การศึกษาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

THE STUDY OF CONTINUOUS RUNGE-KUTTA METHOD FOR SOLVING INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

วัชรากร พาหะนิชย์

WATCHARAKORN PHAHANICH

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2543

ISBN 974-622-786-6

THE STUDY OF CONTINUOUS RUNGE-KUTTA METHOD FOR SOLVING INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

WATCHARAKORN PHAHANICH

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2000

ISBN 974-622-786-6

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การศึกษาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
นักศึกษา	นายวัชรากร พาหะนิชย์
รหัสประจำตัว	39065362
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2543
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ. ภัคคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 อันดับ 3 และอันดับ 4 เป็นสูตรพื้นฐาน เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

โดยทั่วไประเบียบวิธีรุงเง-คุตตา s สถานะ อันดับ p อยู่ในรูปแบบ

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \quad ; i = 1,2,\ldots,s$$

เมื่อ c_i, a_{ij}, b_j เป็นค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ซึ่งเมื่อสร้างเป็นระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น s^* สถานะ อันดับ p^* แล้ว จะอยู่ในรูปแบบ

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \quad ; i = 1,2,\ldots,s^*$$

$$u(x_n + \theta h) = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j(\theta) k_j \quad ; \; 0 \le \theta \le 1$$

เมื่อ c_i, a_{ij} เป็นค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง และ $b_j(\theta)$ เป็นพหุนามดีกรี p^*

Thesis Title	The Study of Continuous Runge-Kutta Method for Solving Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations
Student	Mr. Watcharakorn Phahanich
Student ID.	39065362
Degree	Master of Science
Programme	Applied Mathematics
Year	2000
Thesis Advisor	Assoc.Prof. Pakkinee Chitsakul

ABSTRACT

This research study Continuous Runge-Kutta methods base on Runge-Kutta methods (of order 2, order 3 and order 4) to find numerical solutions of initial value problem of ordinary differential equations in the form

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 .$$

Generally Runge-Kutta methods s stage of order p are in the form

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \quad ; i = 1,2,\ldots,s$$

where c_i, a_{ij}, b_j are real constant. From generally Runge-Kutta method, Continuous Runge-Kutta methods s^* stage of order p^* are in the form

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j) \ ; i = 1,2,\ldots,s^*$$

$$u(x_n + \theta h) = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j(\theta)k_j \ ; \ 0 \le \theta \le 1$$

where c_i, a_{ij} are real constant and $b_j(\theta)$ is polynomial degree p^*.

กิตติกรรมประกาศ

กราบขอบพระคุณ รศ. ภัคดินี ชิตสกุล ที่ให้คำปรึกษา และเสนอแนะในการทำวิทยานิพนธ์นี้ จนทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

กราบขอบพระคุณ กรรมการทุกท่านที่กรุณา จนทำให้วิทยานิพนธ์นี้ครบถ้วนสมบูรณ์ และขอบคุณเพื่อนๆ ทุกคนที่คอยเป็นกำลังใจ

คุณความดีของวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบให้แด่ บิดา-มารดา ที่ให้กำเนิด และอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิประสาทวิชา

วัชรากร พาหะนิชย์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

คำย่อและสัญลักษณ์

RK n	ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ n
CRK n	ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ n
CRK n (H)	ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ n ที่สร้างโดย การประมาณค่าภายในช่วงแบบแฮร์มิตต์
a_{ij}	สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น
b_j	สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น
c_i	สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น
$b_j(\theta)$	สัมประสิทธิ์ ที่เป็นพหุนาม ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น
k_i	สถานะที่ i ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น
h	ขนาดขั้น ที่ใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น
$r(t)$	อันดับของ ทรี t
$\gamma(t)$	ความหนาแน่นของ ทรี t
$\alpha(t)$	จำนวนหนทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการกำหนดชื่อให้ ทรี t
$F(t)$	เชิงอนุพันธ์มูลฐานที่สมนัยกับ ทรี t
$\Phi(t)$	น้ำหนักมูลฐานที่สมนัยกับ ทรี t
E_n	global truncation error ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ที่จุด x_n
e_{n+1}	local truncation error ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ที่จุด x_{n+1}
$e(t)$	สัมประสิทธิ์ความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ที่จุด x_{n+1} ที่สมนัยกับ ทรี t

