โปรแกรมคำนวณสเตทสเปซด้วย VB.NET

STATE SPACE COMPUTATIONS SOFTWARE BY VB.NET

โดย

นาย เสริมกวี จันทร์งาม

นาย อนุวัฒน์ พิบูลศักดิ์โสภณ

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2545

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2545

ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง โปรแกรมคำนวณสเตทสเปซด้วย วิชวลเบสิคดอทเน็ท

State Space Computations Software by VB.NET

ผู้จัดทำ

1. นาย เสริมกวี จันทร์งาม 43015339
2. นาย อนุวัฒน์ พิบูลศักดิ์โสภณ 43015343

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(อ.ถาวร เบญจนราสุทธิ์)

โปรแกรมคำนวณสเตทสเปซด้วยวิชวลเบสิคดอทเน็ท

State Space Computations Software by Vb.net

โดย

นายเสริมกวี จันทร์งาม 43015339

นายอนุวัฒน์ พิบูลย์ศักดิ์โสภณ 43015343

อาจารย์ที่ปรึกษา

อาจารย์ถาวร เบญจนราสุทธิ์

บทคัดย่อ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอโปรแกรมสำเร็จรูปใช้ในการคำนวณทางวิศวกรรมระบบควบคุมโดยเฉพาะการคำนวณด้านสเตทสเปซพื้นฐาน โดยอาศัยโปรแกรมวิชวลเบสิคดอทเน็ท ประกอบด้วยเรื่อง การหาฟังก์ชั่นถ่ายโอน การหาผลคำตอบจากสมการสภาวะเชิงเส้น ความสามารถในการควบคุมได้ การออกแบบตัวควบคุมสเตทป้อนกลับ เป็นต้น ซึ่งแม้ว่าในปัจจุบันจะมีโปรแกรมสำเร็จรูป เช่น MATLAB, Maple, Mathematica แต่ผู้ใช้ต้องเรียนรู้คำสั่งหรือฟังก์ชั่นต่าง ๆ ของโปรแกรมสำเร็จรูปนั้นจึงจะสามารถใช้งานได้ ดังนั้นโปรแกรมสำเร็จรูปที่เขียนขึ้นในวิทยานิพนธ์นี้ได้อาศัยคุณสมบัติของโปรแกรมวิชวลเบสิคดอทเน็ท ซึ่งสามารถสร้างเป็นระบบเชื่อมต่อกับผู้ใช้งานโดยรูปภาพ ทำให้ผู้ใช้งานมีความสะดวก และง่ายต่อผู้ใช้ซึ่งขาดทักษะในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเฉพาะทางดังกล่าวมาข้างต้น นอกจากนั้นโปรแกรมวิชวลเบสิคดอทเน็ทยังสามารถพัฒนาโปรแกรมให้สามารถทำงานผ่านระบบอินเทอร์เน็ทได้ ซึ่งทำให้การใช้งานมีความคล่องตัวมากยิ่งขึ้น

Abstract

This thesis presents the software package for control engineering, especially state space computation, using Vb.net program. The developed software can be used for transfer function calculation, solution of the linear state equation, controllability, state feedback design, etc. Although there are many packages such as MATLAB, Maple, Mathematica that could be used for the same tasks, users have to learn the commands or functions of those packages. By using the software package developed in this project, even unskilled users can perform the required computation effortlessly due to the Graphical User Interface (GUI) capability of Vb.net program. Moreover, Vb.net program supports the development of the online software that can be accessed and run on the internet. This makes the usage of the developed software more flexible.

กิตติกรรมประกาศ

อันดับแรกคณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นผู้ให้กำเนิด เลี้ยงดู อบรมสั่งสอน ให้การศึกษา ตลอดจนให้กำลังใจทุกๆสิ่ง แม้ในช่วงที่ชีวิตอับเฉามองไม่เห็นแม้ซึ่งแสงตะวัน จึงขอขอบพระคุณท่านอย่างสูงมา ณ ที่นี้ด้วย และที่ขาดไม่ได้ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ในภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุมทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ตลอดจนความเอาใจใส่ห่วงใย และความเมตตากรุณา ที่ท่านได้ให้ความช่วยเหลือให้คำแนะนำต่างๆ โดยเฉพาะ อาจารย์ ถาวร เบญจนราสุทธิ์ ที่ได้กรุณาช่วยกลั่นกรองในการทำปริญญานิพนธ์นี้อย่างละเอียดรอบคอบ พร้อมทั้งความอดทนและเอาใจใส่อย่างที่สุดจะคณานับมิได้ ทางผู้จัดทำจะขอจดจำตลอดไปไม่มีวันลืม

ขอขอบคุณและขอบใจเพื่อนทุกๆคน ในภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุมที่ได้ห่วงใยสนใจในการทำโปรเจค ขอขอบคุณเปิ้ลที่ช่วยแนะนำการนั่งสมาธิ พร้อมทั้งวิธีการปฏิบัติตนให้สอดคล้องกับการเป็นชาวพุทธ ขอขอบคุณศาสนาพุทธที่ช่วยขัดเกลาจิตใจของผู้จัดทำให้คิดและทำในสิ่งที่ดีเพื่อสังคม

คณะผู้จัดทำ
นายเสริมกวี จันทร์งาม
นายอนุวัฒน์ พิบูลย์ศักดิ์โสภณ

สารบัญ

สารบัญรูปภาพ

รูปที่		หน้า
1.1	แสดงสภาวะแวดล้อมในการทำงานของโปรแกรมวิชวลเบสิคดอทเน็ท	3
2.1	โฟลว์ชาร์ตการคำนวณฟังก์ชั่นถ่ายโอนจากสมการสภาวะ	6
3.1	แสดงโฟลว์ชาร์ตการเขียนโปรแกรมหาเมตริกซ์ Householder	15
3.2	แสดงโฟลว์ชาร์ตการเขียนโปรแกรมหา QR Factorization	17
3.3	แสดงโฟลว์ชาร์ตการเขียนโปรแกรมหาค่าไอเก็น	18
3.4	โฟลว์ชาร์ตการ Realization	22
4.1	โฟลว์ชาร์ตการหาค่า e^{At}	24
5.1	โฟลว์ชาร์ตการตรวจสอบความสามารถในการควบคุมได้ (Controllability)	27
5.2	โฟลว์ชาร์ตการตรวจสอบความสามารถในการสังเกตได้ (Observability)	27
6.1	แสดงหน้าจอหลักของโปรแกรม	28
6.2	แสดงหน้าจอการเลือกหาค่าดีเทอร์มิแนนท์	29
6.3	แสดงหน้าจอหลักของการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์	29
6.4	แสดงหน้าจอการป้อนขนาดเมทริกซ์	30
6.5	แสดงหน้าจอการป้อนหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ขนาดเมทริกซ์ 3 * 3	30
6.6	แสดงหน้าจอหลักของการเลือกหาค่าอินเวอสเมทริกซ์	31
6.7	แสดงหน้าจอหลักของการหาค่าอินเวอส์เมทริกซ์	31
6.8	แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์	32
6.9	แสดงหน้าจอการป้อนหาค่าอินเวอสขนาดเมทริกซ์ 3 * 3	32
6.10	แสดงหน้าจอหลักของการเลือกบวกลบเมทริกซ์	33
6.11	แสดงหน้าจอหลักของการป้อนค่าบวกลบ	33
6.12	แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์	34
6.13	แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาค่าการบวกขนาด 3*3	34
6.14	แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาค่าการลบขนาด 3*3	35
6.15	แสดงหน้าจอหลักของการเลือกทรานสโพสเมทริกซ์	35
6.16	แสดงหน้าจอหลักของการป้อนค่าทรานสโพสเมทริกซ์	36
6.17	แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์	36

บทที่ 1
แนะนำโครงงาน

1.1 ความเป็นมาของโครงงาน

เนื่องจากการคำนวณในเรื่อง สเตทสเปซ มักมีเรื่องการจัดการเกี่ยวกับเมตริกซ์เข้ามาเกี่ยวข้อง ทำให้เกิดความยุ่งยาก ถึงแม้ว่าจะมีโปรแกรมสำเร็จรูป เช่น Matlab , Maple ซึ่งเป็นซอฟแวร์ที่ใช้ในการคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์ แต่ผู้ใช้จำเป็นที่จะต้องศึกษาคำสั่งและฟังก์ชั่นการใช้งานของซอฟแวร์เหล่านี้ ซึ่งเป็นการเสียเวลาในการที่จะศึกษาคำสั่งและฟังก์ชั่นต่างๆ จากจุดนี้เองทำให้เกิดแนวความคิดในการเขียนโปรแกรมสำเร็จรูป ในเรื่อง สเตทสเปซ โดยไม่ต้องจดจำคำสั่งแต่จะเป็นการสร้างจอภาพเพื่อติดต่อกับผู้ใช้งาน (Graphic User Interface : GUI) ขึ้นมาใช้งาน ซึ่งวิธีการนี้เป็นการอำนวยความสะดวกให้กับผู้ต้องการใช้งานได้มากทีเดียว

1.2 แนะนำ Microsoft Visual Basic.NET

Microsoft Visual Basic.NET เป็นภาษาคอมพิวเตอร์ ที่เพิ่มเติมความสามารถของเทคโนโลยี .NET Framework เข้าไป เพื่อทำให้ VB.NET เป็นภาษาคอมพิวเตอร์ ที่สามารถใช้พัฒนาโปรแกรมทั้งที่ใช้งานอยู่บนเว็บและระบบปฏิบัติการ Windows ตัว .NET Framework ได้แก่ เทคโนโลยีที่พัฒนาขึ้นตามแนวความคิด .NET ที่บริษัท Microsoft คิดค้นขึ้น โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อสนับสนุนแนวคิดแบบ Reusable Code และช่วยลดช่องว่าง ในความแตกต่างด้านต่างๆ ที่เกิดขึ้น กับการพัฒนาด้านโปรแกรม เช่น ความแตกต่างของภาษาที่ใช้ในการพัฒนา ความแตกต่างระหว่างแนวคิดในการพัฒนาโปรแกรมที่ทำงานอยู่บนระบบปฏิบัติการ Windows กับที่ทำงานอยู่บนเว็บเป็นต้น ดังนั้น ไม่ว่าจะเป็นภาษาใดก็ตามที่ทำงานอยู่ภายใต้ .NET Framework ได้เช่นเดียวกันจะต่างกันก็เพียงรูปแบบการนำไปใช้ซึ่งจะต้องเป็นไปตามไวยากรณ์ของภาษานั้นๆ ดังแสดงในตัวอย่างรูปที่ 1.1 ซึ่งแสดงสภาวะแวดล้อมในการทำงานของโปรแกรมวิชวลเบสิคดอทเน็ท ซึ่งสามารถใช้ไวยากรณ์ของภาษาใดก็ได้ มาพัฒนาซอฟแวร์ต่างๆขึ้นมาใช้งานได้

1.3 ขั้นตอนการทำงาน

1.3.1 ศึกษาการเขียนโปรแกรมด้วย Microsoft Visual Basic.NET

1.3.2 เริ่มเขียนโปรแกรมเกี่ยวกับ เมตริกซ์ คุณสมบัติ และ การจัดการเกี่ยวกับเมตริกซ์ จำนวนเชิงซ้อน และ การจัดการเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งต้องใช้เวลามากพอสมควร เพราะ

โปรแกรม VB.NET สามารถคำนวณได้เฉพาะคณิตศาสตร์พื้นฐานเท่านั้น

1.3.3 ศึกษาทฤษฎีในเรื่อง สเตทสเปซ แล้วนำมาเขียนโปรแกรมจากนั้นตรวจสอบผลที่ได้กับทฤษฎีที่อ้างอิงถึง

1.4 ขอบเขตเนื้อหาของโครงงาน

1.4.1 ฟังก์ชั่นพื้นฐาน

- การบวก,การลบ,การคูณ เมตริกซ์
- การหาอินเวอร์สเมตริกซ์
- การหาดีเทอร์มิแนนท์

1.4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่นถ่ายโอนกับสมการสภาวะ

- การคำนวณฟังก์ชั่นถ่ายโอนจากสมการสภาวะ โดยอัลกอลิริทึมของเลเวอเรีย

1.4.3 การ Realization ของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา

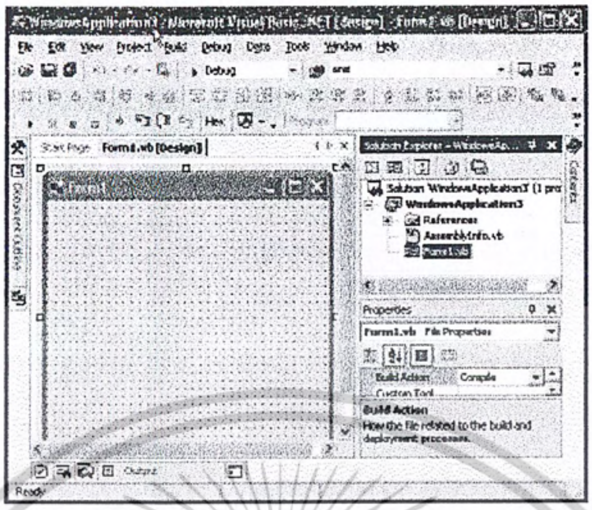
- รูปแบบ Companion
  - รูปแบบ Controllable Canonical
  - รูปแบบ Observable Canonical
- รูปแบบ Jordan Canonical
- วิธีการวนซ้ำแบบ
  - Householder Reflection
  - QR Factorization
- รูปแบบ Tridiagonal

1.4.4 การคำนวณหา Transition Matrix e^{At} สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา

- การคำนวณหา Transition Matrix e^{At} ด้วยวิธีกระจายอนุกรมเทเลอร์

1.4.5 โครงสร้างของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา

- ความสามารถในการควบคุมได้และความสามารถในการสังเกตได้



รูปที่ 1.1 แสดงสภาวะแวดล้อมในการทำงานของโปรแกรมวิชวลเบสิคดอทเน็ท

บทที่ 2

ระบบเชิงเส้น

2.1 การนำเสนอสเตทสเปซ (State Space Representation)

สมการสภาวะ เขียนในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 โดยเฉพาะกรณีระบบเชิงเส้น สามารถนำเสนอได้ในลักษณะเฉพาะดังนี้

ระบบเชิงเส้นแปรผันตามเวลา (Time-varying linear system)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}(t)x(t) + \mathbf{B}(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}(t)x(t) + \mathbf{D}(t)u(t)\end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

ระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา (Time-invariant linear system)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

เมื่อ **A**(t),**B**(t),**C**(t),**D**(t) หรือ **A,B,C,D** คือ เมตริกซ์ขนาด $n\times n$ $n\times m$ $p\times n$ $p\times m$ ตามลำดับ

$x(t)$ คือ เวคเตอร์สภาวะที่มีขนาดเท่ากับ n

$y(t)$ คือ เวคเตอร์ที่มีเอาท์พุทขนาดเท่ากับ p

$u(t)$ คือ เวคเตอร์อินพุทที่มีขนาดเท่ากับ m

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่นถ่ายโอนและตัวแปรสภาวะ

จากรูปแบบสมการสภาวะ พิจารณาหาฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา โดยการแปลงลาปลาซสมการสภาวะข้างต้น ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}sX(s) - x_0 &= \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{C}X(s) + \mathbf{D}U(s)\end{aligned}$$

$$X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}x_0 - (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}x_0 + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]U(s)$$

เมื่อ **I** คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)

สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นที่เท่ากับศูนย์ นั่นคือ $x_0 = 0$ จะได้ว่า

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

2.3 การคำนวณฟังก์ชั่นถ่ายโอนจากสมการสภาวะ

ในการคำนวณฟังก์ชั่นถ่ายโอนเราต้องการเมตริกซ์ผกผันของ (sI-A) สำหรับการคิดคำนวณ $(sI-A)^{-1}$ เราสามารถหาได้จากอัลกอริทึมของเลเวอเรีย (Leverrier Algorithm)

$$\text{ให้ } (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} = \frac{\mathbf{P}_{n-1}s^{n-1}+\mathbf{P}_{n-2}s^{n-2}+\ldots+\mathbf{P}_1 s+\mathbf{P}_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

เมื่อ $\mathbf{P}_i$ คือ เมตริกซ์ที่มีขนาด $n\times n$ และ a_i คือเลขจริง

โดย $\mathbf{P}_i$ และ a_i สามารถคำนวณด้วยวิธีดังนี้

$$\mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{I} \Rightarrow a_{n-1} = -tr(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{P}_{n-2} = \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{A}+a_{n-1}\mathbf{I} \Rightarrow a_{n-2} = -\frac{1}{2}tr(\mathbf{P}_{n-2}\mathbf{A})$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A}+a_{k+1}\mathbf{I} \Rightarrow a_k = -\frac{1}{n-k}tr(\mathbf{P}_k\mathbf{A})$$

$\mathbf{P}_i\mathbf{A}+a_i\mathbf{I}=0$ เป็นเงื่อนไขสำหรับการตรวจสอบ

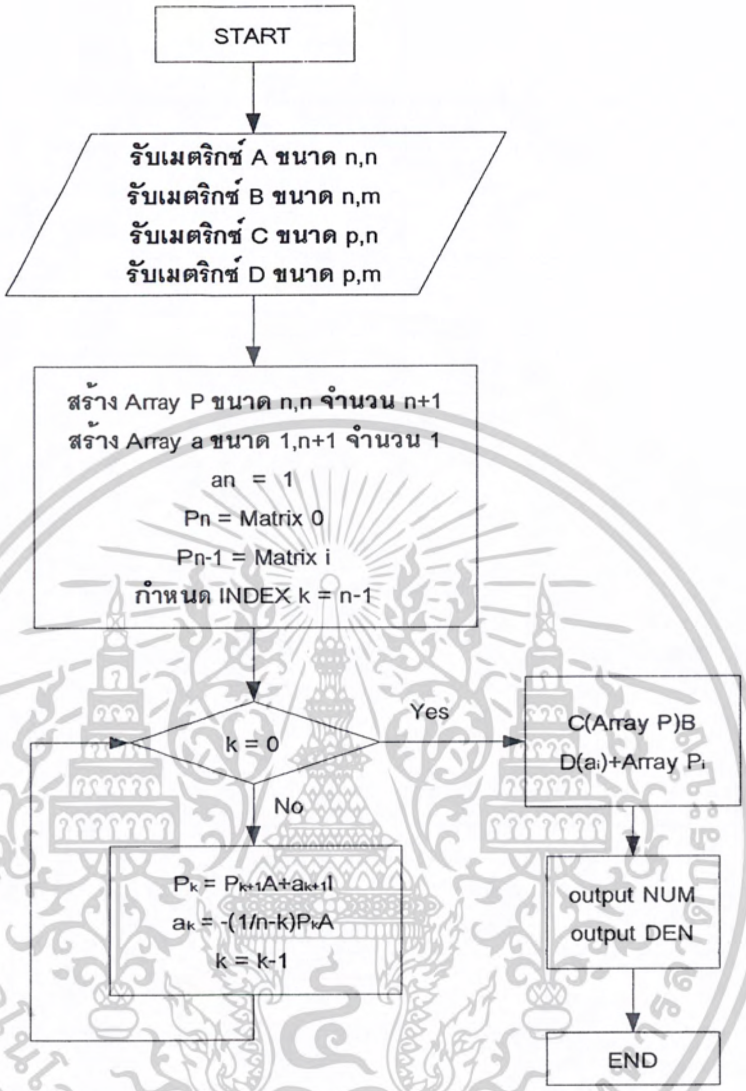
$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ผลรวมแต่ละสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก

เมื่อเราคำนวณได้ค่าที่ต้องการแล้วนำค่าไปเก็บไว้ตาม array ที่สร้างไว้ แล้วนำ **C** คูณทางซ้าย แล้วนำ **B** คูณทางขวาของ array **P** แต่ละตัว และนำผลลัพธ์ไปเก็บไว้ในที่เดิมจากนั้นนำเมตริกซ์ **D** คูณกับ ค่าใน array a_k ทุกๆ k แล้วนำไปบวกกับ array **P** ที่ ตัวชี้เดียวกันแล้วนำค่าเก็บไว้ที่เดิม สำหรับวิธีการอ่านค่า สามารถอ่านได้ดังนี้

- Array a จะเป็น ค่าพหุนามตัวส่วน (DEN) โดยจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์แต่ละอันดับ โดยเรียงจากมากไปหาน้อย เช่น [1 5 8 3 4] = $s^4+5s^3+8s^2+3s+4$
- Array **P** จะเป็น ค่าพหุนามตัวเศษ (NUM) โดยจำนวน array จะแสดงค่าสัมประสิทธิ์แต่ละอันดับ โดยเรียงจากมากไปหาน้อย

เช่น

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7 & 9\\ 0 & 5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}s^2+7 & 3s^2+s+9\\ 2s^2+5s & 6s^2+4s+5\end{bmatrix}$$



รูปที่ 2.1 โฟลว์ชาร์ตการคำนวณฟังก์ชั่นถ่ายโอนจากสมการสภาวะ

บทที่ 3

Realization ของระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรผันตามเวลา

พิจารณาระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรผันตามเวลา แบบ อินพุทเดียว เอาท์พุทเดียว นำเสนอด้วยฟังก์ชั่นถ่ายโอน $G(s)$ ถ้าสามารถหาระบบพลวัตเชิงเส้น $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ ที่มีขนาดจำกัดซึ่งสอดคล้องกับระบบดังกล่าวได้แล้ว จะกล่าวว่า $G(s)$ สามารถ Realizable โดย $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ เป็น Realization ของ $G(s)$

จากบทที่ 2 เมื่อกำหนด $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ สามารถหาฟังก์ชั่นถ่ายโอน $G(s)$ ในรูปฟังก์ชั่นตรรกยะ (Rational Function) ของ s โดยที่ $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$

ถ้า $\mathbf{D}=0$ ฟังก์ชั่นถ่ายโอน $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ จะมีพหุนามตัวส่วนที่มีดีกรีมากกว่าตัวเศษอย่างน้อย 1 ระบบดังกล่าวเรียกว่า ระบบที่ถูกต้องอย่างสมบูรณ์ (Strictly Proper System)

ถ้า $\mathbf{D}$ เป็นค่าคงที่ $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$ จะมีพหุนามตัวส่วนที่มีดีกรีเท่ากับตัวเศษ ระบบดังกล่าวเรียกว่า ระบบที่ถูกต้อง (Proper System)

นั่นคือสรุปได้ว่า $G(s)$ จะ Realizable ถ้าระบบเป็นระบบที่ถูกต้อง

$$\text{ถ้า } G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

$$= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \delta$$

เมื่อ $\beta_i = b_i - b_n\alpha_i$ สำหรับ $i = 0,1,\ldots,n-1$ และ $\delta = b_n$

การ Realization ที่จะนำเสนอมีทั้งหมด 3 รูปแบบ คือ รูปแบบ Controllable Canonical ,รูปแบบ Observable Canonical,รูปแบบ Jordan Canonical

3.1 รูปแบบ Companion

รูปแบบ Companion สามารถที่จะทำการ Realization ได้ 2 รูปแบบดังที่จะกล่าวต่อไปนี้

3.1.1 รูปแบบ Controllable Canonical

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \delta$$

จากสมการ เราจะสามารถแยกออกเป็น 2 ส่วน สามารถเขียนได้ว่า

$$Y(s) = Z(s) + \delta U(s)$$

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

$$\frac{Z(s)}{X_1(s)} = \beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \beta_0$$

