# โปรแกรมช่วยสอนเรื่องแคลคูลัสของเวกเตอร์

# COMPUTER ASSITED INSTRUCTION IN CALCULUS OF VECTOR



มนัส บรรณจิรกุล

วัชรินทร์ อัครนันทวัฒน์

ศุภมาส พัฒนาภิรักษา



ปัญหานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2546

# COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN CALCULUS OF VECTOR

MANAT BANNACHIRAKUN
VATCHARIN AKARANANTAWAT
SUPAMAS PATTANAPIRAKSA

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTERR SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2003

| | |
|---|---|
| **หัวข้อปัญหาพิเศษ** | โปรแกรมช่วยสอนเรื่องแคลคูลัสของเวกเตอร์<br>COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN CALCULUS OF VECTOR |
| **ชื่อนักศึกษา** | นายมนัส บรรณจิรกุล 43050034<br>นายวัชรินทร์ อัครนันทวัฒน์ 43050042<br>นางสาวศุภมาส พัฒนาภิรักษา 43050049 |
| **ภาควิชา** | คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ |
| **สาขาวิชา** | คณิตศาสตร์ประยุกต์ |
| **อาจารย์ที่ปรึกษา** | รศ.ภัคคินี ชิตสกุล<br>รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข |

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นำปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2546

| คณะกรรมการสอบ | | ลายมือชื่อ |
|---|---|---|
| ประธานกรรมการ | ผศ.กฤษฎา ไตรสุรัตน์ | |
| กรรมการ | อ.นพรัตน์ โพธิ์ชัย | |
| กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา | รศ.ภัคคินี ชิตสกุล | |
| กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา | รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข | |

(ผศ.ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

| | |
|---|---|
| **หัวข้อปัญหาพิเศษ** | โปรแกรมช่วยสอนเรื่องแคลคูลัสของเวกเตอร์ |
| **ชื่อนักศึกษา** | นายมนัส บรรณจิรกุล 43050034 |
| | นายวัชรินทร์ อัครนันทวัฒน์ 43050042 |
| | นางสาวศุภมาส พัฒนาภิรักษา 43050049 |
| **ปริญญา** | วิทยาศาสตร์บัณฑิต |
| **ภาควิชา** | คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ |
| **สาขา** | คณิตศาสตร์ประยุกต์ |
| **ปีการศึกษา** | 2546 |
| **อาจารย์ที่ปรึกษา** | รศ.ภัคคินี ชิตสกุล |
| | รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข |

## บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของโครงงานปัญหาพิเศษนี้คือ การสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์ เริ่มต้นด้วยการจัดทำบทเรียนโดยแบ่งการทำงานออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนเนื้อหาและแบบทดสอบ ขั้นตอนต่อไปคือการพัฒนาโปรแกรมโดยใช้โปรแกรม Dreamweaver Mx และขั้นตอนสุดท้ายคือการประเมินผล ทดสอบ และแก้ไขความผิดพลาดของโปรแกรม ซึ่งโปรแกรมช่วยสอนนี้สามารถเป็นแนวทางแก่ผู้ที่กำลังศึกษาในหัวข้อนี้ และผู้ที่สนใจที่จะศึกษาและพัฒนาโปรแกรมต่อไป

| | |
|---|---|
| **Special Project Title** | COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN CALCULUS OF VECTOR |
| **Student** | Mr.Manat Bannachirakun 43050034 |
| | Mr.Vatcharin Akaranantawat 43050042 |
| | MissSupamas Pattanapiraksa 43050049 |
| **Degree** | Bachelor of Science |
| **Department** | Mathematics and Computer Science , Faculty of Science |
| **Programme** | Applied Mathematics |
| **Acadamic Year** | 2003 |
| **Special Project Advisor** | Assoc.Prof.Pakkinee Chitsakul |
| | Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk |

## ABSTRACT

The purpose of this special topic is to building CAI in ' Vector '. The first step is designing courseware. There are two modules that are tutorial and practice in the program. The next step , application development by using Dreamweaver Mx. The final step is evaluating , testing and debugging program. Besides, this software is very useful for student and user who studying in this topic and also for anybody who want to develop this software in the future.

# กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล และ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ที่กรุณาคอยให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งทางด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ทางคณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่คอยให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์

นอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2547

# สารบัญ

# สารบัญตาราง

# สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

เวกเตอร์เป็นเรื่องหนึ่งในแขนงวิชาคณิตศาสตร์ที่มีการนำไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์ต่างๆ อาทิ วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี เป็นต้น แต่เวกเตอร์เป็นเรื่องที่ค่อนข้างยากและไม่แพร่หลาย ประกอบกับตำราในภาษาไทยส่วนใหญ่มีเนื้อหาที่ไม่ละเอียดพอ ดังนั้นจึงทำให้ไม่มีความเข้าใจมากพอที่จะศึกษาเพิ่มเติม อีกทั้งในปัจจุบันเทคโนโลยีการสื่อสารก้าวไกลมากซึ่งรวมถึงการสื่อสารในระบบเครือข่ายอินเตอร์เน็ตซึ่งเป็นแหล่งกระจายข้อมูลข่าวสารที่หลายคนรู้จัก ดังนั้นจึงนำเทคโนโลยีดังกล่าวมาช่วยสร้างโปรแกรมช่วยสอน และเพื่อเป็นการสะดวกกับผู้ที่สนใจศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเนื้อหาทางด้านนี้ จึงได้นำเสนอโปรแกรมช่วยสอนนี้ผ่านทางสื่ออินเตอร์เน็ต แทนการเข้าไปศึกษาในห้องเรียนหรือศึกษานอกจากตำราเรียน

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการจัดทำ

1.2.1 เพื่อสร้างความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์แก่นักศึกษา และผู้ที่สนใจให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น

1.2.2 สามารถนำสื่อการสอนนี้ไปในใช้ได้อย่างกว้างขวางบนสื่ออินเตอร์เน็ต หรือบนคอมพิวเตอร์ที่มีโปแกรมแปลภาษา html

1.2.3 สามารถใช้งานได้ง่าย และสร้างความสนใจแก่ผู้ใช้งาน

1.2.4 เพื่อศึกษาเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียนซึ่งสามารถใช้ในการสร้างและพัฒนาบทเรียนเรื่องอื่นๆ ต่อไป

## 1.3 ขอบเขตของปัญหา

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นโปรแกรมช่วยสอนเวกเตอร์ โดยจะครอบคลุมเนื้อหาในส่วนของเวกเตอร์เบื้องต้นเพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาที่ซับซ้อนขึ้น

1.3.1 ศึกษาเนื้อหาโปรแกรมช่วยสอน

1.3.2 จัดทำสื่อการเรียนการสอนเรื่องเวกเตอร์

1.3.3 ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของเวกเตอร์

1.3.4 จัดทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบเกี่ยวกับเวกเตอร์

## 1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับเวกเตอร์

1.4.2 ทำการเรียบเรียงเนื้อหาเกี่ยวกับเวกเตอร์

1.4.3 ศึกษาภาษาที่นำไปเขียนบนอินเตอร์เน็ต

1.4.4 สร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์

1.4.5 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาให้มีประสิทธิภาพ

1.4.6 ปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอ

1.4.7 จัดทำเอกสารประกอบการทำโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์

1.5.2 เป็นพื้นฐานในการศึกษาเรื่องเวกเตอร์ต่อไป

## 1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1.6.1 คอมพิวเตอร์ PENTIUM 4 1.80 GHz

1.6.2 RAM 256 MB

1.6.3 ระบบปฏิบัติการ WINDOW XP

1.6.4 Dreamweaver MX(ร่วมกับ Extension CourseBuilderInteraction)

1.6.5 Adobe Photoshop 5.5

1.6.6 Flaash MX

1.6.7 MSWord 2000

1.6.8 Internet Explorer 6.0

# บทที่ 2
# ทฤษฎีและหลักการของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

## 2.1 ความหมายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ( CAI ย่อมาจาก Computer-Assited Instruction ) คือ การนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาใช้เพื่อช่วยเป็นสื่อการสอน โดยที่มีการนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนแทนอาจารย์ผู้สอน และผู้เรียนสามารถเรียนเนื้อหาของบทเรียนได้ด้วยตนเอง นอกจากนั้นคอมพิวเตอร์ยังมีความสามารถในการตอบสนองต่อข้อมูลที่ผู้เรียนหรือผู้สอนป้อนเข้าไปได้ ซึ่งเป็นการช่วยเสริมสร้างความเข้าใจ และดึงดูดความสนใจของผู้เรียน โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในปัจจุบันจะพบว่ามีการนำสื่อประสม ( สื่อประสม คือ การผสมผสานผสานเนื้อหาหลาย ๆ ชนิด เช่น ข้อความ เสียงภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว ฯลฯ รวมเข้าด้วยกัน ) หรือ มัลติมีเดีย เข้ามาช่วยในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนซึ่งทำให้ผู้เรียนรู้สึกสนุกกับการเรียนและไม่รู้สึกเบื่อหน่าย

## 2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นจะอาศัยหลักของแนวความคิดจากทฤษฎีการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่กระตุ้นหรือสิ่งเร้ากับการตอบสนองของผู้เรียน เพื่อทำการประเมินการตอบสนองของผู้เรียน เพื่อเป็นการสร้างเสริมแรงกระตุ้นในการเรียน

กระบวนการเรียนการสอน คือ การสื่อสารข้อมูลระหว่างอาจารย์ผู้สอนและผู้เรียน เมื่อผู้เรียนได้รับรู้ข้อมูลแล้วประมวลผลก็แสดงว่ามีการเรียนรู้เกิดขึ้น

### 2.2.1 การสื่อสารในกระบวนการเรียนการสอน

(1) การสื่อสารแบบทางเดียว หรือ ระบบวงจรเปิด ( Open-Loop System ) เป็นการสื่อสารข้อมูลโดยเน้นไปทางผู้เรียนเพียงทางเดียว ซึ่งผู้เรียนไม่สามารถสื่อสารข้อมูลไปยังอาจารย์ผู้สอนได้ เช่น การเรียนทางไกลจากตำราและเอกสารหรือการเรียนโดยผ่านดาวเทียมสำหรับผู้เรียนที่อยู่ในชนบท

(2) การสื่อสารแบบสองทาง หรือ ระบบวงจรปิด ( Close-Loop System ) เป็นการสื่อสารข้อมูลที่ผู้เรียนและอาจารย์ผู้สอนสามารถตอบโต้แลกเปลี่ยนข้อมูลและความคิดเห็นกันได้ เช่น การเรียนการสอนในห้องเรียน ซึ่งเป็นการสื่อสารข้อมูลที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด เพราะเมื่อผู้เรียนไม่เข้าใจเนื้อหาในบทเรียนก็สามารถถามอาจารย์ผู้สอนได้ทันที

### 2.2.2 การจัดการศึกษาตามเอกัตภาพ

เนื่องจากผู้เรียนมีความแตกต่างกันทั้งในด้านร่างกาย ความรู้ ความคิดความสามารถ

และระดับสมอง จึงได้มีการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนให้เป็นเอกัตภาพตามระดับความสามารถของผู้เรียน ซึ่งเรียกว่า "การศึกษาตามเอกัตภาพ"

**การศึกษาตามเอกัตภาพมี 3 ลักษณะ** คือ

**2.2.2.1 บทเรียนโปรแกรม ( Programmed Instruction )**

การเรียนการสอนแบบนี้จะทำการจัดเป็นหน่วยๆ โดยมีทั้งกระบวนการเรียนรู้ และกระบวนการวัดผลเรียบร้อย ซึ่งเมื่อผ่านเกณฑ์ในหน่วยหนึ่งก็สามารถเรียนหน่วยต่อไปได้ ซึ่งบทเรียนโปรแกรมแบบนี้ B.F. Skinner เป็นผู้คิดค้นขึ้นมา

**2.2.2.2 บทเรียนโมดูล ( Module Instruction )**

บทเรียนโมดูลจะทำการจัดเป็นชุดๆ ประกอบด้วยบทเรียน อุปกรณ์ สื่อการเรียนการสอนเพื่อการเรียนรู้แบบครบวงจร อยู่ในชุดการเรียนรู้ ซึ่งผู้เรียนสามารถทดสอบบทเรียนโดยหาประสบการณ์ด้วยตนเองได้

**2.2.2.3 บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ( CAI : Computer Assisted Instruction )**

บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นการพัฒนามาจากบทเรียนโปรแกรม แต่ต่างกันตรงที่บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะใช้คอมพิวเตอร์ในการนำเสนอบทเรียนโปรแกรม ซึ่งเป็นการจัดการสอนและการศึกษาที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

**2.2.3 ลักษณะบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**

ในการที่จะนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในเป็นสื่อในการสอน ได้นั้น จะต้องประกอบด้วยองค์ประกอบและอุปกรณ์ต่างๆดังต่อไปนี้

**2.2.3.1 ฮาร์ดแวร์ ( Hardware )**

ฮาร์ดแวร์ คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นสื่อในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนให้แก่ผู้เรียน โดยเครื่องคอมพิวเตอร์นี้จำเป็นที่จะต้องมีความสามารถเพียงพอที่จะรองรับและสนับสนุนการทำงานของซอฟท์แวร์ ซึ่งจะนำมาสร้างเป็นบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

**2.2.3.2 ซอฟท์แวร์ ( Software )**

ซอฟท์แวร์ คือ โปรแกรมปฏิบัติการและโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

**2.2.3.3 คอร์สแวร์ ( Coureware )**

คอร์สแวร์ คือ บทเรียนที่ต้องการจะนำมาสร้างโปรแกรมช่วยสอนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบไปด้วย เนื้อหา , ตัวอย่าง ,แบบฝึกหัด

**2.2.4 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ( CAI ) สามารถแบ่งออกเป็น 8 ประเภท คือ

**2.2.4.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์ คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งนำมาเสนอเนื้อหาแก่ผู้เรียน ไม่ว่าจะเป็นเนื้อหาใหม่ หรือ การทบทวนเนื้อหาเดิมก็ตาม ส่วนใหญ่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้จะมีแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัด เพื่อเป็นการทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนว่ามีความเข้าใจมากน้อยเพียงใด อย่างไรก็ตาม ผู้เรียนมีอิสระพอที่จะเลือกตัดสินใจว่าจะทำแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัดหรือไม่อย่างไร หรือ จะเลือกเนื้อหาส่วนไหน เพราะการเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นผู้เรียนสามารถควบคุมการเรียนของตนได้ตามความต้องการของตนเอง

**2.2.4.2 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ต้องการมุ่งเน้นให้ผู้ใช้ทำแบบฝึกหัดจนสามารถเข้าใจเนื้อหาในบทเรียนนั้นๆได้ ซึ่งคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้เป็นประเภทที่ได้รับความนิยมมากโดยเฉพาะในระดับอุดมศึกษา ทั้งนี้เนื่องจากเป็นการเปิดโอกาสทำความเข้าใจบทเรียนที่สำคัญๆ ได้โดยที่ผู้สอนไม่ต้องเสียเวลาในชั้นเรียนเพื่อที่จะอธิบายเนื้อหาเดิมที่ผู้เรียนไม่เข้าใจซ้ำแล้วซ้ำอีก

**2.2.4.3 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ คือ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสร้างแบบทดสอบ ซึ่งจะทำการจัดการทดสอบ การตรวจ การให้คะแนน การคำนวณ ผลสอบ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้ คือ การที่ผู้เรียนได้รับการประเมินผลจากแบบทดสอบย้อนกลับโดยทันที ซึ่งเป็นข้อจำกัดของการทดสอบที่ใช้กันอยู่ทั่วๆ ไป

**2.2.4.4 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกม**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกม คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ทำให้ผู้ใช้มีความสนุกสนานเพลิดเพลินกับบทเรียนจนลืมไปว่ากำลังเรียนอยู่ ซึ่งเกมส์คอมพิวเตอร์ทางการศึกษาเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่สำคัญประเภทหนึ่ง เนื่องจากเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นตัวกระตุ้นให้เกิดความสนใจในการเรียน คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้นิยมใช้กับเด็กตั้งแต่ระดับประถมศึกษาไปจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นอกจากนี้ยังสามารถนำมาใช้ได้กับผู้เรียนในระดับอุดมศึกษาเพื่อเป็นการปูทางให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ และความรู้สึกที่ดีกับบทเรียนทางคอมพิวเตอร์อีกด้วย

**2.2.4.5 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเหตุการจำลอง**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเหตุการจำลอง คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่นำเสนอเนื้อหาของบทเรียนในรูปของการจำลองแบบ โดยการจำลองสถานการณ์ที่เหมือนจริงขึ้น และบังคับให้ผู้เรียนต้องตัดสินใจในการแก้ปัญหา โดยในตัวบทเรียนจะมีคำแนะนำเพื่อ

ช่วยในการตัดสินใจของผู้เรียน และแสดงผลลัพธ์ในการตัดสินใจนั้นๆ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้คือ การลดค่าใช้จ่ายและลดอันตรายที่อาจเกิดขึ้นได้จากการเรียนรู้ที่เกิดจากสถานการณ์จริง

**2.2.4.6 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทหนังสืออิเล็กทรอนิกส์**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่มีพื้นฐานมาจากการจำลองบทเรียนในลักษณะที่ปรากฏอยู่ในหนังสือแบบเรียน จึงมีส่วนประกอบที่คล้ายคลึงกับส่วนประกอบของหนังสือแบบเรียน คือ ปก คำนำ สารบัญ บทเนื้อหา แบบฝึกหัด เป็นต้น

**2.2.4.7 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทกำหนดสถานการณ์ในการแก้ปัญหา**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทกำหนดสถานการณ์ในการแก้ปัญหาคือ การนำเสนอสถานการณ์ให้ผู้เรียนศึกษาแล้วตอบคำถามเพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์นั้นๆ

**2.2.4.8 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทวินิจฉัยข้อบกพร่อง**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทวินิจฉัยข้อบกพร่องเป็นการถามคำถาม หรือ ทดสอบนักเรียนเพื่อดูว่าผู้เรียนยังมีจุดบกพร่องในมโนทัศน์นั้นๆอย่างไร แล้วดำเนินการแก้ไขข้อบกพร่องที่พบนั้น

**2.2.5 การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**

การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้ช่วยในการเรียนการสอน มีอยู่ 3 วิธีด้วยกัน ซึ่งแต่ละวิธีมีข้อได้เปรียบเสียเปรียบต่างกันออกไป ดังนี้

2.2.5.1 การใช้บทเรียนที่มีผู้อื่นได้สร้างไว้แล้ว ข้อได้เปรียบของวิธีนี้ คือ ประหยัดเวลาและนำมาใช้ได้ทันที แต่ข้อเสีย คือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ดีมักมีราคาแพง และนอกจากนี้ยังอาจจะได้งานที่ไม่ตรงกับความต้องการเสียทีเดียว จึงต้องมีการประเมินคุณค่าของบทเรียนก่อน

2.2.5.2 การสร้างบทเรียนโดยใช้โปรแกรมช่วยสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยโปรแกรมช่วยสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นโปรแกรมที่เรียนรู้ได้ง่าย เนื่องจากการเขียนสคริปต์ต่างๆในโปรแกรมประเภทนี้จะใช้ภาษาระดับสูง ( ใกล้เคียงกับภาษามนุษย์ ) ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือ ได้ผลงานที่ออกมาดีและใช้งานได้ง่ายในเวลาไม่นานนักจึงทำให้ไม่เสียเวลา แต่ข้อเสียคือไม่เหมาะกับงานที่มีความซับซ้อน เช่น บทเรียนที่ต้องการความสามารถทางคณิตศาสตร์ ฯลฯ

2.2.5.3 การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยการเขียนโปรแกรมขึ้นเองโดยภาษาคอมพิวเตอร์ เช่น ภาษาซี ภาษาแอสแซมบลี และภาษาปาสคาล ฯลฯ ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือสามารถสร้างบทเรียนที่มีความสลับซับซ้อนและได้ซอฟท์แวร์ที่ทำงานได้รวดเร็ว แต่ข้อเสียคือใช้เวลาในการทำนานกว่า 2 วิธีแรก

**เครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนา CAI แบ่งออกเป็น 4 กลุ่มคือ**

(1) ภาษาโปรแกรมระดับสูง ( high-level languages ) เช่น HTML , JAVA , BASIC และ C

(2) ภาษานิพนธ์บทเรียน ( authoring languages ) เช่น Coursewriter , Pilot และ Tutor

(3) ระบบนิพนธ์บทเรียน ( authoring systems ) เช่น Dreamweaver , Authorware , DACAL , Icon-Author , InfoWindow , LS1 , PHOENIX และ SOCRATIC

(4) เครื่องช่วยนิพนธ์บทเรียน ( authoring utilities ) ซึ่งแบ่งได้หลายชนิด เช่น lesson shell ( ตัวอย่างโปรแกรม : Apple Shell Games ) , code generator ( ตัวอย่างโปรแกรม : Screen Sculptor ) และ library routines

**ข้อดีและข้อจำกัดของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**

**ข้อดี**

(1) คอมพิวเตอร์จะช่วยเพิ่มแรงจูงใจและดึงดูดความสนใจในการเรียนรู้ให้แก่ผู้เรียน เนื่องจากการเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์นั้นเป็นประสบการณ์ที่แปลกใหม่

(2) การใช้สี ภาพลายเส้นที่เคลื่อนไหว ตลอดจนเสียงดนตรี จะเป็นการเพิ่มความเหมือนจริงและเร้าใจ แก่ผู้เรียนทำให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นที่จะเรียนรู้ ทำแบบฝึกหัดหรือทำกิจกรรมต่างๆเหล่านี้ เป็นต้น

(3) ลักษณะของโปรแกรมเป็นบทเรียนที่ทำให้เกิดความเป็นส่วนตัวแก่ผู้เรียน มีไว้สำหรับช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนช้า สามารถเรียนไปได้ตามความสามารถของตนเอง ได้อย่างสะดวก ไม่ต้องรีบเร่ง และเวลาตอบผิดไม่ต้องอายผู้อื่น

(4) เป็นการช่วยขยายขีดความสามารถของผู้สอนในการควบคุมผู้เรียน ได้อย่างใกล้ชิด เนื่องจากสามารถบรรจุเนื้อหาข้อมูลได้ง่าย และมีความสะดวกในการนำมาใช้

(5) ความสามารถของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการบันทึกคะแนนจากการทำแบบทดสอบ และพฤติกรรมต่างๆของผู้เรียนไว้ใช้ในการวางแผนบทเรียนในขั้นต่อไปได้

(6) ความสามารถในการเก็บข้อมูลของเครื่อง ทำให้สามารถนำมาใช้ได้ในลักษณะของการศึกษาเป็นรายบุคคลได้เป็นอย่างดี โดยสามารถกำหนดบทเรียนให้แก่ผู้เรียนแต่ละคนได้ตามความต้องการและแสดงผลความก้าวหน้าของผู้เรียนให้เห็นได้ทันที

**ข้อจำกัด**

(1) การออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการเรียนการสอนนั้นนับว่ายังมีน้อยมาก เมื่อเทียบกับการออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในวงการด้านอื่นๆ ทำให้โปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีจำนวนและขอบเขตที่จำกัด ที่จะนำมาใช้ในวิชาต่างๆ

(2) อุปกรณ์ยังขาดคุณภาพมาตราฐานระดับเดียวกัน เพื่อให้สามารถใช้ได้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ต่างระบบกัน เป็นต้นว่าซอฟต์แวร์ที่ผลิตขึ้นมาใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ระบบของ IBM ไม่สามารถใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ของ Macintosh ได้

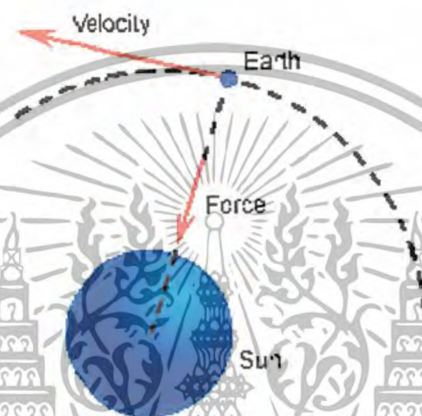
(3) การที่จะให้อาจารย์ผู้สอนออกแบบโปรแกรมบทเรียนเองนั้น นับว่าเป็นงานที่ต้องอาศัยเวลา สติปัญญา และความสามารถ เป็นอย่างมาก จึงทำให้เป็นการเพิ่มภาระให้แก่อาจารย์ผู้สอนมากยิ่งขึ้น

# บทที่ 3
# เวกเตอร์

## 3.1 แคลคูลัสของเวกเตอร์ เกรเดียนท์ ไดเวอร์เจนซ์ และเคิร์ล

### 3.1.1 เวกเตอร์

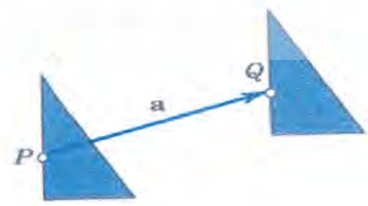
เวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางซึ่งแทนด้วยลูกศร หรือส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง เช่น แรง และ ความเร็ว ซึ่งกำหนดด้วยอัตราเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่ ดังรูป 3.1




รูปที่ 3.1 แรงและความเร็ว

โดยปกติเรากำหนดเวกเตอร์ด้วยตัวอักษรหนาพิมพ์เล็ก **a**, **b**, **c**

เวกเตอร์ ประกอบด้วยส่วนปลายที่เรียกว่า จุดเริ่มต้น และส่วนหัวที่เรียกว่าจุดปลาย เช่น การใช้เวกเตอร์แสดงการย้ายตำแหน่งของรูปสามเหลี่ยม(โดยปราศจากการหมุน)จากจุดเริ่มต้น $P$ ของเวกเตอร์ **a** ไปยังจุดปลาย $Q$ ดังรูป 3.2




รูปที่ 3.2 การเลื่อนตำแหน่ง

**การเท่ากันของเวกเตอร์**

<u>นิยาม 3.1</u> **ให้ a และ b เป็นเวกเตอร์แล้ว เวกเตอร์ a จะเท่ากับเวกเตอร์ b ก็ต่อเมื่อทั้งสองเวกเตอร์มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน เขียนแทนด้วย a = b**

**ส่วนประกอบของเวกเตอร์**

**ให้ $(x_1, y_1, z_1)$ และ $(x_2, y_2, z_2)$ เป็นพิกัดฉาก ถ้ากำหนดให้เวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่ $P:(x_1, y_1, z_1)$ และมีจุดปลายอยู่ที่ $Q:(x_2, y_2, z_2)$ แล้ว**

$$a_1 = x_2 - x_1,\ a_2 = y_2 - y_1,\ a_3 = z_2 - z_1 \tag{3.1}$$

**ทั้ง**สามจำนวนนี้เรียกว่า ส่วนประกอบของเวกเตอร์ **a** หรือเขียนว่า

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

ดังนั้นเราสามารถกำหนดให้เวกเตอร์อยู่ที่ใดก็ได้แล้วแต่การกำหนดจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์

<u>นิยาม 3.2</u> ขนาดของเวกเตอร์ **a** คือระยะทางระหว่างจุดเริ่มต้น $P$ กับจุดปลาย $Q$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{3.2}$$

เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย เรียกว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

<u>ตัวอย่างที่ 3.1</u> ส่วนประกอบของเวกเตอร์

ให้เวกเตอร์ **a** มีจุดเริ่มต้นที่ $P:(4, 0, 2)$และมีจุดปลายที่ $Q:(6, -1, 2)$ แล้วส่วนประกอบของเวกเตอร์ คือ

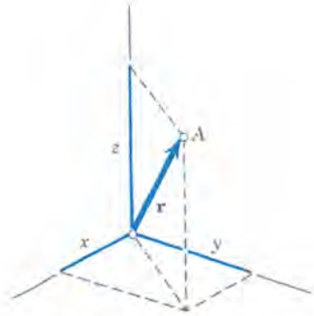
$$a_1 = 6 - 4 = 2,\ a_2 = -1 - 0 = -1,\ a_3 = 2 - 2 = 0$$

ดังนั้น **a** = (2, −1, 0) และจากสมการ (3.2) ขนาดของเวกเตอร์ คือ

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$ □

**เวกเตอร์ตำแหน่ง**

**กำหนด $(x, y, z)$ เป็นพิกัดฉากในปริภูมิ แล้วเวกเตอร์ตำแหน่ง r ของจุด $A:(x, y, z)$ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0, 0) และมีจุดปลายอยู่ที่ $A$ ดังรูป 3.3 ดังนั้น r = $(x, y, z)$**




**รูปที่ 3.3 เวกเตอร์ตำแหน่ง r ของจุด $A : (x, y, z)$**

<u>นิยาม 3.3</u> เวกเตอร์ในรูปสามอันดับของจำนวนจริง

ในระบบพิกัดฉาก สามารถกำหนดแต่ละเวกเตอร์ด้วยสามอันดับของส่วนประกอบของเวกเตอร์ที่สมนัยกัน และแต่ละสามอันดับจำนวนจริง $(a_1, a_2, a_3)$ จะสมนัยกับหนึ่งเวกเตอร์ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ซึ่งสามอันดับ (0, 0, 0) จะสมนัยกับเวกเตอร์ศูนย์ที่มีขนาด 0 และไม่มีทิศทาง

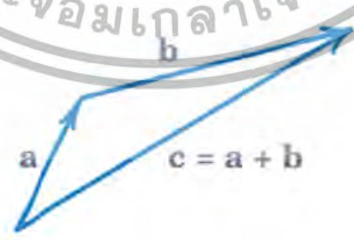
**พีชคณิตของเวกเตอร์**

<u>นิยาม 3.4</u> การบวกเวกเตอร์

ให้เวกเตอร์ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ และเวกเตอร์ $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ แล้วผลรวมของเวกเตอร์ $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ นิยามโดย

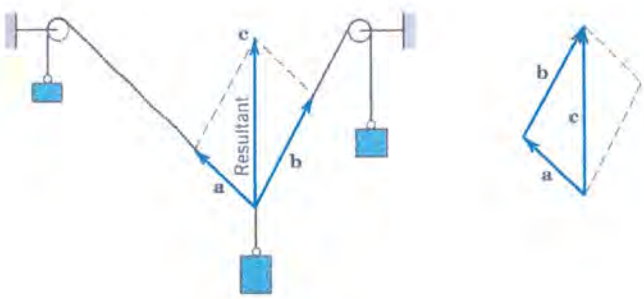
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \tag{3.3}$$

ผลบวกของเวกเตอร์ $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ทางเรขาคณิต หมายถึง เวกเตอร์ที่ลากจากจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ $\mathbf{a}$ ไปยังจุดปลายของเวกเตอร์ $\mathbf{b}$ ดังรูป 3.4




**รูปที่ 3.4 การบวกเวกเตอร์**

**จากรูป 3.6 แสดงแรงที่กระทำกับวัตถุ โดยที่ผลบวกของเวกเตอร์ตามกฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ แรงลัพธ์ที่ได้จากผลรวมของสองแรงตามหลักกลศาสตร์**




**รูปที่ 3.5 ผลลัพธ์ของสองแรง**

**คุณสมบัติพื้นฐานของการบวกเวกเตอร์**

กำหนดให้ **a**, **b** และ **c** เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \\ &(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \\ &\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a} \\ &\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.4}$$

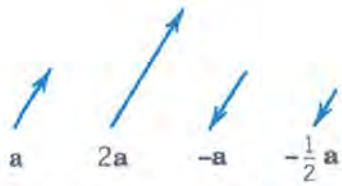
โดยที่ $-\mathbf{a}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาด $\|\mathbf{a}\|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ **a**

<u>นิยาม 3.5</u> การคูณสเกลาร์ หรือการคูณด้วยจำนวน

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ และ $c$ เป็นสเกลาร์ใดๆ (จำนวนจริง $c$) แล้วเวกเตอร์ $c\mathbf{a}$ คือเวกเตอร์ที่เกิดจากการคูณแต่ละส่วนประกอบของ **a** ด้วย $c$ ดังนั้น

$$c\mathbf{a}=(ca_1, ca_2, ca_3) \tag{3.5}$$

ในทางเรขาคณิต ถ้า $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ แล้ว $c\mathbf{a}$ $(c>0)$ จะมีทิศทางเดียวกันกับ เวกเตอร์ **a** และ $c\mathbf{a}$ $(c<0)$ จะมีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ **a** และไม่ว่ากรณีใดๆ ขนาดของ $c\mathbf{a}$ คือ $\|c\mathbf{a}\|=|c|\,\|\mathbf{a}\|$ และ $c\mathbf{a}=\mathbf{0}$ ถ้า $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ หรือ $c=0$ ดังรูป 3.6




**รูปที่ 3.6 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์**

**คุณสมบัติพื้นฐานของการคูณสเกลาร์**

กำหนดให้ **a**, **b** เป็นเวกเตอร์ และ $c$, $k$ เป็นสเกลาร์ใดๆ

$$\begin{aligned} &c(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = c\mathbf{a}+c\mathbf{b} \\ &(c+k)\mathbf{a} = c\mathbf{a}+k\mathbf{a} \\ &c(k\mathbf{a}) = (ck)\mathbf{a} \\ &1\mathbf{a} = \mathbf{a} \end{aligned} \tag{3.6}$$

จากสมการ (3.4) และ (3.6) จะได้

$\mathbf{b}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{b}-\mathbf{a}$ (ดังรูป 3.7)


**รูปที่ 3.7 ผลต่างของเวกเตอร์**

<u>ตัวอย่างที่ 3.2</u> การบวกเวกเตอร์ และการคูณด้วยสเกลาร์

กำหนดเวกเตอร์ $\mathbf{a} = (4, 0, 1)$ และ $\mathbf{b} = (2, -5, \frac{1}{3})$ จะได้

$-\mathbf{a} = (-4, 0, -1)$, $7\mathbf{a} = (28, 0, 7)$,

$-\mathbf{b} = (-2, -5, -\frac{1}{3})$

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (6, -5, \frac{4}{3})$

$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (2, 5, \frac{2}{3})$ และ

$2(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 2(2, 5, \frac{2}{3}) = (4, 10, \frac{4}{3}) = 2\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ □

**เวกเตอร์หนึ่งหน่วย i, j, k**

**มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเฉพาะอยู่ 3 เวกเตอร์ ที่ใช้อธิบายการดำเนินการของเวกเตอร์ คือ**

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1) \text{ ซึ่ง}$$

$$\| \mathbf{i} \| = \| \mathbf{j} \| = \| \mathbf{k} \| = 1$$

**โดยที่ i, j, k เป็นเวกเตอร์ในทิศทางบวกตามแกนในระบบพิกัดฉากดังรูป 3.8**


**รูปที่ 3.8 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย i, j, k และเวกเตอร์ a**

จากคุณสมบัติการบวกและการคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์ เราสามารถแทนเวกเตอร์ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ใดๆ ในปริภูมิ ให้อยู่ในรูปผลรวมของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **i, j** และ **k** ได้

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1 (1, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0) + a_3 (0, 0, 1) \\ &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.3</u> จากตัวอย่างที่ 3.2 $\mathbf{a} = (4, 0, 1)$ และ $\mathbf{b} = (2, -5, \frac{1}{3})$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k})$$ □

**ปริภูมิเวกเตอร์สามมิติ $R^3$**

สามอันดับจำนวนจริง $(a_1, a_2, a_3)$ คือ เวกเตอร์ **a** และ $a_n$ คือส่วนประกอบที่ $n$ ของ **a** จะเรียกกลุ่มของสามอันดับทั้งหมดที่เป็นไปตามกฎต่อไปนี้ว่า ปริภูมิเวกเตอร์สามมิติ

ถ้า **a** คือ $(a_1, a_2, a_3)$ และ **b** คือ $(b_1, b_2, b_3)$ แล้ว

1. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ หมายความว่า $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} \equiv (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
3. ถ้า $c$ เป็นจำนวนจริงแล้ว $c\mathbf{a} \equiv (ca_1, ca_2, ca_3)$
4. $-\mathbf{a}$ หมายความว่า $(-1)\mathbf{a} \equiv (-a_1, -a_2, -a_3)$
5. $\mathbf{0} \equiv (0, 0, 0)$

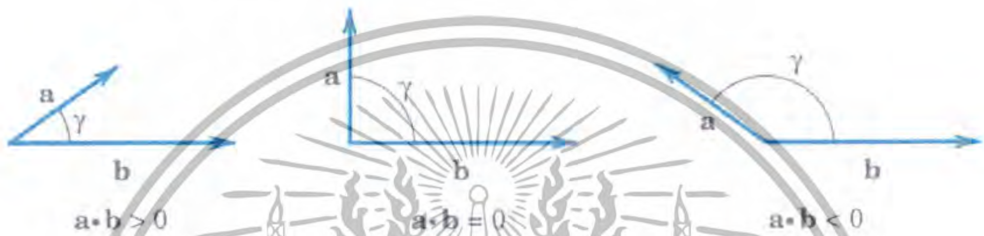
**3.1.2 ผลคูณภายใน**

<u>นิยาม 3.6</u> ให้ $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์ แล้วผลคูณภายใน(ผลคูณจุด หรือ ผลคูณเชิงสเกลาร์)ของ **a** และ **b** คือ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ นิยามโดย

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{3.7}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.7</u> ให้ $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และให้ $\theta$ เป็นมุมระหว่าง **a** และ **b** ดังรูป 3.9 แล้ว

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta \tag{3.8}$$




**รูปที่ 3.9 มุมระหว่างเวกเตอร์ และผลคูณภายใน**

<u>บทแทรก 3.8</u> a) กำหนดให้ **a** และ **b** เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จะกล่าวว่าเวกเตอร์ **a** และ **b** ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

b) สำหรับเวกเตอร์ **a** ใดๆ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$ และ $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$ (3.9)

จากสมการ (3.8) จะได้

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}} \quad : \quad \mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0} \tag{3.10}$$

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ และ $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ จะได้ $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ และ

$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

และเนื่องจาก $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (2)(1) + (-1)(-1) + (2)(0) = 3$

จากสมการ (3.10) จะได้ $\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ซึ่งหมายความว่า $\theta = \frac{\pi}{4}$ □

**คุณสมบัติทั่วไปของผลคูณภายใน**

**สำหรับเวกเตอร์ a, b, c และสเกลาร์ $q_1, q_2$**

$$\text{a) } (q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = q_1\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + q_2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

$$\text{b) } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \tag{3.11}$$

$$\text{c) } \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0,\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

จากสมการ (3.11a) กำหนด $q_1 = q_2 = 1$ จะได้

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \tag{3.12}$$

จากสมการ (3.10) กำหนด $|\cos\theta| \leq 1$ จะได้

$$\| \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \| \leq \| \mathbf{a} \| \, \| \mathbf{b} \| \qquad ;\ \mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0} \tag{3.13}$$

และจากสมการ (3.9) และ (3.13)

$$\| \mathbf{a}+\mathbf{b} \| \leq \| \mathbf{a} \| + \| \mathbf{b} \| \tag{3.14}$$

$$\| \mathbf{a}+\mathbf{b} \|^2 + \| \mathbf{a}-\mathbf{b} \|^2 = 2(\| \mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{b} \|^2) \tag{3.15}$$

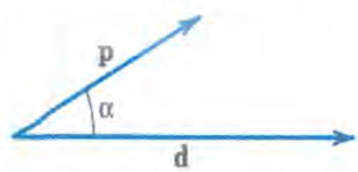
**การประยุกต์ผลคูณภายใน**

**<u>ตัวอย่างที่ 3.5</u>** **งานที่เกิดจากแรง**

กำหนดให้วัตถุหนึ่งมีแรงภายนอก **p** มากระทำที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่จากเดิมเป็นระยะ $d$ แล้ว งานที่เกิดจากแรง **p** ในการเคลื่อนย้ายวัตถุ คือ

$$W = \| \mathbf{p} \| \, \| d \| \cos\theta = \mathbf{p}\cdot\mathbf{d} \tag{3.16}$$

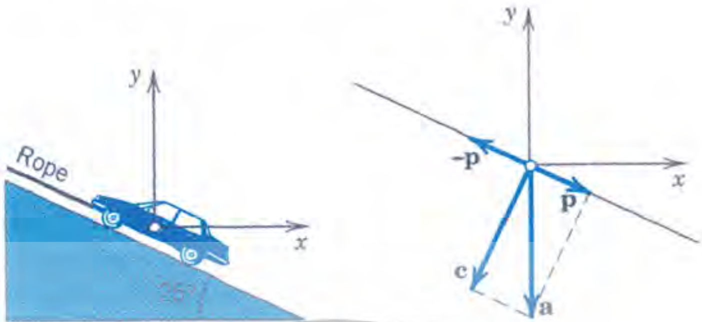
คือ ขนาดของแรง **p** คูณกับระยะทางในการเคลื่อนที่ คูณกับโคไซน์ของมุม $\theta$ ระหว่าง p กับ $d$ ดังรูป 3.10 ถ้า $\theta < 90^\circ$ ตามรูป 3.10 แล้ว $W > 0$ ถ้า p และ $d$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน แล้ว งานที่ได้มีค่าเท่ากับ 0 ถ้า $\theta > 90^\circ$ แล้ว $W < 0$ ซึ่งหมายความว่ามีแรงต้านเกิดขึ้น □




**รูปที่ 3.10 งานที่เกิดจากแรง**

<u>ตัวอย่างที่ 3.6</u> **ส่วนประกอบของแรงในทิศทางที่กำหนด**

**จงหาแรงตึงเชือกดังรูป 3.11 ที่ดึงรถน้ำหนัก 5000 ปอนด์ ให้อยู่ในภาวะสมดุล ถ้าทางลาดทำมุม 25° กับแนวราบ**




**รูปที่ 3.11 ส่วนประกอบของแรงที่กระทำกับรถ**

<u>วิธีทำ</u> จากรูป น้ำหนักของรถ คือ $\mathbf{a} = (0, -5000)$ เพราะว่าแรงนี้มีทิศชี้ลงตามแนวแกน $y$ ทางลบ **a** คือ ผลรวมของแรงสองแรง(แรงลัพธ์) ซึ่ง $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{p}$ โดยที่ **c** คือ แรงที่รถพยายามอยู่บนทางลาด และ **p** คือ แรงที่ขนานกับทางลาด ซึ่งมีขนาด

$$\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{a}\| \cos\theta = 5000 \cos 65^\circ = 2113 \text{ ปอนด์}$$

