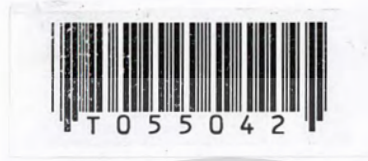


สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การศึกษากาโรไหลเชิงอากาศพลศาสตร์
AERODYNAMIC WING FLOW LEARNING



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุม

ภาควิชาวิศวกรรมการวัดคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2546

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต
หากมีการแก้ไขหรือเปลี่ยนแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 55042
วันเดือนปี..... 7 เม.ย. 2548

b.....
i.....

AERODYNAMIC WING FLOW LEARNING



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
BACHELOR OF ENGINEERING IN INSTRUMENTATION ENGINEERING
DEPARTMENT OF INSTRUMENTATION ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2003

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาควิชาวิศวกรรมวัดคุม
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองปริญญาโท

หัวข้อปริญญาโท การศึกษาการไหลเชิงอากาศพลศาสตร์
AERODYNAMIC WING FLOW LEARNING
นักศึกษาผู้จัดทำ นายจตุพงศ์ อาสาแสน รหัสประจำตัว 44015462
นายสุชาติ พูนประสพสุข รหัสประจำตัว 44015489
ปริญญา วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา วิศวกรรมการวัดคุม
ปีการศึกษา 2546

อาจารย์ผู้ควบคุมปริญญาโท	ลายมือชื่อ
รศ. เกษตร์ ศิริสันติสัมฤทธิ์	
รศ. ประภาส อุดคคิมาพันธ์	

วัน/เดือน/ปี ที่สอบ วันอังคารที่ 20 เมษายน พ.ศ. 2547
สถานที่สอบ ณ ห้องสอบปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมการวัดคุม

ภาควิชารับรองแล้ว

(รศ. ประสิทธิ์ จุลเสรีวงศ์)

หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมการวัดคุม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปริญญานิพนธ์	ศึกษาการไหลเชิงอากาศพลศาสตร์	
	AEROMECHANIC WING FLOW LEARNING	
นักศึกษาผู้จัดทำ	นายจตุพงศ์	อาสาแสน
	นายสุชาติ	พูนประสพสุข
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.เกษตร์	ศิริสันติสัมฤทธิ์
	รศ.ประภาส	อุคคกิมพันธ์
ปีการศึกษา	2546	

บทคัดย่อ

โครงการนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและออกแบบอุปกรณ์สื่อค่าขึ้นพื้นฐาน เพื่อที่จะนำไปสร้างเป็นเครื่องมือวัดอัตราการไหล ซึ่งเกิดจากการประยุกต์หลักการทางพลศาสตร์อากาศ ที่ว่าจะเกิดแรงยกตัวขึ้นบนปีกเมื่ออยู่ในสนามการไหลที่มีค่าความเร็วของการไหล แต่ถ้าปีกถูกยึดให้อยู่กับที่โดยเพลาลอยหกลมที่ตำแหน่งที่ไม่ใช่สมดุลทางอากาศ แรงยกตัวที่เกิดขึ้นจะถูกเปลี่ยนเป็นบิดที่เพลาลอยหกลม และผลของการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการบิดตัวจะทำให้ค่าความเค้นและความเค้นเฉือนบนเพลาลอยเกิดการเปลี่ยนแปลง และสามารถทราบค่าของแรงบิดได้โดยการใช้สเตรนเกจ ซึ่งจะส่งค่าในรูปของความต้านทานทางไฟฟ้า เมื่อเปรียบเทียบกับอัตราการไหลที่เปลี่ยนแปลงไปก็สามารถวัดอัตราการไหล ภาพรวมของโครงการนี้คือการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปคำนวณและจำลองลักษณะการไหลการเสีรูปของวัตถุ รวมถึงทำการคำนวณเปรียบเทียบผลที่ได้กับ อัตราการไหล ซึ่ง โปรแกรมสำเร็จรูปดังกล่าวคือ Unigaphic, Nastran และ Star CD โดยการคำนวณและจำลองสภาพการไหลทั้งหมดจะอยู่บนสมมติฐานที่ว่า ของไหลเป็นของไหลจริง เป็นการไหลแบบปั่นป่วน เป็นการไหลแบบคงตัว เป็นการไหลแบบสองมิติ เป็นการไหลแบบหมุนวน และเป็นการไหลที่ไม่คำนึงผลเนื่องจากอุณหภูมิ

Thesis Title Aeromechanic Wing Flow Learning
Authors Mr. Jatupong Arsenen
Mr. Suchart Poonprasobsuk
Thesis Advisor Assoc.Prof. Kaset Sirisantamrit
Assoc.Prof. Prapat ukakimapan
Year 2003

ABSTRACT

The Objective of this project are to study and design primary sensing element for flow rate Transducer from application of generates flow flux, the wing is Lifted up by Lift force. From the basis of conception when the wing is fixed by metal shaft, Lift force will act on the wing art became the torque force on metal and shear stress on metal shaft. The stress could indicate by strain gage, when compare stress whit variation flow rate, would be conclude flow rate measure. Configuration of this project are to calculate and simulate flow formable, deformation of material and result of comparison with actually flow rate. By the flow assumption are on real fluid, turbulence flow, steady state flow, two-dimension flow, and irritation flow and negless temperature interaction.

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ดีเพราะได้รับความกรุณาห่วงใย อีกทั้งได้รับคำแนะนำและคำปรึกษาจาก รศ.เกษตร์ ศิริสันติสัมฤทธิ์, รศ.ประภาพร อุคคกิมพินธุ์, รศ.ดร.จารุวัตติ เจริญสุข และ ผศ.มี้ง โลกิจแสงทอง คณะผู้จัดทำจึงขอถือโอกาสนี้กราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงในความอนุเคราะห์ของท่านอาจารย์ทุกท่าน

ขอขอบคุณ พี่เชษ, พี่ต๋, พี่โหน่ง, รุ่นพี่ปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมวัดคุม และวิศวกรรมเครื่องกล ที่ได้ให้คำแนะนำในการแก้ไขปัญหาต่างๆ ซึ่งมีส่วนช่วยให้คณะผู้จัดทำแก้ไขปัญหาได้อย่างถ่องแท้ และขอขอบคุณเพื่อนๆ นักศึกษาทุกคนที่ช่วยให้กำลังใจแก่คณะผู้จัดทำอย่างใกล้ชิด เป็นแรงผลักดันจนเสร็จสมบูรณ์แบบ

สุดท้ายนี้ขอกราบเท้าขอบพระคุณมารดา และบิดา ของคณะผู้จัดทำ ท่านผู้ซึ่งสนับสนุนให้มีการศึกษา และอบรมเลี้ยงดูจนมีวันสัมฤทธิ์ผล ขออาราธนาคุณพระศรีรัตนตรัยและสิ่งศักดิ์สิทธิ์ที่สถิตอยู่ในสากลโลก จงปกป้องคุ้มครองและประทานพรอันประเสริฐให้มีแต่ความสุขความเจริญด้วยเทอญ

คณะผู้จัดทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VIII
สารบัญภาพ.....	IX
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและเหตุจูงใจของการสร้างเครื่องมือวัด.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปริญญานิพนธ์.....	1
1.3 ขอบเขตของปริญญานิพนธ์.....	1
1.4 ขั้นตอนการศึกษา.....	2
บทที่ 2 ทฤษฎีบทพื้นฐานของการไหล.....	3
2.1 กล่าวนำ.....	3
2.2 สมมุติฐานและขอบเขตคุณสมบัติของของไหล.....	3
2.2.1 ของไหลจริง (Real Fluid or Practical Fluid).....	3
2.2.2 ความหนืด.....	4
2.2.3 ของไหลที่กดอัดไม่ได้ (Incompressible Fluid).....	4
2.2.4 การไหลปั่นป่วน (Turbulent Flow).....	4
2.2.5 การไหลแบบคงตัว (Steady Flow).....	4
2.2.6 การไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow).....	5
2.2.7 การไหลแบบสองทาง (Two Dimensional Flow).....	5
2.2.8 การไหลแบบไม่มีการหมุนวน (Irrotational Flow).....	5
2.3 สมการพื้นฐานของการไหล.....	5
2.3.1 สมการเชิงอนุพันธ์มวล.....	5
2.3.2 สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม.....	7
2.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน.....	13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.4 ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์.....	20
2.5 การวัดอัตราการไหลภายในท่อ.....	25
2.6 การวัดสภาพการไหลด้วยค่าเรย์โนลด์.....	25
บทที่ 3 กลศาสตร์วัสดุ.....	26
3.1 ความเค้น.....	26
3.1.1 ความเค้นตั้งฉาก (σ).....	26
3.1.2 ความเค้นเฉือน (τ).....	27
3.2 ความเครียด.....	27
3.2.1 ความเครียดตามยาว (ϵ).....	27
3.2.2 ความเครียดเฉือน.....	28
3.3 กฎสภาพยืดหยุ่นของฮุก.....	29
3.4 มอดูลัสของสภาพยืดหยุ่นและมอดูลัสของยัง.....	29
3.5 แผนภาพความเค้นและความเครียดภายใต้การดึงทดสอบ.....	30
3.6 ความเครียดที่จุดใด ๆ ในวัตถุภายใต้แรงกระทำ.....	30
3.7 อัตราส่วนปัวซอง.....	32
3.8 ความเครียดเฉือนในเพลภายใต้การบิด.....	32
3.9 ความเค้นเฉือนในเพลภายใต้การบิด.....	34
3.9.1 ความสัมพันธ์ระหว่างทอร์ก (T) กับความเค้นเฉือน (τ).....	34
3.9.2 ความสัมพันธ์ระหว่างทอร์ก (T) กับมุมบิด (θ).....	37
3.10 ความเค้นเฉือนตามแนวแกนของเพล.....	37
บทที่ 4 อากาศพลศาสตร์ของแอร์ฟอยล์.....	39
4.1 กล่าวนำ.....	39
4.2 คุณสมบัติเรขาคณิตของแอร์ฟอยล์.....	39
4.3 แรงยกของแอร์ฟอยล์.....	40
4.4 แรงต้านเหนี่ยวนำบนแอร์ฟอยล์ที่มีความยาวจำกัด.....	41

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	45
5.1 กล่าวนำ.....	45
5.2 ขั้นตอนระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไป.....	46
บทที่ 6 การออกแบบชิ้นส่วนล่อค่าชั้นพื้นฐาน.....	51
6.1 กล่าวนำ.....	51
6.2 การออกแบบชิ้นส่วนล่อค่าชั้นพื้นฐานและปริมาตรการควบคุม.....	51
6.2.1 การออกแบบชิ้นส่วนรับแรงชั้นพื้นฐาน.....	51
6.2.2 ปริมาตรควบคุม.....	53
บทที่ 7 การทดลอง.....	54
7.1 การสร้างเมช (Mesh Generation).....	54
7.2 การคำนวณและทดลองพลศาสตร์การไหล (CFD) ภายในปริมาตรควบคุม.....	54
7.3 การทดลองและผลการทดลองการคำนวณพลศาสตร์การไหล.....	55
7.3.1 การทดลอง.....	55
7.3.2 ผลการทดลองแบบลักษณะการกระจายตัวของแรงดันและ ความเร็ว.....	55
7.3.3 ผลการทดลองแบบผลของแรงกระทำต่อปีก.....	57
7.4 สรุปผลการทดลองการคำนวณพลศาสตร์การไหล.....	59
7.5 การทดลองและผลการทดลอง CAE.....	62
7.6 การคำนวณและการจำลองการเสีรูปของชิ้นส่วน.....	62
7.7 ผลการทดลองจากการคำนวณและจำลองการเสีรูปของชิ้นส่วน.....	63
7.8 สรุปผลการทดลองของการคำนวณและการจำลองการเสีรูปของชิ้นส่วน.....	63
บทที่ 8 สรุป และ วิจารณ์	64
8.1 สรุปผลการทดลอง.....	64
8.2 วิจารณ์.....	64

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บรรณานุกรม.....	65
ภาคผนวก.....	66
Coordinate ของ NASA 4412.....	67
คุณสมบัติของ Stainless Steel.....	73
คุณสมบัติของ Aluminum.....	73



สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 แสดงความสัมพันธ์ของพลังงานที่ไหลเข้าและ ไหลออก ปริมาตร ควบคุมโดย A, B และ C.....	14
2.2 ชนิดของการไหลในท่อ.....	25
7.1 แสดงผลของแรงที่เกิดจากอัตราการไหลที่ระดับต่าง ๆ.....	58
7.2 อัตราการไหลของอลูมิเนียมและสเตรนเลส.....	61



สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 รูปแสดงพลั๊กซ์ของมวลผ่านกรอบขนาดเล็ก ที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล เพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์มวล.....	6
2.2 รูปแบบแสดงแรงต่าง ๆ ในทิศแกน x ที่กระทำบนก้อนของไหล ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม.....	8
2.3 รูปแบบแสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณพลั๊กซ์ในทิศแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวล ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล เพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน.....	14
3.1 ความเค้นตั้งฉาก.....	26
3.2 แสดงแผนภาพการตีกรุปของโลหะ ซึ่งพลอตระหว่างแรงดึง (P) กับระยะยืดตัว (δ).....	28
3.3 การตีกรุปโดยการเฉือน.....	28
3.4 ความเครียดที่จุดใดจุดหนึ่ง.....	31
3.5 นิยามของอัตราส่วนปัวส์ซอง.....	32
3.6 มุมบิด ($d\theta$) บนเพลยาว dx	34
3.7 การกระจายของความเค้นในเพลกลมตัน.....	35
3.8 หน้าตัดเพลกลมตันภายใต้ภาระการบิดตัว.....	36
3.9 ความเค้นเฉือนตามขวาง (τ) และตามแนวแกนของเพล (τ') ภายใต้ภาระบิด.....	37
3.10 ชิ้นส่วนย่อยระหว่างเส้นรอบวง A-A และ B-B.....	38
4.1 ชื่อสัญลักษณ์สำหรับแอร์ฟอยล์.....	39
4.2 การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของความเร็วจนถึงการปรับสมดุลของความเร็วจนที่ปลายปีกไม่ให้มีความเร็วสูงมากจนเกินไป.....	40
4.3 แสดงการกระทำของแรงยกและแรงของแรงต้านเหนี่ยวนำ.....	42
5.1 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ.....	46
5.2 เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยตัวที่ไม่รู้ค่าที่ 3 จุดต่อ.....	47
6.1 NASA 4412 Airfoil.....	52
6.2 ชิ้นส่วนรับแรงขั้นพื้นฐาน.....	52

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.3 แสดงชุดปริมาตรควบคุม.....	53
7.1 การสร้างเมช (Mesh Generation).....	54
7.2 ผลของความเร็วของอากาศที่ $V = 10 \text{ m/s}$, $Q = 0.0000375 \text{ m}^3/\text{s}$	56
7.3 ผลของความดันของอากาศที่ $V = 10 \text{ m/s}$, $Q = 0.0000375 \text{ m}^3/\text{s}$	56
7.4 ผลของความเร็วของน้ำที่ $V = 10 \text{ m/s}$, $Q = 0.1832 \text{ m}^3/\text{s}$	57
7.5 ผลของความดันของน้ำที่ $V = 10 \text{ m/s}$, $Q = 0.1832 \text{ m}^3/\text{s}$	57
7.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลของน้ำ กับแรงกระทำในแนวแกน Y.....	59
7.7 การเสียรูป(Deformational).....	60
7.8 การเสียรูปของแกนเพลลา (Shaft Deformational).....	60
7.9 กราฟแสดงอัตราการไหลของอุมิเนียมและสเตนเลส.....	62

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและเหตุจูงใจของการสร้างเครื่องมือวัด

แรงบันดาลใจที่ทำให้คณะผู้จัดทำเกิดความคิดที่จะสร้างสรรค์นวัตกรรมใหม่ ๆ ทางวิศวกรรมการวัดคือการได้เรียนวิชา Process Instrument Control กับ รศ.เกษตร์ ศิริสันติสัมฤทธิ์ ได้สังเกตเห็นว่าการสร้างอุปกรณ์สื่อค่าขั้นพื้นฐานของเครื่องมือวัดต่าง ๆ มาจากการประยุกต์ใช้กฎและทฤษฎีพื้นฐานทางฟิสิกส์คณะผู้จัดทำจึงมีแนวความคิดที่จะสร้างอุปกรณ์เครื่องมือค่าขั้นพื้นฐานในการสร้างเครื่องมือวัดอัตราการไหล โดยการใช้หลักการของอากาศพลศาสตร์

1.2 วัตถุประสงค์ของปริญญานิพนธ์

เพื่อศึกษาและออกแบบอุปกรณ์สื่อค่าขั้นพื้นฐาน เพื่อที่จะนำไปสร้างเป็นเครื่องมือวัดอัตราการไหล โดยการประยุกต์ใช้หลักการทางอากาศพลศาสตร์และการเสีรูปของวัตถุ นอกจากนี้คือ การศึกษาถึงการวัดอัตราการไหลของของไหลภายในท่อ ตลอดจนความสัมพันธ์ของ ความเร็ว ความดัน และแรงที่เกิดขึ้นเมื่อมีวัตถุวางอยู่ในสนามการไหลภายในท่อ

1.3 ขอบเขตของปริญญานิพนธ์

ภาพรวมของปริญญานิพนธ์เล่มนี้จะกล่าวถึงการออกแบบและพยากรณ์ความเป็นไปได้จะนำชิ้นส่วนอุปกรณ์สื่อค่าขั้นพื้นฐานที่คณะผู้จัดทำได้ออกแบบตามหลักของอากาศพลศาสตร์และกลศาสตร์เชิงสถิติ โดยได้ทำการจำลองสภาพของการไหลของของไหลภายในท่อด้วยการคำนวณพลศาสตร์การไหล (CFD :Computation Fluid Dynamics) ด้วย โปรแกรม Star CD ต่อจากนั้นจะนำผลการทดลองที่ได้มาจำลองสภาพการเสีรูปเชิงสถิติศาสตร์ของชิ้นส่วนด้วยการคำนวณสถิติศาสตร์การเสีรูปของวัตถุ (CAE : Computer Air Engineering) สุดท้ายนี้คณะผู้จัดทำได้สรุปผลการจำลอง และเสนอแนะถึงความเป็นไปในการที่จะนำชิ้นส่วนดังกล่าวไปใช้เป็นอุปกรณ์สื่อค่าพื้นฐาน (Primary Sensing Element) เพื่อนำไปสร้างเป็นเครื่องมือวัดอัตราการไหลต่อไป

1.4 ขั้นตอนการศึกษา

ปริญญานิพนธ์เล่มนี้จะกล่าวถึงการออกแบบชิ้นส่วนทางกลที่จะนำไปสร้างเป็นอุปกรณ์สื่อค่าพื้นฐานของเครื่องมือวัดอัตราการไหล คณะผู้จัดทำได้พยายามพิสูจน์และพยากรณ์ถึงความเป็นไปได้ที่จะนำมาใช้งานจริงจึงจำลองสภาพการใช้งานด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. เขียนรูปจำลองสามมิติตามการออกแบบด้วยอากาศพลศาสตร์ด้วยโปรแกรม UG
2. จำลองสภาพการไหลผ่านชิ้นส่วนดังกล่าว โดยทำการจำลองสภาพของน้ำ และอากาศมีสภาวะอุณหภูมิ ความดันปกติ และคำนวณพลศาสตร์ด้วย Star CD
3. สรุปผลความเร็ว ความดัน และแรงที่เกิดจากการไหลของทั้งสองกรณี
4. นำผลการทดลองจากข้อที่ 3 มาจำลองการกระทำของแรงในเชิงสถิติศาสตร์ต่อชิ้นส่วนของวัสดุสองชนิด คือ อลูมิเนียมและสแตนเลสด้วยโปรแกรม Nastran
5. สรุปผลของการเสียรูปและการเกิดความเค้นต่ออัตราการไหลที่เปลี่ยนไป
6. สรุปความคิดรวมต่อผลการทดลองทั้งหมด และวิจารณ์การทดลอง พร้อมทั้งเสนอแนะแนวทาง ต่อความเป็นไปได้ต่อการนำไปใช้งาน

บทที่ 2

ทฤษฎีบทพื้นฐานของการไหล

2.1 กล่าวนำ

การไหลในเชิงกลศาสตร์ หมายถึง การเคลื่อนที่ของสสารโดยไม่คำนึงถึงแรงกระทำอันเป็นสาเหตุของการเคลื่อนที่ การเคลื่อนที่ในที่นี้ประกอบด้วย การเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) ความเร็ว (Velocity) และความเร่ง (Acceleration) การเคลื่อนที่ของของไหลถูกเรียกกันโดยทั่วไปว่า การไหล (Flow)

จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน และหลักการอนุรักษ์ของมวลสารร่วมกับกฎของอุณหพลศาสตร์ กฎความหนืดของนิวตันและหลักการเกี่ยวกับขอบเขตของของไหล ของไหลที่ถือว่าเป็นพวกอัดตัวไม่ได้ไม่ได้แก่ของเหลวทุกชนิด สำหรับก๊าซถ้าหากความดันที่กระทำกับก๊าซนั้นมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับความดันสัมบูรณ์แล้วก็อาจถือได้ว่าก๊าซนั้นเป็นของไหลที่อัดตัวไม่ได้เช่นเดียวกัน เมื่อพิจารณาสถานะของของแข็งและของไหลในเชิงกลจากปฏิกิริยาพื้นฐานของสสารที่เกิดจากแรงต่าง ๆ เช่น แรงดึง (Tension) แรงอัด (Compression) และแรงเฉือน (Shear) จะพบว่าเมื่อของแข็งได้รับแรงเฉือนจะเกิดการเปลี่ยนรูปร่างอย่างถาวร ส่วนของไหลจะไม่สามารถรับแรงเฉือนได้เลยไม่ว่าจะมีขนาดเท่าใดก็ตามเพราะเมื่อได้รับแรงเฉือนแล้วของไหลจะเกิดการเปลี่ยนรูปร่างหรือเกิดการไหลทันที การที่กล่าวว่าการไหลไม่สามารถรับแรงดึงได้นั้นในทางกายภาพของไหลสามารถรับแรงดึงได้บ้างเล็กน้อย เพราะมีแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุล แต่มีค่าต่ำมากจึงถือเสมือนว่าของไหลไม่สามารถรับแรงดึงได้ ซึ่งเป็นสมมุติฐานของทางวิศวกรรมที่ใช้โดยทั่วไป