ถ้า $X_1(t) = L^{-1}\{X_1(s)\}$ จะได้ว่า $x_1^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}x_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1\dot{x}(t) + \alpha_0 x_1(t) = u(t)$

กำหนดให้

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \end{array}\right\} \text{ จะได้ } \dot{x}_n = -\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 - \ldots - \alpha_{n-1}x_n + u(t)$$

และ $y(t) = z(t) + \delta u(t)$

$= \beta_0 x_1(t) + \beta_1 x_2(t) + \ldots + \beta_{n-1}x_n(t) + \delta u(t)$

จากสมการข้างต้นเขียน ได้ในรูป $\dot{x} = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$

$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \delta$$

3.1.2 รูปแบบ Observable Canonical

จากรูปแบบ Controllable Canonical ของ $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ เป็น Realization ของ $G(s)$ จะพบว่า $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$ ก็จะเป็น Realization ของ $G(s)$ ด้วย

พิจารณา $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}^T(s\mathbf{I}-\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{C}^T+\mathbf{D}^T &= \mathbf{B}^T[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]^T\mathbf{C}^T+\mathbf{D}^T \\
&= [\mathbf{C}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]\mathbf{B}]^T+\mathbf{D}^T \\
&= [G(s)]^T \\
&= G(s)
\end{aligned}
$$

ถ้า (A,B,C,D) เป็น Realization ของ $G(s)$ โดยรูปแบบ Controllable Canonical แล้ว

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \overline{\mathbf{A}}x(t)+\overline{\mathbf{B}}u(t) \\
y(t) &= \overline{\mathbf{C}}x(t)+\overline{\mathbf{D}}u(t)
\end{aligned}
$$

ถ้า $(\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{B}},\overline{\mathbf{C}},\overline{\mathbf{D}})$ เป็น Realization ของ G(s) โดยรูปแบบ Observable Canonical

$$
\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{B}}=\mathbf{C}^T=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}
$$

$$
\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{B}^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{D}}=\mathbf{D}=\delta
$$

3.1.3 รูปแบบ Jordan Canonical

__กรณีที่ 1__ ถ้าฟังก์ชั่นถ่ายโอน $G(s)$ จากสมการข้างต้นมีโพลไม่ซ้ำค่ากัน N ตัว $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$ $G(s)$ สามารถกระจายด้วยเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$
G(s) = \frac{\gamma_1}{s-\lambda_1}+\frac{\gamma_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{\gamma_n}{s-\lambda_n}+\delta
$$

สำหรับค่า $\gamma_i = \lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)(G(s))$

กำหนด $\frac{X_k(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-\lambda_k}$ สำหรับทุกๆค่า k = 1,2,3,....,n

ดังนั้น $Y(s) = \gamma_1X_1(s)+\gamma_2X_2(s)+\gamma_3X_3(s)+\ldots+\gamma_nX_n(s)+\delta U(s)$

นั่นคือเขียนในรูปสมการสภาวะและสมการเอาท์พุทได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}u(t) \\
y(t) &= \mathbf{C}x(t)+\mathbf{D}u(t)
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \delta$$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้าฟังก์ชันถ่ายโอน $G(s)$ จากสมการข้างต้นมีโพลซ้ำค่ากัน

สมมติว่า $G(s)$ สามารถกระจายด้วยเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$G(s) = \frac{\gamma_{11}}{(s-\lambda_1)^3} + \frac{\gamma_{12}}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{\gamma_{13}}{(s-\lambda_1)} + \frac{\gamma_4}{(s-\lambda_4)} + \cdots + \frac{\gamma_n}{(s-\lambda_n)} + \delta$$

เมื่อ
$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \lim_{s\to\lambda_1}\left\{(s-\lambda_1)^3 G(s)\right\} \\ \gamma_{12} &= \lim_{s\to\lambda_1}\left\{\frac{\partial}{\partial s}(s-\lambda_1)^3 G(s)\right\} \\ \gamma_{13} &= \lim_{s\to\lambda_1}\left\{\frac{\partial^2}{\partial s^2}(s-\lambda_1)^3 G(s)\right\} \\ \gamma_n &= \lim_{s\to\lambda_n}\left\{(s-\lambda_n) G(s)\right\} \end{aligned}$$

กำหนด
$$\begin{aligned} \frac{X_3(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s-\lambda_1} \;\rightarrow\; \dot{x}_3(t) = \lambda_1 x_3(t) + u(t) \\ \frac{X_2(s)}{X_3(s)} &= \frac{1}{s-\lambda_1} \;\rightarrow\; \dot{x}_2(t) = \lambda_1 x_2(t) + x_3(t) \\ \frac{X_1(s)}{X_2(s)} &= \frac{1}{s-\lambda_1} \;\rightarrow\; \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + x_2(t) \\ \frac{X_4(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s-\lambda_4} \;\rightarrow\; \dot{x}_4(t) = \lambda_4 x_4(t) + u(t) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \frac{X_n(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s-\lambda_n} \;\rightarrow\; \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + u(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = \gamma_{11}x_1(t) + \gamma_{12}x_2(t) + \gamma_{13}x_3(t) + \gamma_4 x_4(t) + \cdots + \gamma_n x_n(t) + \delta u(t)$$

นั่นคือเขียนในรูปสมการสภาวะและสมการเอาท์พุทได้ว่า

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_4 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \delta$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1</u> การคำนวณ รูปแบบ Controllable Canonical

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)}{s^2+5s+6}$$

จากโจทย์นำมาแก้สมการสเตท

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = (s+1)\frac{X_1(s)}{U(s)}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

จากสมการสเตทที่ได้มาจัดเป็นรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

รูปแบบเอาท์พุทที่ได้จากการแก้สมการ

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = (s+1)\frac{X_1(s)}{U(s)}$$

$$Y(s) = sX_1(s) + X_1(s)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.2</u> การคำนวณ รูปแบบ Observable Canonical

$$\mathrm{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)}{s^2+5s+6}$$

จากโจทย์นำมาแก้สมการ

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = (s+1)\frac{X_1(s)}{U(s)}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

จากสมการสเตทที่ได้มาจัดเป็นรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

รูปแบบเอาท์พุทที่ได้จากการแก้สมการ

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = (s+1)\frac{X_1(s)}{U(s)}$$

$$Y(s) = sX_1(s) + X_1(s)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

นำมาจัดเป็น รูปแบบ Observable Canonical

$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^T, \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{C}^T$

จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{B}^T$

จะได้

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.3</u> การคำนวณรูปแบบ Jordan Canonical

$$\mathrm{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)}{s^2+5s+6}$$

จากโจทย์นำมาแก้สมการ

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+2)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -1\frac{X_1(s)}{U(s)} + 2\frac{X_2(s)}{U(s)}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = -2x_1 + u(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = -3x_2 + u(t)$$

จากสมการสเตทที่ได้มาจัดเป็นรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

รูปแบบเอาท์พุทที่ได้จากการแก้สมการ

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -1\frac{X_1(s)}{U(s)} + 2\frac{X_2(s)}{U(s)}$$

$$Y(s) = -1X_1(s) + 2X_2(s)$$

$$y(t) = -1x_1(t) + 2x_2(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.4</u> การแก้สมการในกรณีที่เกิดรากซ้ำ

$$F(s) = \frac{\gamma_1}{(s+\lambda_1)^2} + \frac{\gamma_2}{(s+\lambda_1)} + \frac{\gamma_3}{(s+\lambda_2)}$$

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{(s+\lambda_1)} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 + x_2$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+\lambda_1)} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = -\lambda_1 x_2 + u$$

$$\frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+\lambda_2)} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_3 = -\lambda_2 x_3 + u$$

จากสมการสเตทที่ได้มาจัดเป็นรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

รูปแบบเอาท์พุทที่ได้จากการแก้สมการ

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \gamma_1 \frac{X_1(s)}{U(s)} + \gamma_2 \frac{X_2(s)}{U(s)} + \gamma_3 \frac{X_3(s)}{U(s)}$$
$$Y(s) = \gamma_1 X_1(s) + \gamma_2 X_2(s) + \gamma_3 X_3(s)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

สำหรับวิธีการหาค่าไอเก็น จะเสนอ วิธีการวนซ้ำ แบบ Householder และ QR ซึ่งวิธีดังกล่าวมีข้อดีคือ สามารถหาค่าไอเก็น ได้ทั้งค่าจริงและค่าเชิงซ้อนและสามารถหาได้ทุกค่า

3.2 Householder Reflection

Householder Reflection มักแสดงในรูปของพจน์ของการคูณ โดยเมตริกซ์ ซึ่งเมตริกซ์จะอยู่ในรูปแบบ

$$\mathrm{H} = \mathbf{I}\text{-}2\mathrm{ww}^T$$

w คือยูนิตเวคเตอร์สดมภ์ , **I** คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์

อัลกอริทึมสำหรับเมตริกซ์ Householder

กำหนด เวคเตอร์ x ขนาด n $[x_1,\ldots,x_n]^T$

กำหนด เวคเตอร์ w ขนาด n $[w_1,\ldots,w_n]^T$

ตัวชี้ k โดยที่ $k \in [1,n]$

หาเวคเตอร์ w ที่เป็นส่วนหนึ่งของ Householder Matrix $\mathrm{H} = \mathbf{I}\text{-}2\mathrm{ww}^T$ ในการทำสมาชิกเวคเตอร์ w ตำแหน่งที่ $k+1,\ldots,n$ มีค่า = 0 หรือ กล่าวว่า $\mathbf{H}\mathrm{x} = [z_1,\ldots,z_k,0,0,\ldots,0]^T$

ขั้นตอนที่ 1 กำหนด $w_i = 0$ สำหรับ $i = 1,\ldots,k-1$

ขั้นตอนที่ 2 หา $g = \sqrt{x_k^2 + \ldots + x_n^2}$, $s = \sqrt{2g(g+|x_k|)}$

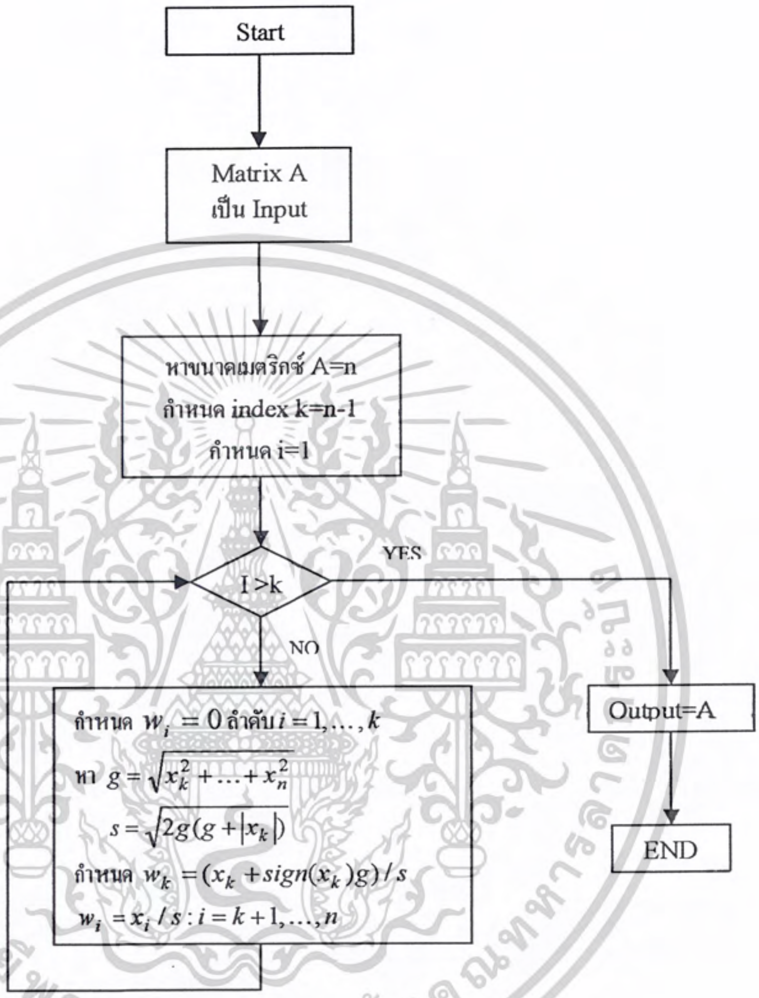
ขั้นตอนที่ 3 กำหนด $w_k = (x_k + sign(x_k)g)/s$, กำหนด $w_i = x_i / s$ สำหรับ $i = k+1,\ldots,n$

ข้อสังเกต

1. เมตริกซ์ Householder จะนำมาคำนวณทุกๆสดมภ์แต่ละสดมภ์ของ **A** ยกเว้นครั้งสุดท้าย ทั้งนี้เพื่อต้องการลดสมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักให้เป็นศูนย์

2. $sign(x) = \dfrac{x}{|x|}$ สำหรับ x ที่ไม่เท่ากับ 0 ถ้า $x = 0$ แล้ว $sign(x) = 0$

3. เมตริกซ์ **H** มีสมบัติเป็นทั้งเมตริกซ์สมมาตรและเชิงตั้งฉาก ($\mathbf{H} = \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^T$)



รูปที่ 3.1 แสดงโฟลว์ชาร์ตการเขียนโปรแกรมหาเมตริกซ์ Householder

3.3 QR Factorization

แนวคิดการแยกตัวประกอบเมตริกซ์ **A** ไปเป็นรูปแบบ QR (Basic QR Factorization) เมตริกซ์ **A** สามารถแยกตัวประกอบไปเป็นรูปแบบ **A=QR**

เมื่อ **Q** คือ เมตริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Matrix) มีคุณสมบัติคือ $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$

R คือ เมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน (Upper Triangular Matrix)

อัลกอริทึมสำหรับ QR Factorization

เงื่อนไข A เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$

- **กำหนด $\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{A}$**
- For k = 1 To n-1

  หา $\mathbf{H}^{(k)}$ เพื่อที่จะลดตำแหน่ง $k+1 \ldots n$ ของสดมภ์ที่ k ของ $\mathbf{R}^{(k-1)}$ ให้เป็น 0

  กำหนด $\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)}\mathbf{R}^{(k-1)}$

  Next k
- **กำหนด Q=I**
- For k = n-1 To 1 step-1

  $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^{(k)}\mathbf{Q}$

  Next k
- **กำหนด $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(n-1)}$**

3.4 แนวคิดการหาค่าไอเก็น

3.5.1 จากเมตริกซ์ $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ จะมีค่าไอเก็นเหมือนกับของเมตริกซ์ **A** ถ้า **P** เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐานใดๆ

3.5.2 จุดมุ่งหมายในการทำเพื่อที่จะแปลงเมตริกซ์ **A** ไปอยู่ในรูปที่สังเกตค่าไอเก็นได้ง่าย

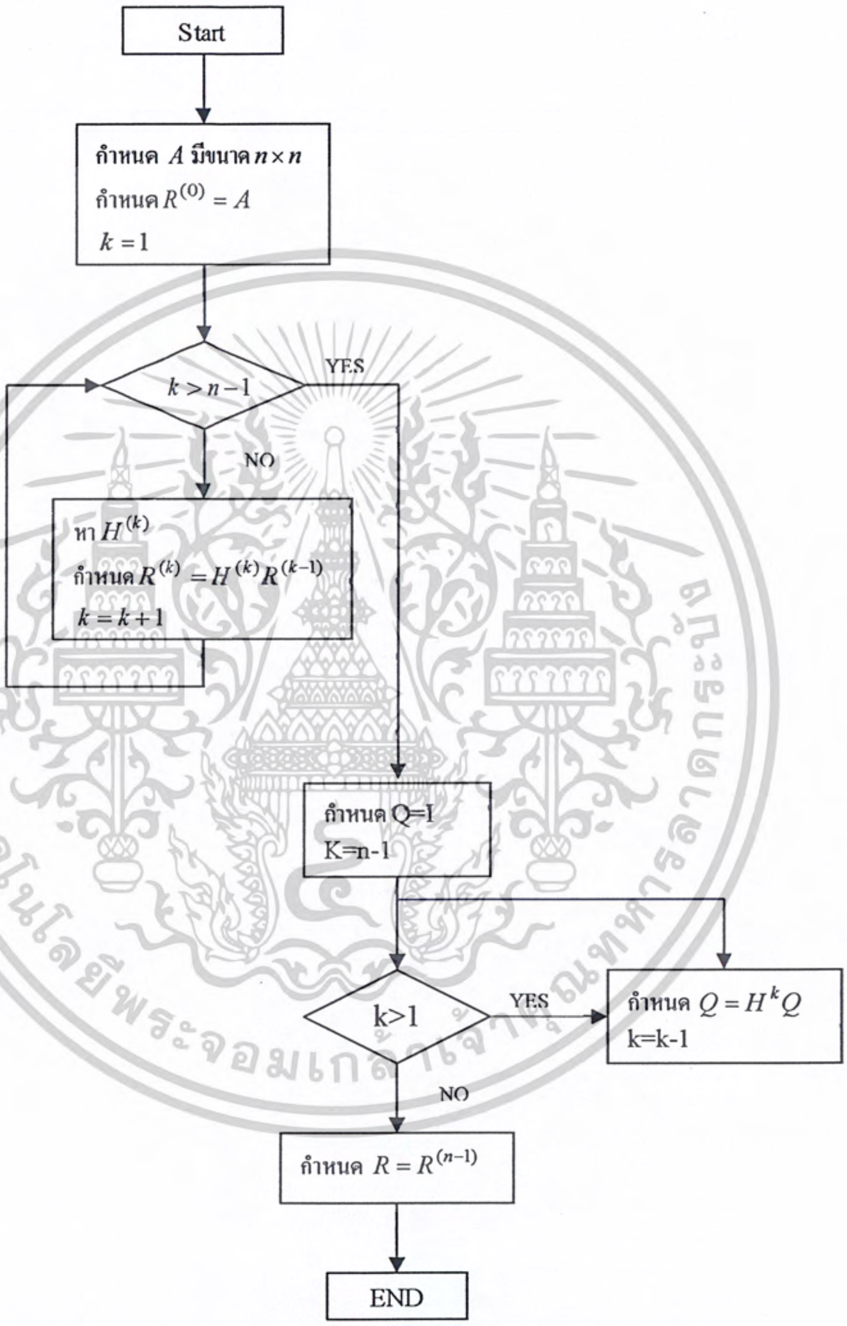
3.5.3 ถ้าค่าไอเก็นของ **A** เป็นไปตามเงื่อนไข $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots |\lambda_n|$ การวนซ้ำตาม อัลกอริทึมที่จะกล่าวต่อไปจะลู่เข้าจนทำให้ เมตริกซ์ **A** กลายไปเป็นรูปเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนที่ซึ่ง ค่าไอเก็นอยู่บนแนวเส้นทแยงมุม

3.5.4 ถ้าค่าไอเก็นของ **A** เกิดค่าซ้ำกันหรือค่าเชิงซ้อน การวนซ้ำตามอัลกอริทึมจะลู่เข้าจนทำให้เมตริกซ์ **A** ในแนวเส้นทแยงมุมเกิดบล็อกในแนวเส้นทแยงมุม

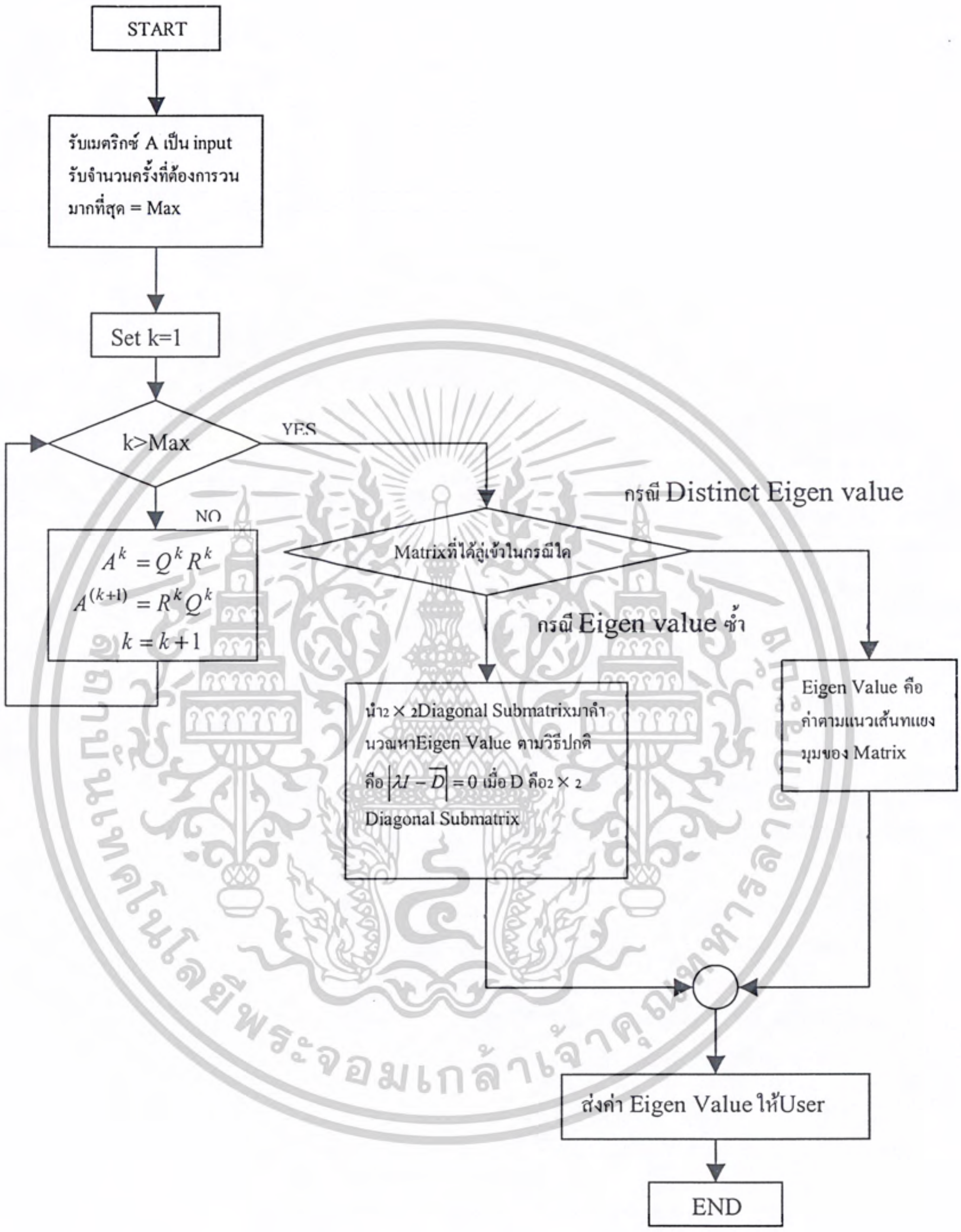
3.5.5 ค่าไอเก็นจะแบ่งเป็น 2 กรณีคือ

3.5.5.1 ถ้าเป็นสมาชิกค่าเดี่ยวตามแนวเส้นทแยงมุมแล้วค่าไอเก็นเท่ากับตัวมันเอง

3.5.5.2 ถ้าเป็นเมตริกซ์ย่อยตามแนวทแยงมุมขนาด 2×2 แสดงว่าเกิดค่าไอเก็นที่ซ้ำกันหรือ ค่าไอเก็นที่เป็นคู่จำนวนเชิงซ้อนสังยุคซึ่งเวลาคำนวณก็คิดเหมือนปกติคือ $|\lambda\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}| = 0$ เมื่อ $\overline{\mathbf{D}}$ คือ 2×2 Diagonal Submatrices จากนั้นหาค่า λ ออกมา