และทิศทางของเวกเตอร์ 1 หน่วย **u** ตรงข้ามกับทิศทางของแรงตึงเชือก ในที่นี้ $\theta = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ คือมุมระหว่าง **a** และ **p**

ดังนั้น เวกเตอร์ในทิศทางเดียวกับแรงตึงเชือก คือ

$$\mathbf{b} = (-1, \tan 25^\circ) = (-1, 0.46631) \text{ ดังนั้น } \|\mathbf{b}\| = 1.10338$$

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b} = (0.90631, -0.42262)$$

เนื่องจาก $\|\mathbf{u}\| = 1$ และ $> 0$ จะได้

$$\|\mathbf{p}\| = (\|\mathbf{a}\| \cos\theta)\|\mathbf{u}\| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{5000 \cdot 0.46631}{1.10338} = 2113$$

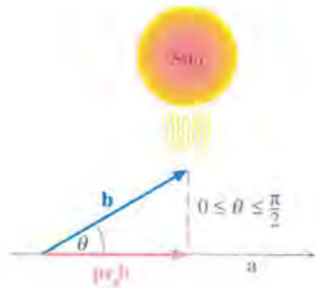
ปอนด์

**คำตอบ คือ ประมาณ 2100 ปอนด์** □

**ภาพฉายของเวกเตอร์**

**สมมติให้ a และ b เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ อยู่ในตำแหน่งดังรูป 3.12 และดวงอาทิตย์ทอดเงาลงบนเส้นที่มีเวกเตอร์ a อยู่ เงาที่ขนานกับเวกเตอร์ a เรียกว่า ภาพฉายของเวกเตอร์ b**

บนเวกเตอร์ **a** แทนด้วย $\mathbf{pr_a b}$ เนื่องจาก $\mathbf{pr_a b}$ ขนานกับเวกเตอร์ **a** หรือเป็นศูนย์ ดังนั้นเวกเตอร์ $\mathbf{pr_a b}$ ต้องเป็นค่าผลคูณของสเกลาร์กับเวกเตอร์ **a**




**รูปที่ 3.12 ภาพฉายของเวกเตอร์**

ขนาดของ $\mathbf{pr_a b}$ นิยามด้วย

$$\mathbf{pr_a b} = \|\mathbf{b}\| \cos\theta \tag{3.17}$$

โดยที่ $\theta$ เป็นมุมระหว่าง เวกเตอร์ **a** และ **b** $(0 \le \theta \le \pi)$

ถ้า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$\mathbf{pr_a b} = \|\mathbf{b}\| \cos\theta \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \|\mathbf{b}\| \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\right) \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)\mathbf{a}$$

ถ้า $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ แล้ว จากรูป 3.12 จะได้

$$\mathbf{pr_a b} = \|\mathbf{b}\| (-\cos\theta) \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}(-\mathrm{a}) = \|\mathbf{b}\| \cos\theta \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)\mathbf{a}$$

ซึ่งทั้งสองกรณีมีนิพจน์เหมือนกัน

<u>นิยาม 3.9</u> ให้ **a** เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้วภาพฉายของเวกเตอร์ **b** บนเวกเตอร์ **a** คือ เวกเตอร์ $\mathbf{pr_a b}$ ที่นิยามโดย

$$\mathbf{pr_a b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)\mathbf{a} \tag{3.18}$$

**3.1.3 การคูณไขว้**

<u>นิยาม 3.10</u> กำหนดให้ $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์ แล้วผลคูณไขว้(ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ **a** และ **b** คือเวกเตอร์ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ นิยามโดย

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k} \tag{3.19}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.11</u> ให้ **a** และ **b** เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ และ $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

ดังนั้น ถ้า $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ แล้ว $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ **a** และ **b**

b) ถ้า $\theta$ เป็นมุมระหว่าง **a** และ **b** $(0 \leq \theta \leq \pi)$ แล้ว

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin\theta \tag{3.20}$$

ซึ่ง $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ เป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานดังรูป 3.13

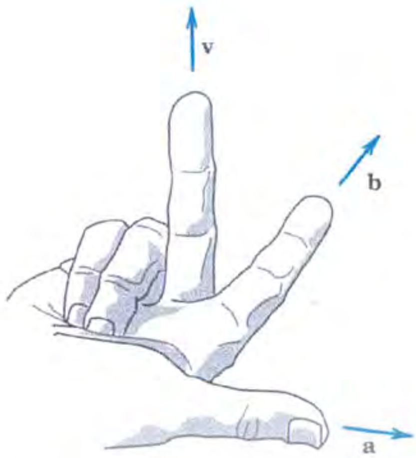

**รูปที่ 3.13 การคูณไขว้**

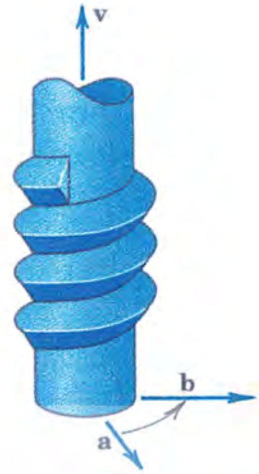
<u>บทแทรก 3.12</u> เวกเตอร์ **a** และ **b** เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์แล้ว จะขนานกันก็ต่อเมื่อ

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

**ระบบมือขวา**

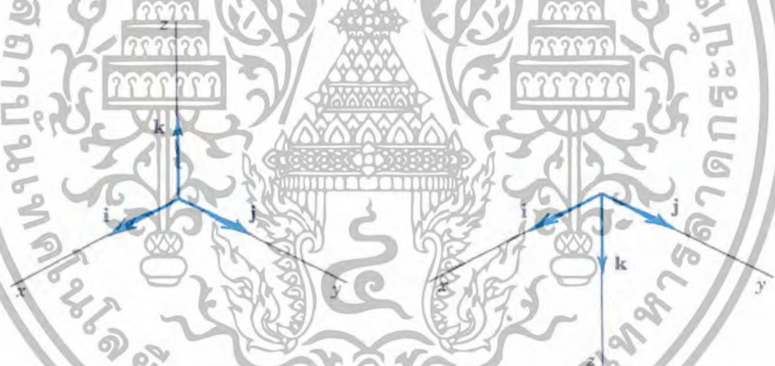
ระบบสามเวกเตอร์มือขวาของเวกเตอร์ **a**, **b** และ **v** เป็นรูปแบบหนึ่งของการแสดงเวกเตอร์ซึ่งมีทิศออกจากนิ้วโป้ง นิ้วชี้ และนิ้วกลาง ดังรูป 3.14 ถ้าหมุนเวกเตอร์ **a** ให้อยู่ในทิศทาง **b** โดยทำมุม $\alpha(<\pi)$ แล้วจะได้ดังรูป 3.15




**รูปที่ 3.14 ระบบเวกเตอร์สามแกนมือขวา** **รูปที่ 3.15 เกลียวมือขวา**

**เรียกระบบพิกัดคาร์ทีเซียนว่าเป็นระบบมือขวา ถ้าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย i, j และ k มีทิศอยู่บนแกนทางบวก ดังรูป 3.16(a) และจะเรียกว่าเป็นระบบมือซ้าย ถ้าเวกเตอร์ k อยู่ในทิศตรงข้าม ดังรูป 3.16(b)**




**(a) มือขวา** **(b) มือซ้าย**

**รูปที่ 3.16 ระบบพิกัดฉากสองประเภท**

**<u>ตัวอย่างที่ 3.7</u> ผลคูณไขว้กำหนดให้ $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ จงคำนวณ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ และ $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$**

**<u>วิธีทำ</u>** **จากนิยามของผลคูณไขว้**

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$= [(-1)(3)-(3)(-2)]\,\mathbf{i} + [(3)(-1)-(2)(4)]\,\mathbf{j} + [(2)(-2)-(-1)(-1)]\,\mathbf{k}$

$= 2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

และ $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= [(-2)(3)-(-4)(-1)]\,\mathbf{i} + [(4)(2)-(-1)(3)]\,\mathbf{j} + [(-1)(-1)-(-2)(2)]\,\mathbf{k}$

$= -2\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ □

<u>ตัวอย่างที่ 3.8</u> จงแสดงว่า

$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ และ $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\mathbf{i} = (1)\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k}$ และ $\mathbf{j} = (0)\mathbf{i} + (1)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k}$ จะได้

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= [(0)(0)-(0)(1)]\,\mathbf{i} + [(0)(0)-(1)(0)]\,\mathbf{j} + [(1)(1)-(0)(0)]\,\mathbf{k}$

$= \mathbf{k}$

อีกสองสูตรก็สามารถหาได้ในวิธีเดียวกัน □

**คุณสมบัติทั่วไปของผลคูณไขว้**

**สำหรับเวกเตอร์ a, b และ c สเกลาร์ $l$**

a) $(l\mathbf{a})\times\mathbf{b} = l(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(l\mathbf{b})$ (3.21)

b) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ (3.22)

c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (3.23)

d) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ (3.24)

e) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (3.25)

**การประยุกต์ผลคูณเวกเตอร์**

<u>**ตัวอย่างที่ 3.9**</u> **โมเมนต์ของแรง**

**ในทางกลศาสตร์ โมเมนต์ m ของแรง p ที่จุด $Q$ นิยามด้วย $\mathbf{m} = \|\mathbf{p}\|d$ โดยที่ d เป็นระยะห่างระหว่าง $Q$ และเวกเตอร์ p ถ้า r เป็นเวกเตอร์จาก Q ไปยังจุด $A$ บน $L$ แล้ว $d = \|\mathbf{r}\|\sin\theta$ และ**

$$\mathbf{m} = \|\mathbf{r}\|\,\|\mathbf{p}\|\sin\theta$$

**เนื่องจาก $\theta$ คือมุมระหว่าง r และ p จะได้**

$$\mathbf{m} = \|\mathbf{r}\times\mathbf{p}\|$$

จากสมการ (3.19)

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} \tag{3.26}$$

**เรียกว่าเวกเตอร์โมเมนต์ หรือ โมเมนต์เวกเตอร์ของ p ที่จุด Q ซึ่งมีขนาด m** □

<u>**ตัวอย่างที่ 3.10**</u> **โมเมนต์ของแรง**

**จงหาโมเมนต์ของแรง p ดังรูป 3.17 ที่จุดศูนย์กลางของวงล้อ**


**รูปที่ 3.17 แรงที่กระทำกับวงล้อ**

<u>**วิธีทำ**</u> จากรูป จะได้

$$\mathbf{p} = (100\cos 30^\circ,\ 1000\sin 30^\circ,\ 0) = (866, 500, 0)$$

$$\mathbf{r} = (0, -1.5, 0)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 866 & 500 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1.5 \\ 866 & 500 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (0, 0, -1299)$$ □

**ผลคูณของสามเวกเตอร์**

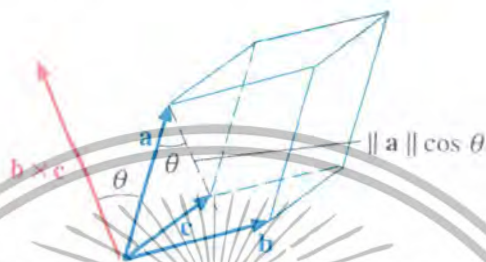
**ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์**

ให้ $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ , $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์ จะได้

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$

จะได้ $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ **ดังรูป 3.18** (3.27)




**รูปที่ 3.18 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์**

$|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$ = ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้าน **a, b** และ **c** (3.28)

$\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|$ คือพื้นที่ฐานของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน และถ้า $\theta$ คือมุมระหว่าง **a** และ $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ แล้ว $\|\mathbf{a}\||\cos\theta|$ คือความสูงของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน และจะได้

$$V = (\text{ความสูง})(\text{พื้นที่ฐาน}) = (\|\mathbf{a}\|\,|\cos\theta|)(\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|) = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$$

เนื่องจาก $V$ คือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้าน **a, b** และ **c**

$$V = |\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})| = |\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|$$

โดยที่

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2) \quad (3.29)$$

**<u>ตัวอย่างที่ 3.11</u>** ให้ $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ , $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ และ $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ จงหาปริมาตร $V$ ของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่กำหนดด้วย **a, b** และ **c**

**<u>วิธีทำ</u>** จากสมการ (3.28) $V = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$ และจากสมการ (3.29)

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6-1+0)-(0-4+0) = 9$$

$V = 9$ □

**3.1.4 ฟังก์ชันเวกเตอร์**

<u>นิยาม 3.13</u> ฟังก์ชันเวกเตอร์ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ ส่วนที่เป็นโดเมนซึ่งประกอบด้วยกลุ่มของจำนวน และ กฎซึ่งกำหนดเวกเตอร์สำหรับแต่ละค่าในโดเมน

โดยปกติจะแทนเลขจำนวนในโดเมนของฟังก์ชันเวกเตอร์ด้วย $t$ เนื่องจากในการประยุกต์ส่วนใหญ่เป็นฟังก์ชันของช่วงเวลา และจะกำหนดฟังก์ชันเวกเตอร์ด้วยอักษรหนาตัวพิมพ์ใหญ่ **F**, **G** และ **H** กลุ่มของเวกเตอร์ที่กำหนดเป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ซึ่งมาจากสมาชิกในโดเมน เรียกว่า เรนจ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริงที่เป็นฟังก์ชันค่าจริง

ทุกๆ ฟังก์ชันเวกเตอร์ **F** จะสมนัยกับฟังก์ชันค่าจริง $f_1$, $f_2$ และ $f_3$ สำหรับ $t$ ที่อยู่ในโดเมนของ **F** ถ้า $f_1(t)$, $f_2(t)$ และ $f_3(t)$ แทนด้วยส่วนประกอบ **i**, **j** และ **k** ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\mathbf{F}(t)$ แล้วโดเมนของฟังก์ชัน $f_1$, $f_2$ และ $f_3$ คือโดเมนเดียวกับ **F** และ

$$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}\text{ , สำหรับ } t \text{ ที่อยู่ในโดเมนของ } \mathbf{F}$$

ฟังก์ชัน $f_1$, $f_2$ และ $f_3$ ( $f: A \subseteq R \rightarrow R$ ) คือฟังก์ชันส่วนประกอบของ **F**( $\mathbf{F}: A \subseteq R \rightarrow R^3$ )

<u>ตัวอย่างที่ 3.12</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ จงหาโดเมนของ **F** และฟังก์ชันส่วนประกอบ

<u>วิธีทำ</u> โดเมนของ **F** ต้องเป็นค่าที่ทำให้ $\ln t$, $\sqrt{1-t}$ และ $t^4$ มีค่าอยู่จริง ดังนั้นค่าของ $t$ ต้องอยู่ในช่วง $(0, 1]$ จะได้

$f_1(t) = \ln t$ , $f_2(t) = \sqrt{1-t}$ และ $f_3(t) = t^4$ □

**ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันเวกเตอร์**

<u>นิยาม 3.14</u> ให้ **F** เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ที่นิยามบนแต่ละจุดในบางช่วงเปิดที่มี $t_0$ (อาจไม่รวม $t_0$) เวกเตอร์ $L$ คือ ลิมิตของ $\mathbf{F}(t)$ เมื่อ $t$ เข้าใกล้ $t_0$ (หรือ $L$ คือ ลิมิตของ **F** ที่จุด $t_0$) ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ โดยที่

ถ้า $0 < |t - t_0| < \delta$ แล้ว $\| \mathbf{F}(t) - L \| < \varepsilon$ เขียนได้ว่า $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) = L$

และกล่าวว่า $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{F}(t)$ หาค่าได้

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.15</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ แล้ว **F** มีลิมิตที่ $t_0$ ก็ต่อเมื่อ $f_1$, $f_2$ และ $f_3$ มีลิมิตที่ $t_0$

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) = \left[ \lim_{t \to t_0} f_1(t) \right]\mathbf{i} + \left[ \lim_{t \to t_0} f_2(t) \right]\mathbf{j} + \left[ \lim_{t \to t_0} f_3(t) \right]\mathbf{k}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.13</u> จงหา $\lim_{t\to 0}(2\cos t\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีบทที่ 3.15

$$\lim_{t\to 0}(2\cos t\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}) = (\lim_{t\to 0} 2\cos t)\mathbf{i} + (\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t})\mathbf{j} + (\lim_{t\to 0} t^2)\mathbf{k}$$

$$= 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

□

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.16</u> ให้ **F** และ **G** เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ และให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สมมติว่า $\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)$ และ $\lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)$ หาค่าได้ และ $\lim_{t\to t_0} f(t)$ หาค่าได้ และ $\lim_{s\to s_0} g(s) = t_0$

แล้ว

a) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{F}+\mathbf{G})(t) = \lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) + \lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)$

b) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{F}-\mathbf{G})(t) = \lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) - \lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)$

c) $\lim_{t\to t_0} f\,\mathbf{F}(t) = \lim_{t\to t_0} f(t)\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)$

d) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t) = \lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)$

e) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t) = \lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)\times\lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)$

f) $\lim_{s\to s_0}(\mathbf{F}\circ g)(s) = \lim_{s\to s_0} f(t)$ ถ้า $g(s)\neq t_0$ สำหรับ $s$ ที่อยู่ในช่วงเปิดรอบ $t_0$

<u>ตัวอย่างที่ 3.14</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = \cos\pi t\,\mathbf{i} + 2\sin\pi t\,\mathbf{j} + 4t^2\,\mathbf{k}$ และ $\mathbf{G}(t) = t\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{k}$

จงหา $\lim_{t\to 1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t)$ และ $\lim_{t\to 1}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t)$

<u>วิธีทำ</u> $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t) = (\cos\pi t\,\mathbf{i} + 2\sin\pi t\,\mathbf{j} + 4t^2\,\mathbf{k})\cdot(t\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{k})$

$= t\cos\pi t + 4t^5$

จะได้

$$\lim_{t\to 1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t) = \lim_{t\to 1}(t\cos\pi t + 4t^5) = \cos\pi + 4 = 3$$

จากทฤษฎีบทที่ 3.15 จะได้

$$\lim_{t\to 1}\mathbf{F}(t) = \cos\pi\,\mathbf{i} + 2\sin\pi\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

และ $\lim_{t\to 1}\mathbf{G}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 3.16 จะได้

$$\lim_{t\to 1}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t) = (\cos\pi\,\mathbf{i} + 2\sin\pi\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+\mathbf{k})$$

$$= 5\mathbf{j}$$

□

<u>นิยาม 3.17</u> ฟังก์ชันเวกเตอร์ **F** จะต่อเนื่องที่จุด $t_0$ ในโดเมนของ **F** ถ้า

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0)$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.18</u> ฟังก์ชันเวกเตอร์ **F** จะต่อเนื่องที่จุด $t_0$ ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันส่วนประกอบ $f$ ต่อเนื่องที่ $t_0$

**อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์**

<u>นิยาม 3.19</u> ให้ $t_0$ เป็นเลขจำนวนที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันเวกเตอร์ **F** ถ้า

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(t_0)}{t-t_0}$$

หาค่าได้ เราเรียกลิมิตนี้ว่าอนุพันธ์(derivative) ของ **F** ที่ $t_0$ และเขียนว่า

$$\mathbf{F}'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}(t_0)}{t-t_0}$$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า **F** มีอนุพันธ์ที่ $t_0$ , **F** สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $t_0$ หรือ $\mathbf{F}'(t_0)$ หาค่าได้

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.20</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ แล้ว **F** สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $t_0$ ก็ต่อเมื่อ $f_1$, $f_2$ และ $f_3$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $t_0$

$$\mathbf{F}'(t_0) = f_1'(t_0)\mathbf{i} + f_2'(t_0)\mathbf{j} + f_3'(t_0)\mathbf{k}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.15</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ สำหรับทุก $t$ จงแสดงว่า $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f_1(t) = a$ , $f_2(t) = b$ และ $f_3(t) = c$

ดังนั้น ฟังก์ชันส่วนประกอบเป็นฟังก์ชันค่าคงที่ทั้งหมด

ดังนั้น $\mathbf{F}'(t) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$ □

<u>ตัวอย่างที่ 3.16</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ จงหา $\mathbf{F}'(\pi)$

<u>วิธีทำ</u> $\mathbf{F}'(t) = (\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$

ดังนั้น $\mathbf{F}'(\pi) = [-1 - \pi(0)]\mathbf{i} + [0 + \pi(-1)]\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$= -\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + \mathbf{k}$$ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.21</u> ให้ **F**, **G** และ $f$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $t_0$ และให้ $g$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $s_0$, $g(s_0) = t_0$ แล้ว

a) $(\mathbf{F}+\mathbf{G})'(t_0) = \mathbf{F}'(t_0) + \mathbf{G}'(t_0)$

b) $(\mathbf{F}-\mathbf{G})'(t_0) = \mathbf{F}'(t_0) - \mathbf{G}'(t_0)$

c) $(f\,\mathbf{F})'(t_0) = f'(t_0)\mathbf{F}(t_0) + f(t_0)\mathbf{F}'(t_0)$

d) $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})'(t_0) = \mathbf{F}'(t_0)\cdot\mathbf{G}(t_0) + \mathbf{F}(t_0)\cdot\mathbf{G}'(t_0)$

e) $(\mathbf{F}\times\mathbf{G})'(t_0) = \mathbf{F}'(t_0)\times\mathbf{G}(t_0) + \mathbf{F}(t_0)\times\mathbf{G}'(t_0)$

f) $(\mathbf{F}\circ g)'(s_0) = \mathbf{F}'(g(s_0))g'(s_0) = \mathbf{F}'(t_0)g'(s_0)$

<u>ตัวอย่างที่ 3.17</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = \tan^{-1}t\,\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ และ $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k}$ จงหา $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})'(t)$

<u>วิธีทำ</u> วิธีแรก คือ คำนวณ $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ และหาอนุพันธ์

เราพบว่า $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t) = \tan^{-1}t - 10t$ และ

สรุปว่า $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})'(t) = \dfrac{1}{t^2+1} - 10$

สำหรับวิธีที่ 2

$$\mathbf{F}'(t) = \frac{1}{t^2+1}\mathbf{i} \text{ และ } \mathbf{G}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

จากทฤษฎีบทที่ 3.21(d)

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})'(t) &= \mathbf{F}'(t)\cdot\mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}'(t)\\ &= \left(\frac{1}{t^2+1}\mathbf{i}\right)\cdot(\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k}) + (\tan^{-1}t\,\mathbf{i} + 5\mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{t}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\right)\\ &= \frac{1}{t^2+1} - 10\end{aligned}$$

□

**ปริพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์**

เนื่องจากเรากำหนดฟังก์ชันเวกเตอร์ F ด้วยฟังก์ชันส่วนประกอบ เราจึงนิยามปริพันธ์ของ F ในรูปปริพันธ์ของฟังก์ชันส่วนประกอบ

<u>นิยาม 3.22</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ เมื่อ $f_1$ , $f_2$ และ $f_3$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] แล้วปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt$ และ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตนิยามด้วย

$$\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b f_2(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b f_3(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

และ $$\int \mathbf{F}(t)\,dt = \left(\int F(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int F(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int F(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.18</u> ให้ $\mathbf{F}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}$ จงหา $\int \mathbf{F}(t)\,dt$ และ $\int_0^{\pi} \mathbf{F}(t)\,dt$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\int \mathbf{F}(t)\,dt &= \left(\int t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int t^2\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int \sin t\,dt\right)\mathbf{k}\\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 + C_1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{3}t^3 + C_2\right)\mathbf{j} + (-\cos t + C_3)\mathbf{k}\\ &= \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{j} - \cos t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^{\pi} F(t)\,dt = (\frac{1}{2}t^2 \Big|_0^{\pi})\mathbf{i} + (\frac{1}{3}t^3 \Big|_0^{\pi})\mathbf{j} - (\cos t \,\Big|_0^{\pi})\mathbf{k}$

$$= \frac{1}{2}\pi^2\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}\pi^3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k} \qquad \square$$

### 3.1.5 เส้นโค้ง เส้นสัมผัส ความยาวส่วนโค้ง

**<u>นิยาม 3.23</u> เส้นโค้งสามมิติ คือ เรนจ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์จำนวนจริง**

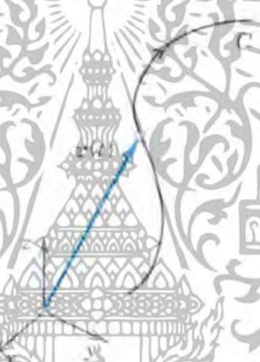
**ฟังก์ชันเวกเตอร์ที่เราเคยพบมาล้วนเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีเรนจ์เป็นเส้นโค้ง เช่น จุดใดๆ, เส้น, ส่วนของเส้นตรง, วงกลม, พาราโบลา ฯลฯ โดยเราแทนเส้นโค้งด้วย $C$ และใช้ $\mathbf{r}$ แทนฟังก์ชันเวกเตอร์ที่มีเรนจ์เป็นเส้นโค้ง $C$ ดังรูป 3.19 ดังนั้นเราจึงเรียก $\mathbf{r}$ เป็นตัวแทนอิงพารามิเตอร์ของ $C$ เช่น เส้นโค้ง $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$**

**เรามักจะแทนฟังก์ชันส่วนประกอบของฟังก์ชันเวกเตอร์ด้วย $x, y, z$ ดังนั้น**

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{3.30}$$

**ซึ่ง**สมนัยกับสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$




**รูปที่ 3.19 รูปแบบตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง**

**<u>นิยาม 3.24</u>**

a) ฟังก์ชันเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ที่นิยามบนช่วง $I$ เป็นฟังก์ชันเรียบ ถ้า $\mathbf{r}$ มีอนุพันธ์ ต่อเนื่องบนช่วง $I$ และ $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ สำหรับทุกจุดภายใน $I$ และเส้นโค้ง $C$ เป็นเส้นโค้งเรียบถ้าตัวแทนอิงพารามิเตอร์เรียบ

b) **ฟังก์ชันเวกเตอร์ที่ต่อเนื่อง $\mathbf{r}$ ที่นิยามบนช่วง $I$ ที่มีช่วงย่อยจำนวนจำกัดบน $\mathbf{r}$ ที่เรียบ และถ้า $\mathbf{r}$ มีอนุพันธ์ด้านเดียวที่แต่ละจุดภายในช่วง $I$ เส้นโค้ง C จะเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วงถ้าตัวแทนอิงพารามิเตอร์เรียบเป็นช่วง**

<u>ตัวอย่างที่ 3.19</u> จงแสดงว่าวงกลมหนึ่งหน่วย **r** เป็นเส้นโค้งเรียบ

<u>วิธีทำ</u> กำหนดตัวแทนอิงพารามิเตอร์ของวงกลมด้วย

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} \qquad \text{สำหรับ } 0 \le t \le 2\pi$$

ฟังก์ชัน **r** สามารถหาอนุพันธ์ได้ในช่วง $[0, 2\pi]$ และ

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \qquad \text{สำหรับ } 0 \le t \le 2\pi$$

ดังนั้น $\mathbf{r}'(t)$ ต่อเนื่องในช่วง $[0, 2\pi]$ และ

$$\| \mathbf{r}'(t) \| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

สรุปว่า $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ สำหรับแต่ละ $t$ ใน $[0, 2\pi]$

ดังนั้น วงกลมเป็นเส้นโค้งเรียบ □

**ประเภทของเส้นโค้ง**

<u>ตัวอย่างที่ 3.20</u> เส้นตรง

เส้นตรง $L$ ที่ผ่านจุด $A$ (ที่มีเวกเตอร์ตำแหน่ง **a** ) ที่อยู่ในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ **b** ดังรูป 3.20 มีตัวแทนอิงพารามิเตอร์

**รูปที่ 3.20 พารามิไทรเซชันของเส้นตรง**

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (a_1 + tb_1)\mathbf{i} + (a_1 + tb_1)\mathbf{j} + (a_1 + tb_1)\mathbf{k} \tag{3.31}$$

ถ้า **b** เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย แล้วส่วนประกอบของเวกเตอร์ คือ โคไซน์แสดงทิศทางของ $L$

ในที่นี้ $\| \mathbf{r} \|$ คือระยะทางจากจุด $L$ ถึง $A$ เช่น เส้นตรงในระนาบ $xy$ ที่ผ่านจุด $A : (3, 2)$ มีความชันเท่ากับหนึ่ง คือ

$$\mathbf{r}(t) = (3, 2, 0) + t(1, 1, 0) = (3 + t, 2 + t, 0)$$

สมมติให้ $(x_0, y_0, z_0)$ และ $(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดในปริภูมิที่แตกต่างกันแล้วจะได้สมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \quad z = z_0 + (z_1 - z_0)t$$

เนื่องจาก $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)$ สำหรับ $t=0$ และ $(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)$ สำหรับ $t=1$ ดังนั้นตัวแทนอิงพารามิเตอร์ของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $(x_0,y_0,z_0)$ และ $(x_1,y_1,z_1)$ คือ

$$\mathbf{r}(t)=[x_0+(x_1-x_0)t]\mathbf{i} + [y_0+(y_1-y_0)t]\mathbf{j} + [z_0+(z_1-z_0)t]\mathbf{k} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.21</u> วงกลม, วงรี

เวกเตอร์ฟังก์ชัน

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j} \tag{3.32}$$

แทนวงรีในระนาบ $xy$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และเนื่องจาก

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ จะได้

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , z=0$$

ถ้า $b=a$ แล้ว สมการ(3.32) จะเป็นตัวแทนอิงพารามิเตอร์ของวงกลม ที่มีรัศมี $a$ $\square$

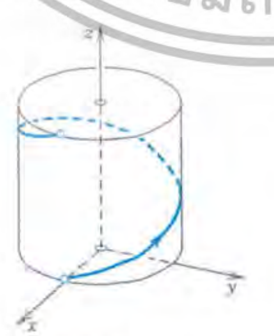
เส้นโค้งบนระนาบ คือ เส้นโค้งที่วางตัวบนระนาบในปริภูมิ และเส้นโค้งที่ไม่วางตัวอยู่บนระนาบ เราเรียกว่าเส้นโค้งบิด

<u>ตัวอย่างที่ 3.22</u> ฮีลิกซ์กลม

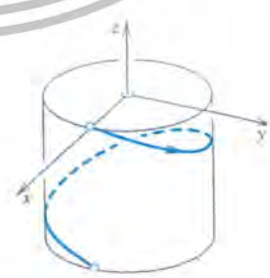
เส้นโค้งปิดที่แทนด้วยตัวแทนอิงพารามิเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k} \quad (c \neq 0) \tag{3.33}$$

เรียกว่าฮีลิกซ์กลม ซึ่งเป็นเส้นโค้งที่วางตัวอยู่ในทรงกระบอก ดังรูป 3.21




(a) c > 0




(b) c < 0

รูปที่ 3.21 ฮีลิกซ์กลม

$\square$

**เส้นโค้งปกติ** คือเส้นโค้งที่ไม่มีจุดซ้ำ หมายความว่า ไม่มีจุดใดบนเส้นโค้งที่ตัดกันหรือสัมผัสกัน ดังรูป **3.22** แสดงเส้นโค้งที่ไม่ใช่เส้นโค้งปกติ

**ส่วนโค้ง** คือ สันโค้งส่วนหนึ่งที่อยู่ระหว่างสองจุดบนเส้นโค้ง $C$

**รูปที่ 3.22 เส้นโค้งที่มีจุดตัด**

**รูปแบบอิสระของตัวแทนอิงพารามิเตอร์**

ทุกเส้นโค้งสามารถมีตัวแทนอิงพารามิเตอร์ได้หลายรูปแบบ เช่น ส่วนของเส้นตรงจากจุด $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ ไปยัง (1, 1, 1) มีตัวแทนอิงพารามิเตอร์

$$\mathbf{r}_1(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \qquad \frac{1}{4} \le t \le 1$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (t-2)\mathbf{i} + (t-2)\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k} \quad \frac{9}{4} \le t \le 3$$

$$\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \qquad \frac{1}{2} \le t \le 1$$

ถ้าคำนวณขนาดของส่วนของเส้นตรงจาก $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ เท่ากันแล้ว เรากล่าวว่าขนาดของเส้น โค้งเป็นอิสระจากตัวแทนอิงพารามิเตอร์

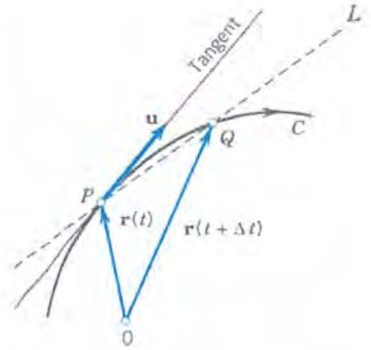
เส้นสัมผัสและเส้นปกติของกราฟฟังก์ชันจำนวนจริง $f$ นิยามจากอนุพันธ์ของ $f$ ดังนั้นเราจึงใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์สร้างนิยามสำหรับเส้นสัมผัสและเส้นปกติของเส้นโค้งในปริภูมิซึ่งเส้นสัมผัสและเส้นปกติที่ได้เป็นรูปเวกเตอร์มากกว่า

**เส้นสัมผัสเส้นโค้ง**

<u>นิยาม 3.25</u> ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งเรียบและ $\mathbf{r}$ เป็นตัวแทนอิงพารามิเตอร์ (เรียบ)ของ C ที่นิยามบนช่วง $I$ แล้วสำหรับจุดภายใน $t$ ใดๆ ของ $I$ เวกเตอร์สัมผัสที่จุด $\mathbf{r}(t)$ นิยามโดย

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|} \tag{3.34}$$

และเนื่องจาก $\mathbf{T}(t)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย บางครั้งจึงเรียกว่า เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย ดังรูป 3.23




**รูปที่ 3.23 เวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้ง**

<u>ตัวอย่างที่ 3.23</u> จงพิจารณาวงกลมรัศมี r ที่มีตัวแทนอิงพารามิเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = r\cos t\,\mathbf{i} + r\sin t\,\mathbf{j} \text{ ในช่วง } 0 \le t \le 2\pi$$

จงหาสูตรเวกเตอร์สัมผัส $\mathbf{T}(t)$ และคำนวณหา $\mathbf{T}(\pi/3)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\mathbf{r}'(t) = -r\sin t\,\mathbf{i} + r\cos t\,\mathbf{j}$

จะได้ $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r$

ดังนั้น จากสมการ (3.34) จะได้

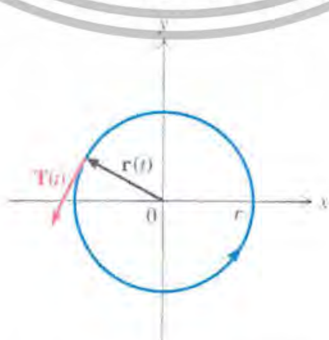
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

และ $\mathbf{T}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ □

สำหรับฟังก์ชันตำแหน่ง r(t) ในตัวอย่างที่ 3.23

$$\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = (-\sin t)(r\cos t) + (\cos t)(r\sin t) = 0 \text{ สำหรับทุก } t$$

หมายความว่า เวกเตอร์สัมผัสตั้งฉากกับเวกเตอร์ตำแหน่งสำหรับทุก $t$ ดังรูป 3.24




**รูปที่ 3.24 เวกเตอร์สัมผัสตั้งฉากกับเวกเตอร์ตำแหน่ง**

**เส้นปกติของเส้นโค้ง**

ในการนิยามเวกเตอร์ปกติของเส้นโค้งในปริภูมิที่จุดใดๆบนเส้นโค้งเรากำหนดให้ตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัส แต่เนื่องจากมีเวกเตอร์จำนวนมากที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์หนึ่งๆ เราจึงต้องหาวิธีเลือกเวกเตอร์หนึ่งจากทั้งหมด

**นิยาม 3.26** ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งเรียบ และให้ $\mathbf{r}$ เป็นตัวแทนอิงพารามิเตอร์ (เรียบ)ของ $C$ ที่นิยามบนช่วง $I$ โดยที่ $\mathbf{r}'$ เป็นอนุพันธ์เรียบแล้ว สำหรับจุด $t$ ใดๆภายใน $I$ ที่ทำให้ $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ เวกเตอร์ปกติ $\mathbf{N}(t)$ ที่จุด $\mathbf{r}(t)$ นิยามโดย

$$\mathrm{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{T}/dt\|} \tag{3.35}$$

และเนื่องจาก $\mathrm{N}(t)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย บางครั้งจึงเรียกว่า เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย

**ตัวอย่างที่ 3.24** จงหาสูตร $\mathrm{N}(t)$ ของวงกลม

$$\mathbf{r}(t) = r\cos t\,\mathbf{i} + r\sin t\,\mathbf{j}$$

**วิธีทำ** จากตัวอย่างที่ 3.22

$$\mathbf{T}(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

ดังนั้น $\mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$

เนื่องจาก $\|\mathbf{T}'(t)\| = 1$ ในช่วง $0 \le t \le 2\pi$

ดังนั้นจากสมการ (3.35)

$$\mathrm{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} = -\frac{1}{r}\mathbf{r}(t)$$ □

**เวกเตอร์แนวฉากรองคู่ของเส้นโค้ง**

ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งที่กำหนดด้วยตัวแทนอิงพารามิเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ สำหรับ $t$ ที่อยู่ในช่วง $I$ ระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์ปกติ $\mathbf{T}$ และ $\mathbf{N}$ เรียกว่า ระนาบสัมผัสประชิด

นอกเหนือจากเวกเตอร์ $\mathbf{T}$ และ $\mathbf{N}$ แล้วยังมีเวกเตอร์ $\mathbf{B}$ ซึ่ง

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \tag{3.26}$$

เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{T}$ และ $\mathbf{N}$ และเนื่องจาก $\mathbf{T}$ และ $\mathbf{N}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจึงได้ว่า $\mathbf{B}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยด้วย เวกเตอร์นี้เรียกว่า เวกเตอร์แนวฉากรองคู่

**ความยาวของเส้นโค้ง**

เราเริ่มจากการหาความยาวของเส้นโค้งที่มีรูปแบบง่ายที่สุด คือ ให้ $C$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด$(x_0, y_0, z_0)$ และ $(x_1, y_1, z_1)$ ในปริภูมิ ดังรูป 3.25 แล้ว เรานิยามความยาว $L$ ของเส้นโค้ง $C$ ด้วยระยะทางระหว่างจุด 2 จุดตามสูตรการหาระยะทาง


**รูปที่ 3.25 ความยาวของเส้นโค้ง**

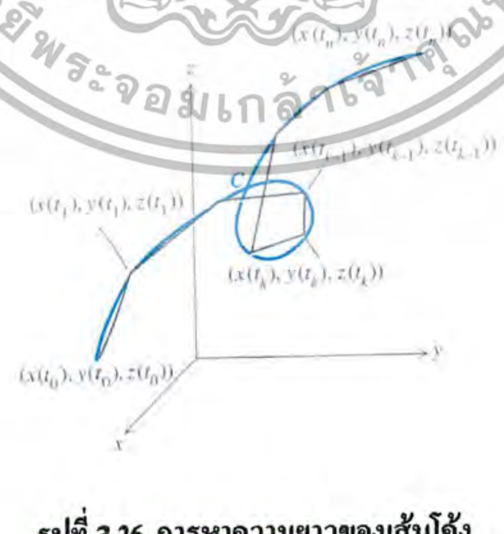
ดังนั้น

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

ต่อไปให้ $C$ เป็นเส้นโค้งเรียบ และ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad \text{สำหรับ } a \le t \le b$$

เป็นตัวแทนอิงพารามิเตอร์ของ $C$ ให้ $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$ และพิจารณาเส้นโค้งหลายเหลี่ยม ดังรูป 3.26




**รูปที่ 3.26 การหาความยาวของเส้นโค้ง**

เรากำหนดให้ความยาวของของเส้นโค้ง $C$ ที่ $k$ ด้วย $\Delta L_k$ ถ้า $\Delta t_k$ มีค่าน้อยๆ แล้ว $\Delta L_k$ จะมีค่าประมาณเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรง หรืออีกนัยก็คือ

$$\Delta L_k \approx \sqrt{[x(t_k)-x(t_{k-1})]^2+[y(t_k)-y(t_{k-1})]^2+[z(t_k)-z(t_{k-1})]^2}$$

จากทฤษฎีค่าเฉลี่ยจะมี $u_x, v_x$ และ $w_z$ ในช่วง $[t_{k-1}, t_k]$ ที่ทำให้

$$x(t_k)-x(t_{k-1}) = x'(u_x)\Delta t_k,\ y(t_k)-y(t_{k-1}) = y'(v_x)\Delta t_k,\ z(t_k)-z(t_{k-1}) = z'(w_x)\Delta t_k$$

โดยที่ $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

ดังนั้น
$$\Delta L_k \approx \sqrt{[x'(u_k)]^2(\Delta t_k)^2+[y'(v_k)]^2(\Delta t_k)^2+[z'(w_k)]^2(\Delta t_k)^2}$$
$$\approx \sqrt{[x'(u_k)]^2+[y'(v_k)]^2+[z'(w_k)]^2}\ \Delta t_k$$

ดังนั้น ผลรวมความยาว L ของ C หาจากผลรวมของ $\Delta L_1, \Delta L_2, \ldots, \Delta L_n$ ซึ่งมีค่าประมาณ

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(u_k)]^2+[y'(v_k)]^2+[z'(w_k)]^2}\ \Delta t_k$$

เนื่องจาก

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(u_k)]^2+[y'(v_k)]^2+[z'(w_k)]^2} = \int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\ dt$$

และเนื่องจาก $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2} = \|\mathbf{r}'(t)\|$

จึงได้ว่า $L$ มีค่าประมาณ $\int_a^b\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.27</u> ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งที่มีตัวแทนอิงพารามิเตอร์เรียบเป็นช่วง $\mathbf{r}$ ที่นิยามบนช่วง $[a, b]$ แล้ว ความยาว $L$ ของ $C$ นิยามโดย

$$L = \int_a^b\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_a^b\|d\mathbf{r}/dt\|\,dt \tag{3.37}$$

