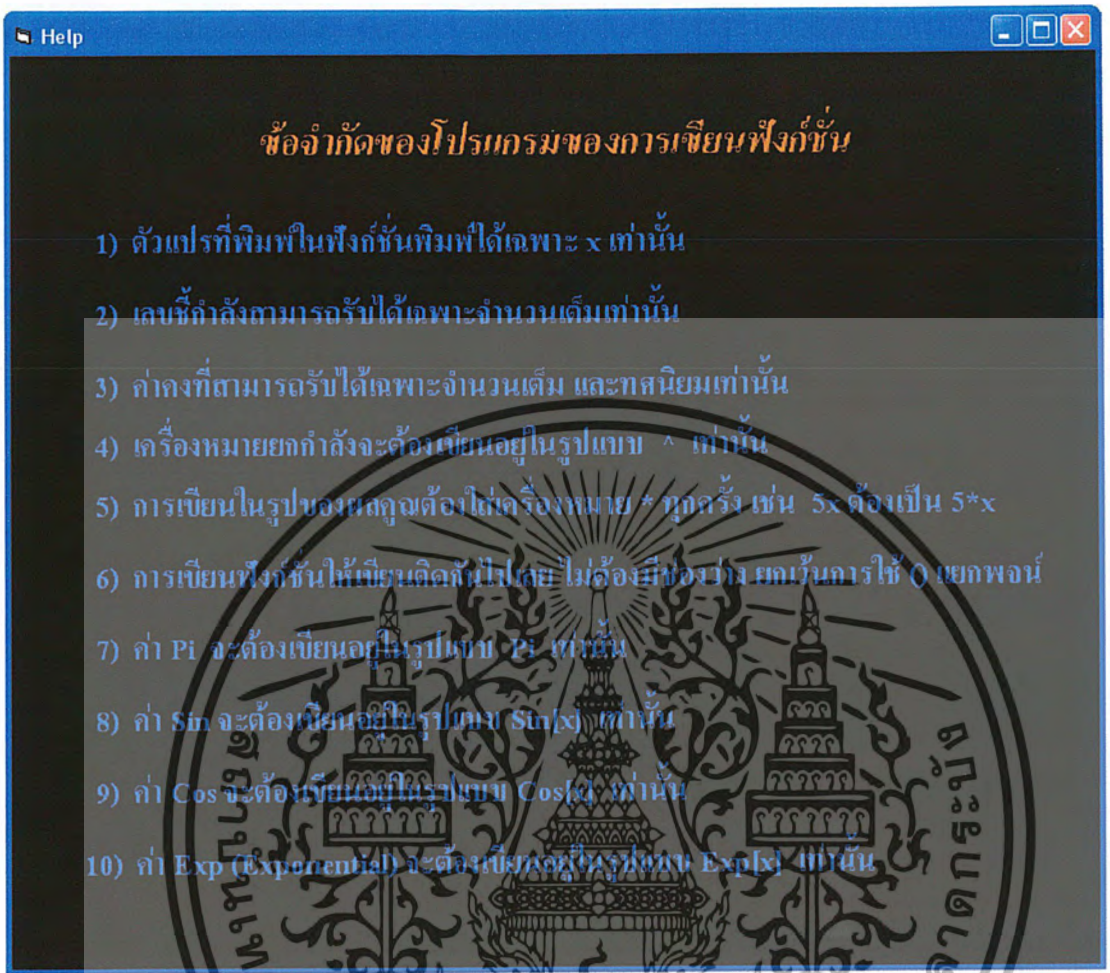
เมื่อกดปุ่ม  จะกลับไปยังหน้าจอหลักของโปรแกรมนั่นคือ รูปที่ 4.3

เมื่อกดปุ่ม  จะทำการ Clear ค่าในช่อง Input ทั้งหมด

เมื่อกดปุ่ม  จะปรากฏ

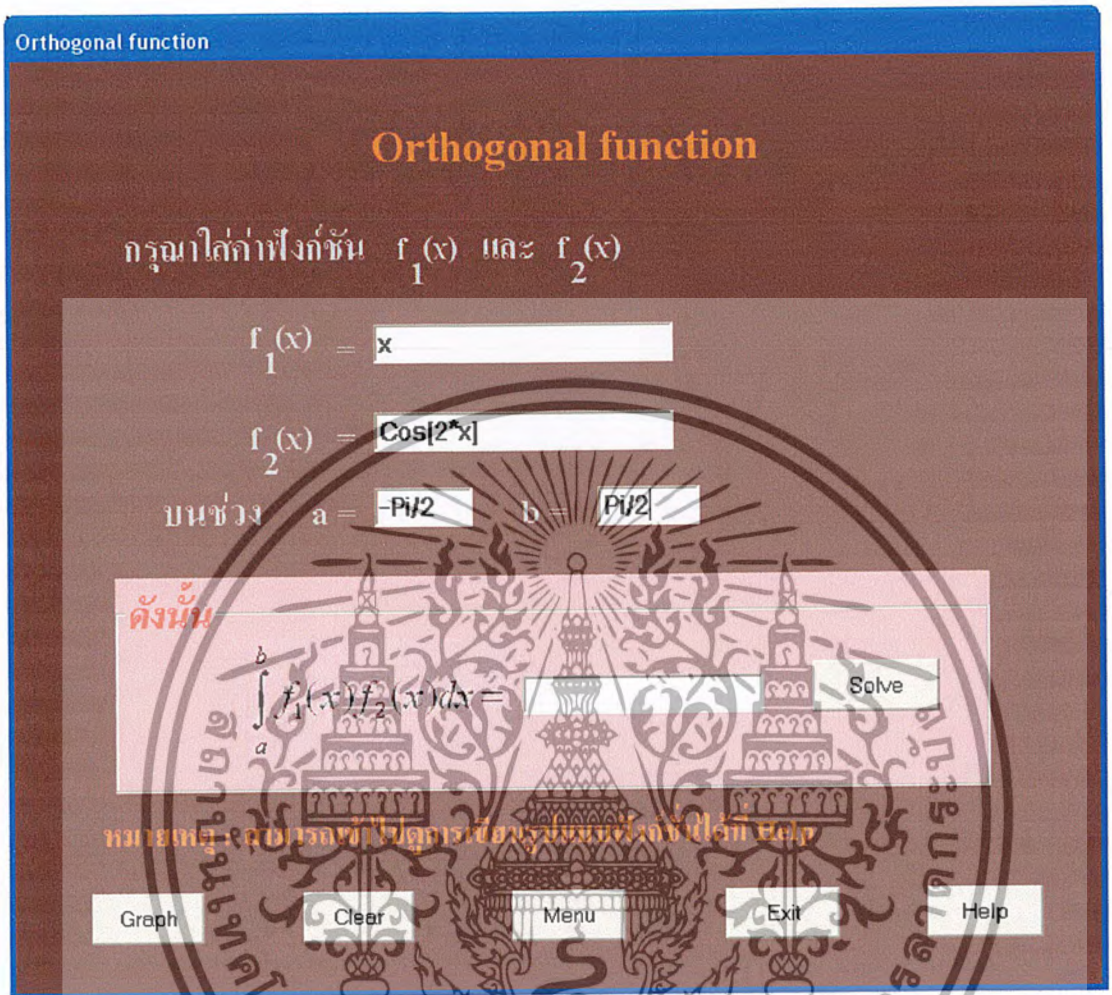


เมื่อกดปุ่ม Help จะปรากฏหน้าจอดังนี้



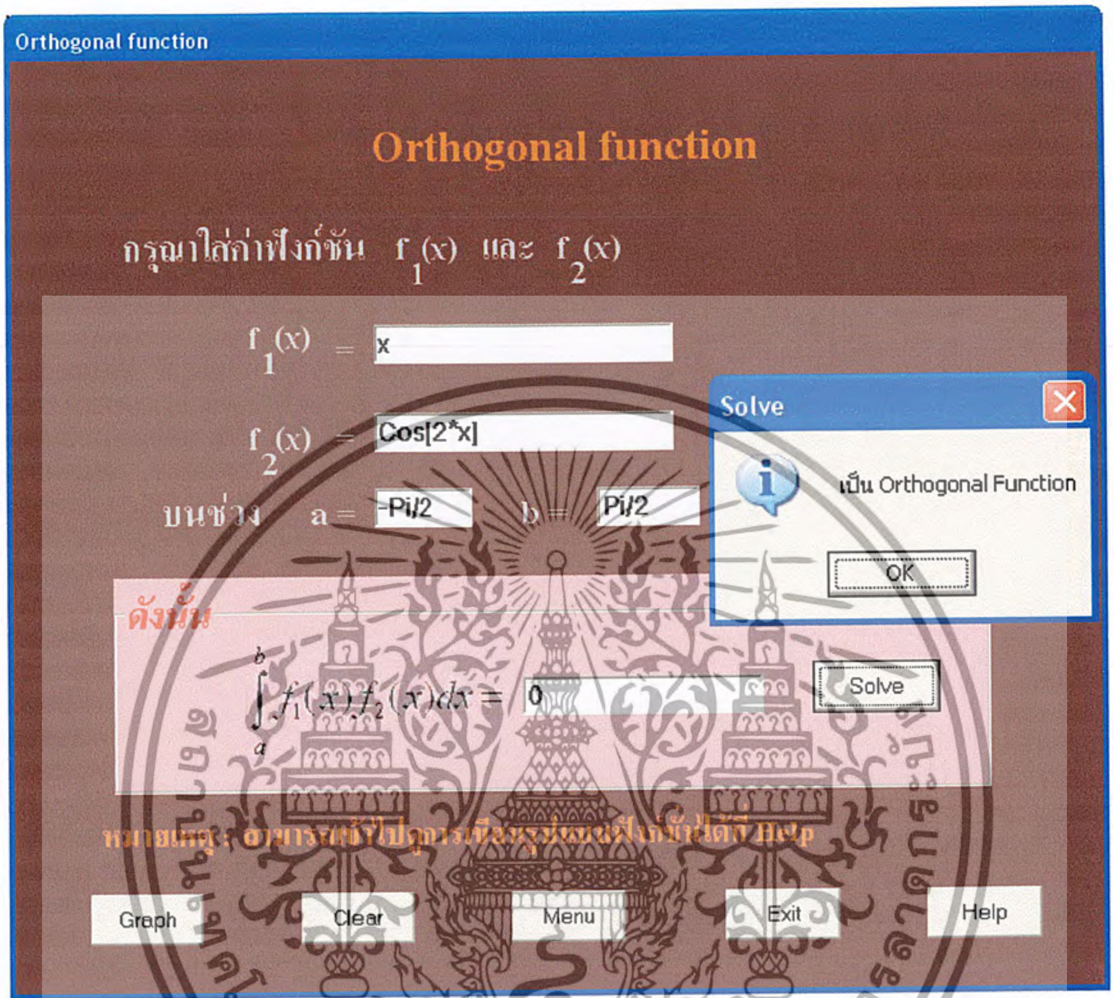
รูปที่ 4.5 แสดงหน้าจอข้อจำกัดของโปรแกรม

ในการป้อนค่า Input สามารถเข้าไปดูการเขียนรูปแบบฟังก์ชันได้ที่ Help



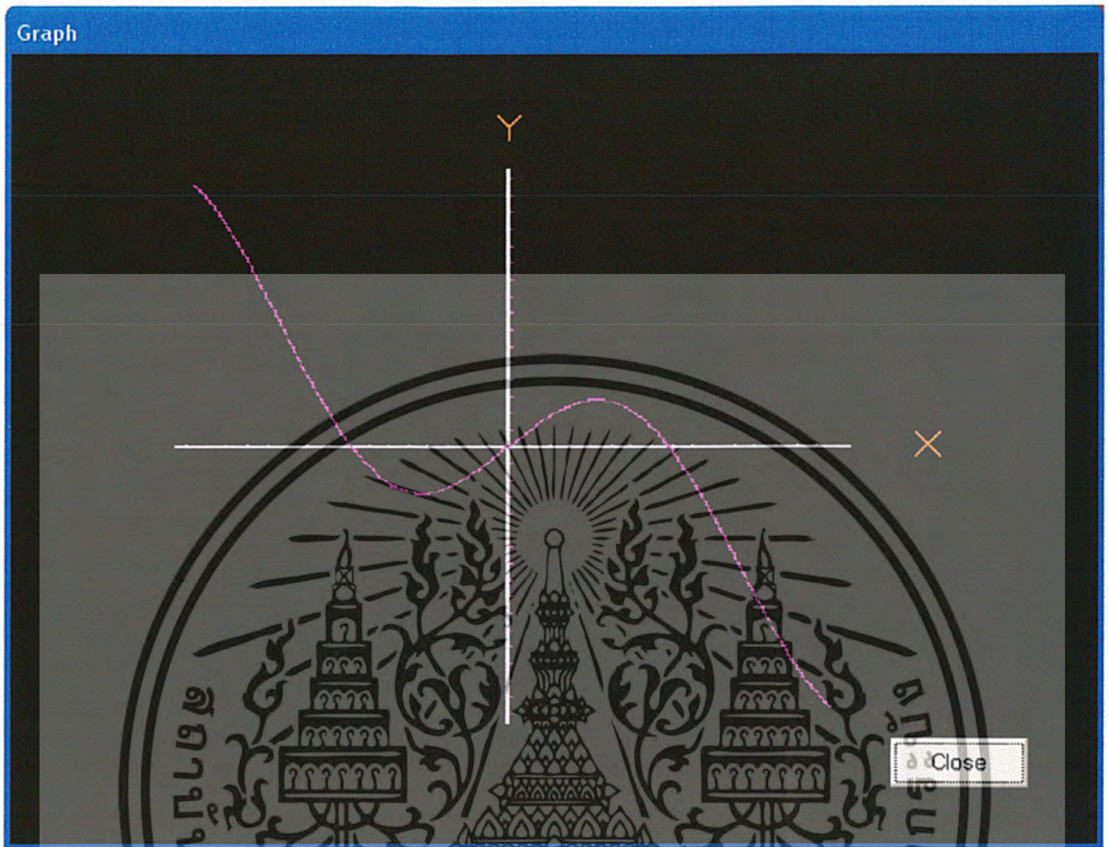
รูปที่ 4.6 แสดงหน้าจอการป้อนค่าฟังก์ชัน

แล้วกดปุ่ม Solve หากคำตอบเป็นศูนย์ จะปรากฏ Message box ว่าเป็น Orthogonal function