รูปที่ 3.2 แสดงโฟลว์ชาร์ตการเขียนโปรแกรมหา QR Factorization



รูปที่ 3.3 แสดงโฟลว์ชาร์ตการเขียนโปรแกรมหาค่าไอเก็น

3.5 รูปแบบ Tridiagonal

จากสมการ $G(s) = \dfrac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$

$$= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \delta$$

$$= \delta + \cfrac{1}{b_1 + a_1 s + \cfrac{1}{b_1 + a_2 s + \cfrac{1}{\ddots \; \ddots \; \cfrac{1}{b_{n-1} + a_{n-1}s + \cfrac{1}{b_n + a_n s}}}}}$$

$\forall a_i \neq 0$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,n$

กำหนดตัวแปรสภาวะ

$$\frac{X_n(s)}{X_{n-1}(s)} = \frac{1}{b_n + a_n s}$$

$$\frac{X_{n-1}(s)}{X_{n-2}(s)} = \frac{1}{b_{n-1} + a_{n-1}s + \dfrac{X_n(s)}{X_{n-1}(s)}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{b_2 + a_2 s + \dfrac{X_3(s)}{X_2(s)}}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{b_1 + a_1 s + \dfrac{X_2(s)}{X_1(s)}}$$

$$Y(s) = X_1(s) + \delta U(s)$$

เขียนในรูปสมการสภาวะ

$$\dot{x}_n(t) = \frac{1}{a_n}x_{n-1}(t) - \frac{b_n}{a_n}x_n(t)$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = \frac{1}{a_{n-1}}x_{n-2}(t) - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}x_{n-1}(t) - \frac{1}{a_{n-1}}x_n(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{a_2}x_1(t) - \frac{b_2}{a_2}x_2(t) - \frac{1}{a_2}x_2(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-b_1}{a_1}x_1(t) - \frac{1}{a_1}x_2(t) - \frac{1}{a_1}u(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_2} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} & \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix} \quad , \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \quad , \mathbf{D} = \delta$$

แนวคิดการเขียนโปรแกรมการ Realization

ขั้นตอนแรกเราทำการแปลงรูปให้อยู่ในรูปของ

$$\frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \beta_{n-2} s^{n-2} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \delta$$

โดยให้ดีกรีของเศษและส่วนมีค่าเท่ากันก่อนแล้วทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวส่วนที่มีดีกรีสูงสุดมีค่าเท่ากับ 1 เช่น

$$\frac{5s^3 + 2s^2 + s + 4}{3s^5 + 6s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 3s + 9} \quad \text{แปลงรูปเป็น} \quad \frac{0s^5 + 0s^4 + 5s^3 + 2s^2 + s + 4}{3s^5 + 6s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 3s + 9}$$

จากนั้นเอา 3 หารทุกสัมประสิทธิ์จะได้

$$\frac{0s^5 + 0s^4 + 1.666s^3 + 0.666s^2 + 0.333s + 1.333}{s^5 + 2s^4 + 1.333s^3 + 2.333s^2 + s + 3}$$

เมื่อได้สมการที่แปลงรูปเรียบร้อยแล้วเราจะทำการ Realization ให้อยู่ในรูปของ Controllable Canonical Form และ Observable Canonical Form ได้จากสมการ

$\beta_i = b_i - b_n \alpha_i$ โดย $i = 0,1,2,\ldots,n$ และ $\delta = b_n$

เมื่อได้ครบทุกค่าแล้วเราจึงนำมาจัดเรียงให้อยู่ในรูปแบบต่าง ๆ

- รูปแบบ Controllable Canonical Form

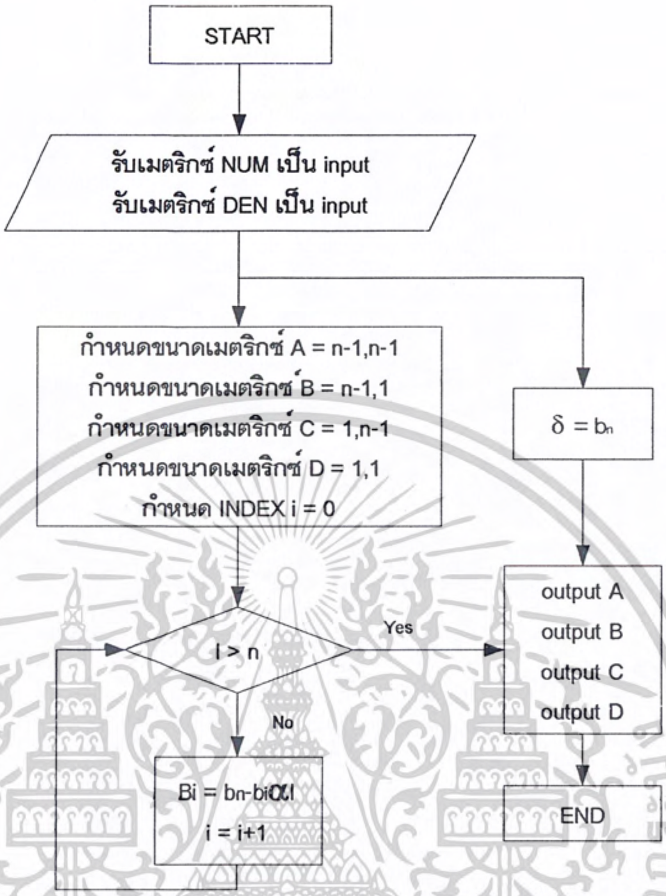
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{D} = \delta$$

- รูปแบบ Observable Canonical Form

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} = \delta$$



รูปที่ 3.4 โฟลว์ชาร์ตการ Realization

บทที่ 4
ผลคำตอบของสมการสภาวะเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา

4.1 การคำนวณหา Transition Matrix e^{At} สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา

ในการคำนวณหาเมตริกซ์เอกซ์โพแนนเชียลของเมตริกซ์ **A** ขนาด $n \times n$ สามารถที่จะแสดงความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

และยิ่งไปกว่านั้นหากมีเวลาที่แน่นอนเมตริกซ์ e^{At} จะเป็นเมตริกซ์ที่ลู่เข้า สำหรับในหัวข้อนี้จะนำเสนอการคำนวณเมตริกซ์ e^{At} ด้วยวิธีการกระจายในรูปอนุกรมเทย์เลอร์

จากการกระจาย e^{At} ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \ldots \\ &= \mathbf{I} + (\mathbf{A}t) + \frac{\mathbf{A}t}{2}\left(\frac{\mathbf{A}t}{1!}\right) + \frac{\mathbf{A}t}{3}\left(\frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!}\right) + \ldots + \frac{\mathbf{A}t}{n}\left(\frac{\mathbf{A}^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \ldots \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นที่สังเกตได้ว่าพจน์ที่อยู่ในวงเล็บของสมการด้านบน คือ พจน์ที่อยู่ก่อนหน้า ซึ่งจากข้อสังเกตดังกล่าว จะนำเอาไปเป็นส่วนหนึ่งของแนวการเขียนโปรแกรม สำหรับขอบเขตของการคำนวณด้วยวิธีนี้คือเราจะใช้นอร์มของเมตริกซ์เป็นตัวบ่งชี้ว่าเมื่อใดจะหยุดการคำนวณ

4.2 การหาผลคำตอบของสมการสภาวะเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา

จากสมการสภาวะ $\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$

เมื่อ $x(t)$: เวคเตอร์สภาวะที่มีขนาดเท่ากับ n

$u(t)$: เวคเตอร์อินพุทที่มีขนาดเท่ากับ m

A : เมตริกซ์ค่าคงที่ขนาดเท่ากับ $n \times n$

B : เมตริกซ์ค่าคงที่ขนาดเท่ากับ $n \times m$

เมื่อนำสมการมาจัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \mathbf{A}x(t) &= \mathbf{B}u(t) \\ e^{-\mathbf{A}t}[\dot{x}(t) - \mathbf{A}x(t)] &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}u(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}\mathbf{B}u(t)$$

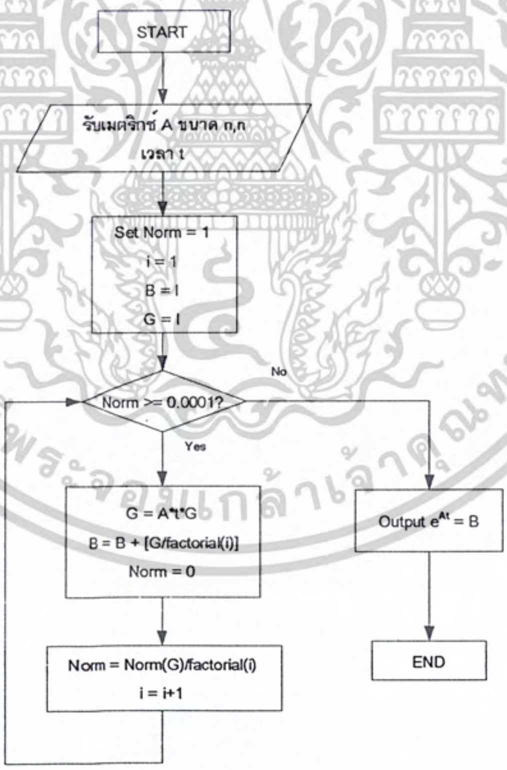
$$e^{-At}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-At}\mathbf{B}u(\tau)dt$$

$$x(t) = e^{-At}x(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)dt$$

จากสมการถ้ากำหนดเวลาเริ่มต้นเป็น t_0 ผลคำตอบสมการจะปรับเปลี่ยนเป็น

$$x(t) = e^{-\mathbf{A}(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)dt$$

$$\text{Norm of Matrix} = \|M\| = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} |m_{ij}|$$



รูปที่ 4.1 โฟลว์ชาร์ตการหาค่า e^{At}

บทที่ 5
คุณสมบัติของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา

ในบทนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติซึ่งใช้ในการตรวจสอบระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาดังต่อไปนี้

5.1 ความสามารถในการควบคุมได้ **(Controllability)**

พิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}u(t)\\ y(t) &= \mathbf{C}x(t)+\mathbf{D}u(t)\end{aligned}$$

เมื่อ x, y, u คือเวคเตอร์ขนาด n, m, p ตามลำดับ

จากระบบหากมีอินพุท $u(t)$ ที่ซึ่งสามารถเคลื่อนสภาวะเริ่มต้น $x(t_0)=x_0$ ไปยังสภาวะสุดท้าย $x(t_0)$ บนช่วงเวลาจำกัด $t_f - t_0$ สเตท x_0 กล่าวว่า สามารถควบคุมได้ (Controllable) และถ้าทุกๆสภาวะเริ่มต้น สามารถควบคุมได้ระบบจะกล่าวว่า สามารถควบคุมได้อย่างสมบูรณ์

เงื่อนไขการตรวจสอบว่าระบบสามารถควบคุมได้

ระบบจะสามารถควบคุมได้อย่างสมบูรณ์ ถ้าแร็งค์ของเมตริกซ์ Controllability ที่นิยามโดย

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \;\; \mathbf{AB} \;\; \mathbf{A}^2\mathbf{B} \;\; \ldots \;\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

มีค่าเท่ากับขนาด n ของเมตริกซ์

แนวคิดในการเขียนโปรแกรมความสามารถในการควบคุมได้ (Controllability) จะนำเสนอในรูปที่ 5.1

5.2 ความสามารถในการสังเกตได้ **(Observability)**

ถ้าเอาท์พุทที่วัดได้จากระบบในช่วงเวลาที่จำกัด สามารถนำไปกำหนดสภาวะเริ่มต้น x_0 ของระบบได้ สภาวะ x_0 กล่าวว่า สามารถสังเกตได้ (Observable) และถ้าทุกๆสเตทของระบบ Observable ระบบจะกล่าวว่า สามารถสังเกตได้อย่างสมบูรณ์

เงื่อนไขในการตรวจสอบว่าระบบสามารถสังเกตได้

ระบบเชิงเส้นระบบหนึ่งจะ กล่าวว่า สามารถสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ ถ้าแร็งค์ของเมตริกซ์ Observability ที่นิยามโดย

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

มีค่าเท่ากับขนาด n ของเมตริกซ์

แนวคิดในการเขียนโปรแกรมความสามารถในการสังเกตได้ (Observability) จะนำเสนอในรูปที่ 5.2

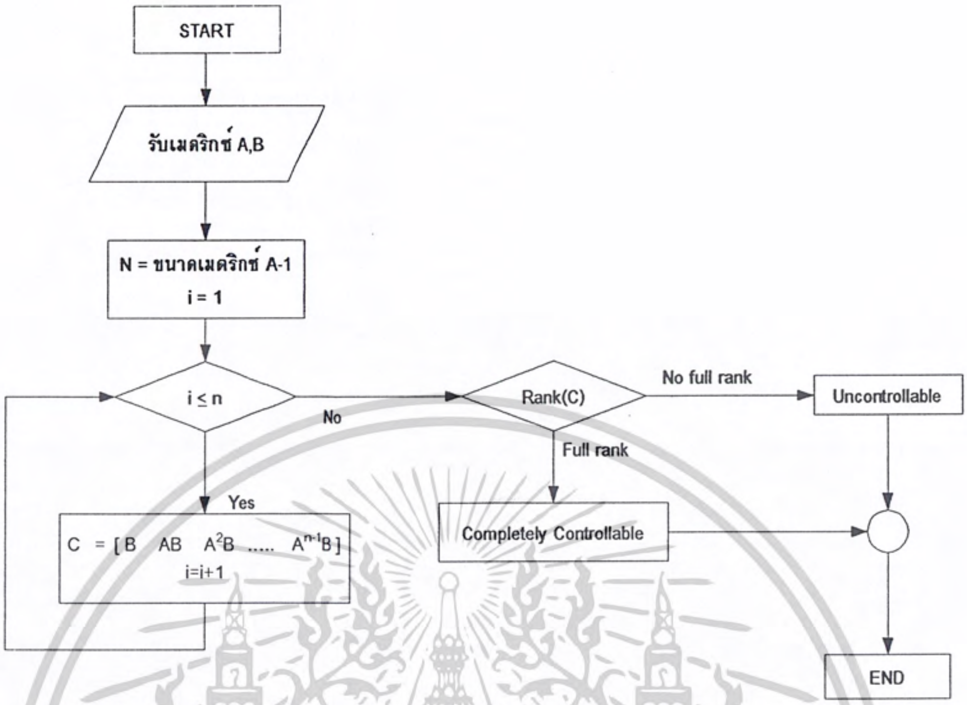
จากบทพิสูจน์บทหนึ่ง กล่าวว่า ระบบเชิงเส้นอินพุทเดียวเอาท์พุทเดียวไม่แปรผันตามเวลาจะสามารถควบคุมได้ และ สามารถสังเกตได้ก็ต่อเมื่อ พหุนามตัวเศษและพหุนามตัวส่วนของฟังก์ชั่นถ่ายโอนไม่มีตัวประกอบร่วมกัน ซึ่งจากบทพิสูจน์ดังกล่าวแสดงได้ด้วยการ Realization ไปสู่ รูปแบบ Jordan Canonical ซึ่ง ถ้าหากเกิดกรณีตัวประกอบร่วมกัน (Pole-Zero cancellations) เมื่อ Realization ไปสู่รูปแบบ Jordan Canonical แล้วจะทำให้สภาวะไม่สามารถสังเกตได้

เช่น

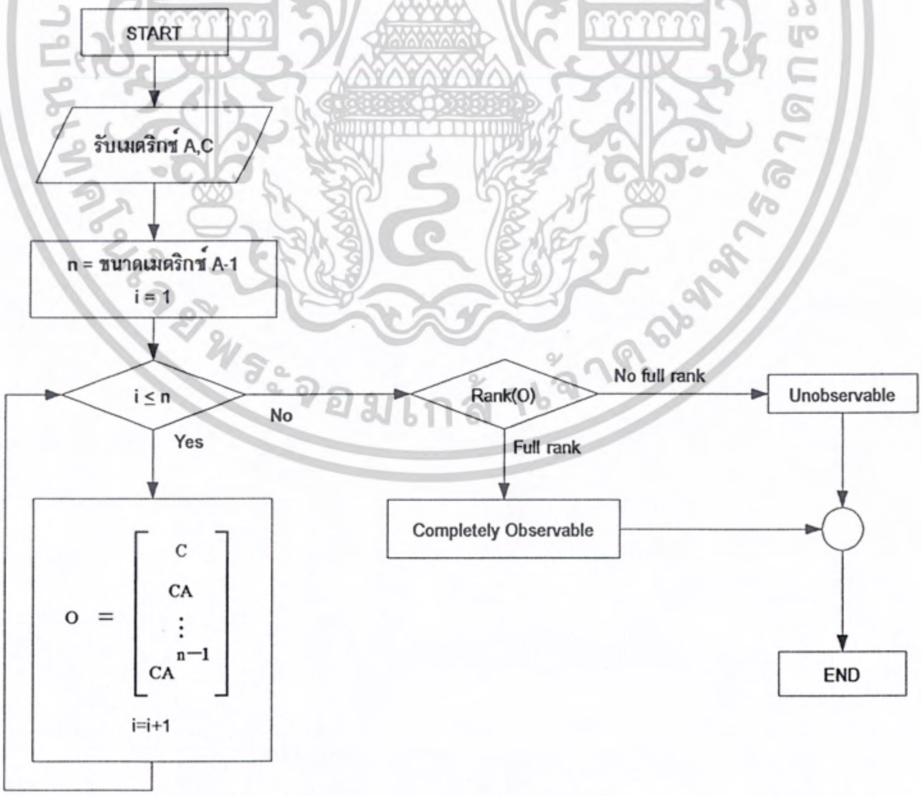
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

เกิดการ Cancellation ของ Factor $(s+1)$,นั่นคือโหมดที่ $s=-1$ ที่เป็นตัวทำให้เกิดพจน์ ke^{-t} ซึ่งถึงแม้ว่าจะมีอยู่ในระบบก็ตามแต่ไม่ปรากฏที่เอาท์พุท

โดยทั่วไปแล้วถ้าตัวเศษและส่วนของฟังก์ชั่นถ่ายโอน มีตัวประกอบร่วมกันเราสามารถเขียนสมการสภาวะได้ ทั้งใน รูปแบบ Controllable Canonical และรูปแบบ Observable Canonical และถ้าได้ทำการตัดกันดังกล่าวข้างต้นจะพบว่า ถ้าเขียนสมการสภาวะใน รูปแบบ Controllable Canonical แล้วระบบจะไม่สามารถสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ และในทำนองเดียวกันถ้าเขียนสมการสภาวะในรูปแบบ Observable Canonical แล้วระบบจะไม่สามารถควบคุมได้อย่างสมบูรณ์



รูปที่ 5.1 โฟลว์ชาร์ตการตรวจสอบความสามารถในการควบคุมได้(Controllability)



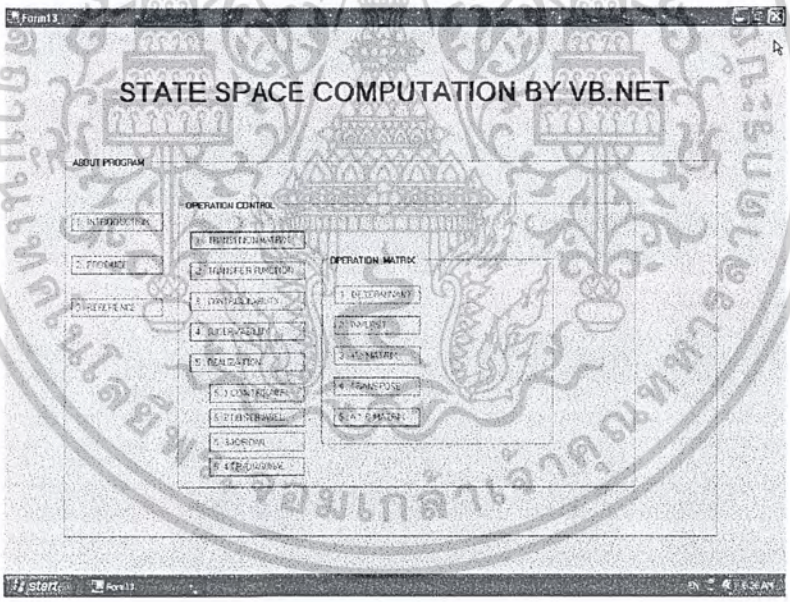
รูปที่ 5.2 โฟลว์ชาร์ตการตรวจสอบความสามารถในการสังเกตได้(Observability)

บทที่ 6
ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม วิชวลเบสิคดอทเน็ท

การใช้งานโปรแกรมที่สร้างขึ้นนั้นจะมีขั้นตอนดังนี้

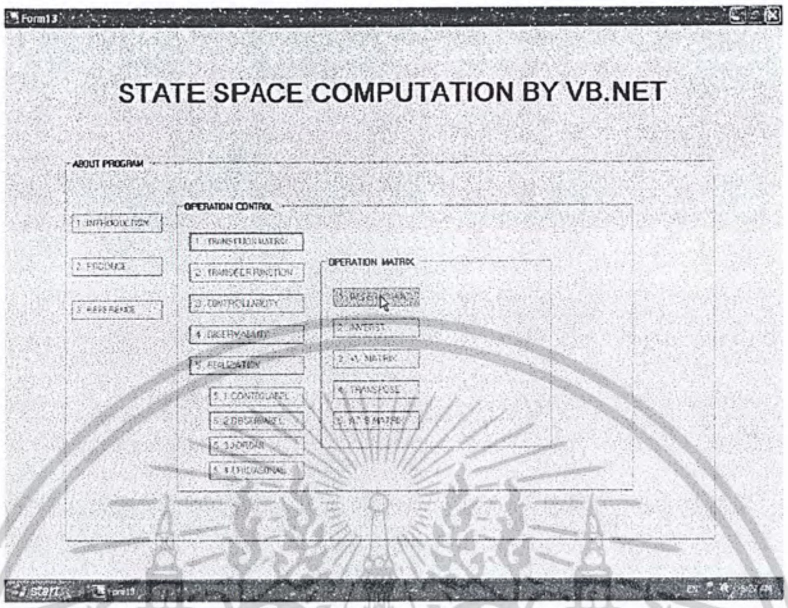
เปิดโปรแกรมขึ้นจะพบหน้าจอดังนี้หน้าจอแรกของโปรแกรมจะแบ่งออกเป็น 3 ส่วนประกอบด้วย ส่วนที่1 operation matrix ซึ่งจะเป็นส่วนที่ใช้ในการคำนวณทางด้านเมทริกซ์ ได้แก่ การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ การบวกลบเมทริกซ์ ทรานสโพสเมทริกซ์ อินเวอสเมทริกซ์ และการคูณเมทริกซ์ ส่วนที่ 2 จะเป็นส่วนในการคำนวณทางด้านระบบควบคุม ซึ่งจะมีการหาค่าทรานซิชั่นเมทริกซ์ ทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่น ความสามารถควบคุมได้และสังเกตได้ และการหารีไลท์เซชั่น ส่วนที่ 3 จะเป็นข้อแนะนำในการใช้โปรแกรม