ถ้า $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ ในช่วง $a\le t\le b$ จะได้ว่า

$$L = \int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\ dt$$
$$= \int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt \tag{3.38}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.25</u> จงหาความยาว $L$ ของเส้นโค้งฮีลิกซ์กลม

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k} \text{ สำหรับ } 0\le t\le 2\pi$$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.37) จะได้

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+t^2}\ dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt$$
$$= 2\sqrt{2}\pi$$

□

**ฟังก์ชันความยาวส่วนโค้ง**

ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งเรียบที่มีตัวแทนอิงพารามิเตอร์บนช่วง $I$ โดย

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \text{ สำหรับ } t \text{ ที่อยู่ใน } I$$

และให้ $a$ เป็นเลขจำนวนใน $I$ แล้วฟังก์ชันความยาวส่วนโค้ง $s$ คือ

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\|\, du = \int_0^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}\, du \text{ สำหรับ } t \text{ ใน } I \tag{3.39}$$

ถ้า $t \geq a$ แล้ว $s(t)$ คือความยาวส่วนโค้งระหว่าง $\mathbf{r}(a)$ กับ $\mathbf{r}(t)$ ดังรูป 3.27


**รูปที่ 3.27 ฟังก์ชันความยาวส่วนโค้ง**

และถ้า $\mathbf{r}(t)$ แทนตำแหน่งวัตถุที่เวลา $t \geq a$ แล้ว $s(t)$ คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ผ่านระหว่างเวลา $a$ และ $t$

ถ้าหาอนุพันธ์ของนิพจน์ในสมการ (3.39) เทียบ $t$ จะได้

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

หรือ
$$\frac{ds}{dt} = \|d\mathbf{r}/dt\| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} \tag{3.40}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.26</u> ให้ $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ จงหา $ds/dt$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} \\ &= \sqrt{1 + (2t)^2 + (3t^2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\end{aligned}$$
□

**3.1.6 เส้นโค้งในระบบเชิงกล**

ขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ในปริภูมิ พิกัด $x, y, z$ คือตำแหน่งฟังก์ชันของเส้นโค้ง $C$ ที่แทนด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม $\mathbf{r}(t)$ เมื่อ $t$ คือ เวลา

สมมติว่าฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับแรกได้แล้ว

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

ความเร็ว $$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (3.41)$$

อัตราเร็ว $$\| \mathbf{v}(t) \| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} \qquad (3.42)$$

ความเร่ง $$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \qquad (3.43)$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.27</u> จากตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\sin\omega t\,\mathbf{j} \qquad (\omega > 0)$$

ของวงกลม $C$ รัศมี $R$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระนาบ $xy$ และอธิบายการเคลื่อนที่ของ $P$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา จะได้

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}' = -R\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + R\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

(ดังรูป 3.28) คือเวกเตอร์สัมผัสของ $C$ ที่มีอัตราเร็ว

$\| \mathbf{v} \| = R\omega$ เป็นค่าคงที่


**รูปที่ 3.28 แรงสู่ศูนย์กลาง**

อัตราเร็วเชิงมุม คืออัตราเร็วที่หารด้วยระยะทาง $R$ มีค่าเท่ากับ $\omega$ แล้ว

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = -R\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - R\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}$$

จะเห็นว่ามีความเร่งที่มีขนาดคงที่ $\| \mathbf{a} \| = \omega^2 \| \mathbf{r} \| = R\omega^2$ พุ่งตรงไปยังจุดศูนย์กลาง เราเรียก **a** ว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลางแรงสู่ศูนย์กลางเท่ากับ **ma** โดยที่ **m** คือมวลน้ำหนัก 0 ปอนด์ เรียกเวกเตอร์ **–ma** ว่า แรงหนีศูนย์กลาง □

**ส่วนประกอบสัมผัสและส่วนประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร่ง**

เนื่องจากเวกเตอร์สัมผัส **T** และเวกเตอร์ปกติ **N** ที่จุดใดๆ บนเส้นโค้งเรียบ $C$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน จากบทที่ 3.1.2 แรงลัพธ์ของเวกเตอร์ **b** ในระนาบที่คำนวณจาก **T** และ **N** สามารถแสดงได้ในรูป

$$\mathbf{b} = b_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + b_{\mathrm{N}}\mathbf{N}$$

(ดังรูป 3.29) เราเรียก $b_{\mathrm{T}}$ และ $b_{\mathrm{N}}$ ว่า ส่วนประกอบสัมผัส และส่วนประกอบปกติของเวกเตอร์ **b** ต่อไปเราจะแสดงว่าเวกเตอร์ความเร็วและความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ตามเส้นโค้ง C ซึ่งวางตัวอยู่บนระนาบคำนวณจากเวกเตอร์ **T** และ **N** และหาส่วนประกอบสัมผัสและส่วนประกอบปกติของมัน


รูปที่ 3.29 เวกเตอร์ปกติและเวกเตอร์สัมผัสของเวกเตอร์ความเร่ง

พิจารณาความเร็ว **v** เรากำหนดให้ **r** แทนตำแหน่งของวัตถุและสมมติว่ามีเวกเตอร์ **T** และ **N** แล้วจากสมการ $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{d\mathbf{r}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|}$ จะได้

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| \mathbf{T} = \| \mathbf{v} \| \mathbf{T} \tag{3.44}$$

เนื่องจาก $d\mathbf{T}/dt = \| d\mathbf{T}/dt \| \mathbf{N}$ ดังนั้น

$$\mathbf{a} = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt}\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\| \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| \mathbf{N}$$

ดังนั้น $$\mathbf{a} = a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N} \tag{3.45}$$

โดยที่ $$a_{\mathrm{T}} = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} \quad \text{และ} \quad a_{\mathrm{N}} = \|\mathbf{v}\| \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| \tag{3.46}$$

$a_{\mathbf{T}}$ และ $a_{\mathbf{N}}$ คือส่วนประกอบสัมผัสและส่วนประกอบปกติของความเร่ง เนื่องจาก **T** และ **N** เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้นจากสมการ (3.44) เราสรุปว่า

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = (a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N})\cdot(a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}) = a_{\mathbf{T}}^2\|\mathbf{T}\|^2 + a_{\mathbf{N}}^2\|\mathbf{N}\|^2 = a_{\mathbf{T}}^2 + a_{\mathbf{N}}^2$$

จึงได้ว่าสามารถคำนวณ $a_{\mathbf{N}}$ ได้จาก **a** และ $a_{\mathbf{T}}$

$$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$$

รูปแบบที่ง่ายต่อการใช้คือ

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} \text{ และ } a_{\mathbf{N}} = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.28</u> ให้ $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

จงหาส่วนประกอบสัมผัสและส่วนประกอบปกติของความเร่ง

<u>วิธีทำ</u> เมื่อหาอนุพันธ์ของ **r** จะได้

$$\mathbf{v} = 2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$$

และ $$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(2t)^2 + 1 + (2t)^2} = \sqrt{8t^2 + 1}$$

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} = \frac{8t}{\sqrt{8t^2 + 1}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

ดังนั้น $$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = \sqrt{8 - \frac{64t^2}{8t^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8t^2 + 1}}$$ □

### 3.1.7 ความโค้งและความบิดของเส้นโค้ง

**ความโค้ง**

ความโค้ง κ(s) ของเส้นโค้ง $C$ ซึ่งแทนด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม $\mathbf{r}(s)$ ที่มีฟังก์ชันความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม นิยามโดย

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\| \tag{3.47}$$

ในที่นี้ $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง $C$ และสมมติว่า $\mathbf{r}(s)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับสอง $\mathbf{r}''(s)$ ได้

$\kappa$ เป็นขนาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยที่มี $s$ เป็นพารามิเตอร์ ดังนั้นในแต่ละจุดบนเส้นโค้ง ค่า $\kappa$ จะเป็นค่าที่วัดความเบี่ยงเบนของเส้นโค้ง $C$ จากเวกเตอร์สัมผัส สำหรับสูตรของความโค้ง $\kappa$ ที่มีพารามิเตอร์ทั่วไปเป็น $t$ จะมีความซับซ้อนมากขึ้น

จากกฎลูกโซ่ $\qquad \dfrac{d\mathbf{T}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$

มาจาก $\qquad \dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \dfrac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|}$

<u>นิยาม 3.28</u> ให้ $\mathbf{r}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของ $C$ โดยที่หาอนุพันธ์ $\mathbf{r}'$ ได้ แล้วความโค้ง $\kappa$ ของ $C$ นิยามโดย

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|d\mathbf{T}/dt\|}{\|d\mathbf{r}/dt\|} \tag{3.48}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.29</u> จงแสดงว่า ความโค้ง $\kappa$ ของวงกลมรัศมี $r$ คือ $1/r$

<u>วิธีทำ</u>

**รูปที่ 3.30 วงกลมรัศมี $r$ และมีความโค้งคงที่ $1/r$**

ถ้าศูนย์กลางของวงกลม คือ $(x_0, y_0)$ แล้วตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของวงกลม คือ

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + r\cos t)\,\mathbf{i} + (y_0 + r\sin t)\,\mathbf{j}$$

แล้ว $\quad \mathbf{r}'(t) = -r\sin t\,\mathbf{i} + r\cos t\,\mathbf{j}$

$\qquad \|\mathbf{r}'(t)\| = r$ และ $\mathbf{T}(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$

ดังนั้น $\mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$ และตามสมการ (3.47)

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\mathbf{r}}\| -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}\,\| = \frac{1}{\mathbf{r}} \text{(ดังรูป 3.30)} \qquad \square$$

**จากตัวอย่างที่ 3.29 จะเห็นว่ายิ่งวงกลมมีรัศมีมากเท่าใดความโค้งของวงกลมจะยิ่งมีค่าน้อยลง และความโค้งของวงกลมที่มีรัศมี $r$ คือ $1/r$ ดังนั้นนิยามของรัศมีความโค้ง $\rho(t)$ ของเส้นโค้ง $C$ ที่จุด $P$ คือ**

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

**ดังนั้นรัศมีความโค้งของวงกลมก็คือค่ารัศมีของวงกลม**

**สูตรอื่นสำหรับการหาความโค้ง**

จากการแยกเวกเตอร์ความเร็วและความเร่งให้อยู่ในรูปส่วนประกอบสัมผัสและส่วนประกอบปกติ เราจะได้สูตรความโค้งสำหรับการคำนวณที่ง่ายกว่าสมการ (3.48)

ให้ $\mathbf{r}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง $C$ ที่มีเวกเตอร์สัมผัส $\mathbf{T}$ และเวกเตอร์ปกติ $\mathbf{N}$

จาก $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|\mathbf{T} = \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{T}$ และ

$$\mathbf{a} = a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N}$$

แล้ว เนื่องจาก $\mathbf{T}\times\mathbf{T} = \mathbf{0}$ จะพบว่า

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\times\mathbf{a} &= (\|\mathbf{v}\|\mathbf{T})\times(a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N}) \\ &= [(\|\mathbf{v}\|\mathbf{T})\times(a_{\mathrm{T}}\mathbf{T})] + [(\|\mathbf{v}\|\mathbf{T})\times(a_{\mathrm{N}}\mathbf{N})] \\ &= (\|\mathbf{v}\|a_{\mathrm{N}})(\mathbf{T}\times\mathbf{N}) \end{aligned} \tag{3.49}$$

เนื่องจาก $a_{\mathrm{N}} = \|\mathbf{v}\|d\mathbf{T}/dt$ และเนื่องจาก $\mathbf{T}$ และ $\mathrm{N}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

จากสมการ (3.48) จะได้ $\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\| = \|\mathbf{v}\|\,a_{\mathrm{N}} = \|\mathbf{v}\|^2\left\|\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}\right\|$

$$\kappa = \frac{\|d\mathbf{T}/dt\|}{\|d\mathbf{r}/dt\|} = \frac{\|d\mathbf{T}/dt\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} \tag{3.50}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.30</u> จงหาความโค้งของเส้นโค้ง $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

<u>วิธีทำ</u> เราได้ $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = t^2\mathbf{i} + \sqrt{2}\,t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = t^2 + 1$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2t\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$$

$$\text{ดังนั้น } \mathbf{v}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & \sqrt{2}t & 1 \\ 2t & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - \sqrt{2}\,t^2\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (2t)^2 + (-\sqrt{2}t^2)^2}$$

$$= \sqrt{2+4t^2+2t^4} = \sqrt{2}\,(t^2+1)$$

จากสมการ (3.49)

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\sqrt{2}(t^2+1)}{(t^2+1)^3} = \frac{\sqrt{2}}{(t^2+1)^2}$$ □

เมื่อ **r** แทนการเคลื่อนที่ของวัตถุบนเส้นโค้งในระนาบ xy เราจะได้

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

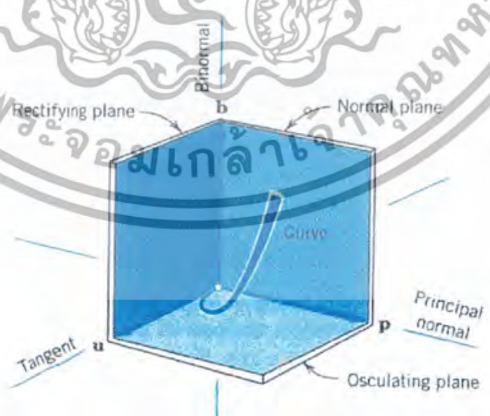
$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt}\mathbf{j} = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

จากสูตรผลคูณเชิงเวกเตอร์ในสมการที่ 3.50 จะได้สูตร

$$\kappa = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}$$

ถ้า $x = t$ (โดยที่ $y$ คือ ฟังก์ชันของ $x$) แล้ว

$$\kappa = \frac{|y''(t)|}{[1+(y'(t))^2]^{3/2}}$$




**รูปที่ 3.31 Trihedron**

**จากรูป 3.31** แสดงเส้นโค้ง 3 ระนาบที่ค่า $\kappa \neq 0$ ($\kappa > 0$) โดยทั้ง 3 ระนาบมีค่าบวกที่ประกอบด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ได้แก่

เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\mathbf{T} = \mathbf{r}'$ (3.51)

เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\|\mathbf{T}'\|}\mathbf{T}'$ $(\kappa > 0)$ (3.52)

เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ $(\kappa > 0)$ (3.53)

**N เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเพราะว่า $\|\mathbf{T}'\| = \kappa$ ตามสมการที่ (3.51) และตั้งฉากกับ T เพราะว่า $\|\mathbf{T}\|^2 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ นั่นคือ $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}' = 0$ เวกเตอร์ ตั้งฉากกับ T และ N ตามนิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ ซึ่งได้ $\|\mathbf{B}\| = 1$**

**ความบิด**

**ความบิดของเส้นโค้ง $\tau(s)$ ใช้วัดการเบี่ยงเบนของเส้นโค้ง $C$ จากระนาบสัมผัสประชิด นิยามโดย**

$$\tau(s) = -\mathbf{N}(s)\cdot\mathbf{B}'(s) \tag{3.54}$$

**<u>ตัวอย่างที่ 3.31</u> ฮีลิกซ์วงกลม**

**จงหาความโค้ง $\kappa(s)$ และความบิด $\tau(s)$ ของเส้นโค้งที่มีพารามิเตอร์ $s = t\sqrt{a^2+c^2}$**

$$\mathbf{r}(s) = a\cos\frac{s}{k}\mathbf{i} + a\sin\frac{s}{k}\mathbf{j} + c\frac{s}{k}\mathbf{k} \quad \text{เมื่อ } k = \sqrt{a^2+c^2}$$

**<u>วิธีทำ</u>** จาก $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) = -\dfrac{a}{k}\sin\dfrac{s}{k}\mathbf{i} + \dfrac{a}{k}\cos\dfrac{s}{k}\mathbf{j} + \dfrac{c}{k}\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{a}{k^2}\cos\frac{s}{k}\mathbf{i} - \frac{a}{k^2}\sin\frac{s}{k}\mathbf{j}$$

$$\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| = \sqrt{\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}''} = \frac{a}{k^2} = \frac{a}{a^2+c^2}$$

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{r}''(s) = -\cos\frac{s}{k}\mathbf{i} - \sin\frac{s}{k}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s)\times\mathbf{N}(s) = \frac{c}{k}\sin\frac{s}{k}\mathbf{i} - \frac{c}{k}\cos\frac{s}{k}\mathbf{j} + \frac{a}{k}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}'(s) = \frac{c}{k^2}\cos\frac{s}{k}\mathbf{i} + \frac{c}{k^2}\sin\frac{s}{k}\mathbf{j}$$

$$\tau(s) = -\mathbf{N}(s)\cdot\mathbf{B}'(s) = \frac{c}{k^2} = \frac{c}{a^2+c^2}$$

□

**เนื่องจาก T, N และ B เป็นเวกเตอร์อิสระเชิงเส้น จึงอาจเขียนเวกเตอร์ใดๆในปริภูมิให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์เหล่านี้ได้ ดังนั้นถ้า $\mathbf{T}'$, $\mathbf{N}'$ และ $\mathbf{B}'$ หาค่าได้ จะได้สูตรฟรังเนต์**

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \phantom{-\kappa\mathbf{T}}\ \kappa\mathbf{T} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa\mathbf{T} \quad + \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \phantom{-\kappa\mathbf{T}}\ -\tau\mathbf{N}\end{aligned} \tag{3.55}$$

### 3.1.8 ฟังก์ชันหลายตัวแปร

เราเรียกฟังก์ชันหลายตัวแปรว่าเป็นฟังก์ชันสองตัวแปรถ้าเซตของโดเมนเป็นจุดในระนาบ ($R^2$) และเป็นฟังก์ชันสามตัวแปรถ้าโดเมนเป็นเซตของจุดในปริภูมิ($R^3$) แต่ถ้าโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงเราจะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

เราจะแทนฟังก์ชันหลายตัวแปรด้วย $f$ หรือ $g$ ซึ่ง $f(x,y)$ แทนค่าของฟังก์ชัน $f$ ที่จุด $(x,y)$ และ $f(x,y,z)$ แทนค่าของฟังก์ชัน $f$ ที่จุด $(x,y,z)$

**การดำเนินการของฟังก์ชันหลายตัวแปร**

สำหรับ ผลบวก ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชันสองตัวแปร $f$ และ $g$ จะได้

$$(f+g)(x,y) = f(x,y)+g(x,y)$$

$$(f-g)(x,y) = f(x,y)+g(x,y)$$

$$(fg)(x,y) = f(x,y)g(x,y)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

ส่วนฟังก์ชันสามตัวแปรก็ได้สูตรในทำนองเดียวกัน ซึ่งโดเมนของ $f+g, f-g$ และ $fg$ ประกอบด้วยจุดที่อยู่ในโดเมนของของ $f$ และ $g$ ในขณะที่โดเมนของ $f/g$ ประกอบด้วยจุดที่อยู่ในโดเมนของของ $f$ และ $g$ และโดเมนของ $g$ ที่ไม่ทำให้ฟังก์ชัน $g$ เป็นศูนย์

ถ้า

$$F(x,y) = axy + \frac{by}{x}$$

แล้ว $F$ อาจจะเป็นผลบวกของฟังก์ชัน $f$ และ $g$ โดยที่

$$f(x,y) = axy \text{ และ } g(x,y) = \frac{by}{x}$$

ในบางครั้ง ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรแล้วฟังก์ชัน $g \circ f$ นิยามโดย

$$g \circ f(x,y) = g(f(x,y))$$

สำหรับทุก $(x,y)$ ในโดเมนของ $f$ โดยที่ $f(x,y)$ อยู่ในโดเมนของ $g$ ส่วนนิยามของฟังก์ชันส่วนประกอบของฟังก์ชันสามตัวแปรและฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรก็มีรูปแบบคล้ายกัน

<u>ตัวอย่างที่ 3.32</u> ให้ $\mathbf{F}(x,y) = \sqrt{\ln(4-x^2-y^2)}$ จงหาฟังก์ชัน $f$ ของสองตัวแปรและฟังก์ชัน $g$ ของหนึ่งตัวแปรโดยที่ $F = f \circ g$ และจงหาโดเมนของ $F$

<u>วิธีทำ</u> ในการแสดงว่า $F$ เป็นฟังก์ชันประกอบมีหลายวิธีแต่ที่ง่ายที่สุดคือให้

$$f(x,y) = \ln(4-x^2-y^2) \text{ และ } g(t) = \sqrt{t}$$

โดเมนของ $f$ ประกอบด้วยจุด $(x,y)$ ซึ่ง $4-x^2-y^2>0$ และโดเมนของ $g$ ประกอบด้วยจำนวนบวกทุกจำนวน ดังนั้นโดเมนของ $f\circ g$ ประกอบด้วยจุด $(x,y)$ โดยที่ $4-x^2-y^2>0$ และ $\ln(4-x^2-y^2)\ge 0$ แต่เนื่องจาก $\ln(4-x^2-y^2)\ge 0$ ก็ต่อเมื่อ $4-x^2-y^2\ge 1$ เราสรุปว่าโดเมนของ $f\circ g$ ประกอบด้วยทุกจุด $(x,y)$ ซึ่งทำให้ $4-x^2-y^2\ge 1$ หรือ $x^2+y^2\le 3$ □

**ลิมิตของฟังก์ชัน**

**<u>นิยาม 3.29</u> ให้ $f$ นิยามในแผ่นวงกลมเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(x_0,y_0)$ ซึ่งอาจยกเว้นที่จุด**
$(x_0,y_0)$ และให้ $L$ เป็นเลขค่าหนึ่ง แล้ว $L$ คือ ลิมิตของ $f$ ที่จุด $(x_0,y_0)$ ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ที่ทำให้

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \text{ เมื่อ } |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

ซึ่งอาจเขียนในรูป

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

และกล่าวว่า $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ หาค่าได้

ในทำนองเดียวกัน ให้ $f$ นิยามในทรงกลมเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(x_0,y_0,z_0)$ ซึ่งอาจยกเว้นที่จุด $(x_0,y_0,z_0)$ แล้ว $L$ คือ ลิมิตของ $f$ ที่จุด $(x_0,y_0,z_0)$ ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ที่ทำให้

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta \text{ เมื่อ } |f(x,y,z)-L|<\varepsilon$$

ซึ่งอาจเขียนในรูป

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=L$$

และกล่าวว่า $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)$ หาค่าได้

สูตรผลบวก ผลคูณและผลหารของลิมิตสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร(คล้ายกับสามตัวแปร) **คือ**

ถ้า $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ และ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L$ หาค่าได้แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f+g)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f+g)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (fg)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y)=\frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)} \text{ ซึ่ง } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\neq 0$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.33</u> จงหา $\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} \ln\frac{x}{y}$

<u>วิธีทำ</u> เราให้

$$f(x,y)=\frac{x}{y} \text{ และ } g(t)=\ln t$$

จากสูตรผลหารของลิมิต จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(e,1)}\frac{x}{y}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} x}{\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} y}=\frac{e}{1}=e$$

เนื่องจาก $g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นจากสูตรการแทนค่า

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln\frac{x}{y}=\lim_{(x,y)\to(e,1)} g(f(x,y))=g(e)=\ln e=1$$ □

**อนุพันธ์ย่อย**

<u>นิยาม 3.30</u> ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและให้ $(x_0,y_0)$ อยู่ในโดเมนของ $f$ แล้วอนุพันธ์ย่อยของ $f$ เทียบ $x$ ที่จุด $(x_0,y_0)$ ได้

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

ที่ทำให้ลิมิตนี้หาค่าได้ และอนุพันธ์ย่อยของ $f$ เทียบ $y$ ที่จุด $(x_0,y_0)$ ได้

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

ที่ทำให้ลิมิตนี้หาค่าได้

ถ้า $f$ และ $g$ มีอนุพันธ์ย่อยแล้ว

$$(f+g)_x=f_x+g_x \quad \text{และ} \quad (f+g)_y=f_y+g_y$$

$$(f+g)_x=f_x+g_x \quad \text{และ} \quad (f+g)_y=f_y+g_y$$

$$(fg)_x=f_xg+fg_x \quad \text{และ} \quad (fg)_x=f_xg+fg_x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_x=\frac{f_xg-fg_x}{g^2} \quad \text{และ} \quad \left(\frac{f}{g}\right)_y=\frac{f_yg-fg_y}{g^2}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.34</u> ให้

$$f(x,y)=\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

จงหา $f_x$ และ $f_y$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ จะได้ว่า $f_x$ และ $f_y$ นิยามที่ทุกจุด $(x, y)$ ยกเว้นจุดที่ $x^2 + y^2 = 0$ นั่นคือยกเว้นที่จุดกำเนิด และจากกฎการหาอนุพันธ์ย่อยจะได้

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

และในทำนองเดียวกันจะได้

$$f_x(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$ □

สำหรับการหาอนุพันธ์ย่อยที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ ของฟังก์ชันสามตัวแปร นิยามโดย

$$f_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0 z_0)}{h}$$

$$f_y(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y_0+h, z_0) - f(x_0, y_0 z_0)}{h}$$

$$f_z(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y_0, z_0+h) - f(x_0, y_0 z_0)}{h}$$

ซึ่งทำให้ลิมิตเหล่านี้หาค่าได้ และเป็นอนุพันธ์ย่อย $f_x, f_y$ และ $f_z$ ที่สามารถเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$ และ $\partial f/\partial z$

**การหาอนุพันธ์อันดับสูง**

ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่ทั้งตัวแปร $x$ และ $y$ แล้วฟังก์ชัน $f_x$ และ $f_y$ อาจมี 2 อนุพันธ์ย่อย ซึ่งในกรณีนี้อนุพันธ์ย่อยของ $f_x$ และ $f_y$ อาจแยกเป็น

$(f_x)_x$ แทนด้วย $f_{xx}$ หรือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$(f_x)_y$ แทนด้วย $f_{xy}$ หรือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$(f_y)_x$ แทนด้วย $f_{yx}$ หรือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$(f_y)_y$ แทนด้วย $f_{yy}$ หรือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.31</u> ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรและสมมติว่า $f_{xy}$ และ $f_{yx}$ ค่อเนื่องที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.35</u> ให้ $f(x,y)=\sin xy^2$ จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองทั้งหมดของ $f$

<u>วิธีทำ</u> อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งคือ

$$f_x(x,y) = y^2\cos xy^2 \text{ และ } f_y(x,y) = 2xy\cos xy^2$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง คือ

$$f_{xx}(x,y) = -y^4\sin xy^2$$

$$f_{xy}(x,y) = 2y\cos xy^2 - 2xy^3\sin xy^2$$

$$f_{yx}(x,y) = 2y\cos xy^2 - 2xy^3\sin xy^2$$

$$f_{yy}(x,y) = 2x\cos xy^2 - 4x^2y^2\sin xy^2$$

ซึ่งได้ว่า $f_{xy} = f_{yx}$ □

**กฎลูกโซ่**

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.32</u> (กฎลูกโซ่)

ให้ $w = f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องในโดเมน $D$ ในปริภูมิ $xyz$ กำหนดให้ $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องในโดเมน $B$ ในระนาบ $uv$ โดยที่ทุกจุด $(u,v)$ ในโดเมน $B$ สมนัยกับจุด$[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$ ที่อยู่ในโดเมน $D$ แล้วฟังก์ชัน

$$w = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

นิยามบนโดเมน $B$ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับ $u$ และ $v$ ในโดเมน $B$ และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned} \tag{3.56}$$

<u>รูปแบบอื่นที่น่าสนใจ</u>

ถ้า $w = f(x,y)$ และ $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned} \tag{3.57}$$

ถ้า $w = f(x,y,z)$ และ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{3.58}$$

ถ้า $w = f(x,y)$ และ $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{3.59}$$

ถ้า $w = f(x)$ และ $x = x(t)$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{3.60}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.36</u> ให้ $w = x^2 - y^2$ และนิยามพิกัดเชิงขั้ว $r,\theta$ โดย $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial r}$ และ $\frac{\partial w}{\partial \theta}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2x\cos\theta - 2y\sin\theta$$

$$= 2r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta = 2r\cos\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2x(-r\sin\theta) - 2y(r\cos\theta)$$

$$= -2r^2\cos\theta\sin\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$= -2r^2\sin 2\theta$$

□

**ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม**

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.33</u>

ให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องในโดเมน $D$ ในปริภูมิ $xyz$ กำหนดให้ $P_0:(x_0, y_0, z_0)$ และ $P:(x_0+h, y_0+k, z_0+l)$ เป็นจุดในโดเมน $D$ โดยที่ส่วนของเส้นตรง $P_0P$ ที่เชื่อมต่อสองจุดนี้อยู่ในโดเมน D แล้ว

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) - f(x_0, y_0, z_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z} \tag{3.61}$$

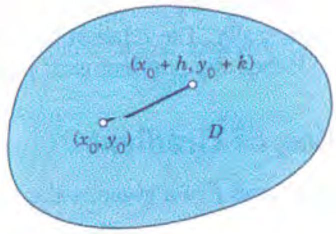
**รูปแบบอื่น**

สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร(ดังรูป 3.32) $f(x, y)$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \tag{3.62}$$

**สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $f(x)$**

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h\frac{df}{dx} \tag{3.63}$$




**รูปที่ 3.32 ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมของฟังก์ชันสองตัวแปร**

**โดยที่ในสมการที่ (3.63) โดเมน $D$ คือ ส่วนหนึ่งของแกน $x$ และหาอนุพันธ์จากจุดเฉพาะที่อยู่ระหว่าง $x_0$ และ $x_0 + h$**

### 3.1.9 เกรเดียนต์และอนุพันธ์ทิศทาง

**อนุพันธ์ทิศทาง**

นิยาม 3.34 ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซตที่มีโดเมนวงกลม $D$ ซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(x_0, y_0)$ และให้ $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย แล้วอนุพันธ์ทิศทางของ $f$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ซึ่งแทนด้วย $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ นิยามโดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.64}$$

จะเห็นว่าถ้า $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ แล้ว $a_1 = 1$ และ $a_2 = 0$ ดังนั้น

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

และถ้า $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ แล้ว $a_1 = 0$ และ $a_2 = 1$ ดังนั้น

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_y(x_0, y_0)$$

ทฤษฎีบทที่ 3.35 ให้ฟังก์ชัน $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว f จะมีอนุพันธ์ทิศทางที่จุด $(x_0, y_0)$ ในทุกทิศทาง และถ้า $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a_1 + f_y(x_0, y_0)a_2 \tag{3.65}$$

ตัวอย่างที่ 3.37 ให้ $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$ และ $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ จงหา $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เราจะคำนวณ $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ ตามสมการ (3.65)

อันดับแรกเราหาอนุพันธ์ย่อยของ $f$

$f_x(x, y) = -6x$ และ $f_y(x, y) = -2y$

ดังนั้น $f_x(1, 2) = -6$ และ $f_y(1, 2) = -4$

ดังนั้น $D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = f_x(1, 2)(\frac{1}{\sqrt{2}}) + f_y(1, 2)(-\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= (-6)(\frac{1}{\sqrt{2}}) + (-4)(-\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= -\sqrt{2}$ □

ในการนิยามอนุพันธ์ 3 ตัวแปร เรากำหนดให้ $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะได้อนุพันธ์ทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ ที่นิยามโดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \frac{df}{ds} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2 + ha_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

ถ้า $f$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ แล้ว

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = f_x((x_0, y_0, z_0)a_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)a_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)a_3 \tag{3.66}$$

**ตัวอย่างที่ 3.38** ให้ $f(x, y, z) = xe^{y^2 z}$ และให้ $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \sqrt{2}\,\mathbf{k}$ จงหาอนุพันธ์ทิศทางของ $f$ ที่จุด (2, 1, 0) ในทิศทางของ **a**

**วิธีทำ** อันดับแรกหาอนุพันธ์ย่อยของ $f$

$$f_x(x, y, z) = e^{y^2 z} \qquad f_y(x, y, z) = 2xyz \qquad f_z(x, y, z) = xy^2 e^{y^2 z}$$

เนื่องจาก $\| \mathbf{a} \| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}/2 = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

จะได้ $D_{\mathbf{u}} f(2, 1, 0) = f_x(2, 1, 0)(\frac{1}{2}) + f_y(2, 1, 0)(-\frac{1}{2}) + f_z(2, 1, 0)(\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$= 1(\frac{1}{2}) + 0(-\frac{1}{2}) + 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$ □

**เกรเดียนต์**

**นิยาม 3.36** a ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด $(x_0, y_0)$ แล้ว เกรเดียนต์ของฟังก์ชัน $f$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ ซึ่งแทนด้วย grad $f(x_0, y_0)$ หรือ $\nabla f(x_0, y_0)$ นิยามโดย

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

b ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ แล้วเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน $f$ ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ ซึ่งแทนด้วย grad $f(x_0, y_0, z_0)$ หรือ $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ นิยามโดย

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$$

**ตัวอย่างที่ 3.39** ให้ $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ จงหาสูตร เกรเดียนต์ของฟังก์ชัน $f$ และหา $\nabla f(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -3)$

**วิธีทำ** จากนิยาม $\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$

$$= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

เนื่องจาก $(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + (-3)^2 = 25$ จะได้

$$\nabla f(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -3) = \frac{1}{125}(-2\sqrt{2}\,\mathbf{i} - 2\sqrt{2}\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.37</u> ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$

a) สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **u** ใดๆ

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = [\text{grad } f(x_0, y_0)]\cdot\mathbf{u}$$

b) ค่าสูงสุดของ $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ คือ $\|\text{ grad } f(x_0, y_0)\|$

c) ถ้า grad $f(x_0, y_0) \neq 0$ แล้ว $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ (ไม่สนใจฟังก์ชัน **u**) จะได้ค่าสูงสุดเมื่อ **u** เป็นจุดในทิศทางเดียวกันกับ grad $f(x_0, y_0)$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.38</u> ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปรที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$

a) สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **u** ใดๆ

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = [\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)]\cdot\mathbf{u}$$

b) ค่าสูงสุดของ $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ คือ $\|\text{ grad } f(x_0, y_0, z_0)\|$

c) ถ้า grad $f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ แล้ว $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ (ไม่สนใจฟังก์ชัน **u**) จะได้ค่าสูงสุดเมื่อ **u** เป็นจุดในทิศทางเดียวกันกับ grad $f(x_0, y_0, z_0)$

<u>ตัวอย่างที่ 3.40</u> ให้ $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ จงหาอนุพันธ์ทิศทางที่จุด $P(2, 1, 3)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\text{grad } f(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\text{grad } f(2, 1, 3) = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

และ $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

ดังนั้น $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$

จากทฤษฎีบท 3.35(a)

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 1, 3) = (\mathbf{i} - 2\mathbf{k})\cdot(8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

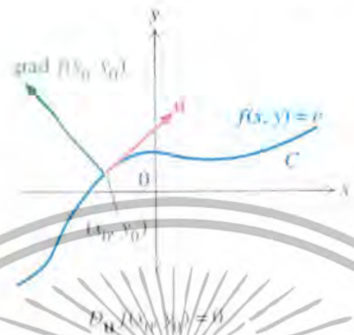
$$= -\frac{4}{\sqrt{5}} \approx -1.789$$

□

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.39</u> ให้ $f(\mathbf{P}) = f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่อง และ grad $f$ หาค่าได้ และ ขนาดและทิศทางของ grad $f$ เป็นอิสระจากพิกัดฉากที่เลือกจากปริภูมิ ถ้าความชันของ $f$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ที่จุด **P** แล้วฟังก์ชัน $f$ จะมีทิศทางการเพิ่มสูงสุดของที่จุด **P**

**เกรเดียนต์ตามเวกเตอร์ปกติ**

สมมติว่าเส้นโค้งเรียบ $C$ เป็นเส้นโค้งระดับของฟังก์ชัน $f$ ที่สามารถกาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ บนเส้นโค้ง $C$ ขณะที่จุด $(x, y)$ เคลื่อนที่ตามเส้นโค้ง $C$ ค่าของ $f(x, y)$ จะเป็นค่าคงที่ตามนิยามและไม่เปลี่ยนแปลง จะได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f$ ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{u}$ ที่สัมผัสกับเส้นโค้ง $C$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = 0$ ดังรูป 3.33




**รูปที่ 3.33 เกรเดียนต์ของเส้นโค้ง**

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.40</u> ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งระดับ $f(x, y) = C$ ของฟังก์ชัน $f$ ให้ $(x_0, y_0)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $C$ และสมมติว่าสามารถหาอนุพันธ์ของ $f$ ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ ถ้า $C$ เป็นเส้นโค้งเรียบและ grad $f(x_0, y_0) \neq 0$ แล้ว grad $f(x_0, y_0)$ เป็นเวกเตอร์ปกติของ $C$ ที่จุด $(x_0, y_0)$

<u>ตัวอย่างที่ 3.41</u> สมมติว่าเส้นโค้ง $x^2 - xy + 3y^2 = 5$ เป็นเส้นโค้งเรียบ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเส้นโค้งนี้ที่จุด $(1, -1)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2 = 5$ เนื่องจาก $f(1, -1) = 5$ จุด $(1, -1)$ จึงอยู่บนเส้นโค้งระดับ

ตามทฤษฎีบทที่ 3.37 grad $f(1,-1)$ ตั้งฉากกับเส้นโค้งที่กำหนดให้ที่จุด $(1, -1)$ เราได้

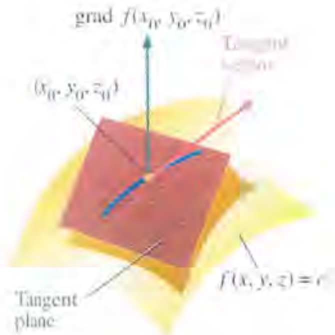
$$\text{grad } f(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (-x + 6y)\mathbf{j}$$

ดังนั้น $\text{grad } f(1, -1) = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

ได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\dfrac{1}{\|3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}\|}(3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) = \dfrac{1}{58}(3\mathbf{i} - 7\mathbf{j})$ □

<u>นิยาม 3.41</u> ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ บนพื้นผิวระดับ $S$ ของ $f$ ถ้า grad $f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ แล้วระนาบที่ผ่านจุด $(x_0, y_0, z_0)$ ซึ่งมีเวกเตอร์ปกติคือ grad $f(x_0, y_0,$

$z_0$) คือ ระนาบที่สัมผัสกับ $S$ ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ เวกเตอร์ใดๆที่ตั้งฉากกับระนาบสัมผัสที่เป็นเวกเตอร์ปกติของ $S$ ดังรูป 3.34




**รูปที่ 3.34 เกรเดียนต์ของเวกเตอร์ตามเวกเตอร์ปกติ**

จากนิยาม 3.41 grad $f(x_0, y_0, z_0)$ เป็นเวกเตอร์ปกติบนพื้นผิว $S$ ที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ เนื่องจาก

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$$

และเนื่องจาก grad $f(x_0, y_0, z_0)$ เป็นเวกเตอร์ปกติของระนาบสัมผัสที่จุด $(x_0, y_0, z_0)$ ดังนั้นสมการระนาบสัมผัสที่จุดนั้นคือ

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.42</u> จงหาสมการระนาบที่สัมผัสกับ ทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ที่จุด $(-1, 1, \sqrt{2})$

<u>วิธีทำ</u> ทรงกลมเป็นพื้นผิวระดับ $f(x, y, z) = 4$ เมื่อ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

อนุพันธ์ย่อยของ $f$ คือ

$$f_x(x, y, z) = 2x \quad f_y(x, y, z) = 2y \quad f_z(x, y, z) = 2z$$

$$f_x(-1, 1, \sqrt{2}) = -2 \qquad f_y(-1, 1, \sqrt{2}) = 2 \qquad f_z(-1, 1, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

ดังนั้น สมการระนาบสัมผัสที่จุด $-1, 1, \sqrt{2}$ คือ

$$-2(x - (-1)) + 2(y - 1) + 2\sqrt{2}\,(z - \sqrt{2}) = 0$$

เท่ากับ $\quad -x + y + \sqrt{2}\,z = 4$ □

สมมติให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(x_0, y_0)$ และเพื่อหาสมการระนาบที่สัมผัสกับกราฟ $f$ ที่จุด $(x_0, y_0)$ เราจึงพิจารณาให้กราฟ $f$ เป็นพื้นผิวระดับ

$$g(x, y, z) = 0 \text{ โดยที่ } g(x, y, z) = f(x, y) - z$$

จะสังเกตเห็นว่า

$$\text{grad } g(x_0, y_0, f(x_0, y_0, )) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

และ grad $g\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0,))$ เป็นเวกเตอร์ปกติของระนาบสัมผัสที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0,))$ หมายความว่า

$$f_x\,(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y\,(x_0, y_0)(y-y_0) - (z-f(x_0, y_0)) = 0$$

หรือ
$$z = f(x_0, y_0) + f_x\,(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y\,(x_0, y_0)(y-y_0)$$

เป็นสมการระนาบสัมผัสของ $f$ ที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0,))$ และ grad $g\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0,))$ เป็นเวกเตอร์ปกติของกราฟ $f$ ที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0,))$

**3.1.10 สนามเวกเตอร์**

อนุพันธ์ของสนามเวกเตอร์มี 2 แบบ คือฟังก์ชันค่าจริง และสนามเวกเตอร์ ไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์เป็นการหาอนุพันธ์ของสนามเวกเตอร์ที่ให้ฟังก์ชันค่าจริง ส่วนเคิร์ลของสนามเวกเตอร์เป็นการหาอนุพันธ์ที่ยังเป็นสนามเวกเตอร์

**ไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์**

<u>นิยาม 3.42</u> ให้ $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ โดยที่ $\partial M/\partial x$ , $\partial N/\partial y$, $\partial P/\partial z$ หาค่าได้ แล้ว divergence ของ **F** ซึ่งแทนด้วย div $\mathbf{F}(x, y, z)$ หรือ $\nabla\cdot\mathbf{F}(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$\text{div}\,\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\cdot\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial N}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) \quad (3.67)$$

สัญลักษณ์อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\text{div}\,\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\cdot\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k})$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.43</u> ให้ **F** แทนแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

$$\mathbf{F} = \frac{-Gmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-Gmy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-Gmz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$$

จงแสดงว่า div **F** = 0

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-Gm(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - (-Gmx)\frac{3}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{-Gm(2x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y}(x, y, z) = \frac{-Gm(2y^2-z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = \frac{-Gm(2z^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

