ระบบควบคุมป้อนกลับเหมาะสมที่สุด

(OPTIMAL FEEDBACK CONTROL SYSTEM)

โดย

นาย ศุภวิทย์ สมวงศ์

นาย อรรถพร อึ้งประดิษฐ์

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2546

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2546

ภาควิชา วิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง ระบบควบคุมป้อนกลับเหมาะสมที่สุด (OPTIMAL FEEDBACK CONTROL SYSTEM)

ผู้จัดทำ

1 ศุภวิทย์ สมวงศ์ 44015304

2 อรรถพร อิ่งประดิษฐ์ 44015314

_________________ อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผศ. ดร. พัลลภ เหล่าเจริญ)

ระบบควบคุมป้อนกลับเหมาะสมที่สุด

OPTIMAL FEEDBACK CONTROL SYSTEM

โดย

นาย ศุภวิทย์ สมวงศ์

รหัสประจำตัวนักศึกษา 44015304

นาย อรรถพร อึ้งประดิษฐ์

รหัสประจำตัวนักศึกษา 44015314

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผศ.ดร. พัลลภ เหล่าเจริญ

บทคัดย่อ

ปริญญานิพนธ์นี้ได้กล่าวถึงการศึกษาของระบบควบคุมป้อนกลับเหมาะสมที่สุด และนำทฤษฎีดังกล่าวมาออกแบบระบบจำลองการเคลื่อนที่ของปั้นจั่นยกของ

การควบคุมป้อนกลับเหมาะสมที่สุดนี้ได้นำมาออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับให้ควบคุมปั้นจั่นยกของเคลื่อนที่จากสภาวะเริ่มต้นไปยังจุดที่ต้องการ ในขณะเดียวกันก็สามารถควบคุมให้ภาระที่แขวนอยู่แกว่งน้อยที่สุด

ABSTRACT

This thesis describes the study of the optimal feedback control system. It is used for design the model of crane movement control.

The optimal feedback control is utilized for designing the feedback controller in order to control the desired position of the crane with low deflection of the load.

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมา

Optimal Control คือวิธีการออกแบบระบบควบคุมในรูปแบบการหาความเหมาะสมที่สุด โดยวิธีการนี้จะต้องหาปริมาณการวัดข้อมูล เรียกว่าฟังก์ชั่นแสดงค่า (Cost Function) ซึ่งแสดงดัชนีการทำงานของระบบ ประกอบกับเงื่อนไขบังคับ (constraints) ในรูปแบบของสมการสภาวะ แล้วหาการควบคุมโดยเงื่อนไขฟังก์ชั่นแสดงค่ามีค่าต่ำสุดหรือสูงสุด

ปัญหานี้โดยทั่วไปจะใช้ Calculus of Variation หรือ Maximum Principle เพื่อทำให้การควบคุมโดยการป้อนกลับนั้นสอดคล้องกับเงื่อนไข

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1. ศึกษาทฤษฎีการควบคุมเพื่อกำหนดการตัดสินใจ สำหรับควบคุมระบบในเวลาปัจจุบัน โดยมีเงื่อนไขบังคับบางประการ ทำให้ระบบเบี่ยงเบนไปจากลักษณะที่ต้องการทางอุดมคติน้อยที่สุด

2. ออกแบบระบบควบคุมในรูปแบบการหาความเหมาะสมที่สุด (Optimal Control)

3. หาปริมาณการวัดข้อมูลเรียกว่าฟังก์ชั่นแสดงค่า (Cost Function) ซึ่งแสดงดัชนีการทำงานของระบบ ประกอบกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ในรูปแบบสมการสภาวะ

1.3 ขอบเขตของโครงงานนี้

1. ทำการศึกษาทฤษฎีต่าง ๆที่เกี่ยวข้องกับการหาออกแบบระบบควบคุมเหมาะสมที่สุด(Optimal Control)

2. ศึกษาปัญหาเบื้องต้น โดยยกตัวอย่าง การแสดงสมการสภาวะของการเคลื่อนที่ของเครน และทำการแก้ปัญหาโดยทฤษฎีออพติมัลในที่สุด

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.ทำการศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องโดยใช้วิธีทางโมเดลทางคณิตศาสตร์(Model Mathematic) และเมทริกซ์(Matrix)

2. ศึกษาปัญหาต่างๆ และนำทฤษฎีต่างดังกล่าวมาใช้โดยการคิดด้วยมือและใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์ (Matlab)

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากโครงงาน

1. การศึกษาทฤษฎีและสามารถทำความเข้าใจได้ด้วยตนเอง
2. เข้าใจวิธีการดำเนินงานทางคณิตศาสตร์
3. รู้จักการแก้ปัญหาต่าง ๆที่เกิดขึ้น
4. สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการ

2.1 ปัญหาของการควบคุมออพติมัล

จุดประสงค์หลักของ Optimal Control คือการหาสัญญาณควบคุม ที่ทำให้ระบบนั้นเป็นไปตามเงื่อนไขสภาวะควบคุม ในเวลาขีดสุด (maximize หรือ minimize) โดยเลือกเกณฑ์การทำงาน คือดัชนีการทำงานหรือฟังก์ชั่นแสดงค่า จากระบบเราจะหาค่าควบคุม u*(t) (* แสดงสภาวะ optimal) ที่จะนำระบบ P จากสภาวะสุดท้ายด้วยเงื่อนไขการควบคุมและสภาวะและที่ทำให้ ดัชนีการทำงาน J มีค่าขีดสุด

หลักการแก้ปัญหา Optimal Control

- model ของระบบจะถูกควบคุม โดยทั่วไปใน state variable form
- เกณฑ์เฉพาะของดัชนีการทำงาน
- การแสดงสภาวะขอบเขต และเงื่อนไขการควบคุม

การควบคุมออพติมัล คือการคำนวณหาและออกแบบตัวควบคุมเพื่อบังคับให้ระบบทำงานตามเงื่อนไขที่วางไว้ได้ดีที่สุด ส่วนใหญ่จะให้ได้ค่าที่เงื่อนไขน้อยที่สุด ระบบพลวัตรหรือแพลนท์ที่จะควบคุมหากเป็นระบบเวลาต่อเนื่องอยู่ในรูปสมการ

$$\dot{x} = f(x,u,t) \quad , \quad t \in [t_0, t_1] \tag{1.1}$$

x(t) เป็นสเตทเวคเตอร์ (n x1) u(t) เป็นอินพุทเวคเตอร์(px1) f เป็นฟังก์ชั่นค่าเวคเตอร์ $[t_0,t_1]$ เป็นช่วงเวลาการควบคุม

การออกแบบตัวควบคุมออพติมัลพิจารณาจากองค์ประกอบหลักดังนี้

- ลักษณะของแพลนท์
- จุดประสงค์ที่ต้องการจากการทำงานของแพลนท์
- ลักษณะของข้อมูลหรือสัญญาณที่แพลนท์ให้กับตัวควบคุม

