ตัวสังเกตสภาวะของระบบ

OBSERVER

โดย

นายเวชรณ อุดมมณีสุวัฒน์

นายสมภพ ตรัยไชยาพร

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม

ภาควิชาวิศวกรรมระบบตวบคุม

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2545

ตัวสังเกตสภาวะของระบบ

O B S E R V E R

โดย

นายเวชรณ อุดมมณีสุวัฒน์

นายสมภพ ตรัยไชยาพร

อาจารย์ที่ปรึกษา

ดร.พัลลภ เหล่าเจริญ

ปริญญานิพนธ์สำหรับปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2545

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2545
ภาควิชา วิศวกรรมระบบควบคุม
คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง ตัวสังเกตสภาวะของระบบ

ผู้จัดทำ

1. นายเวชรณ อุดมมณีสุวัฒน์
2. นายสมภพ ตรัยไชยาพร

______________________ อาจารย์ที่ปรึกษา

(ดร.พัลลภ เหล่าเจริญ)

ตัวสังเกตสภาวะของระบบ

นายเวชรณ อุดมมณีสุวัฒน์
นายสมภพ ตรัยไชยาพร

ดร.พัลลภ เหล่าเจริญ (อาจารย์ที่ปรึกษา)
ปีการศึกษา 2545

บทคัดย่อ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ จำทำขึ้นเพื่อศึกษาหลักการและการออกแบบตัวสังเกตสภาวะของระบบ เนื่องจากเกิดปัญหาการควบคุมป้อนกลับสภาวะอันเนื่องจากการที่ไม่สามารถตรวจวัดสภาวะได้ หรือตรวจวัดได้เพียงบางสภาวะ โดยวิธีการตัวแปรสภาวะ ทั้งในระบบเวลาแบบต่อเนื่องและระบบเวลาเป็นช่วงในกรณีที่ไม่รู้ค่าสภาวะทั้งหมด หรือรู้เป็นบางส่วนแล้วนำไปทำการควบคุมแบบป้อนกลับ โดยการศึกษาปัญหาต่าง ๆ ของการควบคุมดังกล่าว และความจำเป็นของตัวสังเกตสภาวะของระบบแล้วนำไปควบคุมระบบให้มีประสิทธิภาพ

OBSERVER

Wetcharon Udommaneesuvut
Somphob Trichaiyaporn

DR. Pallop Laocharoen (Advisor)
2002

Abstract

This thesis is a study of the basic observer theory for designing state observer. It occurs in state feedback control system problems which we cannot detect real state or observe some state by using state variable. Moreover , be able to educate the continous time observer and the dicrete time obserever. When every states are able to be observed and can estimate these state observer. Then the system can be controlled by feedbacking and it is still.

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญรูปภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา

ระบบควบคุมที่ใช้ในปัจจุบัน (Modern Control System) บางครั้งปัญหาการป้อนกลับสภาวะอันเนื่องมาจากไม่สามารถตรวจวัดสภาวะได้ทั้งหมด หรือสามารถตรวจวัดสภาวะได้เพียงบางสภาวะจึงจำเป็นต้องใช้ข้อมูลอินพุทและเอาท์พุทมาช่วยแก้ปัญหาการตรวจวัดสภาวะ โดยการสังเกตสภาวะของระบบ แต่ก็ยังเกิดปัญหาจากสิ่งรบกวนในขั้นตอนการตรวจวัดข้อมูลทั้งสองกับอนุพันธ์หรือแม้แต่การสร้างโมเดลของระบบขึ้นมาประมาณสภาวะ แต่ก็ยังมีปัญหาข้อมูลแรกเริ่มและยังใช้ได้เฉพาะกรณีที่เมทริกซ์ A มีเสถียรภาพ (Stable) ขณะเดียวกันลักษณะเฉพาะของตัวสังเกตไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ซึ่งสามารถขจัดปัญหาหลักดังกล่าวได้ และสามารถนำตัวสังเกตสภาวะของระบบนี้มาใช้เพื่อทำให้การควบคุมระบบมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์

1. นำข้อมูลอินพุท (Input) และเอาท์พุท(Output) มาช่วยแก้ปัญหาการสังเกตสภาวะและสร้างตัว-สังเกตสภาวะของระบบ
2. สร้างโมเดลเพื่อจำลองเปรียบเทียบและวัดค่าสภาวะของระบบจริง
3. ตรวจวัดสภาวะทั้งหมดของระบบได้
4. ตรวจวัดสภาวะของระบบที่ยังไม่สามารถตรวจวัดได้
5. แยกส่วนการควบคุมระบบและสังเกตสภาวะได้
6. ตรวจวัดสภาวะของระบบที่ยังไม่สามารถตรวจวัดได้ แล้วนำมาป้อนกลับสภาวะให้เป็นการควบคุมแบบวงปิด
7. สามารถออกแบบตัวสังเกตโดยการเลือกโพลที่เหมาะสมเพื่อเสถียรภาพ ของระบบ

1.3 ขอบเขตการทำโครงงาน

1. การสร้างสภาวะสังเกตระบบจริงนั้น จะตรวจวัดสภาวะระบบได้ ต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของสภาวะจริงใด ๆ (x_0)

2. สภาวะของระบบจริงนั้นจะต้องสังเกตสภาวะได้ (Observable) ก่อนถึงทำการสร้างตัวสังเกตสภาวะของระบบจริง

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ทำการศึกษาทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยใช้วิธีการทาง โมเดลคณิตศาสตร์(Model Mathematics) และเมทริกซ์ (Matrix)

2. ศึกษาปัญหาต่าง ๆ และนำทฤษฎีดังกล่าวมาใช้โดยการคิดด้วยมือและใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์(Matlab)

3. วิเคราะห์กราฟโดยพิจารณาจากทฤษฎีแล้วสรุปวิจารณ์ผลการทดลอง โดยสอดคล้องกับทฤษฎี

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากโครงงาน

1. การศึกษาทฤษฎีและสามารถทำความเข้าใจด้วยตนเอง

2. เข้าใจวิธีการดำเนินงานทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องของพีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) อย่างลึกซึ้ง

3. สามารถวิเคราะห์สภาวะของระบบจริงและสภาวะสังเกตได้จากสมการคณิตศาสตร์

4. รู้จักการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น

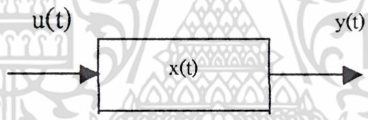
5. สามารถทำงานร่วมกับผู้ร่วมงานได้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการ

2.1 ปัญหาการควบคุมโดยระบบป้อนกลับสภาวะและความจำเป็นของตัวสังเกต

2.1.1 การแก้ปัญหาโดยใช้ข้อมูลอินพุทและเอาพุท

ระบบควบคุมที่ทันสมัย (Modern Control System) ซึ่งประกอบด้วย x(t) ซึ่งเป็นสภาวะของระบบ (State) , u(t) เป็นอินพุทของระบบ , y(t) เป็นเอาพุท ของระบบ ในรูปที่ 2.1 โดยที่สามารถทำ-การควบคุมระบบและสามารถสังเกตสภาวะของระบบได้ แต่เนื่องจากบางครั้งเกิดปัญหาที่ไม่สามารถสังเกตสภาวะของระบบจริงได้หรือไม่สามารถตรวจวัดสภาวะของระบบได้ทั้งหมด จึงมีความจำเป็นต้องใช้ข้อมูลอินพุทและข้อมูลเอาพุทเข้ามาช่วยแก้ไขปัญหาการควบคุมการป้อนกลับสภาวะของระบบและตรวจวัดสภาวะได้



รูปที่ 2.1 สภาวะของระบบ

และจากความสัมพันธ์ของสมการสภาวะ (State Equation) ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ใด ๆ จากสมการที่ 1.1

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

(1.1)

$$y(t) = Cx(t)$$

โดยที่

A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น nxn และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง ($A \varepsilon R^{nxn}$)

B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น nxr และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง ($B \varepsilon R^{nxr}$)

C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น mxn และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง ($C \varepsilon R^{mxn}$)

ระบบที่มาสารถทำการตรวจวัดสภาวะได้ จะมีความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลอินพุท-เอาพุทกับการสังเกตสภาวะของระบบได้ (Observability) จาก A และ C ในรูปแบบของเมทริกซ์สังเกตสภาว (Observability Matrix -O) ในสมการที่ 1.2 แล้วนำไปสร้างตัวสังเกตเพื่อประมาณเปรียบเทียบกับสภาวะจริงต่อไป

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

โดยที่

O เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น nxmxn และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง

เมื่อทำการหาอนุพันธ์ (Derivative) ในลำดับต่าง ๆ ของ y(t) จากสมการที่ 1.1 จะได้อนุพันธ์ลำดับที่ 1 (First Order Derivative)

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t)$$

เมื่อแทน $\dot{x}(t)$ ลงใน $\dot{y}(t)$ จะได้

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t)$$

จากนั้นหาอนุพันธ์ลำดับที่ 2 (Second Order Derivative)

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t)$$

แทน $\dot{x}(t)$ ลงใน $\ddot{y}(t)$ จะได้

$$\ddot{y}(t) = CA^2 x(t) + CBu(t) + CB\dot{u}(t)$$

จากนั้นหาอนุพันธ์ของลำดับที่ 3 (Third Order Derivative)

$$y^{(3)}(t) = CA^2\dot{x}(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\dot{u}(t)$$

แทน $\dot{x}(t)$ ลงใน $y^{(3)}(t)$ จะได้

$$y^{(3)}(t) = CA^3 x(t) + CA^2Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t)$$

เมื่อทำการหาอนุพันธ์ของ y(t) ในลำดับที่ n (n-order Derivative) จะได้ความสัมพันธ์จากข้อมูล-อินพุท และเอาพุทจากอนุพันธ์ของ y(t) เป็น

$$y^{(n-1)}(t) = CA^{n-1}x(t) + \sum_{i=0}^{n-2} CA^{i}Bu^{(n-2-i)}(t)\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.3}$$

จากความสัมพันธ์ของ Observability Matrix (O) กับอนุพันธ์ลำดับต่าง ๆ ของ y(t) จะเป็น

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{y}(t) - CB\,u(t) = CAx(t)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t) - \sum_{i=0}^{n-2} CA^{i}Bu^{(n-2-i)}(t) = CA^{n-1}x(t)$$

สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ y(t) กับ สมหารที่ 1.2 เป็น

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - CB\,u(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) - \sum_{i=0}^{n-2} CA^{i}Bu^{(n-2-i)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} x(t)$$

กำหนดให้

$$Y = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - CB\,\dot{u}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) - \sum_{i=0}^{n-2} CA^{i}Bu^{(n-2-i)}(t) \end{bmatrix}$$

จะได้

$$Y = Ox(t) \tag{1.4}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ 1.4 สามารถสังเกตสภาวะของระบบ (Observable) ได้เมื่อ

$$x(t) = O^{-1}\,Y \qquad (1.5)$$

และ $\text{rank } O = n$

ในกรณีที่ O มีขนาดมิติที่ไม่เท่ากัน ระบบก็สามารถถูกสังเกตสภาวะได้ ในรูปของเมทริกซ์ผกผันเทียม (Pseudo Inverse Matrix) ดังสมการที่ 1.6

$$x(t) = (O^{T} O)^{-1} O^{T} Y \qquad (1.6)$$

และ $\text{rank } [(O^{T} O)^{-1} O^{T}] = n$ ระบบก็สามารถถูกสังเกตได้

เมื่อแสดงความสัมพันธ์สภาวะของระบบควบคุม ที่ทำการสังเกตสภาวะของระบบได้ก็สามารถสร้างตัวสังเกตระบบจริงในรูปแบบโมเดลเปรียบเทียบระหว่างสภาวะของระบบจริง กับโมเดลตัวสังเกตจำลองที่จะสร้างขึ้น แต่ก็ยังเกิดปัญหาจากสิ่งรบกวน ($\sum_{i=0}^{n-2} CA^{i}Bu^{(n-2-i)}(t)$) ในขั้นตอนการตรวจวัดข้อมูลทั้งสองกับอนุพันธ์ของมันจึงจำเป็นต้องสร้างโมเดลเปรียบเทียบขึ้นมาตรวจวัด เทียบกับระบบจริงต่อไป

2.1.2 วิธีสร้างโมเดลเปรียบเทียบ

การสร้างโมเดลของระบบเพื่อเปรียบเทียบคือการจำลองระบบขึ้นมาเพื่อประมาณสภาวะของระบบจริงแต่ในบางครั้งก็ยังมีปัญหาค่าแรกเริ่ม และใช้ได้ในกรณีที่เมทริกซ์ A มีเสถียรภาพขณะเดียวกันลักษณะเฉพาะของออบเซอร์เวอร์ไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ ซึ่งสามารถขจัดปัญหาหลักดังกล่าว

จากสมการสภาวะที่ 1.1 โดยที่ $x(0) = x_0$ เมื่อทำการสร้างโมเดลเพื่อตรวจสอบเปรียบเทียบสภาวะของระบบจริงกับระบบจำลองมีความใกล้เคียงกัน โดยสมการโมเดลจำลองเสหมือนตัวสังเกตระบบดังสมการที่ 1.7

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)\;;\; z(0) = z_0 \qquad (1.7)$$

เมื่อต้องการเปรียบเทียบระบบจริงกับระบบจำลอง โดยจากสมการที่ 1.7 และสมการที่ 1.1 โดยการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) จากสมการทั้ง 2 ดังกล่าว โดยแปลงลาปลาซสมการอนุพันธ์ที่ 1.1 และสมการที่ 1.7 จะได้

$$s\,X(s) = A\,X(s) + B\,u(s) + x(0)$$

$$(s\,I_n - A)\,X(s) = B\,u(s) + x(0)$$

$$s\,Z(s) = A\,Z(s) + B\,u(s) + z(0)$$

$$(s\,I_n\text{-}A)\,Z(s) = B\,u(s) + x(0)$$

ดังนั้น

$$(s\,I_n\text{-}A)\,(Z(s) - X(s)) = z(0) - x(0)$$

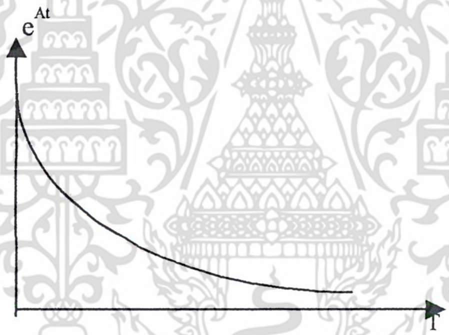
$$Z(s) - X(s) = (sI_n - A)^{-1}\,(z_0 - x_0)$$

เมื่อพิจารณาผลตอบสนองเชิงเวลาต่อเนื่อง (Continuous Time) จะได้

$$z(t) - x(t) = e^{At}\,(z_0 - x_0) \tag{1.8}$$

แต่ปัญหาที่เกิดคือ เราไม่ทราบค่าเริ่มต้น x_0 จากสมการที่ 1.8 ในพจน์ของ $(z_0 - x_0)$ **จึงจำเป็น**ต้องใช้ค่าของเมทริกซ์ A ในพจน์ของ e^{At} โดยต้องการทำให้ระบบมีเสถียรภาพ (Stability)

A จะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ ค่าส่วนจริงของค่าไอเกน (Eigen Value) ของ A มีค่าน้อยกว่า 0 (Rc λ(A) < 0 ; Ncgativc Rcal Part) จาก $|A - \lambda I| = 0$ ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงเสถียรภาพจากเมทริกซ์ A

จากการแก้ปัญหาโดยใช้ข้อมูลอินพุท – เอาพุท เมื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระบบของสภาวะที่ทำการตรวจวัดสภาวะได้แล้วและใช้วิธีการสร้างโมเดลตัวสังเกตขึ้นมาจึงสามารถนำวิธีทั้ง 2 นี้มาสร้างออบเซอร์เวอร์เพื่อทำให้การควบคุมระบบนั้น ๆ ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นต่อไป

2.1.3 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

2.1.3.1 ระบบที่สามารถควบคุมได้

ระบบที่สามารถควบคุมระบบได้ (Controllability) จะมีเงื่อนไขในทางโมเดล

คณิตศาสตร์กับสภาวะของระบบ โดยการป้อนอินพุทให้สภาวะ โดยไม่สนใจเอาพุทของระบบ และพิจารณาจากสมการที่ 1.9

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,,\; x(0) = 0 \tag{1.9}$$

โดยที่สภาวะของระบบที่สามารถควบคุมได้ตามระบบเวลาที่ต่อเนื่อง และมีเงื่อนไขของสภาวะการควบคุมอย่างสมบูรณ์แบบ (Derivimg the Condition for Complete State Controllability) เมื่อทำการอินทิเกรต (Integrate) สมการที่ 1.9 จะได้

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-t_1)}\ Bu(t)\,dt$$

ที่เวลาเริ่มต้น $t_1, x(t_1) = 0;$

$$x(1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t-t_1)}\ Bu(t)\,dt$$

$$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-At}Bu(t)\,dt \tag{1.10}$$

การกระจายอนุกรมของ e^{-At} ในรูปแบบผลรวมทางคณิตศาสตร์ เขียนได้เป็น

$$e^{-At} = a_0(t)\,I + a_1(t)\,A + a_2(t)\,A^2 + \ldots + a_{n-1}(t)\,A^{n-1} \tag{1.11}$$

หรือ

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k(t)\,A^k \tag{1.12}$$

แทนสมการที่ 1.12 ลงในสมการที่ 1.10 จะได้

$$x(0) = -\sum_{k=o}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} a_k(t)\,u(t)\,dt \tag{1.13}$$

กำหนดให้ $b_k = \int_0^{t_1} a_k(t)\,u(t)\,dt$ จะได้สมการที่ 1.13 ใหม่เป็น

$$x(0) = -\sum_{k=o}^{n-1} A^k B\, b_k$$

$$= -[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ . \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

(1.14)

จากสมการที่ 1.14 นี้ จะได้เมทริกซ์ระบบที่ควบคุทได้ (Controllability Matrix ; ξ)

$$\xi = [B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B]$$

โดยที่

ξ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น nxnxr มิติ

และสภาวะของระบบที่ควบคุมได้เมื่อ rank ξ = rank ξ^T = n แสดงว่าระบบดังกล่าวเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (Linearly Independent)

2.1.3.2 ระบบที่สามารถสังเกตได้

ระบบควบคุมที่สามารถสังเกตสภาวะได้ (Observability) โดยทุก ๆ สภาวะของระบบ x(t) และเอาพุทของระบบ y(t) ในช่วงเวลา t_0 ถึง t_1 เมื่อเราสนใจเวลาแรกเริ่ม $t_0 = 0$ ทั้งนี้ระบบควบคุมที่ตรวจวัดสภาวะได้ อาจตรวจวัดได้เพียงบางสภาวะหรือทุกสภาวะก็ตาม จึงสนใจข้อมูลอินพุท-เอาพุทจากสมการสภาวะในสมการที่ 1.1 และเมื่อทำการอินทิเกรตสมการทั้งสองจากสมการดัง-กล่าว จะได้