ดังนั้น $\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0$ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.43</u> การแปรผันของไดเวอร์เจนซ์

ค่าของ div **F** ขึ้นอยู่กับจุดบนปริภูมิเท่านั้น แต่ไม่ขึ้นกับจุดที่เลือกโดยเฉพาะของพิกัดใน (3.67) เพื่อที่ เมื่อพิจารณาระบบพิกัดฉากอื่น $x^*, y^*, z^*$ และส่วนประกอบ $M^*, N^*, P^*$ ของ **F** ที่สอดคล้องกัน จะได้

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial M^*}{\partial x^*} + \frac{\partial N^*}{\partial y^*} + \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \quad (3.68)$$

ถ้า $f(x, y, z)$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์อันดับสองได้

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

จาก (3.67)

$$\text{div (grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{y}^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{z}^2}\mathbf{k}$$

สมการทางขวา คือ ลาปลาซของ $f$ ดังนั้น

$$\text{div (grad } f) = \nabla^2 f \qquad (3.69)$$

**เคิร์ลของสนามเวกเตอร์**

<u>นิยาม 3.44</u> ให้ $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ โดยที่ $\partial M/\partial x$ , $\partial N/\partial y$ , $\partial P/\partial z$ หาค่าได้แล้ว

curl $\mathbf{F}(x, y, z)$ หรือ $\nabla\times\mathbf{F}(x, y, z)$ นิยามโดย

$$\begin{aligned}\text{curl } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla\times\mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\\ \text{หรือ} \quad &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}\end{aligned} \qquad (3.70)$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.44</u> ให้ $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} - e^{2y}\,\mathbf{k}$ จงหา curl $\mathbf{F}$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม

$$\text{curl } \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & xy^2z & -e^{2y}\end{vmatrix}$$

$$= (-2e^{2y} - xy^2)\mathbf{i} + (x - 0)\mathbf{j} + (y^2z - 0)\mathbf{k}$$

$$= (-2e^{2y} - xy^2)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$$

□

สำหรับสเกลาร์ฟังก์ชัน f ที่หาอนุพันธ์อันดับสองได้และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้

$$\text{curl (grad } f) = \mathbf{0}$$

$$\text{div (curl } v) = \mathbf{0}$$

ทฤษฎีบทที่ 3.45 ให้ ให้ $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ ถ้ามีฟังก์ชัน $f$ ที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องที่มีเกรเดียนต์เท่ากับ $\mathbf{F}$ แล้ว curl $\mathbf{F} = 0$ นั่นคือ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

ถ้าโดเมนของ F คือปริภูมิสามมิติและถ้าสอดคล้องกับสมการข้างต้นแล้วจะมีฟังก์ชัน $f$ ที่ $\mathbf{F} = \text{grad} f$

ตัวอย่างที่ 3.45 ให้ $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz\,\mathbf{i} + x^2z\,\mathbf{j} + (x^2\mathbf{y} + 1)\,\mathbf{k}$ และ

$\mathbf{G}(x, y, z) = yz\cos xy\,\mathbf{i} + xz\cos xy\,\mathbf{j} + \cos xy\,\mathbf{k}$

จงแสดงว่า **F** เป็นเกรเดียนต์ของบางฟังก์ชัน แต่ **G** ไม่ใช่เกรเดียนต์ของฟังก์ชันใดๆ

วิธีทำ ในการตรวจสอบ **F** จะได้ว่า

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = 2xy = \frac{\partial P}{\partial x} \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x} = 2xz = \frac{\partial M}{\partial y}$$

เนื่องจากโดเมนของ **F** คือปริภูมิสามมิติ ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3.42 จะหมายความว่า **F** เป็นเกรเดียนต์ของบางฟังก์ชัน

สำหรับ **G** เราจะได้

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x\sin xy \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = x\cos xy$$

ซึ่งไม่สอดคล้องตามทฤษฎีบทที่ 3.45 จึงหมายความว่า **G** ไม่ใช่เกรเดียนต์ของฟังก์ชันใดๆ □

ในกรณีที่สนามเวกเตอร์ **F** คือ

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

และจากเงื่อนไขตามทฤษฎีบทที่ 3.45 จะได้

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

## 3.2 ปริพันธ์ของเวกเตอร์ และทฤษฎีบทของปริพันธ์

### 3.2.1 ปริพันธ์เชิงเส้น

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการหาปริพันธ์ของเส้นโค้ง $C$ นอกเหนือจากการหาปริพันธ์บนช่วง $[a, b]$ ที่เราได้รู้มาแล้ว เราเรียกปริพันธ์บนเส้นโค้งว่าปริพันธ์เชิงเส้น ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้ในวิศวกรรม และอื่นๆ เราจะยกตัวอย่างการนำไปใช้อย่างหนึ่งเพื่อให้เข้าใจนิยามความหมายของปริพันธ์เชิงเส้น

สมมติให้เส้นลวดเส้นหนึ่งวางตัวตามแนวเส้นโค้งเรียบ $C$ ที่มีความยาวจำกัดและให้ความหนาแน่นเชิงมวล (มวลต่อความยาวหนึ่งหน่วย) ของเส้นลวดที่จุด $(x_k, y_k, z_k)$บนเส้นโค้ง $C$ เท่ากับ $f(x, y, z)$ จากนั้นกำหนดผลแบ่งกั้น $P$ ของเส้นโค้ง $C$ โดยเลือกจุด $P_0, P_1, \ldots, P_n$ เพื่อแบ่งเส้นโค้งออกเป็นส่วนย่อย ดังรูป 3.35

รูปที่ 3.35 ปริพันธ์เชิงเส้น

และให้ $(x_k, y_k, z_k)$ เป็นจุดหนึ่งบนเส้นโค้ง C ที่อยู่ในช่วง $P_{k-1}$ และ $P_k$ และกำหนดให้ $\Delta s_k$ เป็นความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง $C$ ในช่วง $P_{k-1}$ และ $P_k$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $k$ ที่อยู่ระหว่าง 1 และ $n$ ถ้า $\Delta s_k$ มีค่าน้อยๆ แล้วจะทำให้มวลของส่วนของเส้นลวดในช่วง $P_{k-1}$ และ $P_k$ มีค่าประมาณ $f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta s_k$ ซึ่งเป็นผลคูณของความหนาแน่นเชิงมวลที่จุด $(x_k, y_k, z_k)$ กับความยาวส่วนโค้ง $\Delta s_k$ ดังนั้นมวล $m$ ของเสนลวดตลอดเส้นจะมีค่าประมาณ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta s_k$ โดยที่ผลรวม

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta s_k \tag{3.71}$$

มีค่าใกล้เคียง $m$ เมื่อความยาว $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ มากที่สุดซึ่งแทนด้วย $\| P \|$ มีค่าเข้าใกล้ 0

<u>นิยาม 3.46</u> ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบ $C$ ที่มีความยาวจำกัด แล้วปริพันธ์เชิงเส้น $\int_C f(x,y,z)\,ds$ ของ $f$ บน $C$ นิยามโดย

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta s_k \tag{3.72}$$

เราเรียกเส้นโค้ง $C$ ว่าเส้นทางการหาปริพันธ์ซึ่งมี $A$ :$\mathbf{r}(a)$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $B$ :$\mathbf{r}(b)$ เป็นจุดปลายของเส้นโค้ง จึงได้ว่า $C$ เป็นเส้นโค้งที่มีทิศทาง และจะเป็นเส้นโค้งที่มีทิศทางบวก ถ้า $t$ มีค่าเพิ่มขึ้นตามทิศทางจาก $A$ ไป $B$ เราแทนทิศทางของเส้นโค้งด้วยลูกศร ดังรูป 3.36(a) ถ้าทิศทางจากจุด $A$ ไป $B$ มาบรรจบกัน ดังรูป 3.36(b) แล้วเราเรียกเส้นโค้ง $C$ ว่าเส้นทางปิดและใช้สัญลักษณ์ $\oint_C f(x,y,z)\,ds$ แทน $\int_C f(x,y,z)\,ds$


(a) ทิศทางของเส้นโค้ง (b) ทิศทางของเส้นโค้งปิด

รูปที่ 3.36 ทิศทางของเส้นโค้ง

ในกรณีที่ $f$ คือ ความหนาแน่นเชิงมวลของเส้นลวด เราจะคำนวณหามวล $m$ ของเส้นลวดจากสูตร

$$m = \int_C f(x,y,z)\,ds \tag{3.73}$$

การคำนวณปริพันธ์เชิงเส้น $\int_C f(x,y,z)\,ds$ ด้วยวิธีการหาผลรวมตามสมการ (3.72) เป็นวิธีที่ไม่นิยมใช้กันเนื่องจากคำนวณได้ยากกว่าการใช้ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง $C$

ในการคำนวณปริพันธ์เชิงเส้นจากพารามิไทรเซชันของเส้นโค้ง เราสมมติให้เส้นโค้ง $C$ แทนด้วยฟังก์ชันเวกเตอร์ $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ บนช่วง $[a, b]$ และจาก $\|d\mathbf{r}/dt\| = ds/dt$ แสดงว่า

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt \tag{3.74}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.46</u> ให้ $C$ เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด (0, 0, 0) ไปยังจุด (1, -3, 2) จงหา $\int_C f(x^2 + y^2 + z^2)ds$

<u>วิธีทำ</u> แทน $C$ ด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - 3t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k} \text{ สำหรับ } 0 \le t \le 1$$

เนื่องจาก $x(t) = t, y(t) = -3t, z(t) = 2t$ และ

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าลงในสมการ (3.74) จะได้

$$\begin{aligned}\int_C f(x^2 + y^2 + z^2)ds &= \int_0^1 [t + (-3)^2 - 2(2t)]\sqrt{14}\, dt \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 (-3t + 9t^2)\, dt \\ &= \sqrt{14}\left(-\frac{3}{2}t^2 + 3t^3\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{14}\end{aligned}$$

□

ถ้าฟังก์ชัน $f$ ต่อเนื่องบนเส้นโค้ง $C$ โดยที่ $C$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด $(a, 0, 0)$ ไปยังจุด $(b, 0, 0)$ ตามแนวแกน $x$ ซึ่งกำหนดด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} \quad \text{สำหรับ } a \le t \le b$$

เราจะได้

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z)\, ds &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt \\ &= \int_a^b f(t,0,0)(1)\, dt = \int_a^b f(t,0,0)\, dt\end{aligned}$$

เมื่อแทน $f$ ด้วย $f_0$ โดยที่

$$f_0(t) = f(t, 0, 0) \quad \text{สำหรับ } a \le t \le b$$

จะได้

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(t,0,0)\, dt = \int_a^b f_0(t)\, dt$$

ดังนั้นปริพันธ์เชิงเส้นของฟังก์ชัน $f$ ที่ต่อเนื่องบนช่วงปิดบนแกน $x$ จะเหมือนกับปริพันธ์ชั้นเดียวของฟังก์ชันตัวแปรเดียว $f_0$

ถ้า $\mathbf{r}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง $C$ บนช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$\int_C 1\; ds = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt$$

โดยที่ปริพันธ์ทางขวาของสมการ คือ ความยาวของเส้นโค้ง $C$

**คุณสมบัติของปริพันธ์เชิงเส้น**

1. $\int_C k\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\quad$ k, เป็นค่าคงที่
2. $\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$

3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ โดยแบ่งเส้นโค้ง C ออกเป็น 2 เส้นที่มีทิศทางเดียวกัน

จากนิยามของปริพันธ์เชิงเส้นจะได้ว่า ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง $C$ ที่ประกอบด้วยเส้นโค้งเรียบ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ แล้ว

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_{C_1} f(x,y,z)\,ds + \int_{C_2} f(x,y,z)\,ds + \ldots + \int_{C_n} f(x,y,z)\,ds$$

**<u>ตัวอย่างที่ 3.47</u>** ให้ C เป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น คือ $C_1$ และ $C_2$ ดังรูป 3.37 จงคำนวณหา $\int_C (1+xy)\,ds$

**รูปที่ 3.37 เส้นโค้งที่ประกอบด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น**

**<u>วิธีทำ</u>** เรากำหนดตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง $C_1$ และ $C_2$ ดังนี้

$C_1 : \mathbf{r}_1(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}$ สำหรับ $-\dfrac{\pi}{2} a \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = -2t\,\mathbf{j}$ สำหรับ $-1 \le t \le 1$

ดังนั้น

$$\left\|\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right\| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2 \text{ และ } \left\|\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right\| = 2$$

$$\begin{aligned}\int_{C_1} (1+xy)\,ds &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 + (2\cos t)(2\sin t)]2\,dt \\ &= 2(t + 2\sin^2 t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

และ $\int_{C_2} (1+xy)\,ds = \int_{-1}^{1} [1 + 0(-2t)]2\,dt = 2t\Big|_{-1}^{1} = 4$

ดังนั้น

$$\int_C (1+xy)\,ds = \int_{C_1} (1+xy)\,ds + \int_{C_2} (1+xy)\,ds = 2\pi + 4$$ □

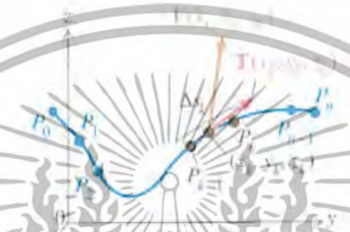
**ปริพันธ์เชิงเส้นของสนามเวกเตอร์**

สำหรับแรงคงที่ที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่จากจุด $P$ ไปยังจุด $Q$ ในแนวเส้นตรงจะได้งานที่แรงกระทำกับวัตถุ คือ

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

แต่ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นโค้ง $C$ ที่เกิดจากแรงภายนอกกระทำ

กำหนดให้เส้นโค้ง C ที่มีความยาวจำกัดวางตัวในปริภูมิและมีทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุ และสมมติให้สนามเวกเตอร์ **F** แทนแรงที่กระทำกับวัตถุอย่างต่อเนื่อง กำหนดผลพาร์ติชัน $P$ ของ $C$ โดยเลือกจุด $P_0, P_1, \ldots, P_n$ เป็นเส้นโค้งออกเป็นส่วนย่อย ดังรูป 3.38



**รูปที่ 3.38 ปริพันธ์เชิงเส้นของสนามเวกเตอร์**

และให้ $\Delta s_k$ เป็นความยาวส่วนของเส้นโค้ง $C$ ที่อยู่ในช่วง $P_{k-1}$ และ $P_k$ และให้ $(x_k, y_k, z_k)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $C$ ที่อยู่ในช่วง $P_{k-1}$ และ $P_k$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $k$ ที่อยู่ระหว่าง 1 และ $n$ ถ้า $\Delta s_k$ มีค่าน้อยมากๆ แล้ววัตถุจะเคลื่อนที่จาก $P_{k-1}$ ไป $P_k$ ตามทิศทางของเวกเตอร์สัมผัส $\mathbf{T}(x_k, y_k, z_k)$ ที่จุด $(x_k, y_k, z_k)$ เนื่องจาก **F** เป็นสนามเวกเตอร์ต่อเนื่องบนเส้นโค้ง $C$ ดังนั้นค่าของ **F** ตามแนวเส้นโค้งจาก $P_{k-1}$ ถึง $P_k$ จึงใกล้เคียงกับ $\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ งานที่เกิดจากแรงกระทำกับวัตถุบนส่วนของเส้นโค้ง $C$ จะมีค่าประมาณ

$$\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot [\Delta s_k \, \mathbf{T}(x_k, y_k, z_k)]$$

ดังนั้น งานของวัตถุที่เกิดจากแรงกระทำตามแนวเส้นโค้งทั้งหมดมีค่าประมาณ

$$\sum_{k=1}^{n} [\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \mathbf{T}(x_k, y_k, z_k)] \Delta s_k$$

ในการประมาณที่ดีควรเลือกผลแบ่งกั้นที่มีค่านอร์มน้อยๆ เมื่อนอร์มมีค่าน้อยๆ เราสามารถแทนฟังก์ชัน $f$ ด้วย $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ และนิยามงานที่เกิดจากแรงด้วย

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) \, ds \qquad (3.75)$$

<u>นิยาม 3.47</u> ให้ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่นิยามบนเส้นโค้งเรียบที่มีทิศทาง $C$ แล้วปริพันธ์เชิงเส้นของ $\mathbf{F}$ บนเส้นโค้ง $C$ ซึ่งแทนด้วย $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ นิยามโดย

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{T}(x,y,z)\,ds$$

โดยที่ $\mathbf{T}(x,y,z)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสที่จุด $(x,y,z)$ สำหรับทิศทางที่กำหนดให้ของ $C$

ถ้าแทนแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ตามแนวเส้นโค้ง $C$ ซึ่งมีทิศทางตามการเคลื่อนที่ด้วย $\mathbf{F}$ แล้ว งาน $W$ คือ

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{3.76}$$

การหาปริพันธ์ $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ขึ้นอยู่กับทิศทางของเส้นโค้ง $C$ แต่ไม่ขึ้นกับตัวแทนอิงตัวแปรเสริม $\mathbf{r}$ ของเส้นโค้ง เริ่มแรกเรากำหนดให้ $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง $C$ แล้ว จาก

$$\mathbf{T}(x(t),y(t),z(t)) = \frac{d\mathbf{r}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|}$$

จะได้
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left[\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|}\right]\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|dt$$
$$= \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$$

สรุปว่า
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt \tag{3.77}$$

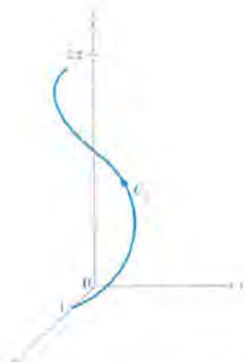
<u>ตัวอย่างที่ 3.48</u> กำหนดให้อนุภาคเคลื่อนที่ขึ้นข้างบนตามแนวเส้นฮีลิกซ์ $C$ ที่กำหนดด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \qquad \text{สำหรับ } 0 \le t \le 2\pi$$

(ดังรูป 3.39) ภายใต้แรง

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -zy\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$$

จงหางานของแรงที่กระทำกับอนุภาคนี้



รูปที่ 3.39 ทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค

วิธีทำ จากโจทย์ $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t$ และ

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}(-t\sin t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j} + \cos t\sin t\,\mathbf{k})\cdot(-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}(t\sin^2 t + t\cos^2 t + \cos t\sin t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}(t + \cos t\sin t)\,dt \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2 \end{aligned}$$

□

ทิศทางของเส้นโค้ง $-C$ จะตรงข้ามกับทิศทางของเส้นโค้ง $C$ ดังนั้น $\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เนื่องจากทิศทางของเวกเตอร์สัมผัสที่จุดใดๆ บนเส้นโค้ง $-C$ ที่เป็นจุดเดียวกันกับจุดที่อยู่บนเส้นโค้ง $C$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

**รูปแบบอื่นของการหาปริพันธ์เชิงเส้น**

ให้ $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบที่มีทิศทาง C ซึ่งกำหนดด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad \text{สำหรับ } a \le t \le b$$

ดังนั้น จากสมการ (3.77) จะได้

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt\\ &= \int_a^b [M(x(t),y(t),z(t))\mathbf{i}+N(x(t),y(t),z(t))\mathbf{j}+P(x(t),y(t),z(t))\mathbf{k}]\cdot\\ &\qquad\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right)dt\\ &= \int_a^b [M(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+N(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dx}\mathbf{j}\\ &\qquad+P(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\mathbf{k}]\,dt\end{aligned}$$

**หรือ**

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x,y,z)\,dx+N(x,y,z)\,dy+P(x,y,z)\,dz \tag{3.78}$$

หรือ

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx+N\,dy+P\,dz$$

ดังนั้นปริพันธ์ในสมการ (3.78) เป็นอกรูปแบบหนึ่งของ $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ และมักจะคำนวณจากสูตร

$$\begin{aligned}\int_C M(x,y,z)\,dx+N(x,y,z)\,dy+P(x,y,z)\,dz\\ = \int_a^b [M(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt}+N(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dx}\\ +P(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}]\,dt\end{aligned} \tag{3.79}$$

สำหรับกรณีที่ $\mathbf{F}=M\mathbf{i}$ โดยที่ $N=P=0$ เราเขียนสมการ (3.78) ใหม่เป็น

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x,y,z)\,dx \text{ หรือ } \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx$$

และในทำนองเดียวกันเราก็จะได้ปริพันธ์ $\int_C N(x,y,z)\,dy$ และ $\int_C P(x,y,z)\,dz$ เมื่อลดรูปปริพันธ์เชิงเส้น ก็จะได้สูตร

$$\begin{aligned}\int_C M(x,y,z)\,dx &= \int_a^b [M(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt}]\,dt\\ \int_C N(x,y,z)\,dy &= \int_a^b [N(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt}]\,dt\\ \int_C P(x,y,z)\,dz &= \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}]\,dt\end{aligned} \tag{3.80}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.49</u> ให้ C เป็นเส้นโค้ง เส้นโค้งกำลังสามบิดที่กำหนดด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k} \qquad \text{สำหรับ } 0\le t\le 1$$

จงคำนวณหา $\int_C xy\,dx+3zx\,dy-5x^2yz\,dz$

<u>วิธีทำ</u> $x(t)=t,\ \frac{dx}{dt}=1\ ;\ y(t)=t^2,\ \frac{dy}{dt}=2t\ ;\ z(t)=t^3,\ \frac{dz}{dt}=3t^2$

ดังนั้น จากสมการ (3.79)

$$\int_C xy\,dx+3zx\,dy-5x^2yz\,dz$$

$$= \int_0^1 [(t)(t^2)(1) + 3(t^3)(t)(2t) - 5(t)^2(t^2)(t^3)(3t^2)]\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 6t^5 - 15t^9)\, dt$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} + t^6 - \frac{3t^{10}}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{4} \qquad \square$$

### 3.2.2 ทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์เชิงเส้น

ทฤษฎีบทที่ 3.48 ทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์เชิงเส้น

ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งที่มีทิศทางซึ่งมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ $(x_0, y_0, z_0)$ และจุดปลายอยู่ที่ $(x_1, y_1, z_1)$ ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปรที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดบนเส้นโค้ง C และสมมติว่า grad $f$ ต่อเนื่องบนเส้นโค้ง $C$ แล้ว

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0)$$

ข้อสังเกต : ถ้าสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}$ คือเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน $f$ แล้ว

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์เชิงเส้น จะได้

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{3.81}$$

ซึ่งคล้ายกับทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

ตัวอย่างที่ 3.50 ให้ C เป็นเส้นโค้งจากจุด $(1, -1, -\frac{1}{2})$ ไปยัง จุด $(1, 1, \frac{1}{2})$ ที่กำหนดด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t) = -\cos \pi t^4\,\mathbf{i} + t^{5/3}\,\mathbf{j} + \frac{1}{t^2+1}\,\mathbf{k} \qquad \text{สำหรับ } -1 \le t \le 1$$

และให้ $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + (2xz + \pi \cos \pi z)\mathbf{k}$ จงหา $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ โดยที่ $f(x, y, z) = x^2y + xz^2 + \sin \pi z$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 3.45 จะได้

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(1, 1, \frac{1}{2}) - f(1, -1, -\frac{1}{2})$$

$$= (1 + \frac{1}{4} + 1) - (-1 + \frac{1}{4} - 1) = 4 \qquad \square$$

ข้อสังเกต : ในการสร้างสูตรสำหรับทฤษฎีบทพื้นฐานในสองมิติ เรากำหนดให้ $f$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดบนเส้นโค้งที่มีทิศทาง $C$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่ $(x_0, y_0)$ และมีจุดปลายอยู่ที่ $(x_1, y_1)$ และกำหนดให้ grad $f$ ต่อเนื่องบนเส้นโค้ง $C$ แล้ว

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

ถ้า $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่ต่อเนื่อง โดยที่ $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ แล้ว

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$$

**อิสระเชิงวิถีของการหาปริพันธ์**

ทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์เชิงเส้นกล่าวว่า ถ้า $\mathbf{F}$ คือเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน $f$ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และมีโดเมน $D$ แล้วค่าของปริพันธ์เชิงเส้น $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ จะขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดปลายของเส้นโค้งที่มีทิศทางใน $D$ เพียงอย่างเดียว ดังนั้นถ้า $C_1$ คือเส้นโค้งที่มีทิศทางอีกเส้นหนึ่งที่วางตัวใน $D$ และมีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเป็นจุดเดียวกับเส้นโค้ง $C$ แล้ว

$$\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

และ ถ้า $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่มีโดเมน $D$ และ $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ สำหรับเส้นโค้งที่มีทิศทาง $C_1$ และ $C_2$ ซึ่งอยู่ในโดเมน $D$ โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดปลายของเส้นโค้งเดียวกัน เรากล่าวว่า $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เป็นอิสระเชิงวิถีและจากทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์เชิงเส้นที่กล่าวว่า ถ้า $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ต่อเนื่องและเป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เป็นอิสระเชิงวิถี

เงื่อนไขที่ทำให้ $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ สำหรับเส้นโค้งที่มีทิศทางซึ่งอยู่ในขอบเขต $D$ เป็น อิสระเชิงวิถี คือ ถ้า $C$ เป็นเส้นโค้งปิดที่มีทิศทางใดๆ ใน $D$ แล้ว $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ เนื่องจากเรากำหนดให้เส้นโค้ง $C$ ประกอบด้วยเส้นโค้งที่มีทิศทาง $C_1$ และ $C_2$ โดยที่จุดปลายของเส้นโค้ง $C_1$ คือจุดเริ่มต้นของเส้นโค้ง $C_2$ และจุเริ่มต้นของเส้นโค้ง $C_1$ คือจุดปลายของเส้นโค้ง $C_2$ ดังรูป **3.40**

รูปที่ **3.40** อิสระเชิงวิถีของการหาปริพันธ์ของเส้นโค้งปิด

จึงได้ว่า $C_1$ และ $-C_2$ มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเหมือนกัน ดังนั้น อิสระเชิงวิถี จึงหมายความว่า

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

ถ้า $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ สำหรับทุกเส้นโค้งปิดที่มีทิศทางที่อยู่ใน $D$ และ $\mathbf{F} = \text{grad } f$ สำหรับบางฟังก์ชัน $f$ แล้วเราจะได้เงื่อนไขว่า

1. $\mathbf{F} = \text{grad } f$ สำหรับบางฟังก์ชัน $f$
2. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เป็นอิสระเชิงวิถี
3. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ สำหรับทุกเส้นโค้งปิดที่มีทิศทางในโดเมนของ $\mathbf{F}$
4. $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$

ถ้าโดเมนของ $\mathbf{F}$ คือปริภูมิ 3 มิติหรือขอบเขตใดๆที่ไม่มี hole แล้วจะได้ว่า ถ้า curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ แล้ว $\mathbf{F}$ = grad $f$ โดยที่เงื่อนไข (1) และ (4) สมมูลกัน

**การอนุรักษ์พลังงานของการเคลื่อนที่**

เราจะใช้ กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันอภิปรายงานของแรงที่กระทำกับวัตถุที่ซับซ้อนขึ้น รวมถึงการพิสูจน์กฎการอนุรักษ์พลังงานของสนามของแรงอนุรักษ์

สมมติให้วัตถุเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรง $\mathbf{F}$ ตามแนวเส้นโค้งเรียบ $C$ ที่กำหนดด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad \text{สำหรับ } a \le t \le b$$

และเขียน $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ แทน $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันกล่าวว่าแรง $\mathbf{F}$ กับความเร่ง $\mathbf{a}$ ของวัตถุมีความสัมพันธ์กัน โดย

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{a}(t) = m\mathbf{r}''(t) \qquad \text{สำหรับ } a \le t \le b \tag{3.82}$$

ดังนั้น งานของแรง $\mathbf{F}$ ที่กระทำกับวัตถุ คือ

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t)\, dt \\ &= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}[\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]\, dt = \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\|\mathbf{r}'(t)\|^2\, dt \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส จะได้

$$\frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\|\mathbf{r}'(t)\|^2\, dt = \frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(t)\|^2\Big|_a^b = \frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(a)\|^2$$

ดังนั้น

$$W = \frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(a)\|^2 \tag{3.83}$$

สำหรับค่า $t$ ใดๆ ใน$[a, b]$ เราเรียกปริมาณ

$$\frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(t)\|^2$$

เรียกว่าพลังงานจลน์ของวัตถุ(สังเกตว่า $\|\mathbf{r}'(t)\|$ เป็นอัตราเร็วของวัตถุที่ทำให้พลังงานจลน์ของวัตถุเป็นเศษหนึ่งส่วนสองของผลคูณของมวลกับค่ายกกำลังสองของอัตราเร็ว) ดังนั้นสมการ (3.83) แสดงงานของแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปยังจุดปลายของเส้นโค้ง เท่ากับการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของวัตถุจากตำแหน่งจุดเริ่มต้นไปยังจุดปลายของเส้นโค้ง และจะได้ว่างานขึ้นอยู่กับความเร็วที่จุดปลายของเส้นโค้งและมวลของวัตถุ

ตอนนี้เราสมมติให้ $\mathbf{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์ และมีฟังก์ชัน $f$ โดยที่ $\mathbf{F} = -\text{grad } f$(รวมเครื่องหมายลบด้วยตามหลักทางฟิสิกส์) เราเรียกฟังก์ชัน $f$ ว่า ฟังก์ชันพลังงานศักย์ของวัตถุที่มีแรง $\mathbf{F}$ กระทำ ซึ่งได้จากกฎลูกโซ่ที่ทำให้

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= [\text{grad } f(\mathbf{r}(t))]\cdot \mathbf{r}'(t)] \qquad (3.84)
\end{aligned}
$$

**ดังนั้น** $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = [\text{grad } f(\mathbf{r}(t))]\cdot \mathbf{r}'(t)]$

**จากสมการ (3.82) และ (3.84) เราพบว่า**

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(t)\|^2 + f(\mathbf{r}(t))\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t) + f(\mathbf{r}(t))\right) \\
&= m\mathbf{r}''(t)\cdot\mathbf{r}'(t) + [\text{grad } f(\mathbf{r}(t))]\cdot\mathbf{r}'(t) \\
&= [m\mathbf{r}''(t) + \text{grad } f(\mathbf{r}(t))]\cdot\mathbf{r}'(t) \\
&= [m\mathbf{r}''(t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))]\cdot\mathbf{r}'(t) \\
&= \mathbf{0}\cdot\mathbf{r}'(t) = 0
\end{aligned}
$$

**เมื่อหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้**

$$
\frac{m}{2}\|\mathbf{r}'(t)\|^2 + f(\mathbf{r}(t)) = c \qquad (3.85)
$$

**เป็นกฎการอนุรักษ์พลังงานสำหรับค่าคงที่บางตัว** $c$

### 3.2.3 ปริพันธ์สองชั้น

ในบทนี้เราจะอ้างถึงการหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ ของฟังก์ชัน $f$ ที่ต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ ซึ่งคล้ายกับนิยามของปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนบริเวณบนระนาบ

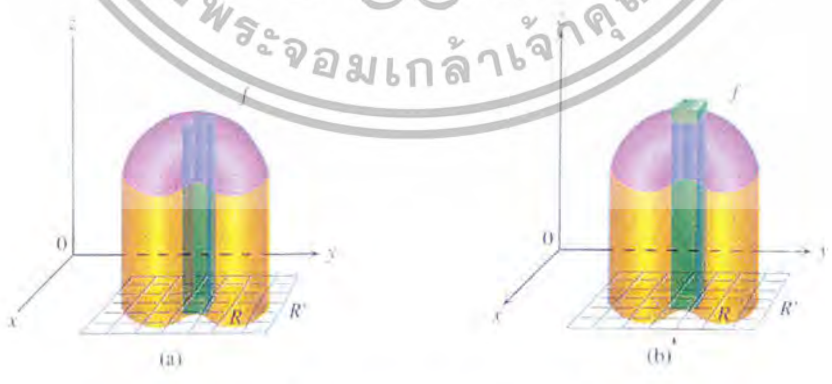
### ปริมาตรกับปริพันธ์สองชั้น

ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันบวกที่ต่อเนื่องบนบริเวณ $R$ โดยที่บริเวณ $R$ อยู่บนระนาบ $xy$ และให้ $D$ เป็นบริเวณ 3 มิติที่มีบริเวณ $R$ เป็นฐาน มีกราฟของฟังก์ชัน $f$ เป็นขอบด้านบน และมีพื้นผิวในแนวดิ่งที่ผ่านบริเวณ $R$ ดังรูป **3.41** เราเรียก $D$ ว่าบริเวณ 3 มิติระหว่างกราฟของ $f$ กับ $R$

**รูปที่ 3.41 บริเวณสามมิติระหว่างกราฟของ $f$ กับ $R$**

สมมติฐานเบื้องต้นในการนิยามปริมาตรของ $D$ คือ ถ้าแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากแท่งหนึ่งมีความสูง c และมีพื้นที่ฐาน $A$ แล้วปริมาตร $V$ ของแท่งสี่เหลี่ยม คือ

$$V = cA$$



**รูปที่ 3.42 การหาปริพันธ์สองชั้น**

ดังนั้นเราเริ่มนิยามปริพันธ์สองชั้นจากการแบ่งบริเวณ $R$ ออกเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากจำนวน $n$ รูป โดยลากเส้นขนานกับแกน $x$ และแกน $y$ ผ่านบริเวณ $R$ และกำหนดหมายเลขรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่อยู่ในบริเวณ $R$ จาก 1 ถึง $n$ จากนั้นเลือกจุด $(x_k, y_k)$ใดๆ ที่อยู่ในสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ $k$ **ดังรูป 3.42** ซึ่งมีพื้นที่ $\Delta A_k$ แล้ว ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูง $f(x_k, y_k)$ คือ

$$f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

ดังนั้น ปริมาตรของ $D$ คือ

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

ถ้าหากเราหาผลบวกเมื่อจำนวนเต็ม $n$ มีค่ามากขึ้นไปเรื่อยๆ โดยที่ความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มากที่สุดเข้าใกล้ศูนย์ขณะที่ $n$ เข้าใกล้อนันต์ จะได้ลำดับจำนวนจริง $J_{n_1}, J_{n_2}, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับลู่เข้าสู่ค่าหนึ่ง เราเรียกลิมิตของนี้ว่า **ปริพันธ์สองชั้นของ** $f(x, y)$ **บนบริเวณ** $R$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

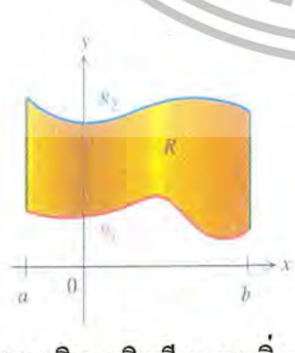
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{หรือ} \quad \iint_R f(x,y)\,dA$$

ดังนั้นปริมาตร $V$ ของขอเขต 3 มิติ $D$ คือ

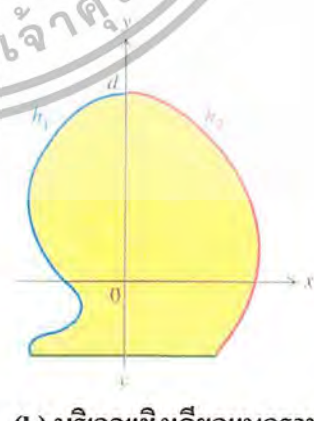
$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

**บริเวณเชิงเดียวแนวราบและแนวดิ่ง**

<u>นิยาม 3.49</u> a) บริเวณ $R$ บนระนาบ คือ บริเวณเชิงเดียวแนวดิ่งถ้ามีสองฟังก์ชันต่อเนื่อง $g_1$ และ $g_2$ บนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $g_1(x) \le g_2(x)$ สำหรับ $a \le x \le b$ และ $R$ คือบริเวณระหว่างกราฟของ $g_1$ และ $g_2$ บนช่วง$[a, b]$ **ดังรูป 3.43(a)** ในกรณีนี้เรากล่าวว่า $R$ เป็นบริเวณเชิงเดียวแนวดิ่งระหว่างกราฟของ $g_1$ และ $g_2$ บนช่วง$[a, b]$




**(a) บริเวณเชิงเดียวแนวดิ่ง**

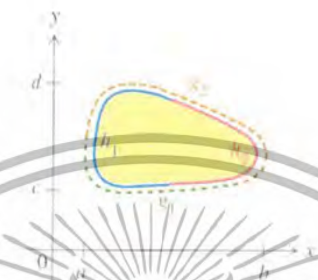



**(b) บริเวณเชิงเดียวแนวราบ**

**รูปที่ 3.43 ส่วนประกอบบริเวณเชิงเดียว**

b) บริเวณ $R$ บนระนาบ คือบริเวณเชิงเดียวแนวราบถ้ามีสองฟังก์ชันต่อเนื่อง $h_1$ และ $h_2$ บนช่วง $[c, d]$ โดยที่ $h_1(y) \le h_2(y)$ สำหรับ $c \le y \le d$ และ $R$ คือบริเวณระหว่างกราฟของ $h_1$ และ $h_2$ บนช่วง $[c, d]$ **ดังรูป 3.43(b)** ในกรณีนี้เรากล่าวว่า $R$ เป็นบริเวณเชิงเดียวแนวราบระหว่างกราฟของ $h_1$ และ $h_2$ บนช่วง $[c, d]$

c) บริเวณ $R$ บนระนาบ เป็นบริเวณเชิงเดียวถ้าเป็นบริเวณเชิงเดียวทั้งแนวราบและแนวดิ่ง **ดังรูป 3.44**



**รูปที่ 3.44 บริเวณเชิงเดียว**

**การคำนวณปริพันธ์สองชั้น**

กำหนดให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบที่ต่อเนื่องบนบริเวณเชิงเดียวแนวดิ่ง $R$ ระหว่างกราฟของ $g_1$ และ $g_2$ บนช่วง $[a, b]$ และให้ $D$ เป็นบริเวณ 3 มิติระหว่างกราฟของ $f$ และ $g$ ดังนั้น **พื้นที่ตัดขวาง** $A(x)$ ของ $D$ ที่จุด $x$ ใดๆ ใน $[a, b]$ คือ

$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$ **ดังรูป 3.45**


**รูปที่ 3.45 การคำนวณปริพันธ์สองชั้น**

และ

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

แต่ $$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

ดังนั้น $$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $R$ คือบริเวณเชิงเดียวแนวราบระหว่างกราฟของ $h_1$ และ $h_2$ บนช่วง $[c,d]$ แล้ว

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

เราเรียกปริพันธ์

$$\int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \text{ และ } \int_c^d \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad (3.86)$$

ว่าปริพันธ์ซ้อน

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.50</u> ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ $R$ ในระนาบ $xy$

a) ถ้า $R$ คือบริเวณเชิงเดียวแนวดิ่งระหว่างกราฟของ $g_1$ และ $g_2$ บนช่วง $[a,b]$ แล้ว $f$ สามารถหาปริพันธ์ได้บน $R$ และ

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

b) ถ้า $R$ คือบริเวณเชิงเดียวแนวราบระหว่างกราฟของ $h_1$ และ $h_2$ บนช่วง $[c,d]$ แล้ว $f$ สามารถหาปริพันธ์ได้บน $R$ และ

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

ดังนั้นจาก ทฤษฎีบทที่ 3.50 (a) และ (b)

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.51</u> ให้ $R$ เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดด้วยเส้นตรง $x=-1, x=2, y=0$ และ $y=2$ จงหา $\iint_R x^2 y\,dA$

<u>วิธีทำ</u> เมื่อ $R$ เป็นบริเวณเชิงเดียวแนวดิ่งระหว่างกราฟของ $y=0$ และ $y=2$ สำหรับ $-1 \le x \le 2$ จะได้

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^2 \int_0^2 x^2 y\,dy\,dx$$

การคำนวณปริพันธ์ซ้อนเราต้องคำนวณ $\int_0^2 x^2 y\,dy$ ก่อนสำหรับ $x$ ในช่วง $[-1,2]$

$$\int_0^2 x^2 y\,dy = x^2 \int_0^2 y\,dy = x^2 \left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^2 = 2x^2$$

เมื่อจาก $x$ เป็นค่าคงที่เมื่อหาปริพันธ์เทียบกับ $y$ ดังนั้นเราสรุปว่า

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{2} x^2 y\,dy\,dx = \int_{-1}^{2} 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = 6 \qquad \square$$

เรานิยามพื้นที่ $A$ ของบริเวณ $R$ บนระนาบโดย

$$A = \iint_R 1\,dA \tag{3.87}$$

เมื่อ $R$ เป็นบริเวณระหว่างกราฟของสองฟังก์ชันต่อเนื่อง $g_1$ และ $g_2$ บนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $g_1(x) \le g_2(x)$ แล้วเราจะได้นิยามของพื้นที่ $A$ อีกรูปแบบ คือ

$$A = \iint_R 1\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\ dy\,dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\ dx$$

**การสลับอันดับการหาปริพันธ์**

ในกรณีที่ $R$ เป็นบริเวณเชิงเดียว เราสามารถคำนวณ $\iint_R f(x,y)\,dA$ ได้จาก

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{หรือ} \quad \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy$$

ซึ่งบางครั้งการหาค่าจากปริพันธ์ซ้อนแบบหนึ่งอาจยากกว่าอีกแบบ การเปลี่ยนจากปริพันธ์ซ้อนแบบหนึ่งไปเป็นอีกแบบหนึ่งนี้ เราเรียกว่าการสลับอันดับการหาปริพันธ์

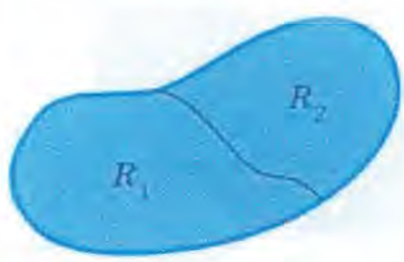
**คุณสมบัติของปริพันธ์สองชั้น**

1. $\iint_R kf\ dx\,dy = k\iint_R f\ dx\,dy$ ,k เป็นค่าคงที่
2. $\iint_R (f+g)\,dx\,dy = \iint_R f\ dx\,dy + \iint_R g\ dx\,dy$

   $\iint_R f\ dx\,dy = \iint_{R_1} f\ dx\,dy + \iint_{R_2} f\ dx\,dy$ **ดังรูป 3.46**
3. จะมีอย่างน้อย 1 จุด $(x_0, y_0)$ ใน $R$ ที่ทำให้