1. แสดงการหาค่าทางด้านเมทริกซ์

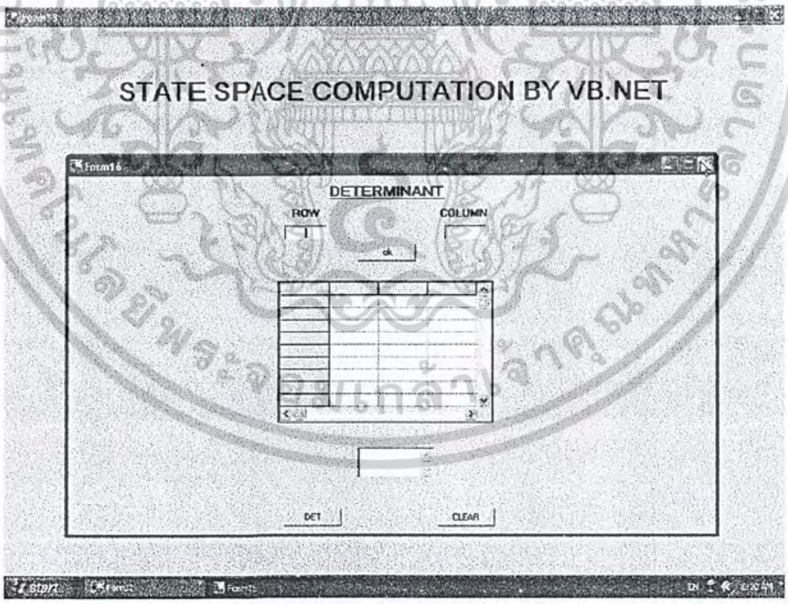


รูปที่6.1 แสดงหน้าจอหลักของโปรแกรม

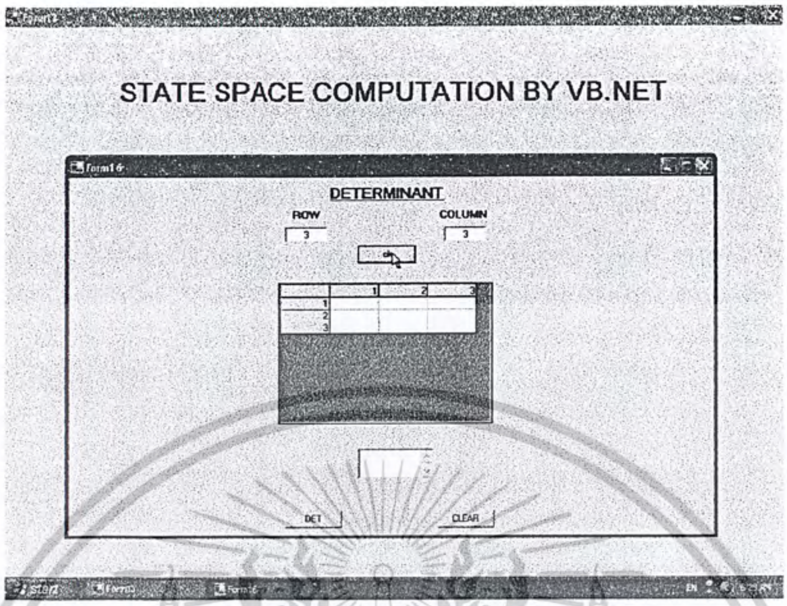
1. แสดงการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์
   1.1 จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มดีเทอร์มิแนนท์ดังรูป 6.2
   1.2 กำหนดขนาดเมทริกซ์ลงใน textbox ดังรูป 6.4
   1.3 กดปุ่มตกลงจะสังเกตได้ว่าขนาดตารางจะเปลี่ยนแปลง
   1.4 ทำการป้อนค่าแล้วกดปุ่มคำตอบก็จะได้ผลดังรูป 6.5



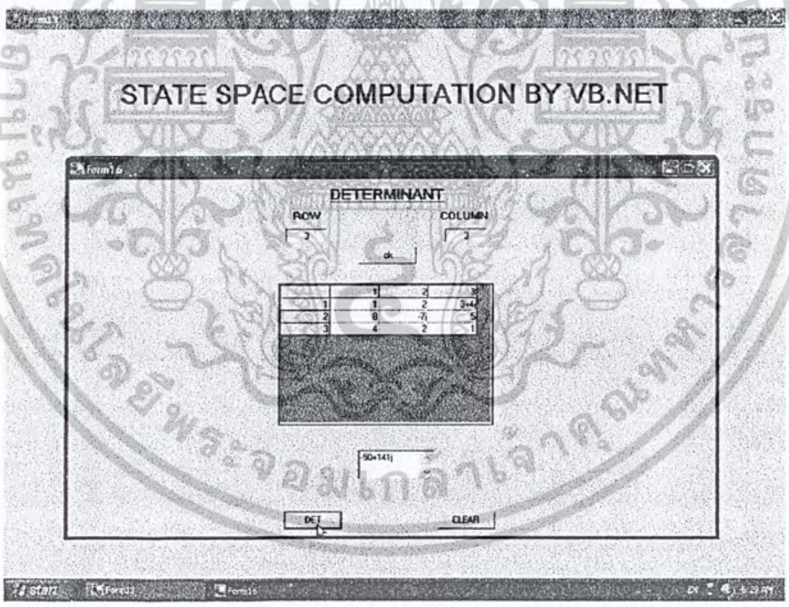
รูปที่6.2 แสดงหน้าจอการเลือกหาค่าดีเทอร์มิแนนท์



รูปที่6.3 แสดงหน้าจอหลักของการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์



รูปที่6.4 แสดงหน้าจอการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.5 แสดงหน้าจอการป้อนหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ขนาดเมทริกซ์ 3 * 3

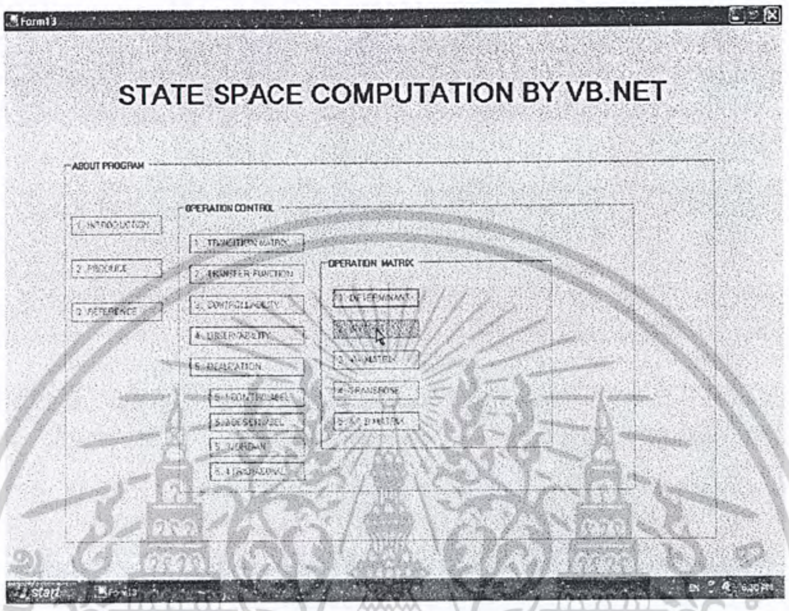
2. แสดงการหาค่าอินเวอส์เมทริกซ์

 2.1 จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มอินเวอสเมทริกซ์ดังรูป 6.6

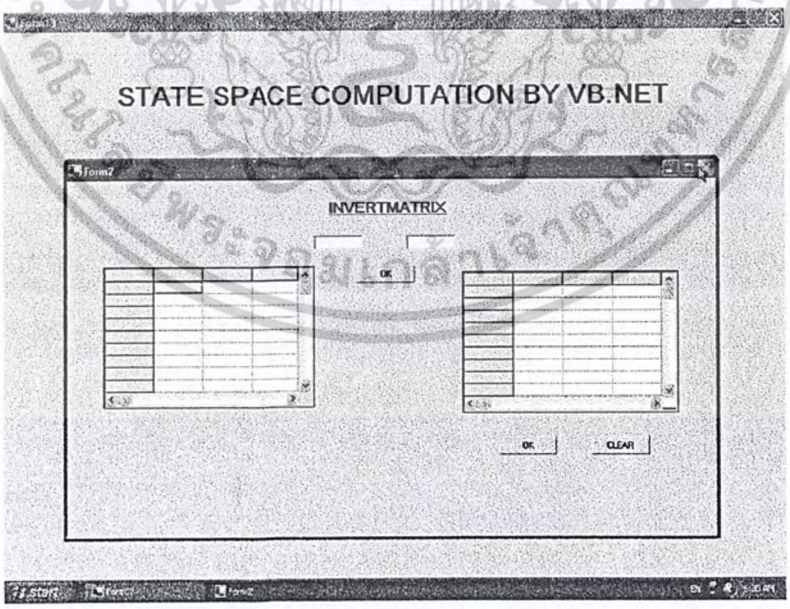
 2.2 กำหนดขนาดเมทริกซ์ลงใน textbox ดังรูป 6.8

2.3 กดปุ่มตกลงจะสังเกตได้ว่าขนาดตารางจะเปลี่ยนแปลง

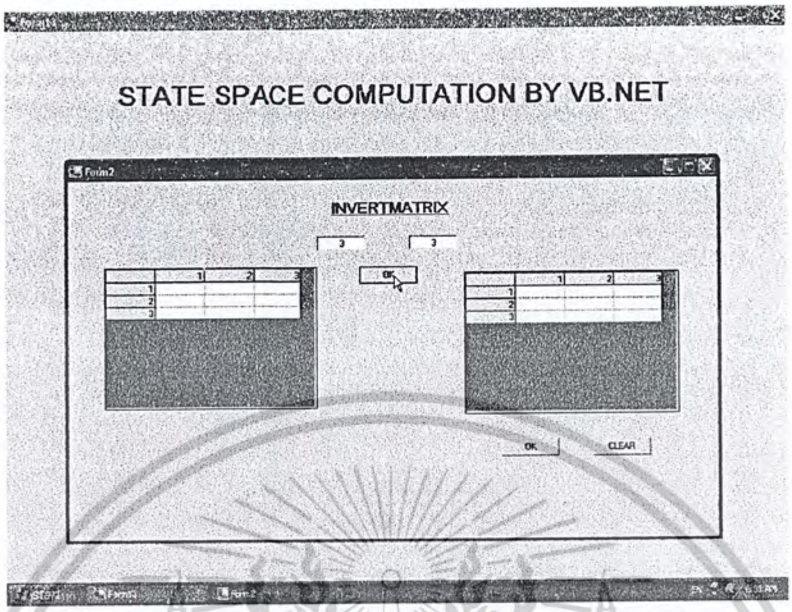
2.4 ทำการป้อนค่าแล้วกดปุ่มคำตอบก็จะได้ผลดังรูป 6.9



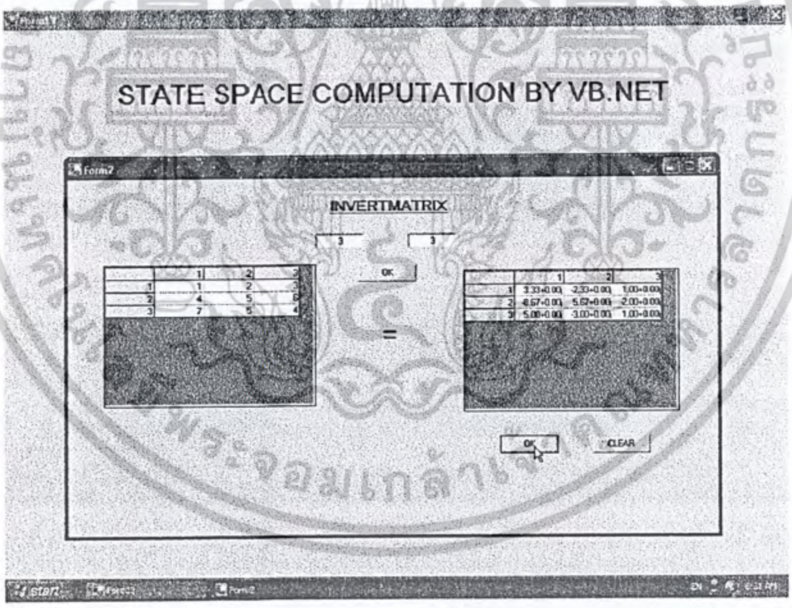
รูปที่6.6 แสดงหน้าจอหลักของการเลือกหาค่าอินเวอสเมทริกซ์



รูปที่6.7 แสดงหน้าจอหลักของการหาค่าอินเวอส์เมทริกซ์



รูปที่6.8 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.9 แสดงหน้าจอการป้อนหาค่าอินเวอสขนาดเมทริกซ์ 3 * 3

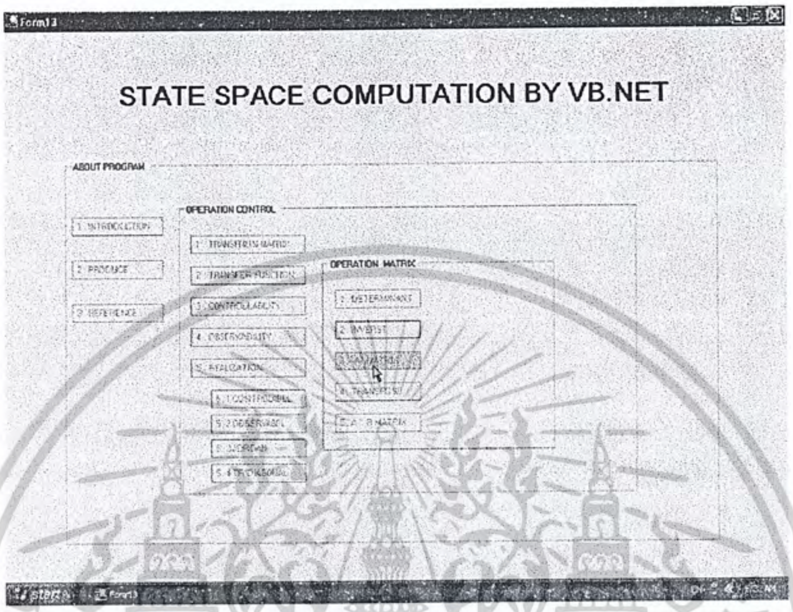
3. แสดงการหาค่าบวกลบเมทริกซ์

3.1 จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการบวกลบเมทริกซ์ดังรูป 6.10

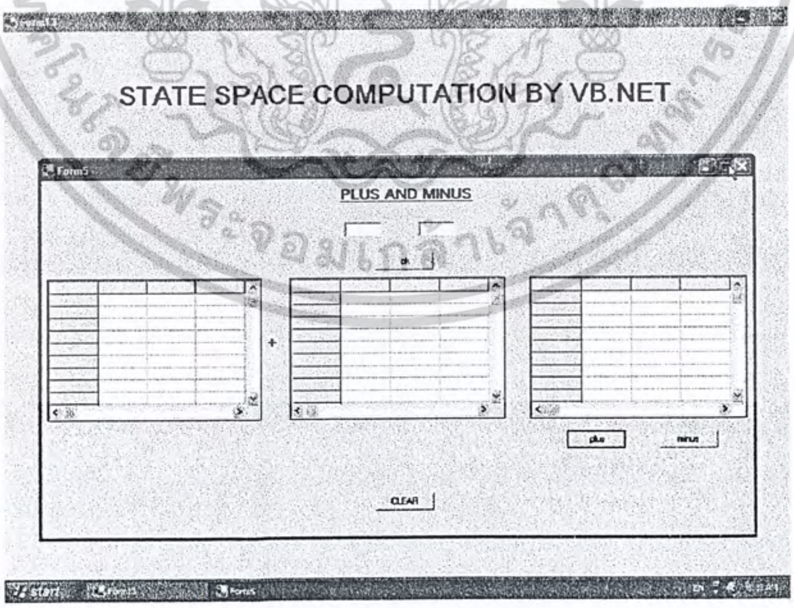
3.2 กำหนดขนาดเมทริกซ์ลงใน textbox ดังรูป 6.12

3.3 กดปุ่มตกลงจะสังเกตได้ว่าขนาดตารางจะเปลี่ยนแปลง

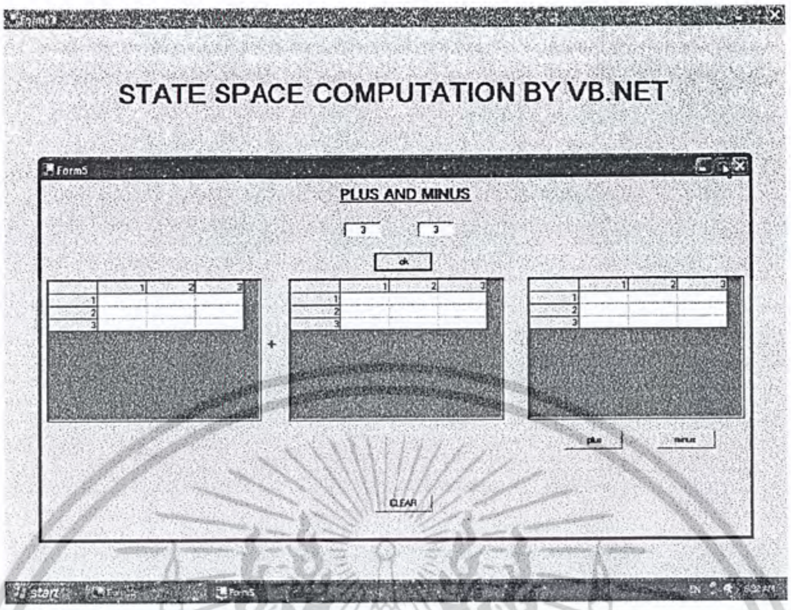
3.4 ทำการป้อนค่าแล้วกดปุ่มคำตอบก็จะได้ผลดังรูป 6.13



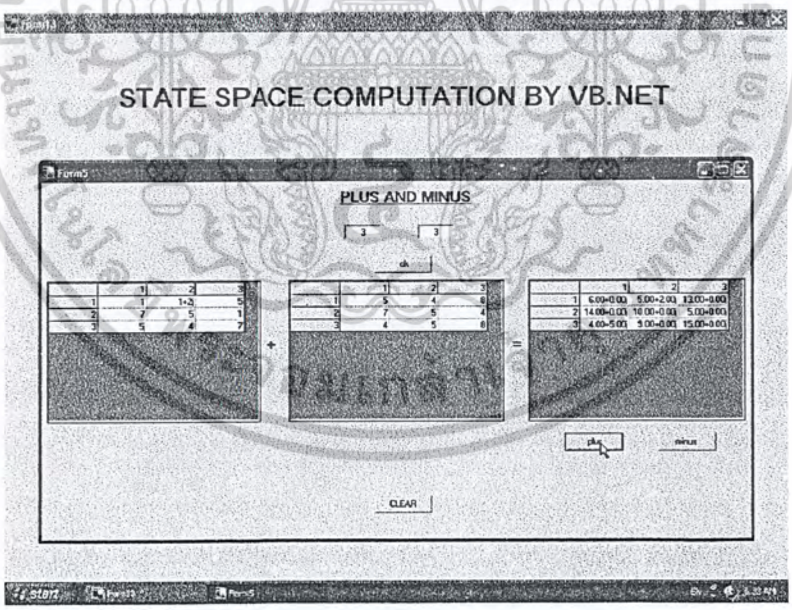
รูปที่6.10 แสดงหน้าจอหลักของการเลือกบวกลบเมทริกซ์



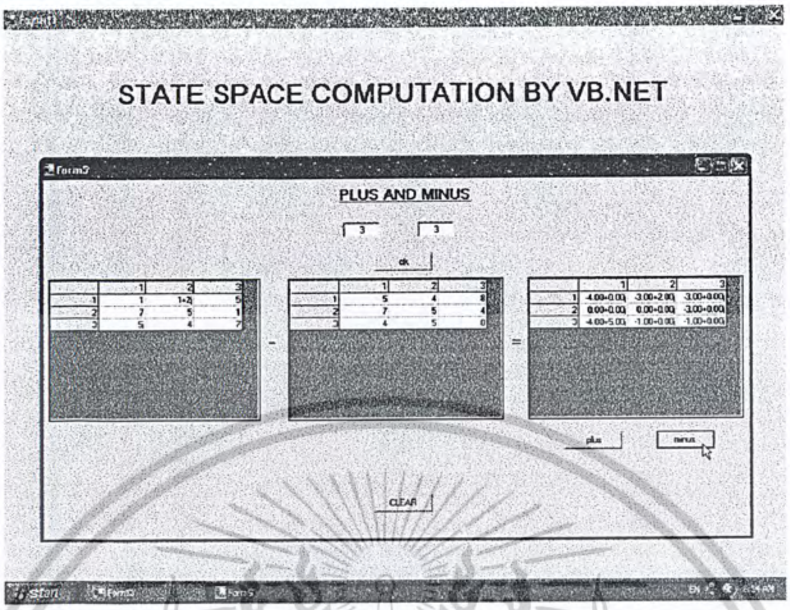
รูปที่6.11 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนค่าบวกลบ



รูปที่6.12 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.13 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาค่าการบวกขนาด 3*3



รูปที่6.14 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาค่าการลบขนาด 3*3

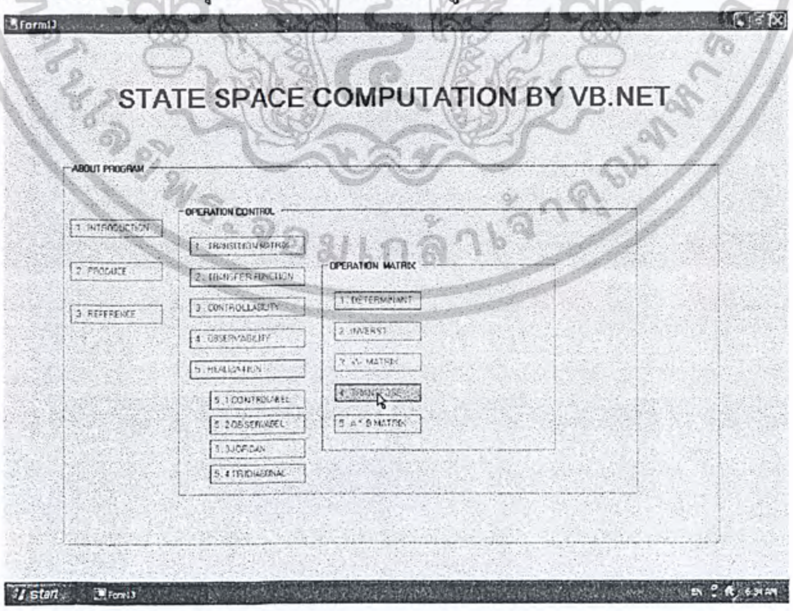
4. แสดงการหาทรานสโพสเมทริกซ์

4.1 จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการทรานสโพสเมทริกซ์ดังรูป 6.15