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-t)} Bu(t)\, dt$$

และ

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-t)} Bu(t)\, dt + Du(t)$$

เมื่อทราบค่า A , B , C และ u(t) ดังนั้นจึงสังเกตสภาวะจาก y(t) จาก

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

เมื่อพิจารณาจากระบบเชิงเส้นจะได้

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, A^k$$

จะได้

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, CA^k x(0)$$

$$y(t) = (\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, CA^k)x(0)$$

หรือ

$$y(t) = (a_0(t)C + a_1(t)C\,A + a_2(t)\,A^2 + \ldots + a_{n-1}(t)C\,A^{n-1})\,x(0) \qquad \textbf{(1.17)}$$

ดังนั้นระบบที่สังเกตสภาวะของระบบได้ดังสมการที่ 1.17 ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน สามารถเขียนเป็น

เมทริกซ์ที่สังเกตสภาวะได้ (Observability Matrix -O) เป็น

$$y(t) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [a_0(t) \quad a_1(t) \quad a_2(t)A^2 \quad \ldots \quad a_{n-1}(t)A^{n-1}]$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นระบบสามารถสังเกตสภาวะได้ เมื่อ rank O = rank O^T = n

2.1.3.3 เสถียรภาพของระบบ

เสถียรภาพของระบบ (Stability theory) จะพิจารณาจากสมการสภาวะของระบบ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.18}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.19}$$

เมื่อเราพิจารณาเฉพาะสภาวะของระบบ โดยคำนึงถึงอินพุทหรือ u(t) = 0 จะได้สมการใหม่เป็น

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \text{ และ } x(t_o) = x_o \text{ เมื่อ } t \ge t_o \tag{1.20}$$

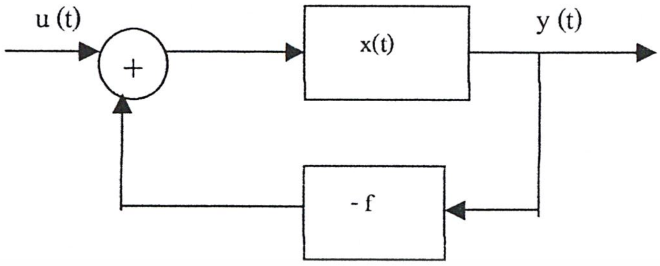
เสถียรภาพของระบบนี้มีแนวโน้มเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อเวลามากขึ้น ($t \to \infty$) สำหรับทุกค่า x_o ใด ๆ จากสมการที่ 1.20 เราจะสามารถหาผลเฉลยของสมการในรูปของลาปาซได้เป็น

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) \tag{1.21}$$

ระบบสมการนี้จะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อส่วนจริงของค่า A น้อยกว่าศูนย์ $\mathrm{Re}\{\lambda(A)\} < 0$ เมื่อ $\lambda(A)$ เป็นค่าไอเกนของ A (Eigenvalues)

2.1.3.4 เร็คกูเลเตอร์

เร็คกูเลเตอร์ (Regulator) เป็นการควบคุมระบบโดยการป้อนกลับสภาวะ (State Feedback Control) เพื่อทำให้ระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ (Unstable) หรือเกิดเสถียรภาพช้าเกิดเสถียรภาพช้า ทำให้เกิดเกิดเสถียรภาพได้เร็วขึ้น โดยสามารถกำหนดเลือกค่าโพล (Pole Assignment) ให้ระบบป้อนกลับทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้



รูปที่ 2.3 การป้อนกลับสภาวะ

การหาค่าตัวป้อนกลับสภาวะ (f) โดยขั้นตอนดังนี้

1. จากสมการสภาวะที่ 1.1 นั้น ทำการหาตัวแปลง (Transform ; M) จาก

$$M = \xi \bar{W} \tag{1.22}$$

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ . & . & & . \\ a_n & . & & 0 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

และ
$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \tag{1.24}$$

2. เลือกค่าโพลตามลำดับ (Order) หรือมิติของสภาวะ (Dimension) ของระบบจะได้

$$\lambda_{1,2,\dots,n} = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

และ

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)\dots(\lambda - \mu_n) = \lambda^n + d_n \lambda^{n-1} + \dots + d_1 \tag{1.25}$$

3. ดังนั้นตัวป้อนกลับสภาวะ

$$f = [d_1 - a_1 \quad d_2 - a_2 \quad \dots \quad d_n - a_n] M^{-1} \tag{1.26}$$

โดยการป้อนกลับสภาวะ

$$u = -f x \tag{1.27}$$

จะได้สมการอนุพันธ์การป้อนกลับสภาวะเป็น

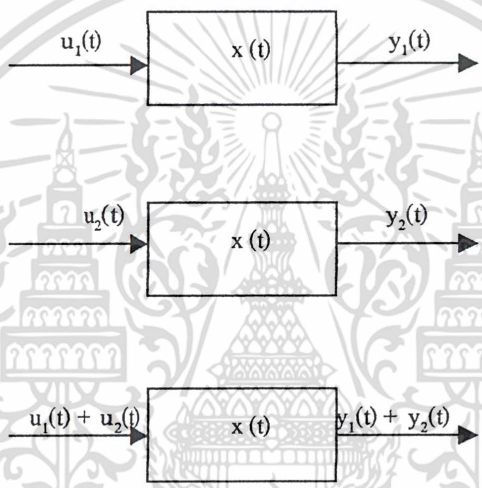
$$\dot{x}(t) = (A - Bf)x(t) \tag{1.28}$$

สมการการป้อนกลับสภาวะเป็น

$$x(t) = e^{(A-Bf)t} x(0) \tag{1.29}$$

2.1.3.5 ระบบเชิงเส้น

ระบบเชิงเส้น (Linear system) เป็นสมการโมเดลเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่เป็นเชิงเส้น ถ้าสัมประสิทธิ์นั้นคงที่หรือตัวแปรอิสระเชิงเส้น คุณสมบัติของระบบเชิงเส้นคือ ซูเปอร์-โพซิชั่น (Superposition) เมื่อระบบใด ๆ ถูกป้อนอินพุท $u_1(t)$ ในสภาวะ แล้วได้ปริมาณเอาพุท $y_1(t)$ ออกมา ถ้าให้ $u_2(t)$ ในสภาวะ แล้วได้ปริมาณเอาพุทออกมา $y_2(t)$ ออกมา ดังนั้นเมื่อถูกป้อนอินพุท $u_1(t) + u_2(t)$ ในสภาวะ ก็จะได้ปริมาณเอาพุท $y_1(t) + y_2(t)$ ดังรูปที่ 2.4



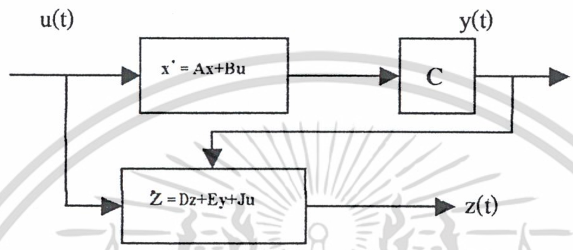
รูปที่ 2.4 คุณสมบัติของระบบเชิงเส้น

ดังนั้นระบบเชิงเส้นจะแปรผันโดยตรงจากความสัมพันธ์ระหว่างอินพุทกับเอาพุท เสหมือนได้กราฟเส้นตรงโดยที่สภาวะเป็นความชัน

2.2 ศึกษารูปแบบพื้นฐานของออบเซอร์เวอร์

2.2.1 ชนิดที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด

ออบเซอร์เวอร์ชนิดที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด (Identity Observer) คือ การสร้างตัวสังเกตเข้าไปตรวจวัดสภาวะของระบบจริง โดยที่สภาวะของระบบจริงกับตัวสังเกตนี้จะมีค่าใกล้เคียงกันตามทฤษฎีและจึงนำออบเซอร์เวอร์นี้มาใช้ตรวจวัดในการใช้งานแทนสภาวะของระบบจริง จากสมการสภาวะที่ 1.1 ต้องการตรวจวัดสภาวะของระบบจริงโดยนำอินพุทเอาพุทมาสร้างสภาวะใหม่ ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ออบเซอร์เวอร์ที่หาค่าสภาวะทั้งหมด

เมื่อไม่ทราบค่าเริ่มต้น x(0) จากสมการที่ 1.1 จึงจำเป็นต้องประมาณจากสภาวะ z(t) คล้ายกับสมการที่ 1.8 ของตัวสังเกตที่มีลักษณะของระบบจริงกับตัวสังเกตคล้ายกัน โดยการป้อนอินพุทและเอาพุทเดียวกันกับสภาวะจริงเสมือนการสร้าง โมเดลเปรียบเทียบในบทที่ 1.2 และจากสภาวะ x(t) ใด ๆ ที่เราไม่สนใจหรือสามารถตรวจวัดสภาวะได้ จึงต้องสร้างตัวสังเกตขึ้นมาเพื่อตรวจวัดสภาวะทั้งหมดและนำมาป้อนกลับสภาวะจะได้สมการสภาวะของตัวสังเกต (State Observer Equation) ในรูปแบบที่จะต้องการหาค่าสภาวะทั้งหมดเป็น

$$\dot{z}(t) = (A-EC)\, z(t) + E\, y(t) + Bu(t)\ ;\ z(0) = z_0 \qquad (2.1)$$

กำหนดเงื่อนไข

i) A-EC = D

ii) J = B

$$\dot{z}(t) = Dz(t) + E\, y(t) + J\, u(t)\ ;\ z(0) = z_0 \qquad (2.2)$$

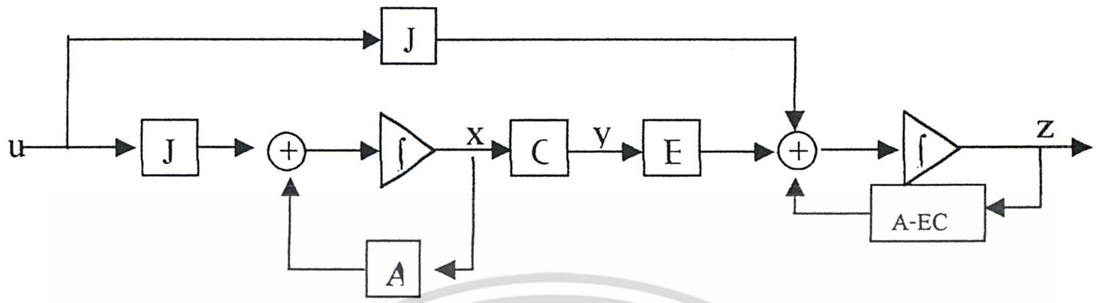
โดยที่

D เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น nxn และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง ($D \in R^{nxn}$)

E เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น nxm และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง ($E \in R^{nxm}$)

หรือเกนของออบเซอร์เวอร์ (Observer Gain)

J เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น nxr และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง ($J \varepsilon R^{nxn}$)



รูปที่ 2.6 ไดอะแกรมของการสร้างตัวสังเกตแบบที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด

เมื่อต้องการเปรียบเทียบสภาวะจริงกับสภาวะสังเกตโดยการนำสมการที่ 2-1 - สมการที่ 1.1

$$\dot{z}(t) - \dot{x}(t) = (A-EC)\, z(t) + E\, y(t) + Bu(t) - Ax(t) - Bu(t) \quad \text{(จากเงื่อนไข ii)}$$

$$= A\, z(t) - EC\, z(t) + E\, y(t) - A\, x(t) \quad \text{(จากสมการที่ 1.1)}$$

$$= A\, z(t) - EC\, z(t) + EC\, x(t) - A\, x(t)$$

$$= (A - EC)\, [z(t) - x(t)] \quad \text{(จากเงื่อนไข i))}$$

$$\dot{z}(t) - \dot{x}(t) = D\, [z(t) - x(t)]$$

$$\mathbf{z(t) - x(t) = e^{Dt}\, (z_0 - x_0)} \tag{2.3}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ 2.3 ปัญหาที่เกิดคือเราไม่ทราบค่าเริ่มต้น x_0 ในพจน์ของ $(z_0 - x_0)$ จึงจำเป็นต้องใช้ค่า D ในพจน์ของ e^{Dt} โดยการทำให้ระบบมีเสถียรภาพ และ D จะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าส่วนจริงของค่าไอเกน (Eigen Value) ของ D มีค่าน้อยกว่าศูนย์ (Real $\lambda(D) < 0$) จาก $|D - \lambda I| = 0$ ดังนั้นในพจน์ของ $e^{Dt}(z_0 - x_0)$ จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ระบบก็จะมีเสถียรภาพแล้วนำตัวสังเกตนี้ไปใช้วิเคราะห์ระบบต่อไป

2.2.1.1 การหาค่าเกนของออบเซอร์เวอร์ (Observer Gain)

โดยใช้วิธีของ Ackerman's Formular จากเงื่อนไข ii) เมื่อ E คือเกนของตัวสังเกต

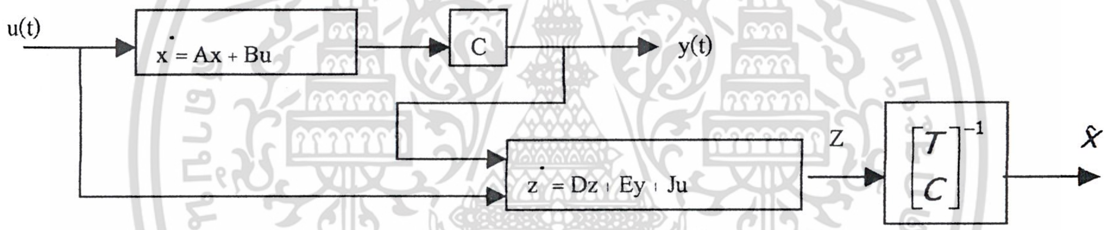
$$E = \phi(A)\,\mathrm{O}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\.\\1\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

โดยที่ $\phi(A)$ คือการเลือกค่าโพลของออบเซอร์เวอร์ เมื่อ

$$\phi(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)...(s-\mu_n) \tag{2.5}$$

2.2.2 ชนิดรู้ค่าสภาวะบางส่วน (Reduce Order)

ออบเซอร์เวอร์ชนิดรู้ค่าสภาวะบางส่วน (Reduce Order) คือการสร้างตัวสังเกตเข้าไปตรวจวัดสภาวะเฉพาะบางส่วนที่เรายังไม่สามารถตรวจวัดได้ในสภาวะ



รูปที่ 2.7 ตัวสังเกตที่ตรวจวัดส่วนที่ไม่ทราบค่า

เมื่อไม่สามารถสังเกตสภาวะได้บางสภาวะหรือสังเกตสภาวะได้เพียงบางส่วน ก็ไม่จำเป็นต้องตรวจวัดสภาวะนั้น ๆ อีก แต่ในสภาวะที่ไม่สามารถสังเกตได้ ต้องทำการลดมิติลงเพื่อทำการสังเกตสภาวะที่ยังไม่สามารถสังเกตสภาวะได้ โดยทำการลดมิติของระบบจริงลงแล้วสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่า เมื่อเวลามากขึ้นตัวสังเกตกับสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่ามีค่าเข้าใกล้ศูนย์ดังสมการที่ 2.6

$$\begin{bmatrix}z(t)\\y(t)\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}T\\C\end{bmatrix}x(t) \text{ เมื่อ } t \rightarrow \infty$$

(2.6)เมื่อ z(t) ถูกลดมิติลงแล้วก็เป็นเวคเตอร์ (Vector) ที่มีขนาดมิติเป็น (n-m) x 1 แถว โดยที่ m<n และ rank C = m

T เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น (n-m)xn และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง ($T \in R^{(n-m)xn}$) ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \in R^{nxn} \quad \text{และ} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \cong n \tag{2.7}$$

และจากคุณสมบัติของแรงค์

$$rank\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = n \tag{2.7.1}$$

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow x(t) \tag{2.8}$$

สมการนี้แสดงว่าถ้า z(t) เข้าใกล้ Tx(t) เมื่อ t เข้าใกล้ α แล้ว x(t) ก็ประมาณค่าได้จาก y และมิติของ z จะเท่ากับมิติของ Tx(t) และจาก $\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = n; T \in R^{(n-m)xn}$ จำนวนมิติของ z ประมาณได้จากสภาวะของระบบที่ไม่ทราบค่าซึ่งเท่ากับ n-m มิติ ซึ่งเป็นการลดลำดับลง โดยเขียนความสัมพันธ์ของตัวสังเกตที่สามารถตรวจสภาวะได้แล้ว z(t) กับตัวสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่าก็สามารถตรวจวัดสภาวะได้

จากสมการที่ 2.1 เมื่อ $z_0 = z(0)$ จะได้เอาพุทจากการวัดสภาวะที่ยังไม่ทราบค่า ($\hat{x}(t)$)

$$\hat{x}(t) = [P \quad \nabla]\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

สมการที่ 2.8 เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากลดมิตและวัดค่าสภาวะเพียงบางส่วนจากมาการที่ 2.3 โดยการเปรียบเทียบสภาวะจริงกับสภาวะที่สังเกตได้แล้วในส่วนที่ยังมาทราบค่า

$$\lim_{t \to \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0, \forall_T, \forall_{x_0} \quad \text{เมื่อ } t \to \infty$$