2.1.1 ลักษณะของแพลนท์

ส่วนประกอบของระบบมีขีดจำกัดทางกายภาพ ทำให้มีเงื่อนไขบังคับ (Constraint) กับตัวแปรสเตทและตัวแปรควบคุม อินพุทหรือสัญญาณที่เข้าสู่แพลนท์ $u_1(t), u_2(t)\ldots,\ldots u_p(t)$ ไม่อาจมีค่าเป็นค่าอิสระใด ๆก็ได้ แต่อยู่ภายใต้ขีดจำกัดหนึ่ง ค่าตัวแปรควบคุมที่สอดคล้องเงื่อนไขบังคับควบคุมตลอดช่วงเวลาการควบคุม $[t_0,t_1]$ เรียก ค่าควบคุมที่ยอมรับได้ (admissible control) หากให้ u เป็นเซตของค่าควบคุมที่ยอมรับได้ u(t) จะยอมรับได้ หาก

$$u(t) \in \cup \text{ ทุกค่า } t \in [t_0, t_1] \tag{1.2}$$

เงื่อนไขบังคับกับสเตท x(t) ให้นิยามในทำนองเดียวกัน แนววิถีสเตท (state trajectory) ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขบังคับของค่าตัวแปรสเตทตลอดช่วง $[t_0,t_1]$ เรียก แนววิถียอมรับได้ (admissible trajectory) หากได้ x แทนเซตของวิถีแนวสเตทที่ยอมรับได้ x(t) ยอมรับได้ หาก

$$x(t) \in x \text{ ทุกค่า } t \in [t_0, t_1] \tag{1.3}$$

2.1.2 จุดประสงค์ที่ต้องการจากการทำงานของแพลนท์

ความต้องการนี้แสดงในรูปคณิตศาสตร์ เรียกดัชนีหรือเกณฑ์ตัดสินการทำงาน (Performance Criterion or Index) จากนั้นจึงพยายามหาคำตอบที่ออพติไมซ์เกณฑ์ตัดสินนี้ การเลือกเกณฑ์ตัดสินในแต่ละปัญหา ไม่อาจกำหนดตายตัวลงได้ การพิจารณาเลือกก็อาศัยความละเอียดอ่อนในการตีความความต้องการของปัญหา ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างและการกำหนดเกณฑ์ตัดสิน

2.1.2.1 ปัญหาเวลาน้อยที่สุด (Minimum – time problem)

กำหนดเวลา t_0 กับสเตทเริ่มต้น $x(t_0) = x^0$ ต้องการให้ในที่สุดสเตทอยู่ในอาณาเขต S ที่กำหนด เรียก S ว่าเป็นเซตเป้าหมาย (target set) ปัญหาคือ จะหาการควบคุม u(t) ที่พาระบบจาก x^0 ไป S ในเวลาน้อยที่สุด เกณฑ์การตัดสินการทำงานที่ต้องใช้เพื่อนำไปสู่ค่าน้อยที่สุด คือ

$$J = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \tag{1.4}$$

เมื่อ t_1 เป็นเวลาแรกที่ x(t) ถึงหรือตัด S

2.2.1.2 ปัญหาพลังงานน้อยที่สุด (Minimum – energy problem)

จุดประสงค์คือ ต้องการพาระบบจากสเตทเริ่มต้น x^0 ไปยังเซตเป้าหมาย S โดยใช้พลังงานน้อยที่สุด เนื่องจาก $u^2(t)$ สัมพันธ์กับอัตราการสิ้นเปลืองพลังงาน เราจึงหาค่าน้อยที่สุดของเกณฑ์ตัดสิน

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)dt \tag{1.5}$$

กรณีหลายอินพุท J อยู่ในรูป

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^{T_2}(t)u(t)dt \tag{1.6}$$

หรือให้อยู่ในรูปทั่วไปมากขึ้น เราเพิ่มแมทริกซ์น้ำหนัก (weighting matrix) R ซึ่งเป็น real symmetric positive defininte เพื่อให้ความสำคัญของอินพุทแต่ละตัวต่าง ๆกัน จะได้เกณฑ์ตัดสิน

2.2.1.3 ปัญหารักษาค่าสเตทให้คงที่ (State regulator problem)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^{T_2}(t)Ru(t)dt \tag{1.7}$$

จุดประสงค์คือต้องการนำระบบสเตทเริ่มต้น x^0 มายังสเตทที่ต้องการ x^1 (ซึ่งส่วนใหญ่เป็น)จุดสมดุลย์ของระบบ เช่นระบบได้รับการรบกวนสเตทเคลื่อนที่ไป ต้องการนำกลับมายังจุดสมดุลตามเดิม) โดยให้มีค่าคลาดเคลื่อนอินทิกรัลกำลังสอง (Integral – square error) น้อยที่สุด หากเราแปลงโคออร์ดิเนทของระบบให้ x^1 เป็นจุดออริจิน ค่าสเตทใหม่ $x(t)$ ซึ่งเป็นผลต่างระหว่างสเตทเดิมกับจุดสมดุล จะแทนค่าคลาดเคลื่อนโดยตรง ดังนั้นเกณฑ์การตัดสินคลาดเคลื่อนอินทิกรัลกำลังสอง คือ

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} (x_i(t))^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} x^T(t)x(t)dt \tag{1.8}$$

หรือหากจะเพิ่มน้ำหนักค่าคลาดเคลื่อนของสเตทให้ต่าง ๆกัน เราเพิ่มแมทริกซ์ค่าคงที่ Q ซึ่งเป็น real symmetric positive semidefinite ลงใน J เป็น

$$J = \int_{t_0}^{t_1} x^T(t)Qx(t)dt \quad (1.9)$$

ตรงเวลาสุดท้าย t_1 ค่าสเตทในที่สุด $x(t_1)$ อาจยังคลาดเคลื่อนจากสเตทสมดุล $x^1 = 0$ อยู่ ซึ่งเราต้องการให้ค่าคลาดเคลื่อนนี้น้อยที่สุด จึงต้องเพิ่ม $x^T(t_1)Hx(t_1)$ เมื่อ H เป็นแมทริกซ์ค่าคงที่ real symmetric positive semidefinite ลงใน J อีก ขณะเดียวกันต้องการพลังงานน้อยที่สุดด้วย จึงเพิ่มเทอมของ minimum – energy problem ด้วย ในที่สุดเกณฑ์การตัดสินสำหรับค่าปัญหารักษาค่าสเตทให้คงที่คือ

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_1)Hx(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (1.10)$$

หากไม่มีเงื่อนไขบังคับต่อเวลาสุดท้าย คือ $t_1 \rightarrow \infty$ สเตทสุดท้ายจะเข้าสู่จุดสมดุล $x^1 = 0$ (ระบบจะต้องเสถียร) เทอมที่เกี่ยวกับสเตทสุดท้ายใน J ไม่จำเป็นต้องมี ดังนั้นสำหรับปัญหาการรักษาค่าสเตทให้คงที่เป็นเวลาอนันต์ จึงใช้เกณฑ์ตัดสิน

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (1.11)$$

2.2.1.4 ปัญหารักษาค่าเอาท์พุทให้คงที่ (Output regulator problem)

กรณีนี้เราต้องการให้ค่าคลาดเคลื่อนของเอาท์พุทน้อยที่สุด ด้วยเหตุผลเช่นเดียวกับกรณีสเตท เราใช้เกณฑ์ตัดสิน

$$J = \frac{1}{2}y^T(t_1)Hy(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (1.12)$$

2.1.3 ลักษณะของข้อมูลหรือสัญญาณที่แพลนท์ให้กับตัวควบคุม

หากค่าควบคุมออพติมัลหาได้เป็นฟังก์ชั่นของเวลาสำหรับค่าสเตทเริ่มต้นที่กำหนดให้ คือ

$$u^*(t) = u(x(t_0), t) \qquad (1.13)$$

เรียกค่าควบคุมออพติมัลนี้ว่าอยู่ในรูปวงเปิด (open-loop) ระบบที่มีตัวควบคุมแบบวงเปิด เมื่อเริ่มต้นแล้ว ไม่ต้องการข้อมูลจากแพลนท์อีก หากไม่มีการรบกวนหรือค่าคลาดเคลื่อนใดๆการควบคุมแบบวงเปิดใช้ได้ผล ฟังก์ชั่น u ใน (2.14) เรียก ฟังก์ชั่นควบคุมออพติมัล (optimal control function)