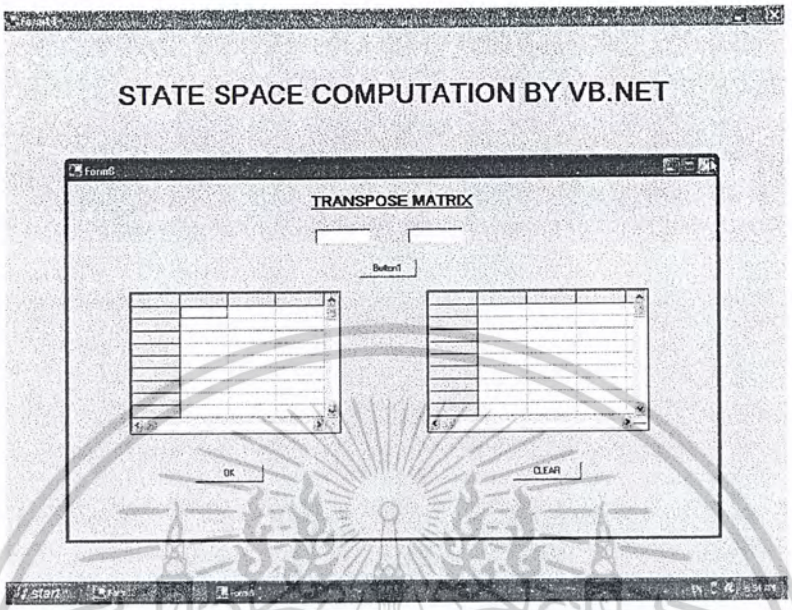
4.2 กำหนดขนาดเมทริกซ์ลงใน textbox ดังรูป 6.17

4.3 กดปุ่มตกลงจะสังเกตได้ว่าขนาดตารางจะเปลี่ยนแปลง

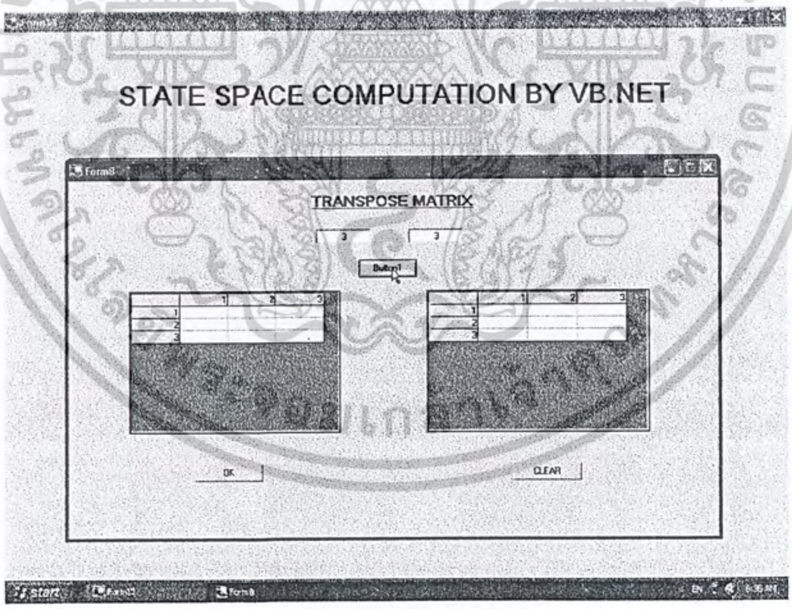
4.4 ทำการป้อนค่าแล้วกดปุ่มคำตอบก็จะได้ผลดังรูป 6.18



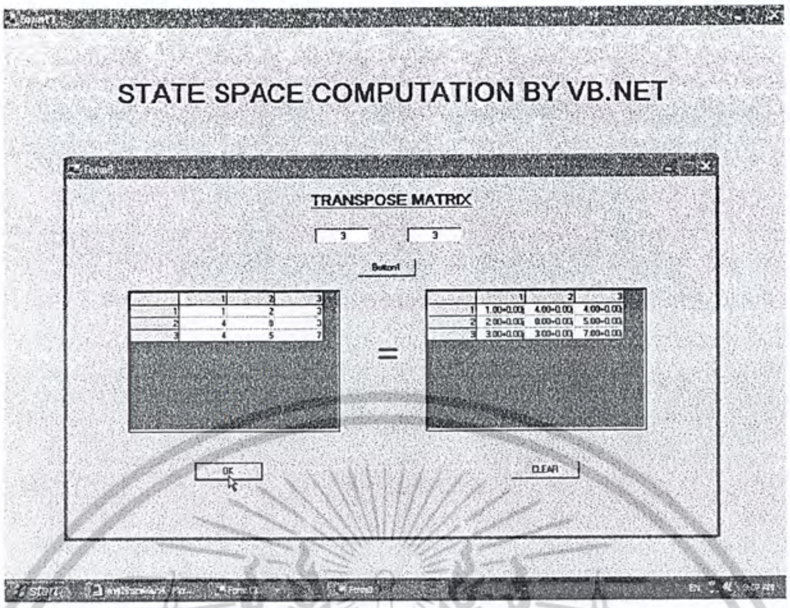
รูปที่6.15 แสดงหน้าจอหลักของการเลือกทรานสโพสเมทริกซ์



รูปที่6.16 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนค่าทรานสโพสเมทริกซ์



รูปที่6.17 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.18 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาทรานสโพสขนาด 3*3

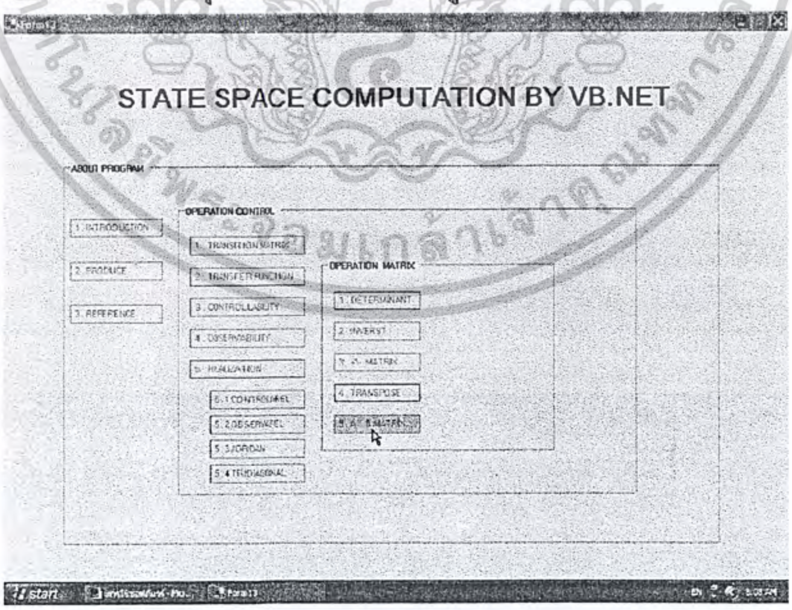
5. แสดงการหาการคูณเมทริกซ์

5.1 จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการคูณเมทริกซ์ดังรูป 6.19

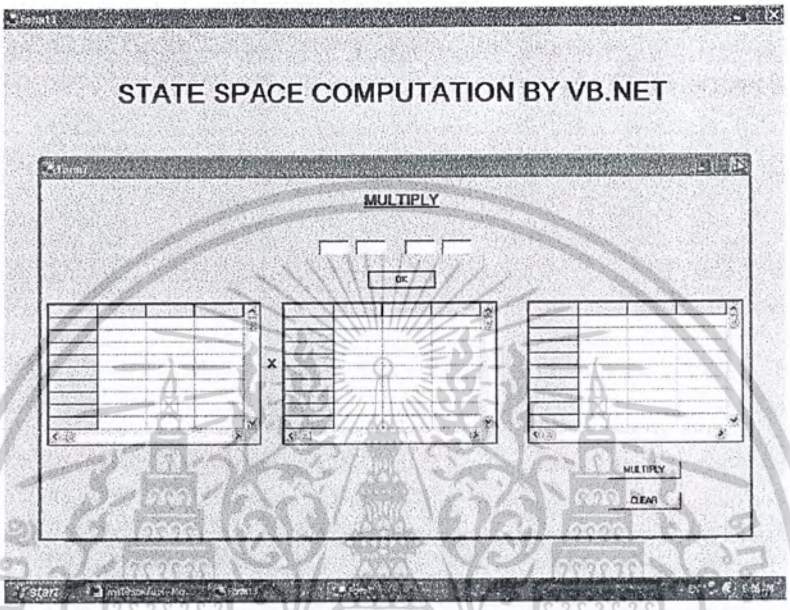
5.2 กำหนดขนาดเมทริกซ์ลงใน textbox ดังรูป 6.21

5.3 กดปุ่มตกลงจะสังเกตได้ว่าขนาดตารางจะเปลี่ยนแปลง

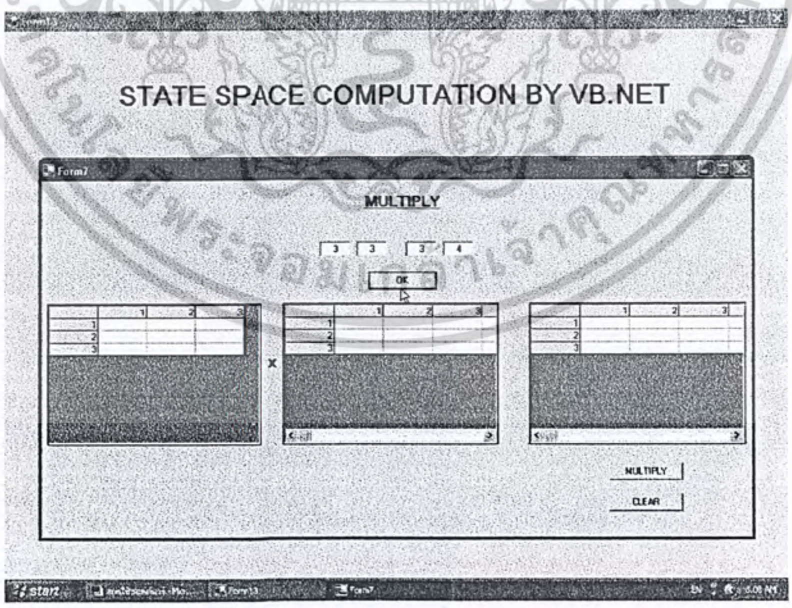
5.4 ทำการป้อนค่าแล้วกดปุ่มคำตอบก็จะได้ผลดังรูป 6.22



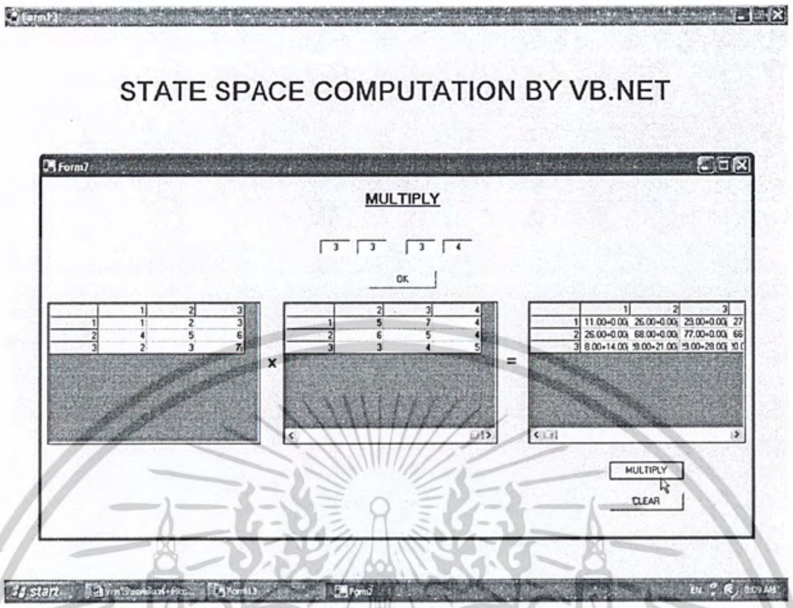
รูปที่6.19 แสดงหน้าจอหลักของการเลือกการคูณเมทริกซ์



รูปที่6.20 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนค่าเมทริกซ์



รูปที่6.21 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.22 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาการคูณขนาด 3*3

2. แสดงการคำนวณเรื่อง สเตทสเปซ

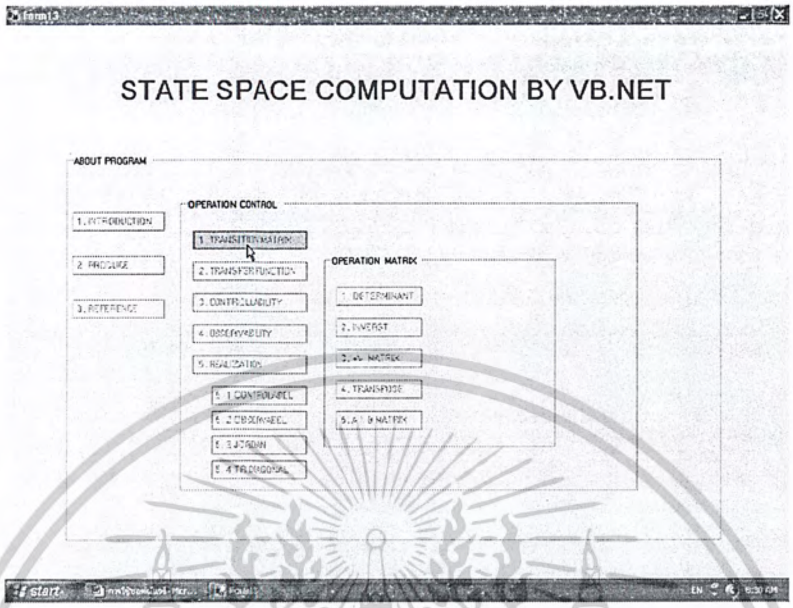
1. แสดงการหาทรานซิชั่นเมทริกซ์

ตัวอย่าง จงคำนวณหาค่าของ e^{At} เมื่อ t = 1 และ

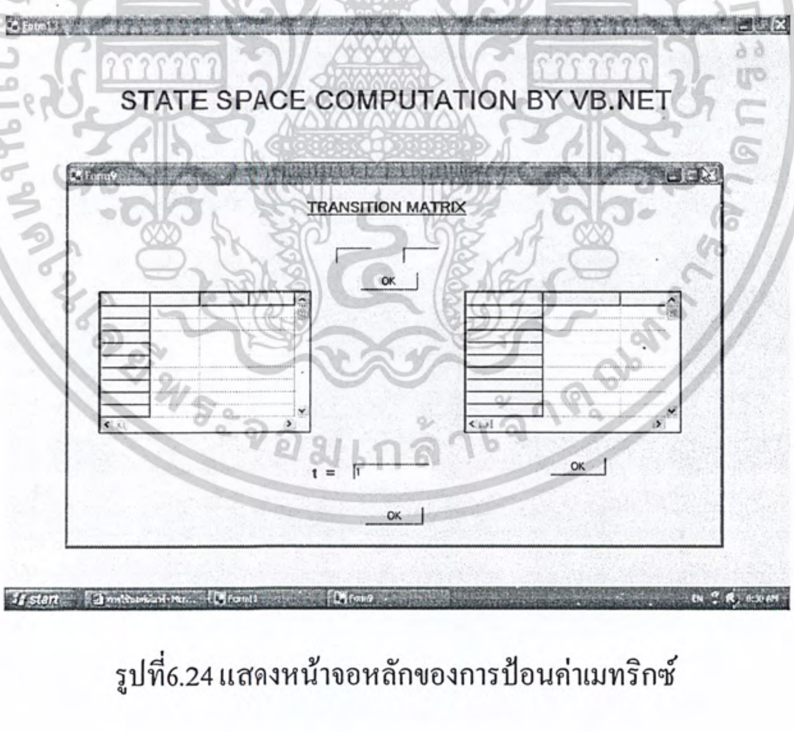
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1+j & 2 & 0.75j \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

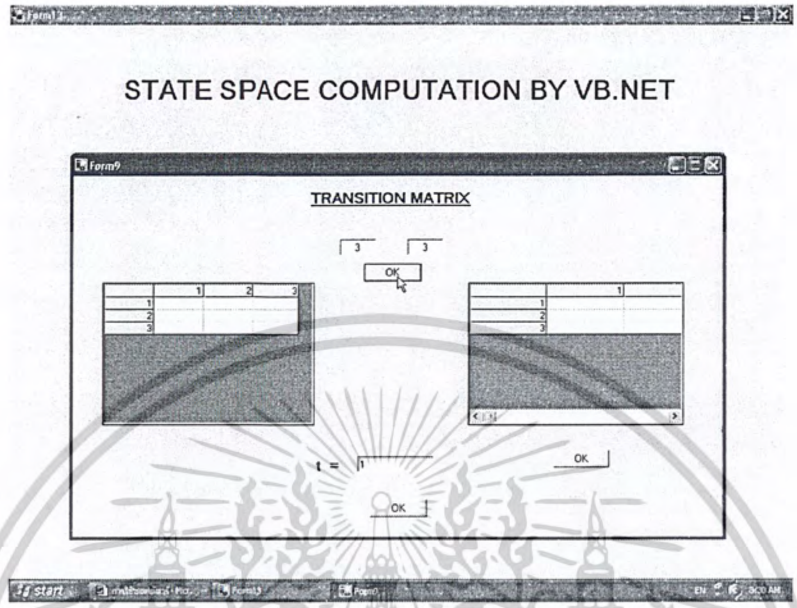
1. จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการหาทรานซิชั่นเมทริกซ์ดังรูป 6.23
2. กำหนดค่าขนาดเมทริกซ์ที่ Textbox แล้วกดปุ่ม ok
3. เลือกป้อนเมทริกซ์ A จากหน้าจอข้างต้นทางด้านซ้าย
4. กำหนดค่า t แล้วกดปุ่ม ok
5. กดตอบที่ Button ทางด้านขวามือ



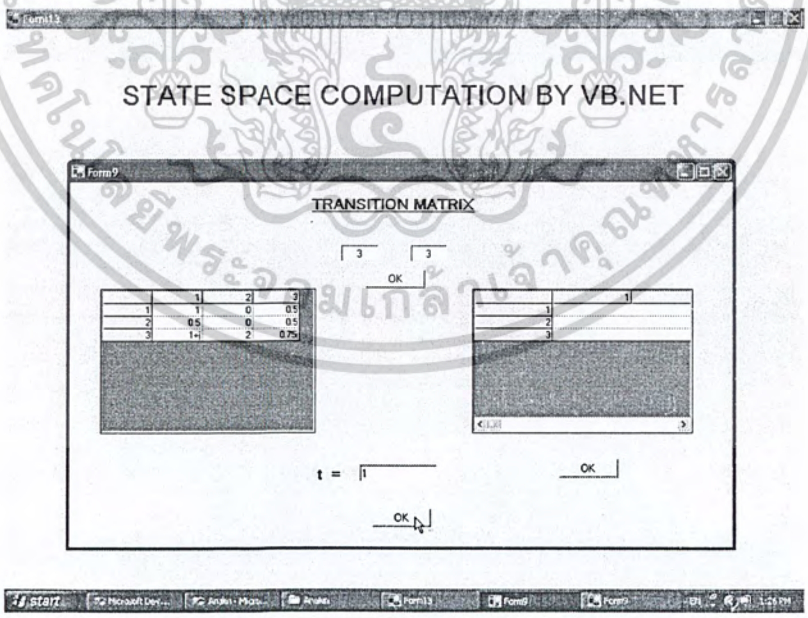
รูปที่6.23 แสดงหน้าจอหลักของการเลือกการหาทรานซิชั่นเมทริกซ์



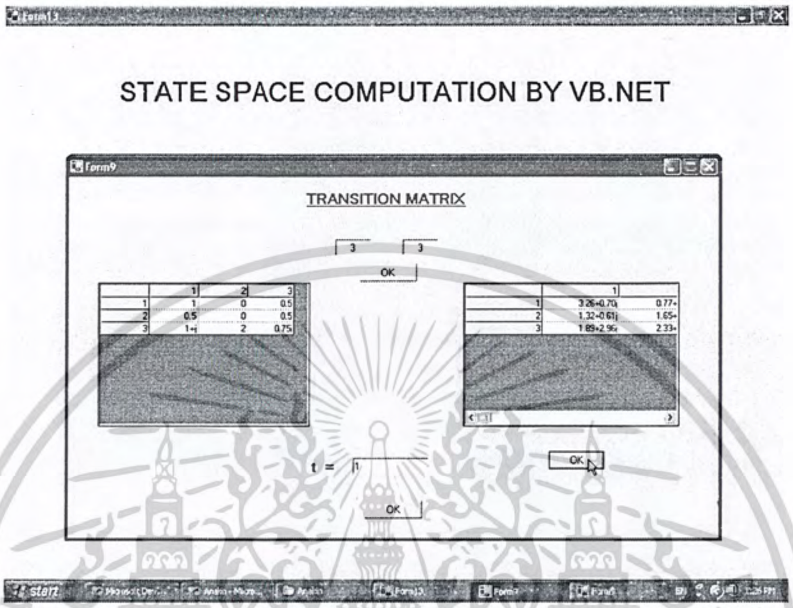
รูปที่6.24 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนค่าเมทริกซ์



รูปที่6.25 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.26 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนค่า t



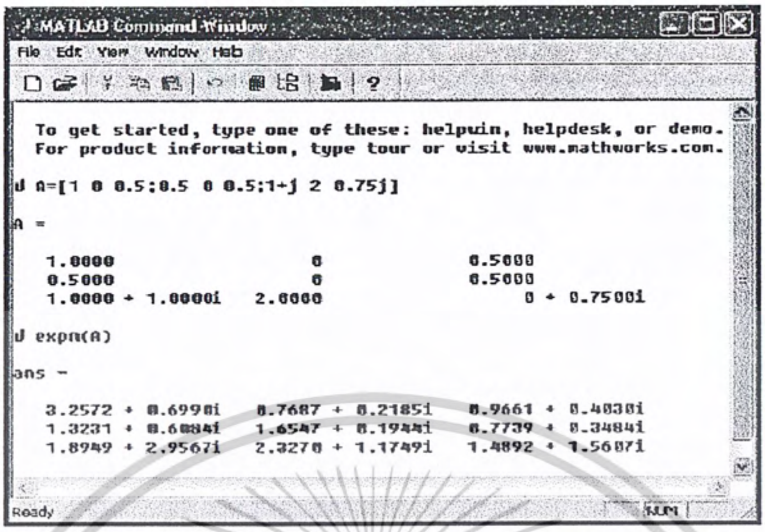
รูปที่6.27 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาทรานซิชั่นเมทริกซ์ขนาด 3*3

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะพบว่า การใช้งานสะดวกรวดเร็วมากเพราะมีขั้นตอนเพียงไม่กี่ขั้นตอนเท่านั้น นอกจากนั้น ผู้ใช้งานสามารถใช้งานได้ทันที โดยที่ไม่ต้องจดจำรูปแบบคำสั่งหรือฟังก์ชั่นต่างๆ ใดๆ เลยนี่จึงเป็นลักษณะเด่นของโปรแกรมวิชวลเบสิคดอทเน็ทและที่สำคัญแม้ว่าผู้ใช้จะทำการป้อนค่าที่จะทำให้ระบบโปรแกรมเกิดข้อผิดพลาด ข้อผิดพลาดดังกล่าวก็จะถูกป้องกันไว้ทั้งหมดแล้ว

สำหรับตัวอย่างข้างต้นนี้ได้คำตอบ e^{At} ที่ $t=1$ เป็น

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3.26+0.7j & 0.77+0.22j & 0.97+0.40j \\ 1.32+0.61j & 1.65+0.19j & 0.77+0.35j \\ 1.89+2.96j & 2.33+1.17j & 1.49+1.56j \end{bmatrix}$$

สำหรับการตรวจสอบผลคำตอบที่ได้กับโปรแกรม Matlab การที่จะหาค่าทรานซิชั่นเมทริกซ์โดยใช้โปรแกรม Matlab นั้นผู้ใช้จะต้องจดจำคำสั่ง expm(A) ของโปรแกรมด้วย