   $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0 y_0)A \quad \text{โดยที่ } A \text{ เป็นพื้นที่ของ } R$$

   ซึ่งเรียกว่าทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์สองชั้น




**รูปที่ 3.46 พื้นที่การหาปริพันธ์สองส่วน**

**การเปลี่ยนตัวแปรในปริพันธ์สองชั้น**

มีปัญหามากมายที่ต้องใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อหาปริพันธ์ในปริพันธ์สองชั้น จากเรื่องการหาปริพันธ์จำกัดเขตในแคลคูลัสมีสูตรการเปลี่ยนตัวแปร จาก $x$ เป็น $u$ คือ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(u))\frac{dx}{du}du \tag{3.88}$$

ในที่นี้เราสมมติว่า $x = x(u)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องในบางช่วง $\alpha \le t \le \beta$ โดยที่ $x(\alpha) = a$ , $x(\beta) = b$[หรือ $x(\beta) = a$ , $x(\alpha) = b$ ] และ $x(u)$ แปรผันตาม $a$ และ $b$ เมื่อ $u$ แปรผันตาม $\alpha$ และ $\beta$

สูตรการเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์สองชั้นจาก $x, y$ เป็น $u, v$ คือ

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

หมายความว่าเราสามารถแสดงปริพัทธ์ในพจน์ของ $u$ และ $v$ และ $dx\,dy$ ด้วย $du\,dv$ คูณกับค่าสัมบูรณ์ของจาโคเบียนได้ เมื่อ

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{3.89}$$

และ $R'$ เป็นบริเวณในระนาบ $uv$ ที่สมนัยกับบริเวณ $R$ ในระนาบ $xy$

สำหรับสูตรการเปลี่ยนตัวแปรในพิกัดเชิงขั้ว เราให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ และ

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

ดังนั้น $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

### 3.2.4 ทฤษฎีบทของกรีน

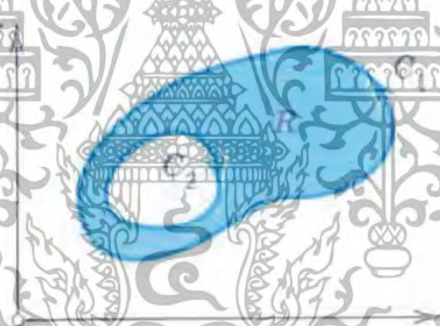
เราสามารถแปลงปริพันธ์สองชั้นบนขอบเขต $R$ ให้อยู่ในรูปของปริพันธ์เชิงเส้นของเส้นโค้งที่ล้อมรอบขอบเขต $R$ ได้ และแปลงปริพันธ์เชิงเส้นของเส้นโค้งที่ล้อมรอบขอบเขต $R$ ให้อยู่ในรูปของปริพันธ์สองชั้นบนขอบเขต $R$ ได้เช่นกัน การแปลงปริพันธ์จะช่วยให้เราคำนวณปริพันธ์ได้ง่ายขึ้นโดยมีหลักการแปลงปริพันธ์ดังทฤษฎีข้างล่างนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.51</u> ทฤษฎีบทของกรีน

ให้ $R$ เป็นขอบเขตเชิงเดียวในระนาบ $xy$ ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง $C$ ที่มีทิศทวนเข็มนาฬิกา และให้ $M$ กับ $N$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องบนขอบเขต $R$ แล้ว

$$\int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \tag{3.90}$$

จาก ทฤษฎีบทที่ 3.50 ที่กล่าวว่าเส้นโค้งเป็นเส้นโค้งที่ล้อมรอบขอบเขต R ที่มีทิศทวนเข็มนาฬิกาหมายความว่าถ้าเราเดินตามทิศทางของเส้นโค้ง C เราจะเห็นว่าขอบเขต R จะอยู่ทางซ้ายมือของเรา ดังรูป 3.47




รูปที่ 3.47 ทฤษฎีบทของกรีน

ในบางครั้งเราก็ใช้ทฤษฎีบทของกรีนหาปริพันธ์เชิงเส้น $\int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ โดยที่ไม่ใช้รูปแบบอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งได้ ดังตัวอย่างที่ 1

<u>ตัวอย่างที่ 3.52</u> จงหา $\int_C -x^2 y\,dx + x^3\,dy$ โดยที่ C คือวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ ซึ่งมีทิศทวนเข็มนาฬิกา

<u>วิธีทำ</u> เราสามารถหาปริพันธ์เชิงเส้นได้โดยตรงแต่จะง่ายกว่าถ้าเราใช้ทฤษฎีบทของกรีน

$M(x,y) = -x^2 y$ , $N(x,y) = x^3$ และ $R$ คือแผ่นวงกลม $x^2 + y^2 \le 4$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2,\ \frac{\partial M}{\partial y} = -x^2$$

เรามี

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_R (3x^2 + x^2)\, dA$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4(r\cos\theta)^2 r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r^3 \cos^2\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta) r^4 \Big|_0^2 d\theta$$
$$= 16\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 16\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= 16(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi} = 16\pi \qquad \square$$

เรายังสามารถใช้ทฤษฎีบทของกรีนคำนวณปริพันธ์สองชั้นจากปริพันธ์เชิงเส้นได้ เช่น สมมติว่าเราต้องการหาค่า $\iint_R 1\, dA$ ซึ่งเป็นพื้นที่ของขอบเขตเชิงเดียว $R$ เมื่อ $R$ เป็นขอบเขตเชิงเดียวที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง $C$ และเลือก $M$ และ $N$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad (3.91)$$

แล้วจากทฤษฎีบทของกรีนจะได้

$$\iint_R 1\, dA = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int_C M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$$

โดยที่ $C$ เป็นเส้นโค้งล้อมรอบขอบเขต $R$ ที่มีทิศทวนเข็มนาฬิกา การเลือกรูปแบบ $M$ และ $N$ มีมากมายที่สอดคล้องกับสมการ (3.91) แต่รูปแบบที่นิยมใช้มากที่สุด คือ

$M(x, y) = 0$ และ $N(x, y) = x$

$M(x, y) = -y$ และ $N(x, y) = 0$

$M(x, y) = -\frac{1}{2}y$ และ $N(x, y) = \frac{1}{2}x$

จากเซตของสมการ $M$ และ $N$ นี้เราจะได้สูตรพื้นที่ $A$ ของขอบเขต $R$ คือ

$$A = \int_C x\, dy = -\int_C y\, dx = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx \qquad (3.92)$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.53</u> จงใช้สมการ (3.92) หาพื้นที่ $A$ ของขอบเขต $R$ ที่ล้อมรอบด้วยวงรี

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<u>วิธีทำ</u> ให้วงรีมีทิศชี้ออก กำหนดด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j}$ สำหรับ $0 \le t \le 2\pi$

ดังนั้นจากสมการ (3.92)

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(b\cos t) - (b\sin t)(-a\sin t)]\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\ dt \qquad = \pi ab$$

□

**สรุปวิธีการหาปริพันธ์เชิงเส้น $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$**

1. กำหนดรูปแบบอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง C และใช้สูตร

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

2. ใช้ทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์เชิงเส้น (เมื่อ $\mathbf{F} = \text{grad}\, f$)

3. ใช้ทฤษฎีบทของกรีน (เมื่อ $C$ เป็นเส้นโค้งปิด)

**รูปแบบอื่นของทฤษฎีบทของกรีน**

รูปแบบอื่นของทฤษฎีบทของกรีนมีมากมาย ในที่นี้ยกมา 2 แบบ คือ

1. กำหนดให้ $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ต่อเนื่องบนขอบเขต $R$ ที่อยู่ในระนาบ $xy$ และสมมติให้เรนจ์ของ $\mathbf{F}$ อยู่ในระนาบ $xy$ และให้เส้นโค้ง $C$ ที่ล้อมรอบขอบเขต $R$ มีทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้นจากทฤษฎีบทของกรีนจะได้

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

เนื่องจาก $\quad \text{curl}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{k}$

จะได้ว่า

$$\text{curl}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{k}\right]\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

ทำให้

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA \tag{3.93}$$

2. สมมติให้เส้นโค้ง $C$ ที่ล้อมรอบขอบเขต $R$ มีทิศทวนเข็มนาฬิกา และมีตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \text{ สำหรับ } a \le t \le b$$

แล้วเวกเตอร์สัมผัส $\mathbf{T}$ ของ $C$ คือ

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{j}$$

ให้ $\quad \mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{j}$

แล้ว **n** จะอยู่ในระนาบ $xy$ ตั้งฉากกับ **T** ดังนั้น **n** จะขนานกับเวกเตอร์ปกติ N ของเส้นโค้ง $C$ (แสดงว่า **n** มีทิศชี้ออกจากขอบเขต $R$) ถ้าให้ $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ต่อเนื่องแล้ว

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_a^b (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})(t)\,\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt \\
&= \int_a^b [M(x(t),y(t))\,\mathbf{i} + N(x(t),y(t))\,\mathbf{j}]\cdot\left(\frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\right)\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt \\
&= \int_a^b [M(x(t),y(t))y'(t) - N(x(t),y(t))x'(t)]\,dt \\
&= \int_C M(x,y)\,dy - N(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทของกรีนและ $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y}$

เราจะได้

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_C M(x,y)\,dy - N(x,y)\,dx \\
&= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint_R \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)\,dA
\end{aligned}$$

สรุปว่า

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)\,dA \tag{3.94}$$

### 3.2.5 พื้นผิวสำหรับการหาปริพันธ์เชิงผิว

**รูปแบบพื้นผิว**

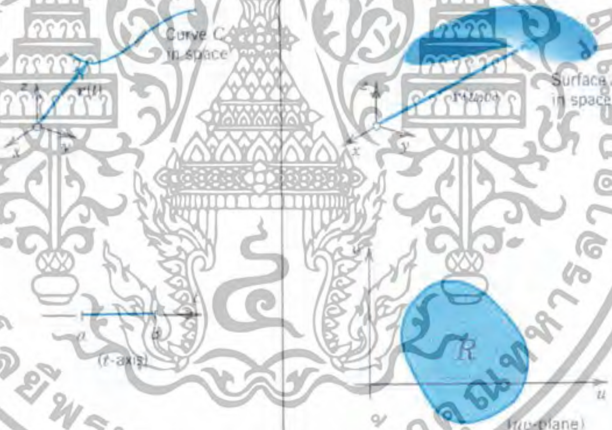
ในบทนี้คำว่า "เชิงผิว" หมายถึงส่วนหนึ่งของพื้นผิว และคำว่า "เส้นโค้ง" หมายถึงส่วนหนึ่งของเส้นโค้ง

รูปแบบของสมการที่แทนพื้นผิว $S$ ในปริภูมิ $xyz$ คือ

$$z = f(x, y) \qquad \text{หรือ} \qquad g(x, y, z) = 0 \tag{3.95}$$

ตัวอย่างเช่น $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ หรือ $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \ \ (z \geq 0)$ แทนครึ่งทรงกลมที่มีรัศมี $r$ และมีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0)

แต่เราใช้พารามิไทรเซชัน $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ โดยที่ $a \leq t \leq b$ แทนเส้นโค้ง $C$ ในการปริพันธ์เชิงเส้น เนื่องจากเป็นรูปแบบที่ใช้คำนวณได้ง่ายและมีความยืดหยุ่นกว่า โดยที่รูปแบบอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งนี้เป็นการส่งของ $t$ ในช่วง $a \leq t \leq b$ ที่อยู่บนแกน $t$ ไปทั่วถึงจุดบนเส้นโค้ง $C$ ที่อยู่ในปริภูมิ $xyz$ ด้วยเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}(t)$ หมายความว่าทุกจุด $t$ ที่อยู่ในช่วงนั้นจะถูกส่งไปยังจุดบนเส้นโค้ง $C$ ที่มีเวกเตอร์ตำแหน่งกำกับ ดังรูป 3.48




รูปที่ 3.48 การส่ง

และในการหาปริพันธ์เชิงผิวก็เช่นเดียวกัน เราก็ใช้ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมแทนพื้นผิว $S$ เนื่องจากเป็นรูปแบบที่ใช้คำนวณได้ง่ายและมีความยืดหยุ่นกว่า โดยที่รูปแบบอิงตัวแปรเสริมของพื้นผิวต้องมีตัวแปรเสริม 2 ตัว คือ $u$ และ $v$ ดังนั้นรูปแบบอิงตัวแปรเสริมของพื้นผิว $S$ ในปริภูมิ คือ

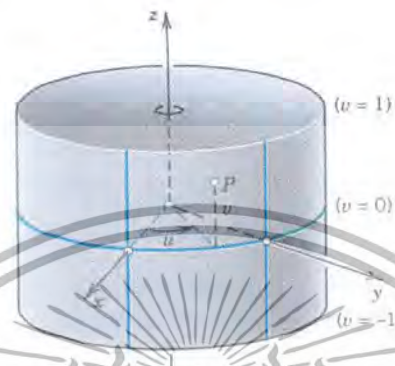
$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}\ ,\ (u, v) \text{ อยู่ใน } R \tag{3.96}$$

โดยที่ $R$ คือ ขอบเขตในระนาบ $uv$ ซึ่งการส่งนี้ จะส่งทุกจุด $(u, v)$ ใน $R$ ไปทั่วถึงทุกจุดบน $S$ ด้วยเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}(u, v)$ ดังรูป 3.48

<u>ตัวอย่างที่ 3.54</u> **ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของทรงกระบอก**

**ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = a^2, -1 \le z \le 1$ ที่มีรัศมี $a$ สูง 2 หน่วยและมีแกน $z$ เป็นแกนกลาง มีตัวแทนอิงตัวแปรเสริม**

$$\mathbf{r}(u,v) = [a\cos u, a\sin u, v] = a\cos u\,\mathbf{i} + a\sin u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$$ **(ดังรูป 3.49)**




**รูปที่ 3.49 ทรงกระบอก**

**ตัวแปรเสริม $u, v$ ในตัวแทนอิงตัวแปรเสริมนี้ จะเปลี่ยนไปตามจุดที่อยู่ในสี่เหลี่ยมมุมฉาก $R: 0 \le u \le 2\pi,\ -1 \le v \le 1$ บนระนาบ $u, v$ และส่วนประกอบของ $\mathbf{r}(u, v)$ คือ**

$$x = a\cos u, \qquad y = a\sin u, \qquad z = v$$

**เส้นโค้ง $v$ = ค่าคงที่จะเป็นรูปวงกลมที่ขนานกัน เส้นโค้ง $u$ = ค่าคงที่จะเป็นเส้นตรงในแนวดิ่ง และจุด $P$ ในรูป 3.49 คือพิกัด $u = \pi/3 = 60^\circ,\ v = 0.7$** □

<u>ตัวอย่างที่ 3.55</u> **ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของทรงกลม**

**เราสามารถแทนทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม**

$$\mathbf{r}(u, v) = a\cos v\cos u\,\mathbf{i} + a\cos v\sin u\,\mathbf{j} + a\sin v\,\mathbf{k} \tag{3.97}$$

**โดยที่ตัวแปรเสริม $u, v$ จะเปลี่ยนไปในสี่เหลี่ยมมุมฉาก $R$ ในระนาบ $u, v$ ซึ่ง $0 \le u \le 2\pi,\ -\pi/2 \le v \le \pi/2$ ส่วนประกอบของ $\mathbf{r}$ คือ**

$$x = a\cos v\cos u, \qquad y = a\cos v\sin u, \qquad z = a\sin v$$

**เส้นโค้ง $u$ = ค่าคงที่ และ เส้นโค้ง $v$ = ค่าคงที่ คือ เส้นแวง และเส้นขนานบน S รูปแบบนี้มักนำไปใช้ประโยชน์ทางภูมิศาสตร์เพื่อวัดเส้นละติจูด และลองจิจูดของตำแหน่งบนโลก**

**ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมอีกรูปแบบหนึ่งของทรงกลม คือ**

$$\mathbf{r}(u,v) = a\cos u \sin v\,\mathbf{i} + a\sin u \sin v\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}$$

โดยที่ $0 \le u \le 2\pi,\quad 0 \le v \le \pi$ □

<u>ตัวอย่างที่ 3.56</u> ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของทรงกรวย

ทรงกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le H$ สมารถแทนด้วย

$$\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u] = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$$

โดยที่ $u, v$ แปรผันตามจุดที่อยู่ในพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก $R: 0 \le u \le H, 0 \le v \le 2\pi$

ส่วนประกอบของ $\mathbf{r}(u, v)$ คือ

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = u$$ □

**ระนาบสัมผัสและเวกเตอร์ปกติของพื้นผิว**

เวกเตอร์ปกติของพื้นผิว $S$ ที่จุด $P$ คือ เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบสัมผัสที่จุด $P$ (ดังรูป 3.50)

**รูปที่ 3.50 ระนาบสัมผัสและเวกเตอร์ปกติของพื้นผิว**

ระนาบสัมผัส คือ ระนาบที่มีเวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้งทั้งหมดบนพื้นผิว $S$ ที่ผ่านจุด $P$ และเนื่องจาก $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของ $S$ ดังสมการ (3.96) ดังนั้นจะได้เส้นโค้ง $C$ อยู่บนพื้นผิว $S$ ซึ่งกำหนดจากคู่อันดับของฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง(ที่ไม่ใช่ค่าคงที่ทั้งคู่)

$$u = u(t), \qquad v = v(t)$$

ทำให้ทุกจุดบนเส้นโค้ง $C$ มีเวกเตอร์ตำแหน่ง $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ กำกับ สมมติว่าฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้วอนุพันธ์ของเส้นโค้ง $C$ ตามกฎลูกโซ่ คือ

$$\tilde{\mathbf{r}}'(t) = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}u' + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}v'$$

โดยที่ $\mathbf{r}_u$และ $\mathbf{r}_v$ ที่จุด $P$ เป็นส่วนประกอบเวกเตอร์สัมผัสที่จุด $P$ ซึ่งสมมติให้เวกเตอร์ทั้งสองเป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้นผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\mathbf{r}_u$และ $\mathbf{r}_v$ คือเวกเตอร์ปกติ $\mathbf{N}$ ของพื้นผิว $S$ ที่จุด $P$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta \neq 0 \tag{3.98}$$

และเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย **n** ของพื้นผิว $S$ ที่จุด $P$ คือ(ดังรูป **3.50**)

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|}\mathbf{N} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \tag{3.99}$$

ถ้าแทน $S$ ด้วย $g(x, y, z) = 0$ แล้ว จากทฤษฎีบทที่ 3.34 ในบทที่ 3.1.9 จะได้

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\operatorname{grad} g\|}\operatorname{grad} g \tag{3.99*}$$

เราเรียกพื้นผิว $S$ ว่าเป็นพื้นผิวเรียบ ถ้าเวกเตอร์ปกติต่อเนื่องบนพื้นผิว $S$
และ เรียกพื้นผิว $S$ ว่าเป็นพื้นผิวเรียบรายจุด ถ้าประกอบด้วยส่วนของพื้นผิวเรียบที่ไม่จำกัด

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.52</u> (ระนาบสัมผัสและเวกเตอร์ปกติของพื้นผิว)

ถ้าพื้นผิว $S$ คือ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ดังสมการ (3.96) ซึ่งมีอนุพันธ์ $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ และ $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ ตามสมการ (3.98) ที่ทุกๆ จุดบนพื้นผิว $S$ แล้ว ที่ทุกๆ จุดบนพื้นผิว $S$ จะระนาบสัมผัสเพียงหนึ่งเดียวที่ผ่านจุด $P$ และแผ่ขยายโดย $\mathbf{r}_u$ และ $\mathbf{r}_v$ และมีเวกเตอร์ปกติเพียงหนึ่งเดียวที่มีทิศทางขึ้นอยู่กับจุดบนพื้นผิว $S$

<u>ตัวอย่างที่ 3.57</u> เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของทรงกลม

จากสมการ (3.99*) จะได้ว่าทรงกลม $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ มีเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.58</u> เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของทรงกรวย

เราไม่พิจารณาเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย **n** ที่จุดยอดของทรงกรวย $g(x, y, z) = -z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ในตัวอย่างที่ 3.56 เนื่องจากเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยที่ได้จากสมการ (3.99*) คือ

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) \qquad \square$$

### 3.2.6 ปริพันธ์เชิงผิว

ในการนิยามปริพันธ์เชิงผิวเราให้พื้นผิว $S$ แทนด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริม

$$\mathbf{r}(u,v)=[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k} \quad (u,v) \text{ อยู่ในบริเวณ } R \tag{3.100}$$

และสมมติให้ $S$ เป็นพื้นผิวเรียบที่มีเวกเตอร์ปกติ

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v \text{ และมีเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย } \mathbf{n}=\frac{1}{\|\mathbf{N}\|}\mathbf{N} \tag{3.101}$$

ที่ทุกๆ จุด (บางทียกเว้นที่จุดปลายหรือที่ขอบ เช่น ทรงลูกบาศก์ หรือทรงกรวย) แล้วปริพันธ์เชิงผิวบนพื้นผิว $S$ ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\mathbf{F}$ คือ

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA=\iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)]\cdot\mathbf{N}(u,v)\,du\,dv \tag{3.102}$$

โดยมีปริพันทธ์เป็นปริมาณสเกลาร์เนื่องจากเป็นค่าที่เกิดจากผลคูณเชิงสเกลาร์ และ $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์ส่วนประกอบปกติของ $\mathbf{F}$ รูปแบบปริพันธ์นี้เกิดขึ้นมาจากปัญหาของการไหลซึ่งเป็นปริพันธ์ที่วัดอัตราการไหลผ่านพื้นผิว $S$ (เท่ากับมวลของของไหลที่ไหลผ่าน $S$ ในหนึ่งหน่วยเวลา) เมื่อ $\mathbf{F}=\rho\mathbf{v}$ โดยที่ $\rho$ เป็นความหนาแน่นของของไหลและ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ความเร็วของการไหล เราอาจเรียกปริพันธ์เชิงผิวดังสมการ (3.102) เป็นปริพันธ์การไหล

ปริพันธ์ทางขวาของสมการ (3.102) คือคือปริพันธ์สองชั้นบนขอบเขต $R$ ที่อยู่ในระนาบ $uv$ ที่เกิดจากพื้นผิว $S$ และจะหาค่าของปริพันธ์ได้ถ้ามีฟังก์ชันเวกเตอร์ $\mathbf{F}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและมีพื้นผิวเรียบ $S$ และเนื่องจากเงื่อนไขทั้งสอง ทำให้ $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จากนิยามของผลคูณเชิงเวกเตอร์ จะได้ $\|\mathbf{N}\|=\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|$ เป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{r}_u$ และ $\mathbf{r}_v$ ดังนั้น $dA=\|\mathbf{N}\|\,du\,dv$ จะเป็นส่วนประกอบพื้นที่ของพื้นผิว $S$ เมื่อคูณด้วย $\mathbf{n}$ และแทนค่าในสมการ (3.101) จะได้

$$\mathbf{n}\,dA=\mathbf{n}\,\|\mathbf{N}\|\,du\,dv=\mathbf{N}\,du\,dv \tag{3.102*}$$

และเมื่อคูณเชิงสเกลาร์ด้วย $\mathbf{F}$ แล้วหาปริพันธ์ จะได้ผลลัพธ์ดังสมการ (3.102)

ในพจน์ของส่วนประกอบ เราให้

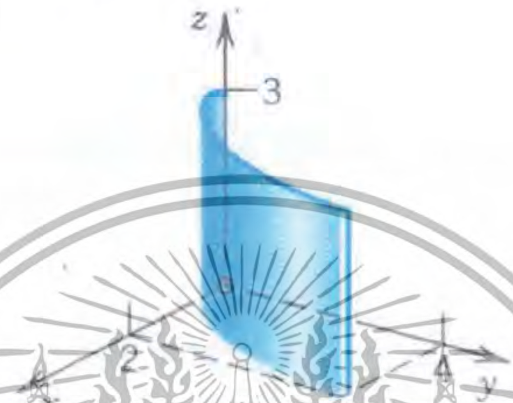
$$\begin{aligned}
\mathbf{F}&=[F_1,F_2,F_3]=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}\\
\mathbf{n}&=[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]=\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k}\\
\mathbf{N}&=[N_1,N_2,N_3]=N_1\mathbf{i}+N_2\mathbf{j}+N_3\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{3.102**}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.102) จะได้

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA&=\iint_S (F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)\,dA\\
&=\iint_R (F_1N_1+F_2N_2+F_3N_3)\,du\,dv
\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.59</u> การไหลผ่านพื้นผิว

จงคำนวณการไหลของน้ำผ่านทรงกระบอกเชิงพาราโบลา $S: y = x^2, 0 \le x \le 2, 0 \le z \le 3$ (**ดังรูป 3.51**) ถ้าให้เวกเตอร์ความเร็ว $\mathbf{v} = \mathbf{F} = [3z^2, 6, 6xz]$ เป็นเวกเตอร์ที่วัดอัตราการไหลของน้ำในหน่วย เมตร/วินาที (โดยทั่วไป $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ แต่น้ำมีความหนาแน่น $\rho = 1$ กรัม/ลูกบาศก์เซนติเมตร = 1 ตัน/ลูกบาศก์เมตร)




**รูปที่ 3.51 ภาพตัดของท่อทรงกระบอก**

<u>วิธีทำ</u> ให้ $x = u$ และ $z = v$ จะได้ $y = x^2 = u^2$

ดังนั้นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของ $S$ คือ

$$\mathbf{r} = [u, u^2, v] \qquad (0 \le u \le 2, 0 \le v \le 3)$$

จะได้ $\mathbf{r}_u = [1, 2u, 0]$

$$\mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [2u, -1, 0]$$

ให้ $\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v)]$

บนพื้นผิว $S$ $\mathbf{F}(s) = [3v^2, 6, 6uv]$ ดังนั้น $\mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{N} = 6uv^2 - 6$

ดังนั้น เมื่อหาปริพันธ์ จะได้

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_0^3 \int_0^2 (6uv_2 - 6)\,du\,dv = \int_0^3 (3u^2v^2 - 6u)\Big|_{\mathbf{u=0}}^{2} dv$$

$$= \int_0^3 (12u^3 - 12)\,dv = (4v^3 - 12v)\Big|_{v=0}^{3} = 108 - 36$$

= 72 ลูกบาศก์เมตร/วินาที

หรือ 72000 ลิตร/วินาที □

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.53</u> การเปลี่ยนทิศทาง

การแทนเวเตอร์ **n** ด้วย – **n**(หรือแทน **N** ด้วย –**N**) คือ การคูณปริพันธ์ในสมการ (3.102) หรือ (3.103) ด้วย –1

<u>ตัวอย่างที่ 3.60</u> การเปลี่ยนทิศทางในการหาปริพันธ์เชิงผิว

ในตัวอย่างที่ 3.55 เราแทน $S$ ด้วย

$$\tilde{\mathbf{r}} = [v, v^2, u], 0 \le v \le 2, 0 \le u \le 3$$

จะได้

$$\tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{r}}_u \times \tilde{\mathbf{r}}_v = [0,0,1] \times [1, 2v, 0] = [-2v, 1, 0]$$

และสำหรับ $\mathbf{F} = [3z^2, 6, 6xz]$

จะได้ $\tilde{\mathbf{F}}(s) = [3u^2, 6, 6uv]$

ดังนั้น

$$\tilde{\mathbf{F}}(s) \cdot \tilde{\mathbf{N}} = -6u^2 v + 6$$

และ

$$\iint_R \tilde{\mathbf{F}}(s) \cdot \tilde{\mathbf{N}}\, dv\, du = \int_0^3 \int_0^2 (-6u^2 v + 6)\, dv\, du = \int_0^3 (-12u^2 + 12)\, du \qquad \square$$

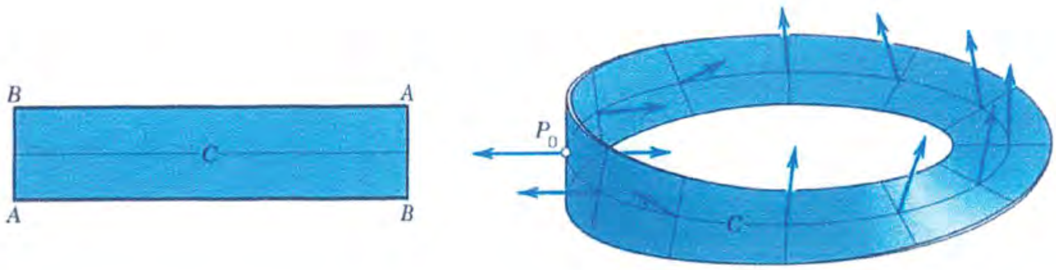
**ทิศทางของพื้นผิว**

**พื้นผิวเรียบ**

ถ้าพื้นผิว $S$ เป็นพื้นผิวเรียบและ $P$ เป็นจุดใดๆ บนพื้นผิวที่มีเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย แล้วเราเรียกทิศทางของ **n** ว่าทิศทางตามเวกเตอร์ปกติค่าบวก ของพื้นผิว $S$ ที่จุด $P$

จะกล่าวว่าพื้นผิว $S$ เป็นพื้นผิวที่มีทิศทางถ้าทิศทางตามเวกเตอร์ปกติค่าบวก ที่จุด $P_0$ บนพื้นผิว $S$ ต่อเนื่องกันบนเส้นทางเพียงหนึ่งเดียวที่ต่อเนื่องบนพื้นผิวทั้งหมด

ในทางปฏิบัติ ส่วนของพื้นผิวจะเป็นพื้นผิวที่มีทิศทางเสมอ ที่ทำให้พื้นผิวทั้งหมดมีทิศทาง แต่แนวคิดตามทฤษฎีนี้อาจไม่เป็นจริงในบางกรณี เช่น พื้นผิวของ **Möbius strip** (ดังรูป **3.52**) เมื่อเวกเตอร์ปกติซึ่งเริ่มต้นที่ตำแหน่ง $P_0$ และต่อเนื่องบนเส้นโค้ง $C$ ดังรูป **3.52** ปรากฏว่าเมื่อเวกเตอร์ปกติเคลื่อนกลับมาที่จุด $P_0$ จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์เริ่มต้น



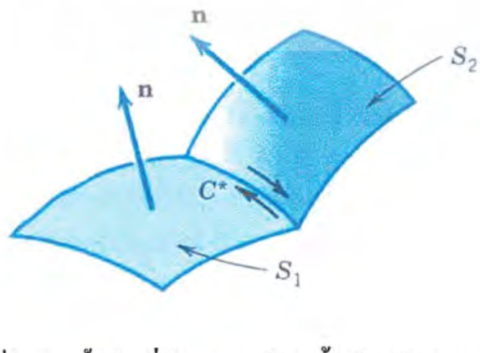

รูปที่ 3.52 Möbius strip

**พื้นผิวเรียบเป็นช่วง**

ถ้า $S$ เป็นพื้นผิวเรียบที่มีทิศทางและล้อมรอบด้วยเส้นโค้งปิดเชิงเดียว $C$ แล้วเราสามารถเชื่อมพื้นผิว $S$ ที่มี 2 ทิศทางที่ต่างกันด้วยทิศทางของเส้นโค้ง $C$ ได้ ดังรูป 3.53 และเมื่อ $S$ เป็นพื้นผิวเรียบเป็นช่วงแล้วเราเรียกพื้นผิวนี้ว่าเป็นพื้นผิวที่มีทิศทางถ้าเราสามารถกำหนดทิศทางตามเส้นโค้ง $C^*$ ซึ่งเป็นเส้นโค้งร่วมที่ล้อมรอบพื้นผิว $S_1$ และ $S_2$ ได้โดยทิศทางบวกของเส้นโค้ง $C^*$ ที่สัมพันธ์กับ $S_1$ จะตรงข้ามกับทิศทางบวกของ $C^*$ ที่สัมพันธ์กับ $S_2$


รูปที่ 3.53 ทิศทางของพื้นผิว

จากรูป 3.54 แสดงพื้นผิวที่ประกอบด้วยพื้นผิวเรียบ 2 ส่วน




รูปที่ 3.54 พื้นผิวที่ประกอบด้วยพื้นผิวเรียบ 2 ส่วน

**รูปแบบอื่นของการเขียนปริพันธ์เชิงเส้น**

$$\text{(a)} \quad \iint_S F_1 \cos\alpha\, dA = \iint_S F_1 dy\, dz$$

$$\text{(b)} \quad \iint_S F_1 \cos\beta\, dA = \iint_S F_1 dz\, dx \tag{3.104}$$

$$\text{(c)} \quad \iint_S F_1 \cos\gamma\, dA = \iint_S F_1 dx\, dy$$

และ

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iint_S (F_1 dy\, dz + F_2 dz\, dx + F_3 dx\, dy) \tag{3.105}$$

ตัวอย่างที่ 3.61 ตรวจสอบผลเฉลยในตัวอย่างที่ 1 ด้วยสมการ (3.105)

วิธีทำ $F_1 = 3z^2, F_2 = 6, F_3 = 6xz \quad S: y = x^2$ ที่มี $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ และ $0 \le z \le 3$ เป็นขอบเขตจำกัดของปริพันธ์

$$\mathbf{N} = \|\mathbf{N}\|\mathbf{n} = \|\mathbf{N}\|[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma] = [2u, -1, 0] = [2x, -1, 0]$$

แสดงว่า $\cos\alpha > 0, \cos\beta < 0$ ทำให้สมการ (3.104b) เป็นลบ และ $\cos\gamma = 0$ ดังนั้น

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \int_0^3\int_0^4 3z^2 dy\, dz - \int_0^2\int_0^3 6\, dz\, dx = 4\cdot 3^2 - 6\cdot 3\cdot 2 = 72 \qquad \square$$

เมื่อ $S$ เป็นกราฟของฟังก์ชัน $f$ ที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องบนบริเวณ $R$ ในระนาบ $xy$ ซึ่งเป็นบริเวณเชิงเดียวแล้วเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของพื้นผิว $S$ ตามบทที่ 3.2.6 คือ

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}} \tag{3.106}$$

หรือ

$$\mathbf{n} = \frac{f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}} \tag{3.107}$$

โดยเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยขึ้นอยู่กับทิศทางของพื้นผิว $S$ เมื่อ $\mathbf{n}$ มีทิศชี้ขึ้น(ส่วนประกอบของ $\mathbf{k}$ เป็นบวก)จะใช้สมการ (3.106) และเมื่อ $\mathbf{n}$ มีทิศชี้ลง(ส่วนประกอบของ $\mathbf{k}$ เป็นลบ)จะใช้สมการ (3.107) ถ้า $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ และ $\mathbf{n}$ มีทิศชี้ขึ้นแล้ว

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iint_R (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k})\cdot\Big(\frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_x)^2 + 1}}\Big)\sqrt{(f_x)^2 + (f_x)^2 + 1}\, dA$$

ดังนั้น

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iint_R [-M(x,y,f(x,y))f_x(x,y)\mathbf{i} - N(x,y,f(x,y))f_y(x,y)\mathbf{j} + P(x,y,f(x,y))\mathbf{k}]\, dA \tag{3.108}$$

และถ้า $\mathbf{n}$ มีทิศชี้ลงแล้ว

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint_R [M(x,y,f(x,y))f_x(x,y)\mathbf{i} + N(x,y,f(x,y))f_y(x,y)\mathbf{j} - P(x,y,f(x,y))\mathbf{k}]\,dA \tag{3.109}$$

**ปริพันธ์เชิงผิวโดยไม่พิจารณาทิศของพื้นผิว**

**รูปแบบหนึ่งของปริพันธ์เชิงผิว คือ**

$$\iint_S G(\mathbf{r})\,dA = \iint_R G(\mathbf{r}(u,v))\,\|\mathbf{N}(u,v)\|\,du\,dv \tag{3.110}$$

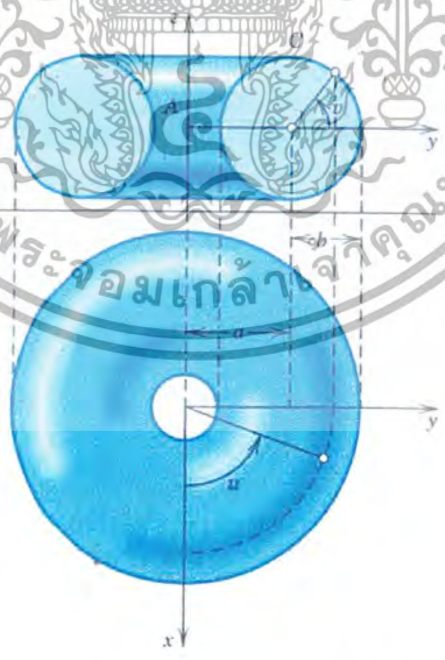
**เมื่อ** $dA = \|\mathbf{N}\|\,du\,dv = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv$ **เป็นส่วนประกอบพื้นที่ของพื้นผิว** $S$ **ที่แทนด้วยสมการ** (3.100)

ถ้า $G(\mathbf{r})$ เป็นความหนาแน่นเชิงมวลของ $S$ แล้ว สมการ (3.110) คือมวลรวมของ $S$ และถ้า $G$ = 1 แล้ว l สมการ (3.110) คือ พื้นที่ $A(S)$ ของ $S$

$$A(S) = \iint_S dA = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv \tag{3.111}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.62</u> รูปแบบและพื้นที่ของพื้นผิวทรงห่วงยาง

พื้นผิวรูปโดนัท $S$ เกิดจากการหมุนวงกลม $C$ รอบเส้นตรง $L$ โดยที่ $C$ ไม่ตัดหรือสัมผัสกับเส้นตรง $L$ และถ้า $L$ คือ แกน $z$ และ $C$ มีรัศมี $b$ และมีจุดศูนย์กลางของวงกลมห่างจากเส้นตรง $L$ เป็นระยะ $a(> b)$ดังรูป 3.55




**รูปที่ 3.55 พื้นผิวรูปโดนัท**

แล้วแทนพื้นผิว $S$ ด้วย

$$\mathbf{r}(u,v) = (a + b\cos v)\cos u\,\mathbf{i} + (a + b\cos v)\sin u\,\mathbf{j} + b\sin v\,\mathbf{k}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{r}_u = -(a + b\cos v)\sin u\,\mathbf{i} + (a + b\cos v)\cos u\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_v = -b\sin v\cos u\,\mathbf{i} - b\sin v\sin u\,\mathbf{j} + b\cos v\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_v = b(a + b\cos v)[\cos u\cos v\,\mathbf{i} + \sin u\cos v\,\mathbf{j} + \sin v\,\mathbf{k}]$$

จะได้ $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = b(a + b\cos v)$ และจากสมการ (3.111) จะได้ผลรวมพื้นที่ของโดนัท คือ

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\cos v)\,du\,dv = 4\pi^2 ab \qquad (3.112)$$

**รูปแบบ $z = f(x, y)$**

ถ้าพื้นผิว $S$ คือ $z = f(x,y)$ และกำหนดให้ $u = x, v = y, r = [u, v ,f]$ แล้ว

$$\|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \|[1,0,f_u] \times [0,1,f_v]\| = \|[-f_u, -f_v, 1]\| = \sqrt{1 + f_u^{\,2} + f_v^{\,2}}$$

และเนื่องจาก $f_u = f_x, f_v = f_y$ ดังนั้น

$$\iint_S g(\mathbf{r})\,dA = \iint_{R^*} g(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \qquad (3.113)$$

โดยที่ $R^*$ เป็นภาพฉายของพื้นผิว $S$ บนระนาบ $xy$ (ดังรูป 3.56)


**รูปที่ 3.56 ภาพฉายของพื้นผิวบนระนาบ**

และเวกเตอร์ปกติ **N** บนพื้นผิว $S$ มีทิศชี้ขึ้น แต่ถ้าเวกเตอร์ปกติ **N** มีทิศชี้ลง จะได้ปริพันธ์ทางขวามีเครื่องหมายตรงข้าม

จากสมการ (3.112) ถ้า $g = 1$ เราจะได้พื้นที่ $A(S)$ ของ $S : z = f(x, y)$ ที่มีรูปแบบ

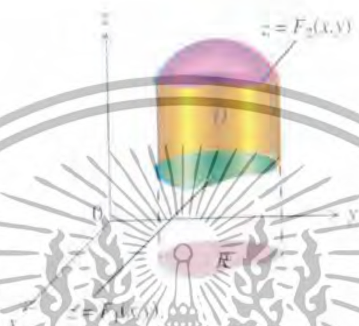
$$A(S) = \iint_{R^*}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \qquad (3.114)$$

### 3.2.7 ปริพันธ์สามชั้น

ในเนื้อหาส่วนนี้จะกล่าวถึงหาปริพันธ์สามชั้นก่อนที่จะนำไปสู่ทฤษฎีที่สำคัญซึ่งเป็นทฤษฎีที่กล่าวถึงการแปลงปริพันธ์เชิงผิวให้อยู่ในรูปปริพันธ์สามชั้น ที่นี้เรียกว่าทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ของเกาส์ โดยทฤษฎีนี้มีความเกี่ยวข้องกับไดเวอร์เจนซ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

สำหรับนิยามของปริพันธ์สามชั้น เราให้ $R$ เป็นบริเวณเชิงเดียวบนระนาบ $xy$ และให้ $F_1$ และ $F_2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $R$ โดยที่

$F_1(x,y,z) \le F_2(x,y,z)$ สำหรับ$(x,y)$ ที่อยู่ใน $R$ **ดังรูป 3.57**




**รูปที่ 3.57 ปริพันธ์สามชั้น**

และให้ $D$ เป็นบริเวณ 3 มิติระหว่างกราฟของ $F_1$ และ $F_2$ ที่อยู่บนบริเวณ $R$

จากนั้นแบ่งบริเวณ $D$ ออกเป็นกล่องสี่เหลี่ยมเล็กๆ จำนวน $n$ กล่องโดยตัดด้วยระนาบที่ขนานกับแกน $xyz$ และกำหนดหมายเลขแต่ละกล่องด้วย $1, 2, \ldots, n$ ลือกจุด $(x_k, y_k, z_k)$ ใดๆ ที่อยู่ในกล่องที่ $k$ จะได้