หากค่าควบคุมออพติมัลอยู่ในรูป

$$u^*(t) = u(x(t), t) \qquad (1.14)$$

เรียกค่าควบคุมออพติมัลนี้ว่าอยู่ในรูปวงปิด (close-loop) และฟังก์ชั่น u เรียกว่ากฎควบคุมออพติมัล (optimal control law) ในการควบคุมวงปิด ตัวควบคุมรับข้อมูลจากแพลนท์โดยการป้อนสเตท x(t) กลับ การป้อนกลับช่วยลดจากการรบกวนและชดเชยการแปรเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ของแพลนท์

เราสรุปปัญหาการควบคุมออพติมัล ได้โดยให้ค่าควบคุมยอมรับได้ u* ซึ่งบังคับให้ระบบ

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

เคลื่อนตามแนววิถีที่ยอมรับได้ x* และทำให้เกณฑ์ตัดสินต่อไปนี้มีค่าน้อยที่สุด

$$J = hx(x(t_1, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [g(x(t), u(t), t]dt$$

2.2 การแก้ปัญหาการควบคุมออพติมัล

2.2.1 ออพติมัลเร็คกูเลเตอร์

เราสามารถพิจารณาขั้นตอนได้ดังนี้

สร้างสมการ Hamiltonian

$$H(x(t),u(t),\lambda(t)) = \frac{1}{2}x'(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u'(t)R(t)u(t) + \lambda'(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)] \quad (2.1)$$

$\lambda(t)$; Costate Vector

หาค่า Optimal Control u*(t) โดยใช้การหาค่าต่ำสุด

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \longrightarrow R(t)u^*(t) + B'(t)\lambda^*(t) = 0 \quad (2.2)$$

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)\lambda^*(t) \quad (2.3)$$

หาสเตทและโคสเตท ได้จาก

$$\dot{x}^*(t) = +\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* \longrightarrow \dot{x}(t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \quad (2.4)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* \longrightarrow \dot{\lambda}^*(t) = -Q(t)x^*(t) - A'(t)\lambda^*(t) \quad (2.5)$$

นำมาเขียนในรูปแบบของสมการสภาวะ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -E(t) \\ -Q(t) & -A'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

โดยที่ $E(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t)$

จากเงื่อนไขค่าเวลาสุดท้าย

$$\lambda^*(t_f) = F(t_f)x^*(t_f) \tag{2.7}$$

สมมติผลเฉลย เพื่อให้โคสเตท เชื่อมต่อกับสเตท

$$\lambda^*(t) = P(t)x^*(t) \tag{2.8}$$

ซึ่งเราต้องการหาค่า P(t) และทำการสับเปลี่ยนตัวแปรในสมการที่ (2.3)

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t) \tag{2.9}$$

ซึ่ง u*(t) นี้คือสมการของตัวควบคุมป้อนกลับที่เหมาะสมของระบบ เรานำ u*(t) จาก (2.9) และ λ*(t) จาก (2.8) ที่ได้แทนค่าตัวแปรให้กับระบบสมการที่ (2.4) และ (2.5) เราจะได้

$$\dot{x}(t) = A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)P(t)x^*(t) \tag{2.10}$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -Q(t)x^*(t) - A'(t)P(t)x^*(t) \tag{2.11}$$

ขั้นตอนต่อไปเราจะทำการหาค่า P(t) โดยนำโคสเตทที่ได้ในสมการ (2.8) มาทำการ Differentiating

$$\dot{\lambda}^*(t) = \dot{P}(t)x^*(t) + P(t)\dot{x}(t) \tag{2.12}$$

ทำการแทนค่า ความสัมพันธ์ระหว่างสเตทกับโคสเตท จากสมการ (2.10) และ (2.11) ลงใน (2.12) จะได้ สมการ (2.13)

$$-Q(t)x^*(t) - A'(t)P(t)x^*(t) = \dot{P}(t)x^*(t) +$$

$$P(t)[A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t)] \longrightarrow$$

$$[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A'(t)P(t) + Q(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t)]x^*(t) = 0 \qquad (2.13)$$

ขั้นตอนต่อไป เราจะหาสมการริคาติ โดยใช้เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $x^*(t_0)$ ค่า P(t) จะไม่ขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้น เราจะได้ matrix differential equation เป็น

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A'(t)P(t) + Q(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) = 0 \qquad (2.14)$$

รูปแบบนี้คือเมทริกซ์ ในรูปแบบของริคาติ และเราจะเรียกรูปแบบนี้ว่า matrix differential Riccati equation (DRE)

เราสามารถเขียนในอีกรูปแบบหนึ่งได้

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A'(t)P(t) - Q(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) \qquad (2.15)$$

ขั้นตอนสุดท้าย เราจะนำค่า P(t) ที่ได้ไปแทนค่าในสมการ (2.9) เราจะได้ค่า u*(t) ที่เหมาะสมที่สุด ป้อนกลับให้กลับระบบ เพื่อนำพาสเตทเข้าสู่จุดสมดุลที่เราต้องการ ได้อย่างเหมาะสมที่สุด

2.2.2 เสถียรภาพของระบบ

เสถียรภาพของระบบ (Stability theory) จะพิจารณาจากสมการสภาวะของระบบ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (2.16)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (2.17)$$

เมื่อเราพิจารณาเฉพาะสภาวะของระบบ โดยคำนึงถึงอินพุทหรือ u(t) = 0 จะได้สมการใหม่เป็น

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \text{ และ } x(t_0) = x_0 \text{ เมื่อ } t \geq t_0 \tag{2.18}$$

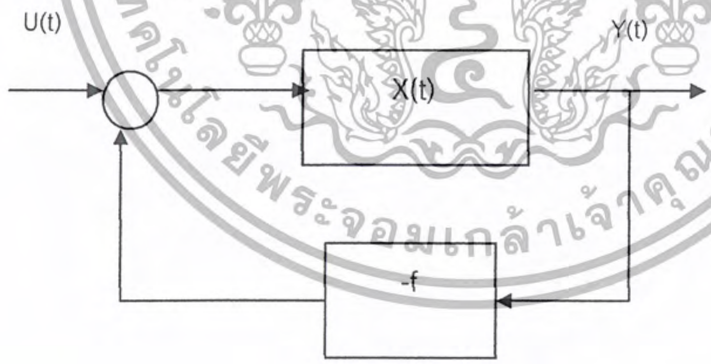
เสถียรภาพของระบบนี้มีแนวโน้มเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อเวลามากขึ้น ($t \rightarrow \infty$) สำหรับทุกค่า x_0 ใด ๆ จากสมการที่ 2.18 เราจะสามารถหาผลเฉลยของสมการในรูปของลาปาซได้เป็น

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) \tag{2.19}$$

ระบบสมการนี้จะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อส่วนจริงของค่า A น้อยกว่าศูนย์ $Re\{\lambda(A)\}<0$ เมื่อ $\lambda(A)$ เป็นค่าไอเกนของ A (Eigenvalue)

2.2.3 เร็คกูเลเตอร์

เร็คกูเลเตอร์ (Regulator) เป็นการควบคุมโดยการป้อนกลับสภาวะ (State Feedback Control) เพื่อทำให้ระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ (Unstable) หรือเกิดเสถียรภาพช้า ทำให้เกิดเสถียรภาพได้เร็วขึ้น โดยสามารถกำหนดเลือกค่าโพล (Pole Assignment) ให้ระบบป้อนกลับทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้