2.2 สมมุติฐานและขอบเขตคุณสมบัติของของไหล

ในเชิงวิชาการนั้นการกล่าวถึงการไหลที่ประกอบด้วยเงื่อนไขและคุณลักษณะในการพิจารณาการไหลในแต่ละกรณีนั้นมีความซับซ้อนและละเอียดอ่อนมาก ดังนั้นในโครงการนี้จึงได้กำหนดขอบเขตสมมุติฐานของคุณสมบัติของของไหลดังต่อไปนี้

2.2.1 ของไหลจริง (Real Fluid or Practical Fluid)

ของไหลจริง (Real Fluid or Practical Fluid) หมายถึง ของไหลที่มีคุณสมบัติตามธรรมชาติและเกิดขึ้นจริงตามลักษณะการใช้งาน เช่น ความตึงผิวและความสามารถในการอัดตัวได้ สำหรับของไหลจริงไม่ว่าจะเป็นของเหลวหรือก๊าซ ถ้าหากมีการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นแล้วก็ต้องมีแรงตามแนวสัมผัสหรือแรงเฉือนเกิดขึ้นด้วยเนื่องจากแรงเหล่านี้จะมีทิศทางสวนทางกับทิศทางการไหลเสมอและเป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น เมื่อผู้ดูแลเห็นประโยชน์ของการนำเอกสารนี้เป็นเอกสารใด ๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เคลื่อนที่ ดังนั้นจึงทำให้เกิดแรงเสียดทานจากของไหลขึ้นแรงเสียดทานนี้เกิดจากคุณสมบัติอย่างหนึ่งของของไหลที่เรียกว่า ความหนืด

2.2.2 ความหนืด

ความหนืดของของไหลเป็นค่าความต้านทานต่อแรงเฉือน หรือเป็นค่าความต้านทานต่อการเปลี่ยนแปลงรูปเชิงมุม และแรงเสียดทานในของไหลที่กำลังเคลื่อนที่อยู่นั้นเป็นผลมาจากแรงเกาะกันในระหว่างโมเลกุล และการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในระหว่างโมเลกุลของของไหล ในขณะที่อุณหภูมิเพิ่มสูงขึ้นนั้นความหนืดของของเหลวทุกชนิดจะลดน้อยลง ส่วนความหนืดของก๊าซทุกชนิดกลับเพิ่มขึ้น และไปทำให้ของไหลที่ช้ากว่านั้นเคลื่อนที่ได้เร็วขึ้น ส่วนโมเลกุลจากชั้นที่ช้ากว่าก็จะย้ายไปอยู่ในชั้นที่เร็วกว่า และจะไปหน่วงให้ชั้นที่เร็วกว่าให้เคลื่อนที่ได้ช้าลง การแลกเปลี่ยนโมเลกุลเช่นนี้ทำให้เกิดแรงเฉือนขึ้น ดังนั้นการเคลื่อนไหวของโมเลกุลก๊าซที่เพิ่มมากขึ้นเมื่อมีอุณหภูมิสูงๆ จึงเป็นสาเหตุทำให้ก๊าซมีความหนืดสูงขึ้น ณ ที่นี้ของไหลที่ใช้ในการทดลองนี้เป็นของไหลที่มีความหนืด

2.2.3 ของไหลที่กดอัดไม่ได้ (Incompressible Fluid)

ของไหลที่กดอัดไม่ได้ (Incompressible Fluid) หมายถึง ของไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรน้อยมากเมื่อมีความดันเปลี่ยนแปลง ซึ่งสามารถที่จะไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรได้หรือกล่าวได้ว่าของไหลที่กดอัดไม่ได้คือ ของไหลที่มีความหนาแน่นคงที่หรือเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยเมื่อความดันเปลี่ยนแปลง

2.2.4 การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow)

การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) หมายถึง การไหลของของไหลชนิดที่อนุภาคของของไหลเคลื่อนที่ในทิศทางหรือลักษณะที่แน่นอน มีการเคลื่อนที่ช้าลงและมีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมจากส่วนหนึ่งของของไหลไปยังส่วนอื่นๆ ลักษณะการไหลของของไหลทั่วไปเกือบ 95% จะเป็นการไหลแบบนี้ตัวอย่างเช่นการไหลของน้ำตามแม่น้ำลำคลอง การไหลของอากาศในท่อลม เป็นต้น

2.2.5 การไหลแบบคงตัว (Steady Flow)

การไหลแบบคงตัว (Steady Flow) หมายถึง การไหลของของไหลชนิดที่ความเร็วของการไหล ณ จุดใดๆ ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เช่น เมื่อคำนึงถึงการไหลของของไหลที่ผ่านจุด A ไม่ว่าจะเป็นเวลาใดของการไหลที่ผ่านจุด A นั้นจะมีความเร็วคงที่เสมอและเมื่อพิจารณาที่จุด B ความเร็วของการไหลของของไหลที่ผ่านจุด B ก็คงที่ด้วยแต่ความเร็วที่จุด A และจุด B ไม่

จำเป็นต้องเท่ากันเนื่องจากเหตุผลที่ว่า ของไหลไม่สามารถที่จะขาดช่วงได้เพราะจะทำให้ความเร็วของของไหล ณ จุดนั้น ๆ เปลี่ยนแปลงทฤษฎีที่ใช้กับการไหลคงตัวเป็นทฤษฎีเบื้องต้น และการใช้งานทางวิศวกรรมส่วนใหญ่ จัดว่าเป็นการไหลของของไหลเป็นแบบคงตัว

2.2.6 การไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow)

การไหลแบบสม่ำเสมอ(Uniform Flow)หมายถึง การไหลที่มีความเร็ว ณ ทุกๆ จุดในสนามการไหลคงที่ทั้งขนาดและทิศทางที่เวลาใดเวลาหนึ่ง กล่าวคือ การไหลแบบสม่ำเสมอมีสภาพการไหลที่ไม่แปรเปลี่ยนตามระยะทาง

2.2.7 การไหลสองทิศทาง (Two Dimensional Flow)

การไหลสองทิศทาง (Two Dimensional Flow) หมายถึง การไหลชนิดที่สายธารการไหลเคลื่อนที่ไปบนระนาบเดียวกัน แต่มีการเคลื่อนที่ขึ้นลงได้ด้วยตัวอย่างของการไหลสองทิศทาง เช่น การไหลของน้ำล้นเขื่อน หรือการไหลของอากาศปีกของเครื่องบิน เป็นต้น ในการไหลสองทิศทางนี้ ความเร็ว ความดัน ฯลฯ เปลี่ยนแปลงไปตามจุดที่พิจารณา

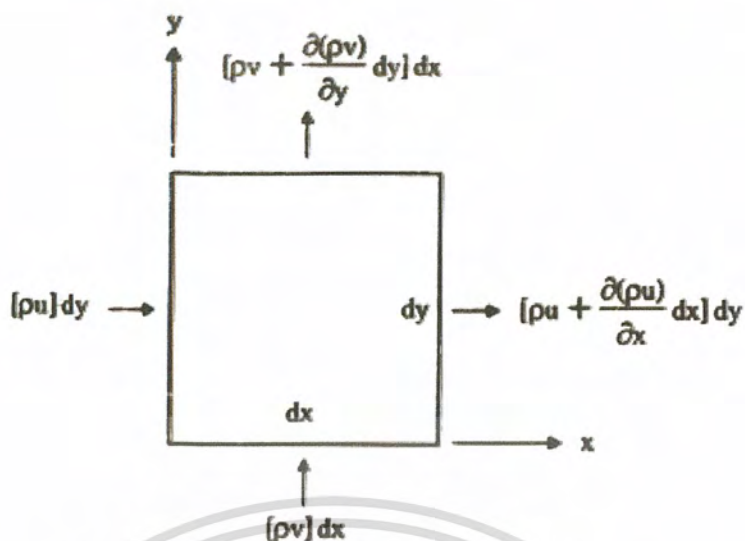
2.2.8 การไหลแบบไม่มีการหมุนวน (Irrotational Flow)

การไหลแบบไม่มีการหมุนวน (Irrotational Flow) หมายถึง การเคลื่อนที่ของของไหลที่มีความเร็วเชิงมุมหมายความว่า ของไหลทั้งชิ้นเคลื่อนที่ย้ายตำแหน่งโดยไม่มีการหมุน

2.3 สมการพื้นฐานของการไหล

2.3.1 สมการเชิงอนุรักษ์มวล

สมการต่างๆ ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลต้องแสดงถึงความเป็นจริงที่มีความหมายทางกายภาพและสามารถทำความเข้าใจได้ง่าย สมการแรกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลนี้เป็นสมการของการอนุรักษ์มวล(Conservation of Mass)ซึ่งมีความหมายให้เข้าใจได้ง่ายๆ มวลนั้นไม่สูญหายไป การประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์นี้สามารถเข้าใจได้โดยง่าย หากพิจารณาการไหลผ่านกรอบเล็กๆ ขนาดกว้าง dx และ dy ซึ่งมีความลึกหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูปที่ 2.1 ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล



รูปที่ 2.1 แสดงฟลักซ์ของมวลผ่านกรอบขนาดเล็ก ที่ตั้งอยู่ในโดเมนของการไหลเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุกรมวล

ตลอดขอบซ้าย dy ของกรอบเล็กๆ นี้มีปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลเข้าเท่ากับ $[\rho u]dy$ เนื่องจากทั้งความหนาแน่น ρ และความเร็ว u นั้นเปลี่ยนแปลงไปตลอด ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลออกทางด้านขวาของกรอบคือ $[\rho u + (\partial(\rho u)/\partial x)dx]dy$ นั่นคือ ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในทิศแกน x ผ่านขอบ dy ของการไหลผ่านกรอบเล็กๆ นี้คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy - [\rho u]dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy \quad (2.1)$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในการไหลผ่านของ dx ดังไปยังขอบบนคือ

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx - [\rho v]dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy \quad (2.2)$$

และเนื่องจากปริมาณมวลในกรอบเล็กๆนี้คือ $\rho dx dy$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวล หรือ ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ลดลงก็คือ

$$-\frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy \quad (2.3)$$

แต่เนื่องจากมวลในกรอบเล็กๆนี้ต้องไม่เกิดการสูญหาย ดังนั้นจึงหมายความว่าปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ dx และ dy จำเป็นต้องเท่ากับปริมาณฟลักซ์ของมวลในกรอบเล็กๆที่ลดลงในนั้น นั่นคือ

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy = -\frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy$$

หารสมการนี้ตลอดด้วย $dx dy$ แล้วย้ายข้างจะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.4)$$

หรือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

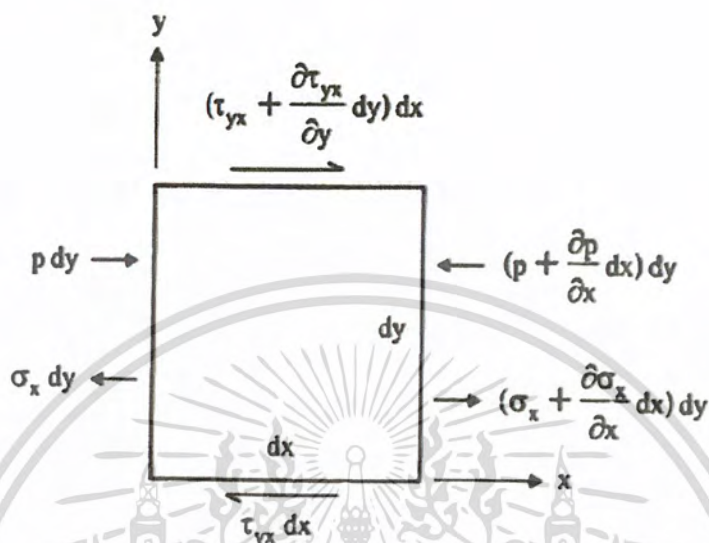
สมการ (2.4) นี้คือ สมการเชิงอนุพันธ์มวล ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของความเป็นจริง สมการแรกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล โดยบ่งบอกว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหายไป สมการดังกล่าวนี้อยู่ในรูปแบบของพจน์เชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งอันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าถึง 3 ค่า คือ ρ , u และ v ซึ่งต่างเปลี่ยนแปลงไปได้ตลอดโดเมนของการไหล ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์มวลนี้เพียงสมการเดียวจึงไม่สามารถใช้แก้ปัญหาได้ และจำเป็นต้องประดิษฐ์สมการของความเป็นจริงอื่นๆ ในการไหลเพิ่มเติมขึ้นอีก

2.3.2 สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

ความเป็นจริงประการที่สองของการไหลโดยทั่วไปที่สามารถนำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพิ่มเติมนั้นได้มาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second -Law) ที่กล่าวว่า แรงเท่ากับมวลคูณด้วยอัตราเร่ง ดังนั้นในการใช้กฎข้อที่สองของนิวตันที่ต้องมี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความสัมพันธ์กับการเร่ง เราจะพิจารณามวลซึ่งมีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วย ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล



รูปที่ 2.2 แสดงแรงต่างๆ ในทิศแกน x ที่กระทำบนก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

เพื่อให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจในการประดิษฐ์ สมการต่อไป รูปที่ 2.2 นี้แสดงแรงต่างๆ ที่กระทำในทิศแกน x เท่านั้น กฎข้อที่สองของนิวตันเมื่อพิจารณาในทิศแกน x คือ

$$F_x = ma_x \quad (2.6)$$

โดย F_x คือแรงรวมในทิศแกน x , m คือ มวลของก้อนของไหลนี้ และ a_x คือ ความเร่งของมวลในทิศแกน x

แรงรวมในทิศแกน x ประกอบด้วยแรงที่กระทำที่ผิวต่างๆ และแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง สำหรับแรงที่กระทำที่ผิวนั้นยังประกอบด้วยแรงอันเนื่องมาจากความดัน p ความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) σ_x และความเค้นเฉือน (Shear Stress) τ_{yx} สำหรับความเค้นเฉือนนี้ตัวห้อยแรก (y ในที่นี้) ระบุด้านที่ตั้งฉากกับแกน y ซึ่งมีความเค้นเฉือนนี้กระทำอยู่ส่วนตัวห้อยหลัง (x ในที่นี้) ระบุทิศทางของความเค้นเฉือนที่กระทำ ดังนั้นแรงรวมที่กระทำที่ผิวต่างๆ ในทิศแกน x ของก้อนมวลนี้ คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy + \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] dx$$

$$+ \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx \quad (2.7)$$

ส่วนแรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของตัวเองในทิศแกน x คือ

$$\rho f_x (dx dy) \quad (2.8)$$

ดังนั้น แรงรวมทั้งหมดในทิศแกน x ที่เกิดจากพจน์ต่างๆ ในสมการ (2.7) และ (2.8) คือ

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right] dx dy + \rho f_x dx dy \quad (2.9)$$

ส่วนมวลของก้อนของไหลนี้คือ

$$m = \rho (dx dy) \quad (2.10)$$

ค่าความเร่ง a_x ของมวลในสมการ (2.6) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว u ของมวลที่กำลังเคลื่อนที่นั้นต่อเวลา เนื่องจากเรากำลังจับตาเฝ้าดูมวลนี้ที่กำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล ดังนั้น ความเร่ง a_x นี้คือ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของ u กล่าวคือ

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.11)$$

แทนสมการ (2.9) – (2.11) ลงในกฎข้อที่สองของนิวตันสมการ (2.25) แล้วหารตลอดด้วย $dx dy$ จะได้

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.12 \text{ ก})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทำนองเดียวกัน กฎข้อที่สองของนิวตันในทิศแกน y ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกัน ดังนี้

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.12 \text{ ข})$$

สมการ(2.12 ก-ข)นั้นเรียกว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์(Navier-Stokes Equations)เพื่อเป็นเกียรติแก่ชาวฝรั่งเศสชื่อ M.Navier และชาวอังกฤษชื่อ G.Stokes ซึ่งต่างประดิษฐ์สมการนี้ขึ้นมาได้เช่นเดียวกัน

สมการนาเวียร์-สโตกส์ (2.12 ก-ข) ต่างอยู่ในแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์อันเนื่องมาจากการประดิษฐ์สมการโดยการจับตามองก้อนมวลของไหลที่เคลื่อนตัวไป ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์นี้สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาซึ่งเปรียบเสมือนผู้สังเกตจับตาดำเนินอยู่ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้วเฝ้ามองการเปลี่ยนแปลงของการไหลที่เคลื่อนที่ผ่านไปโดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (2.11) ประยุกต์เข้ากับความเร็ว u ดังนี้

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u \quad (2.13)$$

ดังนั้น

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u \quad (2.14)$$

นั่นคือ พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์สามารถแทนด้วยพจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ (2.14) นี้ซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดา และสามารถนำไปใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์มวล (2.5) เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาได้ เพราะทุกพจน์ในสมการต่างๆ เหล่านี้ล้วนอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาแล้วอย่างใดก็ตามพจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ(2.14) นี้ยังสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายและสะดวกมากขึ้นอีกโดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการดังต่อไปนี้

$$\text{เนื่องจาก} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเนื่องจาก $\vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) = u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \cdot \vec{\nabla} u$

ดังนั้น $\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) - u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$ (2.16)

แทนสมการ (2.15) และ (2.16) ลงในสมการ (2.14) จะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) - u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) \quad (2.17)$$

แต่เนื่องจากผลรวมของ สองพจน์ในวงเล็บสี่เหลี่ยมนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมการเชิงอนุพันธ์มวล ดังนั้น สมการ (2.17) จึงกลายมาเป็น

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) \quad (2.18)$$

แทนสมการ (2.18) นี้ลงในสมการ (2.12 ก) จะได้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_x \quad (2.19 ก)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการ (2.12 ข) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.19 ข)$$

สมการ (2.19 ก-ข) นี้เรียกว่าสมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (Conservation Form)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พจน์ทางด้านขวามือของสมการนาเวียร์-สโตกส์ นี้ประกอบด้วยค่าความเค้นตั้งฉากและค่าความเค้นเฉือน ซึ่งจำเป็นจะต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วในแกนต่างๆ กัน ในปลายคริสต์ศตวรรษที่ 17 ไอแซค นิวตัน (Isaac Newton) ได้เสนอว่า ค่าความเค้นเหล่านี้แปรผันโดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (Velocity Gradient) ข้อเสนอที่พบนี้พบว่าเป็นไปได้กับการไหลทั่วไปในทางปฏิบัติ ทำให้เป็นที่ยอมรับและเรียกของไหลที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่าของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian Fluid) ข้อเสนอดังกล่าว ก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเร็ว ดังนี้

$$\sigma_x = \lambda(\nabla \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.20ก)$$

$$\sigma_y = \lambda(\nabla \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.20ข)$$

และ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2.20ค)$$

โดย μ แทนความหนืดพลศาสตร์ (Dynamic Viscosity) หรือบางครั้งถูกเรียกว่าค่าความหนืดที่หนึ่ง (First Viscosity) และ λ คือค่าความหนืดที่สอง (Second Viscosity) ซึ่งสโตกส์ได้ตั้งสมมุติฐาน (Stokes's Hypothesis) ไว้ว่า

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu \quad (2.21)$$

และพบว่าสมมุติฐานดังกล่าวนี้ใช้ได้ดีหากของไหลนั้นเป็นก๊าซ แต่หากของไหลนั้นเป็นของเหลว ซึ่งโดยมากการไหลสำหรับปัญหาต่างๆ ไปนั้นจะไม่เกิดการอัดตัว กล่าวคือ ค่าความหนาแน่น ρ จะคงที่ สมการอนุรักษ์มวล (2.5) จึงลดรูปลงเป็น $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ หรือ $\text{div } \vec{v} = 0$ ทำให้ค่าความหนืดที่สอง λ นี้ไม่ได้ถูกนำไปใช้ในการคำนวณและความเค้นตั้งฉากในสมการ (2.20 ก-ข) จึงมีค่าเป็น 2 เท่าของค่าความหนืดพลศาสตร์คูณกับค่าการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว

เมื่อแทนค่าความเค้นต่างๆ ที่อยู่ในรูปของความเร็วจากสมการ (2.20 ก-ค) ลงในสมการ (2.19 ก-ข) จะก่อให้เกิดสมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้ดังนี้

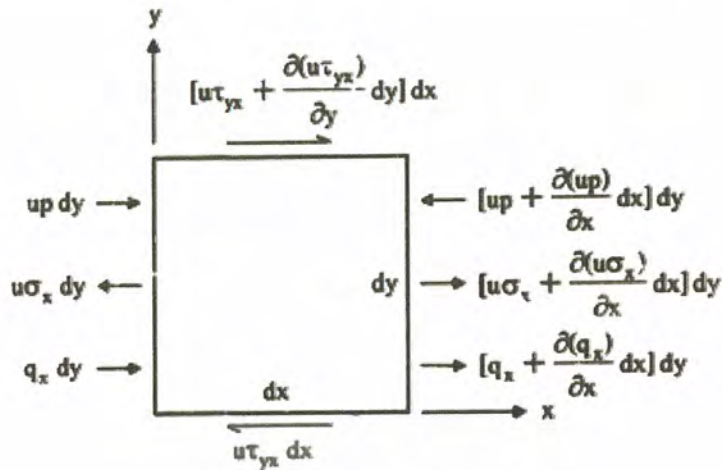
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \rho f_x \quad (2.22 \text{ ก})$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho f_y \quad (2.22 \text{ ข})$$