โดยที่ออบเซอร์เวอร์ประมาณได้จาก

$$z(t) \rightarrow Tx(t) \qquad \text{เมื่อ } t \to \infty \tag{2.10}$$

$$\dot{z}(t) = Dz(t) + E\,y(t) + J\,u(t); z(0) = z0 \tag{2.2}$$

$$\hat{x}(t) = Pz(t) + \nabla y(t) \tag{2.9}$$

สมการที่ 2.2 และสมการที่ 2.9 เป็น Reduce Order Observer ของระบบที่สามารถควบคุมได้ จะได้ว่าเมื่อเวลามากขึ้นตัวสังเกตกับสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่ามีค่าเข้าใกล้กันดังสมการที่ 2.10 เมื่อนิยามค่าความผิดพลาด (Error ; ε) ระหว่าง z(t) กับ Tx(t) โดยที่ $\varepsilon = Tx - z$ ดังสมการที่ 2.11

$$\dot{\varepsilon} = D\varepsilon + (TB - J)u + (TA - DT - EC)x \tag{2.11}$$

ถ้าเวลาเพิ่มขึ้นระบบมีความใกล้เคียงกันก็จะเกิดเงื่อนไขของการลดมิติลงจากสมการที่ 2.11 เป็น

i) TA − EC = DT ,

J = TB

ii) D มีเสถียรภาพ

จาก

$$T\dot{x} - \dot{z} = \text{T(Ax+Bu)} - \text{(Dz+Ey+Ju)}$$

$$= \text{TAx} + \text{TBu} - \text{Dz} - \text{Ey} - \text{Ju}$$

จากเงื่อนไข i) และสมการที่ 1.1

$$T\dot{x} - \dot{z} = \text{TAx} + \text{Ju} - \text{Dz} - \text{Ecx} - \text{Ju}$$

$$T\dot{x} - \dot{z} = \text{(TA-EC)x} - \text{Dz}$$

$$T\dot{x} - \dot{z} = \text{DTx} - \text{Dz}$$

$$\dot{z} - T\dot{x} = \text{Dz} - \text{DTx}$$

$$= \text{D(z-Tx)}$$

เมื่อแปลงลาปราซจะได้

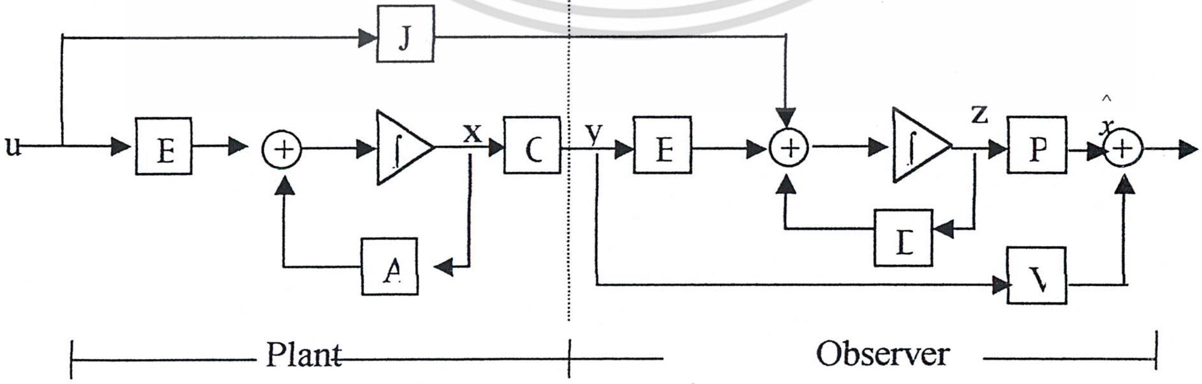
$$\text{s (Z(s)-TX(s))} = \text{D (Z(s)-TX(s))} + (z_0 - Tx_0)$$

$$(sI_n - D)(Z(s) - TX(s)) = z_0 - Tx_0$$

$$Z(s) - TX(s) = (sI_n - D)^{-1} z_0 - Tx_0$$

เมื่อลาปราซผกผันจะได้สมการที่ 2.12 เป็นสมการที่แปลงสภาวะจริง โดยการสังเกตสภาวะที่ยังไม่สามารถตรวจวัดได้

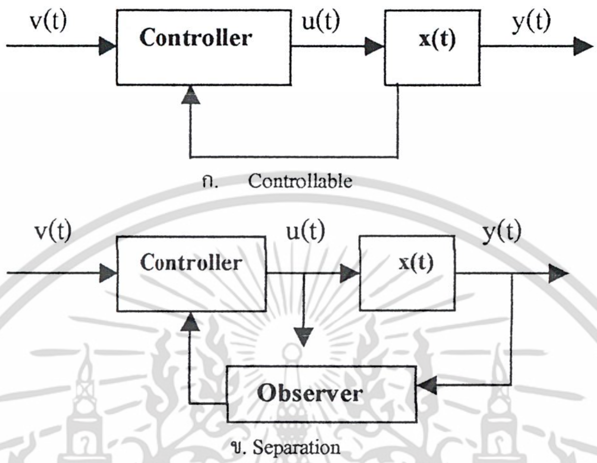
$$z(t) = Tx(t) + e^{Dt}\left(z_0 - Tx_0\right) \text{ ; D มีเสถียรภาพ (Stability)} \qquad (2.12)$$



รูปที่ 2.8 ไดอะแกรมของสภาวะที่รู้ค่าบางส่วน

2.2.3 ทฤษฎีแยกส่วน (Separation Theorem)

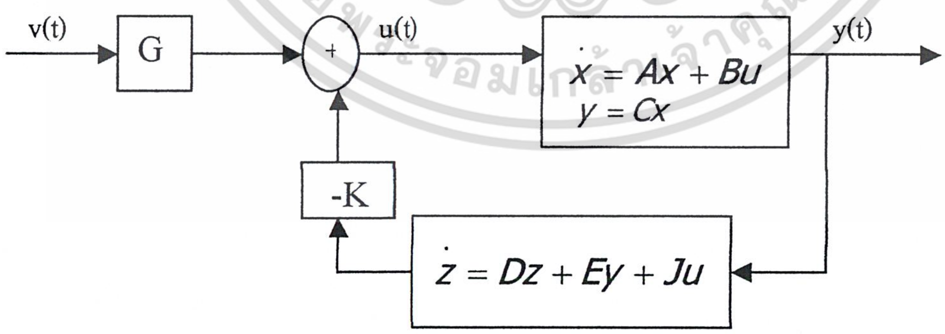
ทฤษฎีแยกส่วน (Separation Theorem) คือ การควบคุมระบบควบคุมและสังเกตสภาวะของระบบ โดยเป็นอิสระต่อกัน



รูปที่ 2.9 ก. การควบคุมระบบได้ ข. การแยกส่วนการควบคุมและสังเกตระบบ

จากระบบควบคุมที่สามารถควบคุมสภาวะของระบบ เมื่อทำการป้อนกลับสภาวะดังรูปที่ 2.9 จากนั้นนำอินพุทและเอาพุทของสภาวะจริงมาสร้างตัวสังเกต แล้วนำตัวสังเกตนี้มาป้อนกลับสภาวะ สามารถควบคุมและสังเกตระบบโดย "ทฤษฎีแยกส่วน"

เมื่อ $u = Gv-Kx$ เป็นตัวป้อนกลับสภาวะ (Feedback) ทฤษฎีแยกส่วนนี้ยังทำให้ระบบมีเสถียรภาพทั้งในส่วนการควบคุมและการสังเกตสภาวะดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.10 การควบคุมแบบแยกส่วน

จากสมการที่ 1.1 กับสมการที่ 2.2 และ u=Gv-Kx เมื่อทำการป้อนกลับไปยังสภาวะจริงและออบเซอร์เวอร์จะได้

$$\dot{x} = Ax + BGv - BKz$$

$$\dot{z} = Dz + ECx + BGv - BKz$$

เมื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมการอนุพันธ์ของสภาวะจริงกับออบเซอร์เวอร์จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ EC & D-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BG \\ DG \end{bmatrix} v$$

(2.13)

เมื่อพิจารณาสมการที่ 2.13 ซึ่งเป็นการควบคุมป้อนกลับโดยออบเซอร์เวอร์

กำหนดให้

$$Q = \begin{bmatrix} A & -BK \\ EC & D-BK \end{bmatrix}$$

ระบบนี้จะมีเสถียรภาพเมื่อ $|Q-\lambda I| = 0$

และได้ว่า

$$\begin{vmatrix} A-\lambda I_n & -BK \\ EC & D-BK-\lambda I_n \end{vmatrix} = 0$$

หาดีเทอร์มิแนนท์ของ Q โดยใช้วิธีเกาส์ (Gaussian Elimination)

นำแถวที่ 1 — แถวที่ 2 ได้

$$\begin{vmatrix} D-\lambda I_n & -(D-\lambda I_n) \\ EC & D-BK-\lambda I_n \end{vmatrix} = 0$$

นำหลักที่ 1 + หลักที่ 2 ได้

$$\begin{vmatrix} 0 & -(D-\lambda I_n) \\ EC+D-BK-\lambda I_n & D-BK-\lambda I_n \end{vmatrix} = 0$$

จากเงื่อนไขที่ i) จัดรูปใหม่ได้

$$\begin{vmatrix} 0 & -(D-\lambda I_n) \\ A-BK-\lambda I_n & D-BK-\lambda I_n \end{vmatrix} = 0$$

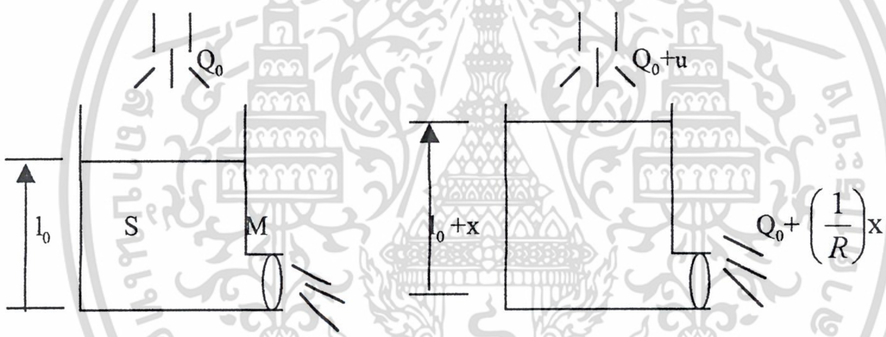
ดังนั้นสามารถหา det Q จะได้

$$\Delta_t(\lambda) = | A\text{-}BK\text{-}\lambda I_n | \, |D\text{-}\lambda I_n| = 0 \qquad (2.14)$$

เมื่อ $| A\text{-}BK\text{-}\lambda I_n | = 0$ เป็นส่วนของ Controllable และสามารถเลือกโพลการป้อนกลับในส่วนการควบคุมได้ และ $|D\text{-}\lambda I_n| = 0$ ซึ่งเป็นส่วนของ Observable สามารถเลือกโพลในส่วน observer gain ได้ และสามารถควบคุมการควบคุมทั้งสองอย่างอิสระต่อกัน เมื่อ K และ E มีเสถียรภาพ A-BK และ A-EC : Negative Real Part

ดังนั้นทฤษฎีแยกส่วนจะมีเสถียรภาพของระบบทั้งการควบคุมกับการสังเกตเสมอ

2.2.4 ปัญหาระบบแทงค์



จากรูปแทงค์น้ำ (Tank System) เมื่อ

Q_0 คืออัตราของปริมาณการไหลเข้า-ออกสมดุลย์มีหน่วยเป็น m^3/s

l_0 คือระดับน้ำที่คงที่ (m)

S คือพื้นที่หน้าตัดของถัง (m^2)

m คือพื้นที่หน้าตัดของทางออก (m^2)

g คืออัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง (m/s^2)

จากกฎของ Benulli ; $Q_0 = M\sqrt{2gl_0}$ m^3/s

เมื่อเราเริ่มปล่อยน้ำจากเดิมด้วยอัตรา Q_0 เพิ่มขึ้น u อัตราของปริมาตรน้ำจะเป็น Q_0+u จากความสูงของน้ำ l_0 มีระดับน้ำเพิ่มขึ้น $l_0 + X$ โดยสมมุติเป็นระดับน้ำเพิ่มขึ้นเล็กน้อยและ

P เป็นปริมาณน้ำที่ไหลออก โดยที่ $P = M\sqrt{2g(l_0 + x)}$

x คือระดับน้ำที่เพิ่มขึ้นจากเดิม (l_0) เล็กน้อย (m)

จากสมการอนุกรมของ Taylor และ จากความสัมพันธ์ระหว่าง P กับ Q_0

$$P = M\sqrt{2gl_0 + 2gx} = M\sqrt{\frac{2g}{l_0}l_0(l_0 + x)} = M\sqrt{2gl_0(1+\frac{x}{l_0})}\ (\mathrm{m^2/s})$$

$$Q = M\sqrt{2gl_e}$$

$$P = Q_0\sqrt{1+\frac{x}{l_e}} = Q_0 + \frac{Q_0}{2l_0}x - \frac{a_0}{8l_0^2}x^2 + ...$$

โดยสมมุติว่า

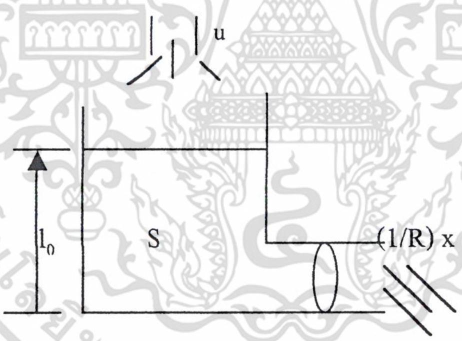
$$R = \frac{2l_0}{Q_0} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{2l_0}{g}}$$

โดยที่ R : ความต้านทานของของไหล ($\frac{s}{m^2}$)

เนื่องจาก x มีค่าน้อยมากๆในพจน์ที่ $x^2, x^3, \ldots\ldots x^n$ จึงมีค่าใกล้ 0

จะได้

$$P = Q_0 + \frac{1}{R}v$$



เมื่อต้องการหาความสัมพันธ์ของปริมาตรของน้ำในแทงค์โดยสมการเชิงอนุพันธ์โดยประมาณระบบเป็นเชิงเส้นจะได้

ปริมาตรน้ำใน tank = ปริมาตร input - ปริมาตร output

เมื่อ

$\dot{x}(t)$ = อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำกับเวลา

S = พท.หน้าตัดของถัง (m^2)

R = ความต้านทานของของไหล (s/m^2)

x = ระดับที่เพิ่มขึ้น (m)

u = อินพุทหรืออัตราของปริมาณน้ำ (m^2/s)

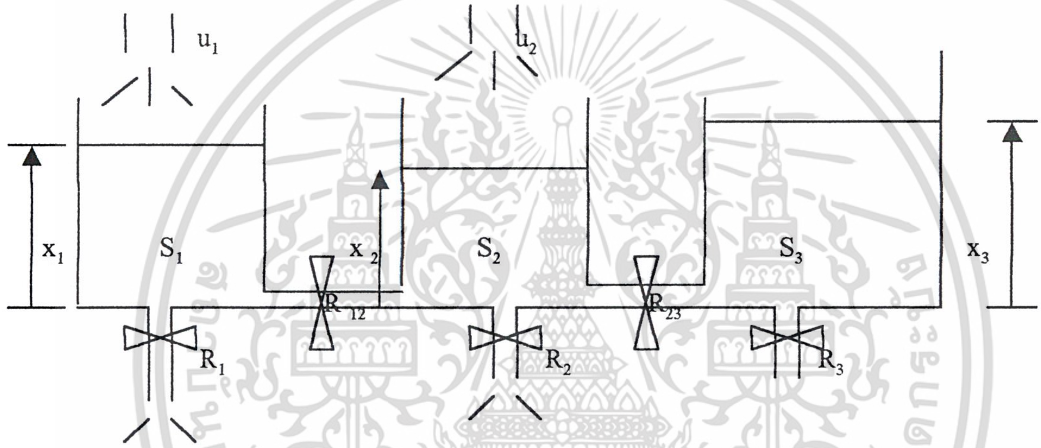
ประมาณระบบแทงค์น้ำเป็นระบบเชิงเส้น (Linearized System)

$$Sdx + \left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{xdt} = \mathrm{udt}$$

$$\mathrm{S}\dot{\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{R}}\mathrm{x} = \mathrm{u}$$

$$\dot{\mathrm{x}} = -\frac{1}{\mathrm{SR}}\mathrm{x} + \frac{1}{S}\mathrm{u}$$

การเชื่อมต่อแทงค์น้ำเข้าด้วยกัน 3 ถังดังรูป



จากถังที่ 1

$$S_1 dx_1 + \frac{1}{R_{12}}(x_1 - x_2)dt + \frac{1}{R_1}x_1 dt = u_1 dt$$

$$S_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{R_{12}}(x_1 - x_2) + \frac{1}{R_1}x_1 = u_1$$

$$\dot{x}_1 = -\left(\frac{1}{S_1 R_1} + \frac{1}{S_1 R_{12}}\right)x_1 + \frac{1}{S_1 R_{12}}x_2 + \frac{u_1}{S_1} \tag{2.15}$$

จากถังที่ 2

$$S_2 dx_2 + \frac{1}{R_{12}}(x_2 - x_1)dt + \frac{1}{R_{23}}(x_2 - x_3)dt + \frac{1}{R_2}x_2 dt = u_2 dt$$

$$S_2 \dot{x}_2 + \frac{1}{R_{12}}x_2 - \frac{1}{R_{12}}x_1 + \frac{1}{R_{23}}x_2 - \frac{1}{R_{23}}x_3 + \frac{1}{R_2}x_2 = u_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{S_2 R_{12}} x_1 - \left(\frac{1}{S_2 R_{12}} + \frac{1}{S_2 R_2} + \frac{1}{S_2 R_{23}} \right) x_2 + \frac{1}{S_2 R_{23}} x_3 + \frac{1}{S_2} u_2 \qquad (2.16)$$

จากถังที่ 3

$$S_3 dx_3 + \frac{1}{R_3} x_3 dt + \frac{1}{R_{23}} (x_3 - x_2) dt = 0$$

$$S_3 \dot{x}_3 + \frac{1}{R_3} x_3 + \frac{1}{R_{23}} x_3 - \frac{1}{R_{23}} x_2 = 0$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{S_3 R_{23}} x_2 - \left(\frac{1}{S_3 R_3} + \frac{1}{S_3 R_{23}} \right) x_3 \qquad (2.17)$$

จาก

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + Bu \qquad (2.18)$$

เมื่อนำสภาวะทั้ง 3 มาเขียนเป็นสมการสภาวะในรูปเมทริกซ์ จะได้ A , B ดังนี้

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{S_1 R_1} + \frac{1}{S_1 R_{12}} \right) & \frac{1}{S_1 R_{12}} & 0 \\ \frac{1}{S_2 R_{12}} & -\left(\frac{1}{S_2 R_{12}} + \frac{1}{S_2 R_{22}} + \frac{1}{S_2 R_{23}} \right) & \frac{1}{S_2 R_{23}} \\ 0 & \frac{1}{S_2 R_{23}} & -\left(\frac{1}{S_3 R_3} + \frac{1}{S_3 R_{23}} \right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{s}_2} \end{bmatrix}$$

2.3 ออบเซอร์เวอร์ของระบบเวลาต่อเนื่อง

ในการออกแบบออบเซอร์เวอร์ทั่วไปโดยคำนึงถึงชระบบช่วงเวลาต่อเนื่อง เราได้เงื่อนไขต่างๆ จากพื้นฐานของออบเซอร์ เช่น ออบเซอร์ที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด , ชนิดที่รูค่าสภาวะบางส่วน และ ทฤษฎีแยกส่วนการควบคุม แต่ในความเป็นจริงจะมีออบเซอร์เวอร์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว หรือไม่นั่นคือจำเป็นต้องหาเงื่อนไขเพิ่มเติมจากระบบควบคุมเพื่อสร้างออบเซอร์เวอร์ที่สามารถนำไปใช้งานได้ในส่วนนี้จะพิจารณาระบบควบคุมที่แปรผันในรูปเวลาต่อเนื่อง

จากสมการที่ 3.1

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

2.3.1 ออบเซอร์เวอร์สภาวะ

2.3.1.1 เงื่อนไขการสร้างออบเซอร์เวอร์สภาวะ

การสร้างออบเซอร์เวอร์สภาวะ (State Observer) พิจารณาจากระบบสัมปะสิทธิ์คงที่ที่สามารถสังเกตระบบได้จากสมการที่ 3.1 โดยที่