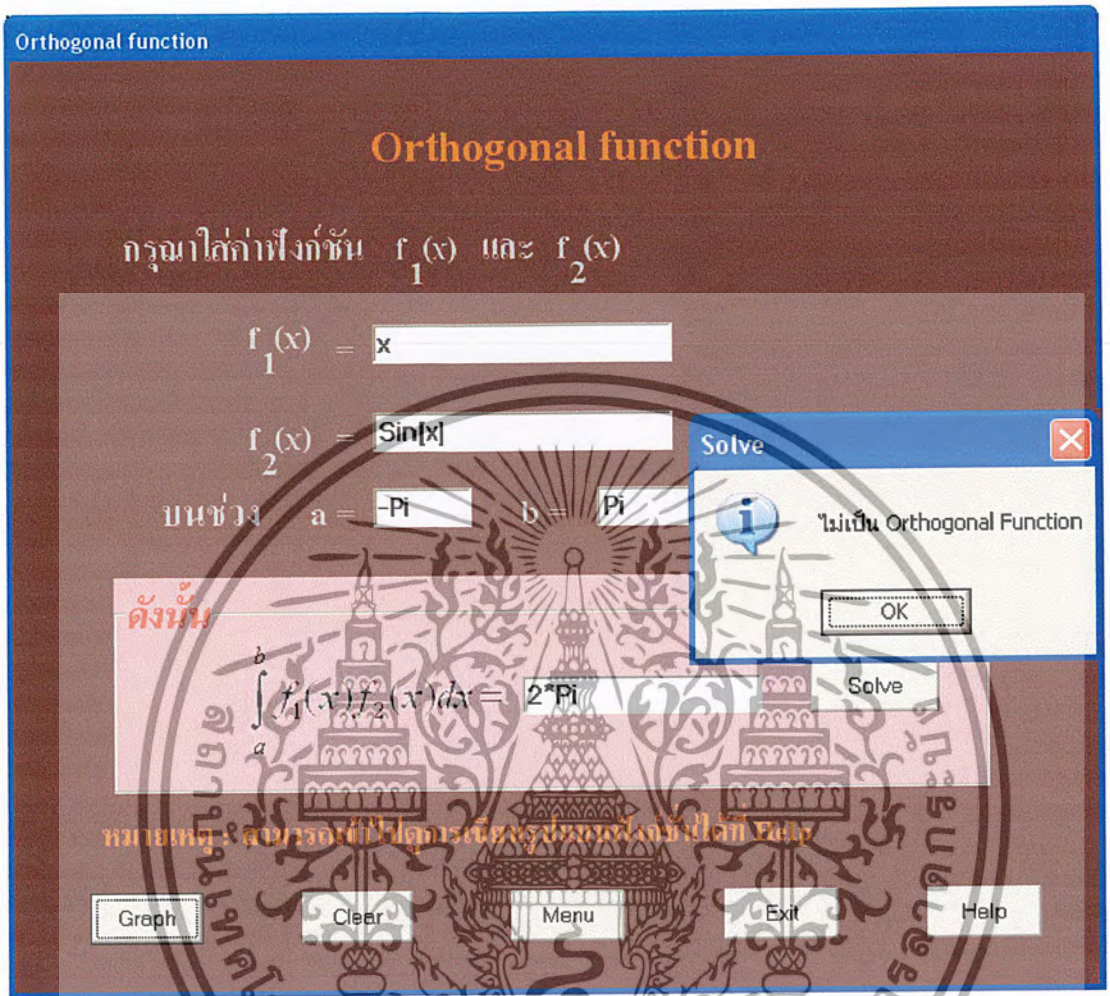
รูปที่ 4.7 แสดงหน้าจอผลเฉลยเมื่อฟังก์ชัน $f_1(x)$ คูณกับฟังก์ชัน $f_2(x)$ มีค่าเท่ากับ ศูนย์

เมื่อกดปุ่ม Graph จะแสดงกราฟดังนี้



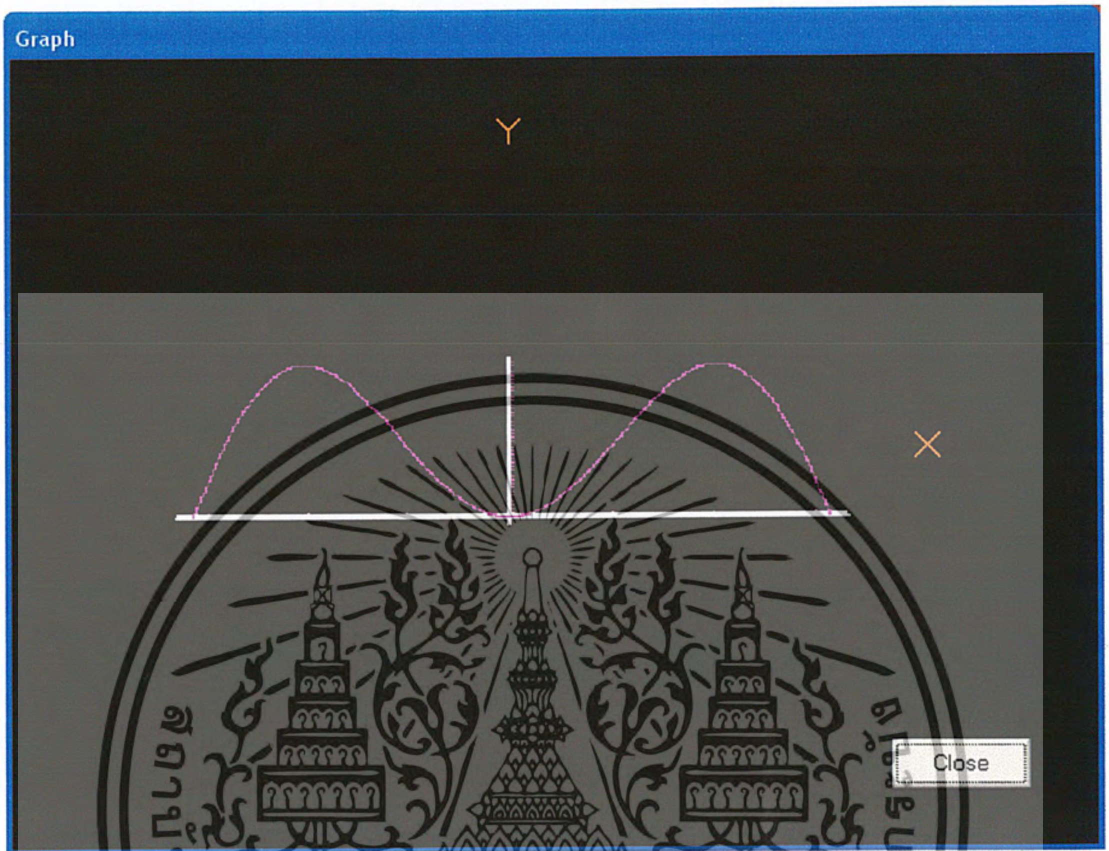
รูปที่ 4.8 หน้าจอแสดงกราฟเมื่อฟังก์ชัน $f_1(x)$ คูณกับฟังก์ชัน $f_2(x)$

หากคำตอบไม่เป็นศูนย์ จะปรากฏ Message box ว่าไม่เป็น Orthogonal function



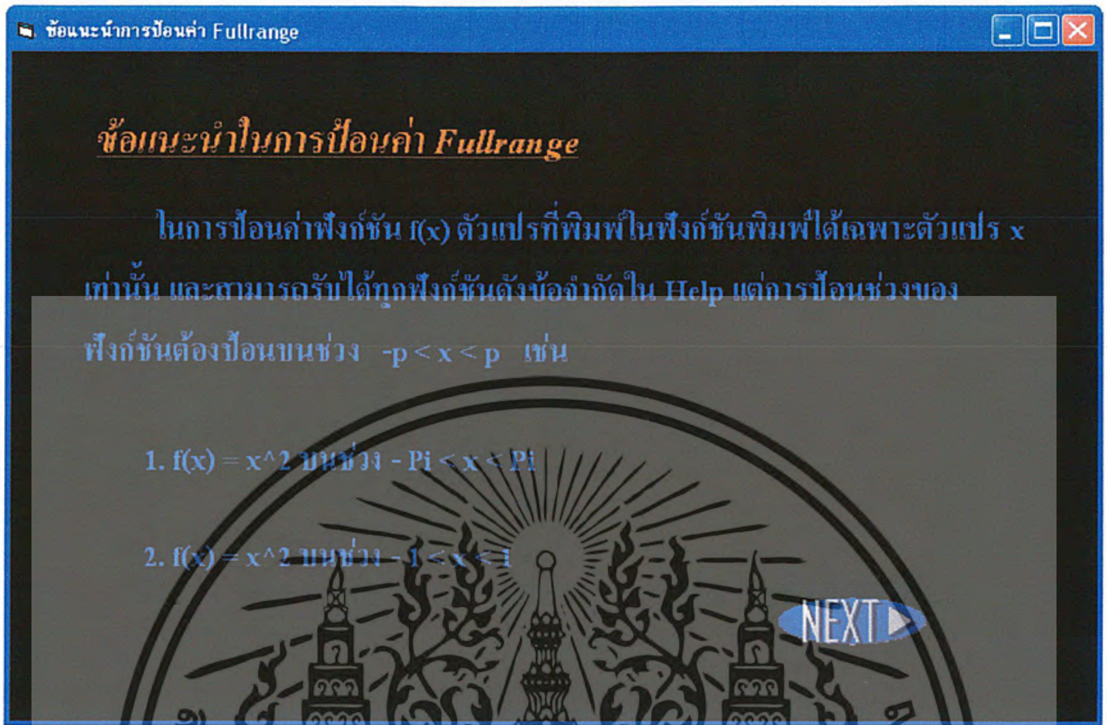
รูปที่ 4.9 **หน้าจอแสดงผลเฉลยเมื่อฟังก์ชัน $f_1(x)$ คูณกับฟังก์ชัน $f_2(x)$ มีค่าไม่เท่ากับ ศูนย์**