รูปที่ 2.1 การป้อนกลับสภาวะ

การหาค่าตัวป้อนกลับสภาวะ (f) โดยขั้นตอนดังนี้

1. จากสมการสภาวะที่ 2.16 และ 2.17 นั้น ทำการหาตัวแปลง (Transform ; M) จาก

$$M = \zeta \overline{w} \tag{2.20}$$

$$\overline{w} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ . & . & . & . \\ & . & . & 0 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

และ $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \ldots + a_1$ (2.22)

2. เลือกค่าโพลตามลำดับ (Order) หรือมิติของสภาวะ (Dimension) ของระบบจะได้

$$\lambda_{1,2,\ldots,n} = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \tag{2.23}$$

และ

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)\ldots(\lambda - \mu_n) = \lambda^n + d_n\lambda^{n-1} + \ldots + d_1 \tag{2.24}$$

3.ดังนั้นตัวป้อนกลับสภาวะ

$$f = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & \ldots & d_n - a_n \end{bmatrix} M^{-1} \tag{2.25}$$

โดยการป้อนกลับสภาวะ

$$u = -fx \tag{2.26}$$

จะได้สมการอนุพันธ์การป้อนกลับสภาวะเป็น

$$\dot{x}(t) = (A - Bf)x(t) \tag{2.27}$$

2.2.4 การควบคุมและตรวจตราได้ของระบบ

2.2.4.1 ระบบที่สามารถควบคุมได้

ระบบที่สามารถควบคุมระบบได้ (Controllability) จะมีเงื่อนไขทางโมเดลคณิตศาสตร์กับสภาวะของระบบ โดยการป้อนอินพุทให้สภาวะโดยไม่สนใจเอ่พุทของระบบ และพิจารณาจากสมการที่ 2.27

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0 \tag{2.27}$$

โดยสภาวะของระบบที่สามารถควบคุมได้ตามระบบเวลาที่ต่อเนื่อง และมีเง่อนไขของสภาวะการควบคุมอย่างสมบูรณ์แบบ (Deriving the Condition for Complete State Controllability) เมื่อทำการอินทิเกรต(Integrate) สมการที่ 1.9 จะได้

$$\dot{x}(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-t_1)}Bu(t)dt$$

ที่เวลาเริ่มต้น $t_1, x(t_1) = 0$

$$x(1) = 0 = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-t_1)}Bu(t)dt$$

$$x(0) = -\int_0^t e^{A(t-t_1)}Bu(t)dt \tag{2.28}$$

การกระจายอนุกรมของ e^{-At} ในรูปแบบผลรวมทางคณิตศาสตร์ เขียนได้เป็น

$$e^{-At} = a_0(t)I + a_1(t) + a_2(t)A^2 + ... + a_{n-1}(t)A^{n-1} \tag{2.29}$$

หรือ

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k(t)A^k \tag{2.30}$$

แทนสมการที่ 2.30 ลงในสมการที่ 2.28 จะได้

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} a_k(t)u(t)dt \tag{2.31}$$

กำหนดให้

$$b_k = \int_0^{t_1} a_k(t)u(t)dt$$

จะได้สมการที่ 2.31 ใหม่เป็น

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B b_k$$

$$= -\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

จากสมการที่ 2.32 นี้ จะได้เมทริกซ์ระบบที่ควบคุมได้(Controllability Matrix ; ζ)

$$\xi = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

โดยที่

ζ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น nxnxr มิติ

และสภาวะของระบบที่ควบคุมได้เมื่อ rank ζ = rank ζ^T=n แสดงว่าระบบดังกล่าวเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (Linearly Independent)

2.2.4.2 ระบบที่สามารถสังเกตได้

ระบบควบคุมที่สามารถสังเกตสภาวะได้ (Observability) โดยทุก ๆสภาวะของระบบ x(t) และเอาพุทของระบบ y(t) ในช่วงเวลา t_0 ถึง t_1 เมื่อเราสนใจเวลาแรกเริ่ม $t_0 = 0$ ทั้งนี้ระบบควบคุมที่ตวจวัดสภาวะได้เราอาจตรวจวัดได้ อาจตรวจวัดได้เพียงบางสภาวะหรือทุกสภาวะก็ตาม จึงสนใจข้อมูลอินพุท-เอาพุทจากสมการสภาวะในสมการที่ 1.1 และเมื่อทำการอินทิเกรตสมการทั้งสองสมการดังกล่าว จะได้

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int e^{A(t-t_1)}Bu(t)dt$$

และ

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-t_1)}Bu(t)dt + Du(t)$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

เมื่อทราบค่า A,B,C และ u(t) ดังนั้นจึงสังเกตสภาวะจาก y(t) จาก
เมื่อพิจารณาจากระบบเชิงเส้นจะได้
จะได้

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)A^k$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)CA^k x(0)$$

$$y(t) = (\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)CA^k)x(0)$$

หรือ

$$y(t) = (a_0(t)C + a_1(t)C + a_2(t)A^2 + ... + a_{n-1}(t)CA^{n-1})x(0) \qquad (2.33)$$

ดังนั้นระบบที่สังเกตสภาวะของระบบได้ดังสมการที่ 2.33 ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน สามารถเขียนเป็นเมทริกซ์ที่สังเกตสภาวะได้ (Observability Matrix ; O) เป็น

$$y(t) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(t) & a_1(t) & a_2(t)A^2 & \dots & a_{n-1}(t)A^{n-1} \end{bmatrix}$$

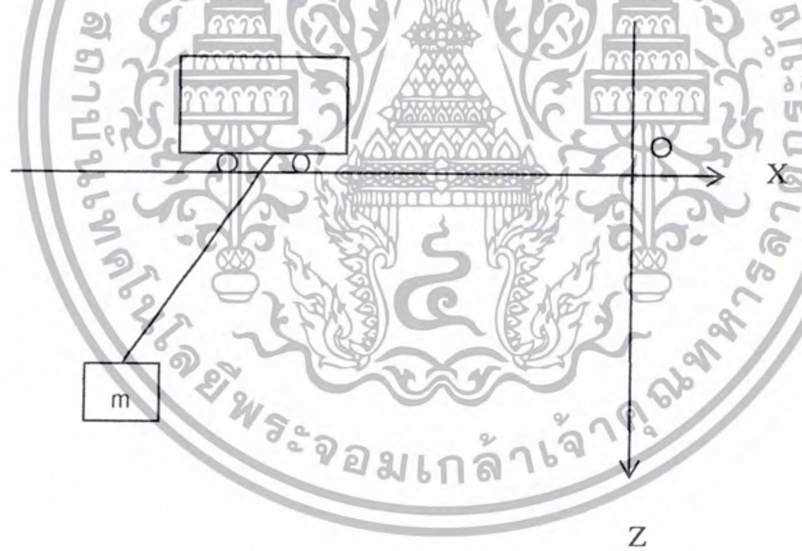
$$O \doteq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นระบบสามารถสังเกตสภาวะได้ เมื่อ rank O = rank O^T = n