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix} ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ . \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

พิจารณาในกรณีการประมาณสภาวะ $x(t)$ เป็นออบเซอร์เวอร์ที่มีติเป็น (n-m) ซึ่งอ้างอิงออบเซอร์เวอร์ที่รู้ค่าสภาวะบางส่วน ในกรณี rank C = m จากทฤษฎีบทที่ 2.2 จากสมการที่ 2.2

$$\dot{z}(t) = Dz(t) + E\,y(t) + J\,u(t) ; z(0) = z_0 \tag{2.2}$$

และ

$$\hat{x}(t) = Pz(t) + \nabla y(t) \tag{2.9}$$

โดยที่ $\hat{x}(t)$ เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการลดมิติการสังเกต โดยนำส่วนนี้มาตรวจวัดกับกับสภาวะจริงและการตรวจวัดสภาวะที่รู้ค่าแล้วโดยนิยามค่าความผิดพลาดจากสมการที่ 2.11

$$\dot{\varepsilon} = D\varepsilon + (TB - J)u + (TA - DT - EC)x \tag{2.11}$$

แสดงความสัมพันธ์ในรูปของเมทริกซ์เป็น

$$\begin{bmatrix} D & E \\ P & \nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TA \\ I_n \end{bmatrix}$$

และหาค่า D , E , P และ ∇ จาก

$$\begin{bmatrix} D & E \\ P & \nabla \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TA \\ I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1} \tag{3.2}$$

จากสมการที่ 3.2 มีความสัมพันธ์ในการตรวจวัดเป็น

$$TA - DT = EC$$

$$J = TB \tag{3.3}$$

$$\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P & \nabla \end{bmatrix}$$

และ D มีเสถียรภาพแบบลู่เข้า (Assymtotically Stable)

การตรวจวัดสภาวะจริงกับตัวสังเกตสภาวะที่รู้ค่าสภาวะบางส่วนเป็น

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) - x(t) &= Pz(t) + \nabla y(t) - x(t) \\ &= Pz(t) + \nabla Cx(t) - x(t) \\ &= Pz(t) + (\nabla C - I_n)x(t) \qquad \text{จาก } PT + \nabla C = I_n \\ &= Pz(t) - PTx(t) \\ &= P(z - Tx(t)) \end{aligned}$$

จากสมการที่ 2.12

$$z(t) = Tx(t) + e^{Dt}\left(z_0 - Tx_0\right) \tag{2.12}$$

ดังนั้นสามารถตรวจวัดสภาวะจริงเมื่อรู้ค่าสภาวะได้เพียงบางส่วนจากสมการที่ 3.4

$$\hat{x}(t) - x(t) = Pe^{Dt}(z_0 - x_0) \tag{3.4}$$

การสร้างออบเซอร์เวอร์เราสามารถเลือกค่าไอเกนของ D (λ_D) ที่เหมาะสม $e^{Dt} \rightarrow 0$ โดยอ้างอิงสมการที่ 3.2 โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 2.3

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.3</u>

ความเป็นไปได้ในการสร้างออบเซอร์เวอร์ (Existancc of Obscrvcr) โดยสามารถตรวจวัดสภาวะจากสมการที่ 3.1 แล้วสร้างออบเซอร์เวอร์ซึ่งมีค่าไอเกนของ เป็นอะไรก็ได้ โดยใช้ทฤษฎีของโกพินาธ (Gopinath 's theory) และออกแบบสร้าง (Observer design algorithm of Gopinath 's theory) ดังนี้

1.) จากสมการสภาวะ 3.1 เมื่อทราบค่า A , B , C และสร้างแพลนท์ใหม่เข้าไปตรวจวัดสภาวะ จึงต้องหาตัวแปลงระบบจริงไปเป็นระบบเสมือน ซึ่ง

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} C^{\#} \\ C \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

ซึ่ง $C^{\#}$ ทำให้ H เป็นเมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) ซึ่ง

$$C^{\#} \in R^{(n-m)xn}$$
$$H^{-1} \in R^{nxn}$$

โดยที่ rank H = rank H^{-1} = n

และเป็นเมทริกซ์นอนซิงกูล่าร์ (non-singular matrix)

2.) จากสมการที่ 3.5 โดยสร้างระบบเสมือน $\bar{A}, \bar{B}$, $\bar{C}$ จาก A , B , C จาก

$$\bar{A} = H^{-1}AH = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \in R^{nxn} \tag{3.6ก}$$

$$\bar{B} = H^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \in R^{nx(n-m)} \tag{3.6ข}$$

$$\bar{C} = CH = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \tag{3.6ค}$$

3.) จากระบบเสมือน(Minimal order state observer) โดยการลดมิติลงและสร้างตัวสังเกต

จากการหาค่า $\hat{\bar{A}}, \hat{\bar{B}}, \hat{\bar{C}}, \hat{\bar{D}}, \hat{\bar{J}}$ จากสมการที่ 3.6ค และสร้างตัวแปลง $\bar{T}$ เสมือนสมการที่ 2.6

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -L \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

4.) จากตัวแปลงในสมการที่ 3.7 ได้ความสัมพันธ์จากสมาการที่ 3.2

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{A}} & \hat{\bar{B}} \\ \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{n-m} & -L)\bar{A} \\ & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-m} & -L \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{A}} & \hat{\bar{B}} \\ \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21} & \bar{A}_{12} - L\bar{A}_{22} \\ I_{n-m} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-m} & -L \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{A}} & \hat{\bar{B}} \\ \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21} & \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21}L + \bar{A}_{12} - L\bar{A}_{22} \\ I_{n-m} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\hat{\bar{A}} = \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21} \qquad \in R^{(n-m)x(n-m)} \qquad (3.8ก)$$

$$\hat{\bar{B}} = \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21}L + \bar{A}_{12} - L\bar{A}_{22} \quad \in R^{(n-m)xm} \qquad (3.8ข)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & L \\ 0 & I_m \end{bmatrix} , \ \hat{\bar{C}} \in R^{nx(n-m)} , \ \hat{\bar{D}} \in R^{nxm} \qquad (3.8ค)$$

ระบบสามารถตรวจวัดสภาวะได้เมื่อ

$$rank\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \\ \bar{A}_{21}\bar{A}_{11} + \bar{A}_{22}\bar{A}_{21} & \bar{A}_{21}\bar{A}_{12} + \bar{A}^2_{22} \end{bmatrix} = n \qquad (3.9)$$

สามารถออกแบบออบเซอร์เวอร์จากการหาค่า L ได้จากรากเฉพาะ

5.) เมื่อหาค่าระบบเสมือนได้ $\hat{\bar{A}}, \hat{\bar{B}}, \hat{\bar{C}}, \hat{\bar{D}}, \hat{\bar{J}}$ ซึ่งเป็นออบเซอร์เวอร์ประมาณเทียบกับสภาวะจริง ได้เอาพุท สามารถตรวจวัดสภาวะใน A , B และ C ได้จาก

$$H\hat{x}(t) \to x(t) \qquad \text{เมื่อ} \quad t \to \infty$$

ดังนั้นออบเซอร์เวอร์จะมีพารามิเตอร์ใหม่จาก A , B และ C เป็น

$D = \hat{\bar{A}}$, $E = \hat{\bar{B}}$, $P = H\hat{\bar{C}}$, $\nabla = H\hat{\bar{D}}$, $J = \hat{\bar{J}}$, $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$

จะได้เงื่อนไขต่าง ๆ เป็น

$$\bar{T}\bar{A} - \hat{\bar{A}}\bar{T} = \hat{\bar{B}}\bar{C}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{T}\bar{C}$$

$$P\bar{T} + \nabla\bar{C} = I_n$$

ความสัมพันธ์ของสมการสภาวะจริงกับสภาวะสังเกตจะเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \hat{\bar{B}}\bar{C} & \hat{\bar{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ \hat{\bar{J}} \end{bmatrix} u(t) \qquad (3.10)$$

2.4 ออบเซอร์เวอร์ในระบบเวลาเป็นช่วง

ในการสังเกตสภาวะของระบบจริงซึ่งเป็นช่วงเวลาที่ต่อเนื่องโดยการใช้ข้อมูลอินพุท-เอาพุทมาทำการสร้างตัวสังเกต แต่การใช้คอมพิวเตอร์ในการรับค่าข้อมูลดังกล่าวเป็นระบบดิจิตอล ซึ่งต้องมีการแซมปลิง (Sampling) ในการแปลงข้อมูลที่รับค่ามาเป็นปริมาณอนาลอก (Analog)

การควบคุมดิจิตอลซึ่งมีปริมาณอนาล็อกในระบบ จำเป็นต้องมีการแปลงสัญญาณทั้งสองแบบทำแซมปลิงในช่วงเวลา τ $(t=0, \tau, 2\tau, \ldots, k\tau, (k+1)\tau, \ldots$ ของตัวแปรสภาวะและอินพุท สมการการทำงานของระบบก็จะเปลี่ยนไปเป็นสมการผลต่าง ดังนั้นในการออกแบบจึงจำเป็นต้องตรวจสอบว่าสามารถทำงานได้เหมือนกรณีของระบบเวลาต่อเนื่องหรือไม่

ในการสร้างระบบเวลาเป็นช่วงจากระบบเวลาต่อเนื่อง ดังนั้นเมื่อ $t = k\tau$ $(k = 0, 1, \ldots)$ สภาวะคือ $x(0), x(\tau), \ldots, x(k\tau), x(k+1)\tau, \ldots$ ส่วนอินพุท $u(t) = u(k\tau)$, $k\tau \le t \le (k+1)\tau$ และสมการของระบบคือ

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{4.1}$$

โดยที่มิติของสภาวะ $x(k)$ เป็น n, มิติเอาพุท $y(k)$ เป็น m และมิติของ $u(k)$ เป็น r และจากสมการสภาวะที่ต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

เมื่ออินทิเกรตสมการสภาวะจากสมการที่ 4.2 จะได้

$$x(t) = e^{A\tau}\, x(0) + \int_0^\tau e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau$$

เมื่อ $t = k + 1$ จะได้

$$x(k+1) = x[(k+1)\tau] = e^{[A\tau]}\, x[k\tau] + [(k\tau(k+1)\tau]\, e^{A[(k+1)\tau-\tau]}\, d\tau)Bu(k\tau)$$

$$x(k+1) = e^{[A\tau]}\, x(k\tau) + (\int_0^\tau e^{[A\tau]}\, d\tau)Bu(k)$$

จะได้สมการสภาวะในรูปแบบเวลาเป็นช่วงเป็นสมการที่ 4.1 ซึ่ง

$$e^{[A\tau]} = I + A\tau + \frac{1}{2!}A^2\tau^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n\tau^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{A^n\tau^n}{n!}$$

จะได้

$$\bar{A} = e^{[A\tau]} = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{A^n \tau^n}{n!} \tag{4.3}$$

$$\bar{B} = \int_0^{\tau} A\tau \quad d\tau \quad B \tag{4.4}$$

2.4.1 ออบเซอร์เวอร์สภาวะ

2.4.1.1 เงื่อนไขของระบบออบเซอร์เวอร์ชนิดไม่รู้ค่าสภาวะ

จากสมการตัวสังเกตในช่วงเวลาเป็นช่วง

$$z(k+1) = \bar{D}z(k) + Ey(k) + Ju(k)$$

$$\hat{x}(k) = z(k) \tag{4.5}$$

เมื่อนำอินพุท — เอาพุทมาสร้างสภาวะ โดยการเปรียบเทียบสภาวะจริงกับสภาวะสังเกต จะได้

$$e(k) = z(x) - x(k)$$

$$e(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) - Dz(k) - Ey(k) - Ju(k)$$

$$e(k+1) = \bar{D}e(k) + (\bar{A} - EC - \bar{D})x(k) + (\bar{B} - J)u(k) \tag{4.6}$$

โดยที่ i) $\bar{D} = \bar{A} - EC$, $J = \bar{B}$

ii) $\bar{D}$,มีเสถียรภาพแบบลู่เข้า

ดังนั้น

$$e(k+1) = \bar{D}e(k) \qquad \text{เมื่อ} \quad e(k) \to \alpha \quad \text{และ} \quad k \to \alpha$$

โดยการเลือกค่าออบเซอร์เวอร์เกนจาก $\left|\lambda I_n - \bar{D}\right| = 0$ ทำให้ $e(k) \to \alpha$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C\bar{A} \\ . \\ . \\ C\bar{A}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\text{rank } O = n$$

ขั้นตอนการหาค่าออบเซอร์เวอร์เกน (E)

1. หาสมการลักษณะจาก

$$\left|\lambda I_n - A + \bar{E}C\right| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

2. หาสมการลักษณะของโพลที่เลือกโดยมีสมการลักษณะคือ

$$\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_n = 0$$

3. จาก ข้อ 1 = ข้อ 2 เมื่อ

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdot \\ E_n \end{bmatrix}$$

4. จะได้

$$\bar{D} = \bar{A} - EC$$

$$J = \bar{B}$$

สมการออบเซอร์เวอร์แบบเวลาเป็นช่วงของสภาวะทั้งหมด

$$z(k+1) = \bar{D}z(k) + Ey(k) + Ju(k)$$

2.4.1.2 กรณีรู้ค่าสภาวะบางส่วน

จากการวัดค่าสภาวะที่ทราบค่าแล้ว ก็นำข้อมูลดังกล่าวมาทำการตรวจวัดใหม่โดยสร้างระบบเสมื่อนซึ่งอ้างอิงทฤษฎีบทที่ 2.3 ทำตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างเมทริกซ์ H จาก $H^{-1} = \begin{bmatrix} C^{\#} \\ C \end{bmatrix}$

   โดยการสร้างเมทริกซ์ $C^{\#}$ ทำให้ rank H = n

2. สร้างระบบเสหมือน

$$\overset{*}{A} = H^{-1}\bar{A}H = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{B} = H^{-1}\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{C} = CH$$

3. สร้างตัวแปลงระบบเสมือนจากสภาวะจริง

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I_n & -L \end{bmatrix}$$

4. หาค่าออบเซอร์เวอร์เกนเสมือนจาก

$$\hat{\bar{A}} = A_{11} - LA_{21}$$

$$\hat{\bar{B}} = A_{11}L - LA_{21}L + A_{12} - LA_{22}$$

5. เลือกโพลในส่วนการสังเกตสภาวะบางส่วนและหาค่า L จาก

$$\det(\lambda I_n - \hat{\bar{A}}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & L \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

6. โดยเงื่อนไข

$$P\bar{T} + \nabla C = I_n$$

$$\bar{T}\overset{*}{A} - \hat{\bar{A}}\bar{T} = \hat{\bar{B}}C$$

และ

$$\hat{\bar{J}} = \bar{T}\overset{*}{B}$$

เมื่อ $\hat{\bar{A}}$ มีเสถียรภาพแบบลู่เข้า

7. จากสมการสภาวะที่ 4.1 นำมาสร้างสภาวะสังเกตจากสมการที่ 4.5

$$z(k+1) = \hat{\bar{A}}z(k) + \hat{\bar{B}}y(k) + \hat{\bar{J}}u(k)$$

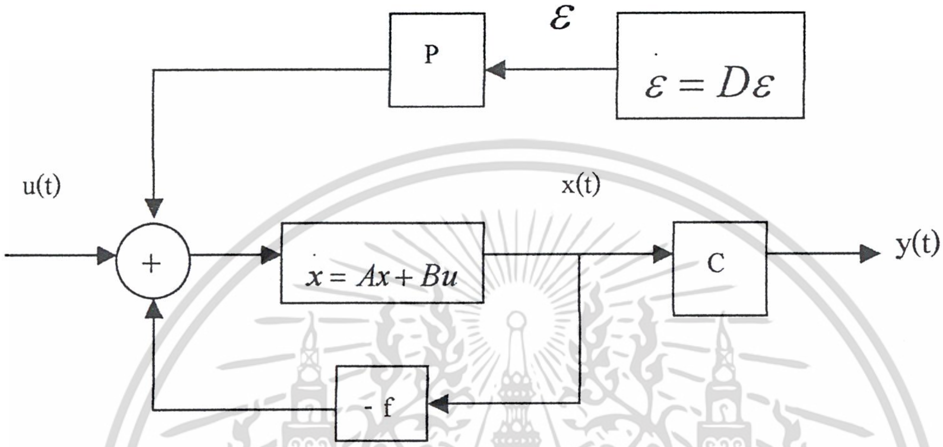
และสมการการสังเกตสภาวะที่ยังไม่ทราบค่าบางส่วนอย่างสมบูรณ์คือ

$$\hat{x}(k) = Pz(k) + \nabla y(k)$$

2.5 ระบบควบคุมป้อนกลับโดยการใช้ออบเซอร์เวอร์

2.5.1 ลักษณะเฉพาะของระบบป้อนกลับที่ใช้ออบเซอร์เวอร์

จากการสร้างออบเซอร์ชนิดที่ต้องวัดค่าสภาวะทั้งหมดหรือรู้ค่าสภาวะเพียงบางส่วน เมื่อต้องการควบคุมระบบให้เป็นวงเปิด ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 การป้อนกลับสภาวะโดยใช้ออบเซอร์เวอร์

จากสมการสภาวะที่ 5.1

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx \qquad (5.1)$$

เมื่อทำการป้อนกลับสภาวะ u = -fx โดยการประมาณค่าจากการใช้ตัวสังเกตสภาวะที่รู้ค่าสภาวะบางส่วนจากสมการที่ 5.2

$$\dot{z} = Dz + Ey + Ju, z(0) = 0 \qquad (5.2)$$

และจากเงื่อนไขความสัมพันธ์การลดมิติลงจาก

$$\hat{x} = Pz + \nabla y \qquad (5.3)$$

$$\bar{T}\bar{A} - \hat{\bar{A}}\bar{T} = \hat{\bar{B}}\bar{C} \qquad (5.4ก)$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{T}\bar{C} \qquad (5.5ข)$$

$$P\bar{T}+\nabla\bar{C}=I_n \tag{5.5ค}$$

โดยการป้อนกลับ u จากสมการที่ 5.6 เข้าไปในสภาวะ

$$u=-f\hat{x} \tag{5.6}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างสภาวะจริงกับตัวสังเกตในสมการที่ 3.10

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \hat{\bar{B}}\bar{C} & \hat{\bar{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ \hat{\bar{J}} \end{bmatrix} u(t) \tag{3.10}$$

เมื่อป้อนกลับสภาวะ u ดังกล่าวจะได้สมการการป้อนกลับสภาวะกับตัวสังเกตเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-Bf\nabla C & -BfP \\ EC-Jf\nabla C & D-JfP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

เมื่อพิจารณาสมการลักษณะของระบบจากสมการที่ 5.7

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n - A + Bf\nabla C & BfP \\ -EC + Jf\nabla C & \lambda I_n - D + JfP \end{vmatrix} = 0$$