เมื่อกดปุ่ม Graph จะแสดงกราฟดังนี้



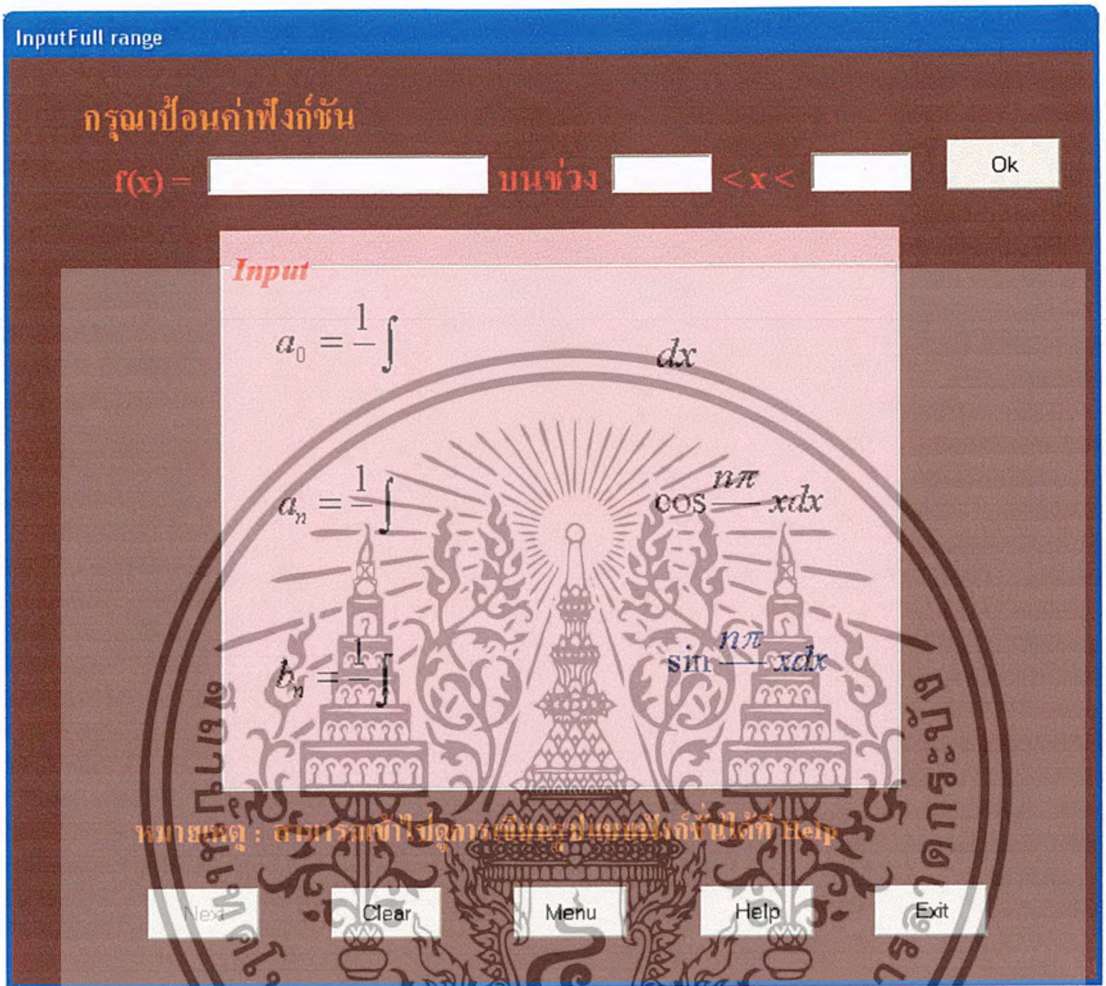
รูปที่ 4.10 หน้าจอแสดงกราฟเมื่อฟังก์ชัน $f_1(x)$ คูณกับฟังก์ชัน $f_2(x)$

4.1.4 เมื่อเลือกรูปแบบการคำนวณ Fullrange จะปรากฏหน้าจอข้อแนะนำการป้อนค่าดังนี้



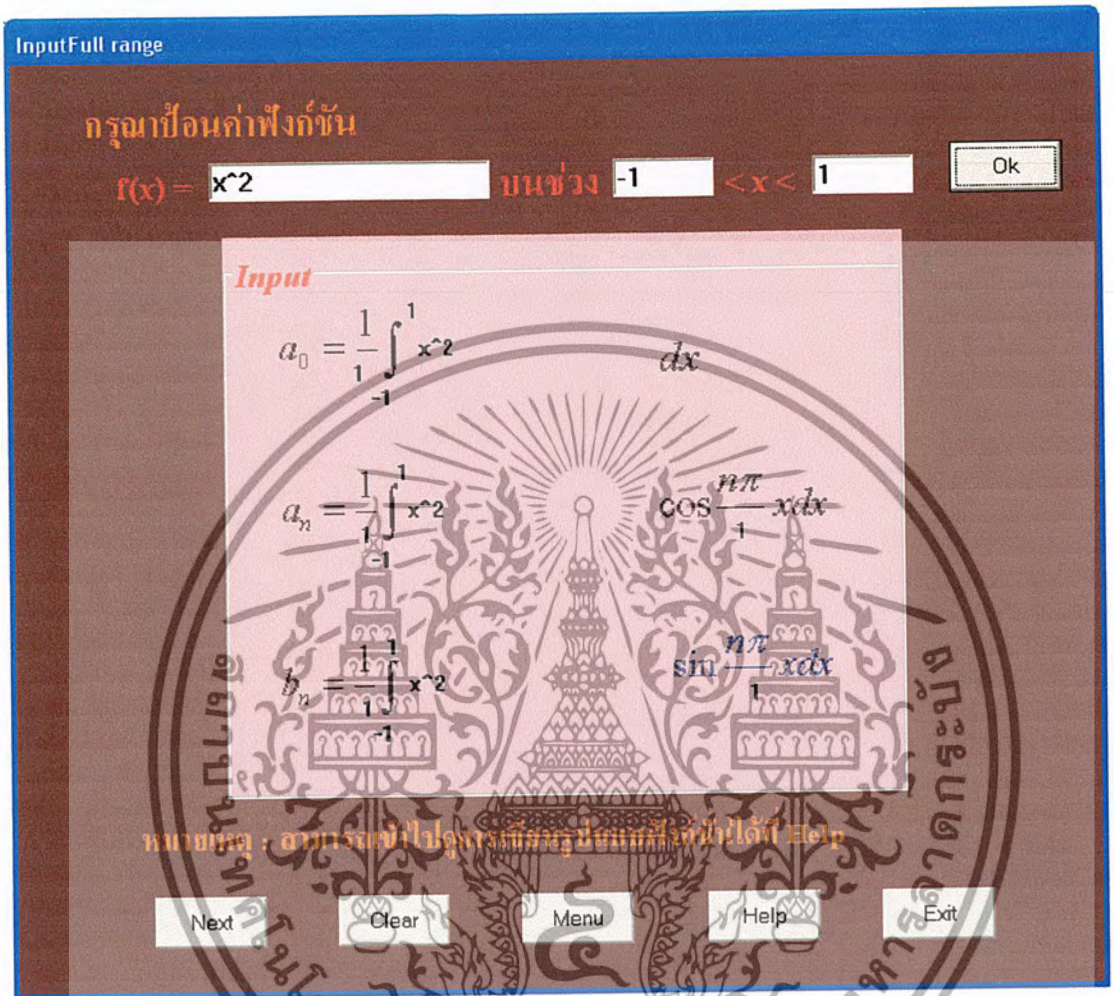
รูปที่ 4.11 แสดงหน้าจอข้อแนะนำในการป้อนค่า Fullrange

เมื่อกดปุ่ม  จะปรากฏหน้าจอ Input Fullrange ดังนี้



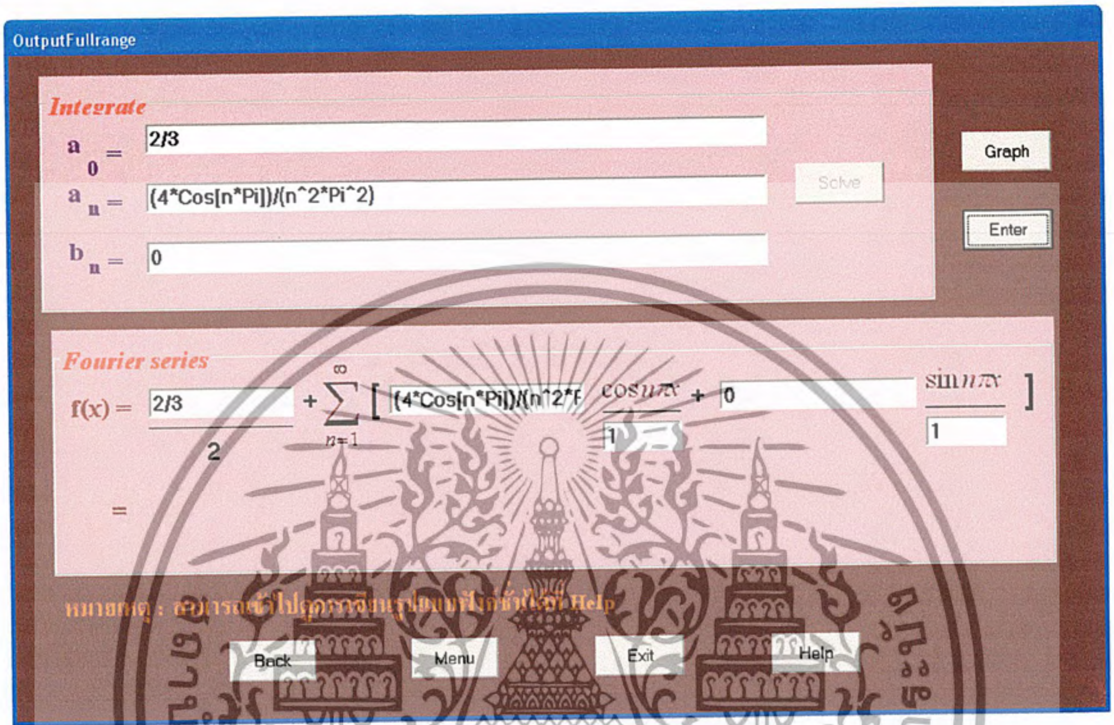
รูปที่ 4.12 แสดงหน้าจอ Input Fullrange

วิธีการป้อนค่า Input Fullrange มีวิธีการคล้ายกับแบบ Orthogonal function และเมื่อป้อนค่าเสร็จแล้ว กดปุ่ม Ok จะปรากฏดังนี้



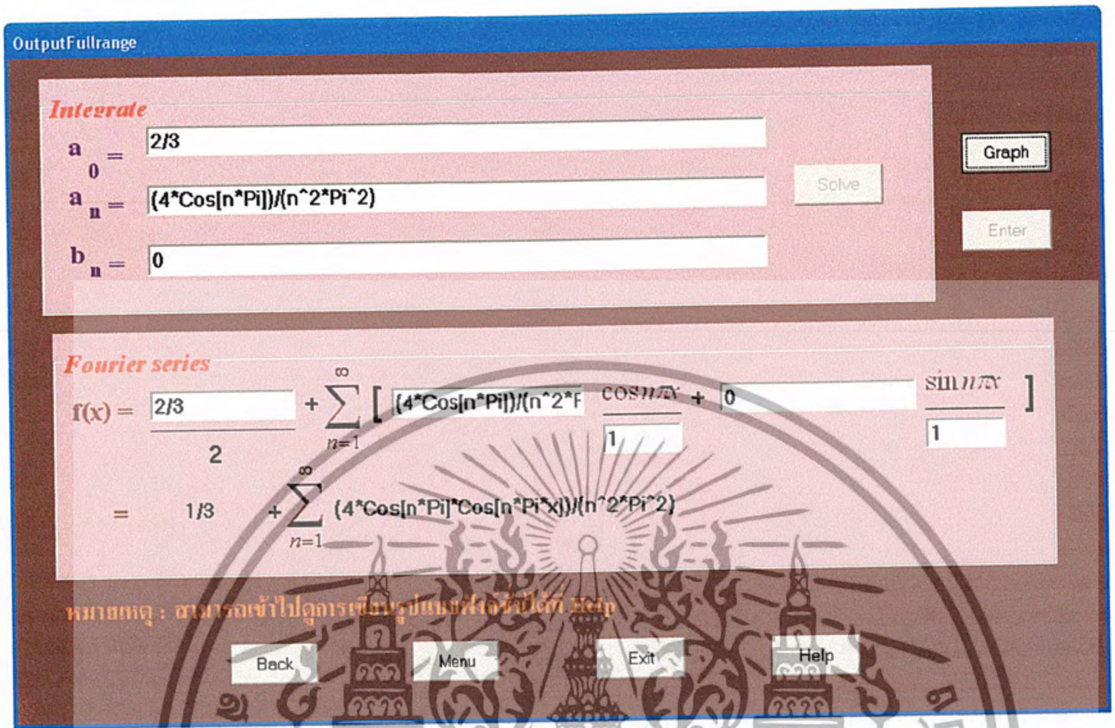
รูปที่ 4.13 หน้าจอแสดง Input Fullrange หลังจากป้อนค่าเสร็จแล้ว

เมื่อใส่ฟังก์ชันถูกต้องแล้วกดปุ่ม Next จะปรากฏหน้าจอ OutputFullrange แล้วกดปุ่ม Solve จะแสดงผลเฉลยครั้งแรกดังนี้