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย

ปัญหาทางวิทยาศาสตร์หลายๆปัญหาสามารถอธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ปัญหาการปล่อยวัตถุมวล m จากที่สูง h ดังรูปที่ 1.1 สามารถอธิบายได้โดยสมการ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \tag{1.1}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

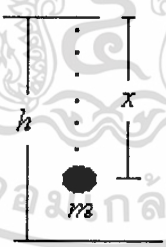
$$x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = v(0) = 0 \tag{1.2}$$

เมื่อ x คือ ระยะทางของวัตถุ

g คือ แรงโน้มถ่วงของโลก

t คือ เวลา

v คือ ความเร็วของวัตถุ



รูปที่ 1.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่ง

ผลเฉลยของสมการ (1.1) มี 2 ประเภท คือ ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลข ผลเฉลยจริงของสมการ (1.1) ที่เป็นไปตามเงื่อนไข (1.2) คือ

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2$$

สำหรับผลเฉลยเชิงตัวเลขนั้น ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข คือ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta method) ที่อยู่ในรูปแบบ

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j)$$
$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \quad ; i = 1,2,\dots,s \tag{1.3}$$

โดยทั่วไปการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (initial value problem) ของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.4}$$

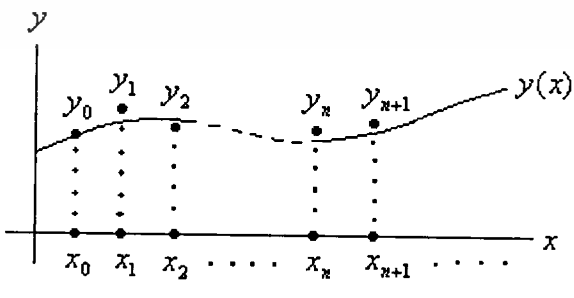
โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เป็นการประมาณค่าผลเฉลยจริง $y(x)$ ด้วยผลเฉลยเชิงตัวเลข

$$y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$$

ที่เซตของจุด

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$$

โดยใช้ขนาดขั้น (step size) h เมื่อ $h = x_{n+1} - x_n$ แสดงดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลข

จากรูปที่ 1.2 ถ้าต้องการผลเฉลยเชิงตัวเลข ที่มีความละเอียด หรือมีความหนาแน่น (เช่น ต้องการนำผลเฉลยไปเขียนกราฟ) จะต้องลดขนาดของ h หรือใช้ h ที่มีขนาดเล็กมาก ซึ่งเป็นการทำให้จำนวนครั้งในการคำนวณเพิ่มมากขึ้น เพราะในการใช้ระเบียบวิธี (1.3) หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (1.4) ที่จุด x_{n+1} นั้นต้องทำการคำนวณหาค่า k_i , $i = 1,2,...,s$ ใหม่ทุกครั้ง

ด้วยเหตุผลดังกล่าว จึงได้ทำการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ให้เป็นระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยศึกษาการเปลี่ยนค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง b_j ของระเบียบวิธี (1.3) ให้เป็นพหุนาม $b_j(\theta)$ ดังนั้น ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \ ; i = 1,2,...,s^* \\ u(x_n + \theta h) &= y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j(\theta) k_j \ ; \ 0 \le \theta \le 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

เมื่อ c_i, a_{ij} เป็นค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง และ $b_j(\theta)$ เป็นพหุนาม

ข้อแตกต่างระหว่างระเบียบวิธี (1.3) กับระเบียบวิธี (1.5) คือ ในแต่ละช่วง $[x_n, x_{n+1}]$ ระเบียบวิธี (1.3) จะประมาณค่าผลเฉลยจริงเฉพาะที่จุด x_n และ x_{n+1} แต่ระเบียบวิธี (1.5) จะประมาณค่าผลเฉลยจริงที่จุด x_n และ x_{n+1} รวมทั้งจุดต่างๆภายในช่วง $[x_n, x_{n+1}]$ ด้วย