สมการ(2.22 ก-ข) นี้ แสดงถึงความซับซ้อนของสมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งพจน์ต่าง ๆ นั้น อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ของตัวไม่รู้ค่า ยิ่งไปกว่านั้น พจน์ที่สองและสามทางด้านซ้ายมือของสมการทั้งสองนี้ต่างเป็นพจน์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งจะก่อให้เกิดความซับซ้อนต่อเนื่องในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเช่นนี้ ไม่ว่าจะด้วยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบใดก็ตาม

2.3.3 สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน

การไหลหลายชนิด เช่น การไหลของของเหลวร้อนในหม้อน้ำ หรือการไหลของอากาศร้อนในห้องเผาไหม้ ความเร็วของการไหลและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปในของไหลนั้นต่างขึ้นอยู่กับกันและกัน ดังนั้นความจริงชนิดที่สามของของไหลใดๆที่สามารถนำมาใช้เพื่อประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพิ่มเติมได้อีกนั่นคือ กฎที่ว่าพลังงานนั้นไม่สูญหายไป(Conservation of Energy) รูปที่ 2.3 แสดงมวลที่มีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วยซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับ การไหล



รูปที่ 2.3 แสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในทิศแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงานสามารถ ประดิษฐ์ขึ้นได้โดยใช้ กฎข้อที่หนึ่งของ เทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่มวลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆที่กระทำบนมวลนั้น

ตารางที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์ของพลังงานที่ไหลเข้าและไหลออก ปริมาตรควบคุมโดย A, B และ C

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวล	=	ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่มวล	+	อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆบนก้อนมวลนั้น
หรือ A	=	B	+	C

หากเริ่มต้นพิจารณาที่พจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนี้ แรงชนิดแรกคือ แรงจากน้ำหนักของก้อนมวลเองซึ่งเมื่อคูณกับความเร็วของการไหลในทิศทางนั้นจะก่อให้เกิดอัตราของงานคือ $\rho \vec{r} \cdot \vec{v} (dx dy)$ จากรูปที่ 2.3

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความดัน p ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x} dx \right) \right] dy = - \frac{\partial(up)}{\partial x} dx dy$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นตั้งฉาก σ_x ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial y} dx \right] dy - u\sigma_x dy = \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx dy$$

และอัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน dx ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right] dx - u\tau_{yx} dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial x} dx dy$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนมวลในทิศแกน y ก็สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้เช่นกัน ก่อให้เกิดอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ บนก้อนมวลนี้คือ

$$C = \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} \right) + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \right] dx dy + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dx dy \quad (2.24)$$

สำหรับพจน์ B ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้ความร้อนแก่ก้อนมวลนั้นประกอบด้วยสองส่วน ส่วนแรก คือ ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนมวล ยกตัวอย่างเช่น ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ผลิตขึ้นได้เองภายในก้อนมวลนั้นหากกำหนดให้ \bar{Q} แทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นเองต่อมวลหนึ่งหน่วย ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ที่เกิดขึ้นสำหรับก้อนมวลนี้คือ

$$\rho \bar{Q} (dx dy)$$

และจากรูปที่ 2.3 ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน x ผ่านขอบ dy ทั้งทางด้านซ้ายและด้านขวาของก้อนมวล คือ

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial(q_x)}{\partial x} dx \right) \right] dy = -\frac{\partial(q_x)}{\partial x} dx dy$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์สุทธิอื่นเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน y ผ่านขอบ dx ทั้งด้านล่างและด้านบนของก้อนมวล คือ

$$\left[q_y - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) \right] dx = - \frac{\partial (q_y)}{\partial y} dx dy$$

ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนก้อนมวลนี้ คือ

$$B = \left[\rho \bar{Q} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.25)$$

แต่จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's Law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y นั้นแปรผันขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (Temperature Gradient) ดังนี้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{และ} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.26)$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของการไหล ดังนั้น พจน์ B จึงกลายเป็น

$$B = \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.27)$$

ส่วนพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลอันประกอบด้วยพลังงานภายในซึ่งเกิดการเคลื่อนไหวของโมเลกุลภายในของไหลนั้นและพลังงานจลน์ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากของไหลนั้นเกิดการไหล หาก e แทนพลังงานภายในและ $V^2/2$ คือ พลังงานจลน์ที่ก้อนมวลนั้นไหลด้วยความเร็ว V ดังนั้น พลังงานรวม คือ $e + V^2/2$ ซึ่งมีหน่วยต่อหนึ่งหน่วยมวล เนื่องจากปริมาณมวลทั้งหมดของก้อนมวลนี้คือ $\rho dx dy$ ดังนั้น พจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลนี้คือ

$$A = \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy \quad (2.28)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการแทนพจน์ A ซึ่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจากสมการ (2.28) นี้และพจน์ B ซึ่งคือ ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลจากสมการ (2.27) รวมทั้งพจน์ C ซึ่งคือ อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ บนก้อนมวลนั้นจากสมการ(2.24) ลงในสมการ (2.23) แล้วหารตลอดด้วย dx dy ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์พลังงานดังนี้

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} + \frac{\partial (u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\sigma_y)}{\partial y} + \rho \bar{f} \cdot \bar{v} \quad (2.29)$$

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน(2.29)ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาได้นี้ อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ ซึ่งจำเป็นต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาจึงจะสามารถใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน(2.29)นี้กระทำบนทั้งพจน์ของพลังงานภายใน e และพจน์ของพลังงานจลน์ V²/2 ดังนั้น เพื่อให้เข้าใจความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการต่อไป จึงขอแสดงขั้นตอนการแปลงรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียวก่อน ดังต่อไปนี้

$$\rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x \quad (2.30ก)$$

$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho v f_y \quad (2.30ข)$$

นำทั้งสองสมการนี้มารวมกันและเนื่องจาก $u^2 + v^2 = V^2$ ดังนั้นจะได้

$$\rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + \rho (u f_x + v f_y) \quad (2.31)$$

นำสมการ (2.31) ที่ได้ไปลบออกจากสมการ (2.29) โดยใช้ $\rho \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho(u f_x + v f_y)$ จะได้

$$\rho \frac{D_e}{Dt} = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.32)$$

ซึ่งพจน์ทางด้านซ้ายมือประกอบด้วยค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ที่กระทำบนพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียว พจน์หลายพจน์ทางด้านขวาของสมการ(2.14)นี้ยังมีความซับซ้อนน้อยกว่าสมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน(2.29)ซึ่งพจน์เชิงอนุพันธ์ประกอบด้วยค่าความเร็วและความเค้นคูณกันอยู่ภายใน รวมทั้งพจน์น้ำหนักของก้อนมวลรวมอยู่ด้วย สมการ(2.32)นี้ยังสามารถเขียนให้สั้นลงได้อีกเนื่องจากในความเป็นจริง τ_{xy} นั้นจำเป็นต้องเท่ากับ τ_{yx} เพราะไม่เช่นนั้นแล้วก้อนมวลเล็กๆ ในรูปที่ 2.3 นี้จะเกิดการหมุนรอบตัวเองหากขนาดของก้อนมวล dx และ dy นี้เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้น สมการ(2.32) จึงกลายเป็น

$$\rho \frac{D_e}{Dt} = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

จากนั้นแทนค่าความเค้นต่างๆ ในสมการ(2.33) นี้ในรูปแบบของความเร็วโดยใช้สมการ (2.20 ก-ค) จะได้

$$\rho \frac{D_e}{Dt} = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.34)$$

พจน์ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของพลังงานภายใน สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์ธรรมดาได้ โดยเริ่มจากการใช้ค่าจำกัดความของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ในการประยุกต์เข้ากับค่าพลังงานภายในแล้วคูณด้วยค่าความหนาแน่น ρ จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho \frac{D_e}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (2.35)$$

แต่จาก
$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ดังนั้น
$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - e \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.36)$$

และจากความสัมพันธ์ของการประยุกต์ไดเวอร์เจนซ์(Divergence)ของผลคูณของปริมาณสเกลาร์ (S และเวกเตอร์)

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{v}) = e \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \cdot \vec{\nabla} e$$

ดังนั้น
$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} e = \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{v}) - e \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \quad (2.37)$$

แทนสมการ (2.36) และ (2.37) ลงในสมการ(2.35) แล้วจัดพจน์ จะได้

$$\rho \frac{D_e}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{v}) \quad (2.38)$$

แทนสมการ (2.38) นี้ลงทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.34) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{v}) = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์พลังงานที่เขียนให้อยู่ในรูปของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียวแต่เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานทั้งหมดภายในก้อนมวลนั้น ประกอบด้วยพลังงานภายใน e และพลังงานจลน์ $V^2/2$ ดังนั้น พจน์เชิงอนุพันธ์สัมบูรณ์ทางด้านซ้ายมือของสมการ(2.29)สามารถเขียนรูปแบบของพจน์เชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้เช่นกัน โดยทำตามขั้นตอนจากเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการ(2.35)จนถึงสมการ (2.38) ด้วยการเปลี่ยนพจน์พลังงานภายใน e ไปเป็นพจน์พลังงานรวม $e + V^2/2$ จะได้

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \bar{v} \right] \quad (2.40)$$

แทนสมการ (2.40) ลงในสมการ(2.29) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \bar{v} \right] &= \rho \bar{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &\quad - \frac{\partial (u p)}{\partial x} - \frac{\partial (v p)}{\partial y} + \frac{\partial (u \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (u \sigma_y)}{\partial y} + \rho \bar{f} \cdot \bar{v} \end{aligned} \quad (2.41)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์พลังงานที่เขียนในรูปของพลังงานรวม $e + V^2/2$ หากพิจารณาสมการนี้โดยละเอียดจะเห็นได้ว่าแต่ละพจน์นั้นมีความซับซ้อนเชิงคณิตศาสตร์ในตัวเอง พจน์ส่วนใหญ่เป็นพจน์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งจะเป็นผลต่อเนื่องต่อความซับซ้อนในการประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยเฉพาะหลายพจน์ทางด้านขวามือเป็นพจน์เชิงอนุพันธ์ของผลคูณระหว่างความเร็วและความเค้นในทิศทางต่างๆกัน

2.4 ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์

สมการเชิงอนุพันธ์มวล โมเมนตัมและพลังงานซึ่งได้ประคิษฐ์ขึ้นจากความจริงที่ว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหาย การใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน และพลังงานนั้นไม่มีการสูญหายตามลำดับดังแสดงอย่างเป็นขั้นตอน โดยละเอียดในหัวข้อ 2.3-2.5 ก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์มวล

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (2.42)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

$$\text{แกน } x : \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho u \bar{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.43ก)$$

$$\text{แกน } y : \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho v \bar{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.43ข)$$

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \bar{v} \right] = \rho \bar{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial(u\dot{p})}{\partial x} - \frac{\partial(v\dot{p})}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(u\sigma_y)}{\partial y} + \rho \bar{f} \cdot \bar{v} \quad (2.44)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งสี่สมการนี้ต่างอยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์ (Conservation Form) กล่าวคือ การจับตาพื้นที่ที่เปลี่ยนแปลงขนาด dx และ dy ซึ่งตรงแน่นอนอยู่กับที่ไม่ไหลไปกับการไหลแล้ว เผาผล ปริมาณฟลักซ์ที่ผ่านเข้าออกพื้นที่ที่เปลี่ยนแปลงนี้ หากพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งสี่สมการนี้โดยละเอียด จะพบว่าทางด้านซ้ายของทุกสมการมีพจน์ที่เกี่ยวข้องกับไดเวอร์เจนซ์ของปริมาณฟลักซ์ กล่าวคือ $\bar{\nabla} \cdot (\text{ปริมาณฟลักซ์})$ อยู่เสมอ ดังนี้

สมการ (2.42) :	$\rho \bar{v}$	แทนปริมาณฟลักซ์ของมวล
สมการ (2.43ก) :	$\rho u \bar{v}$	แทนปริมาณฟลักซ์ของ โมเมนตัมในทิศแกน x
สมการ (2.43ข) :	$\rho v \bar{v}$	แทนปริมาณฟลักซ์ของ โมเมนตัมในทิศแกน y
สมการ (2.44) :	$\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \bar{v}$	แทนปริมาณฟลักซ์ของพลังงานรวม

ยิ่งไปกว่านั้น หากพิจารณาสมการทั้งสี่นี้โดยละเอียดมากยิ่งขึ้น จะพบว่าทั้งสี่สมการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบฟอร์มเดียวกัน กล่าวคือ

$$\frac{\partial\{U\}}{\partial t} + \frac{\partial\{E\}}{\partial x} + \frac{\partial\{F\}}{\partial y} = \{H\} \quad (2.45)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดย $\{U\}$, $\{E\}$, $\{F\}$ และ $\{H\}$ เป็นเวกเตอร์ ซึ่งประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \sigma_x \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) u + pu - k \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - u \sigma_x - v \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \sigma_y \\ \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) v + pv - k \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - u \tau_{yx} - v \sigma_y \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho (uf_x + vf_y) + \rho \bar{Q} \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ข้อที่ดีของการเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งสี่ในรูปแบบฟอร์มเดียวกัน ดังแสดงในสมการ(2.45) ก็เพราะว่า ในกระบวนการประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใดๆ เข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชุดนี้ สามารถมองสมการทั้งสี่เป็นสมการที่มีลักษณะเหมือนกันเพียงสมการเดียว นั่นคือ

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = H \quad (2.50)$$

จากนั้นจึงทำการประดิษฐ์สมการที่ต่อเนื่องอันเป็นผลจากการประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้น โดยไม่ต้องกังวลว่าสมการนั้นจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์มวล โมเมนตัม หรือพลังงาน สมการต่อเนื่องที่ประดิษฐ์ขึ้นจะสามารถใช้ได้กับสมการอนุพันธ์ย่อยใดๆ ในที่สมการนี้ ทำให้กระบวนการประดิษฐ์สมการต่างๆ นั้นมีความยุ่งยากลดลงเพิ่มความมั่นใจในความถูกต้องและที่สำคัญที่สุด จะมีผลต่อเนื่องทำให้การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันนั้นสะดวกมากยิ่งขึ้น

อย่างไรก็ตามไม่ว่าระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งประกอบด้วยทั้ง 4 สมการอนุพันธ์มวล การอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศแกน x และแกน y และการอนุรักษ์พลังงาน จะเขียนให้อยู่ในรูปแบบใดก็ตาม สมการทั้งสี่นี้บ่งบอกถึงความยากเป็นอย่างยิ่งที่จะแก้ด้วยการวิเคราะห์โดยวิธีทาคณิตศาสตร์ แต่เพียงอย่างเดียวเพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง ถึงแม้กระทั่งทุกวันนี้ก็ยังไม่พบว่าสามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับปัญหาการไหล โดยทั่วไปที่ครอบคลุมด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งสี่นี้ได้ ทั้งนี้ด้วยเหตุผลของความยากลำบากหลักๆ 2 ประการ ประการแรกคือ การเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย(Coupled Partial Differential Equations)ซึ่งผลลัพธ์ที่หาได้ เช่น u , v , p และ T ต้องสอดคล้องกับทั้ง 4 สมการ โดยพร้อมเพรียงกัน ความยากประการที่สองคือ สมการเหล่านี้อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งยากที่จะหาผลเฉลยแม่นยำตรงถึงแม้ว่าเงื่อนไขขอบเขต และลักษณะรูปร่างของปัญหาจะง่ายเพียงไรก็ตาม สาเหตุดังกล่าวนี้เองทำให้การแก้ปัญหามหาของไหลด้วยพลศาสตร์การคำนวณ ได้เข้ามามีบทบาทเป็นอย่างมากในปัจจุบัน เพราะหากสามารถแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนี้ได้แล้ว จะพบความหลากหลายของผลลัพธ์ซึ่งแสดงถึงลักษณะของการไหลที่จะนำไปสู่ความเข้าใจในปัญหานั้นได้เป็นอย่างดี รวมทั้งจะเกิดความเข้าใจแก่ผู้ทำการคำนวณว่า ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งสี่นี้ในบางครั้งสามารถก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการไหล ที่มีความหลากหลายซับซ้อนได้อย่างถูกต้อง

ดังที่ได้อธิบายผ่านมาแล้วว่า สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม(2.22 ก-ข)ถูกเรียกว่าเป็นสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equations)แต่ในการคำนวณพลศาสตร์ของไหลในปัจจุบัน สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งระบบซึ่งประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์มวล โมเมนตัม และพลังงานได้ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถูกเรียกกันจนติดปากโดยทั่วไปว่าเป็นระบบสมการ นาเวียร์-สโตกส์ ทั้งนี้ก็เนื่องจากการแก้ปัญหานั้นจำเป็นต้องแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งระบบ ซึ่งน่าจะเป็นการง่ายและเข้าใจได้อย่างรวดเร็วหากใช้คำว่าเป็นการแก้ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ แทนที่จะต้องอ้างถึงสมการเชิงอนุพันธ์มวลและพลังงานเพิ่มเติม

2.5 การวัดอัตราการไหลภายในท่อ

เราสามารถวัดอัตราการไหลภายในท่อได้จากการประยุกต์สมการพลังงานของ Leonhard-Euler ดังนี้

$$PdA - \left[P \frac{\partial P}{\partial S} dS \right] dA - \lambda dAdS \left[\frac{dz}{dS} \right] = \rho dAdS \left[V \frac{\partial V}{\partial S} \right]$$

$$dz + \frac{dP}{\lambda} + \frac{VdV}{g} = 0 \quad (2.51)$$

เมื่ออินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการของ Leonhard Euler จะได้เป็นสมการของ Bernoulli ดังนี้

$$\int dz + \int \frac{dP}{\lambda} + \int \frac{VdV}{g} = 0$$

$$z + \frac{P}{\lambda} + \frac{V^2}{2g} = C \quad (2.52)$$

สมการที่ 2.52 คือสมการพลังงานของ Bernoulli ใช้สำหรับเงื่อนไขในการไหลของของไหล ดังนี้

- 1) การไหลคงที่ตามเวลา (Steady Flow) และเป็นการไหลอย่างต่อเนื่อง
- 2) การไหลเป็นไปตามเส้นแนวการไหล
- 3) ความเร็วกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดหน้าตัดการไหล และมีค่าเท่ากับความเร็วเฉลี่ย

2.6 การวัดสภาพการไหลด้วยค่าเรย์โนลด์

ค่าเรย์โนลด์ (Reynold Number, N_r or R_c) หมายถึง อัตราส่วนของแรงเฉื่อย (Inertia Force) ต่อแรงเนื่องจากความหนืดของของไหล เป็นตัวเลขที่ไม่มีหน่วย ค่าเรย์โนลด์ เป็นตัวสำคัญในการที่จะบอกถึงลักษณะการไหลของของไหลว่าเป็นแบบใดคือการไหลแบบราบเรียบหรือไหลแบบเอกสารถือเป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปั่นป่วน และเป็นตัวสำคัญในการหาแฟลคเตอร์ของความเสียหาย กล่าวคือ ถ้า N_R น้อยกว่า 2000 การไหลของของไหลเป็นแบบราบเรียบ ถ้า N_R มากกว่า 4000 การไหลของของไหลเป็นแบบปั่นป่วน ซึ่งสามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$N_R = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

โดยที่ V คือความเร็วของการไหลในท่อ

D คือเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ

ν คือความหนืดเปรียบเทียบ

μ คือความหนืดพลวัต

ρ คือความหนาแน่นของของไหล

ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ สามารถจำแนกชนิดของการไหลได้ 3 ชนิด ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.2 ชนิดของการไหลในท่อ

ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์	ชนิดของการไหล
$N_R \leq 2000$	การไหลแบบราบเรียบ
$2000 \leq N_R \leq 4000$	การไหลแบบเปลี่ยนแปลง
$N_R \geq 4000$	การไหลแบบปั่นป่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

กลศาสตร์วัสดุ

3.1 ความเค้น

ความเค้น(Stress) คือแรงกระทำในเนื้อวัสดุต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ที่ตั้งฉากหรือขนานกับแรงนั้น มีหน่วยเป็น kN/m^2 หรือ kPa

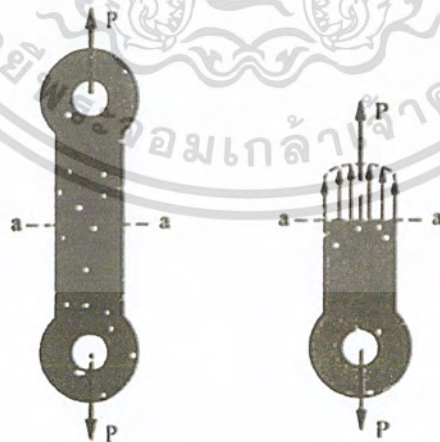
3.1.1 ความเค้นตั้งฉาก (σ)

กำหนดชิ้นส่วนรับสองแรง P (แรงดึง) ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (ก) ความเค้นตั้งฉากที่รับภาระในแนวแกนแบ่งออกได้เป็น