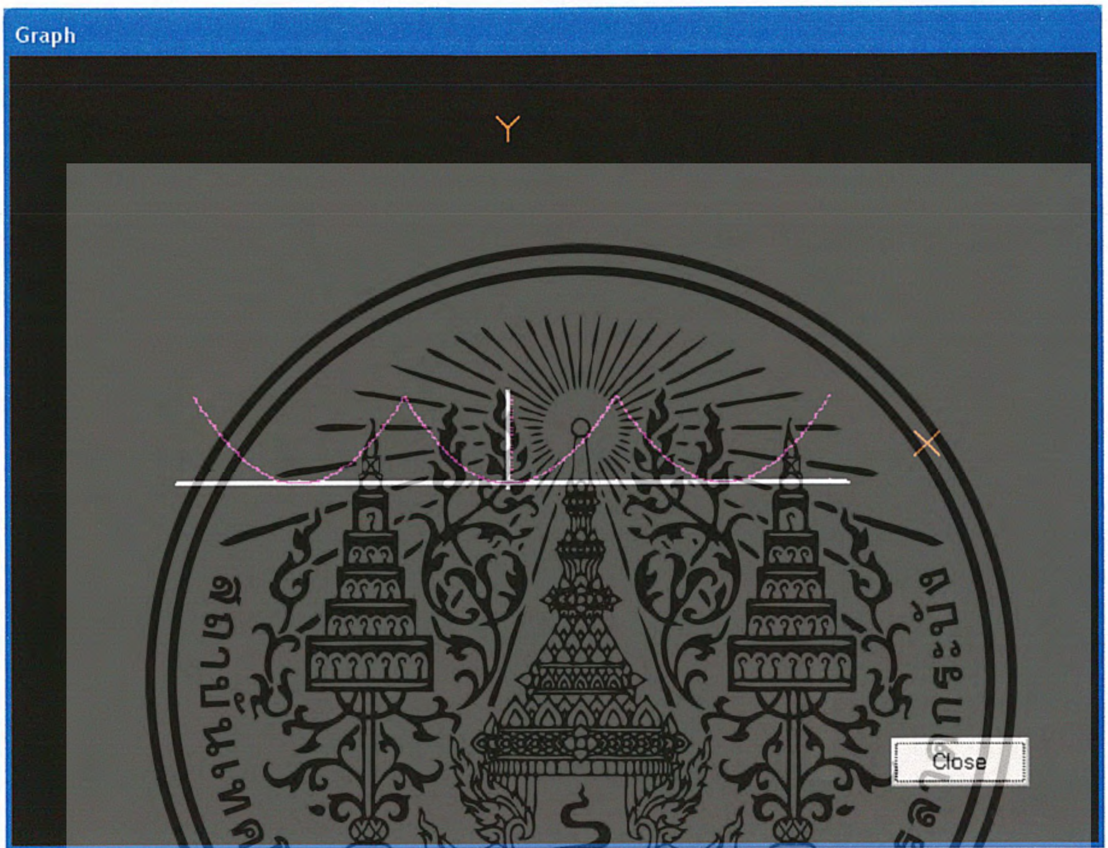
รูปที่ 4.14 หน้าจอแสดงผลเฉลย Output Fullrange ครั้งแรก

จากนั้นกดปุ่ม Enter จะปรากฏผลเฉลยที่สมบูรณ์ดังนี้



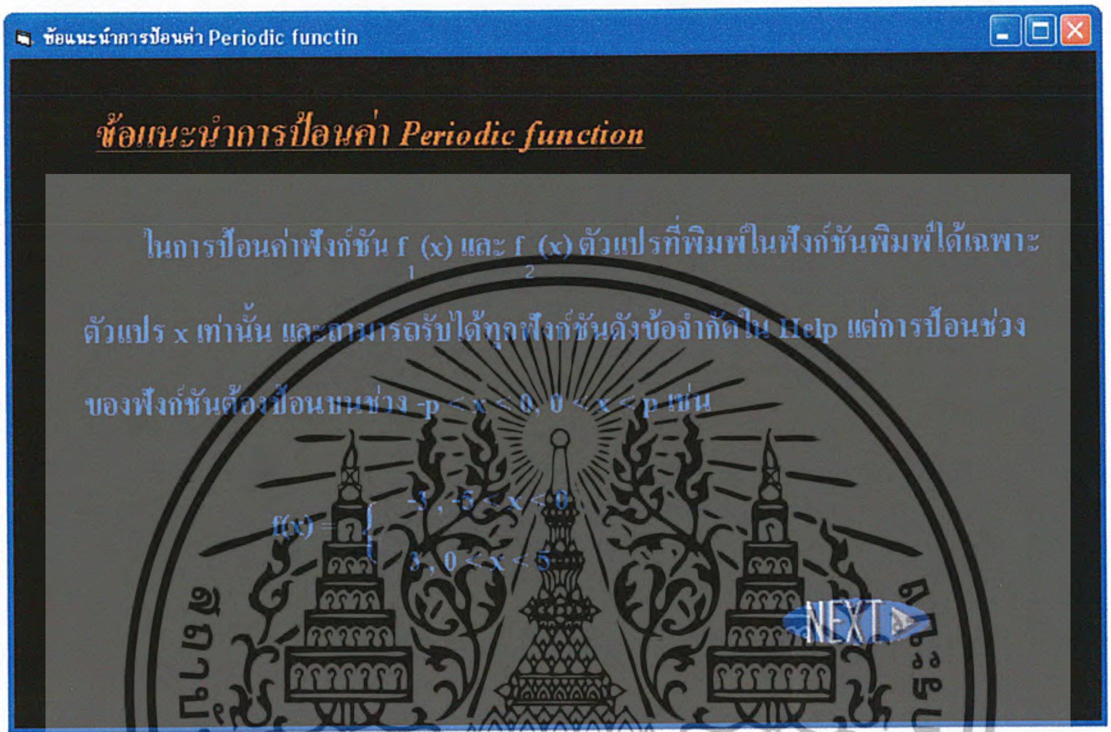
รูปที่ 4.15 หน้าจอแสดงผลเฉลย Output Fullrange ที่สมบูรณ์

จากนั้นกดปุ่ม Graph จะแสดงรูปกราฟดังนี้



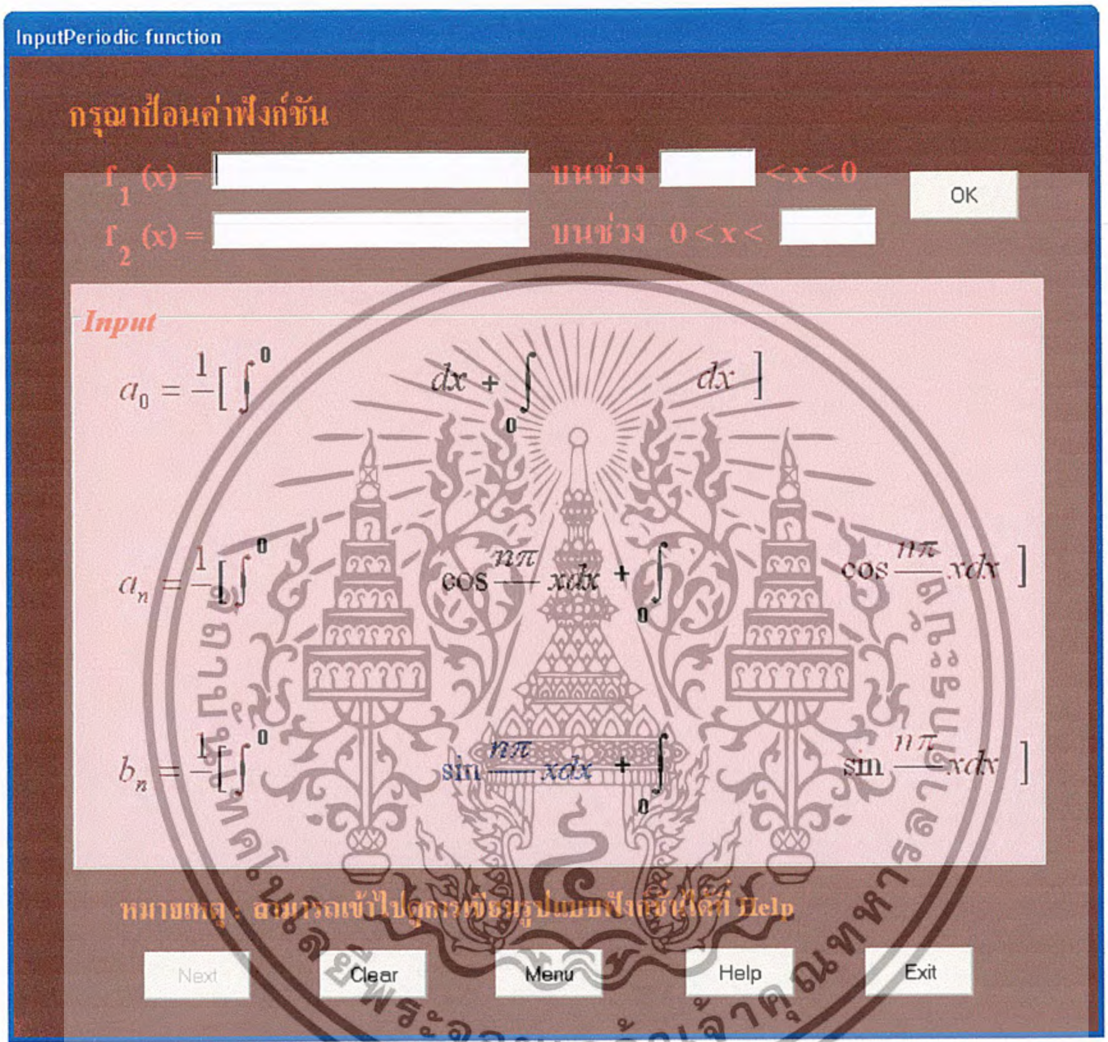
รูปที่ 4.16 หน้าจอแสดงรูปกราฟ Fullrange

4.1.5 เมื่อเลือกรูปแบบการคำนวณ Periodic function จะปรากฏหน้าจอข้อแนะนำการป้อนค่าดังนี้

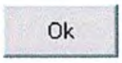


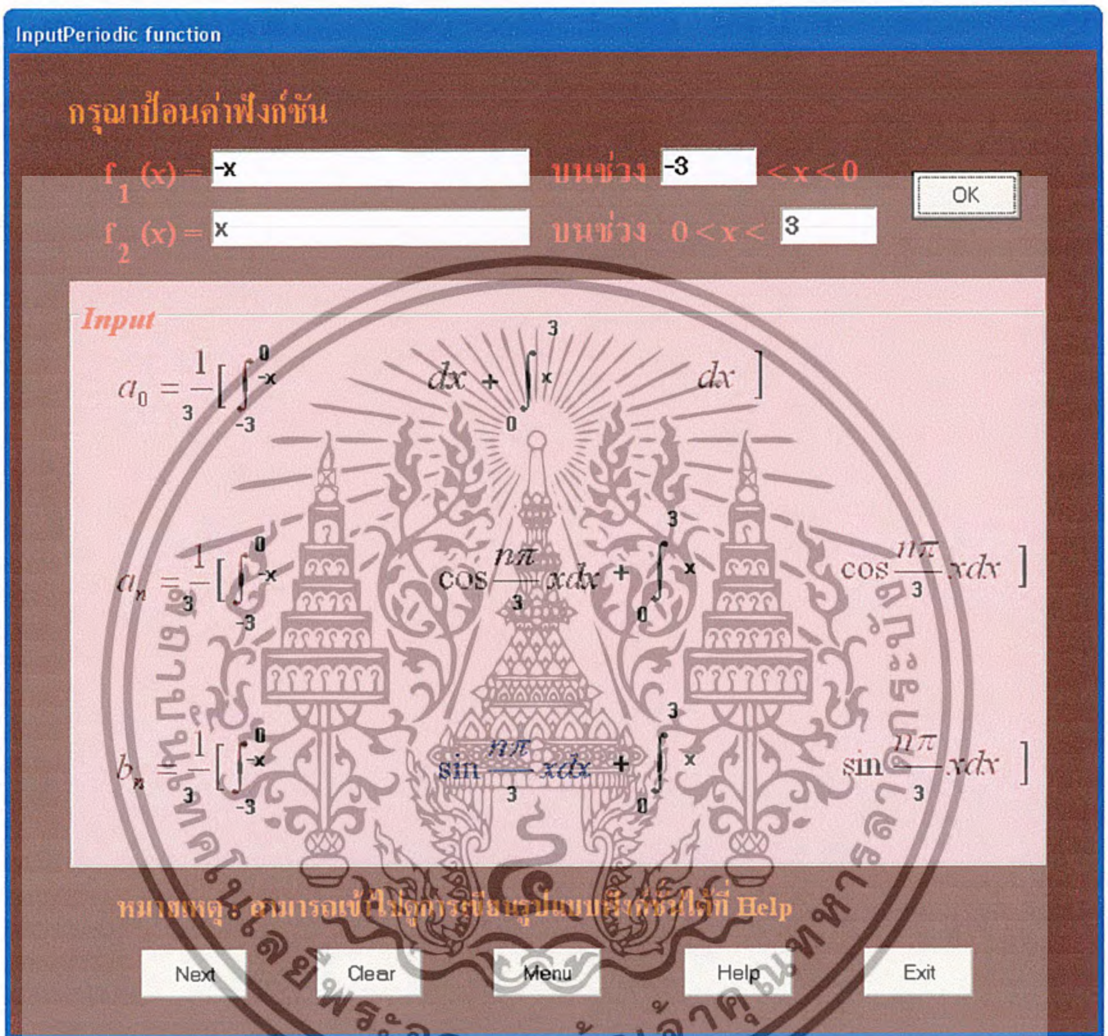
รูปที่ 4.17 แสดงหน้าจอข้อแนะนำการป้อนค่า Periodic function