บทที่ 3
การทดลองและผลการทดลอง

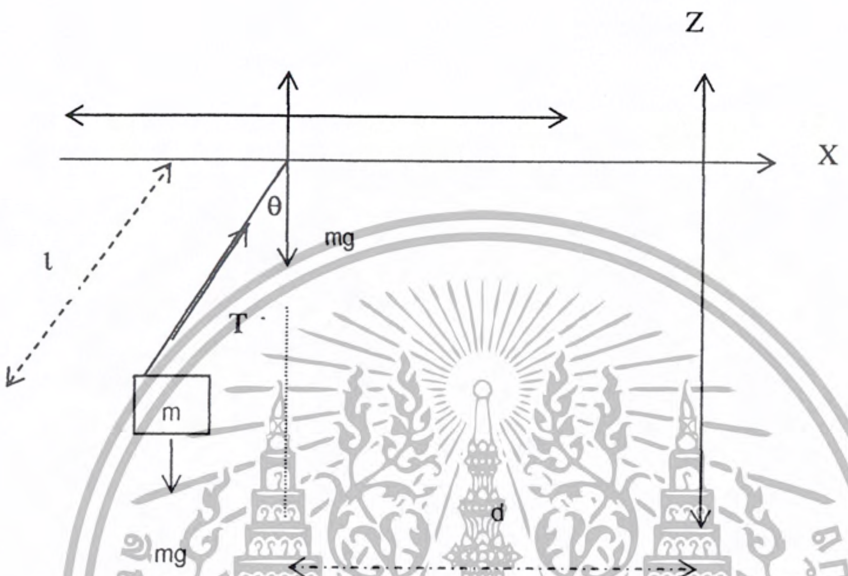
3.1 ศึกษาสภาวะของระบบจริง

ปัญหาการเคลื่อนที่ของปั้นจั่นยกของ จากสภาวะเริ่มต้น x(0) ถึงจุดเริ่มต้น (Origin) โดยปริมาณการแกว่งที่ต่ำ เมื่อภาระ (x- d) ในช่วงเวลา T ทำการหาตัวควบคุมป้อนกลับที่เหมาะสมที่สุด u*(t) ด้วยดัชนีการทำงานต่ำสุด (minimum cost J)



รูปที่ 3.1 แบบจำลองระบบการเคลื่อนที่ของเครน

เขียน FBD (Free body diagram)



จาก $x = d - \ell\sin\theta$

$$x = d - \ell\sin\theta$$

$$z = \ell\cos\theta$$

The Horizontal motion

$$m\ddot{X} = T\sin\theta \tag{3.1}$$

The Vertical motion

$$m\ddot{Z} = mg - T\cos\theta \tag{3.2}$$

กำหนด θ : small , Omit the motion in z-direction

เมื่อพิจารณา θ ใกล้ ๆ 0 ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้

$$\cos\theta \approx 1$$

$$\sin\theta \approx \theta$$

ดังนั้นสมการที่ (3.1) เราจะได้

$$0 = mg - T$$

$$T = mg \tag{3.3}$$

$$\text{จาก} \quad x = d - \ell\sin\theta$$

$$\ell \sin\theta = d - x$$

$$\sin\theta = \frac{d-x}{\ell} \tag{3.4}$$

นำสมการที่ (3.3) และ (3.4) แทนค่าใน (3.2)

$$m\ddot{x} = mg\frac{(d-x)}{\ell}$$

$$\ddot{x} = -\frac{mg}{m\ell}x + \frac{mgd}{m\ell}$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x + \frac{g}{\ell}d \tag{3.5}$$

เลือกตัวแปรสภาวะ

$$x_1 = x \qquad \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = \ddot{x}$$

$$x_3 = d \qquad \dot{x}_3 = u$$

จากสมการที่ (3.5) จะได้

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}x_1 + \frac{g}{\ell}x_3$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \qquad \dot{x}_2 = -w_0^2 x_1 + w_0^2 x_3$$

เขียนสมการสภาวะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{3.6}$$

$$y = x - d \tag{3.7}$$

จากเงื่อนไขการเลือกตัวแปรสภาวะจะได้

$$y = x_1 - x_3$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

3.2 ตัวควบคุมป้อนกลับของระบบออพติมัล

จากสมการสภาวะของแบบจำลองระบบเครน

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -w_0^2 & 0 & w_0^2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

สมการตัวควบคุมป้อนกลับที่เหมาะสมที่สุด

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B'(t)P(t)x^*(t) \tag{3.9}$$

กำหนดให้
$$P(t)=\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t)\\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t)\end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$=-R^{-1}(t)\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t)\\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\\ x_3^*\end{bmatrix}$$

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)[p_{31}(t)x_1^*(t)+p_{32}(t)x_2^*(t)+p_{33}(t)x_3^*(t) \tag{3.12}$$

เราสามารถหาค่า P(t) จากสมการริคาติ

$$\dot{P}(t)=-P(t)A(t)-A'(t)P(t)-C'(t)Q(t)C(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) \tag{3.13}$$

แทนค่าเมทริกซ์ลงในสมการ

$$\dot{P}(t) = -\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & -w_0^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_0^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q & 0 & -Q \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q & 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times R^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{23}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{12}(t)w_0^2 & -p_{11}(t) & -p_{12}(t)w_0^2 \\ p_{22}(t)w_0^2 & -p_{21}(t) & -p_{22}(t)w_0^2 \\ p_{32}(t)w_0^2 & -p_{31}(t) & -p_{32}(t)w_0^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -p_{21}(t)w_0^2 & -p_{22}(t)w_0^2 & -p_{23}(t)w_0^2 \\ p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t)w_0^2 & p_{22}(t)w_0^2 & p_{23}(t)w_0^2 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} Q & 0 & -Q \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q & 0 & Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{13}p_{31}R^{-1} & p_{13}p_{32}R^{-1} & p_{13}p_{33}R^{-1} \\ p_{23}p_{31}R^{-1} & p_{23}p_{32}R^{-1} & p_{23}p_{33}R^{-1} \\ p_{33}p_{31}R^{-1} & p_{33}p_{32}R^{-1} & p_{33}p_{33}R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\dot{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{12}w_0^2+p_{21}w_0^2+p_{13}p_{31}R^{-1}-Q & -p_{11}+p_{22}w_0^2+p_{13}p_{32}R^{-1} & -p_{12}w_0^2+p_{23}w_0^2+p_{13}p_{33}R^{-1}+Q \\ p_{22}w_0^2-p_{11}+p_{23}p_{31}R^{-1} & -p_{21}-p_{12}+p_{23}p_{32}R^{-1} & -p_{22}w_0^2-p_{13}w_0^2+p_{23}p_{33}R^{-1} \\ p_{32}w_0^2-p_{21}w_0^2+p_{13}p_{31}R^{-1}+Q & -p_{31}-p_{22}w_0^2+p_{33}p_{32}R^{-1} & -p_{32}w_0^2-p_{23}w_0^2+p_{33}p_{33}R^{-1}+Q \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

จากสมการ 3.14 เราจะนำมาพิจารณาหาค่า p แต่ละตัวโดยใช้คุณสมบัติ Symmetric ของเมทริกซ์

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

และ $p_{12} = p_{21}$

$p_{13} = p_{31}$

$p_{23} = p_{32}$

จากเงื่อนไขที่แสดงนี้ เราจึงพิจารณาเพียง 6 สมการ

และพิจารณาเงื่อนไข steady state ของระบบ จะได้ว่า $\dot{p}(t) = 0$

$$\dot{p}_{11} = p_{12} w_0^2 + p_{21} w_0^2 + p_{13} p_{31} R^{-1} - Q = 0 \quad (3.15)$$

$$\dot{p}_{12} = -p_{11} + p_{22} w_0^2 + p_{13} p_{32} R^{-1} = 0 \quad (3.16)$$

$$\dot{p}_{13} = -p_{12} w_0^2 + p_{23} w_0^2 + p_{13} p_{33} R^{-1} + Q = 0 \quad (3.17)$$

$$\dot{p}_{22} = -p_{21} - p_{12} + p_{23} p_{32} R^{-1} = 0 \quad (3.18)$$

$$\dot{p}_{23} = -p_{22} w_0^2 - p_{13} + p_{23} p_{33} R^{-1} = 0 \quad (3.19)$$

$$\dot{p}_{33} = -p_{32} w_0^2 - p_{23} w_0^2 + p_{33} p_{33} R^{-1} - Q = 0 \quad (3.20)$$