ประโยชน์ที่คาดหวังจากการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น คือ การได้ระเบียบวิธีที่ให้ผลเฉลยมีความหนาแน่น และสามารถนำไปหาผลเฉลยของ ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นได้จริง โดยในการศึกษานั้นใช้ E. Hairer, S. P. Norsett และ G. Wanner [1] และ J. C. Butcher [2] เป็นแนวทางในการศึกษา

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อศึกษาการสร้างระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นสำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
2. เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆให้เป็นระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น

1.3 ขอบเขตการวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษากระบวนการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

เมื่อ

$$y = (y^1,...,y^n)^T \quad , \quad f = (f^1,...,f^n)^T$$

โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เป็นสูตรพื้นฐาน ซึ่งระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ใช้ มีดังนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{aligned}$$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3) \end{aligned}$$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\ k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4) \end{aligned}$$

ในการศึกษาการสร้างนั้น จะศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ที่ยังคงรักษาการเป็นระเบียบวิธีขั้นเดียว (one-step method) และข้อมูลที่ใช้ในการสร้าง จะใช้ข้อมูลที่ได้จากสูตรพื้นฐานเท่านั้น นั่นคือไม่มีการเพิ่มสถานะ (stage) k_i ใหม่เข้าไปในสูตรพื้นฐาน (ใช้เฉพาะ k_i , $i = 1,2,...,s$) ยกเว้นสถานะ $k = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ และไม่มีการเพิ่มค่า y ใหม่เข้าไปในสูตรพื้นฐาน (ใช้เฉพาะค่า $y(x_n)$ และ $y(x_{n+1})$)

1.4 ขั้นตอนของการศึกษา

ขั้นตอนที่ 1 : ศึกษาความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยศึกษาความรู้เรื่อง ทรีและเชิงอนุพันธ์มูลฐาน

ขั้นตอนที่ 2 : ศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยขั้นแรก ศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ที่จะนำไปใช้เป็นสูตรพื้นฐาน หลังจากนั้นศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น

ขั้นตอนที่ 3 : ทำการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยนำระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นที่ได้จากการศึกษา ไปทดสอบประสิทธิภาพ ด้วยการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น รวมทั้งสรุปผลจากการทดสอบประสิทธิภาพ

ขั้นตอนที่ 4 : สรุปผลการศึกษาและเขียนวิทยานิพนธ์

1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในการศึกษา

คำจำกัดความของคำศัพท์ที่ใช้ในงานวิจัย มีดังนี้

1. ในงานวิจัยนี้ คำว่า "ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา" นั้นหมายถึง ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาชัดแจ้ง (explicit Runge-Kutta method) โดยทั่วไปอยู่ในรูปแบบ

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \quad ; i = 1,2,...,s$$

เมื่อ $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ และ c_i, a_{ij}, b_j เป็นค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง

2. ระเบียบวิธีขั้นเดียว คือ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ที่ใช้ข้อมูลเฉพาะที่จุด x_n ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด x_{n+1} เช่น ระเบียบวิธีออยเลอร์ (Euler method)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

3. การวิเคราะห์เสถียรภาพ (stability analysis) หมายถึง การศึกษาเงื่อนไขที่ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริง

4. ระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น (dense output formula) คือ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เมื่อใช้หาผลเฉลยในแต่ละช่วง $[x_n, x_{n+1}]$ แล้วจะประมาณค่าผลเฉลยจริงที่จุดต่างๆภายในช่วงด้วย ซึ่งโดยทั่วไปแล้วในแต่ละช่วง $[x_n, x_{n+1}]$ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะประมาณค่าผลเฉลยจริงเฉพาะที่จุด x_n และ x_{n+1} เท่านั้น

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ที่ใช้ในการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยในส่วนความรู้พื้นฐานกล่าวถึง ทรี (tree) และ เชิงอนุพันธ์มูลฐาน (elementary differential) ทั้งสองเรื่องเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้การศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น มีความสะดวกขึ้น ในส่วนของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง กล่าวถึงงานวิจัยที่นำมาช่วยในการศึกษาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น สำหรับหัวข้อที่ศึกษาในบทนี้มีดังนี้