เมื่อกดปุ่ม  จะปรากฏหน้าจอ Input Periodic ดังนี้



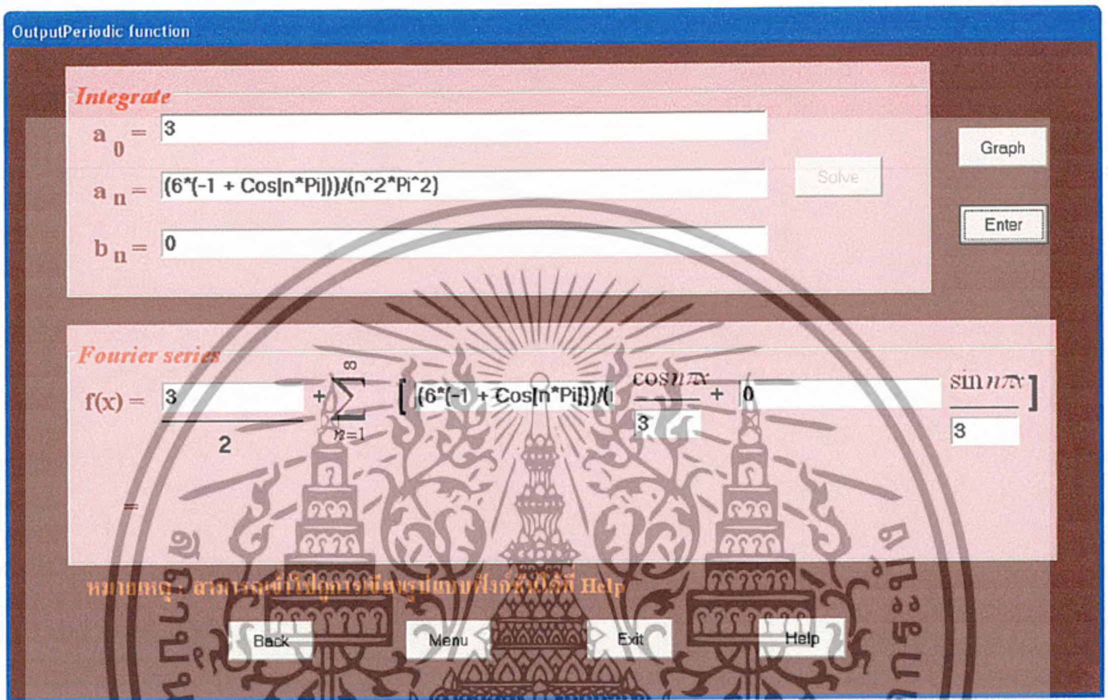
รูปที่ 4.18 หน้าจอแสดง Input Periodic function

วิธีการป้อนค่า Input Periodic function มีวิธีการคล้ายกับแบบ Input Fullrange คือเมื่อป้อนค่าเสร็จแล้ว กดปุ่ม  จะปรากฏดังนี้



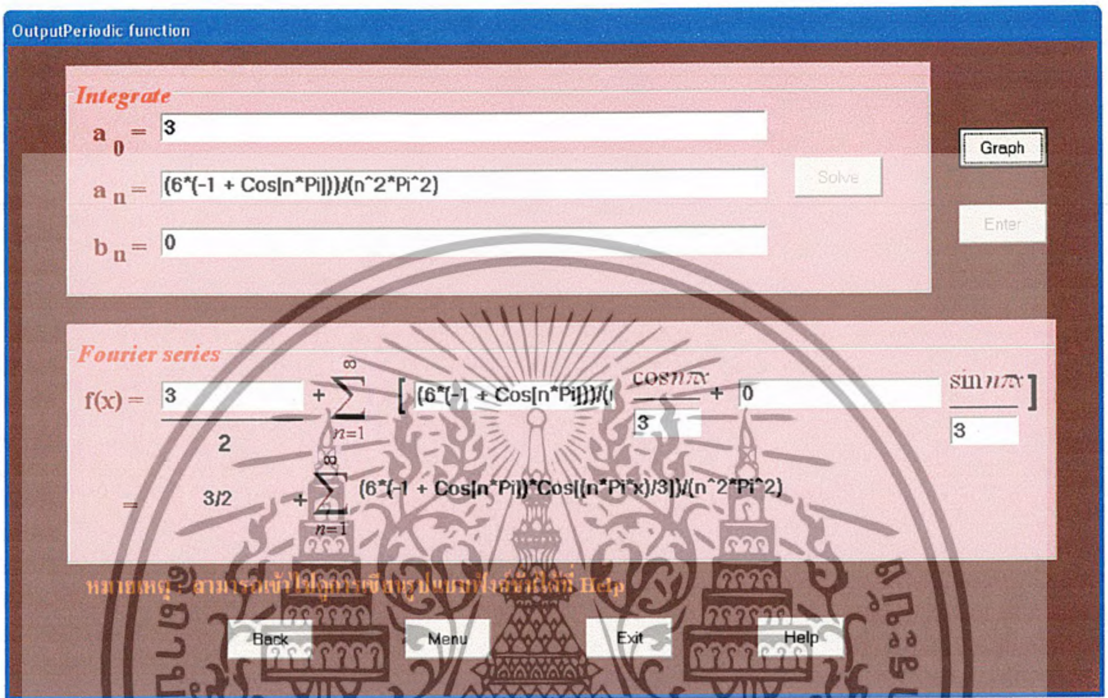
รูปที่ 4.19 หน้าจอแสดง Input Periodic function หลังจากป้อนค่าเสร็จแล้ว

เมื่อใส่ฟังก์ชันถูกต้องแล้วกดปุ่ม Next จะปรากฏหน้าจอ OutputPeriodic function แล้วกดปุ่ม Solve จะแสดงผลเฉลยดังรูป



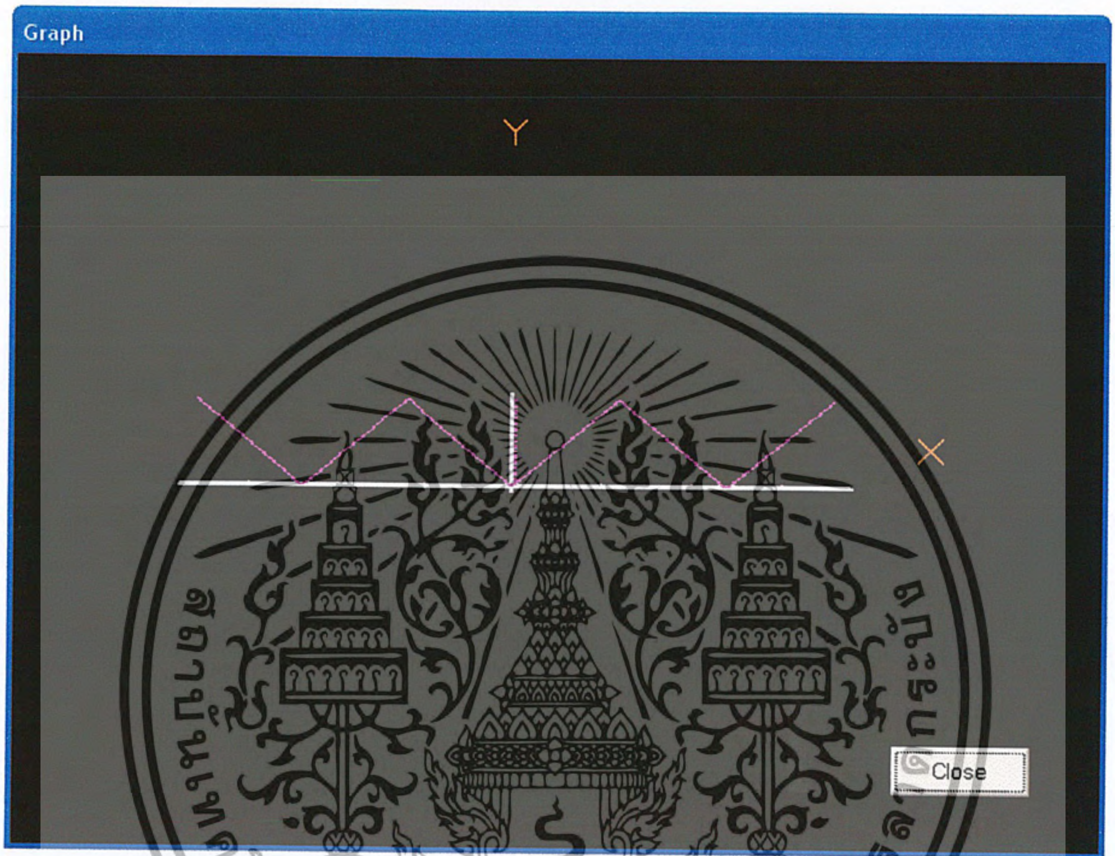
รูปที่ 4.20 หน้าจอแสดงผลเฉลย Output Periodic function ครั้งแรก

จากนั้นกดปุ่ม Enter จะปรากฏผลเฉลยที่สมบูรณ์ดังรูป



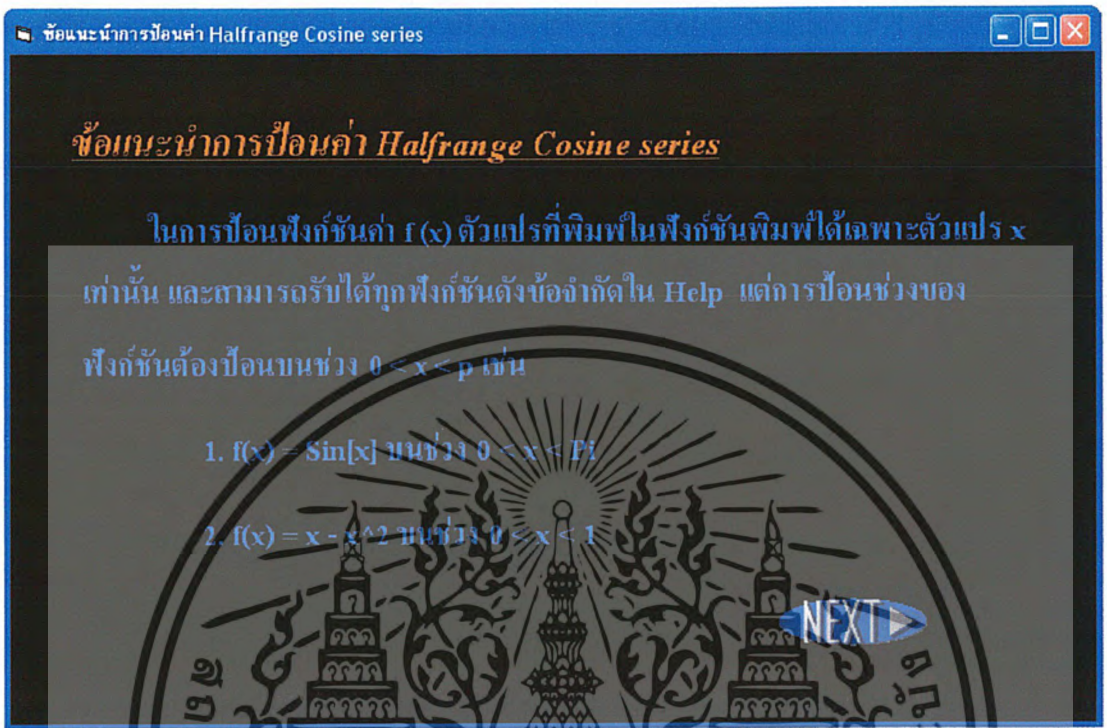
รูปที่ 4.21 หน้าจอแสดงผลเฉลย Output Periodic function ที่สมบูรณ์

จากนั้นกดปุ่ม Graph จะแสดงรูปกราฟดังนี้



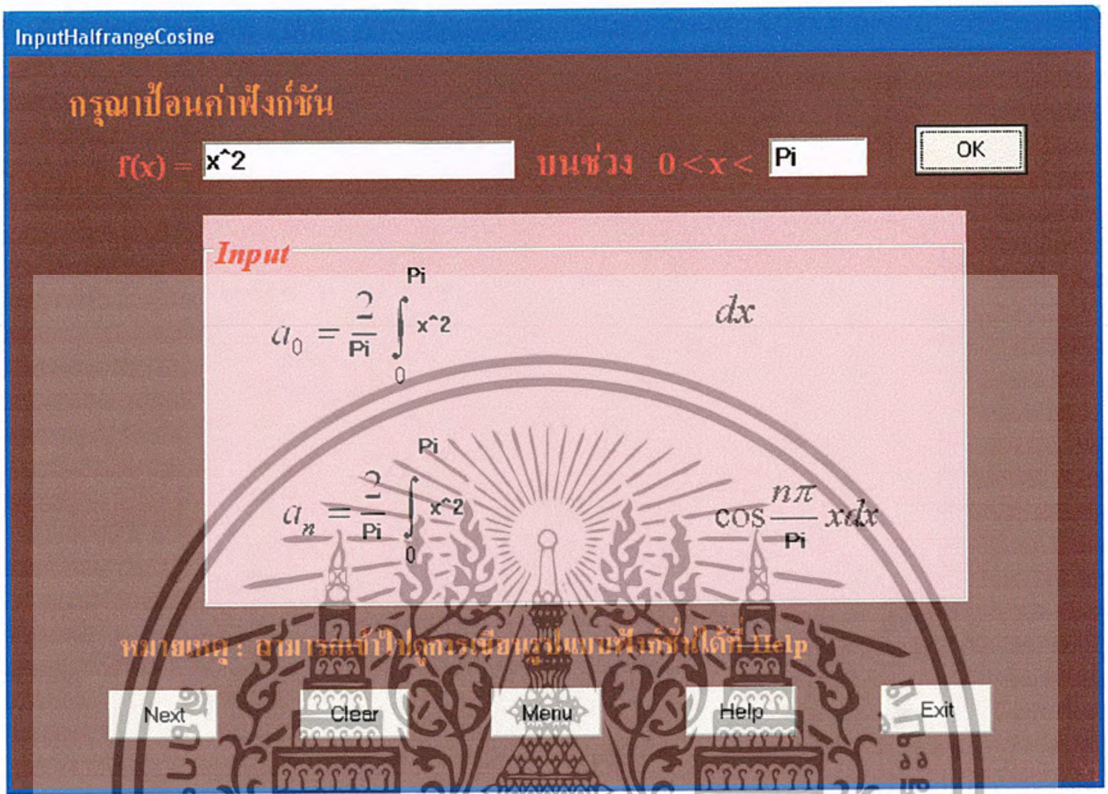
รูปที่ 4.22 หน้าจอแสดงรูปกราฟ Periodic function