จากเงื่อนไขข้างต้น แทนค่าตัวที่เท่ากันเพื่อลดเงื่อนไขให้เหลือน้อยลง

จากสมการที่ 3.15

$$p_{12} w_0^2 + p_{21} w_0^2 + p_{13} p_{31} R^{-1} - Q = 0$$

$$\therefore 2p_{12} w_0^2 + p_{13}^2 R^{-1} - Q = 0$$

$$\therefore p_{21} = p_{12} = -\frac{-p_{13}^2 R^{-1} + Q}{2 w_0^2}$$

$$\therefore p_{31} = p_{13} = \sqrt{\frac{-2 p_{12} w_0^2 + Q}{2 R^{-1}}}$$

จากสมการที่ 3.16

$$-p_{21} - p_{12} + p_{23} p_{32} R^{-1} = 0$$

$$\therefore -2p_{12} + p_{23}^2 R^{-1} = 0$$

$$\therefore p_{21} = p_{12} = -\frac{R^{-1} p_{23}^2}{2}$$

$$\therefore p_{32} = p_{23} = \sqrt{\frac{2 p_{12}}{R^{-1}}}$$

จากสมการที่ 3.17

$$-p_{32} w_0^2 - p_{23} w_0^2 + p_{33} p_{33} R^{-1} - Q = 0$$

$$\therefore -2p_{23} w_0^2 + p_{33}^2 R^{-1} - Q = 0$$

$$\therefore p_{23} = -\frac{-p_{33}^2 R^{-1} + Q}{-2 w_0^2}$$

$$\therefore p_{33} = \sqrt{\frac{2 p_{23} w_0^2 + Q}{R^{-1}}}, \therefore p_{13} = \sqrt{\frac{-2(\frac{R^{-1}}{2} p_{23}^2) w_0^2 + Q}{R^{-1}}}$$

$$\therefore p_{23} = \sqrt{\frac{-2(\frac{-p_{13}^2 R^{-1} + Q}{2 w_0^2})}{R^{-1}}}, \therefore p_{33} = \sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{2 p_{12}}{R^{-1}}} * w_0^2 + Q}{R^{-1}}}$$

จากสมการที่ 3.18

$$-p_{21}w_0^2 - p_{12} + p_{23}p_{32}R^{-1} = 0$$

$$\therefore -2p_{21} + p_{23}^2 R^{-1} = 0$$

$$-2\left(-\frac{-p_{13}^2 R^{-1} + Q}{2w_0^2}\right) + 2\left(\frac{\left(\frac{-p_{13}^2 R^{-1} + Q}{2w_0^2}\right) * R^{-1}}{R^{-1}}\right) = 0$$

$$-2\left(-\frac{-p_{13}^2 R^{-1} + Q}{2w_0^2}\right) + 2\left(\frac{(-p_{13}^2 R^{-1} + Q) * (R^{-1})^2}{2w_0^2}\right) = 0$$

$$-2(-p_{13}^2 R^{-1} + Q) + 2(-p_{13}^2 R^{-1} + Q) * (R^{-1})^2 = 0$$

$$2p_{13}^2 R^{-1} - 2Q - 2p_{13}^2 (R^{-1})^3 + 2Q(R^{-1})^2 = 0$$

$$p_{13}^2 (2R^{-1} - 2(R^{-1})^3) = 2Q - 2Q(R^{-1})^2$$

$$p_{13}^2 = \frac{2Q(1-(R^{-1})^2)}{2R^{-1}(1-(R^{-1})^2)}$$

$$p_{13}^2 = \frac{Q}{R^{-1}}$$

$$\therefore p_{31} = p_{13} = \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}$$

จากสมการที่ 3.19

$$-2p_{12} + 2\left(-\frac{-p_{13}^2 R^{-1} + Q}{2w_0^2}\right) * (R^{-1})^2 = 0$$

แทนค่า p_{13} จะได้

$$-2p_{12} + 2 * (0) = 0$$

$$\therefore p_{12} = p_{21} = 0$$

จากสมการ $p_{23} = \sqrt{2\left(\frac{\left(\frac{-p_{13}^2 R^{-1} + Q}{2w_0^2}\right)}{R^{-1}}\right.}$

แทนค่า p_{13} จะได้

$$\therefore p_{23} = p_{32} = 0$$

จากสมการที่ 3.21

$$-p_{32}w_0^2 - p_{23}w_0^2 + p_{33}p_{33}R^{-1} - Q = 0$$

$$-2p_{23}w_0^2 - p_{33}^2R^{-1} - Q = 0$$

แทนค่า p_{23} จะได้

$$\therefore p_{33} = -\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}$$

จากสมการที่ 3.20

$$-p_{22}w_0^2 - p_{13} + p_{23}p_{33}R^{-1} = 0$$

$$\therefore -p_{22}w_0^2 - p_{13} + 0 = 0$$

$$-p_{22}w_0^2 = \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}$$

$$\therefore p_{22} = -\frac{1}{w_0^2}\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}$$

จากสมการที่ 3.21

$$-p_{11} + p_{22}w_0^2 + p_{13}p_{32}R^{-1} = 0$$

$$\therefore -p_{11} + -\frac{1}{w_0^2}\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} * w_0^2 + 0 = 0$$

$$\therefore p_{11} = -\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}$$

ดังนั้นเมื่อเราทราบค่าทั้งหมดแล้ว นำค่า P แต่ละตำแหน่งไปแทนตามเงื่อนไขสมการข้างต้น ก็ทำให้สมการนั้นเป็นจริงทุกสมการ ดังนั้น ค่าที่ได้จึงถูกต้อง และนำมาแทนในเมทริกซ์ P ได้

$$\therefore P = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} & 0 & \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} \\ 0 & -\frac{1}{w_0^2}\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} & 0 \\ \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} & 0 & -\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} \end{bmatrix} \qquad (3.22)$$

แทนค่า P แต่ละตำแหน่งที่ได้ไปแทนค่าในสมการ u*(t) เราจะได้ค่าป้อนกลับให้กลับระบบที่เหมาะสมที่สุด

$$u^*(t) = -R^{-1}[p_{31}(t)x_1^*(t) + p_{32}(t)x_2^*(t) + p_{33}(t)x_3^*(t)]$$

$$u^*(t) = -R^{-1}[\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}x_1^*(t) + 0 + (-\sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}})x_3^*(t)]$$

$$u^*(t) = -R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}\left[x_1^*(t) - x_3^*(t)\right] \quad (3.23)$$

โดยเลือกเกณฑ์ตัดสินที่สอดคล้องกับปัญหาของระบบ ดังนี้

$$J(x(t_0), u(t), t_0) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[y^T(t)Q(t)y(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

3.3 การควบคุมและสังเกตได้ของระบบออพติมัล

จากสมการสเตท

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

เราจะพิจารณาถึง Controllability และ Observability

3.2.1 ความสามารถในการควบคุมได้

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & -w_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & w_0^2 \\ 0 & w_0^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det C = -w_0^4$$

$\therefore$ ระบบมีความสามารถควบคุมได้

3.2.2 ความสามารถในการสังเกตได้

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \end{bmatrix}$$

$$\det O = 0$$

ระบบนี้ไม่สามารถสังเกตได้

3.4 เสถียรภาพของระบบออพติมัล

จากสมการสภาวะของระบบจำลองการเคลื่อนที่ของเครน

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u^*(t) = -R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} \left[x_1^*(t) - x_3^*(t) \right]$$

$$u^* = K X^*$$

$$u^* = \begin{bmatrix} -R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} & 0 & R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