รูปที่6.28 แสดงรูปหน้าจอหลักการป้อนหาค่าทรานซิชั่นเมทริกซ์ขนาด 3*3 โดยใช้ Matlab

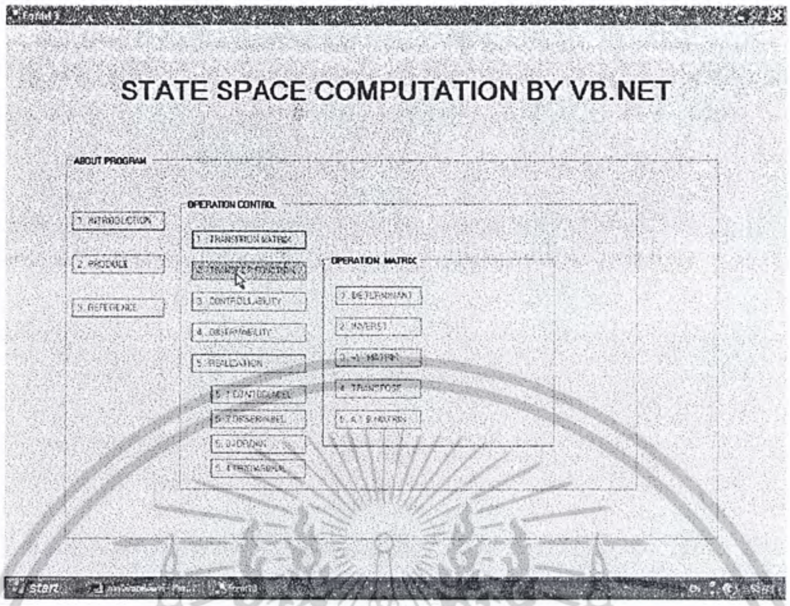
2 แสดงการหาค่าทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่น

ตัวอย่าง การหาค่าทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่น จากกรณีต่อไปนี้

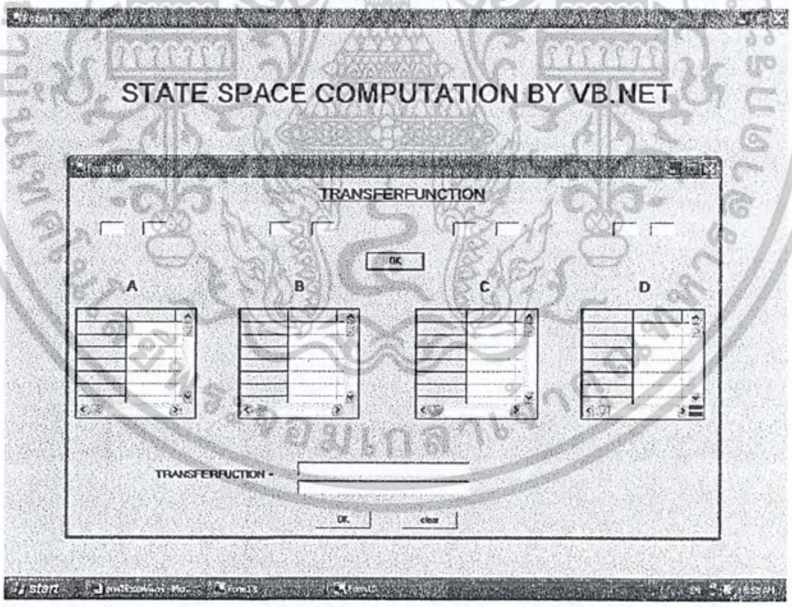
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = [1]$$

วิธีทำ

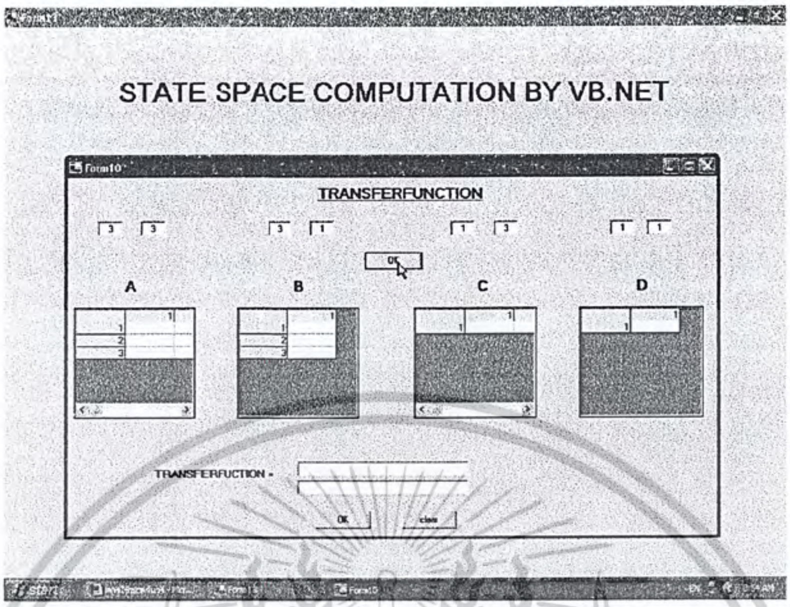
1. จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการหาทรานซิชั่นเมทริกซ์ดังรูป 6.29
2. กำหนดขนาดเมทริกซ์ลงใน Textbox แล้วกดปุ่ม ok
3. ป้อนค่าเมทริกซ์ **A B C D** ลงไป
4. จากนั้นกดปุ่ม ok ก็จะได้ค่าทรานสเฟอฟังก์ชั่นออกมา



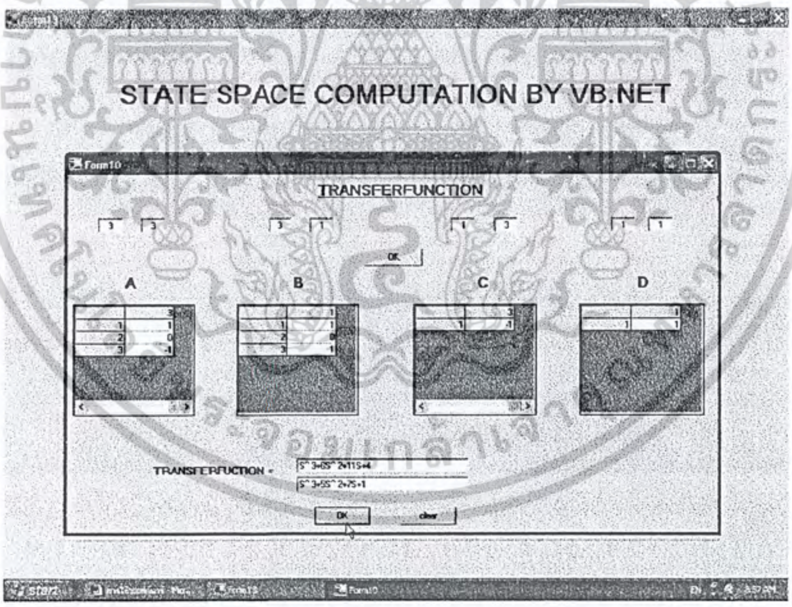
รูปที่6.29 แสดงรูปหน้าจอหลักการเลือกหาค่าทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่น



รูปที่6.30 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนค่าเมทริกซ์



รูปที่6.31 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.32 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่น

สำหรับการตรวจสอบผลคำตอบที่ได้กับโปรแกรม Matlab นั้นในการที่จะหาค่าทรานเฟอร์ฟังก์ชั่นโดยใช้โปรแกรม Matlab นั้นผู้ใช้จะต้องจดจำคำสั่ง ดังนี้

[NUM,DEN] = ss2tf(A,B,C,D,iu)

3 การหาเมทริกซ์ควบคุมได้ (Controllability Matrix)

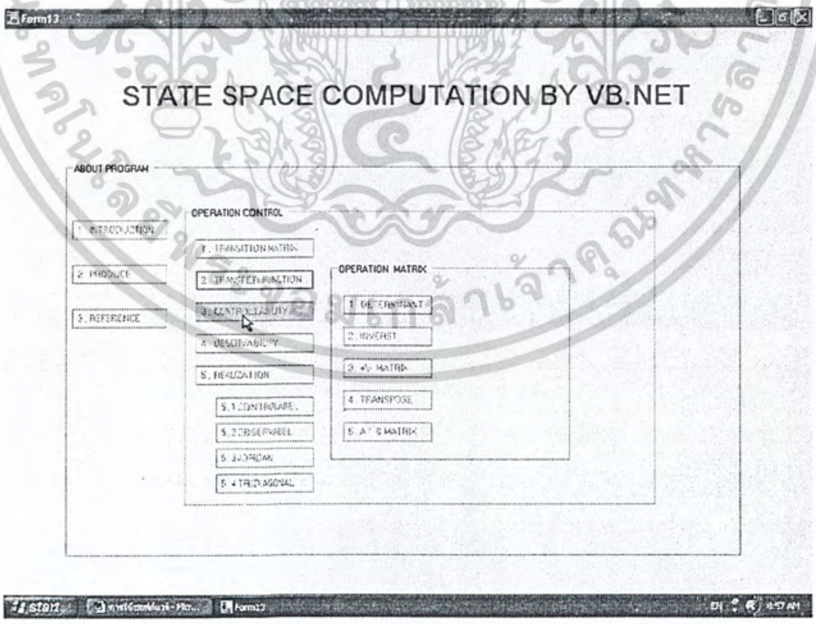
ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าระบบที่กำหนดควบคุมได้หรือไม่ จากกรณีต่อไปนี้

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 1 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

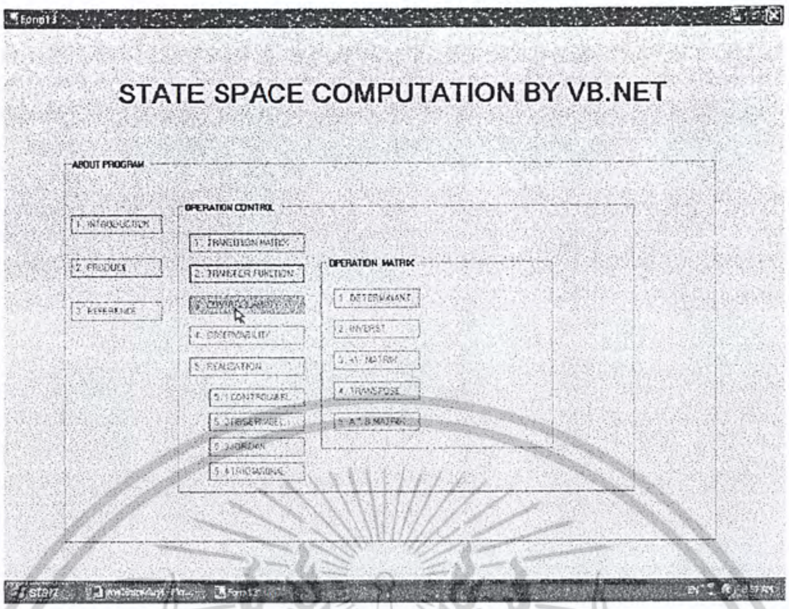
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

วิธีทำ

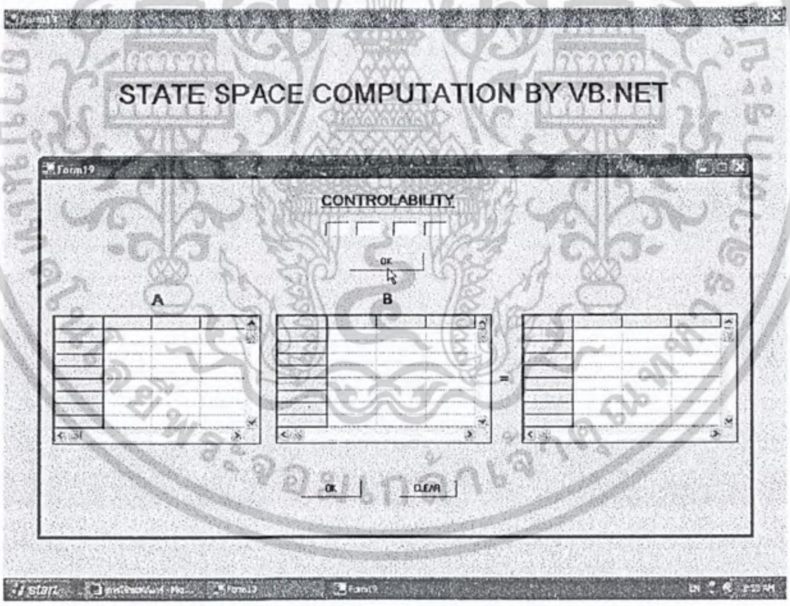
1. จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการหา Controllability Matrix ดังรูป 6.34
2. กำหนดขนาดเมทริกซ์ลงใน Textbox แล้วกดปุ่ม ok
3. ป้อนค่าเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 1 & -2\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ลงไป
4. จากนั้นกดปุ่ม ok ก็จะได้ค่าออกมา



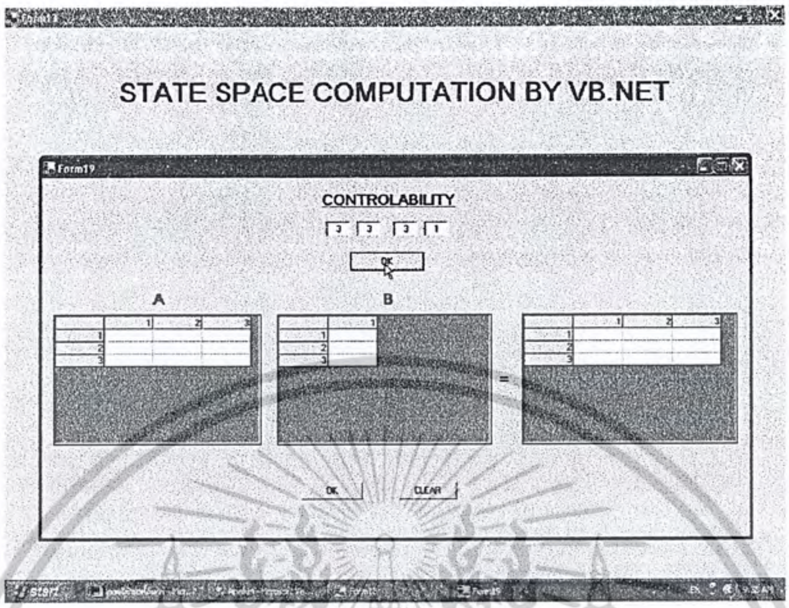
รูปที่6.34 แสดงหน้าจอหลักของการเลือก Controllability Matrix



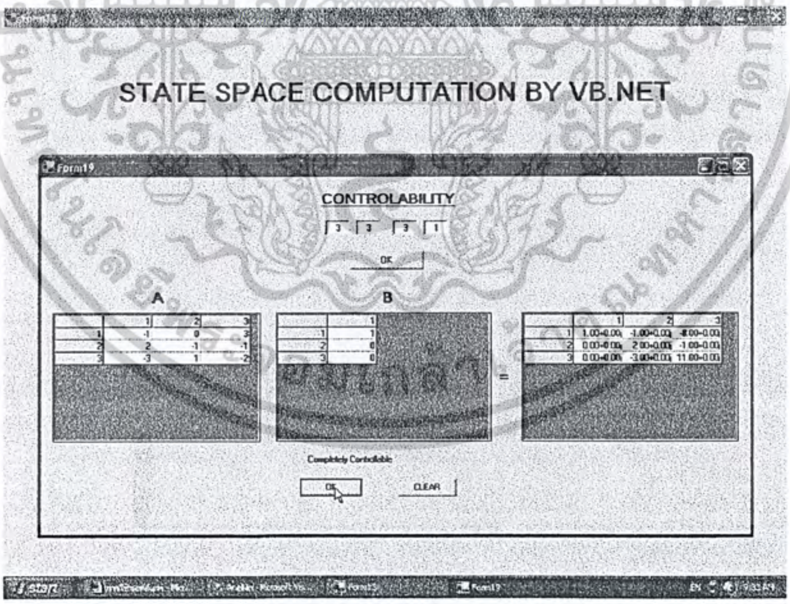
รูปที่6.34 แสดงหน้าจอหลักของการเลือก Controllability Matrix



รูปที่6.35 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์

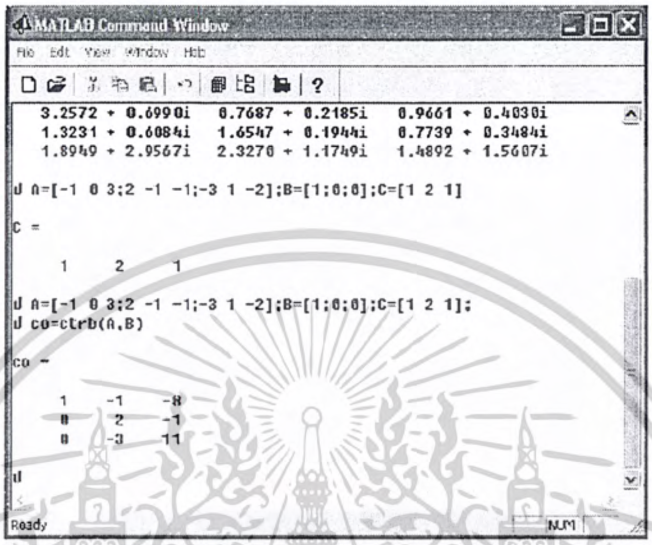


รูปที่6.36 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.37 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาเมทริกซ์ควบคุมได้

สำหรับการตรวจสอบผลคำตอบที่ได้กับโปรแกรม Matlab นั้นในการที่จะตรวจสอบว่าระบบควบคุมได้หรือไม่โดยใช้โปรแกรม Matlab นั้นผู้ใช้จะต้องจดจำคำสั่ง co = ctrb(A,B) ของโปรแกรมด้วย



รูปที่ 6.38 แสดงรูปหน้าจอหลักการป้อนหาการควบคุมได้ของระบบ โดยใช้ Matlab

4 การหาเมทริกซ์สังเกตได้ (Observability Matrix)

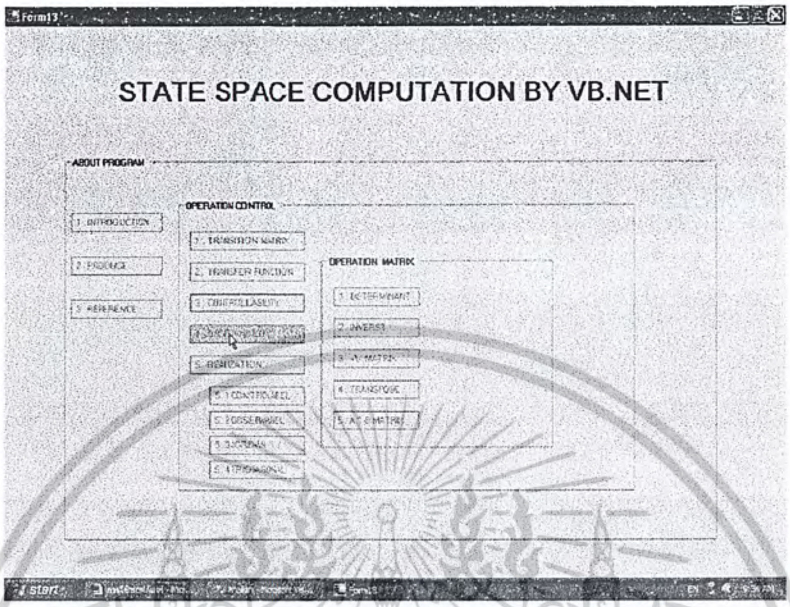
ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าระบบที่กำหนดสังเกตได้หรือไม่ จากกรณีต่อไปนี้

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

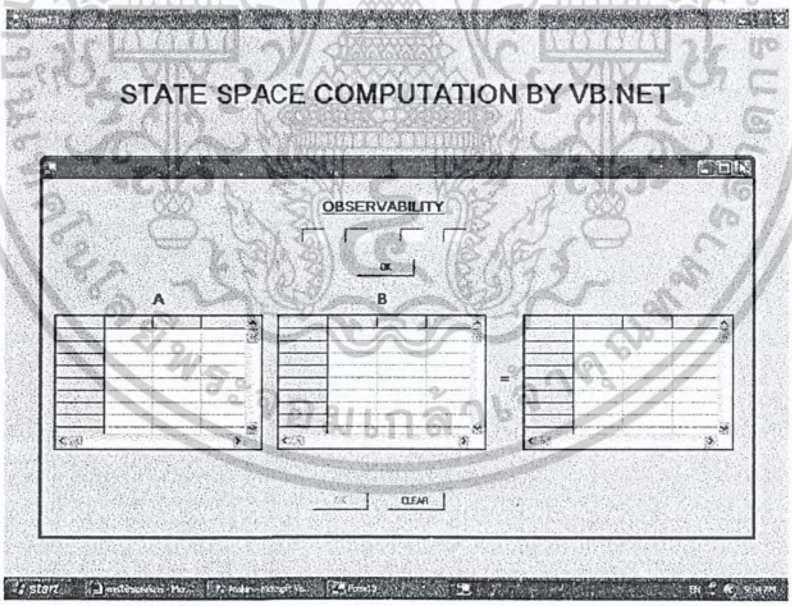
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

วิธีทำ

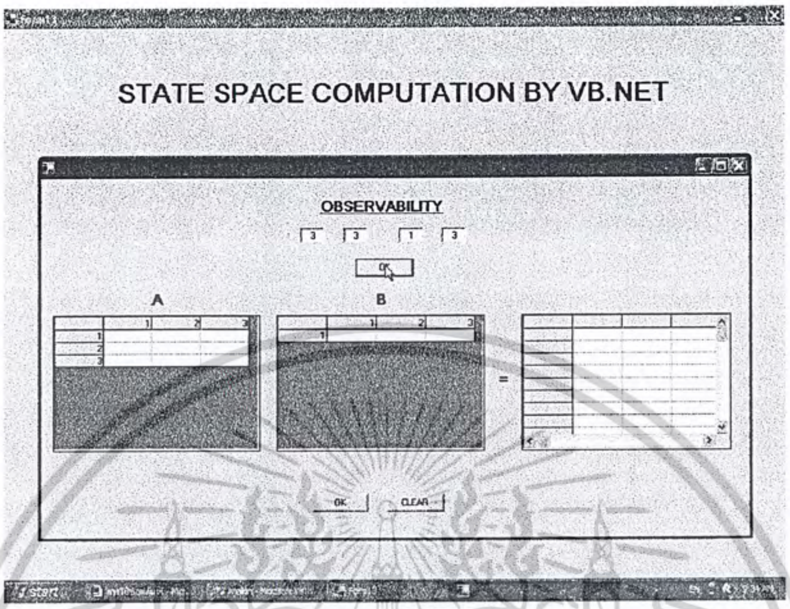
1. จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการหา Observability Matrix ดังรูป 6.39
2. กำหนดขนาดเมทริกซ์ลงใน Textbox แล้วกดปุ่ม ok
3. ป้อนค่าเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ลงไป
4. จากนั้นกดปุ่ม ok ก็จะได้ค่าออกมา