4.1.6 เมื่อเลือกรูปแบบการคำนวณ Halfrange Cosine series จะปรากฏหน้าจอข้อแนะนำการป้อนค่าดังนี้



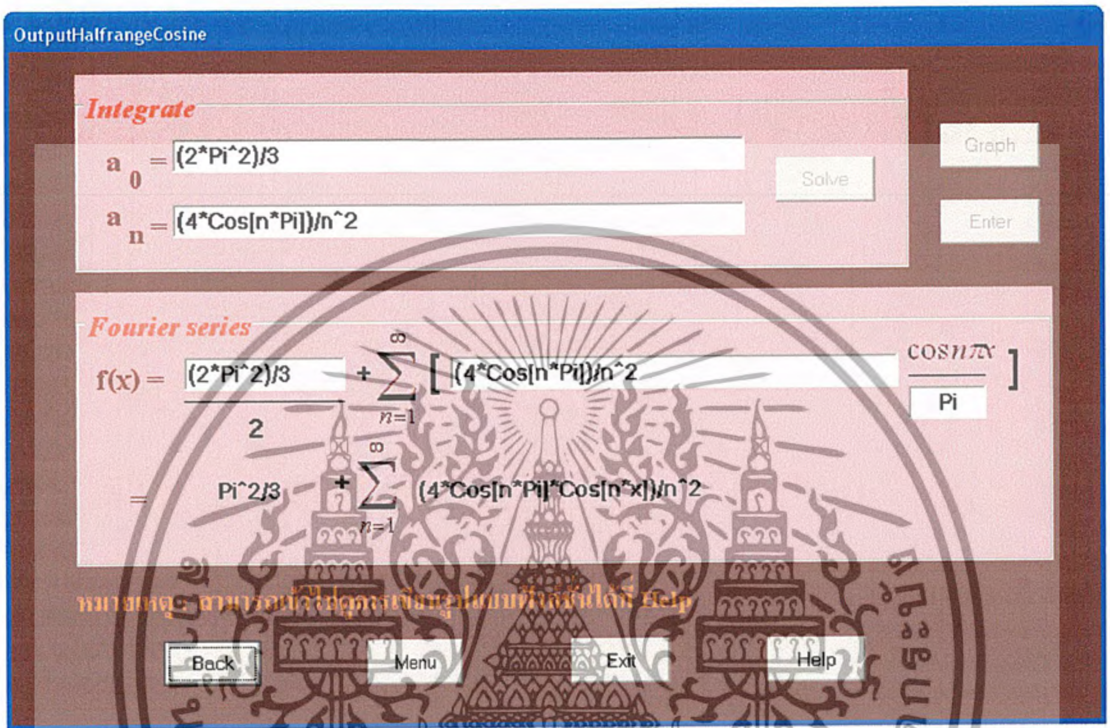
รูปที่ 4.23 หน้าจอแสดงข้อแนะนำการป้อนค่า Halfrange Cosine series

เมื่อกดปุ่ม  จะปรากฏหน้าจอ Input Halfrange Cosine ดังนี้



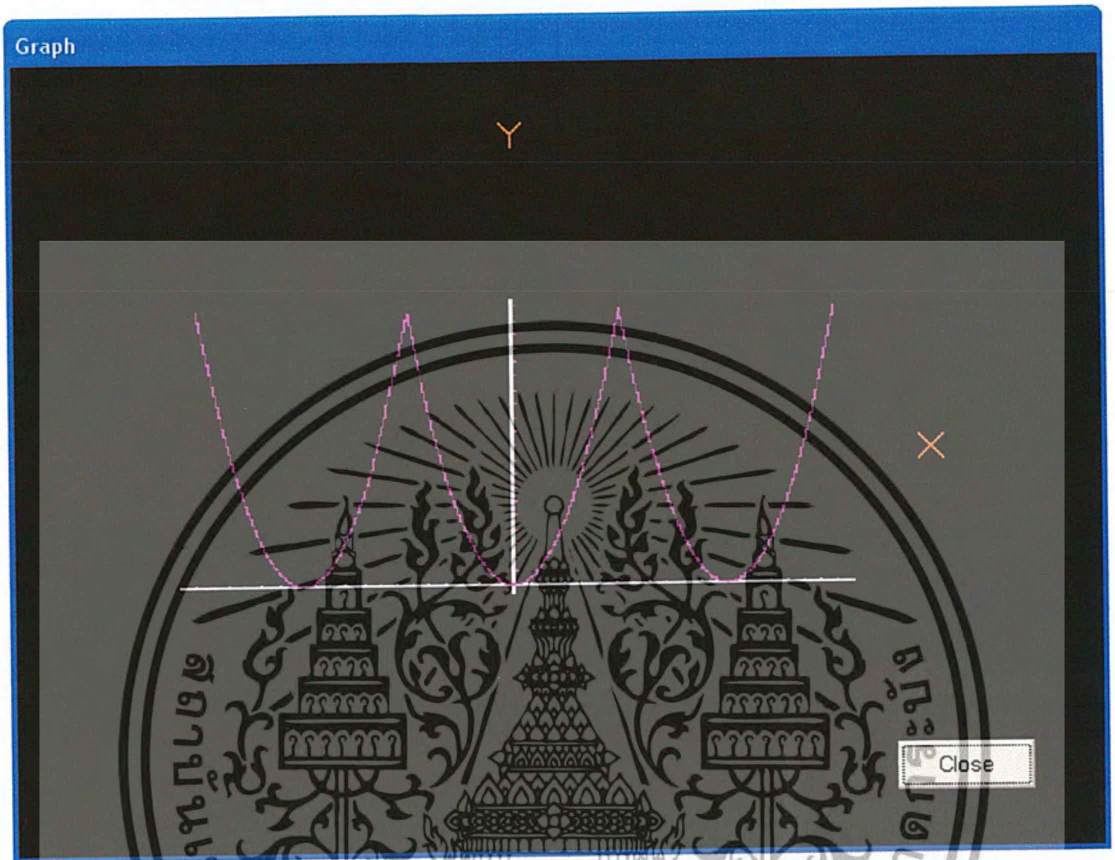
รูปที่ 4.24 หน้าจอแสดง Input Halfrange Cosine series เมื่อป้อนค่าเสร็จแล้ว

เมื่อใส่ฟังก์ชันถูกต้องแล้วกดปุ่ม Next จะปรากฏหน้าจอ Output Halfrange Cosine series แล้วกดปุ่ม Solve จะแสดงผลเฉลยครั้งแรก และกดปุ่ม Enter จะแสดงผลเฉลยที่สมบูรณ์ดังนี้



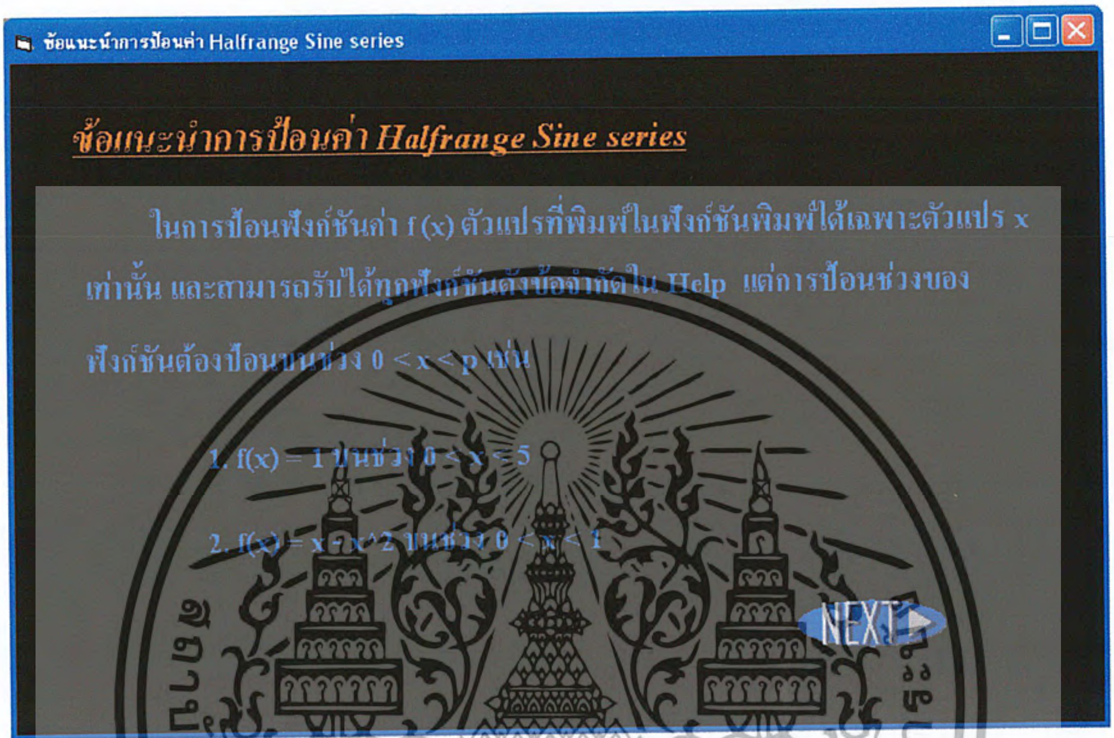
รูปที่ 4.25 หน้าจอแสดง Output Halfrange Cosine series ที่สมบูรณ์

จากนั้นกดปุ่ม Graph จะแสดงรูปกราฟดังนี้



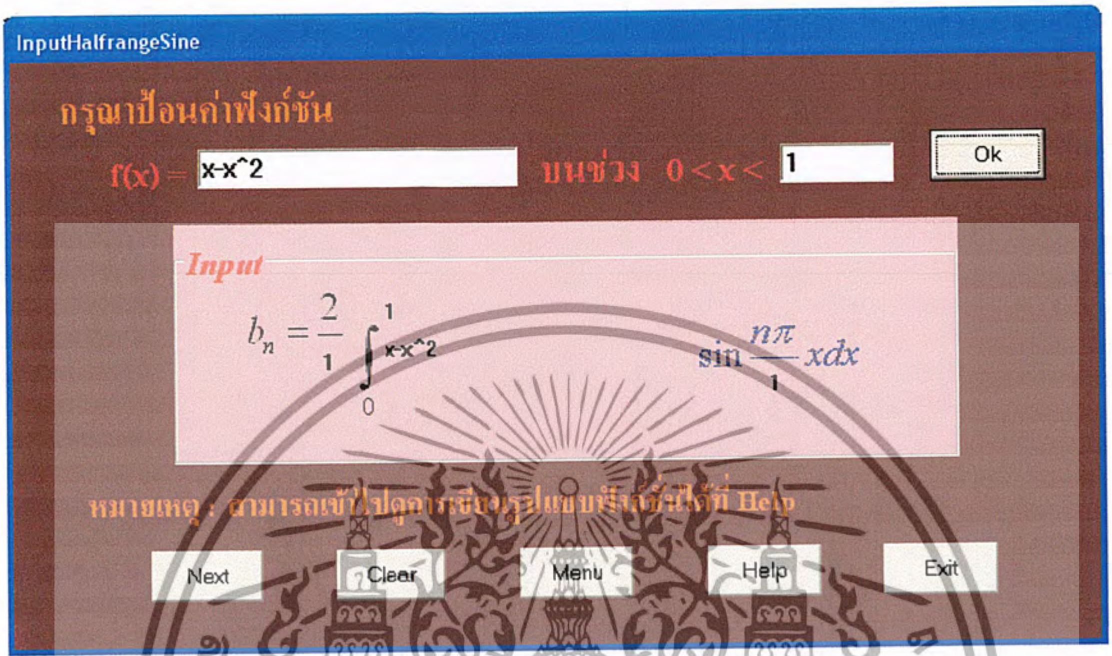
รูปที่ 4.26 หน้าจอแสดงรูปกราฟ Even Periodic Extension of $f(x)$

4.1.7 เมื่อเลือกรูปแบบการคำนวณ Halfrange Sine series จะปรากฏหน้าจอข้อแนะนำการป้อนค่าดังนี้