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta v_k$$

โดยที่ $\Delta v_k$ คือปริมาตรของกล่อง $k$ ถ้าเราหาผลบวกเมื่อให้$n$ มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ โดยที่ความยาวของกล่องสี่เหลี่ยมทั้งหมดที่มากที่สุดเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ $n$ มีค่าอนันต์ จะได้ลำดับ $\mathbf{J}_{n_1}, \mathbf{J}_{n_2}, \ldots$ ลู่เข้าสู่ค่าหนึ่ง ซึ่งเรียกลิมิตนี้ว่า ปริพันธ์สามชั้น ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนบริเวณ $D$ เขียนแทนด้วย

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{หรือ} \quad \iiint_D f(x,y,z)\,dV$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.54</u> ให้ $D$ เป็นบริเวณ 3 มิติระหว่างกราฟของสองฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง$F_1$ และ $F_2$ บนบริเวณเชิงเดียวแนวดิ่งหรือบริเวณเชิงเดียวแนวราบ $R$ ที่อยู่ในระนาบ $xy$ ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $D$ แล้ว

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left( \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA$$

ในการหาค่าของ $\int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ เทียบ $z$ เมื่อทั้ง $x$ และ $y$ เป็นค่าคงที่ จะได้ค่าที่ขึ้นกับ $x$ และ $y$ ถ้า $R$ เป็นบริเวณเชิงเดียวแนวดิ่งระหว่างกราฟของฟังก์ชัน $g_1$ และ $g_2$ บน $[a,b]$ แล้ว จาก

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y,z)\,dy\,dx$$

จะได้ว่า

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \Big[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big( \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \Big) dy \Big] dx \tag{3.115}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $R$ เป็นบริเวณแนวราบระหว่างกราฟของฟังก์ชัน $h_1$ และ $h_2$ บนช่วง $[c,d]$ แล้ว จาก

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

จะได้ว่า

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \Big[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \Big( \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \Big) dx \Big] dy \tag{3.116}$$

ปริพันธ์ทางขวาของสมการ (3.115) และ (3.116) เรียกว่า ปริพันธ์ซ้อนสามชั้น ซึ่งอาจเขียนในรูป

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.63</u> ให้ $R$ เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานในระนาบ $xy$ ที่กำหนดบริเวณด้วยเส้นตรง $x = 2, x = \frac{5}{2}, y = 0$ และ $y = \pi$ และให้ $D$ เป็นกล่องสี่เหลี่ยมด้านขนานระหว่างกราฟ $z = 0$ และ $z = 2$ บน $R$

จงคำนวณ $\iiint_D zx \sin xy\,dV$

<u>วิธีทำ</u> เราได้

$$\begin{aligned}
\iiint_D zx\sin xy\,dV &= \int_2^{5/2}\int_0^{\pi}\int_0^2 zx\sin xy\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^{5/2}\int_0^{\pi}\left(\frac{z^2x}{2}\sin xy\right)\Bigg|_0^2 dydx \\
&= \int_0^{5/2}\int_0^{\pi} 2x\sin xy\,dy\,dx \\
&= \int_0^{5/2} -2\cos xy\,\Big|_0^{\pi}\,dx \\
&= \int_0^{5/2} (-2\cos \pi x)\,dx \\
&= (2x - \frac{2}{\pi}\sin \pi x)\Bigg|_2^{5/2} \\
&= (5 - \frac{2}{\pi}\sin\frac{5\pi}{2}) - (4 - \frac{2}{\pi}\sin 2\pi)
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}$$ □

**การหาปริมาตรจากปริพันธ์สามชั้น**

ให้ $D$ เป็นบริเวณ 3 มิติระหว่างกราฟของสองฟังก์ชัน $F_1$ และ $F_2$ ที่ต่อเนื่องบนบริเวณ $R$ ในระนาบ $xy$ แล้ว ปริมาตร $V$ ของ $D$ นิยามโดย

$$V = \iiint_D 1\, dV \tag{3.117}$$

จากทฤษฎีบทที่ 3.53 เราจะได้ปริมาตรในรูปปริพันธ์สองตัวแปรบน $R$ คือ

$$V = \iiint_D 1\, dV = \iint_R \left( \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} 1\, dz \right) dA = \iint_R [F_2(x,y) - F_1(x,y)]\, dA \tag{3.118}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.64</u> ให้ $D$ เป็นพื้นผิวทึบใน octant ที่ 1 ระหว่างกราฟของ

$z = x^2 + 2y + 1$ และ $z = y + 2$

จงหาปริมาตร $V$ ของ $D$

<u>วิธีทำ</u> อันดับแรกเราต้องหาพื้นที่ $R$

ที่จุด $(x,y,z)$ ตรงจุดตัดของพื้นผิว $z = x^2 + 2y + 1$ และ $z = y + 2$ เราได้ว่า

$x^2 + 2y + 1 = y + 2$ จะได้

$$y = 1 - x^2$$

เนื่องจาก $D$ อยู่ในอัฐภาคที่ 1 $R$ จึงอยู่ในอัฐภาคที่ 1 ด้วยดังนั้น $R$ เป็นบริเวณแนวดิ่งระหว่างกราฟของ $y = 0$ และ $y = 1 - x^2$ บน $[0, 1]$ และเนื่องจาก $x^2 + 2y + 1 \le y + 2$ สำหรับทุก $(x, y)$ ใน $R$

$$V = \iiint_D 1\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_{x^2+2y+1}^{y+2} 1\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} z \Big|_{x^2+2y+1}^{y+2} dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x - y)\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 [(1-x^2)y - \frac{1}{2}y^2] \Big|_0^{1-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 [(1-x^2)^2 - \frac{1}{2}(1-x^2)^2]\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}) \Big|_0^1 = \frac{4}{15}$$ □

### 3.2.8 ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์

**ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ของเกาส์**

เราสามารถแปลงปริพันธ์ 3 ชั้นให้อยู่ในรูปปริพันธ์เชิงผิวที่ล้อมรอบขอบเขต 3 มิติ $D$ ได้ซึ่งเป็นทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ที่ต้องอาศัยสูตรไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน

$\mathbf{F} = M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + P\,\mathbf{k}$

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \tag{3.119}$$

ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์เป็นทฤษฎีที่สำคัญในการสร้างสมการพื้นฐานของการไหลของของไหล การส่งผ่านความร้อน ฯลฯ

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.55</u> ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ของเกาส์

(การแปลงปริพันธ์ระหว่างปริพันธ์ปริมาตรและปริพันธ์พื้นที่)

ให้ $D$ เป็นขอบเขต 3 มิติที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิว $S$ ที่มีทิศทางซึ่งกำหนดด้วยเวกเตอร์ $\mathbf{n}$ ที่มีทิศออกจาก $D$ และให้ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่สามารถหาอนุพันธ์ส่วนประกอบบน $D$ ได้แล้ว (ดังรูป 3.58)


**รูปที่ 3.58 ส่วนประกอบของสนามเวกเตอร์**

$$\iiint_D \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA \tag{3.120}$$

ถ้า $\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$ แล้ว

$$\iiint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S (M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)\,dA \tag{3.121*}$$

$$\iiint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S M\,dy\,dz + N\,dz\,dx + P\,dx\,dy \tag{3.121}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.65</u> จงคำนวณหา $\iint_S (7x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dA$ บนทรงกลม $S: x^2+y^2+z^2 = 4$ โดยใช้สมการ (3.120) และหาโดยตรง

<u>วิธีทำ</u> (a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div}[7x, 0, -z] = \operatorname{div}[7x\mathbf{i} - z\mathbf{k}] = 7 - 1 = 6$

คำตอบคือ $6 \cdot (4/3)\pi \cdot 2^3 = 64\pi$

(b) แทนสมการทรงกลม $S$ ด้วย $\mathbf{r}(u, v) = a \cos v \cos u\, \mathbf{i} + a \cos v \sin u\, \mathbf{j} + a \sin v\, \mathbf{k}$ $(a = 2)$ และใช้ $\mathbf{n}\, dA = \mathbf{N}\, du\, dv$

$$S: \mathbf{r} = [2 \cos v \cos u, 2 \cos v \sin u, 2 \sin v]$$

แล้ว $\mathbf{r}_u = [-2 \cos v \sin u, 2 \cos v \cos u, 0]$

$\mathbf{r}_v = [-2 \sin v \cos u, -2 \sin v \sin u, 2 \cos v]$

$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [4 \cos^2 v \sin u, 4 \cos^2 v \sin u, 4 \cos v \sin v]$

บนพื้นผิว $S$ เราได้ $x = 2 \cos v \cos u$, $z = 2 \sin v$ เพื่อที่ $\mathbf{F} = [7x, 0, -z]$ อยู่บน $S$

$\mathbf{F}(S) = [14 \cos v \cos u, 0, -2 \sin v]$ และ

$\mathbf{F}(S) \cdot \mathbf{N} = (14 \cos v \cos u)\, 4 \cos^2 v \cos u + (-2 \sin v)\, 4 \cos v \sin v$

$= 56 \cos^3 v \cos^2 u - 8 \cos v \sin^2 v$

หาปริพันธ์พื้นผิว $S$ บน $u$ จาก 0 ถึง $2\pi$ จะได้

$\pi \cdot 56 \cos^3 v - 2\pi \cdot 8 \cos v \sin^2 v$

ปริพันธ์ของ $\cos v \sin^2 v$ คือ $(\sin^3 v)/3$ และปริพันธ์ของ $\cos^3 v = \cos v\,(1 - \sin^2 v)$ คือ $\sin v - (\sin^3 v)/3$ สำหรับบนพื้นผิว $S$ เราได้ $-\pi/2 \le v \le \pi/2$ เมื่อแทนค่าจำกัดจะได้

$56\pi(2\text{-}2/3) - 16\pi \cdot (2/3) = 64\pi$ □

**การประยุกต์ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์**

มีการนำทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ ไปประยุกต์ใช้กับเรื่องต่างๆ มากมาย โดยจะยกให้เห็นดังตัวอย่างข้างล่าง โดยที่ในแต่ละตัวอย่าง เราสมมติให้บริเวณสามมิติและฟังก์ชันที่เกิดขึ้นเป็นไปตามเงื่อนไขของทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ และให้ $\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศชี้ออกจากพื้นผิว

<u>ตัวอย่างที่ 3.66</u> **การอธิบายความเป็นอิสระจากพิกัดของไดเวอร์เจนซ์**

เราได้นิยามไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน **F** ในรูปของพิกัดแล้วดังสมการ (3.119) แต่เราต้องใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ แสดงว่า div **F** เป็นอิสระจากการเลือกพิกัดใดๆ

เริ่มแรกต้องจำไว้ว่าคุณสมบัติพื้นฐานของปริพันธ์สามชั้นเหมือนกับปริพันธ์สองชั้น และทฤษฎีค่าเฉลี่ยของปริพันธ์สามชั้นยืนยันว่าสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง $f(x,y,z)$ ใดๆในขอบเขตสามมิติ $D$ จะมีจุด $Q(x_0, y_0, z_0)$ ที่ทำให้

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = f(x_0,y_0 z_0)V \text{ ; } V \text{ คือปริมาตรของ } D \tag{3.122}$$

จากนั้น สลับข้างสมการทั้งสองข้าง แล้วหารด้วย $V$ และให้ $f = \text{div}\,\mathbf{F}$ จะได้

$$\text{div}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{V}\iiint_D \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \frac{1}{V}\iiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA \tag{3.123}$$

โดยที่ $S$ เป็นพื้นผิวที่ล้อมรอบขอบเขต $D$

เลือกจุด P:$(x_1,y_1,z_1)$ ใน $D$ และให้ $D$ มีขนาดเล็กเข้าหาจุด $P$ เพื่อทำให้ระยะทาง $d(D)$ มากสุดระหว่างจุดใน $D$ กับ $P$ เข้าใกล้ 0 แล้ว $Q(x_0,y_0,z_0)$ ต้องเข้าใกล้ $P$ ดังนั้นจากสมการ (3.123) จะได้

$$\text{div}\,\mathbf{F}(x_1,y_1,z_1) = \lim_{d\to 0}\frac{1}{V}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA \tag{3.124}$$

ซึ่งบางครั้งเราใช้สูตรนี้อธิบายนิยามของไดเวอร์เจนซ์ □

<u>ตัวอย่างที่ 3.67</u> **คำอธิบายของทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ ตามหลักฟิสิกส์**

ในบทนี้เราจะแปลความหมายไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ตามลักษณะ ไดเวอร์เจนซ์ ที่ข้าใจง่าย โดยพิจารณาจากการไหลแบบอัดไม่ได้ของของเหลวที่มีความหนาแน่น$\rho = 1$ คงที่เสมอ นั่นคือไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา เราคำนวณการไหลได้จากสนามเวกเตอร์ความเร็ว $\mathbf{v}(P)$ ที่จุด $P$ ใดๆ

ให้ $S$ เป็นพื้นผิวที่ล้อมรอบขอบเขต3 มิติ $D$ ในปริภูมิและให้ $\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยที่มีทิศพุ่งออกจาก $S$ และให้มวลของของเหลวที่ไหลผ่านพื้นผิวย่อย $\Delta S$ ของ $S$ ที่มีพื้นที่ $\Delta A$ ในหนึ่งหน่วยเวลาจากภายในพื้นผิว $S$ ออกสู่ภายนอก เท่ากับ $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\Delta A$ โดยที่ $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ เป็นส่วนประกอบปกติของ $\mathbf{v}$ ในทิศทางของ $\mathbf{n}$ ที่จุดหนึ่งใน $\Delta S$ ดังนั้นมวลรวมของของเหลวที่ไหลผ่าน $S$ จาก $D$สู่ภายนอกในหนึ่งหน่วยเวลา คือ ปริพันธ์เชิงผิว

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$$

ดังนั้นปริพันธ์นี้ คือ การไหลรวมของของไหลที่ไหลออกจาก $D$ และปริพันธ์

$$\frac{1}{V}\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA \tag{3.125}$$

แทนอัตราการไหลออกจาก $D$โดยเฉลี่ย โดยที่ $V$ เป็นปริมาตรของ $D$ เนื่องจากของเหลวไหลอย่างต่อเนื่องและเป็นของเหลวที่ไม่สามารถบีบอัดได้ ดังนั้นปริมาณการไหลออกจึงคงที่ ถ้าค่าปริพันธ์จาก (3.125) ไม่ใช่ศูนย์แล้วจะต้องมี แหล่งกำเนิดใน $D$ ที่เป็นจุดกำเนิดการไหลหรือเป็นจุดที่ไม่มีการไหลเกิดขึ้น

จากสมการ (3.125) ถ้าเราให้ขนาดของ $D$ เล็กเข้าหาจุด $P$ ใน $D$ แล้วเราจะได้ความเข้มข้นของแหล่งกำเนิด ที่จุด $P$ และจะไม่มีแหล่งกำเนิดใน $D$ ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ซึ่งทำให้

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA = 0 \quad \text{สำหรับพื้นผิวปิด } S \text{ ใดๆใน } D$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 3.68</u> **แบบจำลองกระแสความร้อน และสมการความร้อน**

เรารู้ว่า ความร้อนในร่างกายของคนเรามีทิศทางการไหลจากอุณหภูมิสูงสู่อุณหภูมิที่ต่ำกว่า ซึ่งการทดลองทางวิทยาศาสตร์แสดงให้เห็นว่าอัตราการไหลเป็นสัดส่วนกับเกรเดียนต์ ของอุณหภูมิ หมายความว่ารูปแบบความเร็วของกระแสความร้อนในร่างกาย คือ

$$\mathbf{v} = -K \operatorname{grad} U \tag{3.126}$$

โดยที่ $U(x, y, z, t)$ แทนอุณหภูมิ โดยที่ $t$ คือ เวลา และ $K$ คือการถ่ายเทความร้อนของร่างกายซึ่งในทางฟิสิกส์แล้วถือว่า $K$ เป็นค่าคงที่ และจงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการะแสความร้อนจากข้อมูลที่มี ซึ่งเรียกว่าสมการความร้อน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $D$ เป็นขอบเขตของร่างกายและให้ $S$ เป็นพื้นผิวที่ล้อมรอบ $D$ แล้วปริมาณความร้อนที่ไหลออกจาก $D$ ในหนึ่งหน่วยเวลา คือ

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

โดยที่ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ เป็นส่วนประกอบของ $\mathbf{v}$ ในทิศทางของเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยที่มีทิศชี้ออกจาก $S$ ดังนั้นจากสมการ (3.126) และทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์จะได้ว่า

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA = -K \iiint_D \operatorname{div}(\operatorname{grad} U)\, dx\, dy\, dz = -K \iiint_D \nabla^2 U\, dx\, dy\, dz \tag{3.127}$$

โดยที่ $\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$ เป็นลาปลาซของ $U$

ในทางกลับกันปริมาณความร้อนรวม $H$ ภายใน $D$ คือ

$$H = \iiint_D \sigma\rho U\, dx\, dy\, dz\, H$$

โดยที่ค่าคงที่ $\sigma$ เป็นค่าความร้อนจำเพาะของร่างกายและ $\rho$ เป็นความหนาแน่น (มวล/ปริมาตร)ของวัตถุ ดังนั้นอัตราการลดลงของความร้อนโดยเฉลี่ย คือ

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = -\iiint_D \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

และต้องเท่ากับปริมาณความร้อนที่ออกจาก ดังนั้นจาก (3.127) จะได้

$$\iiint_D \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = -K \iiint_D \nabla^2 U\, dx\, dy\, dz$$

หรือ $$\iiint_D \left( \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t} - K\nabla^2 U \right) dx\, dy\, dz = 0$$

เนื่องจาก $D$ ในตัวอย่างนี้เป็นขอบเขตในร่างกาย ดังนั้นปริพันธ์ต้องเป็น 0 ทุกที่ นั่นคือ

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2\nabla^2 U \qquad ; c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} \tag{3.128}$$

โดยที่ $c^2$ คือ ค่าการแผ่ความร้อนของวัตถุ เราเรียกสมการอนุพันธ์ย่อยนี้ว่าสมการความร้อนซึ่งเป็นพื้นฐานของสมการการถ่ายเทความร้อน □

**ฟังก์ชันฮาร์โมนิก**

ทฤษฎีการหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \tag{3.129}$$

เรียกว่า ทฤษฎีศักย์ และเราเรียกผลเฉลยจากสมการ (3.125) ที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสองว่า ฟังก์ชันฮาร์โมนิก

<u>ตัวอย่างที่ 3.69</u> **คุณสมบัติพื้นฐานของการแก้ปัญหาสมการลาปลาซ**

ปริพัทธ์ ในทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ คือ div **F** และ **F**·**n** ถ้า **F** เป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชันสเกลาร์ที่ **F** = grad $f$ แล้ว div **F** = div (grad $f$) = $\nabla^2 f$ และ **F**·**n** = **n**·**F** = **n**·grad $f$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์ทิศทางของ $f$ ในทิศทางของเวกเตอร์ปกติที่พุ่งออกจาก $S$ ซึ่งเป็นพื้นผิวที่ล้อมรอบขอบเขต $D$ ตามทฤษฎี และแทนค่าของอนุพันธ์ด้วยสัญลักษณ์ $\frac{\partial f}{\partial n}$ ดังนั้นจะได้สูตรตาม ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ คือ

$$\iiint_D \nabla^2 f \, dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dA \tag{3.130}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.56</u> **(คุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันฮาร์โมนิก)**

ให้ $f(x, y, z)$ เป็นฮาร์โมนิกฟังก์ชันในบางโดเมน $T$ แล้วปริพันธ์ของอนุพันธ์ปกติของฟังก์ชัน $f$ บนพื้นผิวปิดที่มีทิศชี้ออกและเรียบสม่ำเสมอใดๆ ที่อยู่ใน $D$ เท่ากับศูนย์

<u>ตัวอย่างที่ 3.70</u> **ทฤษฎีบทของกรีน**

ให้ $f$ และ $g$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชันที่ **F** = $f$ grad $g$ เป็นไปตามสมมติฐานของ ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ ในบางขอบเขต $D$ แล้ว

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \text{div}\,(f\,\text{grad}\,g) = f\nabla^2 g + \text{grad}\,f \cdot \text{grad}\,g$$

และเนื่องจาก $f$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชัน ดังนั้น

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{n}\cdot(f\,\mathrm{grad}\,g) = (\mathbf{n}\cdot\mathrm{grad}\,g)\,f$$

โดยที่ $\mathbf{n}\cdot\mathrm{grad}\,g$ เปนอนุพันธ์ทิศทาง $\frac{\partial g}{\partial n}$ ของ $g$ ในทิศทางเวกเตอร์ปกติที่พุ่งออกจาก $S$ และได้สูตรตาม ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ เป็นสูตรแรกของกรีนคือ

$$\iiint_D (f\nabla^2 g + \mathrm{grad}\,f\cdot\mathrm{grad}\,g)\,dV = \iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,dA \tag{3.131}$$

เมื่อสลับ $f$ และ $g$ จะได้สูตรที่คล้ายกันจากนั้นเอาไปลบออกจากสมการ (3.131) จะได้

$$\iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dA \tag{3.132}$$

สูตรนี้คือสูตรที่สองของกรีน □

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.57</u> **(ฟังก์ชันฮาร์โมนิก)**

ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ เป็นฮาร์โมนิกฟังก์ชันในบางโดเมน $T$ และเป็นศูนย์ทุกๆจุดของพื้นผิวปิดที่มีทิศทางและเรียบสม่ำเสมอใน $T$ ซึ่งล้อมรอบขอบเขต $D$ เป็นศูนย์ แล้ว $f$ จะเป็นศูนย์ใน $D$

### 3.2.9 ทฤษฎีบทของสโต๊ก

ทฤษฎีบทของสโต๊กเป็นทฤษฎีการแปลงปริพันธ์ระหว่างปริพันธ์เชิงเส้นกับปริพันธ์เชิงผิวที่เกี่ยวข้องกับเคิร์ล

ทฤษฎีบทที่ 3.58 ทฤษฎีบทของสโต๊ก

**(การแปลงรูปแบบปริพันธ์ระหว่างปริพันธ์เชิงเส้นกับปริพันธ์เชิงผิว)**

**ให้ $S$ เป็นพื้นผิวเรียบสม่ำเสมอที่มีทิศทางในปริภูมิซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งปิดเชิงเดียว $C$ ที่เรียบสม่ำเสมอ และให้ $\mathbf{F}(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ต่อเนื่องที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องในโดเมนที่บรรจุ $S$ แล้วปริพันธ์**

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds \tag{3.133}$$

**เมื่อ $\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของ $S$ จะขึ้นอยู่กับเวกตอร์ $\mathbf{n}$ โดยทิศทางการหาปริพันธ์รอบ $C$ ดังรูป 3.59 $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/ds$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย และ $s$ เป็นความยาวส่วนโค้งของ $C$**


**รูปที่ 3.59 ทิศทางการหาปริพันธ์ของเส้นโค้ง $C$ รอบพื้นผิว**

เมื่อแทนค่า curl $\mathbf{F}$ ลงในสมการ (3.133) และจากสมการ (3.102) ในบทที่ 3.2.6 จะได้

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)N_1 + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)N_1 + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)N_1\right] du\, dv$$

$$= \oint_C (M\, dx + N\, dy + P\, dz)$$

**โดยที่ $R$ เป็นขอบเขตที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $\overline{C}$ ที่อยู่ในระนาบ $uv$ ซึ่งสอดคล้องกับ $S$ ที่แทนด้วย $\mathbf{r}(u,v)$ และ $\mathbf{N}=[N_1,N_2,N_3] = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$**

ตัวอย่างที่ 3.71

**ให้ $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ต่อเนื่องได้ในโดเมนในที่อยู่บนระนาบ $xy$ ที่มีขอบเขตปิดเชิงเดียว $S$ ซึ่งมีเส้นโค้ง $C$ ล้อมรอบขอบเขตแล้ว จากสมการ (3.133) จะได้**

$$(\text{curl } \mathbf{F})\cdot\mathbf{n} = (\text{curl } \mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

ดังนั้นจะได้สูตร

$$\iint_S \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_C (M\,dx + N\,dy)$$

ซึ่งแสดงว่าทฤษฎีบทของกรีนในระนาบเป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทของสโต๊ก

□

<u>ตัวอย่างที่ 3.72</u> **การคำนวณปริพันธ์เชิงเส้นโดยใช้ทฤษฎีบทของสโต๊ก**

จงคำนวณ $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(s)\,ds$ โดยที่ $C$ เป็นวงกลม $x^2+y^2=4, z=-3$ (ที่มีทิศทวนเข็มนาฬิกา)และมี

$$\mathbf{F} = [y, xz^3, -zy^3] = y\,\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} - zy^3\mathbf{k}$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากพื้นผิว $S$ ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $C$ เราจึงกำหนดให้วงกลม $x^2+y^2 \le 4$ อยู่บนระนาบ $z=-3$ โดยมีเวกเตอร์ $\mathbf{n}$ ตามทฤษฎีบทของสโต๊กและมีทิศตามแนวแกน $z$ ทางบวก ($\mathbf{n}=\mathbf{k}$) ดังนั้น (curl $\mathbf{F}$)$\cdot\mathbf{n}$ จึงเป็นส่วนประกอบของ curl $\mathbf{F}$ ในทิศทางตามแนวแกน $z$ ทางบวก และที่ $z=-3$ ได้ส่วนประกอบของ $\mathbf{F}$ คือ $M=y, N=-27x$ และ $P=3y^2$ ดังนั้นจึงได้

$$(\text{curl } \mathbf{F})\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -27-1=-28$$

จะได้ปริพันธ์บน $S$ ตามทฤษฎีบทของสโต๊กเท่ากับ –24 คูณกับพื้นที่ของพื้นผิว $S$ ซึ่งมีค่า $4\pi$ ดังนั้นคำตอบของปริพันธ์เชิงเส้น คือ $-28\cdot 4\pi = -112\pi \approx -352$ □

<u>ตัวอย่างที่ 3.73</u> **ความหมายของเคิร์ลทางฟิสิกส์ และ การหมุนเวียน**


**รูปที่ 3.60 เวกเตอร์ปกติและทิศทางของพื้นผิววงกลม**

ให้ $S_r$ เป็นพื้นผิววงกลมรัศมี $r$ มีจุดศูนย์กลางที่จุด $P$ ที่ล้อมรอบด้วยเส้นวงกลม $C_r$ **ดังรูป 3.60** และให้ $\mathbf{F}(Q) \equiv \mathbf{F}(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ต่อเนื่องที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บนโดเมนที่มี $S_r$ แล้วจาก ทฤษฎีบทของสโต๊กและทฤษฎีค่าเฉลี่ยของการหาปริพันธ์เชิงผิว จะได้

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_{S_r} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}(P^*) A_r$$

โดยที่ $A_r$ เป็นพื้นที่ของ $S_r$ และ $P^*$ เป็นจุดหนึ่งบน $S_r$ เราอาจเขียนสมการนี้ให้อยู่ในอีกรูปแบบได้ คือ

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}(P^*) = \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, ds$$

สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหลที่มีเวกเตอร์ความเร็ว $\mathbf{F} = \mathbf{v}$ จะได้ ปริพันธ์

$$\oint_{C_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'\, ds$$

ซึ่งเรียกว่าการไหลเวียนของกระแสรอบ $C_r$ เป็นค่าที่ใช้วัดปริมาณของเหลวที่เคลื่อนที่รอบวงกลม $C_r$ ถ้าให้ $r$ เข้าใกล้ 0 จะพบว่า

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}(P) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'\, ds \tag{3.134}$$

นั่นคือ ส่วนประกอบของเคิร์ลตามทิศของเวกเตอร์ปกติการไหลเวียนเฉพาะการไหลเวียนในพื้นที่หนึ่งหน่วย)ของกระแสบนพื้นผิวที่จุดหนึ่ง □

ตัวอย่างที่ 3.74 **งานที่เกิดขึ้นในการเคลื่อนที่รอบเส้นโค้งปิด**

จงหางานของแรง $\mathbf{F} = 2xy^3 \sin z\, \mathbf{i} + 3x^2 \sin z\, \mathbf{j} + x^2y^3 \cos z\, \mathbf{k}$ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่รอบเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของเส้นโค้งพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ กับ ทรงกระบอก $(x - 1) + y^2 = 1$

วิธีทำ เราต้องคำนวณงานจากปริพันธ์เชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีบทของสโต๊ก

จากโจทย์

$\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ โดยที่ $f = x^2y^3 \sin z$ และ $\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = 0$ ทำให้ $(\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = 0$

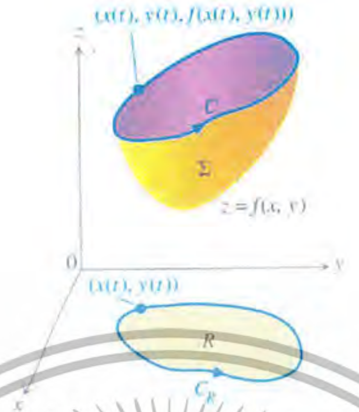
และงาน= 0 □

เมื่อ $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ และ $S$ เป็นกราฟของฟังก์ชัน $f$ ที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องบนบริเวณเชิงเดียว $R$ ที่อยู่บนระนาบ $xy$ ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งเรียบ $C_R$ และภาพฉายของ $C_R$ **(ดังรูป 3.61)** คือ $C$ ถ้า $\mathbf{n}$ มีทิศชี้ขึ้นแล้วจากสมการ (3.133) และสมการ (3.106) จะได้

$$\int_C F \cdot dr = \iint_R \left[-\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) f_x - \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) f_y + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\right] dA \tag{3.135}$$

ถ้า ถ้า **n** มีทิศชี้ลงแล้ว

$$\int_C F \cdot dr = \iint_R [(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z})f_x + (\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x})f_y - (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})]\, dA \qquad (3.136)$$




**รูปที่ 3.61 ภาพฉายของพื้นผิว**

**ทฤษฎีของสโต๊กกับความเป็นอิสระของเส้นทางการหาปริพันธ์**

จากเนื้อหาในบท 3.2.2 เรารู้แล้วว่าค่าของปริพันธ์เชิงเส้นจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันที่จะหาปริพันธ์ และจุดปลาย $A$ และ $B$ ของเส้นโค้ง $C$ แล้วยังขึ้นอยู่กับการเลือกเส้นทางปริพันธ์จาก $A$ ถึง $B$ ด้วย และถ้า

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (M\, dx + N\, dy + P\, dz) \qquad (3.137)$$

ไม่ขึ้นกับเส้นทางในโดเมน $D$ แล้ว

$$\text{curl } \mathbf{F} = 0 \qquad (3.138)$$

โดยถ้าสมการ (3.137) เป็นจริงแล้วสมการ (3.138) จะไม่ขึ้นกับเส้นทางการหาปริพันธ์ เมื่อ $D$ เป็นบริเวณปิดเชิงเดียว

# บทที่ 4
# การดำเนินการพัฒนาโปรแกรม

**ขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรม**

1. ศึกษาภาษาที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์ ได้แก่ Java Script , และ HTML
2. ศึกษาการเขียนเว็บเพจด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Macremedia Dreamweaver Mx และการเขียนภาษา HTML
3. สร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์
4. ทดสอบการใช้งาน และแก้ไขข้อบกพร่อง
5. จัดพิมพ์คู่มือ และการใช้โปรแกรม

**ภาษา HTML**

HTML (HyperText Markup Language) เป็นรูปแบบหนึ่งของภาษา SGML (Standard Generalized Markup Language) นิยมใช้กันทั่วไปบนอินเตอร์เน็ต เหมือนเราใช้โปรแกรมระบบปฏิบัติการ DOS ซึ่งถูกตัดแยกออกมาจากโปรแกรมระบบปฏิบัติการ UNIX เช่นเดียวกับ HTML ซึ่งเป็นภาษาหลักสำหรับการสร้างเว็บเพจ แฟ้มเอกสาร HTML ที่สร้างขึ้นจะนำไปแสดงได้ด้วยโปรแกรม Web browser เช่น โปรแกรม Internet Explorer และ Netscape Navigator

HTML เป็นภาษาที่ง่ายต่อการเรียนรู้และการเขียน ซึ่งจัดว่าง่ายกว่าภาษาคอมพิวเตอร์ที่เคยมีมา แต่ก่อให้เกิดคุณประโยชน์ขึ้นมากมายจนทำให้เราลืมไปว่านี่เป็นเพียงส่วนหนึ่งของภาษาใหญ่ที่มีขีดความสามารถสูงกว่า

ปัจจุบันภาษา HTML ได้ถูกกำหนดมาตรฐานให้สูงขึ้น มีขีดความสามารถสูงขึ้น และมีองค์ประกอบในการสร้างฐานข้อมูลที่ดีขึ้น

**HTML ทำงานอย่างไร**

การใช้บริการอินเตอร์เน็ตไม่ว่าจะเป็น e-mail, FTP, Gopher, Telnet หรือบริการอื่นๆ ที่ต้องเชื่อมต่ออุปกรณ์ภายในอันซับซ้อนของ Hardware ที่สามารถทำงานได้ด้วยโปรแกรมเฉพาะที่ทำงานบนอินเตอร์เน็ตเท่านั้น

WWW แบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็น Client และส่วนที่เป็น Server เหมือนกับในระบบเครือข่ายทั่วไป ทั้งสองส่วนจะถูกเชื่อมโยงถึงกันผ่านทางอินเตอร์เน็ตโดยมี HTML เป็นฐานข้อมูลที่สำคัญ เมื่อ Web browser ส่งข้อความร้องขอข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบของไฟล์ HTML จาก

เครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งานอยู่ผ่าน modem หรืออุปกรณ์สื่อสารข้อมูลอื่นไปยังศูนย์บริการอินเตอร์เน็ต (ISP) ตาม protocol ที่กำหนดไว้ผ่านทาง URLs (Uniform Resource Locators) และเมื่อข้อมูลเดินทางมาถึง Web Server ศูนย์บริการปลายทางที่ผู้ใช้ต้องการ ณ ที่นี้เครื่อง Web Server ของศูนย์จะทำการอ่านข้อมูลที่ถูกส่งมาและจะทำงานตามคำสั่งที่กำหนด โดยอาจมีการเชื่อมโยงไปยัง Web Server อื่นอีก หลังจากจบสิ้นกระบวนการแล้วจะทำการรับส่งข้อมูลคำตอบย้อนกลับมายังเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งาน โปรแกรม Web Server ที่เครื่องคอมพิวเตอร์ของเราก็จะแปลงสัญญาณคำสั่งและแสดงผลเป็นข้อความ รูปภาพ เสียง ให้เราใช้งานต่อไป

ปัจจุบัน Web Server ที่ให้บริการกันอยู่ทั่วทุกมุมโลกนั้น ข้อมูลที่บริการส่วนใหญ่ไม่เสียค่าบริการใดๆ เราเสียเพียงค่าโทรศัพท์เท่านั้น แต่ได้ประโยชน์จากมันมากมาย ด้วยความสามารถอันยอดเยี่ยมของ HTML ข้อมูลจากแหล่งต่างๆ จะถูกนำมาแสดงตรงหน้าผู้ใช้ โดยเครื่องคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่ประมวลผลข้อมูลผ่าน protocol HTML เป็น protocol

**การสร้างเว็บเพจด้วย Macromedia Dreamweaver Mx**

ในการสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์นี้จะนำโปรแกรม Macremedia Dreamweaver Mx มาช่วยในการสร้าง ซึ่งโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ภาษา HTML โดยที่ผู้ใช้ไม่ต้องเขียนโปรแกรมเอง เนื่องจากตัวโปรแกรมมี tool ต่างๆ ให้เลือกใช้เพื่อช่วยในการออกแบบเว็บเพจอยู่มากมาย โดยโปรแกรมจะแปลงให้เป็นภาษา HTML ใน source code ให้เองโดยอัตโนมัติ แต่ผู้สร้างเว็บเพจควรมีความรู้เกี่ยวกับภาษา HTML เพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพในการสร้างเว็บเพจให้ดียิ่งขึ้น

การเขียนคำสั่ง (tags) ที่ใช้ในภาษา HTML ส่วนใหญ่ต้องประกอบด้วยคำสั่งเปิดและคำสั่งปิดคู่กันเสมอ

- คำสั่งเปิดประกอบด้วย < ตามด้วยคำสั่ง และปิดท้ายด้วย > เช่น <HTML>
- คำสั่งปิดมีรูปแบบเหมือนคำสั่งเปิด แต่เพิ่มเครื่องหมาย / หน้าชื่อคำสั่งนั้น เช่น </HTML>
- และในแต่ละส่วนคำสั่งเปิดอาจมีส่วนขยายอื่น (Attribute) ผสมอยู่ด้วย

**ตารางที่ 4.1** โครงสร้างพื้นฐานของภาษา HTML

| | |
|---|---|
| <HTML> | |
| <HEAD> | ส่วนหัวของโปรแกรม |
| <TITLE> ชื่อโปรแกรมหรือข้อมูลที่ต้องการแสดง </TITLE> | |
| </HEAD> | |
| <BODY> | เป็นตัวคุมโปรแกรมทั้งหมด |
| … คำสั่ง หรือข้อความที่ต้องการแสดง | ส่วนเนื้อหาที่ต้องการแสดงผลทั้งหมด |
| </BODY> | |
| </HTML> | |

**ตัวอย่างคำสั่งในภาษา HTML**

**1. คำสั่ง HTML**

คำสั่งนี้เป็นคำสั่งเริ่มต้นของการเขียนโปรแกรม HTML

<html> </html>

**2. คำสั่ง HEAD**

คำสั่งนี้ใช้กำหนดข้อความในส่วนที่เป็นชื่อเรื่อง

<head> </head>

**3. คำสั่ง TITLE**

คำสั่งนี้เป็นส่วนแสดงชื่อของโปรแกรม โดยจะแสดงบนไตเติลบาร์ของ Web browaer และคำสั่งนี้จะอยู่ระหว่าง <head> และ </head>

<body> </body>

**4. คำสั่ง BODY**

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงเนื้อหาต่างๆ

<body> </body>

**ตารางที่ 4.2** แอทริบิวท์ของ body

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Background = " ชื่อแฟ้มรูปภาพ " | กำหนดรูปภาพของ background |

**5. คำสั่ง FRAMESET**

คำสั่งนี้ใช้ในการแบ่ง frame

<frameset>      <frame>      </frameset>

**ตารางที่ 4.3** แอทริบิวท์ของ frameset

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Cols = " พื้นที่ส่วนที่ 1 , พื้นที่ส่วนที่ 2 , … " | กำหนดพื้นที่ของแต่ละ Column เป็นเปอร์เซ็นต์หรือขนาดของ pixel |

**6. คำสั่ง FRAME**

คำสั่งนี้ใช้กำหนดว่าแต่ละ frame จะแสดงข้อมูลจากแฟ้มข้อมูล HTML ใด

<frame>

**ตารางที่ 4.4** แอทริบิวท์ของ frame

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Src = " แฟ้มข้อมูล HTML " | กำหนดแฟ้มข้อมูล HTML ที่แสดงใน frame นั้น |
| Noresize | คำสั่งไม่ให้ผู้ใช้ปรับขนาดของ frame เอง |
| Frameborder = " Yes หรือ No " | กำหนดให้แสดงกรอบ frame หรือไม่ |
| Scrolling = " Yes หรือ No " | กำหนดแถบที่ใช้เลื่อนหน้าจอ |
| Name = " ชื่อ frame " | กำหนดชื่อให้ frame นั้น |
| Bordercolor = " รหัสสี " | กำหนดสีของกรอบรอบ frame |

**8. คำสั่ง FONT**

คำสั่งนี้ใช้ในการกำหนด font ของโปรแกรม HTML

<font>      </font>

**ตารางที่ 4.5** แอทริบิวท์ของ font

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Face = " ชื่อ font " | กำหนดชื่อ font |
| Color = " #รหัสสี " | กำหนดสีของตัวอักษร |
| Size = " ขนาดตัวอักษร " | กำหนดขนาดของตัวอักษร |

**8. คำสั่ง BASEFONT**

คำสั่งนี้ใช้ในการกำหนด font มาตราฐานของโปรแกรม HTML นั้นๆ

<basefont>

**ตารางที่ 4.6** แอทริบิวท์ของ basefont

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Face = " ชื่อ font " | กำหนดชื่อ font |
| Color = " #รหัสสี " | กำหนดสีของตัวอักษร |
| Size = " ขนาดตัวอักษร " | กำหนดขนาดของตัวอักษร |

**9. คำสั่ง CENTER**

คำสั่งนี้ใช้จัดตำแหน่งของข้อความหรือรูปให้อยู่ตรงกลาง

<center> </center>

**10. คำสั่ง IMG**

คำสั่งนี้ใช้แทรกรูปภาพในโปรแกรม HTML

<img>

**ตารางที่ 4.7** แอทริบิวท์ของ img

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Src = " ชื่อไฟล์รูป " | กำหนดโฟลเดอร์ที่เก็บไฟล์รูป |
| Alt = " ข้อความ " | กำหนดข้อความที่ใช้อธิบายรูป ในขณะที่รูปยังอยู่ในระหว่างการโหลด |
| Border = " ขนาดกรอบ " | กำหนดขนาดกรอบของรูป |
| Height = " ความสูงของรูป " | กำหนดความสูงของรูปเป็น pixel |
| Width = " ความกว้างของรูป " | กำหนดความกว้างของรูปเป็น pixel |
| Align = " ตำแหน่ง " | กำหนดตำแหน่งของรูป |

**11. คำสั่ง BR**

คำสั่งนี้ใช้ในการขึ้นบรรทัดใหม่

<br>

**12. คำสั่ง B**

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความเป็นตัวหนา

<b> </b>

**13. คำสั่ง U**

คำสั่งนี้ใช้ในการขีดเส้นใต้ข้อความ

<u> </u>

**14. คำสั่ง P**

คำสั่งนี้ใช้จัดข้อความให้เป็น Paragraph

<p> </p>

**15. คำสั่ง HR**

คำสั่งนี้ใช้ในการสร้างเส้นกั้นหน้า

<hr>

**16. คำสั่ง A**

คำสั่งนี้ใช้ในการเชื่อมโยงเนื้อหาใน page ต่างๆ

<a> </a>

**ตารางที่ 4.8** แอทริบิวท์ของ A

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Href = " ชื่อแฟ้มข้อมูล HTML " | กำหนด URL หรือแฟ้มข้อมูลที่ต้องการเชื่อมโยง |
| Target = " ชื่อ frame " | กำหนด frame ที่ต้องการให้แสดงผลการเชื่อมโยง |