- 1) ความเค้นกระจายอย่างไม่สม่ำเสมอขนาดของแรงลัพธ์ของแรงภายในกระทำตั้งฉากกับส่วนตัด $a-a$ นั้นเท่ากับขนาดของแรงภายนอก P ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (ข) ดังนั้นภายใต้สมมูลของแรงของส่วนตัดในชิ้นส่วนรูปที่ 3.1 (ข) จะได้ว่า

$$P = \int dF = \int_A \sigma dA \quad (3.1)$$

โดยที่ σ คือความเค้นกระจายอย่างไม่สม่ำเสมอบนพื้นที่หน้าตัด A



รูปที่ 3.1 แสดงความเค้นตั้งฉาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 2) ความเค้นกระจายอย่างสม่ำเสมอในกรณีที่มีความเค้นกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดพื้นที่ A จากสมการที่ 3.1 จะได้

$$P = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3.2)$$

โดยที่ σ คือความเค้นตั้งฉากเฉลี่ย P คือแรงตั้งฉาก และ A คือพื้นที่หน้าตัดตั้งฉากกับแรง กล่าวคือ ความเค้นตั้งฉากเฉลี่ยก็คือแรงกระทำต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่หน้าตัดที่ตั้งฉากกับแรงนั้น

3.1.2 ความเค้นเฉือน (τ)

พิจารณาเช่นเดียวกับสมการที่ (1.1) แต่ต่างกันตรงที่ว่าแรงกระทำขนานกับพื้นที่หน้าตัด ใช้ต้านกับแรง เมื่อกำหนดให้ความเค้นเฉือนกระจายอย่างสม่ำเสมอบนพื้นที่หน้าตัดเฉือน จะได้ว่า

$$\tau = \frac{V}{A_s} \quad (3.3)$$

โดยที่ τ คือความเค้นเฉือนเฉลี่ย V คือแรงเฉือน และ A_s คือพื้นที่หน้าตัดเฉือนขนานกับแรง

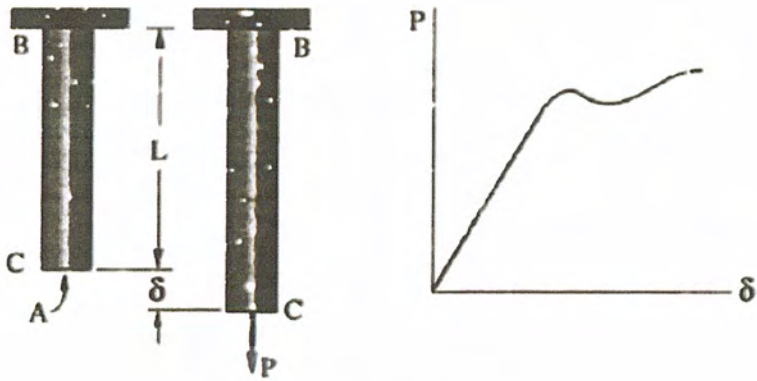
3.2 ความเครียด

3.2.1 ความเครียดตามยาว (ϵ)

พิจารณาแท่งโลหะ BC มีพื้นที่หน้าตัดสม่ำเสมอ A และความยาวเดิม L ออกแรงดึง P ที่ปลาย C ทำให้แท่งโลหะยืดออก δ ดังรูปที่ 3.2 ระยะยืดต่อหนึ่งหน่วยความยาวเรียกว่า ความเครียด ซึ่งคำนวณได้จากสมการ

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (3.4)$$

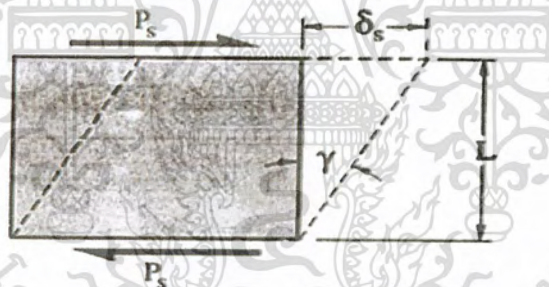
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2 แสดงแผนภาพการตีครูปของโลหะซึ่งพลอตระหว่างแรงดึง (P) กับระยะยืดตัว (δ)

3.2.2 ความเครียดเฉือน

ความเครียดเฉือน (shear strain, γ) คือการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมระหว่างผิวตั้งฉากกันทั้งสองของชิ้นส่วนย่อย



รูปที่ 3.3 การผิดรูปโดยการเฉือน

ในรูปที่ 3.3 ชิ้นส่วนย่อยรับแรงเฉือนแล้วเปลี่ยนรูปร่างจากสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ทำให้ระยะเปลี่ยนแปลงในแนวเฉือน δ_s (บนผิวแนวระดับ) กำหนดความยาวในแนวตั้งคือ L พิจารณาความเครียดเฉือนเฉลี่ยในรูปที่ 3.2 โดยที่ $\tan \gamma = \delta_s / L$ ปกติ γ เป็นมุมขนาดเล็กมาก ดังนั้น $\tan \gamma = \gamma$ และความเครียดเฉือนคือ

$$\gamma = \frac{\delta_s}{L} \quad (3.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อาศัยกฎของสฎหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือน (τ) และความเครียดเฉือน (γ)

$$\tau = G\gamma \quad (3.6)$$

โดยที่ G คือ มอดุลัสของสภาพแข็งเกร่ง (Modulus of Rigidity)

ในที่นี้ $t = V/A_s$ (โดยที่ V เป็นแรงเฉือนกระทำบนพื้นที่เฉือน A_s) และ $\gamma = \delta_s / L$
 ดังนั้นระยะเปลี่ยนแปลงในแนวเฉือนคือ

$$\delta_s = \frac{VL}{A_s G} \quad (3.7)$$

3.3 กฎสภาพยืดหยุ่นของสฎ

ในช่วงขีดจำกัดของความเป็นสัดส่วน (Proportional Limit) พบว่าวัสดุยืดหยุ่น (Elastic-Materials) นั้นความเค้นตึง (σ) และความเครียด (ϵ) มีความสัมพันธ์เชิงเส้น นั่นคือ

$$\sigma \propto \epsilon \quad \text{และ} \quad \frac{\sigma}{\epsilon} = \text{ค่าคงที่} \quad (3.8)$$

วัสดุใดๆก็ตามที่มีสภาพยืดหยุ่นได้นั้น เมื่อได้รับการกระทำหรือแรงกระทำจะทำให้มีการผิดรูป (ยืดหรือหด) ตามแรงนั้นและจะสามารถคืนรูปเดิมอย่างสมบูรณ์ได้เมื่อนำแรงนั้นออกโดยจะไม่มี การเสีรูปอย่างถาวร ปกติมักพบในโลหะเจือผสมเหล็ก (Ferrous Alloys) เป็นส่วนใหญ่

3.4 มอดุลัสของสภาพยืดหยุ่นและมอดุลัสของยัง

ค่าคงที่ตามกฎของสฎนั้นก็คือมอดุลัสของสภาพยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity, E) หรือ มอดุลัสของยัง (Young's Modulus, Y) ซึ่งก็คืออัตราส่วนระหว่างความเค้น ต่อ ความเครียด

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (3.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทน σ ด้วย P/A และ ϵ ด้วย δ/L จะได้ระยะยืดตัวของวัตถุ

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E} \quad (3.10)$$

ถ้าทำการทดลองวัดแรงและระยะยืดตัวของวัตถุที่มีลักษณะเป็นเส้นค้ำมอดูลัส (E หรือ Y) สามารถคำนวณหาได้จาก

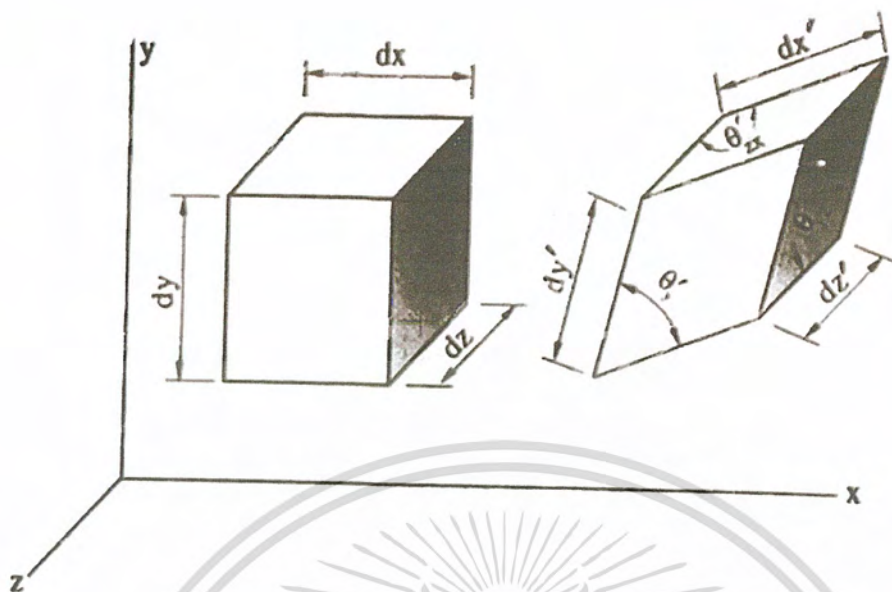
$$E = Y \frac{P/A}{\delta/L} \quad (3.11)$$

3.5 แผนภาพความเค้นและความเครียดภายใต้การดึงทดสอบ

ในการดึงทดสอบนั้น ก่อนดึงทดสอบต้องเตรียมชิ้นทดสอบตามมาตรฐานของ AISI (American Iron and Steel Institute) ลักษณะของชิ้นทดสอบจะเตรียมดังรูป 1.18 จากนั้นจะติดตั้งชิ้นทดสอบเข้ากับเครื่องทดสอบและจะอ่านระยะยืดตัวจากเอ็กซ์เทนโซมิเตอร์ (Extensometer) นำผลที่ได้มาเขียนแผนภาพความเค้นและความเครียด ดังแสดงในรูปที่ 1.19

3.6 ความเครียดที่จุดใดๆ ในวัตถุภายใต้แรงกระทำ

พิจารณาปริมาตรลูกบาศก์เล็กๆ ที่ล้อมรอบจุดที่สนใจความเครียด กำหนดเป็นสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ย่อยในรูปที่ 3.4 (ก) ซึ่งเดิมผิวด้านหน้าทั้งหกด้านจะตั้งฉากกับแกนอ้างอิง x, y และ z เมื่อสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ย่อยถูกแรงกระทำให้เสียรูปอย่างสม่ำเสมอ โดยสมมติให้ระนาบที่ขนานกันยังคงขนานกันต่อไป เส้นตรงยังคงเป็นเส้นตรงเดียวกันเสมอ ดังรูปที่ 3.4 เดิมขนาดของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ย่อยเป็น dx, dy และ dz สำหรับสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ย่อยที่ผิดรูปนั้นมีขนาดเป็น dx', dy' และ dz' การบิดรูปเสียของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์นั้นผิวแต่ละด้านทำมุมกันเป็น $\theta'_{xy}, \theta'_{yz}, \theta'_{zx}$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.4 ความเครียดที่จุดใดจุดหนึ่ง

จากระบบพิกัดฉาก วิเคราะห์ความเครียดตามยาว (ϵ) และความเครียดเฉือน (γ) พบว่า

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{d\delta_x}{dx}, \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{d\delta_y}{dy}, \gamma_{yz} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{d\delta_z}{dz}, \gamma_{zx} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

หรืออาจเขียนในรูปของสมการ

$$\left. \begin{aligned} dx' &= (1 + \epsilon_x)dx, \theta'_{xy} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \\ dy' &= (1 + \epsilon_y)dy, \theta'_{yz} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \\ dz' &= (1 + \epsilon_z)dz, \theta'_{zx} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

องค์ประกอบของความเครียดตามยาว ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) ถ้ากำหนดความเครียดตามทิศ n ใดๆ พบว่า

$$\varepsilon_n = \frac{dn' - dn}{dn} = \frac{d\delta_n}{dn}$$

หรือ $dn' = (1 + \varepsilon_n)dn$ (3.14)

ส่วนองค์ประกอบของความเครียดเฉือนพิจารณาบนแกน 2 แกนที่ตั้งฉากกัน เช่น กำหนดแกน n และ t บนสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ย่อยเดิมก่อนผิดรูป พบว่า

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \theta'_m$$

หรือ $\theta'_m = \frac{\pi}{2} - \lambda_m$ (3.15)

3.7 อัตราส่วนของปัวส์ซอง



รูปที่ 3.5 นิยามของอัตราส่วนปัวส์ซอง

3.8 ความเครียดเฉือนในเพลภายใต้ภาระบิด

เนื่องจากอาศัยข้อสมมติฐานสำหรับการผิดรูปภายใต้ภาระบิดของเพลกลมตันพิจารณาเพลกลมตันยาว L ในรูปที่ 3.5 พิจารณาพื้นที่ของชิ้นส่วนย่อยบนผิวเพลลาที่ระยะ ρ ใดๆ จากจุดศูนย์กลางของเพลาก่อนบิด (รูปที่ 3.5 (ข)) และหลังบิด (รูป (ค)) ดังนั้นความเครียดเฉือนที่ระยะ ρ ใดๆ จากแนวศูนย์กลางของเพลาคำนวณจาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\gamma = \frac{AA'}{L} = \frac{\rho\theta}{L} \quad (3.16)$$

ความเครียดเฉือนที่ผิวเพลาด้านนอกที่ $\rho = r$ (r คือรัศมีของเพลาด้าน) จะได้ความเครียดเฉือนสูงสุด (γ_{\max}) ดังรูปที่ 3.6

$$\gamma_{\max} = \frac{r\theta}{L} \quad (3.17)$$

สำหรับเพลาด้านนั้นความเครียดเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวเพลาด้านนอก ($\gamma_{\max} = r\theta/L$) และความเครียดเฉือนต่ำสุดเท่ากับศูนย์ เกิดขึ้นที่จุดศูนย์กลางของเพลาด้าน ($\rho = 0$)

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดเฉือนที่ตำแหน่งใดๆ ในเพลากับความเครียดเฉือนสูงสุดคือ

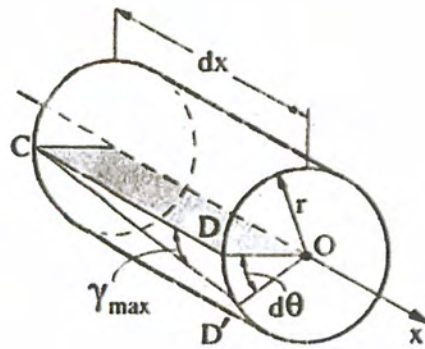
$$\gamma = \left(\frac{\rho}{r}\right)\gamma_{\max} \quad (3.18)$$

สำหรับเพลากลมกลวงที่มีรัศมีภายใน r_i และมีรัศมีภายนอก r_o พบว่า $\gamma = \gamma_{\min}$ ที่ $\rho = r_i$ และ $\gamma = \gamma_{\max}$ ที่ $\rho = r_o$ ดังนั้น

$$\gamma_{\min} = \left(\frac{r_i}{r_o}\right)\gamma_{\max} \quad (3.19)$$

จากสมการ (3.3) พบว่าความเครียดเฉือนในเพลาล้วนเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นกับระยะทางที่วัดจากแนวศูนย์กลางของเพลาด้าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.6 มุมบิด ($d\theta$) บนเพลยาว dx

สำหรับเพลกลมหน้าตัดไม่คงที่ (เพลทเพอร์) จำเป็นต้องอาศัยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ช่วยวิเคราะห์ปัญหา พิจารณาจากเพลกลมตันรูปที่ 3.6 พบว่า

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\max} dx &= r d\theta \\ \int \gamma dx &= \rho d\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

ทั้งนี้ และ $\gamma_{\max} = Tr/J$, $\gamma = T\rho/J$ สำหรับเพลกลมตัน (ดูปัญหาข้อ 3.12)

3.9 ความเค้นเฉือนในช่วงยึดหยุ่นภายใต้การบิด

3.9.1 ความสัมพันธ์ระหว่างทอร์ก (T) กับความเค้นเฉือน (τ)

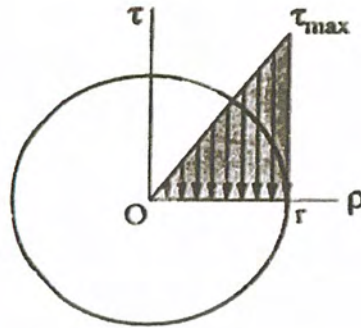
พิจารณารายละเอียดเป็นข้อๆ ดังนี้

1) พิจารณาเพลตันภายใต้การบิดที่ถูกกระทำด้วยทอร์ก T (ขนาดเท่ากับ T) โดยกำหนดความเค้นเฉือนในเพลต่ากว่าขีดจำกัดเป็นสัดส่วนและขีดจำกัดความยืดหยุ่น อาศัยกฎของฮุก $\tau = G\gamma$ (G = โมดูลัสเฉือนของวัสดุ) และแทนค่าลงในสมการ (3.3) จะได้ $G\gamma = (\rho/r)G\gamma_{\max}$ ดังนั้น

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max} \quad (3.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) สำหรับเพลากลวงซึ่งมีรัศมีภายใน r_i และรัศมีภายนอก r_o จากสมการ (3.6) พบว่า



รูปที่ 3.7 การกระจายของความเค้นในเพลากลมตัน

$\gamma_{\min} = (r_i / r_o) \gamma_{\max}$ ถ้านำ G คูณตลอดสมการนี้จะได้

$$\tau_{\min} = \left(\frac{r_i}{r_o} \right) \tau_{\max} \quad (3.22)$$

ในรูปที่ 3.7 แสดงการกระจายความเค้นเฉือนบนหน้าตัดเพลาดันรัศมี r ในรูป(ข)แสดงการกระจายความเค้นเฉือนบนหน้าตัดเพลากลวงรูปวงแหวนซึ่งมีรัศมีภายใน r_i และรัศมีภายนอก r_o

3) พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างทอร์ก(T)กับความเค้นเฉือน(τ)บนหน้าตัดของเพลากลมตันรัศมี r ดังรูปที่ 3.9 บนพื้นที่ dA ที่ระยะ ρ จากจุดศูนย์กลางเพลาก็จะมีแรงกระทำ $dF = \tau dA$ ดังนั้น ทอร์กที่กระทำต่อหน้าตัดของเพลาคือ

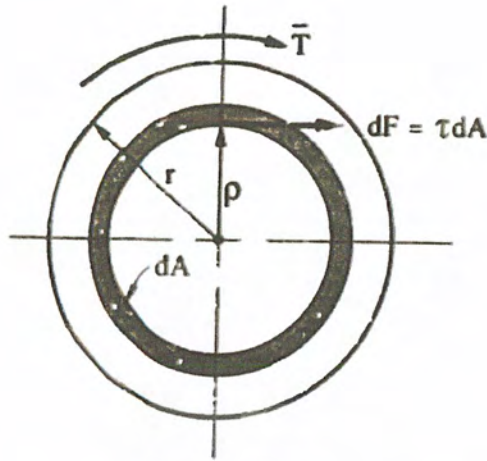
$$T = \int \rho dF = \int \rho \tau dA$$

แทนค่า τ จากสมการ (3.6) ลงในสมการข้างต้นนี้จะได้

$$T = \frac{\tau_{\max}}{r} \int \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{r} J$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{T}{J} = \frac{\tau_{\max}}{r} \quad (3.23)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.8 หน้าตัดเพลากลมตันภายใต้ภาระการบิดตัว

โดยที่ $J = \int \rho^2 dA$ ซึ่งเรียกว่าโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้วหน้าตัดเพลลา ถ้าใช้เพลลาตันรัศมี r พบว่า $J = \pi r^4 / 2 = \pi d^4 / 32$ (d คือเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลลาตัน) ถ้าใช้เพลลาทวงพบว่า $J = \pi(r_o^4 - r_i^4) / 2 = \pi(d_o^4 - d_i^4) / 32$ (d_i, d_o คือเส้นผ่านศูนย์กลางภายในและภายนอกของเพลลาทวง) ดังนั้น

4) ดังนั้นความเค้นเฉือนที่ระยะ ρ ใดๆ วัดจากแนวศูนย์กลางของเพลลาตันคือ

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (\text{เพลลากลมตัน})$$

$$\tau_{\max} = \frac{16T d_o}{\pi(d_o^4 - d_i^4)} \quad (\text{เพลลาทวง})$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad \text{หรือ} \quad \frac{T}{J} = \frac{\tau}{\rho} \quad (3.24)$$

ทอร์ก (T) มีหน่วยเป็น N.m รัศมี (r หรือ ρ) มีหน่วยเป็น m โมเมนต์ความเฉื่อย (J) มีหน่วยเป็น m^4 และความเค้น (τ) มีหน่วยเป็น N/m^2 หรือ Pa

3.9.2 ความสัมพันธ์ระหว่างทอร์ก (T) กับมุมบิด (θ)

1) พิจารณาการใช้งานของเพลากลมตันในช่วงยึดหยุ่นได้ ดังนั้นจากกฎของฮุก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\gamma_{\max} = \tau_{\max} / G \quad \text{แทนค่าจะได้}$$

$$\frac{r\theta}{L} = \frac{Tr}{JG}$$

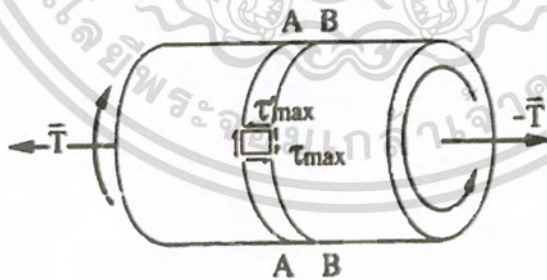
$$\text{ดังนั้น} \quad \theta = \frac{TL}{JG} \quad (3.25)$$

สมการ (3.10) พบว่า ในช่วงยึดหยุ่นได้นั้นมุมบิด (θ) เป็นสัดส่วนโดยตรงกับทอร์ก (T) ที่กระทำต่อเพลากลมตันซึ่งยาว L หน่วยของมุมบิดที่ได้เป็นเรเดียน