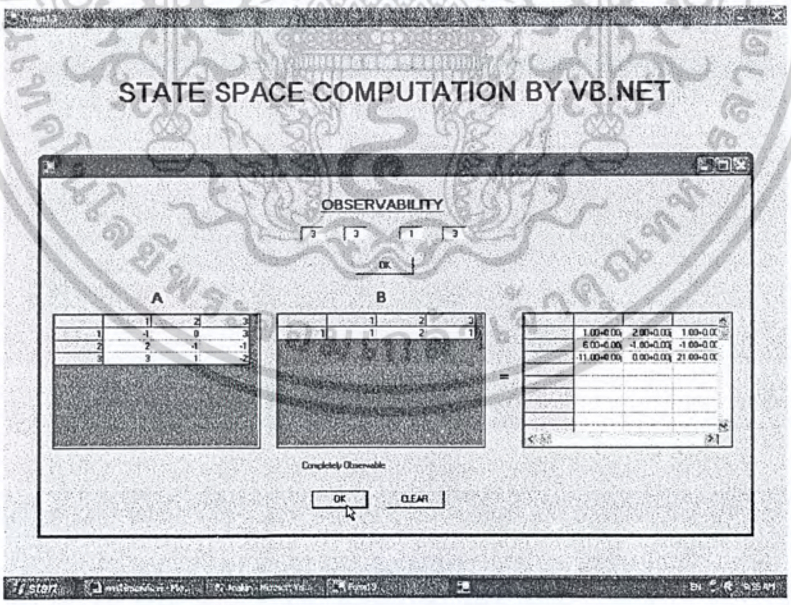
รูปที่6.39 แสดงหน้าจอหลักของการเลือก observability matrix



รูปที่6.40 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์

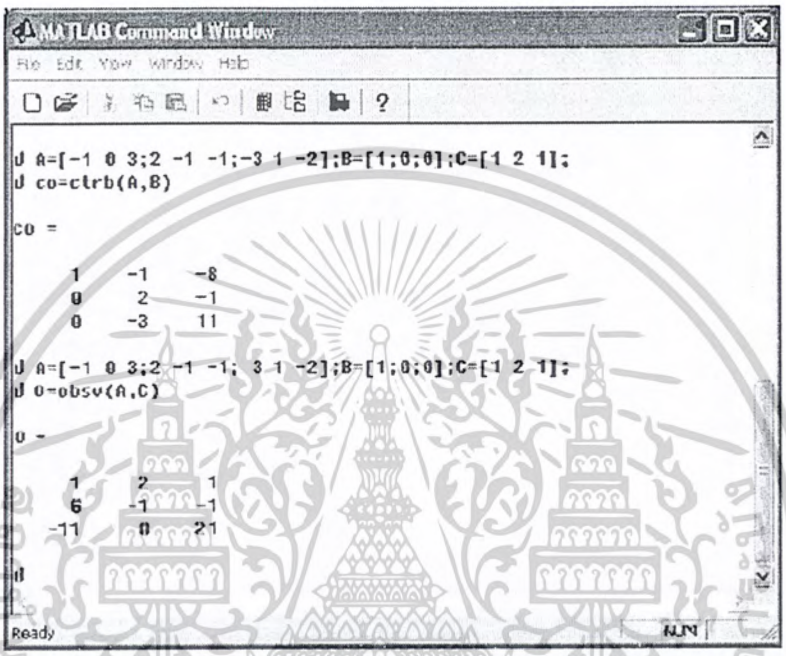


รูปที่6.41 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.42 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหาobservability matrix

สำหรับการตรวจสอบผลคำตอบที่ได้กับโปรแกรม Matlab นั้นในการที่จะตรวจสอบว่าระบบสังเกตได้หรือไม่โดยใช้โปรแกรม Matlab นั้นผู้ใช้จะต้องจดจำคำสั่ง OB = obsv(A,C) ของโปรแกรมด้วย



รูปที่ 6.43 แสดงรูปหน้าจอหลักการป้อนหาการสังเกตได้ของระบบ โดยใช้ Matlab

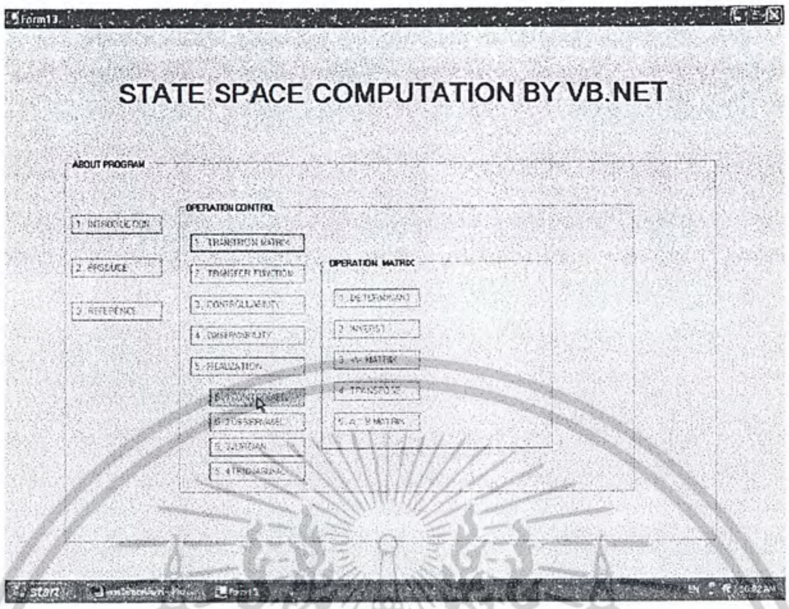
5. แสดงการหา Realization ของระบบ

ตัวอย่าง การหา Realization ของ $F(s)$ จากกรณีต่อไปนี้ในรูปแบบ Controllable Canonical

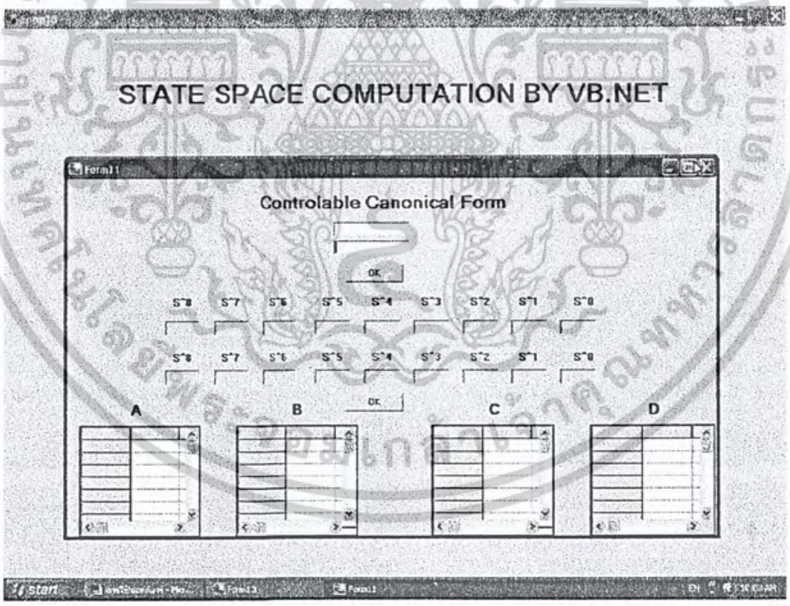
$$\text{เมื่อ} \quad F(s) = \frac{s^5+2s^4+5s^3+7s^2+5s+6}{s^5+6s^4+3s^3+9s^2+11s+2}$$

วิธีทำ

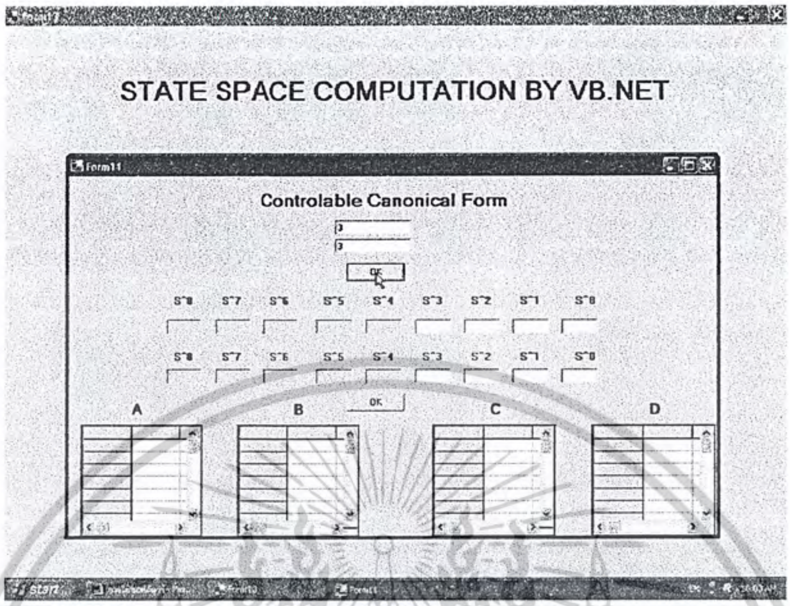
1. จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการหา Controllable Canonical ดังรูป 6.44
2. กำหนดขนาดกำลังสูงสุดลงใน Textbox แล้วกดปุ่ม ok
3. ป้อนค่าเฉพาะสัมประสิทธิ์ของเศษและส่วนลงใน Textbox ที่พร้อมรับค่า
4. จากนั้นกดปุ่ม ok ก็จะได้ค่าเมทริกซ์ออกมาออกมา



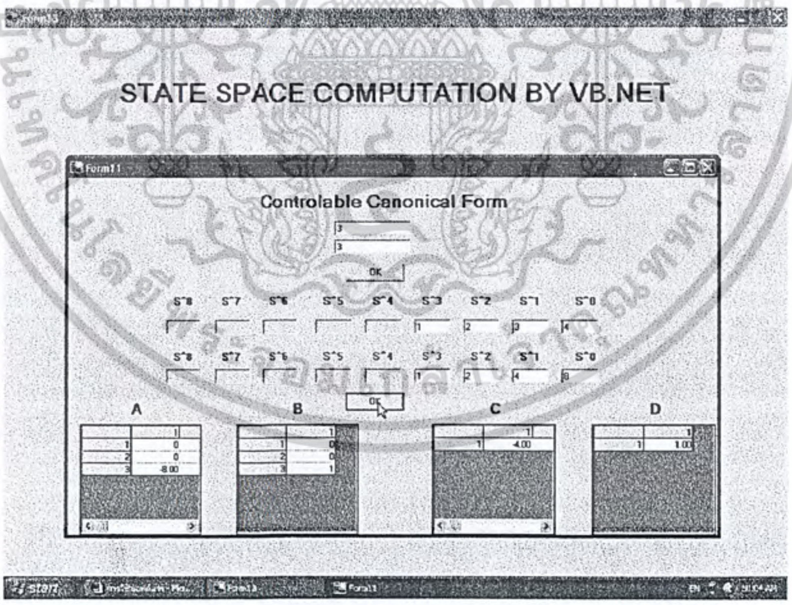
รูปที่6.44 แสดงหน้าจอหลักของการเลือก Controllable Canonical



รูปที่6.45 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.46 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



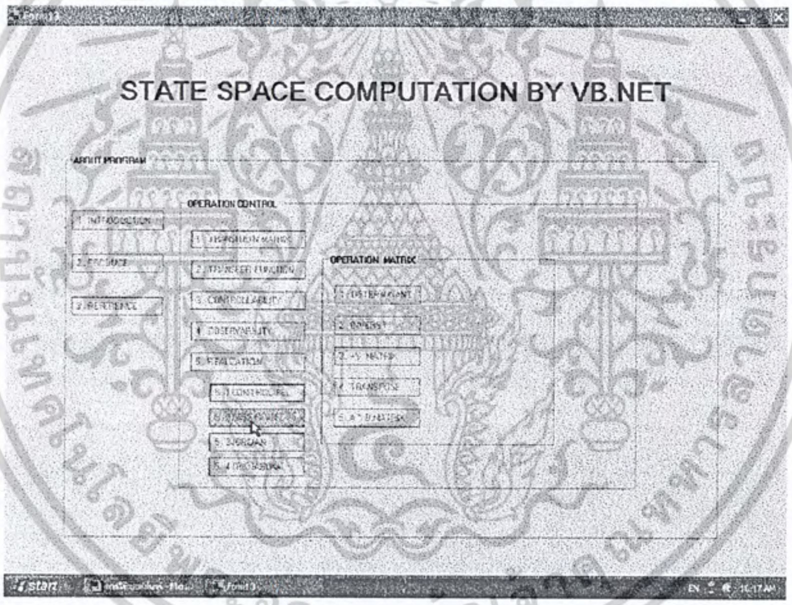
รูปที่6.47 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหา Controllable Canonical

ตัวอย่าง การหา Realization ของ F(s) จากกรณีต่อไปนี้ในรูปแบบ Observable Canonical

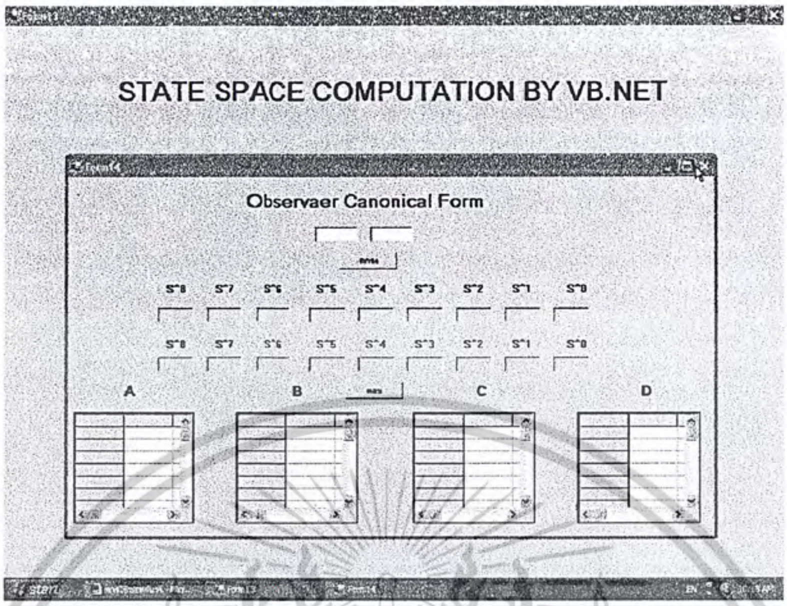
$$\text{เมื่อ}\quad F(s) = \frac{s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 5s + 6}{s^5 + 6s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 11s + 2}$$

วิธีทำ

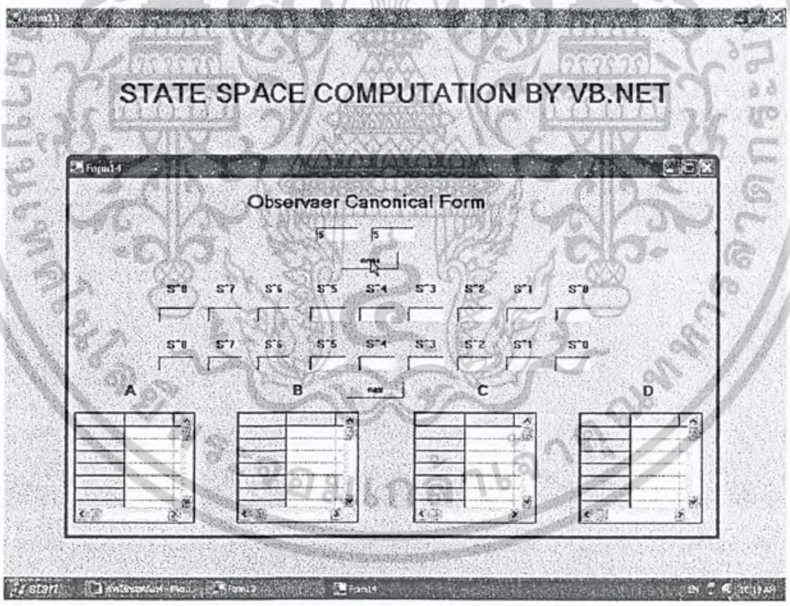
1. จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการหา Observable Canonical ดังรูป 6.48
2. กำหนดขนาดกำลังสูงสุดลงใน Textbox แล้วกดปุ่ม ok
3. ป้อนค่าเฉพาะสัมประสิทธิ์ของเศษและส่วนลงใน Textbox ที่พร้อมรับค่า
4. จากนั้นกดปุ่ม ok ก็จะได้ค่าเมทริกซ์ออกมาออกมา



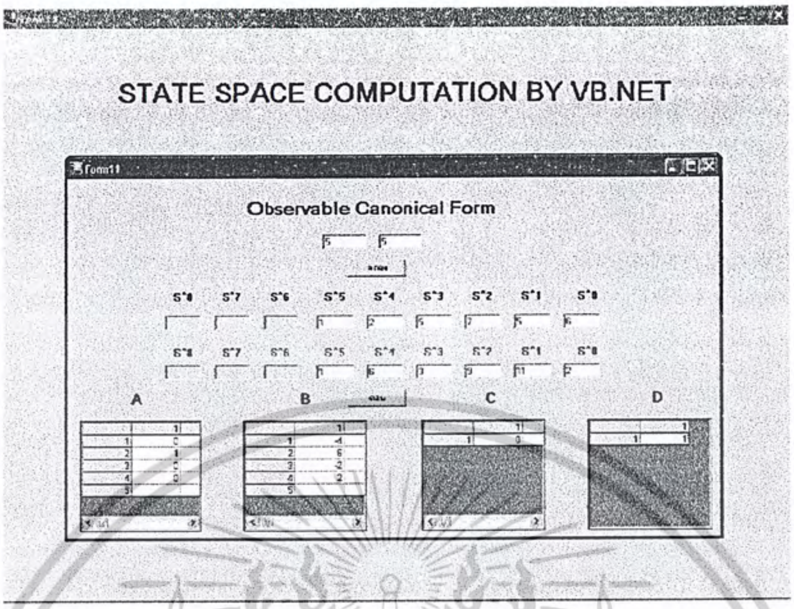
รูปที่6.48 แสดงหน้าจอหลักของการเลือก Observable Canonical



รูปที่6.49 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



รูปที่6.50 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนขนาดเมทริกซ์



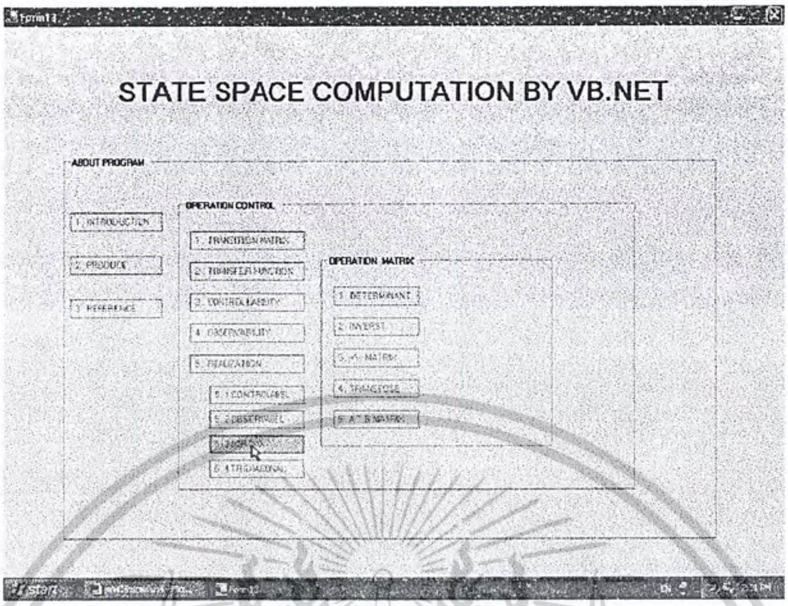
รูปที่6.51 แสดงหน้าจอหลักของการป้อนหา Observable Canonical

ตัวอย่าง การหา Realization ของ F(s) จากกรณีต่อไปนี้ในรูปแบบ Jordan Canonical

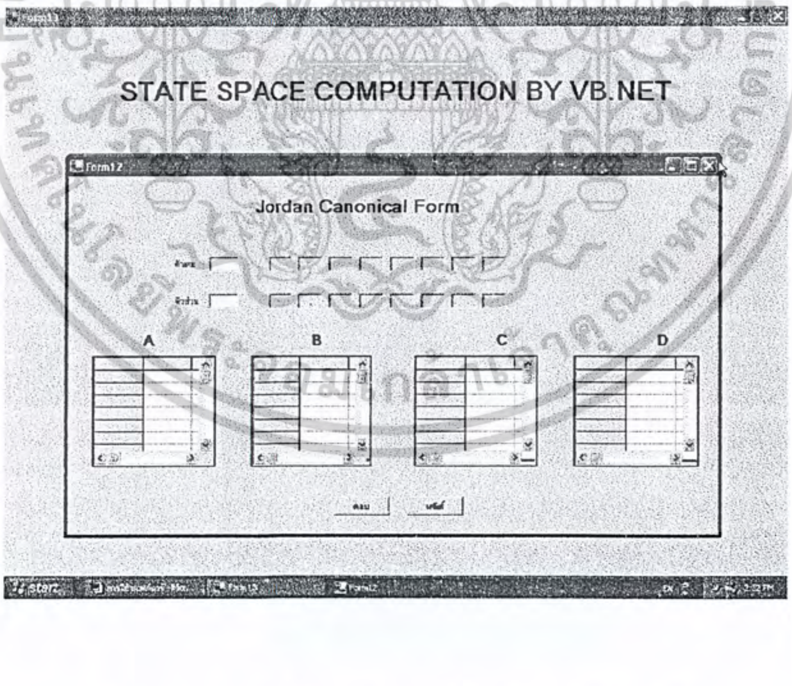
$$\text{เมื่อ} \quad F(s) = \frac{s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 5s + 6}{s^5 + 6s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 11s + 2}$$

วิธีทำ

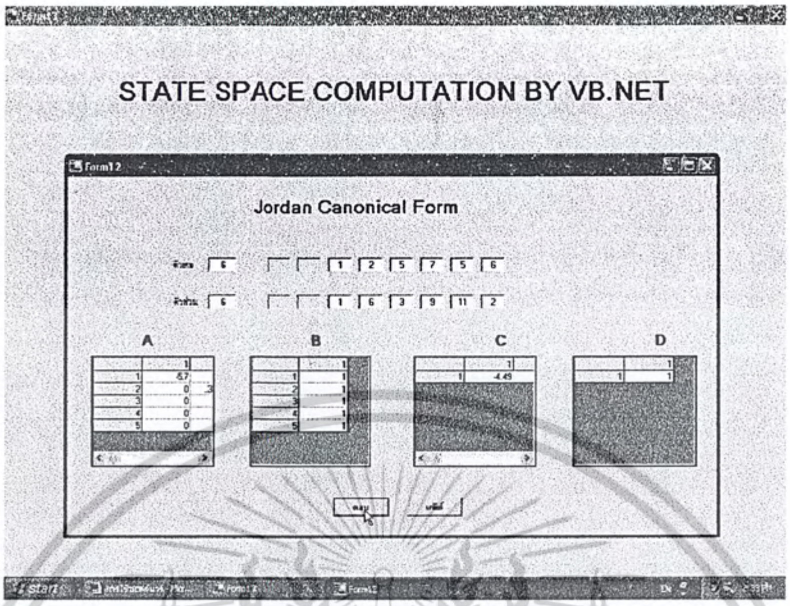
1. จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการหา Jordan Canonical ดังรูป 6.52
2. กำหนดขนาดกำลังสูงสุดลงใน Textbox แล้วกดปุ่ม ok
3. ป้อนค่าเฉพาะสัมประสิทธ์ของเศษและส่วนลงใน Textbox ที่พร้อมรับค่า
4. จากนั้นกดปุ่ม ok ก็จะได้ค่าเมทริกซ์ออกมาออกมา