- ทรีและเชิงอนุพันธ์มูลฐาน
    - ทรี
    - เชิงอนุพันธ์มูลฐาน
- งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ซึ่งจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

2.1 ทรีและเชิงอนุพันธ์มูลฐาน

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา 2 สถานะ อันดับ 2 อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

เมื่อ $c_2 = a_{21}$ กระจายสมการ (2.1) ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h f(x_n, y_n)) \\ &= f(x_n, y_n) + h(c_2 f_x + a_{21} f_y f)(x_n, y_n) + O(h^2) \qquad (2.2) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 + b_2) f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(b_2 c_2 (f_x + f_y f))(x_n, y_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

ถ้า $y(x_{n+1})$ เป็นผลเฉลยจริงของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

สามารถเขียน $y(x_{n+1})$ ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n,y_n) + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f)(x_n,y_n) + O(h^3) \tag{2.3}$$

จากสมการ (2.2) และสมการ (2.3) จะได้

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = (1 - b_1 + b_2)hf(x_n,y_n) + (\frac{1}{2} - b_2 c_2)h^2(f_x + f_y f)(x_n,y_n) + O(h^3)$$

ดังนั้น ระเบียบวิธี (2.1) เป็นระเบียบวิธี อันดับ 2 ก็ต่อเมื่อ

$$b_1 + b_2 = 1 \text{ และ } b_2 c_2 = \tfrac{1}{2} \tag{2.4}$$

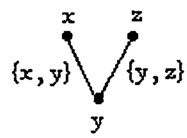
เรียกเงื่อนไข (2.4) ว่าเป็น เงื่อนไขอันดับ (order condition) ของระเบียบวิธี (2.1) ถ้าเลือก $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ จะได้ $a_{21} = c_2 = 1$ ดังนั้น ระเบียบวิธี (2.1) กลายเป็น

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ y_{n+1} &= y_n + h(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2) \end{aligned}$$

จะเห็นว่าการหาเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ด้วยวิธีข้างต้นนั้นมีความยุ่งยากซับซ้อน โดยเฉพาะระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสูงๆ แต่ถ้าใช้ ทรี และเชิงอนุพันธ์มูลฐาน มาช่วยจะทำให้การหาเงื่อนไขอันดับมีความสะดวกขึ้น ซึ่งการหาเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจะกล่าวถึงในบทต่อไป

2.1.1 ทรี

กราฟ $G=(V,E)$ ประกอบด้วย เซต V คือเซตของจุดยอด และเซต E คือเซตของเส้น เช่น กราฟที่มี $V=\{x,y,z\}$ และ $E=\{\{x,y\},\{y,z\}\}$ มีลักษณะดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 กราฟ $G=(V,E)$

ลักษณะทั่วไปของกราฟ G มีดังนี้

- อันดับ (order) ของ G คือ จำนวนจุดยอดของ G

- ขนาด (size) ของ G คือ จำนวนเส้นของ G

- รอยเดิน (trial) ใน G คือ ลำดับของเส้นที่ไม่ซ้ำกัน $e_1, e_2, ..., e_n$ เมื่อ $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ เมื่อ $v_i \in V$ สำหรับ $i=1,2,..,n$ และเรียกรอยเดินที่มีจุดปลายเหมือนกันว่า วงจร (circuit)

- เรียก G ว่าเป็น กราฟเชื่อมโยง (connected graph) ถ้าจุดยอดทุกคู่ของ G มีรอยเดินเชื่อมระหว่างจุดยอดคู่นั้น

- เรียก G ว่าเป็น **ทรี** ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวงจร ดังรูปที่ 2.2

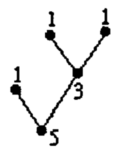
รูปที่ 2.2 ทรี อันดับ 1, 2 และ 3

- ถ้ากำหนดชื่อให้จุดยอดของ ทรี t แล้วเรียกจุดยอดที่เป็นฐานของ ทรี t ว่า ราก (root) เช่นจุดยอด i ดังรูปที่ 2.3