2) เพลากลมตันประกอบต่อกันรับภาระบิดระหว่างปลายเพลาททั้งสอง ดังรูปที่ 3.10
ดังนั้น

$$T = \frac{G_1 J_1 \theta_1}{L_1} = \frac{G_2 J_2 \theta_2}{L_2} \quad (3.26)$$

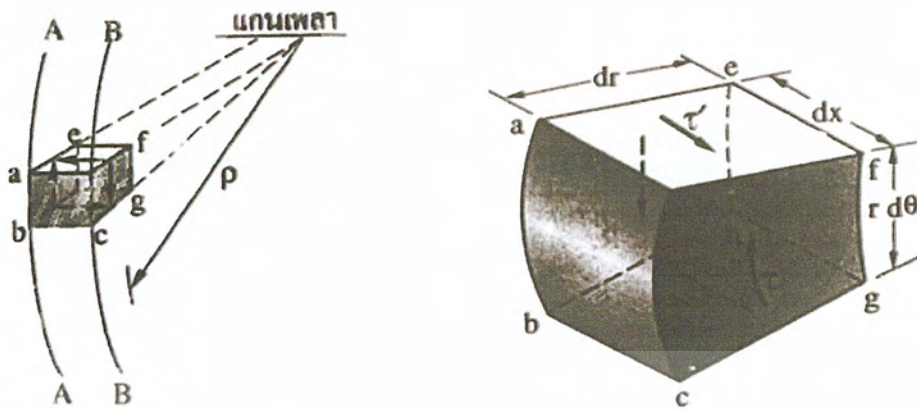
3.10 ความเค้นเฉือนตามแนวแกนของเพลากลมตัน



รูปที่ 3.9 ความเค้นเฉือนตามขวาง (τ) และตามแนวแกนของเพลากลมตันภายใต้ภาระบิด

ภายใต้ภาระบิดของเพลานั้นนอกจากจะเกิดความเค้นเฉือนตามขวาง (τ) แล้วยังพบว่ามี ความเค้นเฉือนตามแนวแกนของเพลากลมตัน (τ') ซึ่งมีขนาดเท่ากับความเค้นเฉือนตามขวาง แสดงดังรูป ที่ 3.18 เช่น ที่ผิวเพลาด้านนอก $\tau_{\max} = \tau'_{\max}$ และที่ระยะ ρ ใดๆ จากแนวแกนเพลากลมตัน $\tau = \tau'$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.10 ชิ้นส่วนย่อยระหว่างเส้นรอบวง A-A และ B-B

พิจารณาสมดุลของแรงเฉือนบนชิ้นส่วนย่อย $abcgfe$ ในรูปที่ 3.10 (ก) โดยมีรายละเอียดเพิ่มเติมในรูปที่ 3.10 (ข)

$$[\Sigma M_{bh} = 0] \quad (\tau \, dr \, r \, d\theta) \, dx - (\tau' \, dr \, dx) \, r \, d\theta = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\tau = \tau'$$

หรือ

$$\tau_{\max} = \tau'_{\max}$$

สรุปในที่นี้ คือ ภายใต้การบิดของเพลาทพบว่าการเค้นเฉือนทั้งแนวแกนและแนวขวางจะมีขนาดเท่ากันและมีการกระจายความเค้นอย่างสมมูลกัน

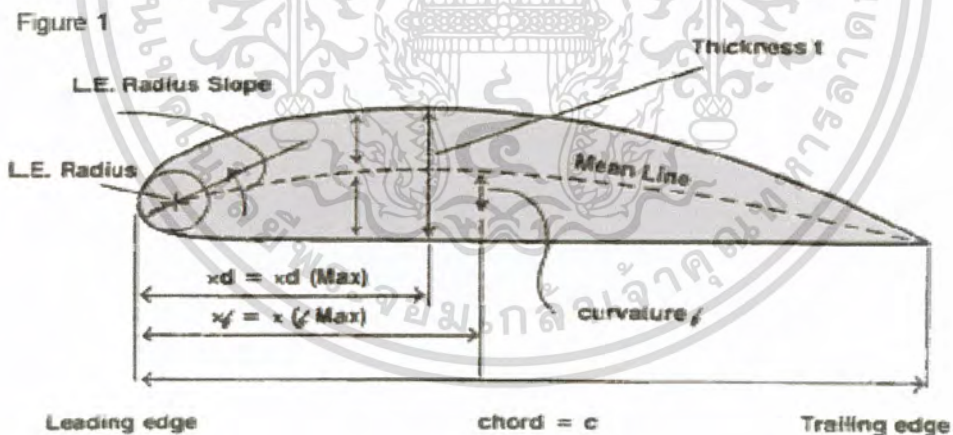
บทที่ 4

อากาศพลศาสตร์ของแอร์ฟอยล์

4.1 กล่าวนำ

วัตถุที่อยู่ในการไหลของอากาศทั้งก่อนนั้น จะมีแรงที่เกิดจากนี้ คือ แรงยกตัว และแรงต้าน การเคลื่อนที่แรงยกตัวจะอยู่ในแนวที่ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างวัตถุ กับของไหลมากระทำสองแรงด้วยกันแรงดังกล่าวสวนแรงต้านจะอยู่ในแนวนานกับทิศทางการเคลื่อนที่ ในการพิจารณาในทางอากาศพลศาสตร์นั้นความเร็วสัมพัทธ์ที่เกิดจากวัตถุเคลื่อนที่ผ่าน ของไหลที่อยู่หนึ่งกับที่กับความเร็วสัมพัทธ์ที่เกิดจากการที่ของไหล ไหลผ่านวัตถุที่อยู่หนึ่งกับที่นั้น จะไม่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงสามารถศึกษาพฤติกรรมของเครื่องบินที่บินอยู่ในอากาศได้จาก หุ่นจำลองของเครื่องบินที่ทดสอบในอุโมงค์ลม จึงมีความจำเป็นที่จะต้องศึกษาลักษณะของอากาศ ที่ไหลผ่านแผ่นปีก (Airfoil)

4.2 คุณสมบัติเรขาคณิตของแอร์ฟอยล์



รูปที่ 4.1 ชื่อสัญลักษณ์สำหรับแอร์ฟอยล์

ส่วนประกอบสำคัญทางเรขาคณิตของแอร์ฟอยล์ที่สำคัญได้แก่

- ขอบนำ (Leading Edge) คือเส้นตรงแรกบนวัตถุที่ปะทะกับของไหล
- ขอบตาม (Trailing Edge) คือเส้นตรงสุดท้ายบนวัตถุที่ปะทะกับของไหล
- Chord Line เป็นระยะห่างระหว่างขอบนำถึงขอบตาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- d. Camber Line เป็นเส้นกึ่งกลางระหว่างผิวบนและผิวล่างของแผ่นแอร์ฟอยล์
- e. Thickness เป็นระยะห่างระหว่างผิวบน และผิวล่างของแผ่นแอร์ฟอยล์ ในทิศทางตั้งฉากกับ Camber Line

ความสัมพันธ์ของ Thickness, Camber Line และ Chord Line ตามสมการ NACA อนุกรม เลขสี่หลักและเลขห้าหลัก(Four and Five Digit Series) เช่น NACA 2412 หมายความว่า

$$\tau = 12\%, \varepsilon = 2\%, \rho = 0.4$$

เขียนได้เป็น

$$T(X) = 10 \tau c [0.2969 \sqrt{x/c} - 0.216x/c - 0.3537 (x/c) + 0.2843 (x/c) + 0.1015 (x/c)^2]$$

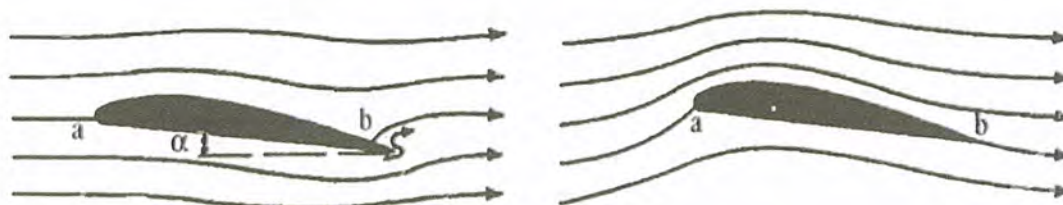
เมื่อ $T(x)$ เป็นค่า Thickness Ratio = (Maximum Thickness / Chord)

C เป็นความยาวของเส้นคอร์ด

X เป็นระยะทางของคอร์ดจากขอบนำ

4.3 แรงยกของแอร์ฟอยล์

เมื่อพิจารณาแอร์ฟอยล์ที่มีความยาวค่าหนึ่งลอยตัวอยู่ในอากาศที่ความเร็วเฉลี่ย จะเกิดแรงกระทำกับแอร์ฟอยล์ในทิศทางที่ตั้งฉากกับความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างของการไหลของอากาศกับแอร์ฟอยล์ แรงยกที่มองเห็นได้ชัดก็คือแรงที่ทำให้เครื่องบินสามารถลอยตัวอยู่ในอากาศได้ ทั้งนี้ก็เนื่องจากความเร็วของลมด้านบนของปีกนั้นสูงกว่าความเร็วเฉลี่ย ส่วนความเร็วของลมที่อยู่ด้านล่างปีกนั้นต่ำกว่าความเร็วเฉลี่ย ดังนั้นจึงทำให้ความดันด้านบนต่ำกว่าความดันด้านล่าง ตามทฤษฎีของเบอร์นูลลีดังนั้นจึงจะมีผลทำให้ที่กระทำกับปีกของเครื่องบินมีทิศทางหันหัวขึ้นสู่ ด้านบนทำให้เครื่องบินลอยตัวอยู่ในอากาศได้



รูปที่ 4.2 การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของความเร็วเพื่อการปรับสมดุลของความเร็วที่ปลายปีก เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

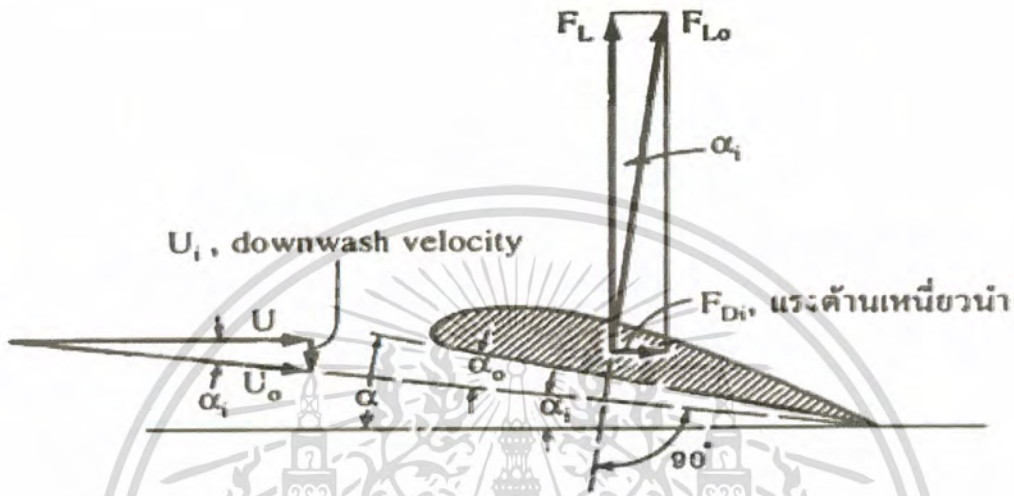
ขณะที่อากาศไหลผ่านแอร์ฟอยล์ จุดศูนย์กลางความเร็วทางอากาศพลศาสตร์ (Stagnation Point) บนแอร์ฟอยล์มีแนวโน้มที่จะเกิดที่ตำแหน่งที่ตรงกับจุดที่ทำมุม 0° และ 180° ของชายหน้า และชายหลังของแอร์ฟอยล์ ดังในรูปที่ 4.2 (ก) เพียงแต่ว่าตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของความเร็วที่อยู่บนแอร์ฟอยล์นั้นจะขึ้นอยู่กับมุมปะทะที่อ้างอิงกับแนวระนาบหรือขึ้นอยู่กับลักษณะการวางตัวที่เปรียบเทียบกับทิศทางการไหลของอากาศที่ไหลเข้าหาชายหน้าของแอร์ฟอยล์ดังรูปที่ 4.2(ก) สมมติให้มุมปะทะ α มีค่าเป็นบวกและมีจุดศูนย์กลางของความเร็วอยู่ที่จุด a และ b การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของความเร็วนี้เองที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของความเร็วและทิศทางของแรงลัพธ์

4.4 แรงต้านเหนี่ยวนำบนแอร์ฟอยล์ที่มีความยาวจำกัด

แรงต้านที่ผ่านมาแล้วนั้นเป็นแรงต้านของการไหลแบบสองมิติ แต่ถ้าหากเป็นกรณีทีแอร์ฟอยล์หรือครีบสำหรับแรงยกมีความยาวจำกัดและอยู่ในกระแสสามมิติแล้ว สภาพต่างๆ ที่ปลายของวัตถุเหล่านี้ก็จะมีผลกระทบต่อแรงยกและแรงต้าน เนื่องจากความดันที่ผิวด้านล่างของปีกนั้นจะสูงกว่าความดันทางผิวด้านบน ดังนั้นก็จะมีของไหลหนีออกมาจากปลายของปีก ของไหลดังกล่าวนี้มาจากส่วนกลางทางผิวด้านล่างของปีกที่ไหล ไปยังปลายทั้งสองแล้วจึงหนีขึ้นไปยังผิวด้านบนเข้าสู่ส่วนกลางของปีก การที่ของไหลเคลื่อนที่จากปลายปีกขึ้นสู่ผิวด้านบนนี้ จะทำให้เกิดกระแสลมหมุนเล็กๆ ขึ้นที่ปลายปีกลมหมุนนี้ จะถูกไล่ออกมาจากปลายทั้งสองของปีก ลมหมุนที่ปลายทั้งสองของปีกนี้จะต้องมีทิศทางตรงกันข้ามกันและมีขนาดที่เท่ากัน ถ้าคำนวณการไหลเวียนรอบเส้นทางที่ผ่านแอร์ฟอยล์รอบแกนของลมหมุนที่ปลายแอร์ฟอยล์และลมหมุนวงแรกเหล่านั้น (ดังรูปที่ 10.21) แล้วมันก็ยังคงเพิ่มขึ้นจนกระทั่งมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับในทางปฏิบัติมันยังคงมีการไหลเวียนเกิดขึ้น แต่ในที่สุดแล้วลมหมุนวงแรกและลมหมุนที่ปลายปีกก็จะจางหายไปกับความเสียดทานที่เนื่องมาจากความหนืด

เส้นทางไหลของลมภายในกรอบที่ประกอบด้วยปีกที่มีความยาวจำกัด กระแสลมหมุนที่ปลายปีกและกระแสลมหมุนวงแรก ซึ่งจะประกอบกันขึ้นเป็นวงของลมหมุนขนาดใหญ่ของไหลในวงแหวนขนาดใหญ่ดังกล่าวนี้จะมีทิศทางไหลจากด้านบนลงสู่ด้านล่าง โดยการเหนี่ยวนำของลมหมุนเล็กๆ เหล่านั้นถ้าหากสร้างปีกที่สามารถทำให้แรงยกด้านยาวของปีกกระจายเป็นรูปวงรีแล้วความเร็วเหนี่ยวนำ U_i (Downwash Velocity) ซึ่งมีทิศทางไหลกวาดจากด้านบนลงสู่ด้านล่างนี้ก็จะมีความคงที่ ความเร็วเหนี่ยวนำนี้จะไปเปลี่ยนทิศทางของการไหลที่อยู่ใกล้แอร์ฟอยล์จาก U เป็น U_0 ดังนั้นมุมปะทะประสิทธิผลก็จะเปลี่ยนจาก α ไปเป็น α_0 ขนาดของมุมประสิทธิผลที่ลดลงนี้มีขนาดเป็น $\alpha_i = \alpha - \alpha_0 = \tan^{-1}(U_i / U)$ ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 4.3 เราสามารถวิเคราะห์สภาพการไหล

บนปีกเครื่องบินจากแอร์ฟอยล์ที่มีขนาดยาวมากเมื่ออยู่ในของเหลวที่มีความเร็ว U_0 ที่สม่ำเสมอโดยทำมุมปะทะ α กับทิศทางการไหลสำหรับแรงยก F_{L0} นี้สามารถแตกออกไปได้ 2 แรงย่อยคือ แรงยกจริง F_L ซึ่งตั้งฉากกับ U และแรงย่อยที่ขนานกับ U ซึ่งเรียกว่าแรงต้านเหนี่ยวนำ F_{Di}



รูปที่ 4.3 แสดงการกระทำของแรงยกและแรงของแรงต้านเหนี่ยวนำ

และเพื่อให้มีรูปสมการเหมือนกับแรงต้านตัวอื่นๆก็จะให้แรงต้านเหนี่ยวนำนี้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานคือ

$$F_{Di} = C_{Di} \rho \frac{V^2}{2} A \quad (4.1)$$

สำหรับความแตกต่างระหว่างแรงต้านของกรณีที่เป็นกรไหลแบบ 2 และ 3 มิติ ก็คือจะต้องเอาแรงต้านจากความเสียดทานที่ผิว และแรงต้านจากความดันที่ได้กล่าวถึงตอนต้นนั้นมารวมเข้ากับแรงต้านจากโปรไฟล์ (Profile Drag) F_{D0} ซึ่งเป็นแรงต้านรวมของแรงต้านทั้งหมดที่กระทำกับโปรไฟล์ที่มีความยาวที่ยาวมากๆ นั่น ดังนั้นแรงต้านรวมบนแอร์ฟอยล์ที่มีความยาวจำกัดก็จะเป็นผลบวกของแรงต้านจากโปรไฟล์และแรงต้านเหนี่ยวนำหรือมีค่าเป็น

$$F_D = F_{D0} + F_{Di} \quad (4.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าหากมุม α_i นี้มีขนาดเล็กแล้ว

$$U_0 \cong U,$$

$$F_{L0} \cong F_L,$$

$$F_{Di} \cong \alpha_i F_L$$

จะเห็นได้ว่าแรงยกนั้นสามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปที่สะดวกต่อการใช้งานได้เป็น

$$F_L = C_L \rho \frac{V^2}{2} A \quad (4.3)$$

เมื่อ C_L = สัมประสิทธิ์ของแรงยกมีค่าเป็นเท่าไรนั้นขึ้นอยู่กับมุมปะทะและรูปร่างของแอร์ฟอยล์

A = พื้นที่จากภาพฉายของแอร์ฟอยล์หรือวัตถุที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ของแรงยก

การคำนวณหาแรงยกที่กระจายในลักษณะของรูปร่างนั้นซับซ้อนเกินกว่าที่จะนำมากล่าวไว้ในที่นี้ สำหรับความสัมพันธ์อย่างง่าย ๆ ของแรงยกนั้นคือ

$$\frac{U_i}{U} = \alpha_i \quad (\text{radian}) = \frac{C_L}{\pi(B^2 / A)} \quad (4.4)$$

เมื่อ B = ความยาวของแอร์ฟอยล์

A = พื้นที่ที่มองจากด้านบน (Plan Area)

อัตราส่วนของ B^2/A นี้มีชื่อเรียกว่า Aspect Ratio แต่ในบางครั้งจะแสดงค่าอยู่ในรูปของ B/c เมื่อ c เป็นความยาวเฉลี่ยของคอร์ด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (4.1), (4.2) และ (4.3) รวมทั้งสมการข้างบนก็จะได้ค่า C_{Di} เป็น

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi(B^2 / A)} \quad (4.5)$$

เมื่อหารสมการ (4.2) ด้วย $\rho V^2 A/2$ และแทนค่า C_{Di} ที่ได้ด้วยค่าจากสมการ (4.5) แล้วก็จะได้

$$C_D = C_{D0} + C_{Di} = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi(B^2 / A)} \quad (4.6)$$

จะเห็นได้ว่าค่า C_{Di} นี้ขึ้นอยู่กับค่า C_L ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ของแรงยก นั่นก็คือขึ้นอยู่กับมุมปะทะ α_0 และ Aspect Ratio, B/c ดังนั้นในกรณีที่แรงยกมีค่าเป็นศูนย์หรือค่า Aspect Ratio มีค่าเป็นอนันต์แล้วแรงต้านเหนี่ยวนำนี้ก็จะมีค่าเป็นศูนย์ สมการดังกล่าวนี้มีประโยชน์สำหรับใช้เปรียบเทียบข้อมูลจากการทดสอบแอร์ฟอยล์ที่มี Aspect Ratio ค่าอื่นๆ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

5.1 กล่าวนำ

ก่อนทำการวิเคราะห์ปัญหาของการไหลโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ความรู้พื้นฐานของระเบียบวิธีนี้จำเป็นต้องถูกวางรากฐานให้เกิดความเข้าใจก่อนนอกจากนั้นความรู้พื้นฐานของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Methods) บางระเบียบวิธีที่ต้องนำมาใช้ร่วมในกระบวนการแก้ปัญหานั้นจำเป็นต้องทำให้เกิดความเข้าใจก่อนด้วยเช่นกัน บทนี้จะอธิบายความรู้พื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถทำความเข้าใจได้ง่าย รวมทั้งจะแนะนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถศึกษาค้นคว้าได้จากเอกสารอ้างอิงจำนวนมาก เช่นเอกสารอ้างอิง (1-5) และในทำนองเดียวกันเอกสารอ้างอิงที่อธิบายรายละเอียดของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นก็มีความมากมายเช่นกัน ดังเช่นเอกสารอ้างอิง (6-10) เป็นต้น