รูปที่ 6.52 แสดงรูปหน้าจอหลักการหา Jordan Canonical



รูปที่ 6.53 แสดงหน้าจอการป้อนหาค่า Jordan Canonical



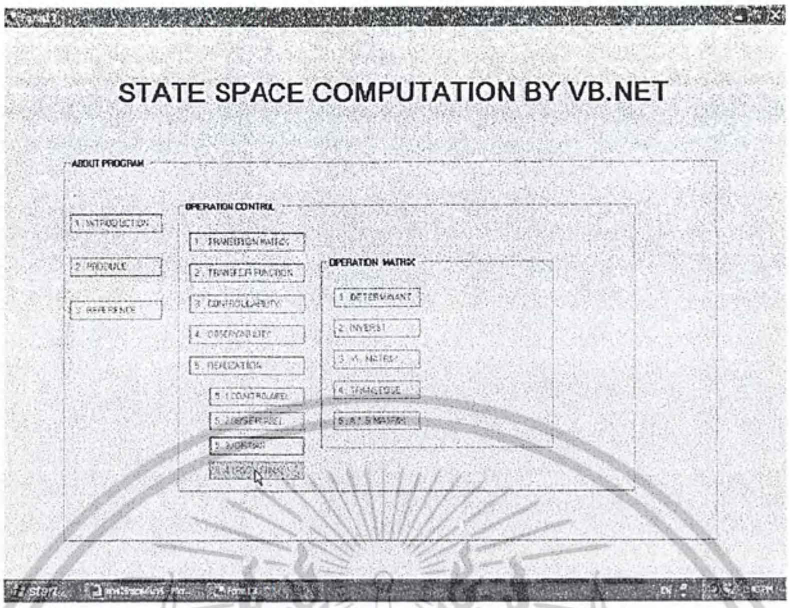
รูปที่ 6.54 แสดงหน้าจอการป้อนหาค่า Jordan Canonical

ตัวอย่าง การหา Realization ของ F(s) จากกรณีต่อไปนี้ในรูปแบบ Tridiagonal Canonical

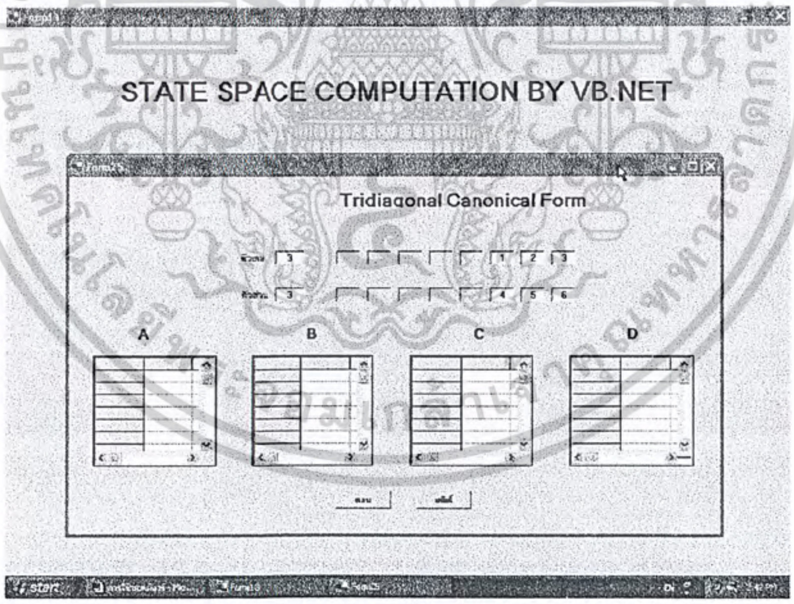
เมื่อ $$F(s) = \frac{s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 5s + 6}{s^5 + 6s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 11s + 2}$$

วิธีทำ

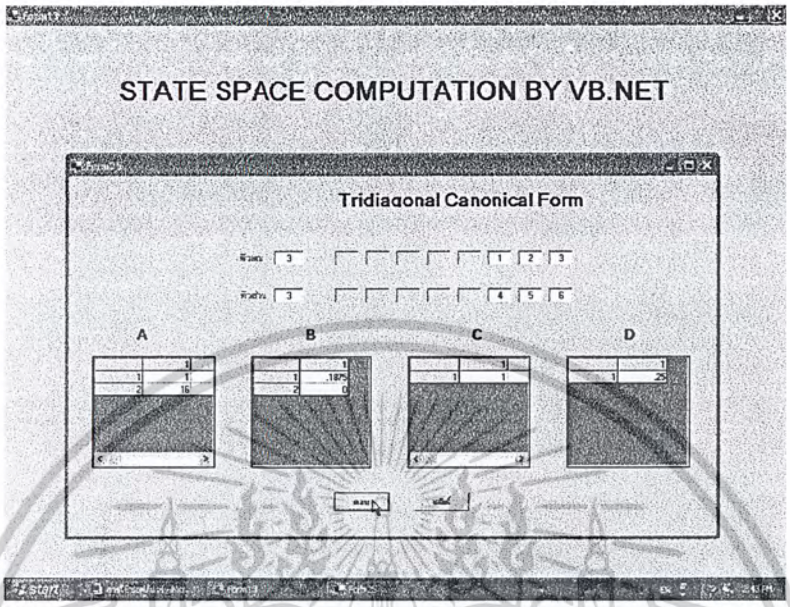
1. จากหน้าจอหลักเลือกไปที่ปุ่มการหา Tridiagonal Canonical ดังรูป 6.55
2. กำหนดขนาดกำลังสูงสุดลงใน Textbox แล้วกดปุ่ม ok
3. ป้อนค่าเฉพาะสัมประสิทธิ์ของเศษและส่วนลงใน Textbox ที่พร้อมรับค่า
4. จากนั้นกดปุ่ม ok ก็จะได้ค่าเมทริกซ์ออกมาออกมา



รูปที่ 6.55 แสดงรูปหน้าจอหลักการหา Tridiagonal Canonical



รูปที่ 6.56 แสดงการป้อนขนาด Tridiagonal Canonical



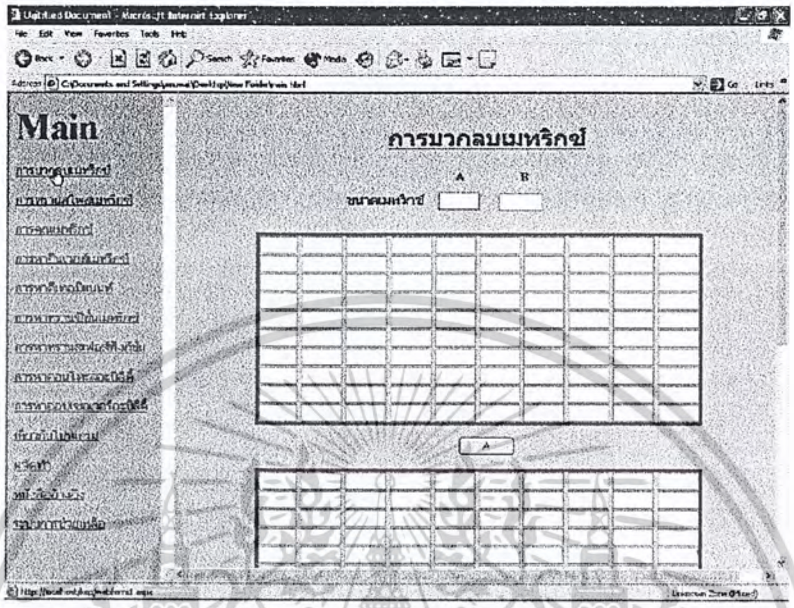
รูปที่ 6.57 แสดงการป้อนหาค่า Tridiagonal Canonical

3 แสดงตัวอย่างซอฟแวร์ที่ทำงานบนอินเทอร์เน็ท

สำหรับการทำงานของโปรแกรมที่ได้สร้างขึ้น จะมีส่วนหนึ่งที่สามารถทำงานบนอินเทอร์เน็ทได้ ซึ่งคุณประโยชน์เช่นนี้จะสะดวกในการเรียกใช้งานจากที่ใดๆก็ตาม ที่สามารถทำงานบนอินเตอร์เน็ทได้ ซึ่งจะเป็นการตัดปัญหาที่ผู้จะใช้โปรแกรมต้องลงโปรแกรมเฉพาะบนเครื่องของตนเองเพียงอย่างเดียว ที่สำคัญการแจกจ่ายโปรแกรมที่สร้างและทำงานบนอินเตอร์เน็ทได้นั้นจะทำได้ง่ายและสะดวกยิ่งกว่าเดิมอีกด้วย ไม่ต้องมีปัญหาการลงโปรแกรมแล้วไฟล์มีขนาดใหญ่จนเกินไปได้อีกด้วย นี่จึงเป็นคุณสมบัติเด่นๆที่โปรแกรมวิชวลเบสิคดอทเน็ทสามารถทำได้

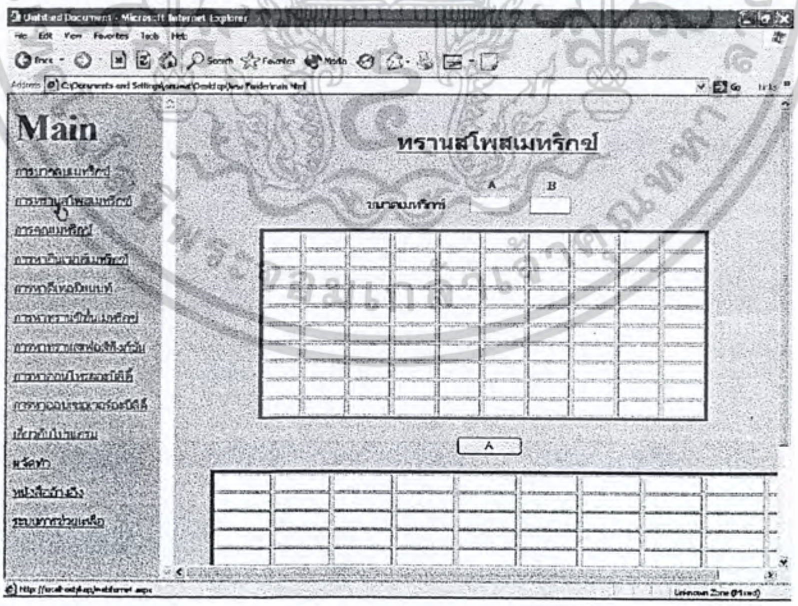
สำหรับการใช้งานขั้นตอนต่างๆก็จะเหมือนกับการใช้โปรแกรมที่ข้างตน ดังนั้นจะแสดงให้เห็นเพียงหน้าจอหลักในการใช้งาน

แสดงรูปแบบการใช้ฟังก์ชั่นการบวกลบเมทริกซ์



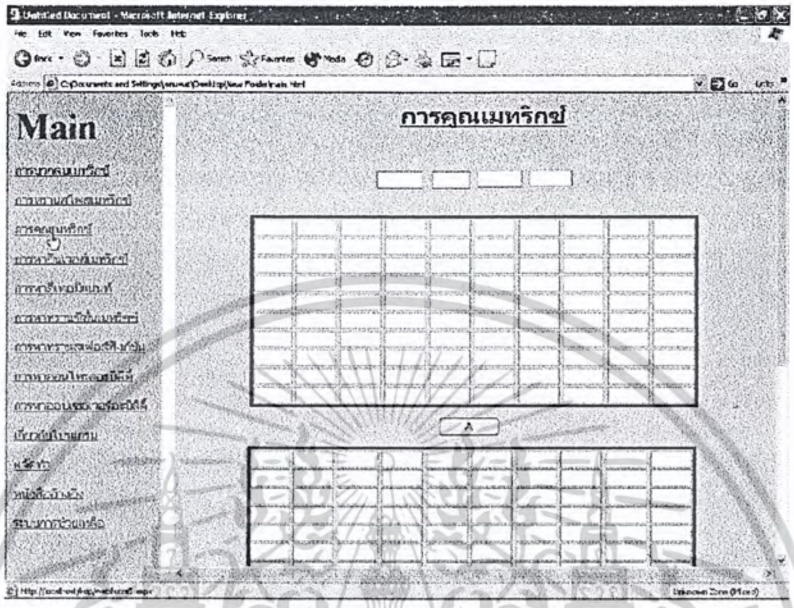
รูปที่ 6.58 แสดงหน้าจอหลักการบวกลบเมทริกซ์

แสดงรูปแบบการใช้ฟังก์ชั่นการทรานสโพสเมทริกซ์



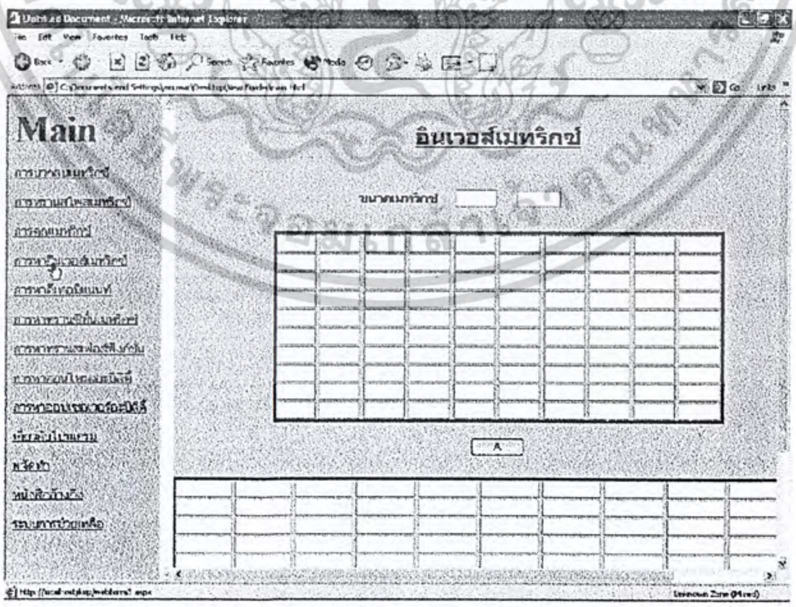
รูปที่ 6.59 แสดงหน้าจอหลักการทรานสโพสเมทริกซ์

แสดงรูปแบบการใช้ฟังก์ชั่นการคูณเมทริกซ์



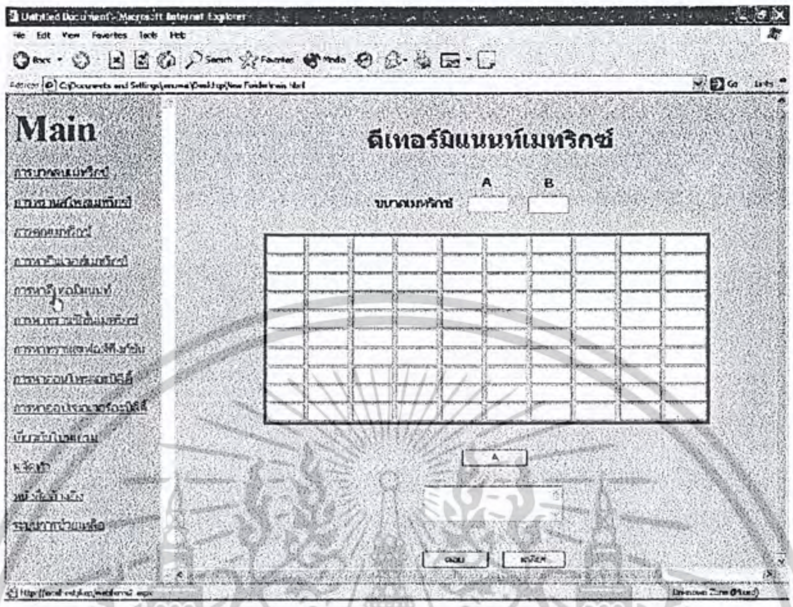
รูปที่ 6.60 แสดงหน้าจอหลักการคูณเมทริกซ์

แสดงรูปแบบการใช้ฟังก์ชั่นการหาอินเวอสเมทริกซ์



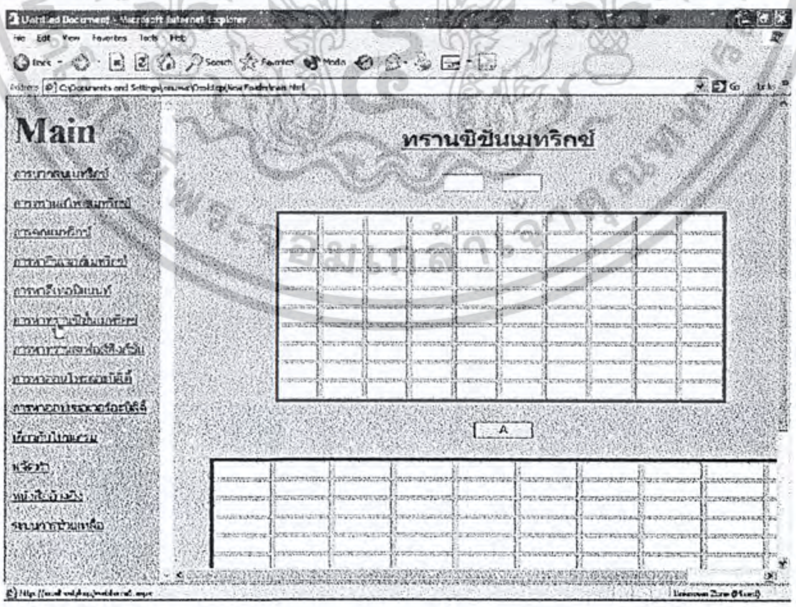
รูปที่ 6.61 แสดงหน้าจอหลักการคูณเมทริกซ์

แสดงรูปแบบการใช้ฟังก์ชั่นการหาดีเทอร์มิแนนท์



รูปที่ 6.62 แสดงหน้าจอหลักการหาดีเทอร์มิแนนท์

แสดงรูปแบบการใช้ฟังก์ชั่นการหาทรานซิชั่นเมทริกซ์เมทริกซ์



รูปที่ 6.63 แสดงหน้าจอหลักการหาทรานซิชั่นเมทริกซ์

บทที่ 7
สรุปผลการทดลองและวิจารณ์

7.1 สรุปผลการทดลอง

จากการทดลองเขียนโปรแกรมที่ช่วยในการคำนวณนี้ ปรากฏว่าค่าที่ได้จากการคำนวณนั้นมีความถูกต้องดี เพราะได้ทำการอ้างอิงผลการทดลองกับโปรแกรม Matlab ซึ่งเป็นไปตามจุดมุ่งหมายในการเขียนโปรแกรม โดยเฉพาะในการเขียนโปรแกรมที่ต้องเชื่อมต่อกับ Server นั้นก็สามารถทำงานได้ไม่มีปัญหา ซึ่งส่งผลให้โปรแกรมสามารถทำงานบน Internet ได้อย่างไม่มีปัญหาและค่าที่ประมวลผลทางฝั่ง Client และ Server นั้นก็สามารถตอบสนองการทำงานได้อย่างรวดเร็วกว่าที่คิดไว้มาก จึงทำให้โปรแกรมที่เขียนขึ้นมานี้มีความสมบูรณ์มากทีเดียว

7.2 วิจารณ์การทดลอง

ในการทำโครงงานชิ้นนี้จะต้องทำการศึกษาหาความรู้ทางด้านการเขียนโปรแกรมด้วยVB.NET และระบบการทำงานของเครือข่าย Internet ด้วย ซึ่งโปรแกรมที่เขียนเพื่อให้ทำงานบน Internet นั้น จะมีข้อเสียตรงที่ขนาดของไฟล์มีขนาดใหญ่กว่าโปรแกรมที่เขียนด้วยภาษา Java มาก แต่จะมีความสะดวกในการเขียนมากกว่าและที่สำคัญความปลอดภัยในการส่งข้อมูลก็มีสูงกว่ามาก

7.3 ประโยชน์ที่ได้รับจากการทำโครงงาน

ได้นำความรู้ที่เรียนมาใช้งานโดยเฉพาะทฤษฎีทางด้านระบบควบคุม นอกเหนือจากนั้นการทำโครงงานนี้ยังทำให้ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการเขียนโปรแกรมด้วยภาษา VB.NET และ ASP.NET เพิ่มเติมเข้ามารวมถึงการได้ทำความเข้าใจเกี่ยวกับระบบเครือข่าย Internet อีกด้วย

7.4 ปัญหาที่เกิดขึ้นระหว่างการทำโครงงาน

ขาดความรู้ประสบการณ์ในการทำงาน เนื่องจากทางผู้จัดทำโครงงานต้องเริ่มต้นศึกษาการเขียนโปรแกรมโดยที่ไม่มีความรู้พื้นฐานที่ดีมาก่อน ทำให้การศึกษาเรียนรู้เป็นไปอย่างช้ากว่าที่คาดคิดไว้มากกอปรกับภาษาที่ทางผู้จัดทำได้ทำโครงงานเป็นภาษาที่ใหม่มากในแวดวงคอมพิวเตอร์ ทำให้ไม่อาจหาหนังสืออ้างอิงที่หลากหลายเนื้อหามาช่วยในการเขียนโปรแกรมได้สะดวกนัก

7.5 แนวทางการพัฒนาแก้ไข

ควรที่จะมีการแก้ไขในความถูกต้องในการคำนวณให้สูงมากกว่านี้เพราะทางผู้จัดทำโครงงานได้กำหนดทศนิยมจำกัดไว้ที่ 2 ตำแหน่ง และโปรแกรมควรที่จะมีความเสถียรภาพมากกว่านี้ นอกจากนี้ในโปรแกรมส่วนที่ทำงานบนอินเทอร์เน็ทนั้นควรที่จะมีขั้นตอนในการทำงานลดลงด้วย

สำหรับฟังก์ชั่นที่ต้องเพิ่มคือ วงจรออกแบบการควบคุมป้อนกลับ การออกแบบตัวสังเกตสภาวะ การหาผลเฉลยในเชิงกราฟ เป็นต้น

บรรณานุกรม

1. Atkinson and Kendall, "*An Introduction to numerical analysis,*" 2nd ed., John Wiley & Sons, 1989.
2. Bay and John S., "*Fundamental of Linear State Space System,*" McGraw-Hill,1999.
3. Borse and Garold J., "*Numerical method with Matlab,*" PWS Publishing Company,1997.
4. Nakamura and Shoichiro, "*Applied Numerical Methods with Software,*" Prentice-Hall, 1991.
5. Katsuhiko Ogata, "*Discrete-time Control Systems,*" Prentice-Hall, 1987.
6. L.V.Atkinson and P.J.Harley, "*An Introductionto Numerical Methods with Pascal,*" International Computer Science Series, 1983.
7. RichardL.Burden and J.DouglasFaires, "*Numerical Analysis,*" Pacific, CA:Brook/Cole,1997.
8. Katsuhisa Furuta, "*State Variable Methods in Automatic Control,*" Corona Publishing, 1940.
9. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, "*ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม,*" สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.
10. จำลอง ครูอุตสาหะ, "*VB.NET ฉบับโปรแกรมเมอร์,*" หจก.ไทยเจริญการพิมพ์, 2545.
11. จำลอง ครูอุตสาหะ, "*ASP.NET ฉบับโปรแกรมเมอร์,*" หจก.ไทยเจริญการพิมพ์, 2545.
12. ผศ.เรวัตร ธรรมาอภิรมย์, "*Start Microsoft Visual Basic.Net,*" สำนักพิมพ์ เอส.พี.ซี. บุ๊คส์, 2545.