รูปที่ 2.3 ทรี t

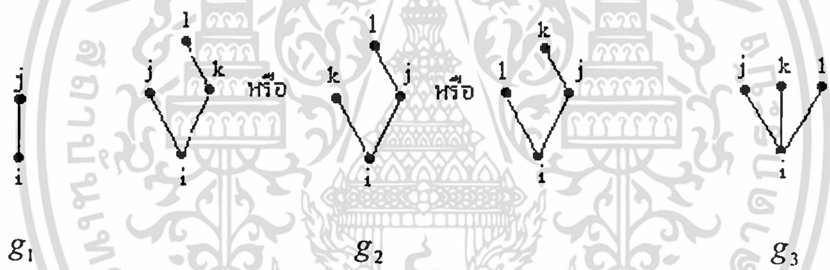
- $r(t)$ คือ อันดับของ ทรี t

- $\gamma(t)$ คือ ความหนาแน่น (density) ของ ทรี t โดยที่จุดยอดปลายสุดมีค่าเท่ากับ 1 และสำหรับจุดยอดใดๆจะมีค่าเท่ากับ $i+1$ เมื่อ i คือ ผลรวมของกิ่งที่เกี่ยวพันกับจุดยอดนั้น เช่น ทรีดังรูปที่ 2.4 มี $\gamma(t) = 1\times 1\times 1\times 3\times 5 = 15$



รูปที่ 2.4 $\gamma(t)$ ของทรี

- $\alpha(t)$ คือ จำนวนหนทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการกำหนดชื่อให้ ทรี t โดยทั่วไปใช้เซต $\{i<j<k<l<m<\cdots\}$ ในการกำหนดชื่อ เช่น ทรี g_1, g_2 และ g_3 ดังรูปที่ 2.5 มี $\alpha(g_1)=1$, $\alpha(g_2)=3$ และ $\alpha(g_3)=1$ ตามลำดับ



รูปที่ 2.5 ทรี g_1, g_2 และ g_3

2.1.2 เชิงอนุพันธ์มูลฐาน

กำหนดปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นอยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(a) = y_0 \quad a\le x\le b \tag{2.5}$$

เมื่อ

$$y = (y^1,\dots,y^n)^T \quad , \quad f = f(f^1,\dots,f^n)^T$$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของแต่ละ y^i คือ

$$(y^i)' = f^i(x, y^1, \ldots, y^n)$$

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับสองของแต่ละ y^i คือ

$$(y^i)'' = \frac{\partial f^i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{dx}$$

โดยหลักการแล้วสามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นของแต่ละ y^i ได้ แต่มีความยุ่งยากในการหา ถ้าสามารถทำให้ปัญหา (2.5) เป็นสมการออโตโนมัส (autonomous equation) หรืออยู่ในรูป $y' = f(y)$ ได้จะทำให้การหาอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นของแต่ละ y^i สะดวกขึ้น ซึ่งปัญหา (2.5) ทำให้อยู่ในรูปสมการออโตโนมัสได้โดยกำหนดตัวแปรอิสระ t ขึ้นมา แล้วปัญหา (2.5) กลายเป็น

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y) \quad , \quad y(a) = y_0$$
$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad , \quad x(a) = x_0$$

กำหนดให้

$$\frac{\partial f^i}{\partial y^j} = f^i_j$$
$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial y^j \partial y^k} = f^i_{jk}$$
$$\vdots$$

ดั้งนั้นสำหรับสมการ

$$y' = f(y(x)) \tag{2.6}$$

อนุพันธ์อันดับ 1 ของแต่ละ y^i คือ

$$(y^i)' = f^i \tag{2.7}$$

อนุพันธ์อันดับ 2 ของแต่ละ y^i คือ

$$(y^i)'' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \frac{dy^j}{dx} = \sum_{j=1}^{n} f_j^i f^j = f_j^i f^j \tag{2.8}$$

อนุพันธ์อันดับ 3 ของแต่ละ y^i คือ

$$\begin{aligned}(y^i)''' &= ((y^i)'')' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j^i}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dx} f^j + f_j^i \frac{\partial f^j}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dx} \right) \\ &= f_{jk}^i f^k f^j + f_j^i f_k^j f^k \end{aligned} \tag{2.9}$$