จากสมการสภาวะข้างต้น แทนค่าลงใน A-BK

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} & 0 & R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} & 0 & R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} & 0 & -R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} \end{bmatrix}$$

หาค่า Eigen value ของระบบนี้

โดยเงื่อนไขที่ทำให้ระบบมีสเถียรภาพ คือ $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A - BK) < 0$

โดย $\det[A - BK - \lambda I] = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -w_0^2 & -\lambda & w_0^2 \\ R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} & 0 & -R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2(-R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} - \lambda) + R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} w_0^2 - [-w_0^2(-R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} - \lambda)] = 0$$

$$-\lambda^3 - R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}\lambda^2 + R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} w_0^2 - R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}} w_0^2 - w_0^2\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 - R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}\lambda^2 - w_0^2\lambda = 0$$

เงื่อนไข $\mathrm{Re}\lambda_i(A - BK) < 0$

ดังนั้นเงือนไขที่ทำให้ระบบมีสเถียรภาพคือ

$(-R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}) < 0$ และ $(-w_0^2) < 0$

หรือ

$R^{-1} * \sqrt{\frac{Q}{R^{-1}}}) > 0$ และ $w_0^2 > 0$

3.5 สมการเมทริกซ์ของออยเลอร์

จากสมการสภาวะของแบบจำลองระบบเครน

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

สมการเมทริกซ์ของออยเลอร์

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -C^T(t)Q(t)C(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

ในรูปของ Transition Matrix

$$\theta(t,\tau) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(t,\tau) & \theta_{12}(t,\tau) \\ \theta_{21}(t,\tau) & \theta_{22}(t,\tau) \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

ค่าคำตอบอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \theta(t,t_1) \begin{bmatrix} x(t_1) \\ \lambda(t_1) \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\lambda(t) = [\theta_{21}(t,t_1) + \theta_{22}(t,t_1)\Gamma][\theta_{11}(t,t_1) + \theta_{12}(t,t_1)\Gamma]^{-1} x(t) \tag{3.27}$$

$$\lambda(t) = P(t)x(t)$$

$$P(t) = [\theta_{21}(t,t_1) + \theta_{22}(t,t_1)\Gamma][\theta_{11}(t,t_1) + \theta_{12}(t,t_1)\Gamma]^{-1} \tag{3.28}$$

เมื่อแทนค่า A(t),B(t),C(t) ในสมการ 3.28

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เราจะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \\ \hline -Q & 0 & Q & 0 & w_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ Q & 0 & -Q & 0 & -w_0^2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\theta_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \theta_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\theta_{21} = \begin{bmatrix} -Q & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 \\ Q & 0 & -Q \end{bmatrix} \quad , \quad \theta_{22} = \begin{bmatrix} 0 & w_0^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -w_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

แทนค่าที่ได้แทนในสมการ 3.29

$$P(t)=\left[\begin{bmatrix}-Q & 0 & Q\\ 0 & 0 & 0\\ Q & 0 & -Q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & w_0^2 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -w_0^2 & 0\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -w_0^2 & 0 & w_0^2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -R^{-1}\end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-Q & w_0^2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ Q & -w_0^2 & -Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1/w_0^2 & -1/R^{-1}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/R^{-1}\end{bmatrix}$$

$$P(t)=\begin{bmatrix}w_0^2 & Q/w_0^2 & Q/R^{-1}\\ -1 & 0 & 0\\ -w_0^2 & 1 & -2Q/R^{-1}\end{bmatrix}$$

เราสามารถหา Eigen values ของ Euler's matrix หรือ Hamitonian matrix Δ **เพื่อให้รู้ตำแหน่งของ** Poles ในระบบนี้ได้

$$\Delta=\begin{bmatrix}A(t) & -R^{-1}(t)B(t)B^{-1}(t)\\ -C^TQ(t)C(t) & -A^T(t)\end{bmatrix},\qquad Q,R\ :\ \text{positive}$$

กำหนดให้

$$x\equiv\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\quad,\quad y\equiv\begin{bmatrix}I & -x_{11}^{-1}x_{12}\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

ฉะนั้น

$$XY=\begin{bmatrix}x_{11} & 0\\ x_{21} & x_{22}-x_{21}x_{11}^{-1}x_{12}\end{bmatrix}$$

$$\det X\det Y=\det X_{11}\det(X_{22}-X_{21}X_{11}^{-1}X_{12})$$

เนื่องจาก det Y = I , X_{11} = sI-A
นั้นคือ

$$\det(sI - \Delta) = \det(sI - A)\det\{(sI + A^T) - \frac{Q}{R}C^T C(sI - A)^{-1} BB^T\} \tag{3.30}$$

จากแบบจำลองของระบบเครน ได้สมการสภาวะดังนี้

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w_0^2 & 0 & w_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ต่อไปทำการหาค่าต่างๆ เพื่อนำไปแทนในสมการที่ 3.30

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ w_0^2 & s & -w_0^2 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$\det(sI - A) = s^3 + w_0^2 s$$

$$sI - A^T = \begin{bmatrix} s & -w_0^2 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & w_0^2 & s \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + w_0^2} & \frac{1}{s^2 + w_0^2} & \frac{w_0^2}{s^3 + w_0^2 s} \\ \frac{-w_0^2}{s^3 + w_0^2} & \frac{s}{s^3 + w_0^2} & \frac{w_0^2}{s^3 + w_0^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

นำสมการที่ 3.31, 3.32และ 3.33 แทนในสมการ 3.30 จะได้

$$(sI - A^T) - \frac{Q}{R} C^T C (sI - A)^{-1} BB^T = \begin{bmatrix} s & -w_0^2 & \frac{Qs^2}{R(s^3 + w_0^2)s} \\ 1 & s & 0 \\ 0 & w_0^2 & \frac{Rs^4 + w_0^2 s^2 - Qs^2}{R(s^3 + w_0^2)s} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

หา determinant ของ สมการที่ 3.34

$$\det\{(sI + A^T) - \frac{Q}{R} C^T C (sI - A)^{-1} BB^T\} = \frac{Rs^6 + (w_0^2 + Rw_0^2 - Q)s^4 + w_0^4 s^2}{R(s^3 + w_0^2)s}$$

$$\det\{(sI + A^T) - \frac{Q}{R} C^T C (sI - A)^{-1} BB^T\} = 0$$

$$\frac{Rs^6 + (w_0^2 + Rw_0^2 - Q)s^4 + w_0^4 s^2}{R(s^3 + w_0^2)s} = 0 \tag{3.35}$$

กำหนดค่า $Q = 4, R = 2, w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$

แทนค่าในสมการที่ 3.35 ได้

$$s^6 + s^4 + 2s^2 = 0$$

สามารถพล็อตตำแหน่งของโพลในระบบได้ค่าดังนี้

รูปที่ 3.1 กราฟแสดงตำแหน่งโพลและซีโร่ของระบบ

บทที่ 4
บทวิจารณ์และสรุป

1. การพิจารณาเลือกเกณฑ์ตัดสินขึ้นอยู่กับแต่ละปัญหา ไม่อาจกำหนดตายตัวลงได้ ต้องอาศัยความละเอียดอ่อนในการตีความต้องการของปัญหา

2. การคำนวณหาตัวอินพุทป้อนกลับเหมาะสมที่สุด เราพิจารณาจากสมการออยเลอร์ ในเทอมของค่าอินพุทเป็นศูนย์ ในสภาวะเริ่มต้นของระบบ

3. การแก้สมการริกคาติ เนื่องจากเป็นเมทริกซ์สมมาตร จึงกำหนดเป็นเงื่อนไขในการแก้สมการออกมาได้ง่ายขึ้น