จะได้ส่วนแยกส่วนการควบคุมระบบและสังเกตแยกกันดังทฤษฎีแยกส่วนในบทที่ 2.2.3 เป็น

$$|\lambda I_n - A + Bf||\lambda I_n - D| = 0 \tag{5.8}$$

ซึ่ง D = A-EC ในส่วนการสังเกตสภาวะ และ A-Bf คือในส่วนการป้อนกลับแบบ regulator และจากค่าความผิดพลาด $\varepsilon = z - Tx$ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างสภาวะกับค่าความผิดพลาดดังกล่าวเป็น และความสัมพันธ์ระหว่างสภาวะ x กับเวลา t เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-Bf & BfP \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = (A - BfP\bar{T} - Bf\nabla C)x$$

และ

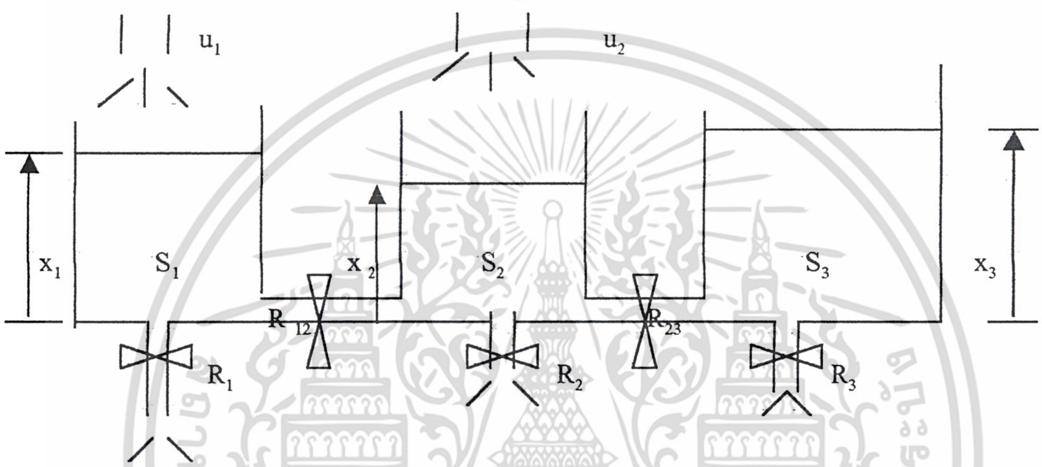
$$x(t) = e^{(A-BfP\bar{T}-Bf\nabla C)}x(0) \tag{5.9}$$

บทที่ 3

การทดลองและผลการทดลอง

3.1 ศึกษาสภาวะของระบบจริง

ทำการศึกษาระบบแทงก์ในบทที่ 2.24 ดังรูป



โดยมีสมการสภาวะของถังน้ำทั้ง 3 ถังเป็น

$$\dot{x}_1 = -\left(\frac{1}{S_1R_1}+\frac{1}{S_1R_{12}}\right)x_1 + \frac{1}{S_1R_{12}}x_2 + \frac{u_1}{S_1} \qquad (2.15)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{S_2R_{12}}x_1 - \left(\frac{1}{S_2R_{12}}+\frac{1}{S_2R_2}+\frac{1}{S_2R_{23}}\right)x_2 + \frac{1}{S_2R_{23}}x_3 + \frac{1}{S_2}u_2 \qquad (2.16)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{S_3R_{23}}x_2 - \left(\frac{1}{S_3R_3}+\frac{1}{S_3R_{23}}\right)x_3 \qquad (2.17)$$

เริ่มต้นต้องการศึกษาสภาวะจริงของระบบโดยให้ $u_1(t)=0$, $u_2(t)=0$ และ

$$S_1 = 0.25 \qquad m^2$$

$$S_2 = S_3 = 1 \qquad m^2$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 1 \qquad s/m^2$$

แทนค่าจะได้สมการสภาวะของระบบแทงก์เป็น

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

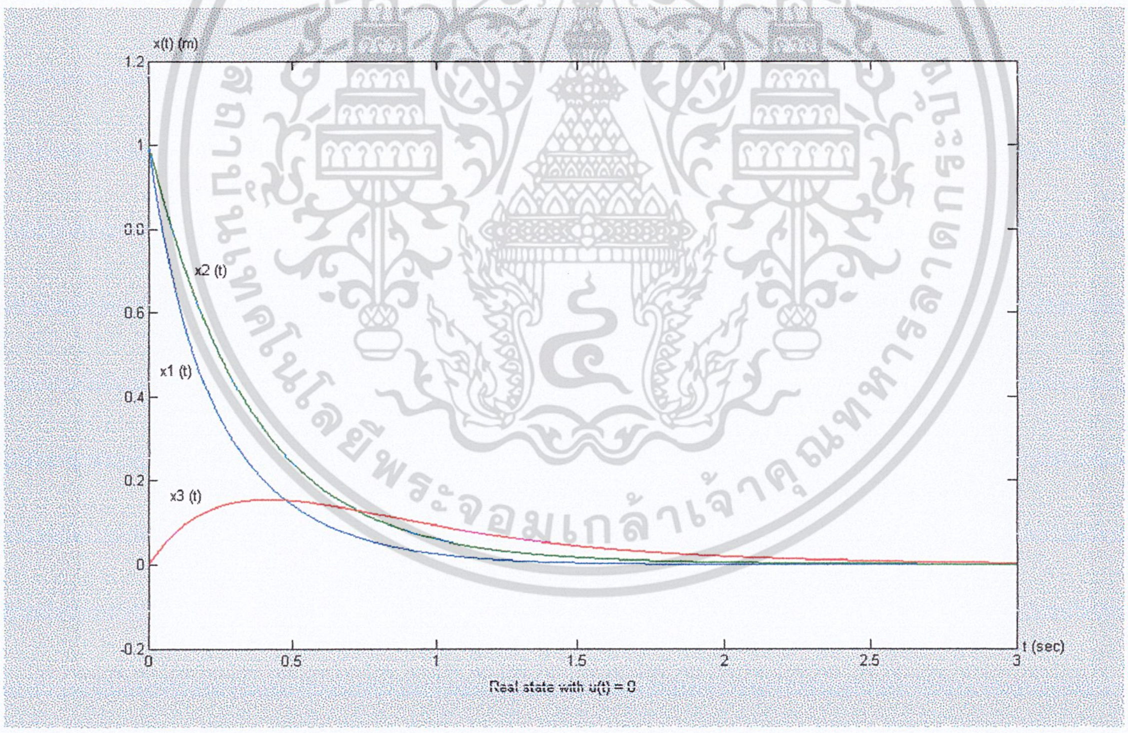
โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \text{m}$$

เมื่อ u(t) = 0 จะได้สมการสภาวะเป็น

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-8 & 4 & 0\\1 & -3 & 1\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}x(t)$$

ดังนั้นจะได้ผลตอบสนองของสภาวะทั้ง 3 สภาวะดังกราฟ รูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 สภาวะของระบบแทงก์โดยไม่มีอินพุท

โดยที่

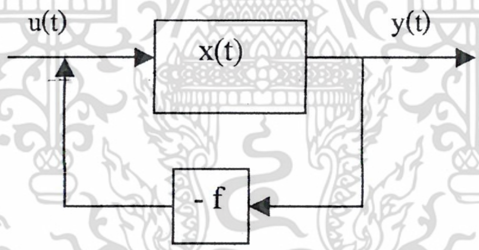
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2732e^{-8.7182t} + 0.7559e^{-3.0964t} - 0.0291e^{-1.854t} \\ -0.0491e^{-8.7182t} + 0.9267e^{-3.0964t} + 0.1224e^{-1.854t} \\ 0.0073e^{-8.7182t} - 0.8452e^{-3.0964t} + 0.8379e^{-1.854t} \end{bmatrix}$$

เมื่อพิจารณาสภาวะของระบบจริงนั้น จะเห็นได้ว่าระบบมีเสถียรภาพเกิดขึ้นช้า จึงต้องทำการควบคุมระบบให้มีเสถียรภาพเร็วขึ้นโดยใช้เรคกูเลเตอร์

3.2 การควบคุมระบบโดยเรคกูเลเตอร์

โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 2.1.3.4 โดยทำการป้อนกลับสภาวะดังรูปที่ 3.2 ของระบบแทงก์ โดยเลือกค่าโพลในส่วนการป้อนกลับเป็น -5±j2 และ –6 และกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{m}$$



รูปที่ 3.2 การป้อนกลับโดยใช้เรคกูเลเตอร์

ควบคุมระบบโดยการหาตัวป้อนกลับสภาวะตามขั้นตอนดังนี้

1. จากเมทริกซ์ของระบบที่ควบคุมได้

$$\xi = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 4 & -32 & 272 \\ 0 & 4 & -44 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

rank $\xi = 3$ ดังนั้นสามารถควบคุมระบบได้

จากสมการลักษณะ

$$\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 + 13\lambda^2 + 41\lambda + 32 = 0$$

จะได้

$$a_1 = 32 \text{ , } a_2 = 41 \text{ , } a_3 = 13$$

จากสมการที่ 1.23

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 1 \\ a_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 41 & 13 & 1 \\ 13 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จากสมการที่ 1.22

$$\mathrm{M} = \xi \bar{W}$$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -32 & 272 \\ 0 & 4 & -44 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 41 & 13 & 1 \\ 13 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 4 \\ 8 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -0.5 \\ 0.25 & -1.25 & 1.25 \end{bmatrix}$$

2. ค่าโพลที่เลือกไว้คือ $-5 \pm j2$ และ -6 ดังนั้น

$$(\lambda + 6)(\lambda + 5 + j2)(\lambda + 5 - j2) = \lambda^3 + 16\lambda^2 + 89\lambda + 174$$

จะได้

$$d_1 = 32 \text{ , } d_2 = 41 \text{ , } d_3 = 13$$

3. ค่าป้อนกลับสภาวะ (f) คือ

$$f = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{bmatrix} M^{-1}$$

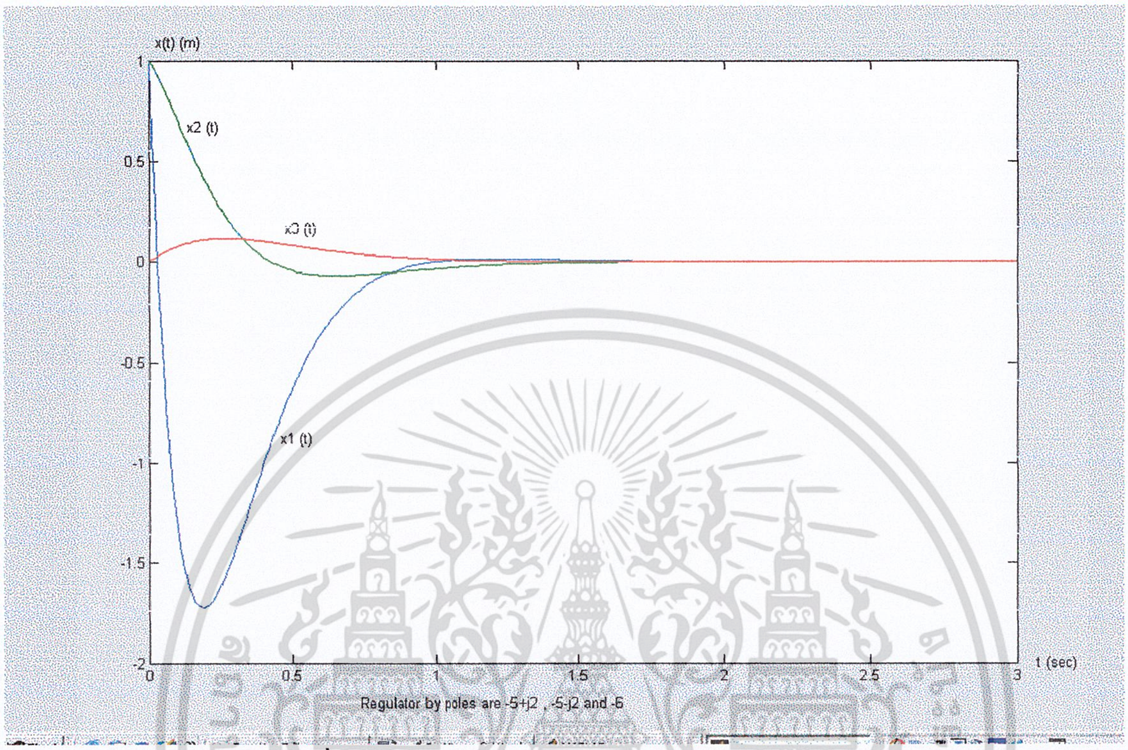
$$f = [0.75 \ 8.75 \ 15.25]$$

4. จะได้สมการการป้อนกลับสภาวะเป็น

$$\dot{x}(t) = (A - Bf)x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -11 & -29 & -61 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t)$$

จะได้ x(t) ที่ถูกป้อนกลับสภาวะดังกราฟรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 การควบคุมป้อนกลับสภาวะโดยใช้เรคกูเลเตอร์

โดยที่

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.2e^{-6t} - 12.2e^{-5t}\cos(2t) - 10.9e^{-5t}\sin(2t) \\ -4.8e^{-6t} + 5.8e^{-5t}\cos(2t) - 0.9e^{-5t}\sin(2t) \\ 1.2e^{-6t} - 1.2e^{-5t}\cos(2t) + 1.1e^{-5t}\sin(2t) \end{bmatrix}$$

เมื่อทำการป้อนกลับสภาวะแล้ว จะเกิดเสถียรภาพของระบบเร็วขึ้น จากนั้นทำสังเกตระบบต่อไป

3.3 การสังเกตสภาวะทั้งหมดโดยออบเซอร์เวอร์

3.3.1 ออบเซอร์เวอร์ระบบเวลาต่อเนื่อง

จากระบบแทงก์ที่สามารถควบคุมระบบได้ ทำการสังเกตระบบทุกสภาวะอ้างอิงทฤษฎีบทที่ 2.1.3.2 โดยสนใจเอาพุทของแทงก์ที่ 3 เท่านั้น และกำหนดโพลในส่วนการสังเกตสภาวะเป็น -6 , -7 , -8 ดังนั้นสมการสภาวะ คือ

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 1] x(t)$$

กำหนดให้ u(t) = 0 และค่าเริ่มต้นของตัวสังเกตคือ

$$z(0) = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \text{ m}$$

ขั้นตอนการสังเกตสภาวะของระบบและหาค่าออบเซอร์เวอร์เกนทั้งหมดดังนี้

1. จากเมทริกซ์สังเกตสภาวะของสมการที่ 1.2

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

rank O = 3 ดังนั้นระบบสามารถถูกสังเกตสภาวะ ได้

2. จากการเลือกโพลเป็น –6 , -7 และ –8 จากสมการที่ 2.5

$$\phi(S) = (S - \mu_1)(S - \mu_2)...(S - \mu_n)$$

$$\phi(S) = (S + 6)(S + 7)(S + 8)$$

$$\phi(A) = A^3 + 21A^2 + 146A + 336I_{3x3}$$

ดังนั้น

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 8 & 68 & 32 \\ 17 & 101 & 65 \\ 8 & 65 & 134 \end{bmatrix}$$

3. จากสมการที่ 2.4 หาค่าออบเซอร์เวอร์เกน

$$E = \phi(A)\,\mathrm{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$O^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ออบเซอร์เกน ; $E = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 8 \end{bmatrix}$

4. จากสมการของออบเซอร์เวอร์

$$\dot{z}(t) = Dz(t) + Ey(t) + Ju(t)$$

เมื่อ A-EC = D , J = B และ D มีเสถียรภาพ

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & -16 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 8 \end{bmatrix} y(t)$$

โดยทำการวัดค่าตัวสังเกตเทียบกับระบบจริง จากสมการที่ 2.3

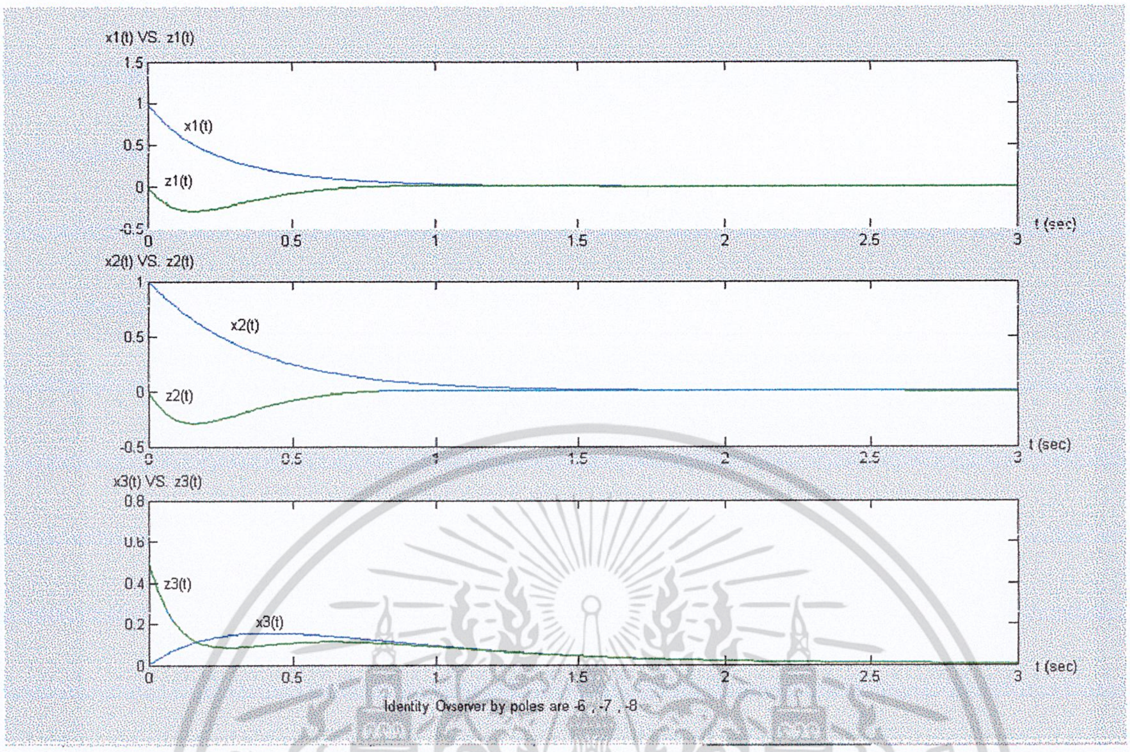
$$z(t) - x(t) = e^{Dt}(z_0 - x_0)$$

จะได้กราฟของออบเซอร์เวอร์กับสภาวะจริงดังกราฟรูปที่ 3.4

โดยที่

$$z(t) - x(t) = \begin{bmatrix} -9e^{-8t} + 24e^{-7t} - 16e^{-6t} \\ -3e^{-8t} + 18e^{-7t} - 16e^{-6t} \\ -1.5e^{-8t} + 6e^{-7t} - 4e^{-6t} \end{bmatrix}$$

ตัวสังเกตสภาวะทั้งหมดทำการสังเกตเปรียบเทียบกับสภาวะของระบบจริง และมีเสถียรภาพเกิดขึ้นดังกราฟรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ตัวสังเกตสภาวะทั้งหมด