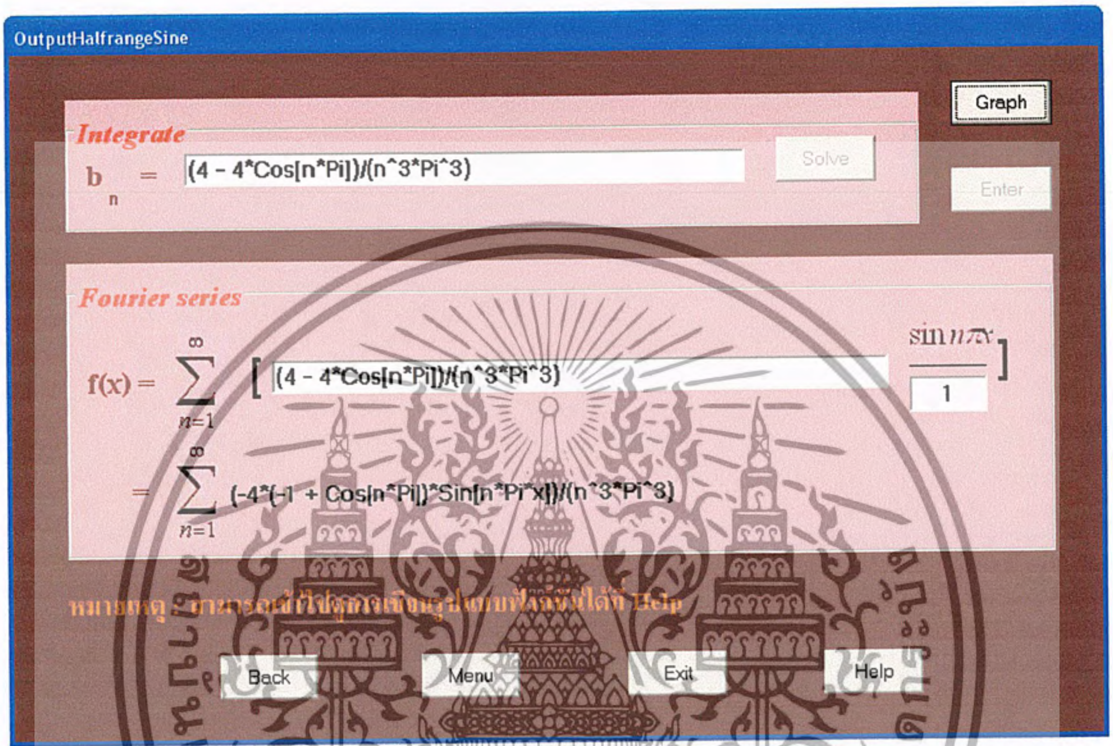
รูปที่ 4.27 หน้าจอแสดงข้อแนะนำการป้อนค่า Halfrange Sine series

เมื่อกดปุ่ม  จะปรากฏหน้าจอ Input Halfrange Sineดังนี้



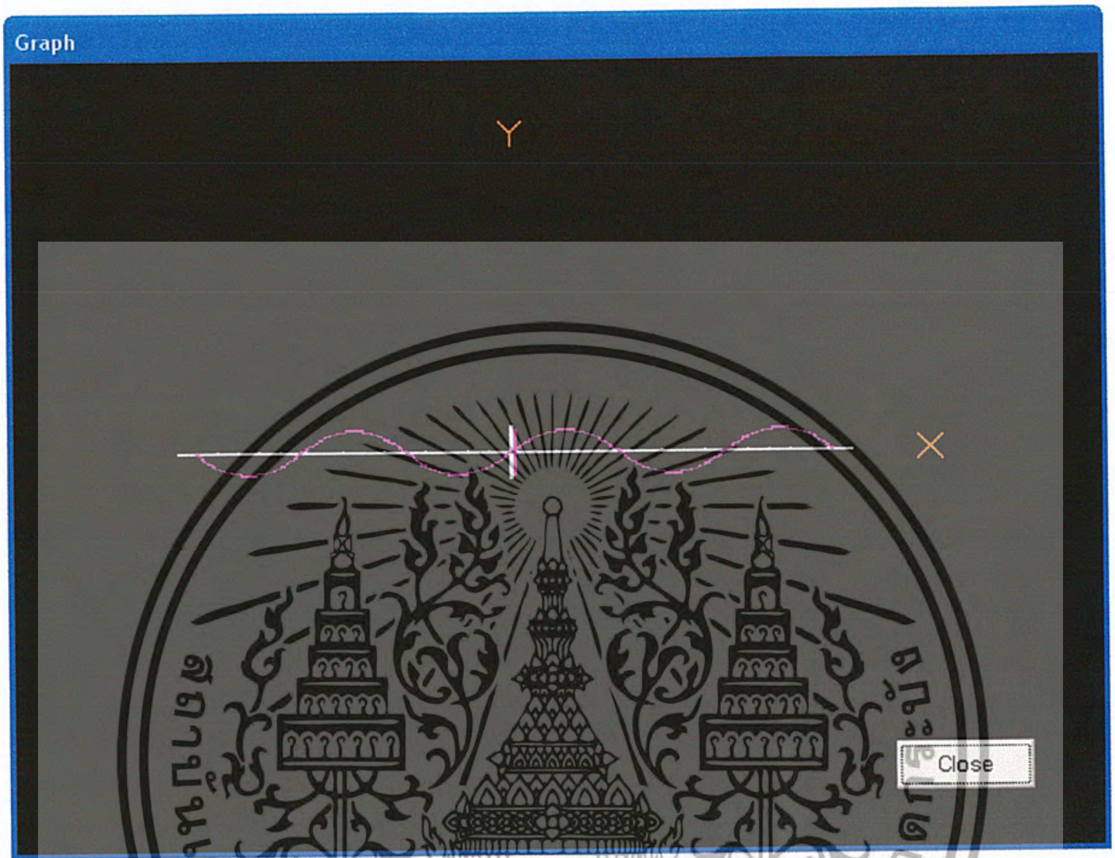
รูปที่ 4.28 หน้าจอแสดง Input Halfrange Sine series เมื่อป้อนค่าเสร็จแล้ว

เมื่อใส่ฟังก์ชันถูกต้องแล้วกดปุ่ม Next จะปรากฏหน้าจอ Output Halfrange Sine series แล้วกดปุ่ม Solve จะแสดงผลเฉลยครั้งแรก และกดปุ่ม Enter จะแสดงผลเฉลยที่สมบูรณ์ดังรูป



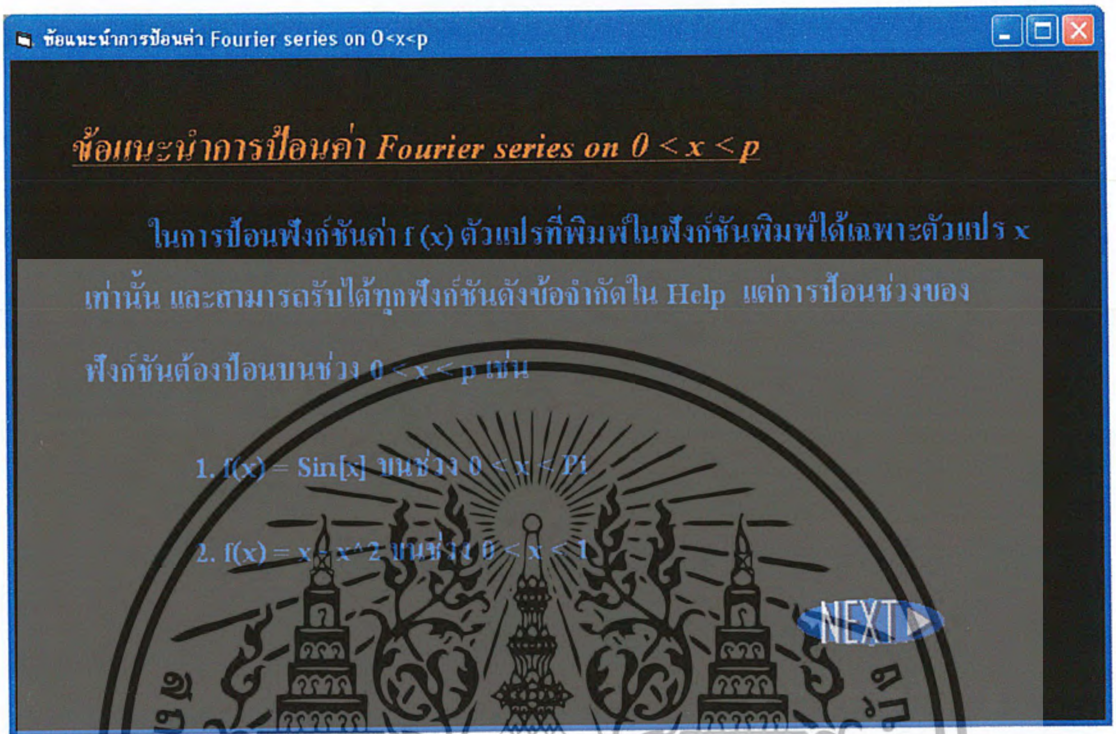
รูปที่ 4.29 หน้าจอแสดง Output Halfrange Sine series ที่สมบูรณ์

จากนั้นกดปุ่ม Graph จะแสดงรูปกราฟดังนี้



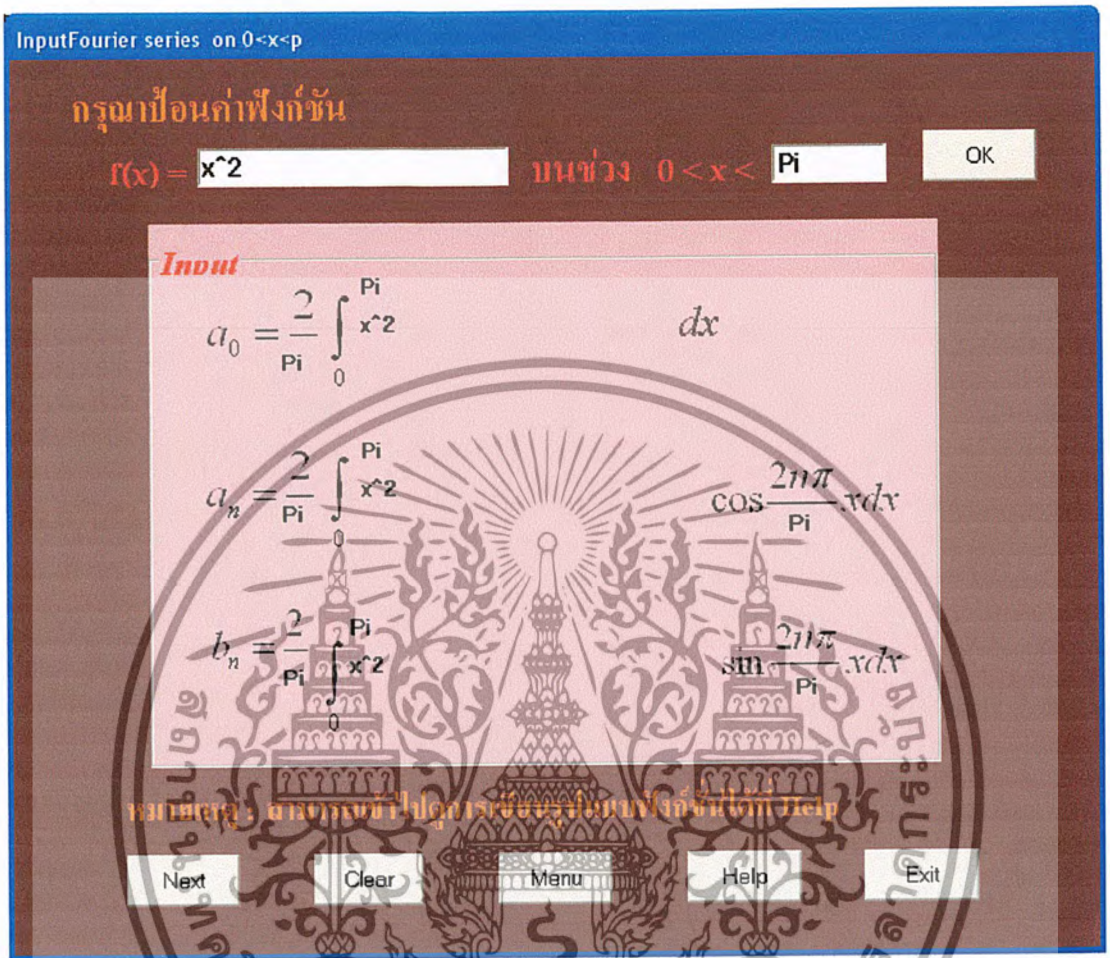
รูปที่ 4.30 หน้าจอแสดงรูปกราฟ Odd Periodic Extension of $f(x)$

4.1.8 เมื่อเลือกรูปแบบการคำนวณ Fourier series บนช่วง 0 < x < p จะปรากฏหน้าจอข้อแนะนำการป้อนค่าดังนี้