4. ค่าควบคุมเหมาะสมที่สุดที่ได้จากการแทนค่าริกคาติ สามารถจะบังคับให้ระบบทำงานตามเงื่อนไขที่วางใจได้ดีที่สุด โดยส่วนใหญ่จะได้ค่าน้อยที่สุด

5. ความสามารถควบคุมได้กับความสามารถสังเกตได้ของสมการสภาวะ เป็นพื้นฐานของการป้อนกลับสภาวะ บางสภาวะไม่อาจสังเกตหรือวัดค่าได้ จึงต้องสร้างตัวสังเกตสภาวะเป็นค่าปริมาณของสภาวะจริง ต้องป้อนกลับทุกสภาวะ จึงต้องวัดหรือเข้าถึงทุก ๆ สภาวะ

6. การตรวจสอบเสถียรภาพ เป็นการคำนวณค่ารากของสมการคุณลักษณะของระบบ โดยให้เงื่อนไขโพลทั้งหมดของสมการนั้น มีค่าสัมบูรณ์น้อยกว่าหนึ่ง และค่าจริงของโพลกำหนดให้โพลอยู่ทางซ้ายของระนาบ S จึงใช้เป็นเงื่อนไขในการเลือกค่าพารามิเตอร์ให้ระบบมีเสถียรภาพ

7. สามารถหาไอเก้นแวลู ของออยเลอร์เมทริกซ์ เพื่อให้ทราบถึงตำแหน่งของโพลในระบบ และพิจารณาเลือกค่าโพลที่อยู่ทางซ้ายของระนาบ S หรือปรับเปลี่ยนตำแหน่งโพลให้อยู่ทางซ้ายของระนาบ S

ภาคผนวก

ทฤษฎีการวิเคราะห์เมทริกซ์

1. Symmetric matrix และ skew-symmetric matrix สำหรับเมทริกซ์เลขจริง เรียก A ว่า symmetric matrix หาก $A^T = A$ หรือ $a_{ji} = a_{ij}$ หรือ $a_{ji} = a_{ij}$

เรียก A ว่า skew-symmetric matrix หาก $A^T = -A$ หรือ $a_{ji} = -a_{ij}$

1.1 หาก A เป็นเมทริกซ์จตุรัส $A+A^T$ จะเป็น symmetric $A-A^T$ จะเป็น skew-symmetric

1.2 หาก A เป็นเมทริกซ์สี่เหลี่ยมผืนผ้า A^TA จะเป็น symmetric

inverse ของ symmtric matrix จะเป็น symmetric

2. คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์

2.1 สลับ 2 แถวนอน (หรือ 2 แถวตั้ง) เปลี่ยนเฉพาะเครื่องหมายของดีเทอร์มิแนนท์

2.2 การคูณแถวนอน (หรือแถวตั้ง) แถวหนึ่งตั้งด้วยสเกล่าร์แล้วบวกกับแนวนอน (หรือแถวตั้ง) อีกแถวหนึ่ง ไม่ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนท์เปลี่ยนไป

2.3 หาก (nxn) เมทริกซ์มีแถวนอน (หรือแถวตั้ง) 2 แถวซ้ำกัน ค่าดีเทอร์แนนท์เป็น

3. สมการเมทริกซ์ของออยเลอร์

พิจารณาระบบเชิงเส้น

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = c(t)x(t)$$

และ Cost Function

$$J(x(t_0), u(t), t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_1)H(t_1)x(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

$x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m$ และ $u = R^r$ (No constraint)

Hamintonian

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + \lambda^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)]$$

$$= \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + \lambda^T(t)A(t)x(t) + \lambda^T(t)B(t)u(t) \qquad (1)$$

ค่า u* optimal ที่ทำให้ Hamiltonain มีค่าน้อยที่สุด

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u}=0$$

$$R(t)u(t)+B^{T}(t)\lambda(t)=0$$

$$\therefore u^{*}(t)=-R^{-1}(t)B^{T}(t)\lambda(t) \qquad (2)$$

แทนค่า u* ใน สมการ(2) ลงในสมการ(1)

$$H^{*}(x,\lambda,t)=\frac{1}{2}x^{T}(t)Q(t)x(t)+\frac{1}{2}\lambda^{T}(t)B(t)R^{-1}(t)R(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)\lambda(t)+\lambda^{T}(t)A(t)x(t)$$
$$-\lambda^{T}(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)\lambda(t)$$
$$=\frac{1}{2}x^{T}(t)Q(t)x(t)+\lambda^{T}(t)A(t)x(t)-\frac{1}{2}\lambda^{T}(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)\lambda(t)$$

สมการสเตทและโคสเตท

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H^{*}(x,\lambda,t)}{\partial \lambda}=A(t)x(t)-B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)\lambda(t)$$

$$\dot{\lambda}(t)=\frac{\partial H^{*}(x,K,t)}{\partial x}=-C^{T}(t)Q(t)C(t)x(t)-A^{T}(t)\lambda(t)$$

ในรูปของ Transition Matrix

$$\theta(t,\tau)=\begin{bmatrix}\theta_{11}(t,\tau) & \theta_{12}(t,\tau)\\ \theta_{21}(t,\tau) & \theta_{22}(t,\tau)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\lambda}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)\\ -C^{T}(t)Q(t)C(t) & -A^{T}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} \qquad (3)$$

ค่าคำตอบอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \theta(t,t_1)\begin{bmatrix} x(t_1) \\ \lambda(t_1) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \theta_{11}(t,t_1)x(t_1) + \theta_{12}(t,t_1)\lambda(t_1) \qquad (4)$$

$$\lambda(t) = \theta_{21}(t,t_1)x(t_1) + \theta_{22}(t,t_1)\lambda(t_1) \qquad (5)$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบเขต t_1 ตรึงค่า และ $x(t_1)$ อิสระในสมการที่ (4) และ (5)

$$\lambda(t_1) = \Gamma x(t_1)$$

$$x(t) = \theta_{11}(t,t_1)x(t_1) + \theta_{12}(t,t_1)\Gamma x(t_1)$$

$$\lambda(t) = \theta_{21}(t,t_1)x(t_1) + \theta_{22}(t,t_1)\Gamma x(t_1)$$

$$x(t) = [\theta_{11}(t,t_1) + \theta_{12}(t,t_1)\Gamma]x(t_1) \qquad (7)$$

$$\lambda(t) = [\theta_{21}(t,t_1) + \theta_{22}(t,t_1)\Gamma]x(t_1) \qquad (8)$$

$$x(t_1) = [\theta_{11}(t,t_1) + \theta_{12}(t,t_1)\Gamma]^{-1}x(t) \qquad (9)$$

$$\lambda(t) = P(t)x(t)$$

$$P(t) = [\theta_{21}(t,t_1) + \theta_{22}(t,t_1)\Gamma][\theta_{11}(t,t_1) + \theta_{12}(t,t_1)\Gamma]^{-1} \qquad (11)$$

เอกสารอ้างอิง

1. Desineni Subburam Naidu, " OPTIMAL CONTROL SYSTEM ", CRC PRESS, 443 p., 2002

2.รศ.วิพันธ์ ปรีชาพานิช, " ระบบควบคุมออพติมัล ", คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 207 หน้า, 2532

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ อาจารย์ ดร. พัลลภ เหล่าเจริญ ที่กรุณาสละเวลาอันมีค่ามาช่วยชี้แนวทางให้พวกเราได้รู้จักคิดแก้ปัญหาต่าง ๆในโครงงานนี้ มาตั้งแต่ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ถึงภาคเรียนที่ 2 และแนะนำตำราที่ช่วยให้โครงงานนี้มีความสมบรูณ์แบบมากยิ่งขึ้น