3.3. 2. ออบเซอร์เวอร์ระบบเวลาเป็นช่วง

จากสมการสภาวะ

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

เมื่อ

$$\bar{A} = \mathrm{e}^{[A\tau]} = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{A^n \tau^n}{n!}$$

และ

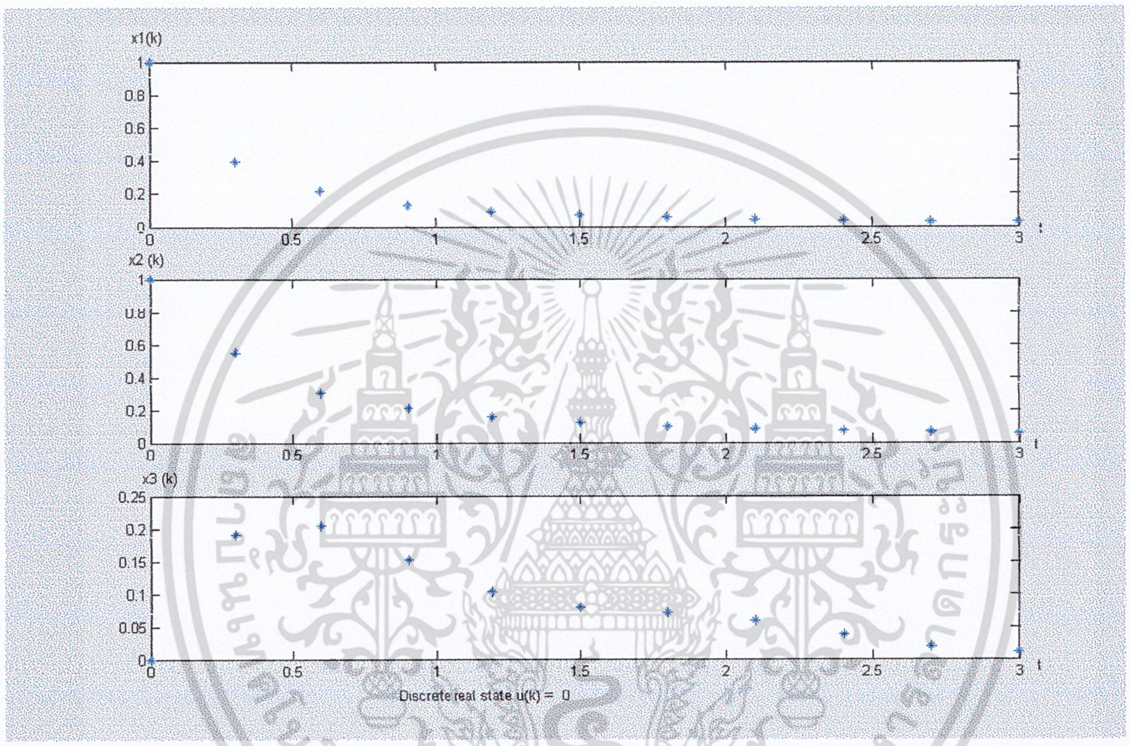
$$\bar{B} = \int_0^{\tau} A\tau \;\; d\tau \;\; B$$

เมื่อต้องการแซมปลิงเวลา $\tau = 0.3$ ดังนั้น

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.1208 & 0.2734 & 0.0546\\ 0.0684 & 0.4762 & 0.1502\\ 0.0136 & 0.1502 & 0.5719\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.4743\\ 0.0694\\ 0.0074\end{bmatrix}u(k)$$

และค่า u(k) = 0 จาก ระบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

แสดงค่า x(k+1) ได้ดังกราฟ



รูปที่ 3.5 สภาวะจริงของช่วงเวลาแบบดีสครีต

เมื่อเปรียบเทียบกับสภาวะจริงจะได้กราฟรูปที่ 3.6

เมื่อทำการตรวจวัดสภาวะทั้งหมดโดยใช้ออบเซอร์เวอร์ ทำตามขั้นตอนดังนี้

1. $\left|\lambda \mathrm{I_n} - \bar{A} + EC\right| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$

   จะได้

$$\lambda^3-(E_3+1.6885)\lambda^2+(0.6E_3+0.1502E_2+0.013E_1)\lambda+(0.004E_1-0.014E_2+0.04E_3-0.02)=0$$

2. เมื่อเลือกโพลเป็น -6 , -7 , -8

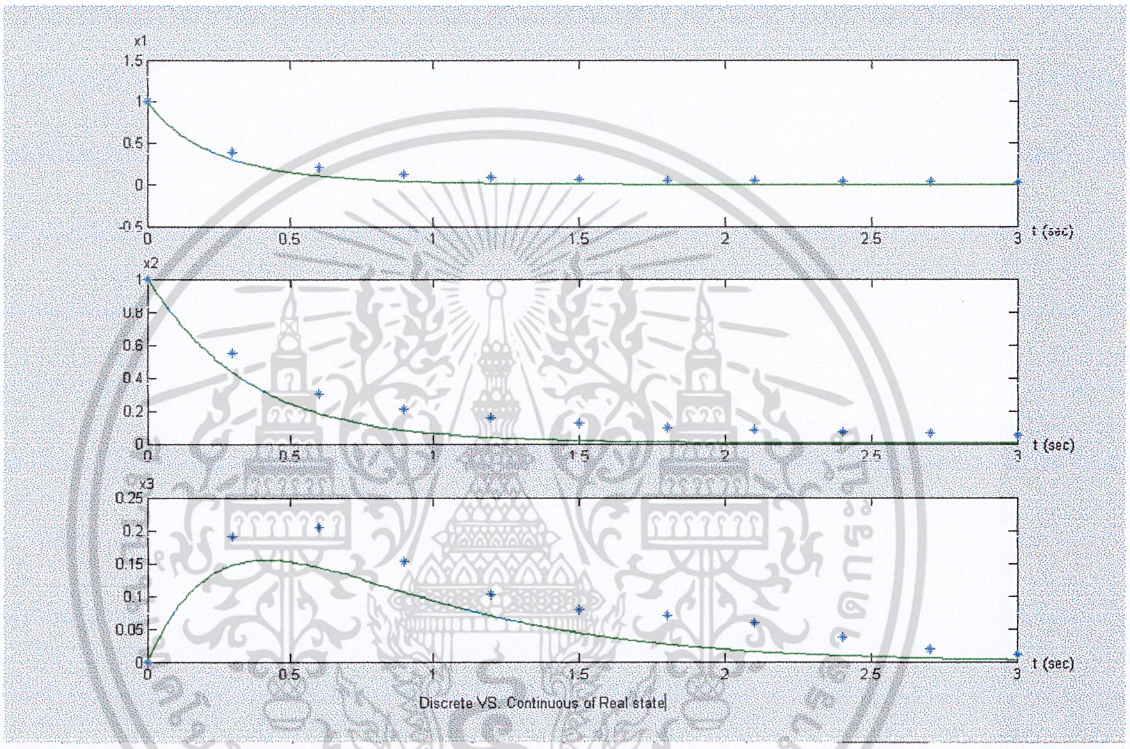
   จะได้สมการลักษณะ

$$\lambda^3+21\lambda^2+146\lambda+336=0$$

และ จากสมการข้อ 1 = ข้อ 2

จะได้

$$E = \begin{bmatrix} -1846 \\ 17 \\ 8 \end{bmatrix}$$



รูปที่ 3.6 เปรียบเทียบตัวสังเกตสภาวะจริงระหว่างเวลาเป็นช่วงกับเวลาต่อเนื่อง

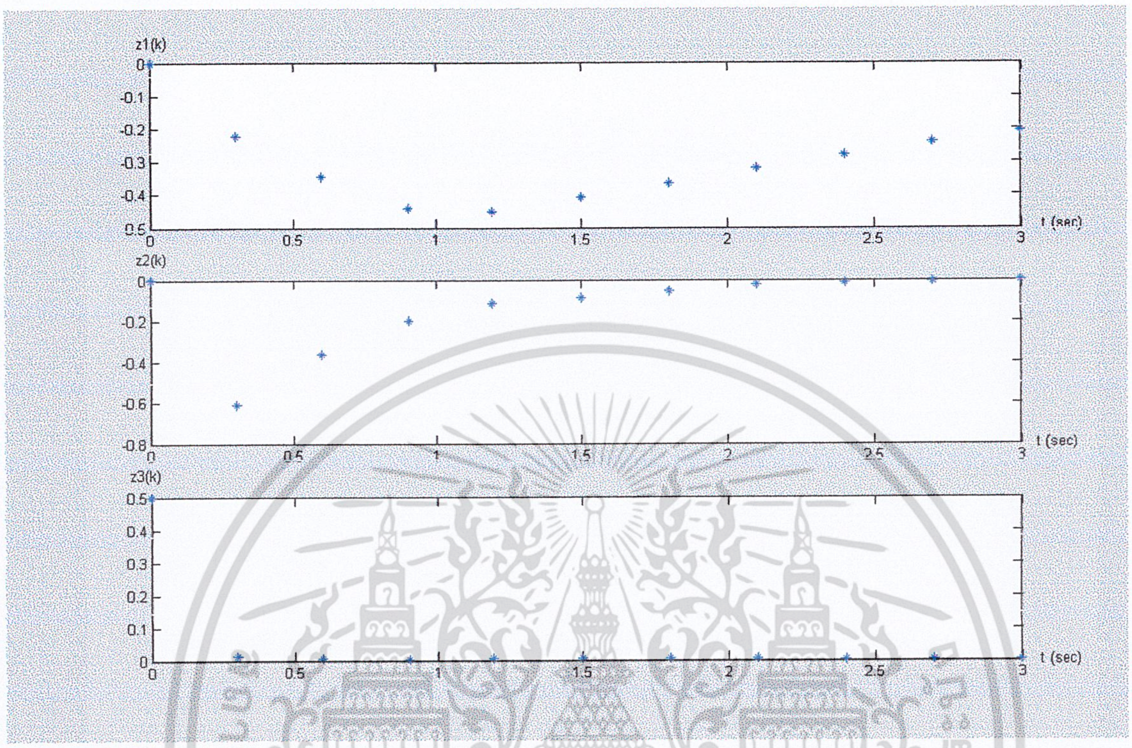
3. เมื่อ u(k) = 0 เขียนสมการออบเซอร์เวอร์ได้เป็น

$$z(k+1) = \bar{D}z(k) + Ey(k) + Ju(k)$$

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0002 & 1.846 \\ 0 & 0.0004 & -1.218 \\ 0 & 0.001 & 0.0234 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.8 \\ 0 & 0 & 1.21 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix} x(k)$$

เมื่อ $z(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ และ $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

แสดงกราฟของออบเซอร์เวอร์ได้ดังกราฟรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 กราฟของออบเซอร์ที่ตรวจวัดสภาวะทั้งหมดในเวลาเป็นช่วง

3.4 การสังเกตสภาวะเมื่อรู้ค่าสภาวะบางส่วนโดยออบเซอร์เวอร์

3.4.1 ออบเซอร์เวอร์ระบบเวลาต่อเนื่อง

จากสมการสภาวะของระบบ

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-8 & 4 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)=x_3(t)$$

โดยการป้อน $u(t)=4$ ให้แก่ระบบ และจากเอาพุท y(t) สามารถตรวจวัดค่าสภาวะ $y(t)=x_3(t)$ ได้ ดังนั้นจึงสร้างออบเซอร์เมื่อวัดค่าสภาวะ $x_1(t), x_2(t)$ ที่ยังไม่สามารถตรวจวัดได้ โดยเลือกโพลเป็น -6 และ -7

ค่าเริ่มต้นของตัวสังเกตคือ

$$z(0)=\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

โดยใช้รูปแบบการลดมิติของโกปีนาธ (Gopinath 's Algorithm) ตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างเมทริกซ์ H จาก

$$H^{-1}=\begin{bmatrix} C^{\#} \\ C \end{bmatrix}$$

สร้างเมทริกซ์ $C^{\#}$ โดยกำหนดให้

$$C^{\#}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$H^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$rank(H^{-1})=rank(H)=3$$

2. แปลงระบบเสมือน โดยหาค่า

$$\bar{A}=H^{-1}AH=\begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=H^{-1}B=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CH=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. กำหนดตัวแปลง $(\bar{T})$

$$\bar{T}=\begin{bmatrix} I_{2x2} & -L \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & -l_2 \end{bmatrix}$$

4. หาระบบเสมือนจาก

$$\hat{\bar{A}}=\bar{A}_{11}-L\bar{A}_{21}$$

$$\hat{\bar{B}}=\bar{A}_{11}L-L\bar{A}_{21}L+\bar{A}_{12}-L\bar{A}_{22}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{2x2} & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{B}_1 - L\bar{B}_2$$

$$\begin{bmatrix} P & \nabla \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \bar{A}_{22} = [-2]$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{B}_2 = [0]$$

ดังนั้น

$$\hat{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -8 & 4-l_1 \\ 1 & -3-l_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อเลือกโพลเป็น -6 , -7 จะได้

$$\det(\lambda I_{2x2} - \hat{\bar{A}}) = (\lambda+6)(\lambda+7) = \lambda^2 + 13\lambda + 42$$

$$\lambda^2 + 13\lambda + 42 = \lambda^2 + (11 + l_2)\lambda + (20 + l_1 + 8l_2)$$

จะได้

$$L = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. จะได้

$$\hat{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}; \hat{\bar{B}} = \begin{bmatrix} -40 \\ 1 \end{bmatrix}; \hat{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{\bar{D}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \hat{\bar{J}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

และ

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \nabla = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. ตรวจสอบเงื่อนไข

$$\bar{T}\hat{\bar{A}} - \bar{B}\bar{T} = \hat{\bar{B}}\bar{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{T}\bar{B}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P\bar{T} + \nabla C = I_{2x2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. จากสมการการแปลงตัวสังเกตสภาวะจริง

$$\dot{z}(t) = \hat{\bar{A}}z(t) + \hat{\bar{B}}y(t) + \hat{\bar{J}}u(t)$$

จะได้

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}z(t) + \begin{bmatrix} -40 \\ 1 \end{bmatrix}y(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}u(t)$$

8. จากสมการการตรวจวัดค่าสภาวะที่ยังไม่ทราบค่า

$$\hat{x}(t) = Pz(t) + \nabla y(t)$$

$$\hat{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 1\end{bmatrix}y(t)$$

9. เขียนความสัมพันธ์ของสมการสภาวะจริงกับสภาวะสังเกตได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{z}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ \hat{\bar{B}}C & \hat{\bar{A}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ \hat{\bar{J}}\end{bmatrix}u(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{z}_1(t)\\ \dot{z}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -40 & -8 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\ 0\\ 0\\ 4\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

10. จากสมการสภาวะ

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

จะได้ x(t) เมื่อให้ u(t) = 4 ซึ่งเป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$x(t)=\zeta^{-1}(sI_{3x3}-A)^{-1}\{x(0)+A^{-1}Bu(t)\}-A^{-1}Bu(t)$$

จะได้สมการสภาวะเชิงเวลาเป็น

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.3725e^{-8.7182t}+0.0619e^{-3.0964t}-0.1894e^{-1.854t}+2.5\\ 0.246e^{-8.7182t}+0.0762e^{-3.0964t}-0.3226e^{-1.854t}+1\\ -0.0355e^{-8.7182t}-0.0685e^{-3.0964t}-0.3960e^{-1.854t}+0.5\end{bmatrix}$$

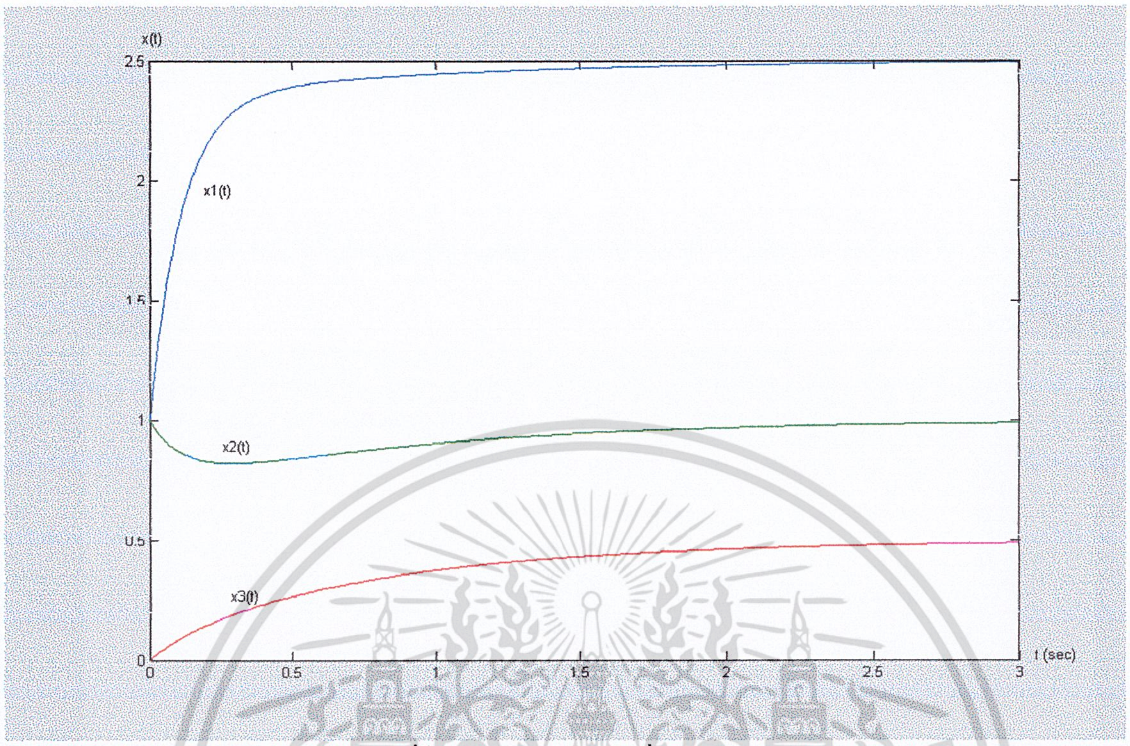
โดยแสดงสภาวะของระบบทั้ง 3 ดังกราฟที่ 3.8