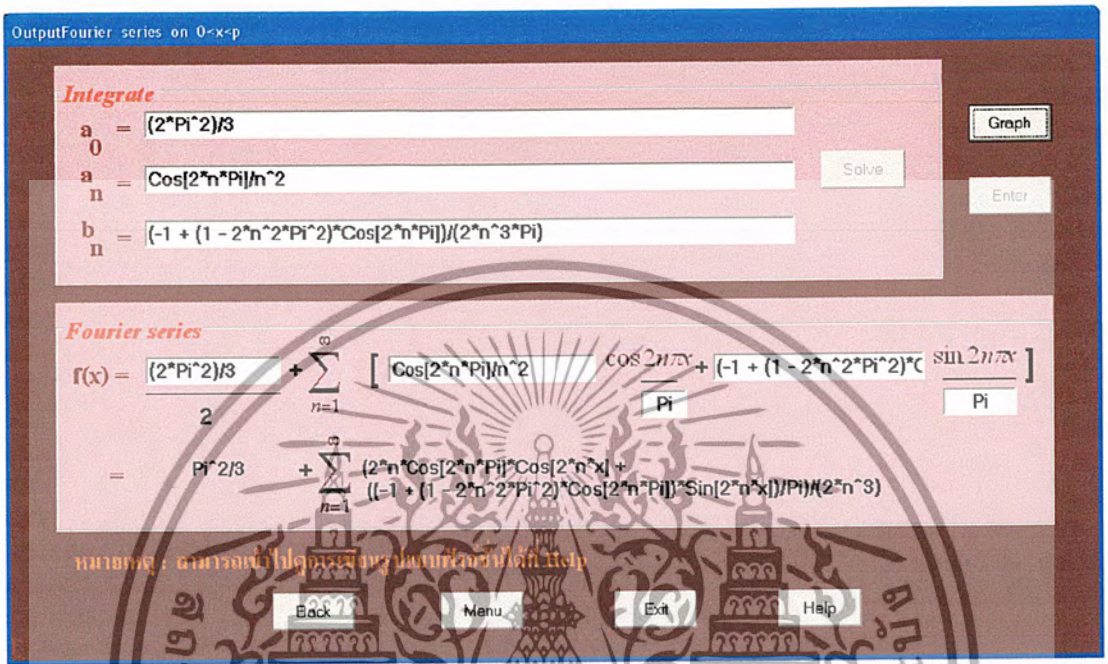
รูปที่ 4.31 หน้าจอแสดงข้อแนะนำการป้อนค่า Fourier series บนช่วง 0 < x < p

เมื่อกดปุ่ม  จะปรากฏหน้าจอ InputFourier series on 0 < x < p ดังนี้

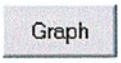


รูปที่ 4.32 หน้าจอแสดง Input Fourier series บนช่วง 0 < x < p เมื่อป้อนค่าเสร็จแล้ว

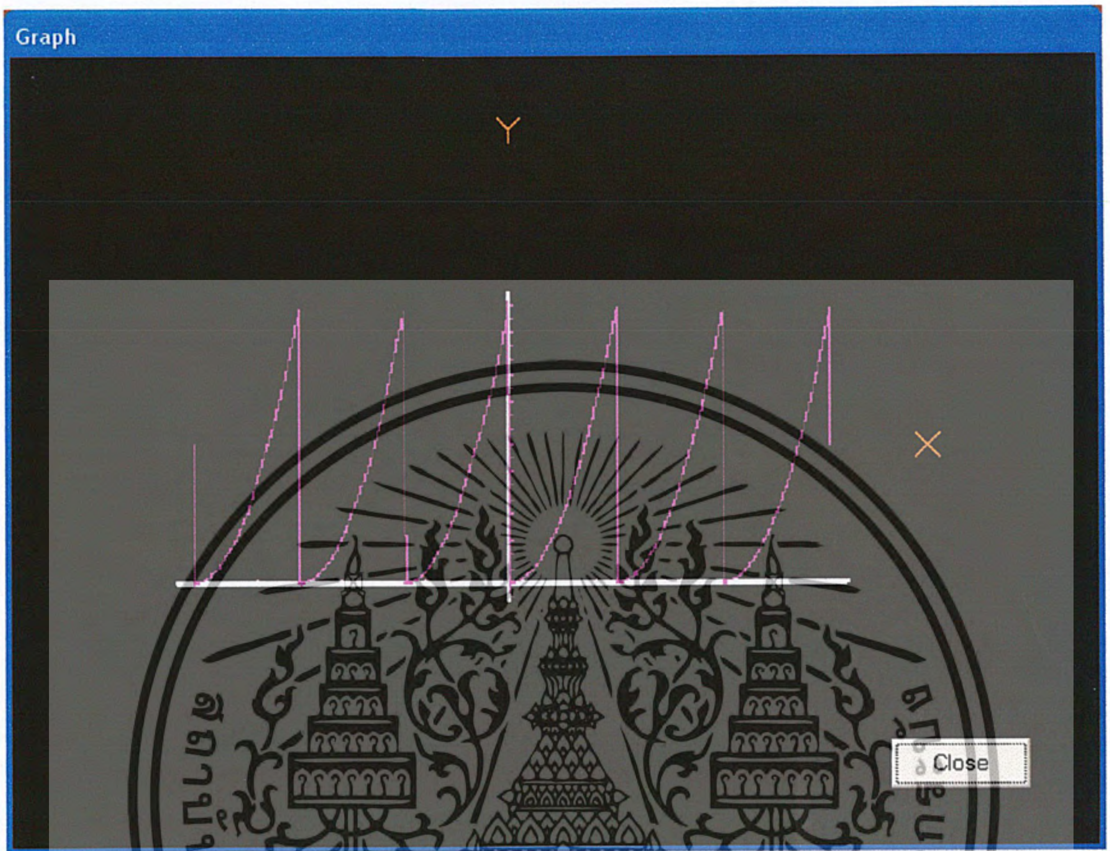
เมื่อใส่ฟังก์ชันถูกต้องแล้วกดปุ่ม Next จะปรากฏหน้าจอ Output Fourier series บนช่วง $0 < x < p$ แล้วกดปุ่ม Solve จะแสดงผลเฉลยครั้งแรก และกดปุ่ม Enter จะแสดงผลเฉลยที่สมบูรณ์ดังรูป



รูปที่ 4.33 หน้าจอแสดง Output Fourier series บนช่วง $0 < x < p$ ที่สมบูรณ์

จากนั้นกดปุ่ม 

จะแสดงรูปกราฟดังนี้



รูปที่ 4.34 หน้าจอแสดงรูปกราฟ Fourier series บนช่วง $0 < x < p$

บทที่ 5
การวิจารณ์หรืออภิปรายผล

ผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาและทำการสร้างโปรแกรมสำเร็จรูปในการสืบค้นและคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น โดยวิธี Fourier Series สามารถประเมินผลได้ดังนี้

5.1 ส่งเสริมให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจในเรื่องการสืบค้นและคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น

การเรียนการสอนในวิชาแคลคูลัส นักศึกษาจะต้องทำความเข้าใจในเรื่องการคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากและการหาค่าจาก Fourier Series ก่อน แล้วจึงนำสมการจากโจทย์นั้นมาหาค่า a_0, a_n, b_n แล้วจึงนำมารวมกันในสูตรของ Fourier Series เนื่องจากขั้นตอนในการคำนวณค่อนข้างจะยากและใช้เวลานาน ด้วยสาเหตุนี้จึงได้นำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอนในวิชาแคลคูลัสในเรื่องการคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น ซึ่งจะทำให้นักศึกษาสามารถศึกษาและเข้าใจในการคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก ได้ดีมากยิ่งขึ้น

5.2 ด้านการใช้งานและความเข้าใจ

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นเป็นโปรแกรมที่ใช้งานบนระบบปฏิบัติการวินโดว์ ผู้ใช้สามารถเลือกคำสั่งการทำงานต่างๆของโปรแกรม ได้โดยการใช้เมาส์ และเป็นโปรแกรมที่ง่ายต่อการใช้งานอีกด้วย

5.3 ข้อเสนอแนะที่ควรแก้ไข

5.3.1 สามารถหาวิธีการคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากด้วยวิธีอื่นๆ

5.3.2 สามารถรับสมการในรูปแบบอื่น ๆ อีกได้

5.3.3 สามารถทำการคำนวณหาฟังก์ชันเชิงตั้งฉากในแบบเชิงซ้อนได้

5.3.4 เขียนโปรแกรมการแสดงกราฟแทนการเชื่อมต่อกับโปรแกรม Mathematica

บทที่ 6
สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการดำเนินงาน

ปัญหาพิเศษที่จัดทำโปรแกรมเพื่อสืบค้นและคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเบื้องต้น ซึ่งโปรแกรมนี้จะแสดงค่า a_0, a_n, b_n จากสมการ Fourier Series และแสดงกราฟของฟังก์ชัน โดยที่โปรแกรมนี้ได้สร้างขึ้นมาจากโปรแกรม Visual basic 6.0 ซึ่งคำนวณและแสดงกราฟบนโปรแกรม Mathematica ซึ่งได้ทำการเชื่อมต่อระหว่างโปรแกรม Visual basic 6.0 และโปรแกรม Mathematica ไว้แล้ว จากนั้นจึงทำการแสดงผลบนหน้าจอข้อมูลออก แต่โปรแกรมนี้มีข้อจำกัดบางอย่างเช่น จะต้องมีโปรแกรม Mathematica อยู่บนเครื่องคอมพิวเตอร์นั้น

6.2 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากปัญหาพิเศษในหัวข้อการคำนวณฟังก์ชันเชิงตั้งฉากนี้เป็นส่วนหนึ่งของวิชาแคลคูลัส ดังนั้นโปรแกรมนี้จึงเหมาะที่จะนำไปใช้ในการเรียนการสอนในวิชาแคลคูลัส อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆได้หลายด้าน จึงได้นำมาเสนอแนะเพื่อก่อให้เกิดประโยชน์แก่ผู้ที่สนใจนำโปรแกรมนี้ไปพัฒนาต่อไป

6.2.1 ในการใช้โปรแกรมนี้ควรมีความรู้พื้นฐานวิชาแคลคูลัส เพื่อจะได้ใส่สมการในโปรแกรมได้ถูกต้อง

6.2.2 ควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับสมการต่าง ๆ ของฟังก์ชันเชิงตั้งฉากและอนุกรมฟูเรียร์ให้เป็นอย่างดี

บรรณานุกรม

สุรวิทย์ กองสาสนะ. 2520. **คณิตศาสตร์ขั้นสูง.** พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช.

Erwin Kreyszig. 1993. **Advanced Engineering Mathematics.** 7th ed. John Wiley & Sons.

Richard Bronson. 1989. **Schaum's Solved Promblem.** New York : McGraw - Hill.

Step Wolfram. **The Mathematica Book**. 3rd ed. Addison-Wesley Publishing.

ภาคผนวก

ตัวอย่างโจทย์

Orthogonal function

1. $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2; [-2,2]$
2. $f_1(x) = x, f_2(x) = \cos 2x; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}; [0,2]$
4. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = \sin x; \left[\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}\right]$
5. $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2; [0,1]$
6. $f_1(x) = 5x, f_2(x) = 3; [0,2]$

Full range

7. $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$
8. $f(x) = x, -3 < x < 3$
9. $f(x) = 5, -2 < x < 2$
10. $f(x) = x - x^2, -1 < x < 1$
11. $f(x) = x^3 + x^2 - \pi^2 x - \pi^2, -\pi < x < \pi$
12. $f(x) = x + \pi, -\pi < x < \pi$
13. $f(x) = e^x, -\pi < x < \pi$

Periodic function

14. $f(x) = \begin{cases} -3, -5 < x < 0 \\ 3, 0 < x < 5 \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} -x, -3 < x < 0 \\ x, 0 < x < 3 \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} -x, -4 < x < 0 \\ x, 0 < x < 4 \end{cases}$
17. $f(x) = \begin{cases} 0, -3 < x < 0 \\ 2x, 0 < x < 3 \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}0,-5<x<0\\3,0<x<5\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}0,-\pi<x<0\\1,0<x<\pi\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}1,-1<x<0\\x,0<x<1\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}0,-\pi<x<0\\x^2,0<x<\pi\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}0,-\pi<x<0\\\sin x,0<x<\pi\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}1,-5<x<0\\1+x,0<x<5\end{cases}$

Half range

i) Fourier cosine series

24. $f(x)=x,0<x<2$
25. $f(x)=x^2,0<x<\pi$
26. $f(x)=e^x,0<x<\pi$
27. $f(x)=\sin x,0<x<\pi$
28. $f(x)=x-x^2,0<x<1$

ii) Fourier sine series

29. $f(x)=\cos x,0<x<\frac{\pi}{2}$
30. $f(x)=x+1,0<x<2$
31. $f(x)=1,0<x<5$
32. $f(x)=e^x,0<x<\pi$
33. $f(x)=x^2,0<x<\pi$
34. $f(x)=x-x^2,0<x<1$
35. $f(x)=x,0<x<3$
36. $f(x)=\sin x,0<x<\pi$

iii) Fourier series

37. $f(x)=\sin x,0<x<\pi$

38. $f(x) = x^2, 0 < x < \pi$

39. $f(x) = x, 0 < x < 6$

40. $f(x) = e^{-x}, 0 < x < 2$