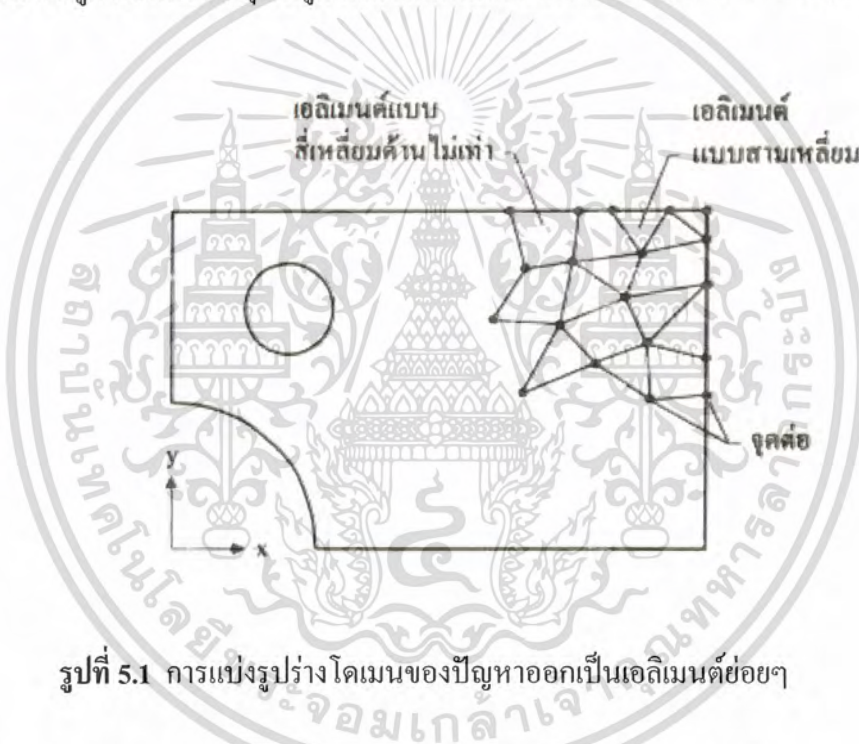
ความรู้พื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งจะนำเสนอโดยสรุปในบทนี้เริ่มตั้งแต่กระบวนการขั้นตอนในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้แก้ปัญหาโดยทั่วไป การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างง่ายจากความเข้าใจความหมายทางกายภาพ ของปัญหาโดยทั่วไปการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างง่ายจากความเข้าใจความหมายทางการภาพของปัญหานั้น เช่นปัญหาการไหลภายในท่อ เป็นต้น จากนั้นจึงเป็นการอธิบายฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Functions) ซึ่งจัดได้ว่าเป็นหัวใจที่สำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้วจึงเป็นการอธิบายระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาที่สนใจนั้น สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นจากเอลิเมนต์ย่อยๆ เหล่านี้จะนำมารวมกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการใหญ่ เปรียบเสมือนการประกอบเอลิเมนต์เข้าด้วยกันขึ้นเป็น โดเมนของปัญหาทั้งหมดก่อนประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ลงสู่ระบบสมการใหญ่แล้วจึงแก้ระบบสมการใหญ่ทั้งระบบก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ต้องการ

หัวข้อย่อยต่างๆ ในบทนี้ จะอธิบายความรู้ที่จำเป็นของระเบียบวิธีในขั้นตอนต่างๆ ดังกล่าวข้างต้น โดยเน้นถึงความเข้าใจในความหมายทางกายภาพซึ่งสอดคล้องกับสมการต่างๆ ที่นำเสนอการประยุกต์ระเบียบวิธีในขั้นตอนต่างๆ เหล่านี้จะอธิบายโดยละเอียดอีกครั้งนำรับการไหลในแต่ละกรณีในบทต่อไป

5.2 ขั้นตอนระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยทั่วไป

ในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนโดยปกติทั่วไปจะประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลัก ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นตอนแรกเป็นการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ยกตัวอย่างเช่นปัญหา 2 มิติที่มีพื้นที่ของโดเมนวางตัวในโคออร์ดิเนต X-Y ดังแสดงในรูป 3.1 เนื้อที่ภายในโดเมนนี้ซึ่งอาจเป็นพื้นที่ของแผ่นโลหะหรือพื้นที่ของการไหลก็ได้ จะถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งอาจประกอบด้วย เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม(Triangular Element)หรือเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมคางหมู(Quadrilateral Element)ก็ได้ เอลิเมนต์เหล่านี้ต่อเชื่อมกันที่จุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณตัวไม่รู้ค่า เช่นค่าของอุณหภูมิ ค่าความดันและค่าความเร็วของการไหล เป็นต้น



รูปที่ 5.1 การแบ่งรูปร่างโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

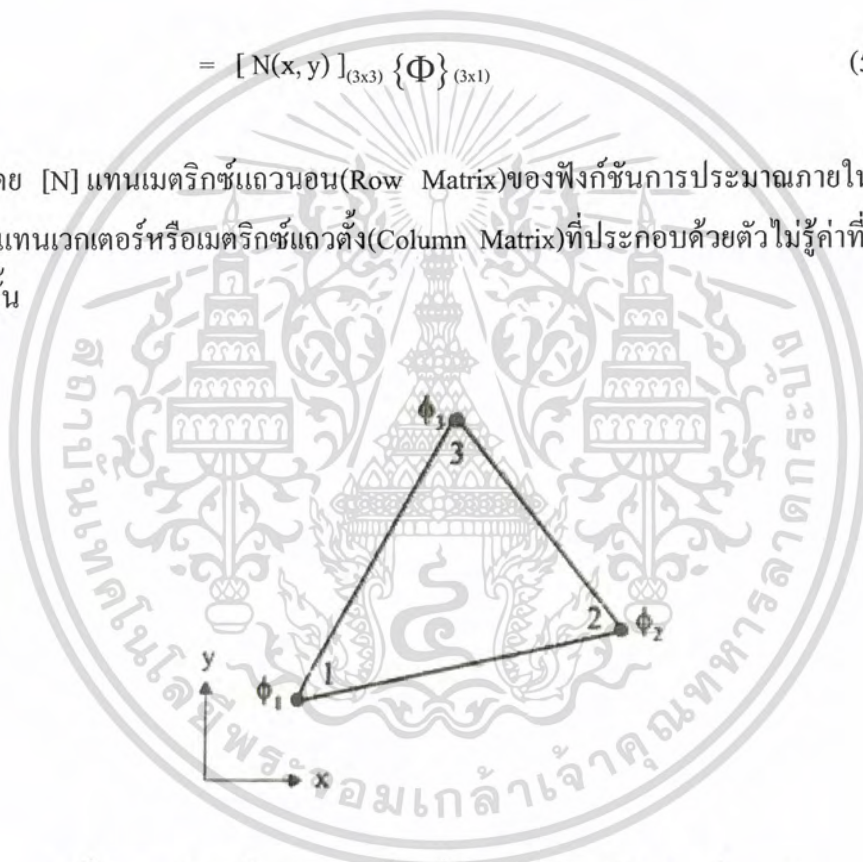
ขั้นตอนที่ 2 เนื่องจากบนพื้นที่โดเมนของปัญหานี้ผลลัพธ์จะมีการเปลี่ยนแปลงไป เช่นค่าความดันของการไหลจะเปลี่ยนแปลงจากบริเวณหนึ่งสู่อีกบริเวณหนึ่ง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องประมาณค่าการเปลี่ยนของผลลัพธ์นี้บนแต่ละเอลิเมนต์ ยกตัวอย่างเช่น หากพิจารณาเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม เอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่งในพื้นที่โดเมนนี้ ซึ่งประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในรูป 5.2 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า ϕ_1 , ϕ_2 และ ϕ_3 ตามลำดับซึ่งอาจเป็นค่าความดันของการไหล ดังนั้นจึงอาจสร้างสมการที่อธิบายลักษณะการกระจายของค่าความดันโดยประมาณบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนี้ได้ดังนี้

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \quad (5.1)$$

โดย $N_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ สมการ (3.1) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N(x, y)]_{(3 \times 3)} \{\Phi\}_{(3 \times 1)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

โดย $[N]$ แทนเมตริกซ์แถวอน (Row Matrix) ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\{\Phi\}$ แทนเวกเตอร์หรือเมตริกซ์แถวตั้ง (Column Matrix) ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น



รูปที่ 5.2 เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่ 3 จุดต่อ

ความเข้าใจความหมายทางกายภาพของสมการ(5.1)มีความสำคัญมาก เพราะหากสามารถสร้างสมการที่ ประมาณลักษณะการกระจายของผลลัพธ์ บนเอลิเมนต์นั้นได้ใกล้เคียงกับ ผลลัพธ์แท้จริงมากเพียงไรก็จะก่อให้เกิดค่าความคลาดเคลื่อน(Error)ที่น้อยลงเพียงนั้นซึ่งทำให้สามารถใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่มากขึ้นได้อันจะเป็นผลโดยตรงต่อการลดปริมาณหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ไปในการคำนวณ แต่สำหรับในทางปฏิบัตินั้น เนื่องจากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น จำเป็นต้องนำไปใช้ได้กับปัญหาโดยทั่วไปดังนั้นการที่ ลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณบน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอลิเมนต์นั้นจึงถูกจัดให้ อยู่ในรูปแบบของโพลิโนเมียล(Polynomials)ที่จะเป็นพื้นฐาน เช่นเชิงเส้น (Linear)อันดับหนึ่ง(First Order)หรือในเชิงเส้นโค้งอันดับสอง(Second Order)เป็นต้นหมายความว่า เมื่อเอลิเมนต์มีขนาดเล็กลงแล้วลักษณะการกระจายของผลลัพธ์ โดยรวมบนพื้นที่โดเมนนั้นจะดูเข้าสู่ผลลัพธ์ที่แท้จริง ของปัญหานั้นรายละเอียดของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ สำหรับเอลิเมนต์รูปแบบต่างๆกันที่ใช้ในปัญหาหนึ่งสองและสามมิติจะอธิบายในหัวข้อ3.4

ขั้นตอนที่3 เนื่องจากลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณบนเอลิเมนต์นั้นจะมีความคลาดเคลื่อนไปจากผลลัพธ์ที่แท้จริง ดังนั้นจึงต้องประยุกต์หลักการใดหลักการหนึ่งเพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์โดยประมาณที่มีความคลาดเคลื่อนที่น้อยที่สุด วิธีการที่นิยมใช้กันมากในปัจจุบันก็คือการใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง(Method of Weighted Residuals)ซึ่งรายละเอียดจะอธิบาย ในหัวข้อ 3.5 สาเหตุที่ระเบียบวิธีนี้เป็นที่นิยมใช้กันมากก็เพราะว่าสามารถประยุกต์เข้าได้โดยตรง กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ครอบคลุมปัญหาที่สนใจนั้นก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Equations) ที่สอดคล้องกันยกตัวอย่างเช่นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมในรูป 3.2 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

โดย $k_{ij}; i=1, 2, 3$, เป็นค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งอาจเป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติและขนาดของเอลิเมนต์นั้น สมการ (3.3) นี้สามารถเขียนโดยย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\Phi\}_e = \{F\}_e \quad (5.4)$$

โดยดรรชนีล่าง e แสดงถึงเมตริกซ์เหล่านี้เป็นเมตริกซ์ระดับเอลิเมนต์(Element)หากสมการเชิงอนุพันธ์ที่ครอบคลุมปัญหานั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาได้จะอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นตามไปด้วย

$$[K(\Phi)]_e \{\Phi\}_e = \{F\}_e \quad (5.5)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ k_{ij} ในสมการ (5.5) นี้จะขึ้นอยู่กับตัวไม่รู้ค่า ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเช่น ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน [10] ถูกนำมาประยุกต์เข้ากับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (5.5) นี้ ก่อให้เกิดสมการระดับเอลิเมนต์ที่แตกต่างออกไปอีกก่อนที่จะนำมาประกอบรวมกันเข้าในขั้นตอนที่4 ต่อไป

ขั้นตอนที่4 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น จากทุกๆ เอลิเมนต์จะถูกนำมาประกอบรวมกันเข้า ก่อให้เกิดระบบสมการ (System of Equation) ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นดังนี้

$$\sum(\text{elementequations}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\Phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (5.6)$$

โดยตัวห้อย sys บ่งถึงเมตริกซ์เหล่านี้เป็นเมตริกซ์ของระบบสมการรวมหากค่าสัมประสิทธิ์ k_{ij} ของเมตริกซ์ $[K]_e$ ในสมการ (3.4) เป็นค่าคงที่เมตริกซ์ $[K]_{\text{sys}}$ ที่เกิดขึ้นก็ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ต่างๆ ซึ่งล้วนเป็นค่าคงที่ด้วยแต่หากค่าสัมประสิทธิ์ของเมตริกซ์ $[K(\Phi)]_e$ ในสมการ (5.5) นั้นขึ้นอยู่กับตัวไม่รู้ค่าเมตริกซ์ $[K]_{\text{sys}}$ ที่เกิดขึ้นก็จะขึ้นอยู่กับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อในเวกเตอร์ $\{\Phi\}_{\text{sys}}$ ทำให้เกิดสมการไม่เชิงเส้นตามมาด้วยเช่นกัน

การนำสมการจากทุกเอลิเมนต์เข้ามาประกอบรวมกันนี้จำเป็นต้องกระทำอย่างมีหลักการให้สอดคล้องเหมือนกับการนำเอลิเมนต์ย่อยๆ มาต่อประกอบกันเข้า ก่อให้เกิดเป็นพื้นที่โดเมนของปัญหานั้นขึ้นมาได้เปรียบเสมือนการนำชิ้นต่อเล็กๆ ของภาพ(Jigsaw Puzzle)มาต่อกันเข้าอย่างถูกต้อง ชิ้นต่อเล็กๆ เหล่านี้ต่างมีสมการของตัวเอง สมการเหล่านี้ต้องนำมารวมกันอย่างถูกวิธีให้สอดคล้องกันดังเช่นที่ชิ้นต่อเล็กๆ นั้นถูกนำมาต่อกันอย่างถูกต้องลงตัวจึงกลายเป็นภาพรวมใหญ่ขึ้นมาได้ วิธีการรวมสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จะอธิบายโดยตัวอย่างในหัวข้อ 5.7

ขั้นตอนที่5 ดังที่กล่าวไว้ในข้างต้นว่าการแก้ปัญหาโดยสมบูรณ์นั้น ผลลัพธ์จะขึ้นอยู่กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายความจริงของปัญหา เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา และลักษณะรูปร่างของปัญหา ขั้นตอนที่1 และ 4 ที่ได้อธิบายมานี้ตอบสนองลักษณะรูปร่างของปัญหาส่วนขั้นตอนที่2 และ 3 นั้นตอบสนองสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ขั้นตอนที่5 นี้เองจะทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ซึ่งจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้นเงื่อนไขขอบเขตประยุกต์เข้าในระบบสมการรวม (5.7) แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมนี้เพื่อหาค่าต่างๆ ที่จุดต่อ สำหรับปัญหาทางปฏิบัติโดยเฉพาะปัญหาการไหลนั้น ระบบสมการรวม (5.6) นี้จะประกอบด้วยสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบ ไม่เชิงเส้นเป็นจำนวนมาก และเป็นส่วนที่ใช้เวลาในการคำนวณรวมทั้งปริมาณหน่วยความจำ เป็นจำนวนมากเช่นกัน ระเบียบวิธีการแก้ระบบสมการทั้งที่อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นจะ อธิบายในหัวข้อ 5.7

ขั้นตอนที่ 6 หลังจากแก้ระบบสมการรวมและทราบค่าที่จุดต่อต่างๆ แล้วค่าอื่นๆ ซึ่งเป็นผล ต่อเนื่องจากค่าที่จุดต่อจึงสามารถคำนวณได้ยกตัวอย่างเช่น ในการแก้ปัญหาของแข็ง ค่าที่คำนวณ ได้ที่จุดต่อคือค่าการเคลื่อนตัว(Displacements)ของการเสีรูปร่าง ซึ่งนำไปใช้ในการคำนวณหา ค่า ความเครียด(Strains)และความเค้น(Stresses)อันจะเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบต่อไป หรือในการ แก้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ผ่านยานอวกาศค่าที่คำนวณหาปริมาณ ความร้อน (Aerodynamic Heating) ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นในการออกแบบตัวยานเป็นต้น

จากขั้นตอนทั้งหมด 6 ขั้นตอนนี้ ขั้นตอนที่ 3 ซึ่งเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหานั้น อาจจัดได้ว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญสุดปัญหา ต่างชนิดกันไป เช่นปัญหาของแข็งและปัญหาของไหล จะมีสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แตกต่างกัน ไป ในขณะที่ปัญหาทั้ง 2 ชนิดนี้ต่างดำเนินขั้นตอนอื่นๆ ในทำนองเดียวกันเช่นการแบ่งพื้นที่ โดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ การเลือกรูปแบบของการประมาณภายในเอลิเมนต์ การรวมสมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์ย่อยขึ้นเป็นระบบสมการรวม การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต รวมไปถึงการแก้ ระบบสมการรวม เหตุผลดังกล่าวนี้เองทำให้การศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงพุ่งความสนใจ ส่วนใหญ่ไปยังในขั้นตอนที่ 3 ซึ่งเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยง่าย หัวข้อต่อไปนี้จะ อธิบายขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของกรไหลในท่อ ซึ่งกระบวนการขั้นตอน ประกอบด้วยคำอธิบายที่มีความหมายตายกายภาพซึ่งสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย ในขณะที่ แนวความคิดที่เกิดขึ้นสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานเพื่อการทำความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

บทที่ 6

การออกแบบชิ้นส่วนสื่อค่าขั้นพื้นฐาน

6.1 กล่าวนำ

จากการศึกษาค้นคว้าเรื่องพลศาสตร์การไหล พลศาสตร์เชิงสถิติ และอากาศพลศาสตร์ คณะผู้จัดทำพยายามจะเลือกชิ้นส่วนที่จะรับแรง เนื่องจากการไหลแล้วทำให้เกิดการเสียรูปโดยพิจารณาอยู่บนสมมติฐานที่ว่า เมื่อชิ้นส่วนถูกขวางทางอยู่ในสนามการไหลซึ่งในที่นี้คือ โลหะแล้ว ทำให้ชิ้นการไหลภายในท่อมีความเร็วแตกต่างกันมากเท่าไร ก็ยังจะทำให้เกิดความดันแตกต่างระหว่างชิ้นการไหลมากเท่านั้น เพราะในทางอากาศพลศาสตร์ความเร็วและความดันมีความสัมพันธ์กันแบบปฏิภาคตรงข้าม

6.2 การออกแบบชิ้นส่วนสื่อค่าขั้นพื้นฐานและปริมาตรการควบคุม

คณะผู้จัดทำพยายามที่จะประยุกต์อากาศพลศาสตร์ของปีกเครื่องบิน(Wing)ซึ่งในทางทฤษฎีและการใช้งานจริงแล้วปีกเครื่องบินแทรกตัวอยู่ในสนามการไหลเป็นกระแสอากาศอิสระเมื่อความดันใต้ปีกสูงกว่าความดันบนปีกก็จะทำให้เกิดแรงยกตัวและทำให้เครื่องบินสามารถเอาชนะน้ำหนักของตัวเครื่องและแรงต้านจากอากาศ แต่ในสิ่งที่คณะผู้จัดทำกำลังจะสร้างคือการนำเอาปีกขนาดเล็กมาแทรกตัวอยู่ในการไหลภายในท่อกลมซึ่งอาจจะมีความเร็วของการไหลได้สูงเหมือนกับการลอยตัวอยู่บนอากาศของปีกเครื่องบินจริงและสิ่งที่จะต้องพิจารณาเพิ่มขึ้นอีกคือลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว(Velocity Profile)การกระจายตัวของความดัน(Pressure Profile)อาจต่างไปจากคุณสมบัติของปีกเครื่องบินที่ได้รับการออกแบบจากองค์กรด้านการบินที่ได้รับการยอมรับ

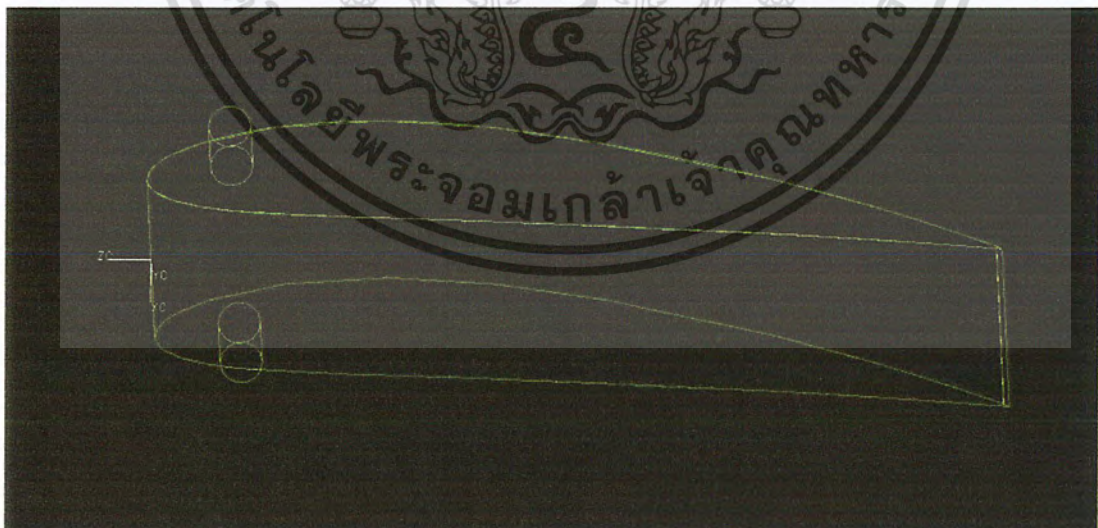
6.2.1 การออกแบบชิ้นส่วนรับแรงขั้นพื้นฐาน