เรียกสมการ (2.7), (2.8) และ (2.9) ว่า **เชิงอนุพันธ์มูลฐาน**

สามารถใช้ ทรี t หาเชิงอนุพันธ์มูลฐานของสมการ (2.6) ได้ดังนี้ [1]

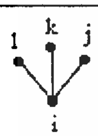
นิยาม 2.1 สำหรับ ทรี t ที่มี i เป็นราก จะสมนัยกับเชิงอนุพันธ์มูลฐาน $F^i(t)(y)$ กำหนดโดย

$$F^i(t)(y) = \sum_{j,k,\ldots} f_{j\ldots}^i(y) f^j{}_{\ldots}(y) f^k{}_{\ldots}(y) \ldots\ldots$$

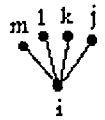
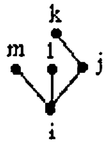
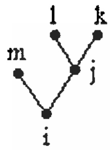
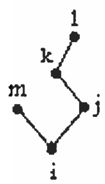
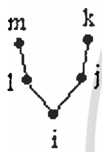
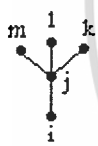
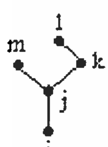
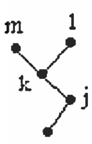
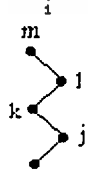
เช่น ทรี g_1 และ g_3 ดังรูปที่ 2.5 มี $F^i(g_1)(y) = f_j^i f^j$ และ $F^i(g_3)(y) = f_{jkl}^i f^j f^k f^l$ ตามลำดับ

เชิงอนุพันธ์มูลฐานที่สมนัยกับ ทรี t อันดับ 1 ถึงอันดับ 5 แสดงดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ทรี t อันดับ 1 ถึงอันดับ 5

กราฟ	t	$r(t)$	$\gamma(t)$	$\alpha(t)$	$F^i(t)(y)$
	τ	1	1	1	f^i
	t_{21}	2	2	1	$f^i_j f^j$
	t_{31}	3	3	1	$f^i_{jk} f^j f^k$
	t_{32}	3	6	1	$f^i_j f^j_k f^k$
	t_{41}	4	4	1	$f^i_{jkl} f^j f^k f^l$
	t_{42}	4	8	3	$f^i_{jl} f^j_k f^k f^l$
	t_{43}	4	12	1	$f^i_j f^j_{kl} f^k f^l$
	t_{44}	4	24	1	$f^i_j f^j_k f^k_l f^l$

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

กราฟ	t	$r(t)$	$\gamma(t)$	$\alpha(t)$	$F^i(t)(y)$
	t_{51}	5	5	1	$f^i_{jklm} f^j f^k f^l f^m$
	t_{52}	5	10	6	$f^i_{jlm} f^j_k f^k f^m$
	t_{53}	5	15	4	$f^i_{jm} f^j_{kl} f^k f^l f^m$
	t_{54}	5	30	4	$f^i_{jm} f^j_k f^k_l f^l f^m$
	t_{55}	5	20	3	$f^i_{jl} f^j_k f^k f^l_m f^m$
	t_{56}	5	20	1	$f^i_j f^j_{klm} f^k f^l f^m$
	t_{57}	5	40	3	$f^i_j f^j_{km} f^k_l f^l f^m$
	t_{58}	5	60	1	$f^i_j f^j_k f^k_{lm} f^l f^m$
	t_{59}	5	120	1	$f^i_j f^j_k f^k_l f^l_m f^m$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้อาศัยงานวิจัย [3] , [4] และ [5] มาช่วยในการศึกษาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ซึ่งทั้งสามงานวิจัย ได้อาศัยแนวคิดในการทำงานวิจัย ดังนี้ " การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยใช้ระเบียบวิธีขั้นเดียว จะหาผลเฉลยได้เฉพาะจุด x_n และ x_{n+1} เท่านั้นในช่วง $[x_n , x_{n+1}]$ สำหรับบางปัญหาผลเฉลยที่ได้นั้นไม่เพียงพอ เช่น ปัญหาที่ต้องการผลเฉลยเป็นกราฟ" ด้วยเหตุดังกล่าวจึงมีการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีขั้นเดียว ให้เป็นระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น รวมทั้งมีการศึกษาและวิเคราะห์ ความคลาดเคลื่อนและเสถียรภาพ ของระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นด้วย ซึ่งงานวิจัยทั้งสามเรื่องสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. ใน ปี ค.ศ. 1986 W. H. Enright, K. R. Jackson, S. P. Norsett และ P. G. Thomsen [3] ได้เสนองานวิจัยเรื่อง "Interpolants for Runge-Kutta Formulas" โดยได้เสนอกระบวนการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยใช้ Hermite-Birkhoff interpolation