11. สามรถตรวจวัดสภาวะที่ยังไม่สามารถตรวจวัดได้จาก

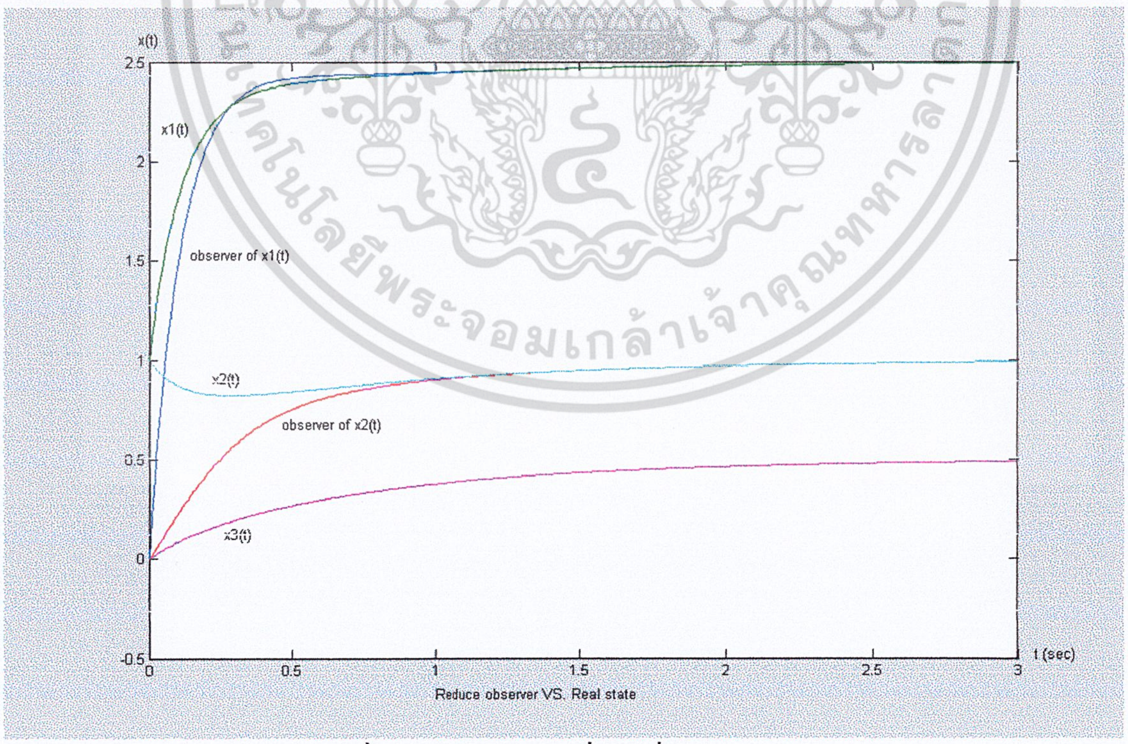
$$\hat{x}(t)-x(t)=P\zeta^{-1}(sI_{3x3}-\hat{\bar{A}})^{-1}(z_0-\bar{T}x_0)$$

$$\hat{x}(t)-x(t)=\begin{bmatrix}-4e^{(-7t)}+3e^{(-6*t)}\\ 2e^{(-7t)}-3e^{(-6*t)}\\ 0\end{bmatrix}$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้นของ x(o) ใช้ตัวเดิมและแสดงการตรวจวัดจากกราฟรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.8 สภาวะของระบบเมื่อ $u(t) = 4$



รูปที่ 3.9 การสังเกตสภาวะที่เหลือที่ยังไม่ทราบค่า

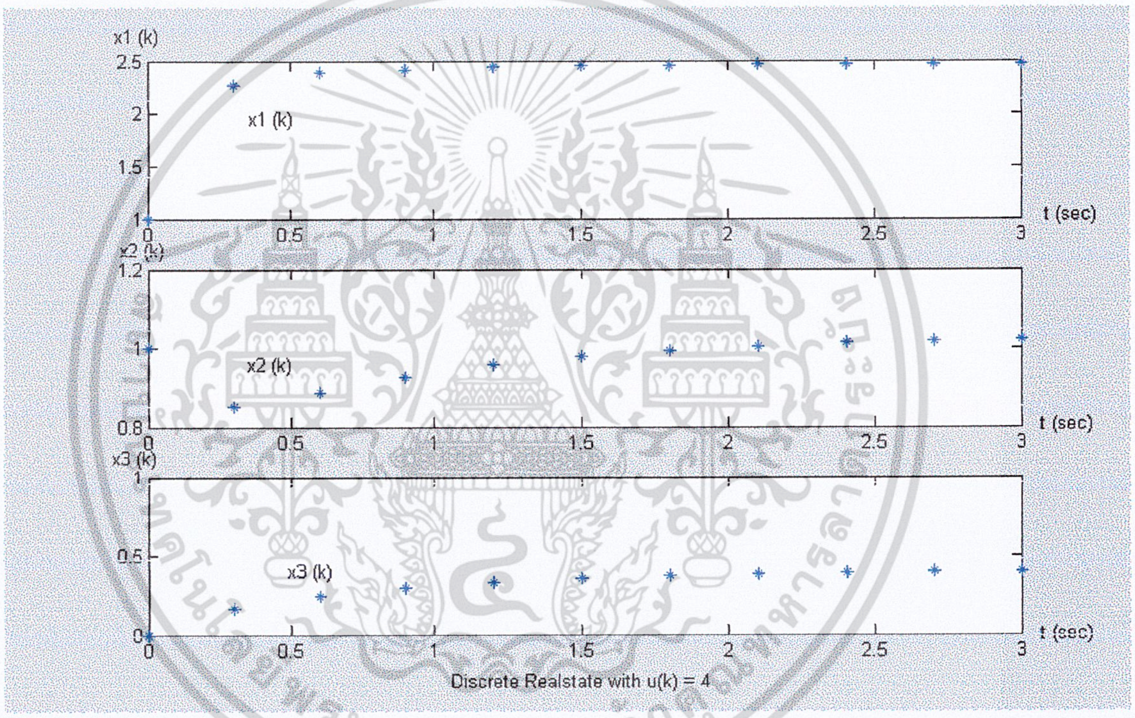
3.4.1 ออบเซอร์เวอร์ระบบเวลาเป็นช่วง

จากสมการสภาวะแบบช่วง

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.1208 & 0.2734 & 0.0546 \\ 0.0684 & 0.4762 & 0.1502 \\ 0.0136 & 0.1502 & 0.5719 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.4743 \\ 0.0694 \\ 0.0074 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

แสดงความสัมพันธ์สภาวะในช่วงเวลาเป็นช่วงดังกราฟรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 สภาวะจริงเมื่อเวลาเป็นช่วง

โดยใช้รูปแบบการลดมิติของโกปินาธ (Gopinath 's Algorithm) ตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างเมทริกซ์ H จาก

$$H^{-1}=\begin{bmatrix}C^{\#}\\ C\end{bmatrix}$$

สร้างเมทริกซ์ $C^{\#}$ โดยกำหนดให้

$$C^{\#}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

จะได้

$$H^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

และ

$$rank(H^{-1})=rank(H)=3$$

2. แปลงระบบเสหมือน โดยหาค่า

$$\overset{*}{A}=H^{-1}AH=\begin{bmatrix}0.1208 & 0.2734 & 0.0546\\ 0.0684 & 0.4762 & 0.1502\\ 0.0136 & 0.1502 & 0.5719\end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{B}=H^{-1}B=\begin{bmatrix}0.4743\\ 0.0694\\ 0.0074\end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{C}=CH=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3. กำหนดตัวแปลง $(\bar{T})$

$$\bar{T}=\begin{bmatrix}I_{2x2} & -L\end{bmatrix}$$

$$\bar{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -l_1\\ 0 & 1 & -l_2\end{bmatrix}$$

4. หาระบบเสมือนจาก

$$\hat{\bar{A}}=\bar{A}_{11}-L\bar{A}_{21}$$

$$\hat{\bar{B}}=\bar{A}_{11}L-L\bar{A}_{21}L+\bar{A}_{12}-L\bar{A}_{22}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{2x2} & L\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{B}_1 - L\bar{B}_2$$

$$\begin{bmatrix} P & \nabla \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \\ & \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0.1208 & 0.2734 \\ 0.0684 & 0.4762 \end{bmatrix}; \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0.0546 \\ 0.1502 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0.0136 & 0.1502 \end{bmatrix}; \bar{A}_{22} = [0.5719]$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.4743 \\ 0.0694 \end{bmatrix}; \bar{B}_2 = [0.0074]$$

ดังนั้น

$$\hat{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 0.12 - 0.01l_1 & 0.27 - 0.15l_1 \\ 0.07 - 0.01l_2 & 0.5 - 0.15l_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อเลือกโพลเป็น -6 , -7 จะได้

$$\det(\lambda I_{2x2} - \hat{\bar{A}}) = (\lambda + 6)(\lambda + 7) = \lambda^2 + 13\lambda + 42$$

$$\lambda^2 + 13\lambda + 42 = \lambda^2 + (-0.62 + 0.15l_2 + 0.01l_1)\lambda + (0.41 + 0.055l_1 - 0.0153l_2)$$

จะได้

$$L = \begin{bmatrix} 6648.5 \\ -352.43 \end{bmatrix}$$

5. จะได้

$$\hat{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -66.40 & -997 \\ 3.6 & 53.4 \end{bmatrix}; \hat{\bar{B}} = \begin{bmatrix} -93643 \\ 5290 \end{bmatrix}; \hat{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{\bar{D}} = \begin{bmatrix} 6648.50 \\ -352.43 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}} = \begin{bmatrix} -48.72 \\ 2.68 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6648.5 \\ 0 & 1 & 352.43 \end{bmatrix}$$

และ

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \nabla = \begin{bmatrix} 6648.5 \\ -352.43 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. ตรวจสอบเงื่อนไข

$$\bar{T}\overset{*}{A} - \hat{\bar{B}}\bar{T} = \hat{\bar{B}}\bar{C}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -93643 \\ 0 & 0 & 5290 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -93643 \\ 0 & 0 & 5290 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{T}\overset{*}{B}$$

$$\begin{bmatrix} -48.72 \\ 2.68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6648.5 \\ 0 & 1 & 352.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4743 \\ 0.0694 \\ 0.0074 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -48.72 \\ 2.68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48.72 \\ 2.68 \end{bmatrix}$$

$$P\bar{T} + \nabla C = I_{2x2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6648.5 \\ 0 & 1 & 352.43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6648.5 \\ -352.43 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. จากสมการการแปลงตัวสังเกตสภาวะจริง

$$z(k+1) = \hat{\bar{A}}\,z(k) + \hat{\bar{B}}\,y(k) + \hat{\bar{J}}\,u(k)$$

จะได้

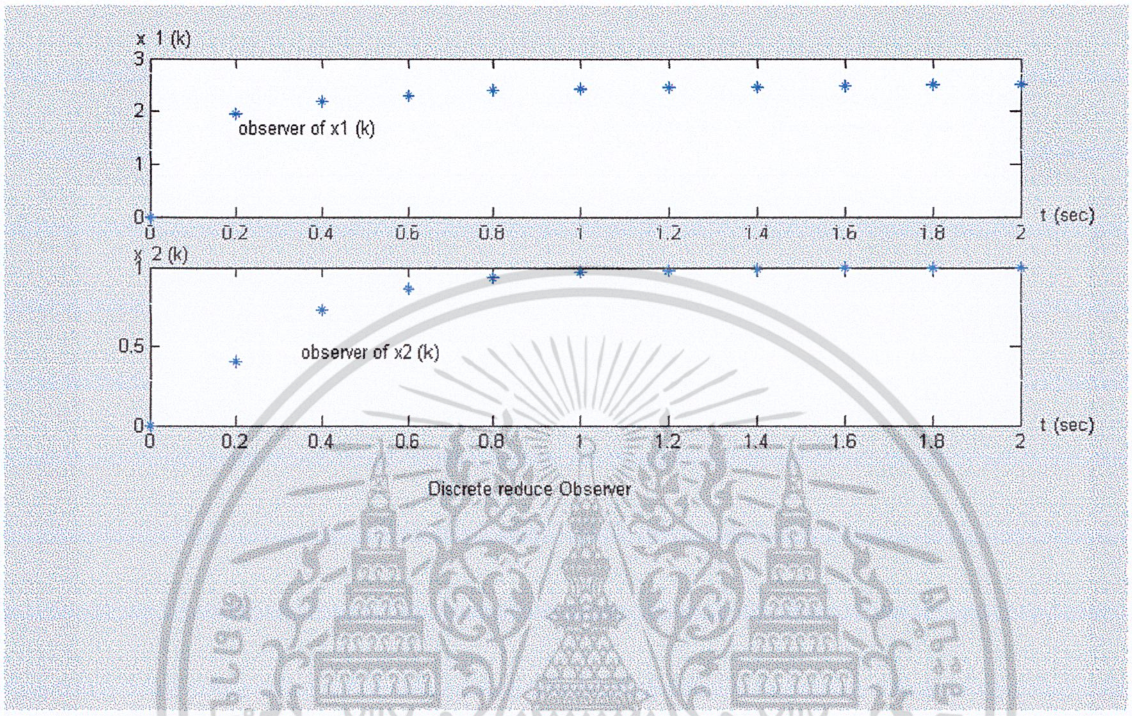
$$z(k+1) = \begin{bmatrix} -66.40 & -997 \\ 3.6 & 53.4 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -93643 \\ 5290 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -48.72 \\ 2.68 \end{bmatrix} u(t)$$

8. จากสมการการตรวจวัดค่าสภาวะที่ยังไม่ทราบค่า

$$\hat{x}(t) = Pz(k) + \nabla y(k)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} 6648.5 \\ -352.43 \\ 1 \end{bmatrix} y(k)$$

9. เขียนความสัมพันธ์ของสมการสภาวะจริงกับสภาวะสังเกตได้ดังกราฟรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.11 ตัวสังเกตสภาวะที่ยังไม่ทราบค่า

3.5 การควบคุมป้อนกลับโดยใช้ออบเซอร์เวอร์

จากสมการสภาวะของระบบ

$$x(t) = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = x_3(t)$$

โดยเลือกโพลในส่วนการสังเกตสภาวะที่รู้ค่าเพียงบางส่วนเป็น -7 และ -8 และเลือกใช้โพลในส่วนการป้อนกลับเหมือนในการป้อนกลับแบบเรคกูเลเตอร์ในบทที่ 3.2

โดยใช้รูปแบบการลดมิติของโกปินาธ (Gopinath 's Algorithm) เพื่อหาสภาวะที่ยังไม่ทราบค่าและป้อนกลับสภาวะ โดยใช้ออบเซอร์เวอร์ ตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างเมทริกซ์ H จาก

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} C^{\#} \\ C \end{bmatrix}$$

สร้างเมทริกซ์ $C^{\#}$ โดยกำหนดให้

$$C^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$rank(H^{-1}) = rank(H) = 3$$

2. แปลงระบบเสมือน โดยหาค่า

$$\bar{A} = H^{-1}AH = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = H^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. กำหนดตัวแปลง ($\bar{T}$)

$$\bar{T} = [I_{2x2} \quad -L]$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & -l_2 \end{bmatrix}$$

4. หาระบบเสมือนจาก

$$\hat{\bar{A}} = \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21}$$

$$\hat{\bar{B}} = \bar{A}_{11}L - L\bar{A}_{21}L + \bar{A}_{12} - L\bar{A}_{22}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{2x2} & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{B}_1 - L\bar{B}_2$$

$$[P \quad \nabla] = H\begin{bmatrix} \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}} \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{21} = [0 \quad 1]; \bar{A}_{22} = [-2]$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{B}_2 = [0]$$

ดังนั้น

$$\hat{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -8 & 4-l_1 \\ 1 & -3-l_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อเลือกโพลเป็น -7 , -8 จะได้

$$\det(\lambda I_{2x2} - \hat{\bar{A}}) = (\lambda+7)(\lambda+8) = \lambda^2 + 15\lambda + 56$$

$$\lambda^2 + 15\lambda + 56 = \lambda^2 + (11 + l_2)\lambda + (20 + l_1 + 8l_2)$$

จะได้

$$L = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5. จะได้

$$\hat{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} ;\hat{\bar{B}} = \begin{bmatrix} -24 \\ -15 \end{bmatrix} ;\hat{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ;\hat{\bar{D}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} ;\hat{\bar{J}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

และ

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ;\nabla = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. ตรวจสอบเงื่อนไข

$$\bar{T}\bar{A} - \hat{\bar{B}}\bar{T} = \hat{\bar{B}}\bar{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{T}\bar{B}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P\bar{T} + \nabla C = I_{2x2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. จากสมการการแปลงตัวสังเกตสภาวะจริง

$$\dot{z}(t) = \hat{\bar{A}}z(t) + \hat{\bar{B}}y(t) + \hat{\bar{J}}u(t)$$

จะได้

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -24 \\ -15 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

7. จากสมการการตรวจวัดค่าสภาวะที่ยังไม่ทราบค่า

$$\hat{x}(t) = Pz(t) + \nabla y(t)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

8. เขียนความสัมพันธ์ของสมการสภาวะจริงกับสภาวะสังเกตได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \hat{\bar{B}}C & \hat{\bar{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \hat{\bar{J}} \end{bmatrix} u(t)$$

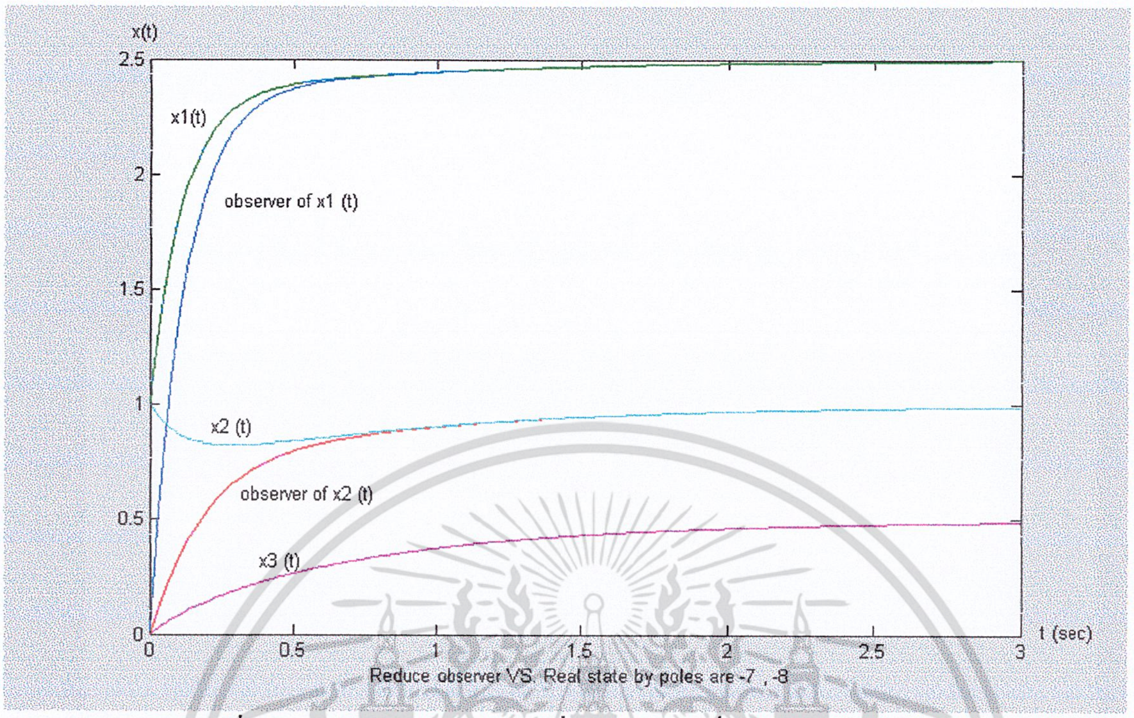
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

9. จากสมการการสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่า

$$\hat{x}(t) - x(t) = P\zeta^{-1}(sI_{3x3} - \hat{A})^{-1}(z_0 - Tx_0)$$

$$\hat{x}(t) - x(t) = \begin{bmatrix} -e^{(-8t)} \\ e^{(-8t)} - 2e^{(-7t)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

แสดงการตรวจวัดสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่าจากกราฟรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 การสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่าเมื่อโพลเป็น –7 และ –8

10. ทำการป้อนกลับสภาวะ โดยใช้ออบเซอร์เวอร์จาก

$$u = -f\hat{x}$$

โดยใช้ตัวป้อนกลับ (f) จากบทที่ 3.2 ซึ่งมีค่าโพลเป็น –5+j2 , -5-j2 , -6 และมีสมการลักษณะ $\det(\lambda I_{3x3} - A)$ จากค่า A เดียวกัน ดังนั้น

$$f = \begin{bmatrix} 0.75 & 8.25 & 15.25 \end{bmatrix}$$

11. เมื่อป้อนกลับสภาวะจะได้สมการการป้อนสภาวะ โดยใช้ออบเซอร์เวอร์เป็น

$$\dot{x}(t) = (A - BfP\bar{T} - Bf\nabla C)x(t)$$

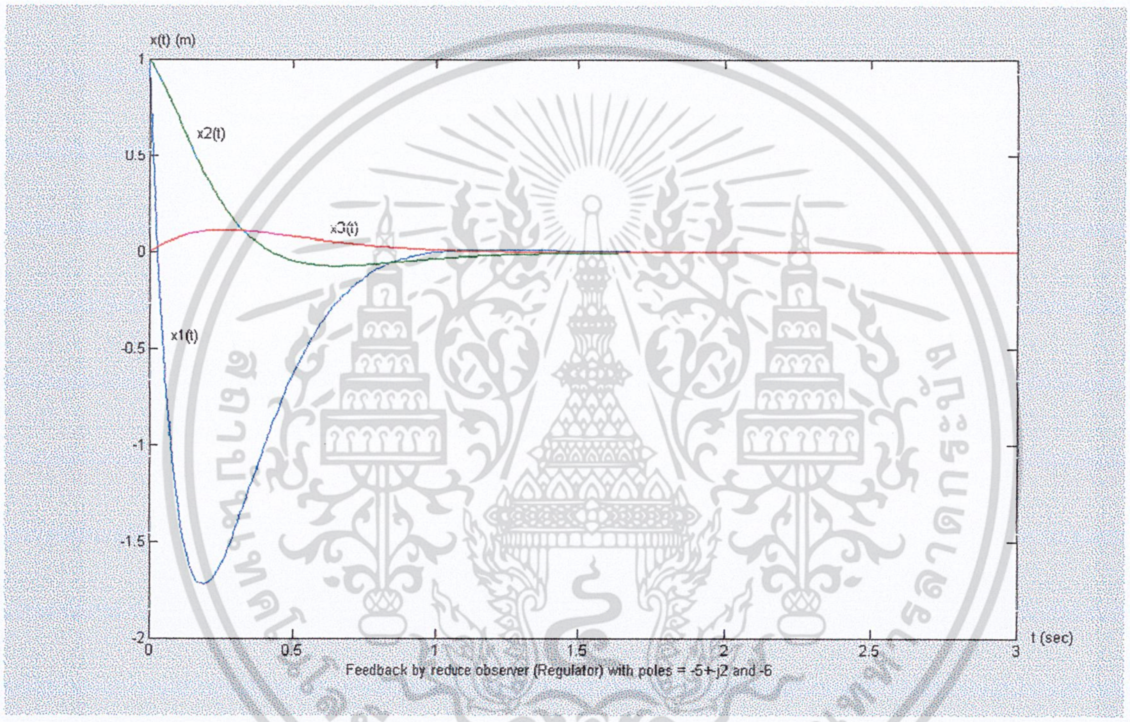
$$x(t) = e^{(A - BfP\bar{T} - Bf\nabla C)t}x(0)$$

แสดงกราฟการป้อนกลับดังกราฟรูปที่ 3.13

12. เขียนความสัมพันธ์ระหว่างสภาวะจริงกับสภาวะสังเกตได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bf\nabla C & -BfP \\ \hat{\bar{B}}C - \hat{\bar{J}}f\nabla C & \hat{\bar{A}} - \hat{\bar{J}}fP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

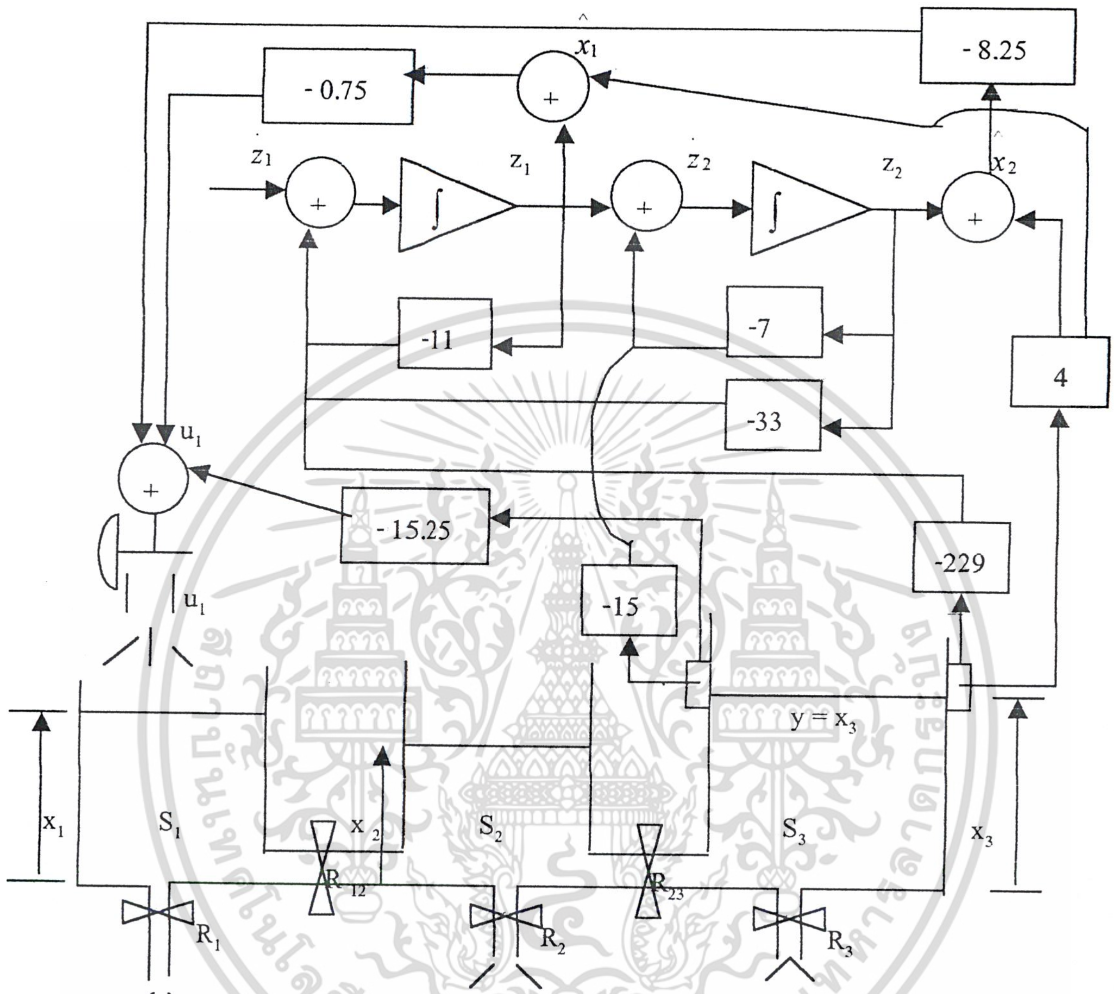
$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -205 & -3 & 33 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -229 & -11 & -33 \\ 0 & 0 & -15 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}
$$



รูปที่ 3.13 การป้อนกลับสภาวะโดยใช้ออบเซอร์เวอร์

กราฟจากรูปที่ 3.13 จะเหมือนกับการป้อนกลับ โดยใช้เรคกูเลเตอร์โดยตรงต่อสภาวะ

รูปที่ 3.14 เป็นรูปการป้อนกลับสภาวะ โดยใช้ตัวสังเกตสภาวะที่ยังไม่ทราบค่ากับสภาวะที่ตรวจวัดได้แล้ว



รูปที่ 3.14 การป้อนกลับสภาวะโดยใช้ตัวสังเกต

บทที่ 4
บทวิจารณ์และสรุป

1. สภาวะของระบบจะถูกสังเกตได้ก็ต้องนำข้อมูลอินพุทและเอาพุท มาทำการสร้างสภาวะใหม่โดยการสังเกตสภาวะจริง

2. การสังเกตสภาวะใด ๆ ก็ตาม เกิดปัญหาข้อมูลของสภาวะแรกเริ่ม จึงต้องกำหนดค่าแรก - เริ่มให้แก่ระบบก่อนแต่ค่าแรกเริ่มของตัวสังเกตสภาวะนั้นสามารถกำหนดเป็นอะไรก็ได้ เพื่อให้ให้เคียงกับค่าแรกเริ่มของสภาวะจริง

3. สภาวะที่ถูกสังเกตจะมีส่วนที่คล้ายกันกับตัวสังเกตจนเสหมือนเป็นค่าเดียวกัน เมื่อเวลามากขึ้นซึ่งเกิดเสถีรภาพขึ้นเร็ว แล้วนำตัวสังเกตไปป้อนกลับสภาวะจริงต่อไป

4. การสังเกตสภาวะทั้งหมดสืบเนื่องมาจากสภาวะจริงนั้น ๆ ยังไม่ถูกตรวจวัดค่าได้จึงทำการสังเกตสภาวะทั้งหมด หรือเราไม่สนใจสภาวะนั้น ๆ มาก่อน จึงทำการตรวจวัดดังกล่าว

5. การที่ระบบตรวจวัดสภาวะได้บางสภาวะแล้ว เมื่อต้องการตรวจวัดค่าสภาวะที่เหลือ ก็ต้องใช้ตัวสังเกตชนิดรู้ค่าเพียงบางส่วน

6. การสังเกตสภาวะแบบเวลาเป็นช่วง โดยใช้คอมพิวเตอร์นั้น ขึ้นอยู่กับการแซมปลิงข้อมูล ถ้าแซมปลิงข้อมูลถี่มาก จะได้ค่าคล้ายกับช่วงเวลาต่อเนื่อง

7. หากทำการสังเกตสภาวะชนิดที่รู้ค่าบางส่วนได้แล้ว แล้วสังเกตสภาวะที่เหลือได้อีกจึงนำออบเซอร์เวอร์เหล่านั้นป้อนกลับสภาวะ จะได้ผลตอบสนองเชิงเวลาเหมือนกับการควบคุมระบบโดยใช้เรคกูเลเตอร์

8. ระบบควบคุมใด ๆ ก็ตาม หากสมารถควบคุมและสังเกตได้ ระบบดังกล่าวนั้นสามารถแยกส่วนการควบคุมได้โดยกำหนดค่าโพลทั้งการควบคุมและการสังเกต และการกระทำทั้งสองนี้จะมีเสถียรภาพเสมอ

ภาคผนวก ก

ทฤษฎีพีชคณิตเชิงเส้น

1. สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ $Ax = 0$ มีมิติของ solution space $d = n-r$ เมื่อ n เป็นจำนวนที่ไม่ทราบค่า (unknown) และ r เป็นแร็งค์ของ A (rank) ดังนั้น

$$\text{rank}(A) = n$$

จึงมีเพียงคำตอบเดียวคือ $x = 0$ จะมีคำตอบไม่เป็นศูนย์หมดก็ต่อเมื่อ $\text{rank}(A) < n$ หรือ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $\text{rank}(A) < n$ หมายถึง $\det A = 0$

2. สมการสภาวะกรณี $\text{rank}(A) = n$ เราหาค่าน้อยที่สุดของ s ดังนี้

$$S = (B-Ax)^T B-Ax)$$

$$= B^T B - x^T A^T B - B^T Ax + x^T A^T Ax$$

ให้

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

ได้

$$A^T Ax = A^T B$$

เมทริกซ์ $A^T A$ เป็นเมทริกซ์ $(n \times n)$ และมี rank $= n$

จึงเป็นเมททริกซ์นอนซิงกุลาร์ (Non-singular Matrix)

$$\therefore x = (A^T A)^{-1} A^T B \qquad (\text{ก-}1)$$

3. สมการสภาวะกรณี $\text{rank}(A) = n$

$$B = Ax$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n$$

เมื่อเวคเตอร์ $a_1, \dots, a_n$ เป็นอิสระกัน bก็สามารถเขียนเป็น linear combination คำตอบเดียวของ a ได้ นั่นคือ คำตอบ x มีคำตอบเดียว

$$x = A^{-1}B$$

หาก A เป็นเมทริกซ์ n x n

หาก A เป็นเมทริกซ์ m x n มีแรงค์ n เราได้

$$x = (A^{T}A)^{-1}A^{T}B \quad (ก\text{-}2)$$

4. สมการสภาวะไม่ consistent กรณี rank (A) < n มีอนันต์ แต่หากต้องการคำตอบเดียวก็ทำได้โดยให้ผลรวมของกำลังสองของ unknown $x^{T}x$ มีค่าน้อยที่สุด

โดยที่

$$M = x^{T}x + 2\lambda^{T}(Ax - B)$$

และ

เมทริกซ์ A (m x n) มีแรงค์เต็มเท่ากับ m เราได้

$$x = A^{T}(AA^{T})^{-1}B$$

$$Ax = B$$

$$x = A^{\#}B$$

A เป็นเมทริกซ์ผลผันเทียม (Pseudo inverse matrix)

ภาคผนวก ข

การโปรแกรม MATLAB

1. **การพลอตกราฟ (Plotting Respond Curves)**

การพลอตกราฟระหว่างเวลาและสภาวะของระบบ (t-x plot)โดยที่ t และ x เป็นเวคเตอร์ที่มีมิติเดียวกัน โดยใช้คำสั่ง (Command)

plot (t,x)

การพลอตกราฟหลายจุด (Plotting Multiple Curves) ใช้คำสั่ง

plot (t_1,x_1, t_2,x_2 ,… t_n,x_n)

2. **การหาสมการลักษณะ (Characteristic Equation)**

เมื่อต้องการหารากของสมการลักษณะ ซึ่งเป็นค่าไอเกนของเมทริกซ์ A (Eigenvalues) สามารถคำนวณได้จากคำสั่ง

p = poly (A)

จากตัวอย่าง ถ้าเมทริกซ์ A คือ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

จะได้

```
p = poly (A)
p =
    1.0000   6.0000   11.0000   6.0000
```

แสดงว่า MATLAB คำนวณพหุนามได้เป็น

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

รากของสมการลักษณะ p = 0 แทนค่าโดยใช้คำสั่ง

r = roots (p)

```
r = roots (p)
r =
    -3.0000
    -2.0000
    -1.0000
```

3. การหาค่าเลขยกกำลังของเมทริกซ์ (Matrix Exponential)

เมื่อเมทริกซ์ A มีมิติจัตุรัส n x n ใด ๆ เมื่อ

$$\exp m(A) = I_{nxn} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$$

สามารถใช้คำสั่ง

expm (A) หรือ sqrtm (A)

4. การแปลงสมการสภาวะจากเวลาต่อเนื่องเป็นแบบเวลาเป็นช่วง (Conversion from Continuous Time to Discrete Time)

โดยใช้คำสั่ง

[G,H] = c2d (A,B,Ts)

โดยที่ Ts คือช่วงเวลาที่ต้องการแซมปลิง (Sampling) ในหน่วยวินาที (Second) โดยจากสมการสภาวะ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

แปลงให้เป็น

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

เมื่อพิจารณาจากตัวอย่าง

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ระบบเวลาเป็นช่วงสามารถคำนวณหาได้โดยสมมุติการแซมปลิงเป็นช่วงเวลา 0.05 วินาที

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;1];
format long
[G,H] = c2d(A,B,0.05)


G =

     0.97088325381929   0.04484704238264

    -1.12117605956599   0.79149508428874


H =

     0.00116466984723

     0.04484704238264
```

จะได้สมการสภาวะแบบเวลาเป็นช่วง

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9709 & 0.04485 \\ -1.1212 & 0.7915 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.001165 \\ 0.04485 \end{bmatrix} u(k)$$

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ อาจารย์ ดร. พัลลภ เหล่าเจริญ ที่กรุณาสละเวลาอันมีค่ามาช่วยแนะนำและชี้แนวทางให้พวกเราได้รู้จักคิดแก้ปัญหาต่างๆในโครงงานออบเซอร์เวอร์นี้ มาตั้งแต่ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 ถึงภาคเรียนที่ 2 และแนะนำตำราที่ช่วยให้โครงงานนี้มีความสมบูรณ์แบบมากขึ้น

ขอขอบคุณอาจารย์ วิพันธ์ ปรีชาพาณิช ที่กรุณาสละเวลาหลังเกษียณอายุราชการ ได้ช่วยสรุปเนื้อหาขอลออบเซอร์เวอร์อย่างคร่าวๆ และให้คำปรึกษาเมื่อเราพบปัญหา ทำให้ผู้จัดทำทราบถึงวิธีการแก้ปัญหาในโครงงานนี้ได้ดียิ่งขึ้น

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2546

บรรณานุกรม

วิพันธ์ ปรีชาพาณิช, 2541. **การวิเคราะห์ระบบควบคุมเวลาดิสครีต**: กรุงเทพฯ: คณะวิศวกรรมศาสตร์: สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

Atherton, D., Furuta, K., Sano, A., 1998. **State Variable Methods in Automatic Control**: Tokyo Institute Technology, Keio University Yogohama, Sussex University U.K.; Chichester: John Wiley

Ackermann, J.E., "**Der Entwulf Lineare Regelunds Systeme im Zustandstraum,**", Regelungs-technik und Prozessdatenverarbeitung, 7(1972), pp.297-300.

Brogan, W.L., **Modern Control Theory.** Upper Sassle River, NJ: Prentice Hall, 1985

Butman, S., and R.Sivan (Sussman), "On Cancellations, Controllability and Observability," *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-9 (1964), pp.317-8.

Franklin, G.F., 1994. **Feedback Control of Dynamic Systems**: The Thrid Edition: Reading, MA : Addison-Wesley

Okata, M., 1997. **Modern Control Engineering**: International Thrid Edition. Minnesota: University of Minnesota: Prentice Hall

Westphal, L.C., 1995. **Sourcebook of Control System Engineering**: Sydney University.; London : Chapman & Hall