ชิ้นส่วนขั้นพื้นฐานที่คณะผู้จัดทำได้ออกแบบ คือการเลือกใช้ภาคตัดสองมิติของปีก(Airfoil)ที่จะทำให้เกิดความดันแตกต่างมาก ๆ เมื่อการไหลที่มีความเร็วต่ำ ๆ เพราะจะส่งผลโดยตรงต่อการเกิดแรงยกตัวของปีกซึ่งเมื่อถูกยึดให้อยู่กับที่ด้วยเพลากลมแล้วแรงยกตัวจะกลายเป็นแรงบิดตัวของเพลากลมดังนั้นจึงนำไปสู่การเลือกใช้แอร์ฟอยล์ รุ่น NASA 4412ซึ่งเป็นแอร์ฟอยล์ที่ได้รับการคิดค้นออกแบบ และทดสอบคุณสมบัติต่าง ๆ จาก NASA Langley Research-Center ซึ่งเป็นแอร์ฟอยล์รุ่นที่สามารถรับแรงยกได้ดีที่ความเร็วต่ำ ๆ



รูปที่ 6.1 NASA 4412 Airfoil

และเมื่อพิจารณาถึงปริมาตรควบคุมที่กำหนดแล้ว ความกว้างของแอร์ฟอยล์น่าจะมีพื้นที่แทรกตัวอยู่ในการไหลมากที่สุด แต่ในความเป็นจริงแล้วต้องมีพื้นที่สำหรับการติดตั้งเพลากลมที่จะยึดระหว่างผนังท่อกับแอร์ฟอยล์ ข้อสรุปของการออกแบบคือการได้ความกว้างของแอร์ฟอยล์ขนาด 4 นิ้ว (10.16 เซนติเมตร) ขนาดความยาวของเส้นคอร์ด 7.87 นิ้ว (20 เซนติเมตร) และเพลากลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.39 นิ้ว (11 เซนติเมตร) ยาว 1 นิ้ว (2.54 เซนติเมตร) ซึ่งการออกแบบทั้งหมดนี้ใช้โปรแกรม UG

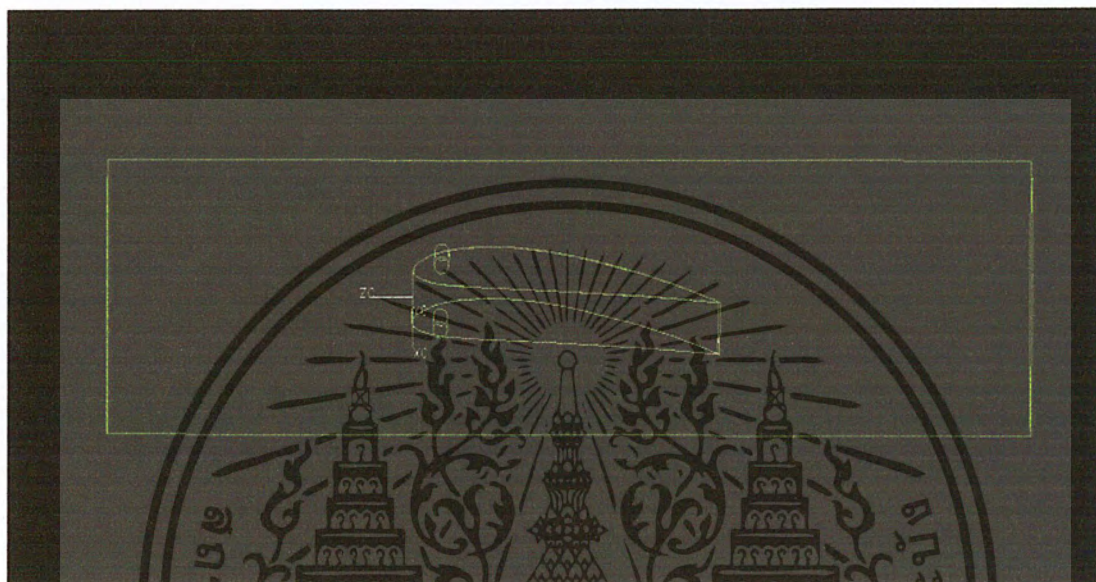


รูปที่ 6.2 ชิ้นส่วนรับแรงขั้นพื้นฐาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.2 ปริมาตรการควบคุม

ปริมาตรการควบคุม คือ ขนาดปริมาตรที่ควบคุมการไหลเพื่อที่จะสังเกตการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต่าง ๆ ของของไหลก่อนและหลังไหลผ่านชิ้นส่วนรับแรง คณะผู้จัดทำได้เลือกขนาดปริมาตรควบคุมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 6 นิ้ว (15.24 เซนติเมตร) มีความยาว 23.62 นิ้ว (60 เซนติเมตร) ดังรูป



รูปที่ 6.3 แสดงชุดปริมาตรควบคุม

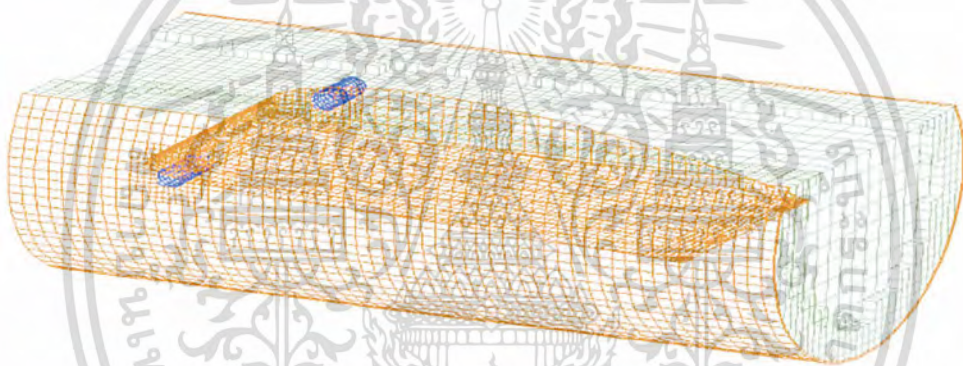
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 7

การทดลอง

7.1 การสร้างเมช (Mesh generation)

การสร้างเมช (Mesh Generation) หมายถึง โครงข่ายสองและสามมิติ ที่เชื่อมต่อกันเป็นรูปทรงสามเหลี่ยมและทรงปริมาตรสี่เหลี่ยม เพื่อแทนสมการการไหลของ นาเวียร์-สโตก และจุดที่เส้นแต่ละเส้นมาบรรจบกัน (Node) แทนจุดที่เป็นผลลัพธ์ของสมการ การสร้างเมชจำเป็นต้องทำก่อนการทำการคำนวณด้วยผลการสรุปผล (CFD) ทำได้โดยการนำชุดปริมาตรควบคุมสามมิติที่เขียนด้วยโปรแกรม UG มาสร้างเมชด้วยคำสั่ง Mesh Automation ใน โปรแกรม Nastran ดังรูป



รูปที่ 7.1 การสร้างเมช (Mesh Generation)

7.2 การคำนวณและทดลองพลศาสตร์การไหล (CFD) ภายในปริมาตรควบคุม

ภายในปริมาตรควบคุมที่ถูกแทนด้วยการยกเว้น เพียงแต่ชุดของชิ้นส่วนรับแรงที่ประกอบไปด้วยปีก และเพลากลมจะถูกทำให้เป็นพื้นที่ว่างเนื่องจากเป็นบริเวณที่ไม่ใช่ปริมาตรการไหลแต่เป็นบริเวณที่ต้องการผลลัพธ์ของแรงเนื่องการกระทำของความเร็ว และความดันที่มีต่อปีกซึ่งการคำนวณพลศาสตร์การไหลในที่นี้จะทำใน โปรแกรม Prostar ซึ่งเป็นโปรแกรมย่อยในโปรแกรม Star CD

กรณีของการคำนวณจะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ การไหลของน้ำและการไหลของอากาศ ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณด้วยโปรแกรม Star CD ดังนี้

1. ตรวจสอบความสมบูรณ์ของเมชที่สร้างจากโปรแกรม Nastran ว่ามีเมชแตกหรือไม่
2. การกำหนดทางเข้าและทางออกของของไหล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. การคำนวณคุณสมบัติของของไหลโดยสามารถจะ เลือกได้จากคุณสมบัติของวัสดุในโปรแกรม
4. การกำหนดรูปแบบการไหลของของไหลโดย ปริมาณนิพจน์เล่มนี้ เลือกใช้การไหลแบบปั่นป่วน
5. การกำหนดการคำนวณซ้ำเพื่อความแม่นยำ(Interpolation)เลือก LU
6. การคำนวณการแสดงผลว่าจะแสดงผลเป็นแบบผลลัพธ์ เป็นแบบเวกเตอร์ หรือแบบคอนทัวร์ แบบสองมิติหรือแบบสามมิติ ซึ่งขั้นตอนนี้จะกำหนดหลังจากโปรแกรมทำงานเสร็จแล้ว ต้องการบันทึกว่าเป็นผลลัพธ์

การแสดงผลลัพธ์นั้นถ้าเลือกการแสดงผลแบบคอนทัวร์ในแบบสองมิติและสามมิติ จะทำให้เราทราบถึงลักษณะและบริเวณการกระจายตัวของความเร็ว และความดัน โดยสีที่เข้มขึ้นแสดงถึงค่าที่เพิ่มมากขึ้น และทิศทางที่บ่งบอกทิศทางการกระทำของแรง

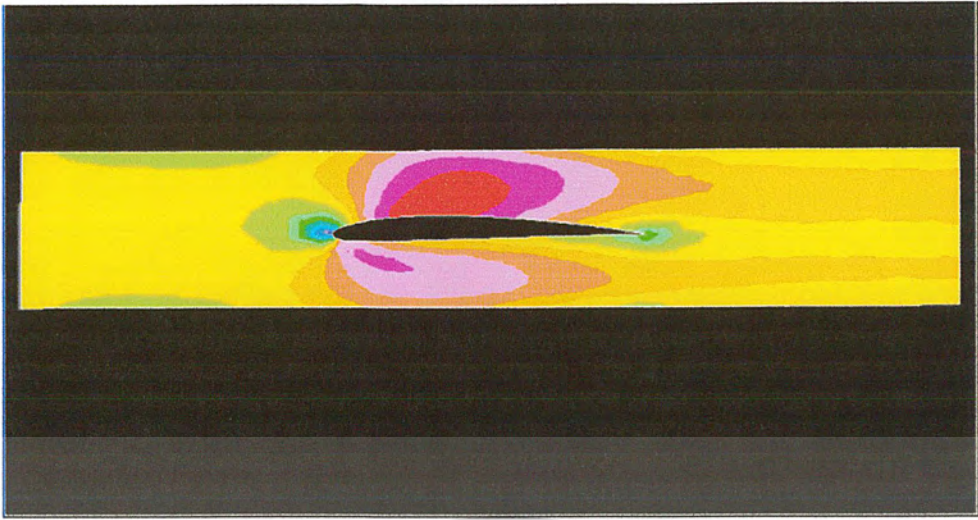
7.3 การทดลอง และ ผลการทดลองการคำนวณพลศาสตร์การไหล

7.3.1 การทดลอง

คณะผู้จัดทำได้ทำการทดลองการไหลกับของไหลสองชนิด คือน้ำและอากาศ ที่สภาวะปกติ ที่ระดับความเร็วของการไหลต่างๆ กันคือ 0 ถึง 10 เมตร/วินาที และสามารถคำนวณเป็นระดับอัตราการไหลได้จากสูตร $Q = VA$ โดย A คือพื้นที่หน้าตัดของท่อคือ 2.39×10^{-3} ตารางเมตร

7.3.2 ผลการทดลองแบบลักษณะการกระจายตัวของความดันและความเร็ว

ผลการทดลองคือลักษณะการกระจายตัวของความดัน และความเร็วของชั้นการไหลด้านบนของปีกและด้านใต้ของปีกมีความเร็ว(เฉลี่ย)เป็นปฏิกิริยาตรงข้ามกันคือชั้นการไหลด้านบนของปีก มีความเร็วสูงกว่าชั้นการไหลด้านใต้ของปีก และชั้นการไหลด้านบนของปีกมีความดัน (เฉลี่ย) ต่ำกว่าชั้นการไหลด้านใต้ของปีก ลักษณะการกระจายตัวของความดันและความเร็วมีลักษณะคล้ายคลึงกันทั้งสองแบบ คือทั้งการไหลของน้ำและการไหลของอากาศ นอกจากนี้ยังมีลักษณะคล้ายคลึงกันทั้งสปีคอีกด้วย คณะผู้จัดทำจึงไม่ขอนำเสนอผลการทดลองที่เป็นการกระจายตัวของความดันและความเร็วของอากาศ และค่าต่างๆ ของการไหลเพราะมีลักษณะคล้ายคลึงกัน แต่ได้แสดงเพื่อเป็นตัวอย่างที่การไหลของ น้ำ และ อากาศ ที่ความเร็ว 10 m/s ดังรูป

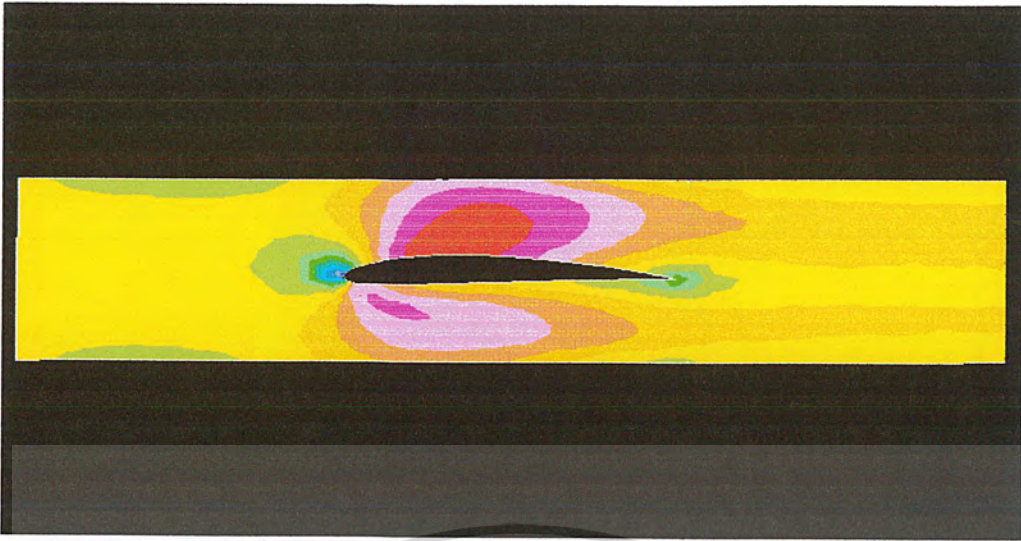


รูปที่ 7.2 ผลของความเร็ของอากาศที่ $V = 10 \text{ m/s}$, $Q = 0.0000375 \text{ m}^3/\text{s}$



รูปที่ 7.3 ผลของความดันของอากาศที่ $V = 10 \text{ m/s}$, $Q = 0.0000375 \text{ m}^3/\text{s}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.4 ผลของความเร็วของน้ำที่ $V = 10 \text{ m/s}$, $Q = 0.1832 \text{ m}^3/\text{s}$



รูปที่ 7.5 ผลของความดันของน้ำที่ $V = 10 \text{ m/s}$, $Q = 0.1832 \text{ m}^3/\text{s}$

7.3.3 ผลการทดลองแบบผลของแรงกระทำต่อปีก

จากผลการทดลองที่ได้คือความดันใต้ปีกมีค่ามากกว่าความดันบนปีก ความดันที่มากกว่าทางด้านใต้ปีกคือแรงที่ทำให้เกิดการบิดตัวของเพลากลม ผลการทดลองที่ได้คือทิศทางของแรงที่กระทำต่อปีกมีทั้งในทิศพุ่งขึ้น (F_y) และพุ่งลง ($-F_y$) ดังรูป และมีทิศทางเหมือนกันในทุกอัตราการไหล แต่ในทิศทางพุ่งขึ้นมีค่ามากกว่าทิศทางพุ่งลงในทุก ๆ ค่าของอัตราการไหล ดังนั้นผลรวมทาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

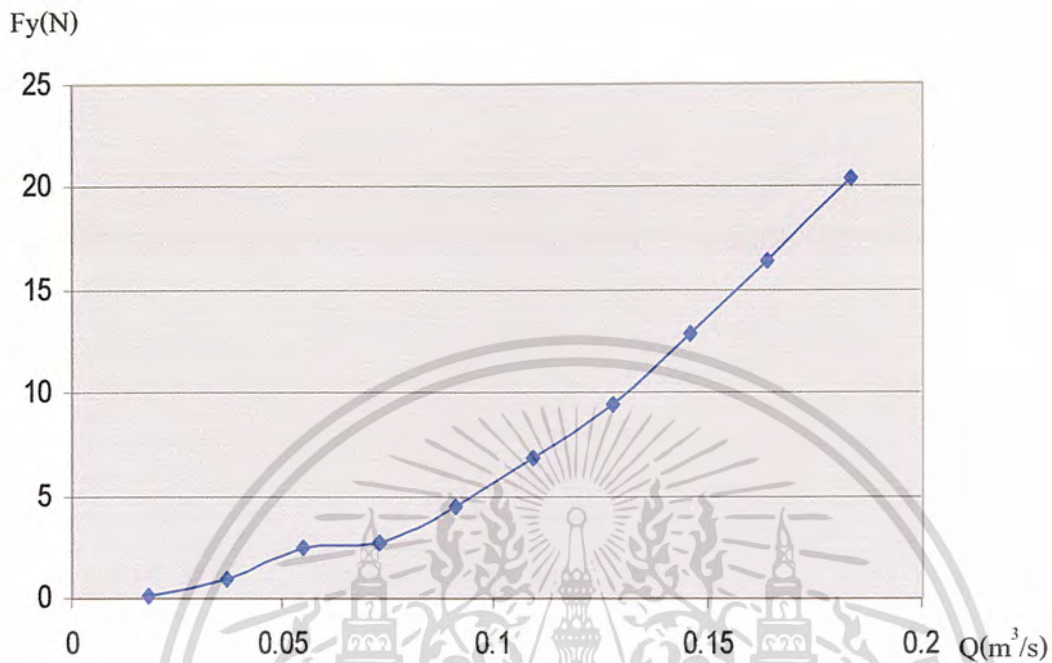
เวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่อปีกคือ ฟุ้งขึ้น (F_y) ผลของแรงที่เกิดเนื่องจากการไหลของน้ำและอากาศมีผลแตกต่างกันมากเมื่อเทียบกับอัตราการไหลเดียวกัน โดยผลที่ได้คือแรงฟุ้งขึ้น (F_y) มีผลน้อยมากต่อปีก คือประมาณ 0.003 N ที่ความเร็วของอากาศ คือ 800 m/s ซึ่งถือว่าสูงมาก ดังนั้น คณะผู้จัดทำคิดว่าไม่มีความเป็นไปได้ที่จะนำอัตราการไหลของอากาศนำมาใช้ได้จริงจึงนำเสนอผลการทดลองที่เกิดจากการไหลของน้ำ

ตารางที่ 7.1 แสดงผลของแรงที่เกิดจากอัตราการไหลที่ระดับต่างๆ

V (m/s)	Q (m ³ /s)	F _y (N)
1	0.0182	0.1066
2	0.0364	0.9792
4	0.0729	2.7348
5	0.0911	4.4992
6	0.1093	6.7498
7	0.1276	9.4600
8	0.1458	12.7610
9	0.1640	16.3031
10	0.1832	20.5133

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลของแรงที่เกิดขึ้นมีอัตราเพิ่มขึ้น มีผลทำให้อัตราการไหลเพิ่มขึ้นจะทราบลักษณะการเพิ่มขึ้นของแรงและอัตราการไหลได้จากกราฟ



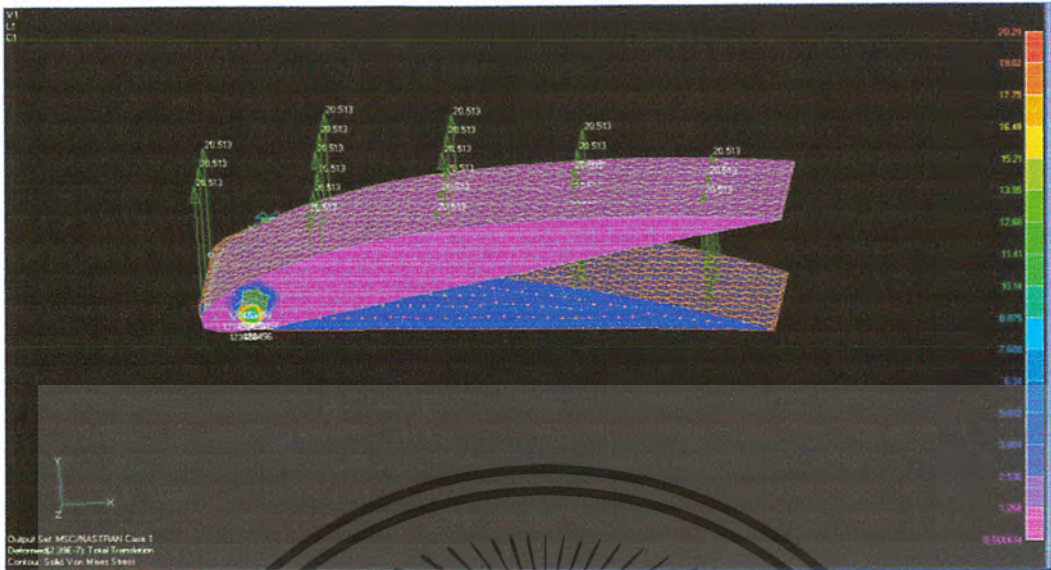
รูปที่ 7.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลของน้ำกับแรงกระทำในแนวแกน Y