**17. คำสั่ง TABLE**

<table> </table>

**ตารางที่ 4.9** แอทริบิวท์ของ table

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Align = " ตำแหน่ง " | กำหนดตำแหน่งของตาราง |
| Cellpadding = " ขนาด " | กำหนดระยะห่างระหว่างข้อความและตาราง มีหน่วยเป็น pixel หรือเปอร์เซ็นต์ |
| Cellspaceing = " ขนาด " | กำหนดระยะห่างระหว่างข้อความและตาราง มีหน่วยเป็น pixel หรือเปอร์เซ็นต์ |
| Border = " ขนาด " | กำหนดขนาดของกรอบตาราง มีหน่วยเป็น pixel หรือเปอร์เซ็นต์ |
| Bordercolor = " #รหัสสี " | กำหนดสีของกรอบตาราง |
| Bgcolor = " #รหัสสี " | กำหนดสี background ของตาราง |

**18. คำสั่ง TR**

คำสั่งนี้ใช้ในการสร้างแถวของตาราง ซึ่งคำสั่งนี้อยู่ระหว่างคำสั่ง<table> และ</table>

<tr> </tr>

**19. คำสั่ง TH**

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความในแต่ละช่องตาราง โดยมักใช้กับข้อความที่เป็นหัวเรื่อง ซึ่งคำสั่งนี้อยู่ระหว่างคำสั่ง <table> และ </table>

<th> </th>

**ตารางที่ 4.10** แอทริบิวท์ของ th

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Align = " ตำแหน่ง " | กำหนดตำแหน่งของข้อความในแต่ละช่อง |

**20. คำสั่ง TD**

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความที่เป็นรายละเอียดในแต่ละช่องตาราง

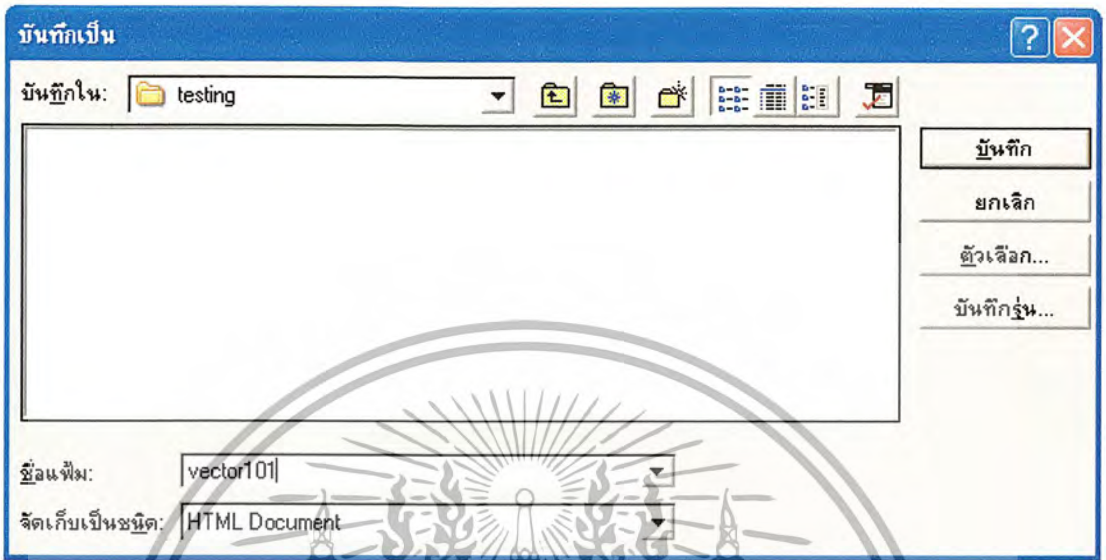
<td> </td>

**ตารางที่ 4.11** แอทริบิวท์ของ td

| รูปแบบคำสั่ง | ความหมาย |
|---|---|
| Align = " ตำแหน่ง " | กำหนดตำแหน่งของข้อความในแต่ละช่อง |

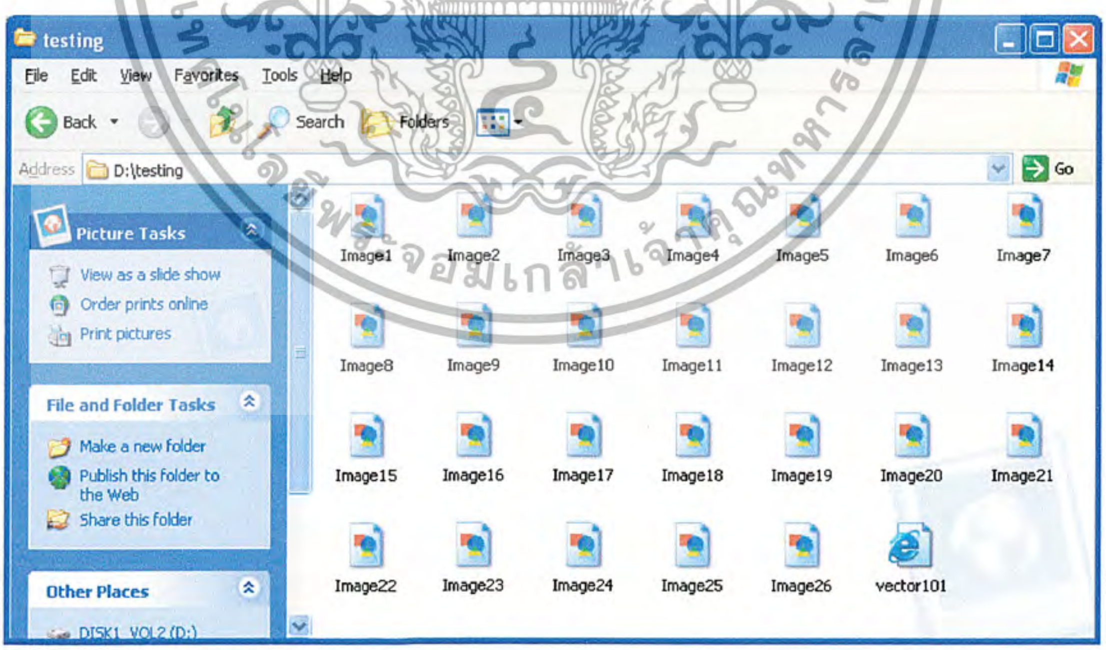
**การแปลงไฟล์ข้อความจาก MS Word เป็นไฟล์ HTML**

1. ไปที่เมนู แฟ้ม > บันทึกแฟ้มเป็น...
2. เลือกบันทึกเป็นไฟล์ HTML document




**รูปที่ 4.1 การบันทึกเป็นไฟล์ HTML**

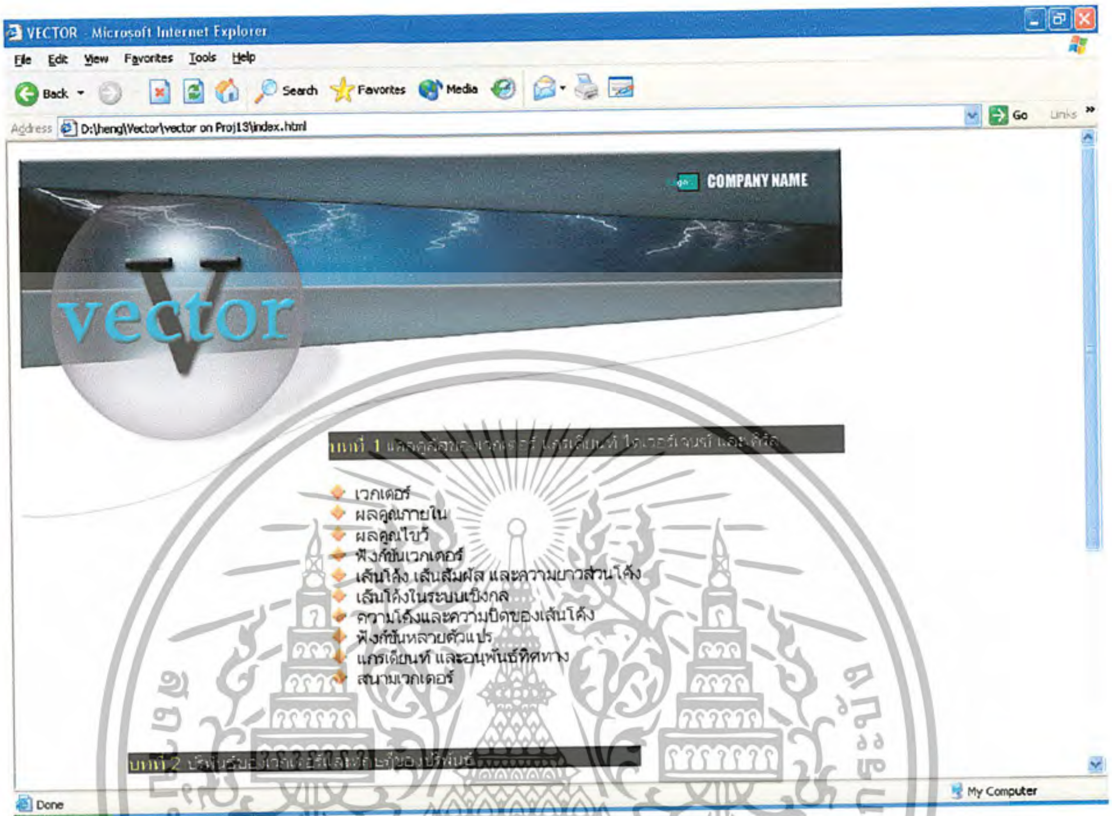
3. กดบันทึก จะได้ไฟล์ vector.html ดังรูป 4.2 ที่สามารถปรับแต่งได้




**รูปที่ 4.2 ไฟล์ HTML ที่ได้**

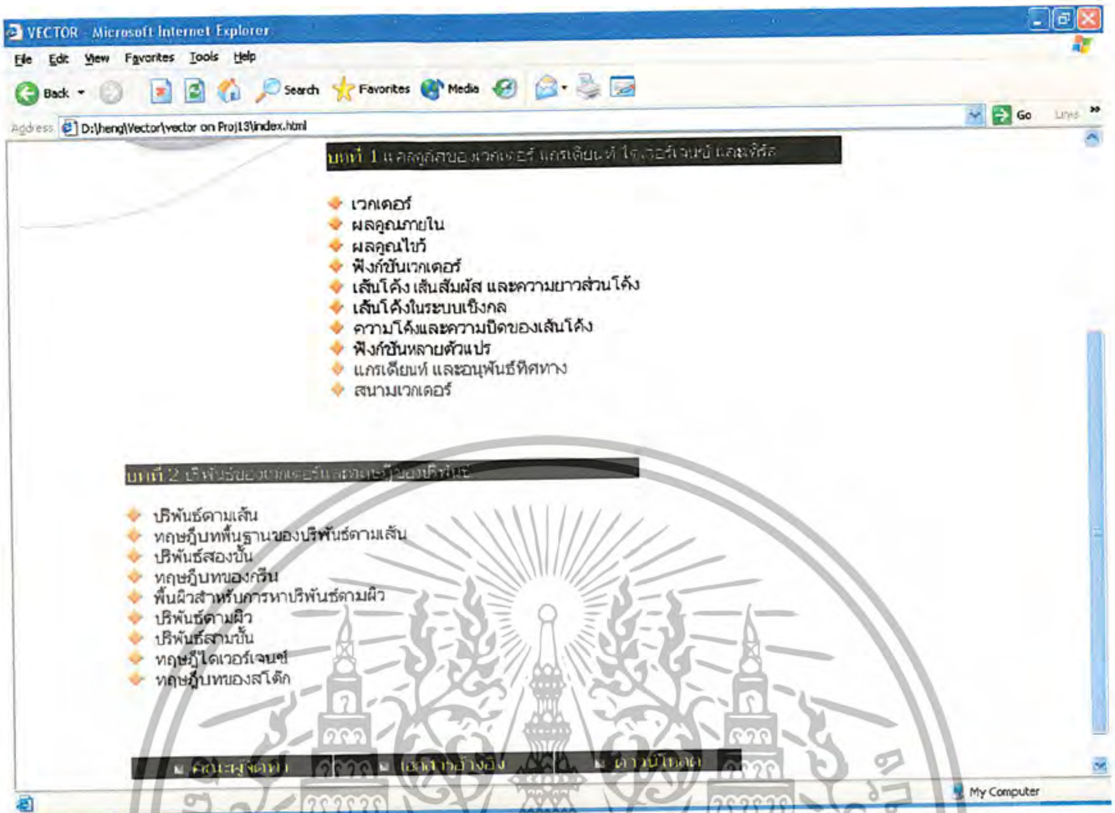
# บทที่ 5

# ผลการทดลอง




รูปที่ 5.1 หน้าหลัก (ส่วนที่ 1)

รูปที่ 5.1 หน้าหลัก (ส่วนที่ 1) เป็นการแสดงหน้าจอเริ่มต้น ซึ่งประกอบด้วยชื่อหัวเรื่องของบทที่ 1 ซึ่งเมื่อกดปุ่มสีส้มที่กระพริบก็สามารถเข้าไปศึกษาเนื้อหาที่ต้องการเรียนในบทที่ 1 ได้




รูปที่ 5.2 หน้าหลัก (ส่วนที่ 2)

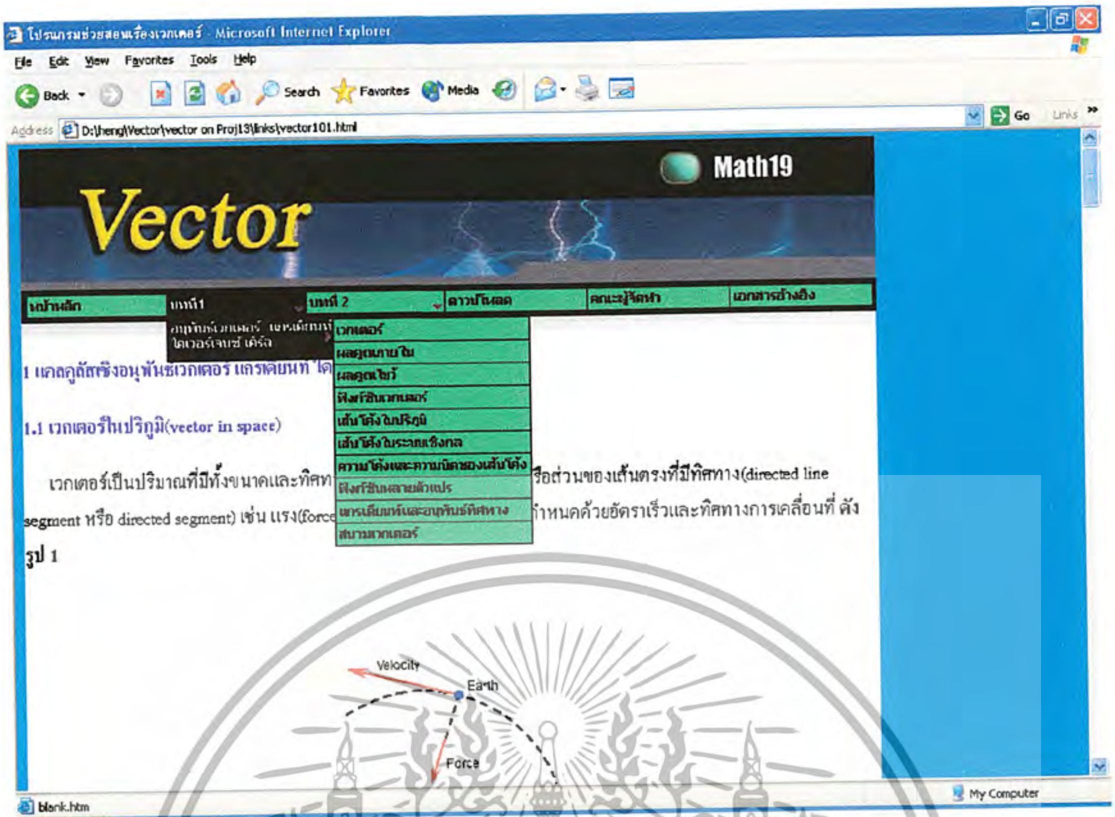
รูปที่ 5.2 หน้าหลัก (ส่วนที่ 2) เป็นการแสดงหน้าจอที่ต่อเนื่องจากรูปที่ 5.1 หน้าหลัก (ส่วนที่ 1) ซึ่งจากรูปนี้จะประกอบด้วย

1. ชื่อเรื่องของบทที่ 2 ซึ่งเมื่อกดปุ่มสีส้มที่กระพริบก็สามารถเข้าไปศึกษาเนื้อหาที่ต้องการเรียนในบทที่ 2 ได้

2. คณะผู้จัดทำ ซึ่งสามารถเลือกกดปุ่มนี้ได้ซึ่งกดปุ่มที่อยู่ด้านข้างของคำว่าคณะผู้จัดทำ ซึ่งจะสามารถเข้าไปยังหน้าของคณะผู้จัดทำได้

3. เอกสารอ้างอิง ซึ่งสามารถเลือกกดปุ่มนี้ได้ซึ่งกดปุ่มที่อยู่ด้านข้างของคำว่าเอกสารอ้างอิง ซึ่งจะสามารถเข้าไปดูแหล่งที่มาของเนื้อหาที่คณะผู้จัดทำนำมาใช้ได้

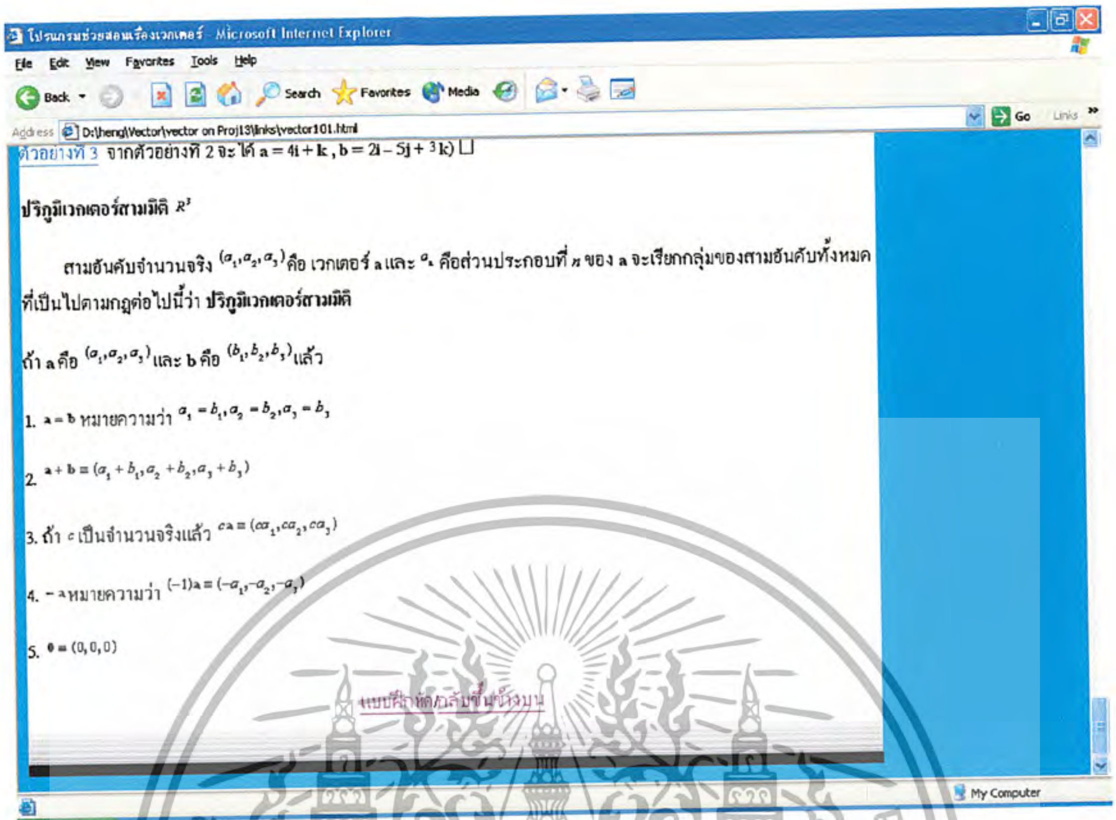
4. ดาวน์โหลด ซึ่งสามารถเลือกกดปุ่มนี้ได้ซึ่งกดปุ่มที่อยู่ด้านข้างของคำว่าดาวน์โหลด ซึ่งจะสามารถเข้าไปโหลดเนื้อหาที่ต้องการจะศึกษา



รูปที่ 5.3 หน้าเนื้อหา (ส่วนที่ 1)

จากรูป 5.3 หน้าเนื้อหา (ส่วนที่ 1) เป็นหน้าจอที่แสดงถึงเนื้อหาในหัวเรื่องต่างๆ ซึ่งประกอบไปด้วย

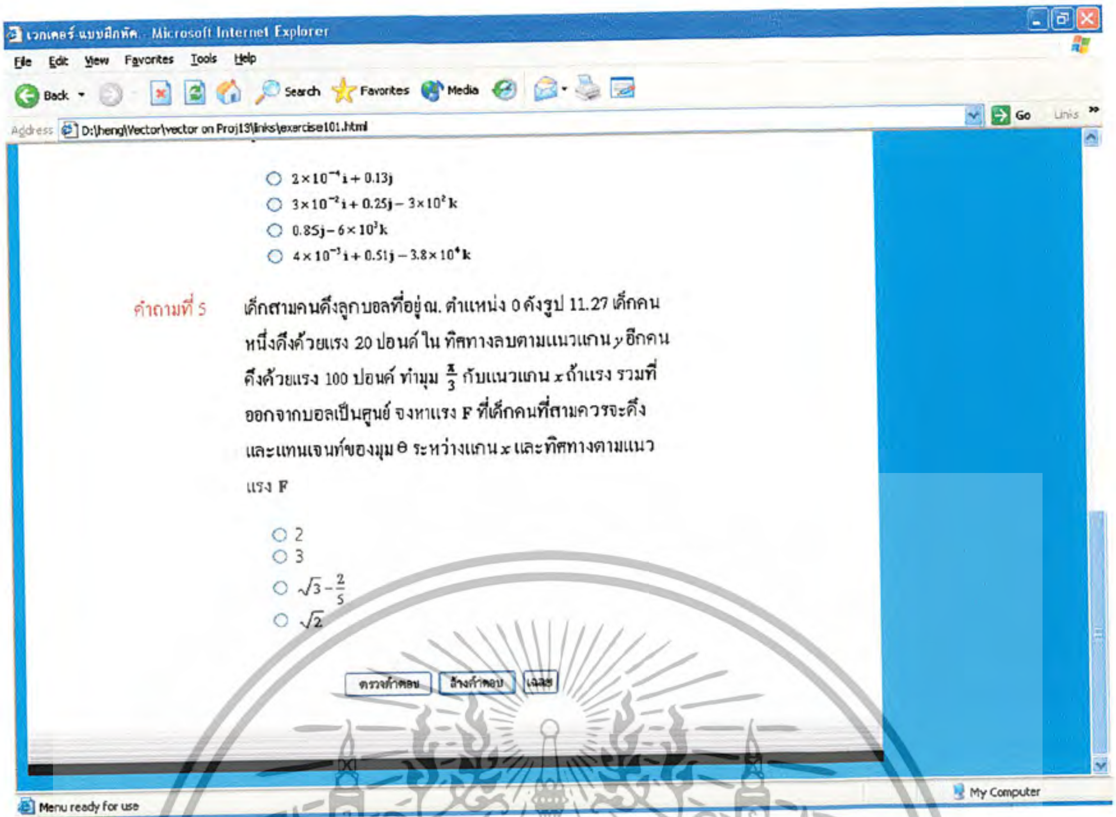
1. เนื้อหา
2. ปุ่มหน้าหลัก ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะกลับไปสู่หน้าหลัก
3. ปุ่มบทที่ 1 ซึ่งเมื่อนำเมาส์ไปวางบนปุ่มนี้จะปรากฏหัวเรื่องต่างๆในบทที่ 1 ซึ่งเมื่อกดปุ่มหัวเรื่อง จะสามารถไปสู่เนื้อหาของเรื่องที่ต้องการจะศึกษาได้
4. ปุ่มบทที่ 2 ซึ่งเมื่อนำเมาส์ไปวางบนปุ่มนี้จะปรากฏหัวเรื่องต่างๆในบทที่ 2 ซึ่งเมื่อกดปุ่มหัวเรื่อง จะสามารถไปสู่เนื้อหาของเรื่องที่ต้องการจะศึกษาได้
5. ปุ่มดาวน์โหลด ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถเข้าไปโหลดเนื้อหาที่ต้องการจะศึกษา
6. ปุ่มคณะผู้จัดทำ ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถเข้าไปยังหน้าของคณะผู้จัดทำได้
7. ปุ่มเอกสารอ้างอิง ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถเข้าไปดูแหล่งที่มาของเนื้อหาที่คณะผู้จัดทำนำมาใช้ได้




รูปที่ 5.4 หน้าเนื้อหา (ส่วนที่ 2)

จากรูป 5.4 หน้าเนื้อหา (ส่วนที่ 2) เป็นหน้าจอที่แสดงถึงเนื้อหาในหัวเรื่องต่างๆ ซึ่งประกอบไปด้วย

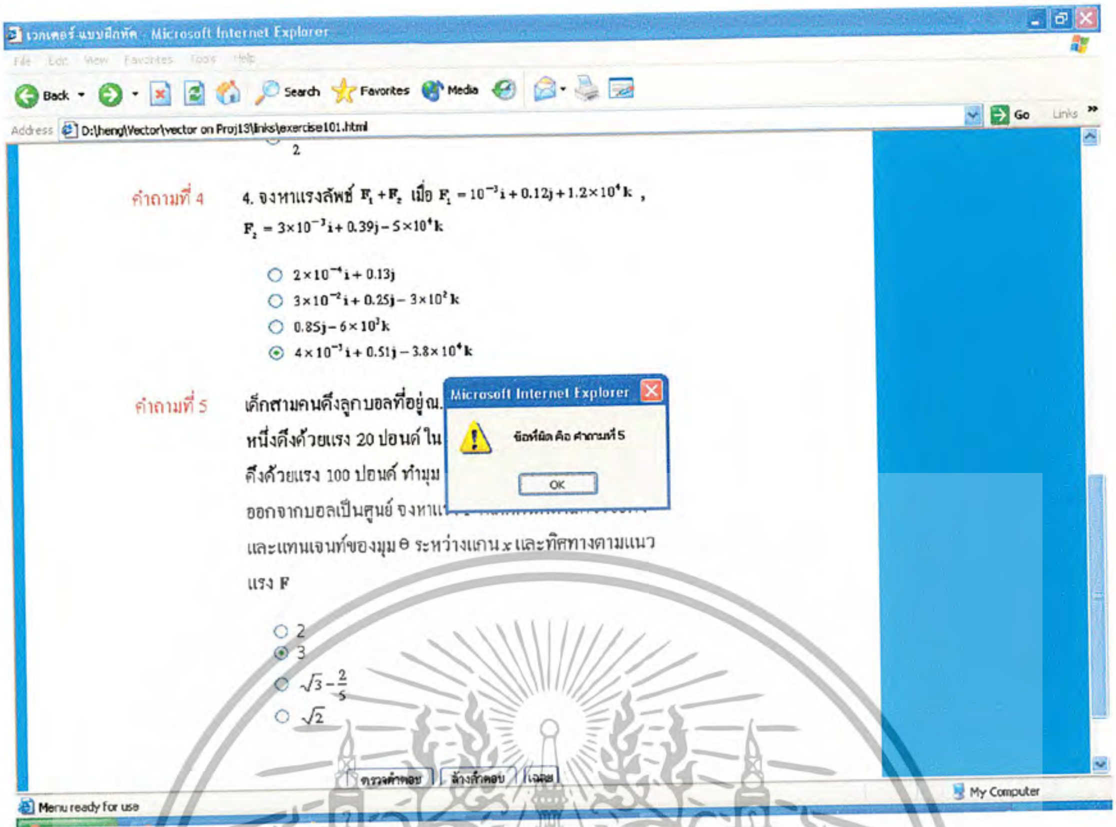
1. เนื้อหา
2. ปุ่มแบบฝึกหัด ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถเข้าไปสู่หน้าแบบฝึกหัดได้
3. ปุ่มกลับขึ้นข้างบน ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถกลับขึ้นไปสู่ต้นเรื่องของหัวเรื่องนั้นๆได้




**รูปที่ 5.5 แบบฝึกหัด**

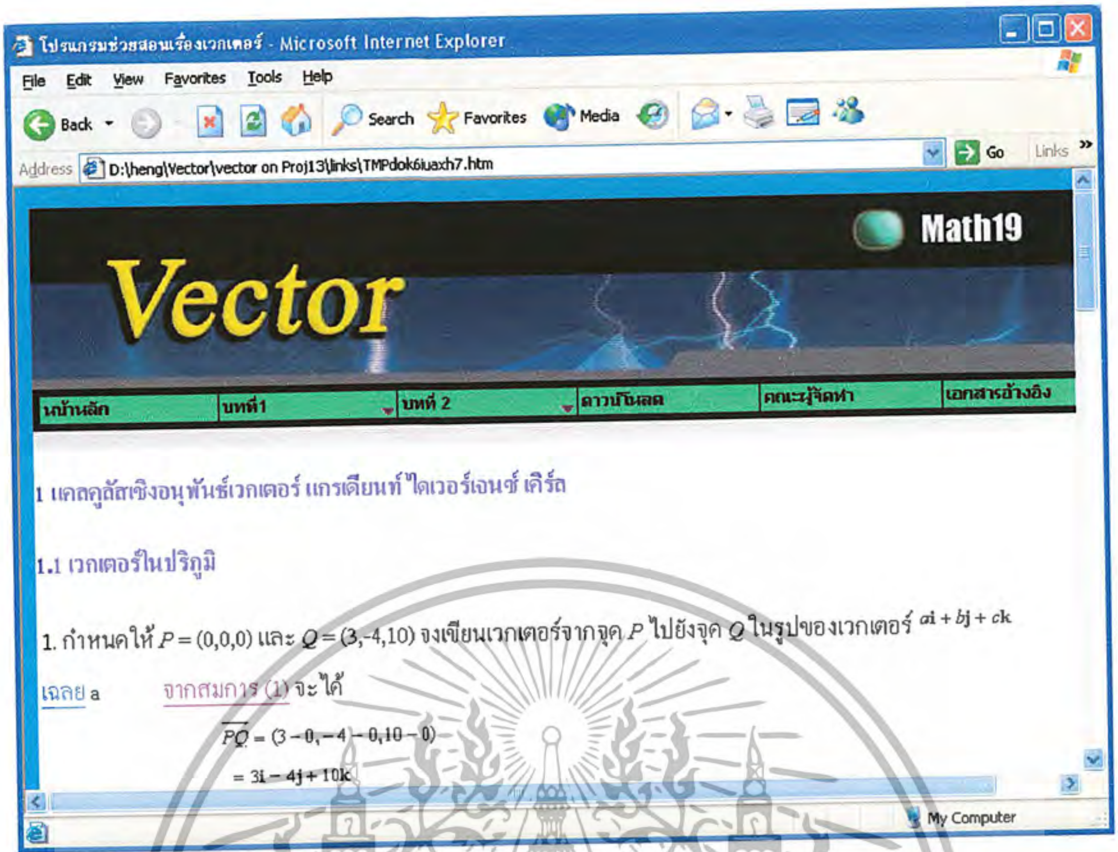
จากรูป 5.5 หน้าแบบฝึกหัด เป็นหน้าจอที่แสดงถึงแบบฝึกหัดในหัวเรื่องต่างๆ ซึ่งประกอบด้วย

1. โจทย์
2. ปุ่มตรวจคำตอบ ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถตรวจคำตอบได้
3. ปุ่มล้างคำตอบ ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถลบคำตอบที่ทำได้
4. ปุ่มเฉลย ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถเข้าไปดูเฉลยได้




**รูปที่ 5.6 ตรวจคำตอบ**

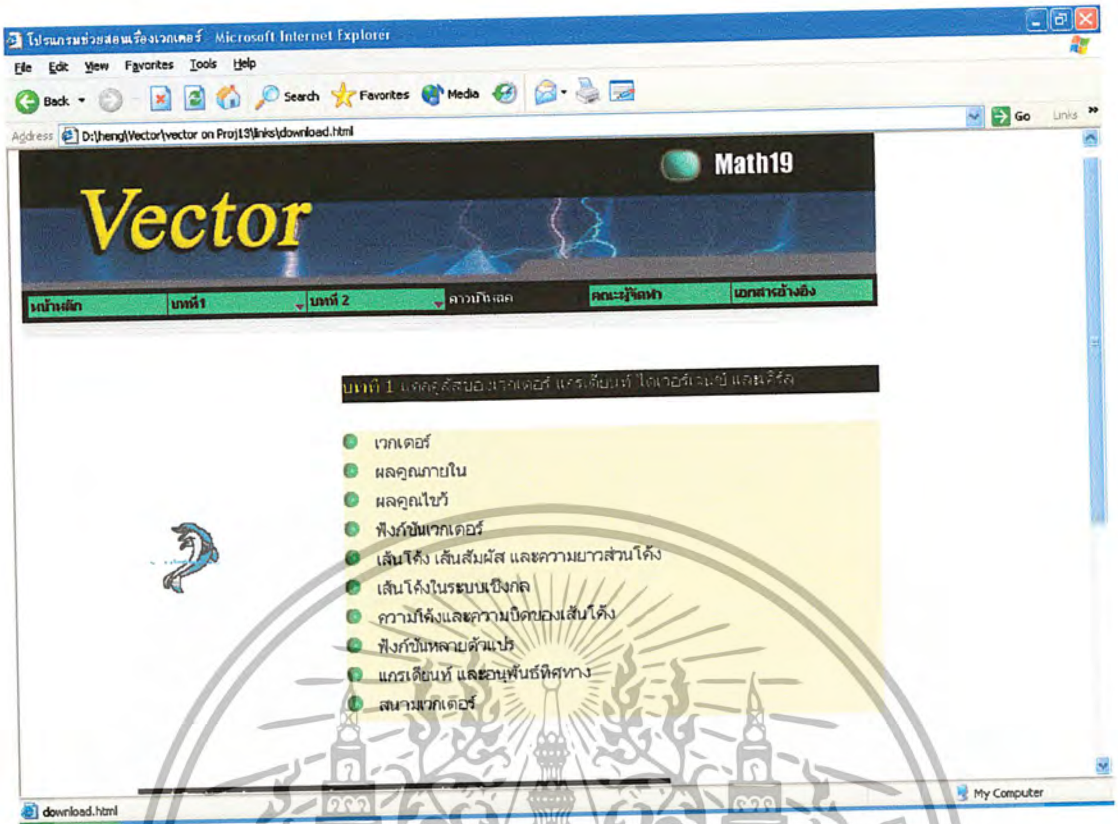
จากรูป 5.6 หน้าตรวจคำตอบ เป็นหน้าจอที่แสดงถึงข้อที่ผิดพลาดในข้อนั้นๆ




รูปที่ 5.7 เฉลย

จากรูป 5.7 หน้าเฉลย เป็นหน้าจอที่แสดงถึงเฉลยของแบบฝึกหัดในหัวเรื่องต่างๆ ซึ่งประกอบด้วย

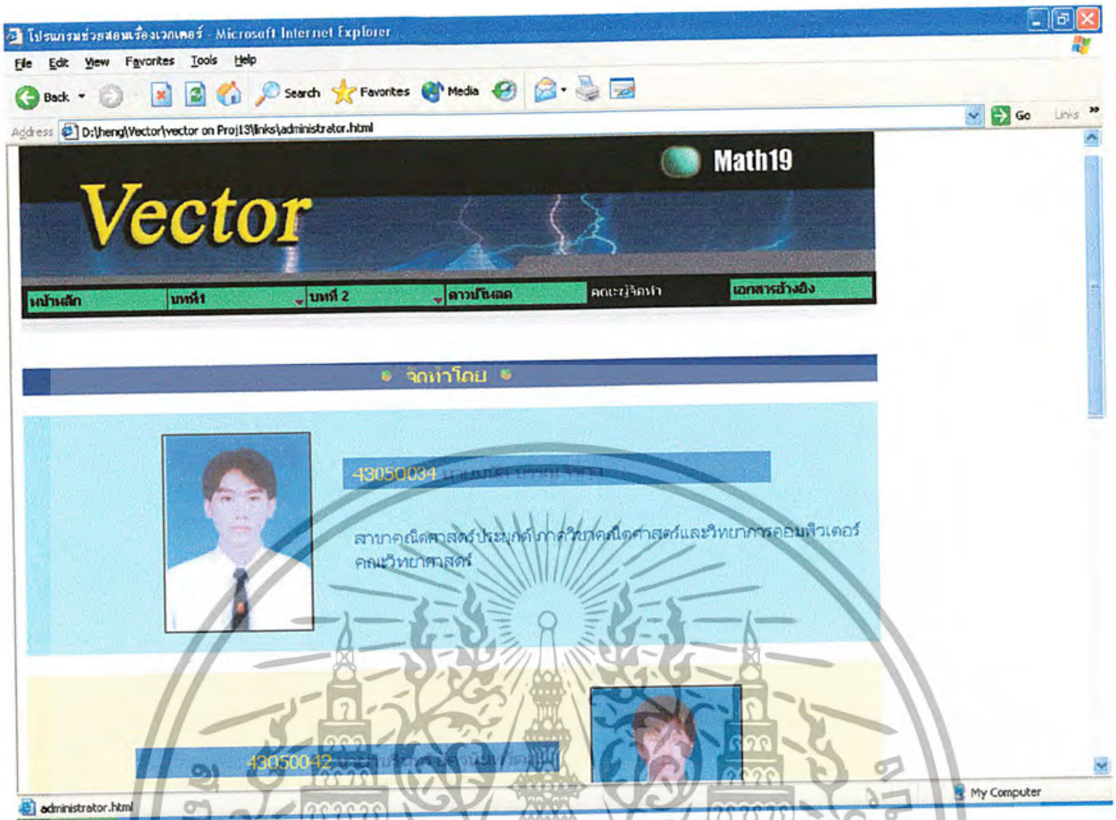
1. เนื้อหา
2. ปุ่มหน้าหลัก ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะกลับไปสู่หน้าหลัก
3. ปุ่มบทที่ 1 ซึ่งเมื่อนำเมาส์ไปวางบนปุ่มนี้จะปรากฏหัวเรื่องต่างๆในบทที่ 1 ซึ่งเมื่อกดปุ่มหัวเรื่อง จะสามารถไปสู่เนื้อหาของเรื่องที่ต้องการจะศึกษาได้
4. ปุ่มบทที่ 2 ซึ่งเมื่อนำเมาส์ไปวางบนปุ่มนี้จะปรากฏหัวเรื่องต่างๆในบทที่ 2 ซึ่งเมื่อกดปุ่มหัวเรื่อง จะสามารถไปสู่เนื้อหาของเรื่องที่ต้องการจะศึกษาได้
5. ปุ่มดาวน์โหลด ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถเข้าไปโหลดเนื้อหาที่ต้องการจะศึกษา
6. ปุ่มคณะผู้จัดทำ ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถเข้าไปยังหน้าของคณะผู้จัดทำได้
7. ปุ่มเอกสารอ้างอิง ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถเข้าไปดูแหล่งที่มาของเนื้อหาที่คณะผู้จัดทำนำมาใช้ได้
8. แท๊ปอ้างอิง เมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถกลับไปยังข้อมูลที่ได้ทำการอ้างอิงได้
9. ปุ่มกลับสู่แบบฝึกหัด เมื่อกดปุ่มนี้จะสามารถกลับไปยังหน้าของแบบฝึกหัดนั้นๆได้




**รูปที่ 5.8 ดาวน์โหลด**

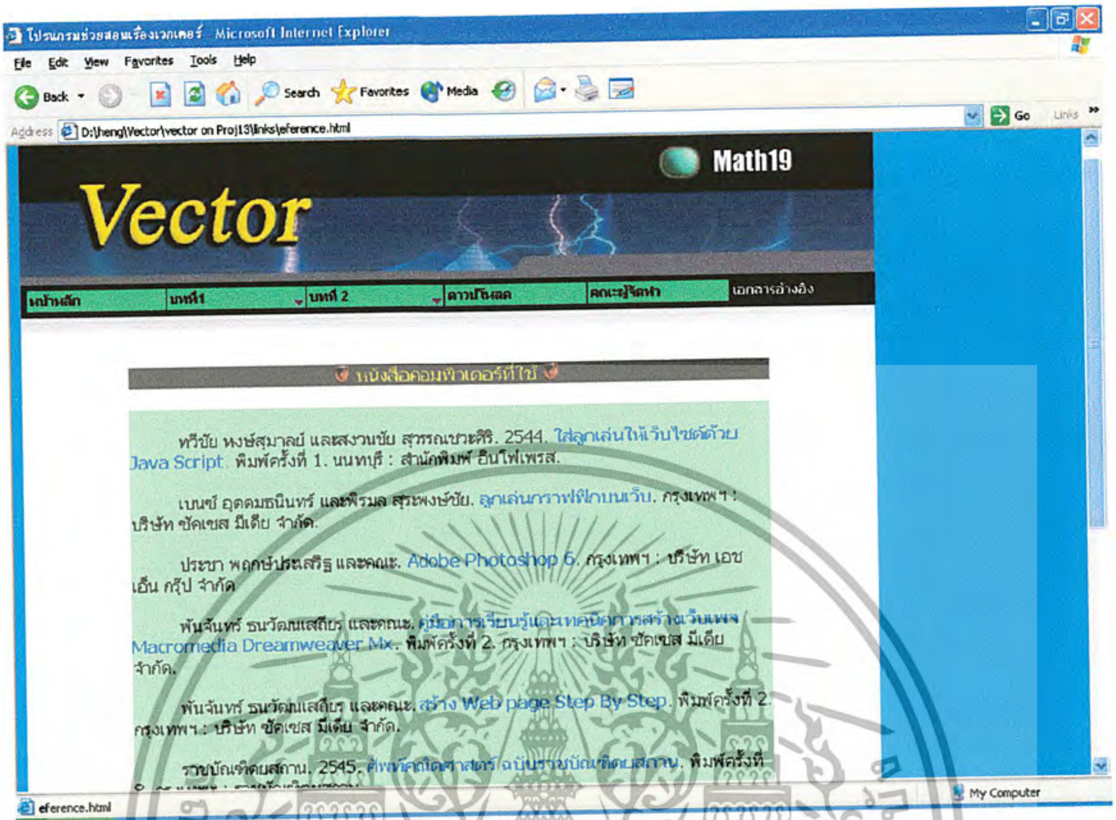
จากรูป 5.8 หน้าดาวน์โหลด เป็นหน้าจอที่สามารถดาวน์โหลดหัวเรื่องต่างๆไปศึกษา ซึ่งประกอบด้วย

ปุ่มสีเขียวกระพริบ ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้ที่หน้าหัวเรื่องที่ต้องการจะทำการ โหลดก็สามารถทำการดาวน์โหลดเนื้อหานั้นๆได้




**รูปที่ 5.9 คณะผู้จัดทำ**

รูป 5.9 หน้าคณะผู้จัดทำ เป็นหน้าจอที่แสดงถึงคณะผู้จัดทำที่ทำโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์ รวมถึงผู้ให้คำปรึกษาในเรื่องต่างๆ




**รูปที่ 5.10 หน้าเอกสารอ้างอิง**

รูป 5.10 หน้าเอกสารอ้างอิง เป็นหน้าจอที่แสดงถึงเนื้อหาข้อมูลต่างๆ และคู่มือการสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์

# บทที่ 6
# การวิจารณ์หรืออภิปรายผล

ในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ทำให้ได้โปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์ ซึ่งสามารถใช้ได้ง่ายและไม่ซับซ้อน มีการใช้ข้อความที่เข้าใจง่ายพอสมควร แต่เนื่องจากเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ยังไม่แพร่หลายและยังยากแก่การเข้าใจสำหรับผู้ที่ไม่มีความรู้พื้นฐาน โปรแกรมนี้มีการจัดลำดับเนื้อหาที่ผู้ใช้สามารถเลือกศึกษาตามความต้องการได้ แต่ขอแนะนำให้ศึกษาตามลำดับของเนื้อหาเพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้น

โปรแกรมนี้ยังมีภาพประกอบและสีสันของนี้หาพอควรเพื่อให้เหมาะกับการศึกษา และยังมีแบบทดสอบความเข้าใจในแต่ละบทเรียนด้วย แต่เนื่องจากเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ยากแก่การศึกษาจึงไม่สามารถสร้างแบบทดสอบที่มีการประยุกต์ได้มากนัก

ในเนื้อหาที่จัดทำขึ้นประกอบด้วยตัวยก ตัวห้อย เศษส่วน และสัญลักษณ์ต่างๆ มากมาย ทำให้เป็นปัญหาในการสร้างและจัดรูปแบบ ในแต่ละหน้า ซึ่งต้องใช้เวลามากในขั้นตอนนี้ รวมถึงการศึกษาโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้สร้างเว็บเพจ

# บทที่ 7
# สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

**บทสรุป**

ปัญหาโครงงานพิเศษฉบับนี้ได้ทำการสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์โดยมีการแบ่งการพัฒนาออกเป็น 3 ส่วน คือ

1. การจัดทำด้านเนื้อหา ตัวอย่าง และแบบทดสอบ

   การนำเสนอทางด้านเนื้อหาและแบบทดสอบสามารถที่จะช่วยอธิบายให้เข้าใจในบทเรียนได้ และสามารถทำการศึกษาได้ด้วยตัวเอง การทำแบบทดสอบท้ายบทจะช่วยประเมินผลความเข้าใจได้ในระดับหนึ่ง ซึ่งเพียงพอแก่การนำไปประยุกต์ใช้งานที่เกี่ยวข้องกับเรื่องเวกเตอร์ได้ไม่มากก็น้อย

2. การพัฒนาโปรแกรม

   ทำการพัฒนาโปรแกรมโดยใช้โปรแกรม Dreamweaver Mx

3. การประเมินผล ทดสอบ และแก้ไข

   จากการทดสอบการใช้โปรแกรมช่วยสอนเรื่องเวกเตอร์และการประยุกต์ทางด้านเนื้อหาและตัวอย่างสามารถอธิบายให้เข้าใจ และศึกษาได้ด้วยตัวเองพอสมควร

   การทำแบบทดสอบท้ายบทสามารถประเมินผลความเข้าใจได้ในระดับหนึ่ง ซึ่งเพียงพอแก่การนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการประยุกต์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องเวกเตอร์ได้

**ข้อเสนอแนะ**

สำหรับข้อเสนอแนะแนวทางการพัฒนาต่อไปนั้น ได้สรุปแนวทางให้โปรแกรมมีการเพิ่มเติมเนื้อหาส่วนต่าง ๆ เช่น เนื้อหา ตัวอย่าง และ แบบทดสอบ เพื่อทำปรับปรุงให้มีความทันสมัยและความคล่องตัวในการใช้งาน

# บรรณานุกรม


ทวีชัย หงษ์สุมาลย์ และสงวนชัย สุวรรณชวะศิริ. 2544. **ใส่ลูกเล่นให้เว็บไซต์ด้วย Java Script.** พิมพ์ครั้งที่ 1. นนทบุรี : สำนักพิมพ์ อินโฟเพรส.