$$
\begin{aligned}
&u_i(x_n) = y_n \qquad && u_i(x_{n+1}) = y_{n+1} \\
&u_i'(x_n) = f_1 \qquad && u_i'(x_{n+1}) = f_{n+1}^1 \\
&u_i'(x_n+\tau_{i,j}h_n) = f_{i,j} = f(x_n+\tau_{i,j}h_n, u_{i-1}(x_n+\tau_{i,j}h_n)), && \tau_{i,j} \in (0,1)
\end{aligned}
$$

มาช่วยในการสร้าง

2. ใน ปี ค.ศ. 1988 A. Bellen และ M. Zennaro [4] ได้เสนองานวิจัยเรื่อง "Stability Properties of Interpolants for Runge-Kutta methods" โดยได้เสนอแนวคิดในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ที่ใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ที่อยู่ในรูปแบบ

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \quad ; i = 1,2,...,s$$

เป็นสูตรพื้นฐาน งานวิจัยนี้ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นเป็นระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพ ซึ่งการเป็นระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพ เป็นการรับประกันว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ มีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริง

3. ใน ปี ค.ศ. 1990 A. Ostermann [5] ได้เสนองานวิจัยเรื่อง “Continuous Extensions of Rosenbrock-Type Method” ซึ่งงานวิจัยนี้ได้เสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยใช้ Rosenbrock-Type method

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

เมื่อ

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} k_j + \gamma_i h^2 \frac{\partial f}{\partial t}(x_n, y_n)$$

$$i = 1, 2, \ldots, s$$

เป็นสูตรพื้นฐาน เมื่อสร้างเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นแล้ว Rosenbrock-Type method อยู่ในรูปแบบ

$$u(x_n + \theta h) = y_n + \sum_{i=1}^{s} b_i(\theta) k_i \quad ; \quad 0 \le \theta \le 1$$

จากงานวิจัยทั้งสามเรื่อง ที่กล่าวมานั้น ในวิทยานิพนธ์นี้ ได้ใช้ [3] ช่วยในการศึกษาความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ใช้ [4] ช่วยในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น และใช้ [5] ประกอบการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อไป

2.3 บทสรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงเรื่อง ทรีและเชิงอนุพันธ์มูลฐาน ซึ่งเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้การศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นมีความสะดวกขึ้น นอกจากนี้ในบทนี้ได้กล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องสามงานวิจัย ซึ่งทั้งสามงานวิจัยเป็นส่วนช่วยในการศึกษาและวิเคราะห์ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ซึ่งผลการศึกษาจะกล่าวถึงในบทต่อไป

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในบทนี้กล่าวถึงวิธีการดำเนินการวิจัย โดยขั้นแรกทำการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เพื่อที่จะใช้เป็นสูตรพื้นฐาน หลังจากนั้นทำการศึกษาความคลาดเคลื่อนและวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ขั้นต่อมาทำการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ที่สร้างในขั้นแรก ให้เป็นระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น หลังจากนั้นทำการศึกษาความคลาดเคลื่อนและวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น สำหรับหัวข้อที่ศึกษาในบทนี้มีดังนี้

- ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
  - เงื่อนไขอันดับ
  - ความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
  - เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
- ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น
  - ความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น
  - เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น

ซึ่งจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

3.1 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ประมาณค่าผลเฉลยจริง $y(x_{n+1})$ ของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