7.4 สรุปผลการทดลองการคำนวณพลศาสตร์การไหล

ผลการทดลองจากการคำนวณ และจำลองพลศาสตร์การไหลภายในปริมาตรควบคุม

1. ความเร็วของชั้นการไหลด้านบนปีกมีค่าสูงกว่าความเร็วของชั้นการไหลด้านใต้ปีก
2. ความดันของชั้นการไหลบนปีกมีค่าต่ำกว่าความดันของชั้นการไหลด้านใต้ปีก
3. ผลรวมของแรงเนื่องจากความดัน แตกต่างระหว่างชั้นการไหลบนปีกและชั้นการไหลด้านใต้ ปีกมีทิศทางในแนวพุ่งขึ้น (F_y)
4. การกระจายตัวของความเร็ว และความดันที่กระทำต่อปีกมีความสัมพันธ์เป็นปฏิภาคตรงข้ามกัน
5. การเพิ่มของแรงต่ออัตราการไหลเข้าใกล้ความเป็นเชิงเส้นที่อัตราการไหลที่ 0.1 ถึง 0.1832 m^3/s
6. แรงที่เกิดจากอัตราการไหลของน้ำที่อัตราการไหลต่างๆสามารถทำให้เกิดแรง กระทำต่อปีกในปริมาณที่ทำให้เกิดการเสีรูปร่างในสภาวะการไหลที่ไม่สูงมากจนเกินไป
7. แรงที่เกิดจากการไหลของอากาศที่อัตราการไหลต่าง ๆ ในระดับต่ำความเร็วของการไหลไม่เกิน 300 m/s ไม่สามารถทำให้เกิดแรงบิดเกิดการเสีรูปร่างที่เพล่าได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.7 การเสียรูป (Deformation)



รูปที่ 7.8 การเสียรูปบนแกนเพลลา (Shaft Deformation)

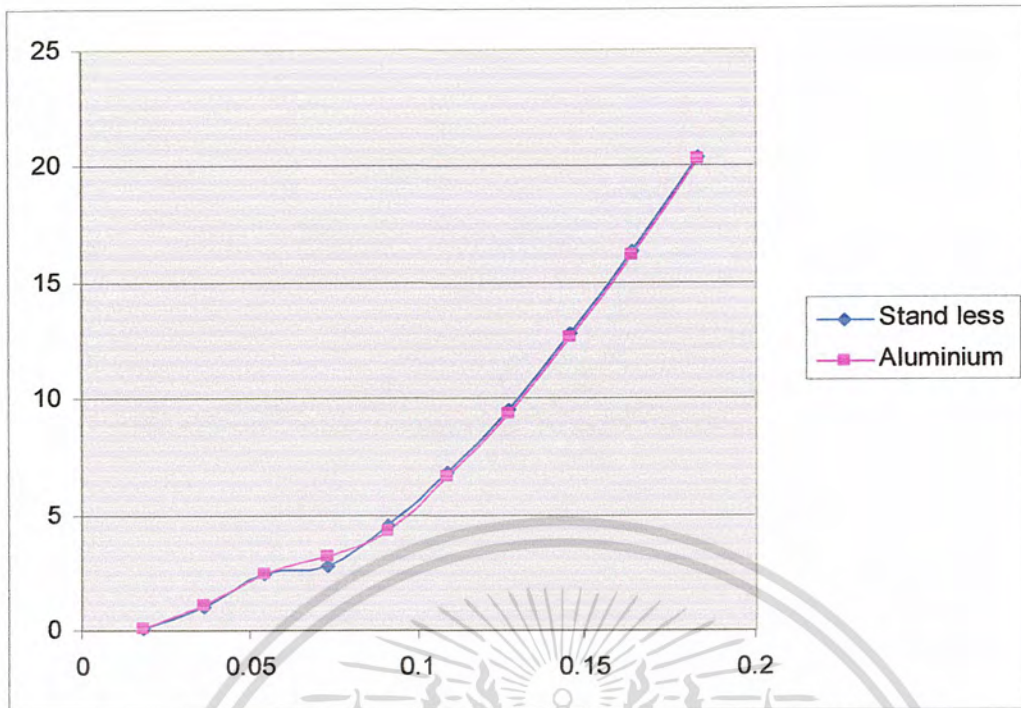
คณะผู้จัดทำได้ทำการทดลองคำนวณ และจำลองการเสียรูปของวัสดุโลหะสองชนิด เพื่อเป็นการเปรียบเทียบกัน คือ อลูมิเนียมและสแตนเลส ผลการทดลองที่อัตราการไหลต่างๆ กันของโลหะทั้งสองแสดง ดังตารางและกราฟ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 7.2 อัตราการไหลของอนุภาคน้ำและสแตนเลส

V (m/s)	Q (m ³ /s)	Fy (N)	(kPa)	
			Aluminium	Stand less
1	0.0182	0.1066	0.101	0.107
2	0.0364	0.9792	1.072	0.982
3	0.0546	2.4735	2.447	2.482
4	0.0729	2.7348	3.217	2.743
5	0.0911	4.4992	4.283	4.513
6	0.1093	6.7498	6.678	6.855
7	0.1276	9.4600	9.356	9.489
8	0.1458	12.7610	12.62	12.80
9	0.1640	16.3031	16.13	16.36
10	0.1832	20.5133	20.29	20.40

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.9 กราฟแสดงอัตราการใช้ของอลูมิเนียมและสแตนเลส

7.5 การทดลองและผลการทดลอง CAE

การคำนวณและการจำลองการเสียรูปของชิ้นส่วน (CAE)

CAE (Computer Aid Engineering) หมายถึงการคำนวณและศึกษาถึงคุณสมบัติต่างๆ ของวัสดุเมื่อเกิดการเสียรูปเนื่องจากการกระทำของแรง

7.6 การคำนวณและการจำลองการเสียรูปของชิ้นส่วน

การคำนวณและการจำลองการเสียรูปของชิ้นส่วนรับแรงขั้นพื้นฐาน เริ่มต้นจากการนำเอา รูปชิ้นส่วนที่มีเฉพาะปีกและเพลากลมสามมิติ ที่สร้างจากโปรแกรม UG มาทำการสร้างเมชใหม่ ในโปรแกรม Nastran แล้วกำหนดให้ปลายเพลทั้งสองข้างถูกยึดอยู่กับที่ จากนั้นนำผลของแรงที่กระทำต่อปีกในทิศทางพุ่งขึ้น (Fy) ที่ค่าอัตราการใช้ต่าง ๆ มากระทำบนปีกตามทิศทางเดิมก็จะทราบถึงขนาดของความเค้นที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนเพล

7.7 ผลการทดลองจากการคำนวณและจำลองการเสียวรูปของชิ้นส่วน

ผลการทดลองที่ได้คือเพลาเกิดการเสียวรูปไปตามทิศของปีกในแนวพุ่งขึ้น (F_y) ตามรูปชิ้นส่วนที่เสียวรูปไปคือเพลากลมจะสังเกตได้จากบริเวณที่มีการเสียวรูปมาก คือบริเวณที่มีโทนสีเข้ม คือ สีแดง และสีเหลือง ตามลำดับบนสเกลของกราฟ ดังนั้นบริเวณที่มีการเสียวรูปและมีความเค้นเกิดขึ้นมากที่สุดคือผิวของเพลากลม

7.8 สรุปผลการทดลองของการคำนวณและการจำลองการเสียวรูปของชิ้นส่วน

1. แรงที่เกิดจากการไหลของน้ำที่อัตราการไหลต่าง ๆ สามารถทำให้ปีกเกิดการเสียวรูปในทิศทางพุ่งขึ้น (F_y)
2. ความเค้นที่เกิดจากการไหลของน้ำที่อัตราการไหลต่าง ๆ เกิดขึ้นที่เพลากลม ที่บริเวณผิวนอกสุดที่เกิดความเค้นสูงสุด
3. ภาระที่เพิ่มขึ้นของความเค้นจะแปรผันตรงตามการเพิ่มของอัตราการไหลและการเสียวรูปของโลหะทั้งสองชนิดมีค่าใกล้เคียงกันและมีความเป็นเชิงเส้นที่อัตราการไหลจาก 0.01 ถึง 0.018 m^3/s



บทที่ 8

สรุป และ วิจารณ์

8.1 สรุปผลการทดลอง

1. การไหลของน้ำสามารถทำให้เกิดแรง ที่ทำให้เกิดการเสียวรูปของชิ้น โลหะที่ออกแบบ ซึ่งการเสียวรูปสูงสุดที่เกิดขึ้นนั้น จะเกิดขึ้นที่เพลากลมและสามารถวัดค่าความเค้นสูงสุดของการเสียวรูปได้ที่ผิวนอกสุดของเพลากลม
2. ความเค้นสูงสุดของการเสียวรูปเพิ่มขึ้นตามอัตราการไหล และเข้าใกล้ความเป็นเชิงเส้น ที่อัตราการไหลของน้ำ 0.1 ถึง 0.1832 m³/s
3. ชิ้นส่วนรับแรงขึ้นพื้นฐานที่คณะผู้จัดทำ ได้ ออกแบบด้วยหลักของอากาศพลศาสตร์ สามารถสื่อค่าอัตราการไหลของน้ำได้ด้วยการเปรียบเทียบ อัตราการไหลจริงกับความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นที่ผิวของเพลากลม

8.2 วิจารณ์

1. ถึงแม้ว่าคณะผู้จัดทำ ได้ทำการออกแบบชิ้นส่วนรับแรงขึ้นพื้นฐานเพื่อวัดอัตราการไหล จากการทดลอง และสรุปผลว่าสามารถที่จะใช้วัดค่าอัตราการไหลได้ แต่ยังต้องการทดลองในเชิง การใช้งานจริงเพื่อสนับสนุนการทดลองทางกล
2. การทดลองทางคอมพิวเตอร์นี้คณะผู้จัดทำ ไม่ได้คำนึงถึงผลของอุณหภูมิแต่การทดลอง ในระดับต่อไปควรจะคำนึงถึงผลของอุณหภูมิ ที่มีผลต่อสเตรนเกจ และ โลหะ เพื่อที่จะให้ได้ผลที่ ถูกต้องก็ควรจะคำนึงถึงผลของอุณหภูมิด้วย
3. คณะผู้จัดทำ ทำการทดลองในสภาวะการไหลของแต่ละค่าเป็นแบบคงที่ (Steady State) ซึ่งในการไหลที่ใช้งานจริงที่เกิดขึ้นเป็นแบบต่อเนื่อง(Transient)ในการทดลองขึ้นต่อไปควรทำการ ทดลองในสภาวะต่อเนื่องเพื่อทำให้การทดลองมีความแม่นยำ และมีประสิทธิภาพมากขึ้นตามสภาพ การใช้งานจริง
4. คณะผู้จัดทำ ทำการออกแบบ และทดลองกับปริมาตรควบคุมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 นิ้ว, ยาว 23.62 นิ้ว ในการศึกษาในขั้นตอนนี้ต่อไปควรศึกษากับปริมาตรควบคุมหลายขนาดเพื่อ นำมาเปรียบเทียบถึงความเหมาะสมกับการใช้งานเพื่อความแม่นยำและความถูกต้องมากขึ้น

บรรณานุกรม

- รศ.สุนันท์ ศรีนยนิตย์ เรื่องกลศาสตร์ของไหล
- รศ.มนตรี พิรุณเกษตร เรื่องกลศาสตร์ของวัตถุ
- ศร.ดร.ปราโมทย์ เดชอำไพ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล
- รศ.สัมพันธ์ ไชยเทศ อากาศพลศาสตร์เบื้องต้น
- น.ศ.วิฑูร ศรีสืบสาย ปริญญาโท ปีการศึกษา 2540 เรื่อง “การประยุกต์วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบไฟไนต์วอลุ่มกับการไหลของของไหล” (กรุงเทพฯ : ลาดกระบัง)
- John D. Anderson Jr. Fundamental of Aerodynamics (United state :University of Maryland)
- E.L.Youg Htow and D.W.Carpenter, Aerodynamics for Engineering Standard (London, Professor of Mechanical Engineering The University of Warwick)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

Coordinate ของ NASA 4412

X	Y
0.9999243117862971	0.001316153910011053
0.9991978767909828	0.0015175669686868787
0.9979878468513481	0.00185256521217525
0.9962952647069795	0.002320117549970746
0.9941215905736926	0.002918787067756057
0.9914687024364883	0.0036467397585511208
0.988338896416135	0.0045017520897090435
0.9847348870537056	0.005481223110109568
0.9806598078961608	0.00658218702301383
0.9761172114692908	0.007801327388733625
0.9711110697656137	0.009134992957115173
0.9656457740503466	0.010579213500022888
0.9597261347326268	0.012129719369113445
0.9533573807994854	0.013781961984932423
0.9465451593845325	0.015531128272414207
0.9392955342977328	0.017372166737914085
0.9316149844214007	0.019299805164337158
0.923510402195959	0.021308569237589836
0.9149890907428048	0.023392807692289352
0.9060587610502129	0.025546710938215256
0.8967275283817887	0.027764325961470604
0.8870039082255254	0.03003958985209465
0.8768968116682165	0.032366327941417694
0.8664155400023701	0.034738294780254364
0.8555697793453431	0.03714917227625847
0.8443695937239254	0.039592593908309937
0.8328254182996633	0.042062170803546906

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

X	Y
0.820948051943726	0.04455148056149483
0.8087486486869133	0.04705410823225975
0.7962387104592126	0.04956363886594772
0.7834300763577762	0.052073683589696884
0.7703349144157201	0.05457787960767746
0.7569657111495407	0.05706990882754326
0.7433352615535833	0.05954349413514137
0.729456657869218	0.061992425471544266
0.715343279698697	0.06441055983304977
0.7010087809128909	0.06679181754589081
0.6864670800879932	0.06913021951913834
0.6717323462592971	0.0714198648929596
0.6568189887902017	0.07365494966506958
0.6417416434939659	0.07582977414131165
0.6265151601082294	0.07793877273797989
0.6111545893131042	0.07997646927833557
0.5956751689736097	0.08193755149841309
0.580092310525224	0.08381683379411697
0.5644215845673165	0.08560927957296371
0.5486787062142693	0.08731002360582352
0.5328795203396273	0.08891437202692032
0.51703998577951	0.09041782468557358
0.5011761596964497	0.09181607514619827
0.4853041805953061	0.09310504049062729
0.46944025175707077	0.09428086131811142
0.4536006235003568	0.09533993899822235
0.437801575178831	0.09627891331911087
0.4220593962378023	0.09709472209215164
0.4063903672975983	0.09778458625078201
0.3906636934603697	0.09833412617444992
0.3749388368076135	0.09869112074375153

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

X	Y
0.3593345978808747	0.09884955734014511
0.3438684413866989	0.09880980849266052
0.32855774397288173	0.0985728800296783
0.3134197624202246	0.0981404259800911
0.29847159976953763	0.09751472622156143
0.28373017194305006	0.09669870138168335
0.26921217431453665	0.09569589048624039
0.2549340476657194	0.09451045095920563
0.2409119451551561	0.0931471437215805
0.22716169898463823	0.09161131083965302
0.21369878907255402	0.08990886062383652
0.2005383111247965	0.08804622292518616
0.1876949487463088	0.08603035658597946
0.1751829430552918	0.08386867493391037
0.1630160692414009	0.08156905323266983
0.1512076090116549	0.07913974672555923
0.13977033077233125	0.07658939063549042
0.12871646854273336	0.07392691820859909
0.1180577040338459	0.07116153836250305
0.1078051523060522	0.06830266863107681
0.09796934808945967	0.06535990536212921
0.08856023513180512	0.062342941761016846
0.07958715875675278	0.05926153436303139
0.07105886058113633	0.05612543597817421
0.06298347526855168	0.05294434353709221
0.05536852856889338	0.04972783476114273
0.048220938319732225	0.04648532718420029
0.04154701781328612	0.043226003646850586
0.03535247947667433	0.03995876386761665
0.029642441211875755	0.03669217601418495
0.02442143403037705	0.033434417098760605

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

X	Y
0.01969340770767831	0.030193230137228966
0.015461742714316924	0.026975873857736588
0.011729256430477338	0.02378907799720764
0.008498214677509856	0.020639004185795784
0.005770340190215937	0.01753121055662632
0.0035468236077081067	0.014470618218183517
0.0018283297331135192	0.011461478658020496
6.150087533450372E-4	0.008507356978952885
-9.349780250459089E-5	0.00561110582202673
0.0	0.0
0.002066769374233293	-0.005216938443481922
0.003823026643575328	-0.007622211705893278
0.006056968952409134	-0.009892191737890244
0.008764835797154742	-0.012027233839035034
0.011942409081096035	-0.014027879573404789
0.015585023383743466	-0.015894858166575432
0.019687582440892328	-0.01762908697128296
0.024244571608740835	-0.019231686368584633
0.02925007599716897	-0.020703967660665512
0.034697797015398366	-0.022047456353902817
0.040581072899873734	-0.02326389029622078
0.04689289483934542	-0.024355227127671242
0.053625929720695235	-0.025323649868369102
0.06077253749190078	-0.026171579957008362
0.06832479138724384	-0.026901675388216972
0.07627449772750548	-0.027516845613718033
0.08461321391684928	-0.02802024409174919
0.09333226696868603	-0.028415290638804436
0.10242277049324804	-0.02870565466582775
0.11187563953485044	-0.028895271942019463
0.12168160491815899	-0.028988339006900787

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

X	Y
0.13183122633569483	-0.028989307582378387
0.1423149040358553	-0.028902892023324966
0.15312288804112134	-0.028734048828482628
0.16424528505965638	-0.028487982228398323
0.17567206543494704	-0.028170129284262657
0.18739306719601811	-0.027786143124103546
0.19939799760071422	-0.02734188362956047
0.2116764365827297	-0.026843398809432983
0.22421783307531457	-0.026296906173229218
0.23701150603636417	-0.025708768516778946
0.25004663909447145	-0.02508546970784664
0.26331227823256403	-0.024433592334389687
0.27679732594591505	-0.023759786039590836
0.29049053649187573	-0.02307073585689068
0.3043805095956802	-0.0223731379956007
0.3184556848950957	-0.02167366072535515
0.33270433578182534	-0.020978908985853195
0.3471145642383521	-0.0202953964471817
0.3616742960798944	-0.01962950825691223
0.3763712760275301	-0.018987460061907768
0.3911930651430861	-0.018375271931290627
0.4062283181166754	-0.017793430015444756
0.4215061387219654	-0.017200160771608353
0.4368651912568634	-0.016588639467954636
0.45229106318112766	-0.015962881967425346
0.4677692287136144	-0.01532677561044693
0.48328506032656426	-0.014684056863188744
0.4988238403035492	-0.014038296416401863
0.5143707732986169	-0.013392875902354717
0.5299109991896849	-0.012750975787639618
0.5454296071042439	-0.012115562334656715

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

X	Y
0.5609116489969866	-0.011489374563097954
0.5763421545150058	-0.010874918662011623
0.591706145612114	-0.010274458676576614
0.6069886520834374	-0.009690013714134693
0.6221747270566246	-0.009123359806835651
0.6372494625452624	-0.008576024323701859
0.652198005584745	-0.008049296215176582
0.6670055739859934	-0.0075442269444446564
0.6816574725966841	-0.0070616379380226135
0.696139109721889	-0.006602130830287933
0.710436011866375	-0.006166098639369011
0.7245338418703283	-0.005753735546022654
0.7384184125481317	-0.005365053191781044
0.75207570460083	-0.004999892320483923
0.7654918805632762	-0.00465794000774622
0.7786533014943537	-0.004338743165135384
0.7915465418332603	-0.004041727632284164
0.8041584049660628	-0.0037662109825760126
0.8164759378049635	-0.0035114206839352846
0.8284864470239883	-0.0032765099313110113
0.8401775122047629	-0.0030605716165155172
0.8515370018412044	-0.0028626550920307636
0.8625530874190412	-0.0026817782782018185
0.8732142579622428	-0.002516942098736763
0.8835093345502638	-0.0023671421222388744
0.8934274839939015	-0.002231379272416234
0.9029582333247343	-0.0021086710039526224
0.912091483531757	-0.0019980582874268293
0.920817523306056	-0.001898614689707756
0.929127042582543	-0.0018094523111358285
0.9370111457461306	-0.0017297269077971578

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

X	Y
0.9444613648038355	-0.0016586418496444821
0.9514696716665342	-0.0015954517293721437
0.9580284909513542	-0.001539464225061237
0.964130711837905	-0.0014900413807481527
0.9697696991886121	-0.0014465998392552137
0.9749393048258629	-0.0014086110750213265
0.979633877780782	-0.001375600346364081
0.9838482740749257	-0.0013471456477418542
0.9875778655226124	-0.0013228760799393058
0.9908185482922003	-0.0013024699874222279
0.9935667500214451	-0.0012856535613536835
0.9958194366074983	-0.0012721986277028918
0.9975741177517321	-0.0012619213666766882
0.998828851637289	-0.0012546803336590528
0.9995822485794345	-0.0012503755278885365
0.9998334737063144	-0.00124894711188972

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คุณสมบัติของ Stainless Steel

Stiffness

Young Modulus, E	1.965E+11 Pa
Shear Modulus, G	7.7221E+10 Pa
Poisson's Ration, nu	0.27

Limit Stress

Tension	999739894 Pa
Compression	958371347 Pa
Shear	655002000 Pa

Mass Density 7834.6 Kg

Reference Temp 294 °c

Thermal

Expansion Coeff, a 1.116E-5 $\mu\text{m}/(\text{m}^{\circ}\text{c})$

คุณสมบัติของ Aluminum

Stiffness

Young Modulus, E	6.8258E+10 Pa
Shear Modulus, G	2.62E+10 Pa
Poisson's Ration, nu	0.27

Limit Stress

Tension	241316526 Pa
Compression	241316526 Pa
Shear	186158463 Pa

Mass Density 2713 Kg

Reference Temp 294 °c

Thermal

Expansion Coeff, a 2.277E-5 $\mu\text{m}/(\text{m}^{\circ}\text{c})$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้