เบนซ์ อุตตมธนินทร์ และพิรมล สุระพงษ์ชัย. **ลูกเล่นกราฟฟิกบนเว็บ.** กรุงเทพฯ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

ประชา พฤกษ์ประเสริฐ และคณะ. **Adobe Photoshop 6**. กรุงเทพฯ : บริษัท เอช เอ็น กรุ๊ป จำกัด

พันจันทร์ ธนวัฒนเสถียร และคณะ. **คู่มือการเรียนรู้และเทคนิคการสร้างเว็บเพจ Macromedia Dreamweaver Mx**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

พันจันทร์ ธนวัฒนเสถียร และคณะ. **สร้าง Web page Step By Step**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

ราชบัณฑิตยสถาน. 2545. **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** พิมพ์ครั้งที่ 8. กรุงเทพฯ : ราชบัณฑิตยสถาน.

Erwin Kreyszig. 1993. Advanced Engineering Mathematics. 7th edition. New York : John Willey and Sons Inc.

Robert Ellis and Denny Gulick. 1994. **Calculus with Analytic Geometry**. 5th edition. Fort Worth : Saunders College.

Watson Fulks. 1961. **Advanced Calculus.** New York : Wiley.

# ภาคผนวก

# แบบฝึกหัด

## 1 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์เวกเตอร์ เกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ เคิร์ล

### 1.1 เวกเตอร์ในปริภูมิ

1.1.1 กำหนดให้ $P=(0,0,0)$ และ $Q=(3,-4,10)$ จงเขียนเวกเตอร์จากจุด $P$ ไปยังจุด $Q$ ในรูปของเวกเตอร์ $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$

a. $3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+10\mathbf{k}$ b. $2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+10\mathbf{k}$

c. $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-10\mathbf{k}$ d. $2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-10\mathbf{k}$

1.1.2 กำหนดให้ $\mathbf{a}=2\mathrm{i}$ , $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$ และ $\mathbf{c}=\frac{1}{3}$ จงหา $\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}$ และ $c\mathbf{a}$

a. $2\mathrm{i}+3\mathrm{j}-\mathrm{k},\ \mathrm{i}-\mathrm{j}-2\mathrm{k},\ \frac{5}{3}\mathrm{i}$ b. $3\mathrm{i}-\mathrm{j}+\mathrm{k},\ 2\mathrm{i}+\mathrm{j}-\mathrm{k},\ \frac{1}{3}\mathrm{i}$

c. $2\mathrm{i}+\mathbf{j}+\mathrm{k},\ 2\mathrm{i}-\mathrm{j}-\mathrm{k},\ \frac{2}{3}\mathrm{i}$ d. $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k},\ 2\mathbf{i}-\mathrm{j}-\mathrm{k},\ \frac{4}{3}\mathrm{i}$

1.1.3 จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

a. $\sqrt{3}$ b. $1$

c. $2\sqrt{5}$ d. $\frac{1}{2}$

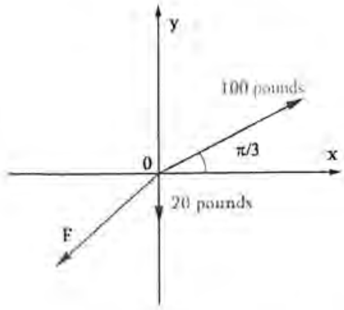
1.1.4 จงหาแรงลัพธ์ $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$ เมื่อ $\mathbf{F}_1=10^{-3}\mathbf{i}+0.12\mathbf{j}+1.2\times10^{4}\mathbf{k}$ ,

$\mathbf{F}_2=3\times10^{-3}\mathbf{i}+0.39\mathbf{j}-5\times10^{4}\mathbf{k}$

a. $2\times10^{-4}\mathbf{i}+0.13\mathbf{j}$ b. $3\times10^{-2}\mathbf{i}+0.25\mathbf{j}-3\times10^{2}\mathbf{k}$

c. $0.85\mathbf{j}-6\times10^{3}\mathbf{k}$ d. $4\times10^{-3}\mathbf{i}+0.51\mathbf{j}-3.8\times10^{4}\mathbf{k}$

1.1.5 เด็กสามคนดึงลูกบอลที่อยู่ ณ. ตำแหน่ง 0 **ดังรูป 1** เด็กคนหนึ่งดึงด้วยแรง 20 ปอนด์ ในทิศทางลบตามแนวแกน $y$ อีกคนดึงด้วยแรง 100 ปอนด์ ทำมุม $\frac{\pi}{3}$ กับแนวแกน $x$ ถ้าแรงรวมที่ออกจากบอลเป็นศูนย์ จงหาแรง $\mathbf{F}$ ที่เด็กคนที่สามควรจะดึงและแทนเจนท์ของมุม $\theta$ ระหว่างแกน $x$ และทิศทางตามแนวแรง $\mathbf{F}$




**รูปที่ 1 แรงที่กระทำกับลูกบอล**

a. 2 b. 3

c. $\sqrt{3}-\frac{2}{5}$ d. $\sqrt{2}$

**1.2 ผลคูณภายใน**

1.2.1 จงหา $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ และ $\cos\theta$ ของมุมระหว่าง **a** และ **b** เมื่อ $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ และ $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

a. $5\sqrt{3}$ b. $\frac{9}{\sqrt{50}}$

c. $-\frac{5}{\sqrt{87}}$ d. $9\sqrt{65}$

1.2.2 เวกเตอร์ **a** และ **b** ในข้อใดต่อไปนี้ตั้งฉากกัน

a. $\mathbf{a}=\sqrt{2}\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k},\mathbf{b}=-\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ b. $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k},\mathbf{b}=-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$

c. $\mathbf{a}=\mathbf{i},\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ d. $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k},\mathbf{b}=\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

1.2.3 จงหา $\mathbf{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ เมื่อ $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ , $\mathbf{b}=\mathbf{i}$

a. $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ b. $\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{4}{3}\mathbf{k}$

c. $\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{5}{2}\mathbf{j}-\mathbf{k}$ d. $\frac{4}{9}\mathbf{i}-\frac{2}{9}\mathbf{j}+\frac{4}{9}\mathbf{k}$

1.2.4 ให้ **a** และ **b** เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย และให้ θ เป็นมุมระหว่าง **a** และ **b** จงหาค่าของ θ ใน $[0, \pi]$ ที่ทำให้ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

a. 0 b. 1

c. 2 d. 3

1.2.5 บุคคลหนึ่งออกแรง $\mathbf{F}$ ขนาด 100 ปอนด์ ดึงรถขนทรายด้วยมุม $\pi/6$ เทียบกับพื้นดิน และดึงรถไปได้ 500 ฟุต จงหางาน $W$ ที่เกิดขึ้น

a. $1000$ b. $1500\sqrt{2}$

c. $2000\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d. $2500\sqrt{3}$

**1.3 ผลคูณไขว้**

1.3.1 จงหา $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ เมื่อ $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ และ $\mathbf{b} = -\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

a. $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ b. $15\mathbf{i}-2\mathbf{j}-9\mathbf{k}$

c. $19\mathbf{i}-9\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ d. $-21\mathbf{i}-\mathbf{j}+7\mathbf{k}$

1.3.2 จงหา $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ เมื่อ $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+12\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+12\mathbf{k}$ และ $\mathbf{c} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$

a. 0 b. 1

c. 2 d. 3

1.3.3 จงหาปริมาตร $V$ ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีจุดยอดที่ $(0, 0, 0), (2, -3, 4), (1, 1, -1)$ และ $(4, -1, -1)$

a. 9 b. 12

c. 15 d. 18

1.3.4 จงหา $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ เมื่อ $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}, \mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ และ $\mathbf{c} = 4\mathbf{i}-5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$

a. $\dfrac{5}{2}\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ b. $3\mathbf{i}+11\mathbf{j}-5\mathbf{k}$

c. $\dfrac{95}{2}\mathbf{i}+17\mathbf{j}-11\mathbf{k}$ d. $\dfrac{53}{2}\mathbf{i}+19\mathbf{j}-9\mathbf{k}$

1.3.5 สมมติว่าแขนของเครื่องเย็บกระดาษทำมุม $\pi/6$ จากแนวนอนและมีความยาว $\frac{3}{2}$ ฟุต ถ้าแรงกด 32 ปอนด์ ทำกับส่วนปลายของแขน จงคำนวณหาโมเมนต์ $\mathbf{M}$ ของแรงรอบแกนของเครื่องเย็บกระดาษ

a. $\sqrt{5}\,\mathbf{i}$ b. $-3\sqrt{2}\,\mathbf{i}$

c. $19\sqrt{8}\,\mathbf{i}$ d. $-24\sqrt{3}\,\mathbf{i}$

## 1.4 ฟังก์ชันเวกเตอร์

1.4.1 จงหาค่าของ $\lim_{t\to 3}\left(\frac{t^2-5t+6}{t-3}\mathbf{i}+\frac{t^2-2t-3}{t-3}\mathbf{j}+\frac{t^2+4t-21}{t-3}\mathbf{k}\right)$

a. $\mathbf{i}+4\mathbf{j}+10\mathbf{k}$ b. $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+13\mathbf{k}$

c. $\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ d. $3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

1.4.2 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\mathbf{F}(t)=\mathbf{i}+t\,\mathbf{j}+t^5\mathbf{k}$

a. $3\mathbf{i}+\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$ b. $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

c. $\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}$ d. $\mathbf{j}+5t^4\mathbf{k}$

1.4.3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\mathbf{F}(t)=\cosh t\,\mathbf{i}+\sinh t\,\mathbf{j}+\sqrt{t}\mathbf{k}$

a. $\sin t\,\mathbf{i}+\cosh t\,\mathbf{j}-\mathbf{k}$ b. $2\cosh t\,\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}$

c. $\sin t\,\mathbf{i}-\mathbf{k}$ d. $\sinh t\,\mathbf{i}+\cosh t\,\mathbf{j}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{k}$

1.4.4 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ เมื่อ $\mathbf{F}(t)=2\sec t\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\csc t\mathbf{k}$ และ $\mathbf{G}(t)=\ln t\,\mathbf{k}$

a. $-\frac{3}{t}\mathbf{i}-(2\sec t\tan t\ln t+\frac{2}{t}\sec t)\mathbf{j}$ b. $-2\mathbf{i}-(\sec t\tan t+\sec t)\mathbf{j}$

c. $(2\sec t\tan t\ln t+\sec t)\mathbf{j}$ d. $2\mathbf{i}-(2\sec t\tan t+\frac{2}{t}\sec t)\mathbf{j}$

1.4.5 จงหาอนุพันธ์ของ Fog เมื่อ $\mathrm{F}(t)=\ln t\mathbf{i}-4e^{2t}\mathbf{j}+\frac{t-1}{t}\mathbf{k}$ และ $g(t)=\sqrt{t}$

a. $\frac{1}{3}\mathbf{i}-4e^{\sqrt{t}}.\frac{1}{t}\mathbf{j}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}\mathbf{k}$ b. $\frac{1}{2t}\mathbf{i}-4e^{2\sqrt{t}}.\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{j}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}\mathbf{k}$

c. $\frac{1}{2}\mathbf{i}-2e^{2\sqrt{t}}\mathbf{j}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}\mathbf{k}$ d. $-4e^{\sqrt{t}}.\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{j}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}\mathbf{k}$

## 1.5 เส้นโค้ง เส้นสัมผัส ความยาวส่วนโค้ง

1.5.1 จงหาสมการอิงตัวแปรตัวเสริมของเส้นตรงที่ลากจากจุด $(-3,\ 2,\ 1)$ ไปยังจุด $(4,\ 0,\ 5)$

a. $(-3+7t)\mathbf{i}+(2-2t)\mathbf{j}+(1+4t)\mathbf{k}$ b. $(1+2t)\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+\mathbf{k}$

c. $(-1+2t)\mathbf{i}+(3-2t)\mathbf{j}+(1-t)\mathbf{k}$ d. $2\mathbf{i}+(2-1t)\mathbf{j}+(-1+3t)\mathbf{k}$

1.5.2 จงหาตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของกราฟ $y = \tan x$ ในช่วง $0 \le x \le \pi/4$

a. $3t\,\mathbf{i}$　　　b. $\tan t\,\mathbf{j}$

c. $\mathbf{i} + \tan t\,\mathbf{j}$　　　d. $t\mathbf{i} + \tan t\,\mathbf{j}$

1.5.3 จงหาความยาว $L$ ของเส้นโค้ง $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j}$ ในช่วง $0 \le t \le 2\pi$

a. $3\sqrt{2}$　　　b. $2\sqrt{3}$

c. $6$　　　d. $\frac{2}{3}$

1.5.4 จงหา $s(t)$ เมื่อให้ $a = 0$ ของ $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{sin}\, t\,\mathbf{j} - \cos t\mathbf{k}$ ใกล้ $\infty$ $0 \le t \le \pi$

a. 3t　　　b. $\sqrt{t}$

c. $\sqrt{5t}$　　　d. $2\sqrt{3t}$

1.5.5 จงหา $ds/dt$ ของ $\mathbf{r}(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

a. $\sqrt{t^2 + 2}$　　　b. $\sqrt{3t}$

c. $3t^2$　　　d. $2t$

**1.6 เส้นโค้งในระบบเชิงกล**

ในข้อ 16.1-1.6.3 กำหนดฟังก์ชันตำแหน่งของวัตถุ $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} - 16t^2\mathbf{k}$ จงหา

1.6.1 ความเร็ว

a. $-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} - 32t\,\mathbf{k}$　　　b. $-\cos t\,\mathbf{j} + 5t\,\mathbf{k}$

c. $\sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} - 5t\,\mathbf{k}$　　　d. $-3\sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} - 5t\,\mathbf{k}$

1.6.2 อัตราเร็ว

a. $\sqrt{1144t^2}$　　　b. $1000t^2$

c. $\sqrt{2 + 1000t^2}$　　　d. $\sqrt{1 + 1024t^2}$

1.6.3 ความเร่ง

a. $2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}$　　　b. $-\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} - 32\,\mathbf{k}$

c. $\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$　　　d. $-2\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$

1.6.4 จงหาส่วนประกอบสัมผัสและส่วนประกอบปกติของความเร่งของ

$\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{k}$

a. $2t,\ 2$ b. $2t,\ 3.5$

c. $5t,\ 4.3$ d. $5t,\ 5$

1.6.5 จงหาเวกเตอร์ความเร็วของวัตถุที่มีความเร่ง $\mathbf{a}(t) = -32\,\mathbf{k}$ ความเร็วเริ่มต้น $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

a. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + t\mathbf{k}$ b. $\mathbf{i} - 2t\,\mathbf{k}$

c. $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 32t\,\mathbf{k}$ d. $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

**1.7 ความโค้งและความบิดของเส้นโค้ง**

1.7.1 จงหาความโค้ง $\kappa$ ของเส้นโค้ง $\mathbf{r}(t) = (2t-1)\mathbf{i} + (t^2+1)\mathbf{j}$ โดยได้สมการที่ 3.48 ที่ $t = 0$

a. $2$ b. $\frac{3}{4}$

c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{1}{2}$

1.7.2 จงหาความโค้งของ $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$ โดยสมการที่ 3.50 เพื่อทำการหารัศมีความโค้ง ที่จุด $t = 0$

a. 1.5 b. 2

c. 4.5 d. 5

1.7.3 จงหาความโค้งของ กราฟของฟังก์ชั่น $y = \ln x$ ที่ $x = 0$

a. 5 b. 3

c. 2 d. 0

1.7.4 จงหา $\mathbf{T}(s)$ ของเส้นโค้ง $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\sin t\,\mathbf{k}$

a. $\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{s}{2}\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{s}{2}\,\mathbf{k}$ b. $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{s}{3}\,\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{s}{3}\,\mathbf{k}$

c. $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{s}{2}\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{s}{2}\,\mathbf{k}$ d. $\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{s}{2}\,\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{s}{2}\,\mathbf{k}$

1.7.5 จากโจทย์ข้อ 1.7.4 จงหาความเบี้ยวของเส้นโค้ง

a. 3 b. 5

c. 1 d. 0

## 1.8 ฟังก์ชันหลายตัวแปร

1.8.1 จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ เมื่อ $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=u-v$ และ $y=u^2+v^2$

a. $\dfrac{2(u-v)-4u(u^2+v^2)}{(u-v)^2-(u^2+v^2)^2}$ b. $\dfrac{(u+v^2)-(u^2+v^2)}{(u-v)-(u^2-v^2)}$

c. $\dfrac{4(u^2-v)-2u(u+v^2)}{(u-v)^2-(u^2+v^2)^2}$ d. $\dfrac{(u-v)-3(u^2-v^2)}{2(u+v)^2-(u^2+v^2)}$

1.8.2 จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ เมื่อ $z=ue^{v}+ve^{-u}, u=\ln r, v=s\ln r$

a. $(r-\dfrac{1}{r})+(r\ln r-1)\dfrac{s}{r}$ b. $(2r+\dfrac{s}{r}\ln\dfrac{1}{r})\dfrac{1}{r}-(r\ln r+\dfrac{1}{r})\dfrac{s}{r}$

c. $(2r^{s}-2\dfrac{s}{r}\ln r)\dfrac{1}{r}+(r^{s}\ln r-1)\dfrac{s}{r}$ d. $(r^{s}-\dfrac{s}{r}\ln r)\dfrac{1}{r}+(r^{s}\ln r+\dfrac{1}{r})\dfrac{s}{r}$

1.8.3 จงหา $\dfrac{dw}{dt}$ เมื่อ $w=\dfrac{x}{y}-\dfrac{z}{x}$ ; $x=\sin t, y=\cos t, z=\tan t$

a. $1+\cos t+2\tan t-\sec t$ b. $\sin t-2\csc t+\tan t-\cos t\sec t$

c. $1+\csc t+\tan^2 t-\csc t\sec^2 t$ d. $2\sin t-\cos t+2\tan^2 t-\sec^2 t$

1.8.4 จงหา $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ เมื่อ $w=y\ln xz$ ; $x=ve^{u}$, $y=u^2v^4$, $z=ue^{v}$

a. $uv[3-2uv+uv+2\ln u]$ b. $2uv^2[2u-uv+u\ln v]$

c. $uv^3[2uv+uv+2\ln u]$ d. $uv^4[1+2u+v+2\ln uv]$

1.8.5 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยการใช้อนุพันธ์ฟังก์ชันแฝงของ $x^2+y^2+\sin xy^2=0$

a. $\dfrac{-2x-y^2\cos xy^2}{2y+2xy\cos xy^2}$ b. $\dfrac{3x+y^2\sin xy}{y-2\sin xy}$

c. $\dfrac{-x+y\sin x\cos xy}{y+xy\cos xy^2}$ d. $\dfrac{2xy-2\cos xy}{-y^2+\sin xy\cos xy^2}$

## 1.9 แกรเดียท์และอนุพันธ์ทิศทาง

1.9.1 จงหาอนุพันธ์ทิศทางของ $f(x,y) = e^{4y}$ ที่จุด $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}$

a. 1 b. 0

c. 5 d. 4

1.9.2 จงหาอนุพันธ์ทิศทางของ $f(x,y,z) = x^3y^2z$ ที่จุด $P = (2, -1, 2)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

a. $\frac{64}{3}$ b. $\frac{9}{3}$

c. $\frac{81}{2}$ d. $\frac{7}{2}$

1.9.3 จงหาเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2$

a. $2x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k}$ b. $x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

c. $-2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ d. $4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 8z\mathbf{k}$

1.9.4 จงหาทิศทางที่ $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ ฟังก์ชันสูงสุดที่จุด $(-1, 1)$

a. $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ b. $\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

c. $-6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ d. $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

1.9.5 จงหาสมการของระนาบที่สัมผัสพื้นผิว $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ที่จุด $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

a. 2 b. 3

c. 0 d. 5

## 1.10 สนามเวกเตอร์

1.10.1 จงหาเคิร์ลของ $F(x,y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

a. 3 b. 0

c. 5 d. 1

1.10.2 จงหาเคิร์ลของ $e^x \cos y\mathbf{i} + e^x \sin y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

a. $2e^x \sin y\mathbf{k}$ b. $e^x \cos y\mathbf{i}$

c. $e^x \sin y\mathbf{j}$ d. $2e^x \cos y\mathbf{k}$

1.10.3 จากข้อ 1.10.1 จงหาไดเวอร์เจนซ์ของ $\mathbf{F}(x, y)$

a. $x + y - z$

b. $2x - y + z$

c. $x - y$

d. $2(x + y + z)$

1.10.4 จากข้อ 1.10.2 จงหาไดเวอร์เจนซ์ของ $\mathbf{F}(x, y, z)$

a. $e^x \sin y$

b. $e^x \cos y$

c. $2e^x \cos y + 1$

d. $2e^x \sin y + 1$

1.10.5 พิจารณาว่า $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz\mathbf{i} + x^2 z\mathbf{j} + (x^2 y + 1)\mathbf{k}$ เป็นแกรเดียนของฟังก์ชันใด

a. $x^2 yz + z + c$

b. $xyz + c$

c. $yz - z + c$

d. $z + c$

## 2.1 ปริพันธ์เชิงเส้น

2.1.1 จงหาปริพันธ์เชิงเส้น $\int_C y\,ds$ เมื่อ $C$ ต่อ $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ ในช่วง $-1 \le t \le 0$

a. $\frac{1}{54}[1 - 10^{1/2}]$ b. $\frac{1}{4}[2^{1/3}]$

c. $\frac{81}{4}$ d. $\frac{1}{34}[5 - 3^{1/2}]$

2.1.2 จงหาปริพันธ์ $\int_C xy\,ds$ เมื่อ $C$ คือวงกลม $x^2 + y^2 = 4$

a. 5 b. 13

c. 16 d. 9

2.1.3 จงหาปริพันธ์ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ เมื่อ $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ และ $\mathbf{r}(t) = 5\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} - \cos t\,\mathbf{k}$ ในช่วง $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

a. $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$ b. $3\sqrt{2} - 2$

c. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ d. $\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}$

2.1.4 จงหาปริพันธ์ $\int_C \mathbf{F} \cdot dr$ เมื่อ $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$ ในช่วง $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

a. $-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$ b. $\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{3}$

c. $\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$ d. $\frac{\pi^4}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$

2.1.5 จงหาปริพันธ์ $\int_C y\,dx - x\,dy + xyz^2\,dz$ เมื่อ $C$ ต่อ $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^{t}\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ ในช่วง $0 \le t \le 1$

a. $-\frac{7}{3}$ b. 3

c. $-\frac{5}{3}$ d. $\frac{2}{3}$

## 2.2 ทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์เชิงเส้น

2.2.1 จงคำนวณหา $\int_C (e^x + y)dx + (x + 2y)dy$ เมื่อ $C$ คือเส้นโค้งเรียบในระนาบ $xy$ จาก (0, 1) ไปยัง (3, 2)

a. $e^2 + 7$ b. $3e^2 + 9$

c. $3e^2$ d. $e^2 + 13$

2.2.2 จงคำนวณหา $\int_C y\,dx + (x+z)dy + y\,dz$ เมื่อ $C$ ต่อ $\mathbf{r}(t) = \frac{t \quad + 1}{t^2 - 1}\mathbf{i} + \cos \pi t\,\mathbf{i} + 2t \sin \pi t\,\mathbf{k}$ ในช่วง $0 \le t \le \frac{1}{2}$

a. 3 b. 1

c. 7 d. 5

2.2.3 จงหา $\int_C \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}dx + \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}dy + \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}dz$ เมื่อ $C$ คือ $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ ในช่วง $0 \le t \le \frac{1}{2}$

a. $\ln 2$ b. $2\ln 3$

c. $\sqrt{2}$ d. $\sqrt{2}\ln 3$

2.2.4 จงหา $\int_C e^{-x}\ln y\,dx - \frac{e^{-x}}{y}dy + z\,dz$ เมื่อ $C$ คือ $\mathbf{r}(t) = (t-1)\mathbf{i} + e^2\mathbf{j} + (t^2+1)\mathbf{k}$ ในช่วง $0 \le t \le 1$

a. $\frac{1}{2}$ b. 1

c. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d. 2

2.2.5 จงหา $\int_C (y + 2xe^y)dx + (x + x^2e^y)dy$ เมื่อ $C$ คือ $\mathbf{r}(t) = t^{1/2}\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ ในช่วง $1 \le t \le 4$

a. $2\ln 2$ b. $2\ln 4 + 15$

b. $\ln 2$ d. $\ln 2 + 9$

## 2.3 ปริพันธ์สองชั้น

2.3.1 จงหา $\int_0^1 \int_{-1}^1 x\,dydx$

a. 0 b. 1

c. 2 d. 3

2.3.2 จงหา $\iint_R (x+y)dA$ เมื่อ $R$ คือพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากที่ล้อมรอบด้วย $x=2, x=3, y=4$ และ $y=6$

a. 3 b. 7

c. 3 d. 15

2.3.3 จงหาบริเวณทึบที่อยู่ระหว่างระนาบ $x+2y+3z=6$

a. 0 b. 3

c. 6 d. 9

2.3.4 จงหา $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,drd\theta$

a. $\frac{2}{3}\pi$ b. $\pi$

c. $\frac{5}{3}\pi$ d. $2\pi$

2.3.5 จงหาพื้นที่ระหว่างกราฟพาราโบลา $x=y^2$ และ $x=32-y^2$

a. $\frac{112}{5}$ b. $\frac{213}{3}$

b. $\frac{512}{3}$ d. $\frac{223}{5}$

**2.4 ทฤษฎีบทของกรีน**

2.4.1 จงหา $\int_C y\,dx$ โดยที่ $C$ ประกอบด้วยส่วนของวงกลม $x^2+y^2=4$ ในจตุภาคที่ 1 และช่วง [0,2] บนแกน x และ y

a. $-\pi$ b. 2

c. $\frac{\pi}{2}$ d. $2\pi$

2.4.2 จงหา $\int_C xy\,dx+(x^{3/2}+y^{3/2})\,dy$ โดยที่ $C$ คือสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ , $(1,0)$, $(1,1)$ และ $(0,1)$

a. $\frac{1}{2}$ b. 1

c. $\frac{2}{3}$ d. 2

2.4.3 จงหา $\int_C y\,dx - x\,dy$ เมื่อ $C$ คือ คาร์ดิออยด์ $r = 1 - \cos\theta$

a. $-\pi$

b. $\frac{2\pi}{3}$

c. $-3\pi$

d. $2\pi$

2.4.4 จงคำนวณหา $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เมื่อ $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + 3x\,\mathbf{j}$ และ $C$ คือวงกลม $x^2 + y^2 = 4$

a. $-\pi$

b. $3\pi$

c. $-5\pi$

d. $8\pi$

2.4.5 จงคำนวณหา $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เมื่อ $\mathbf{F}(x,y) = y\sin x\,\mathbf{i} - \cos x\,\mathbf{j}$ โดยที่ $C$ คือครึ่งวงกลม $x^2 + y^2 = 9$ ในช่วง $y \geq 0$ และเส้นตรง $y = 0$ ในช่วง $-3 \leq x \leq 3$

a. 0

b. 1

c. 4

d. 5

**2.5 พื้นผิวสำหรับการหาปริพันธ์เชิงผิว**

2.8.1 จงหาเวกเตอร์ปกติ $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ ของพื้นผิวทรงกรวย $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + cu\mathbf{k}$

a. $-u\cos v\mathbf{i} - cu\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

b. $-cu\cos v\mathbf{i} - cu\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

c. $-cu\sin v\mathbf{i} - cu\cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

d. $-cu\sin v\mathbf{i} - cu\cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

2.8.2 จงหาเวกเตอร์ปกติ $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ ของพื้นผิวทรงกรวย $\mathbf{r}(u,v) = a\cos v\mathbf{i} + b\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

a. $-b\sin v\mathbf{i} - a\cos v\mathbf{j}$

b. $-a\cos v\mathbf{i} - b\sin v\mathbf{j}$

c. $-b\cos v\mathbf{i} - a\sin v\mathbf{j}$

d. $-b\sin v\mathbf{i} - a\cos v\mathbf{j}$

2.8.3 จงหาเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของพื้นผิว $4x - 4y + 7z = -3$

a. $\frac{1}{3}4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

b. $\frac{1}{3}4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

c. $\frac{1}{9}4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

d. $\frac{1}{9}4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

2.8.4 จงหาเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของพื้นผิว $y^2 + z^2 = a^2$

a. $\frac{1}{a}[y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$

b. $\frac{1}{a}[2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}]$

c. $\frac{1}{2a}[y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$

d. $\frac{1}{a}[2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$

2.8.5 จงหาเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของพื้นผิว $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

a. $\frac{1}{6}[x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$
b. $\frac{1}{6}[2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$
c. $\frac{1}{3}[x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$
d. $\frac{1}{3}[2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$

## 2.6 ปริพันธ์เชิงผิว

2.6.1 จงคำนวณหา $\iint_S g(x,y,z)\,dA$ เมื่อ $g(x,y,z) = x$ และ $S$ คือระนาบ $2x + 3y + z = 6$ ในอัฐภาคที่ 1

a. $2\sqrt{3}$
b. $3\sqrt{14}$
c. $5\sqrt{9}$
d. $7\sqrt{13}$

2.6.2 จงคำนวณหา $\iint_S g(x,y,z)\,dA$ เมื่อ $g(x,y,z) = 2x^2 + 1$ และ $S$ คือส่วนของระนาบ $z = 3x - 2$ ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$

a. $2\pi\sqrt{3}$
b. $5\pi\sqrt{2}$
c. $9\pi\sqrt{11}$
d. $12\pi\sqrt{10}$

2.6.4 จงคำนวณหา $\iint_S g(x,y,z)\,dA$ เมื่อ $g(x,y,z) = y$ และ $S$ คือส่วนหนึ่งของ $z = 4 - y^2$ ในช่วง $0 \le x \le 3$ และ $0 \le y \le 2$

a. $\frac{1}{2}\left(5^{2/3} - 1\right)$
b. $\frac{1}{2}\left(13^{3/2} - 5\right)$
c. $\frac{1}{4}\left(9^{2/3} - 5\right)$
d. $\frac{1}{4}\left(17^{3/2} - 1\right)$

2.6.5 จงคำนวณหา $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dA$ เมื่อ $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ โดยที่ $S$ คือ ทรงพาราโบลา $z = 9 - x^2 - y^2$ เหนือระนาบ $xy$ และ $\mathbf{n}$ มีทิศขึ้น

a. 13
b. $15\frac{\pi}{2}$
c. $65\pi$
d. $72\pi$

2.6.6 สมมติว่าS คือทรงพาราโบลา $z = 1 - x^2 - y^2$ เหนือระนาบ $xy$ และ $\mathbf{n}$ มีทิศขึ้น ให้ความเร็วของของไหลที่มีความหนาแน่น $d$ คือ $\mathbf{V}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ จงหาอัตราของการไหลผ่านพื้นผิว $S$ ในทิศทางของ $\mathbf{n}$

a. $2\pi d$
b. $5\pi^2 d$
c. $7\pi d$
d. $8\pi^2 d$

## 2.7 ปริพันธ์สามชั้น

2.7.1 จงหาค่าของ $\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y - xz)\,dz\,dy\,dx$

a. 43 b. $-49$

c. 53 d. $-54$

2.7.2 จงหาค่าของ $\iiint\limits_D e^y\,dV$ เมื่อ D คือบริเวณทึบที่ล้อมรอบด้วยระนาบ

$y = 1,\ z = 0,\ y = x,\ y = -x$ และ $z = y$

a. $e$ b. $e - 3$

c. $3e$ d. $2e - 4$

2.7.3 จงหา $\iiint\limits_D ye^{xy}\,dV$ เมื่อ D คือรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ที่ล้อมรอบด้วยระนาบ

$x = 1,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 2,\ z = -2$ และ $z = 0$

a. $\frac{1}{3}e^2$ b. $e^3 - 2e$

c. $2e^5 - 2e + \frac{1}{2}$ d. $\frac{2}{3}e^6 - 2e^2 + \frac{4}{3}$

2.7.4 จงคำนวณหา $\iiint\limits_D zy\,dV$ โดยที่ $D$ คือ บริเวณสามมิติในอัฐภาคที่ 1 ที่ล้อมรอบด้วยระนาบ

$z = 1$ เหนือทรงกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{5}{9}$

c. $\frac{2}{13}$ d. $\frac{1}{15}$

2.7.5 จงคำนวณหา $\iiint\limits_D z\,dV$ โดยที่ D คือบริเวณสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2$

ระนาบ $z = 0$ และ ระนาบ $x = -1,\ x = 1,\ y = -1$ และ $y = 1$

a. $\frac{15}{2}$ b. $\frac{49}{2}$

c. $\frac{50}{3}$ d. $\frac{75}{3}$

**2.8 ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์**

จงใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนท์คำนวณ $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$ เมื่อ $\mathbf{n}$ คือเวกเตอร์ปกติของ $S$ ที่มีทิศทางออกจากพื้นผิว

2.8.1 $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-2xz\mathbf{k}$ เมื่อ $S$ คือรูปทรงสี่หน้าที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)$ และ $(0,0,1)$

a. $\frac{1}{12}$ b. $\frac{1}{24}$

c. $\frac{5}{12}$ d. $\frac{5}{24}$

2.8.2 $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ เมื่อ $S$ คือ ขอบเขตของบริเวณสามมิติในอัฐภาคที่ 1 ภายในทรงกระบอก $x^2+y^2=1$ และอยู่ระหว่างระนาบ $z=0$ และ $z=1$

a. $\frac{5\pi}{2}$ b. $5\frac{\pi}{3}$

c. $\frac{3\pi}{4}$ d. $7\frac{\pi}{5}$

2.8.3 $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ เมื่อ $S$ ประกอบด้วยครึ่งทรงกลม $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ และระนาบ $xy$ ที่ล้อมรอบด้วยวงกลม $x^2+y^2=1$

a. $\pi$ b. $2\pi$

c. $3\pi$ d. $5\pi$

2.8.4 $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}-2z^2\mathbf{k}$ เมื่อ $S$ คือ ขอบเขตของบริเวณสามมิติเหนือระนาบ $xy$ ภายใต้ระนาบ $z=x$ และล้อมรอบด้วยแผ่นพาราโบลา $y^2=2-x$

a. $15\sqrt{2}$ b. $\frac{28}{3}$

c. $30\sqrt{3}$ d. $\frac{32}{15}\sqrt{2}$

2.8.5 $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})$ เมื่อ $S$ คือทรงกลม $x^2+y^2+z^2=9$

a. $556\pi$ b. $648\pi$

c. $795\pi$ d. $993\pi$

**2.9 ทฤษฎีบทของสโต๊ก**

จงใช้ทฤษฎีบทของสโต๊กคำนวณค่า $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เมื่อ $C$ คือเส้นโค้งที่ล้อมรอบพื้นผิว $S$ และมีทิศทางออกจาก $S$

2.9.1 $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ , $S$ คือ ทรงพาราโบลา $z = 1 - x^2 - y^2$ ในอัฐภาคแรก และ $\mathbf{n}$ มีทิศชี้ลง

a. $\frac{1}{2} + \pi$ b. $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{3}$

c. $-\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}$ d. $-\frac{5}{4} + \pi$

2.9.2 $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , $S$ คือ ส่วนของทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ระหว่างระนาบ $z = 0$ และ $z = 1$ และส่วนของ $z = 1$ ในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ และ $\mathbf{n}$ มีทิศออกจากแกน $z$ บนทรงกระบอกชี้ไปยังระนาบ

a. $\pi$ b. $-\pi$

c. $2\pi$ d. $-2\pi$

จงใช้ทฤษฎีบทของสโต๊กคำนวณค่า $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ เมื่อ $C$ มีทิศทวนเข็มนาฬิกา

2.9.3 $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ , $C$ คือส่วนตัดของระนาบ $x + y + z = 5$ และทรงกระบอก $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

a. $\frac{8}{3}$ b. $\frac{17}{3}$

c. $-\frac{9}{4}$ d. $\frac{19}{4}$

2.9.4 $\mathbf{F}(x,y,z) = y(x^2 + y^2)\mathbf{i} - x(x^2 + y^2)\mathbf{j}$ , $C$ คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,1)$ และ $(0,1,1)$

a. $\frac{3}{2}$ b. $-\frac{5}{2}$

c. $\frac{4}{3}$ d. $-\frac{8}{3}$

2.9.5 $\mathbf{F}(x,y,z)=(z-y)\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+x\,\mathbf{k}$ , $C$ คือรอยตัดของทรงกระบอก $r=\cos\theta$ และส่วนของทรงกลม $x^2+\dfrac{y^2}{z^2}=1$ เหนือระนาบ $xy$

a. $\pi$ b. $\dfrac{\pi}{2}$

c. $\dfrac{\pi}{3}$ d. $\dfrac{\pi}{4}$

# ดัชนี

## A



## B



## C

## G



## H



## I



## J



## K

## L



## M



## N



## O

**P**



**R**



**S**