ด้วยผลเฉลยเชิงตัวเลข y_{n+1} ซึ่งเป็นไปตาม

$$\begin{aligned} k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \\ y_{n+1} &= y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \quad ; i = 1,2,\ldots,s \end{aligned} \tag{3.2}$$

เรียกระเบียบวิธี (3.2) ว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ซึ่ง c_i เป็นไปตามเงื่อนไข

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \qquad (3.3)$$

และ c_i, a_{ij}, b_j เป็นค่าคงที่ ที่เป็นจำนวนจริง ระเบียบวิธี (3.2) สามารถเขียนในรูปแบบ

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} \quad b_s \end{array}$$

สามารถใช้ ทรี t หาพหุนาม (polynomial) ของ a_{ij} ของระเบียบวิธี (3.2) ได้โดย [1]

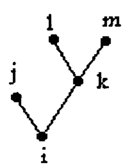
นิยาม 3.1 สำหรับ ทรี t ที่มี i เป็นราก จะสมนัยกับ

$$\Phi_i(t) = \sum_{j,k,\ldots=1}^{s} a_{ij} a_{\ldots} \cdots \; ; \; i = 1,2,\ldots,s \qquad (3.4)$$

เรียกสมการ (3.4) ว่า น้ำหนักมูลฐาน (elementary weight) เช่น ทรี t ดังรูปที่ 3.1 มีน้ำหนักมูลฐาน คือ

$$\Phi_i(t) = \sum_{j,k,l,m=1}^{s} a_{ij} a_{ik} a_{kl} a_{km} \; ; \; i = 1,2,\ldots,s$$

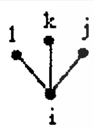
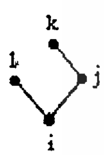
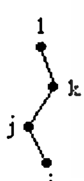
$$\Phi_i(t) = \sum_{k=1}^{s} c_i a_{ik} c_k^2 \; ; \; i = 1,2,\ldots,s \qquad (\quad (3.3))$$



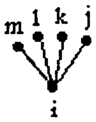
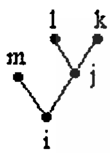
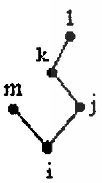
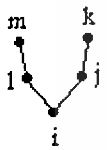
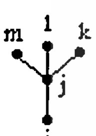
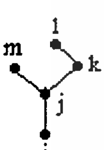
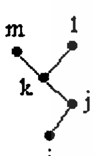
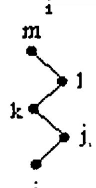
รูปที่ 3.1 ทรี t

จากสมการ (3.3) และสมการ (3.4) สามารถสร้างตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 3.1 ทรี t อันดับ 1 ถึงอันดับ 5

กราฟ	t	$r(t)$	$\gamma(t)$	$\alpha(t)$	$\Phi_i(t)$	$F^i(t)(y)$
	τ	1	1	1	1	f^i
	t_{21}	2	2	1	c_i	$f^i_j f^j$
	t_{31}	3	3	1	c_i^2	$f^i_{jk} f^j f^k$
	t_{32}	3	6	1	$\sum_j a_{ij} c_j$	$f^i_j f^j_k f^k$
	t_{41}	4	4	1	c_i^3	$f^i_{jkl} f^j f^k f^l$
	t_{42}	4	8	3	$\sum_j c_i a_{ij} c_j$	$f^i_{jl} f^j_k f^k f^l$
	t_{43}	4	12	1	$\sum_j a_{ij} c_j^2$	$f^i_j f^j_{kl} f^k f^l$
	t_{44}	4	24	1	$\sum_{j,k} a_{ij} a_{ik} c_k$	$f^i_j f^j_k f^k_l f^l$

ตารางที่ 3.1 (ต่อ)

กราฟ	t	$r(t)$	$\gamma(t)$	$\alpha(t)$	$\Phi_i(t)$	$F^i(t)(y)$
	t_{51}	5	5	1	c_i^4	$f^i_{jklm} f^j f^k f^l f^m$
	t_{52}	5	10	6	$\sum_j c_i^2 a_{ij} c_j$	$f^i_{jlm} f^j_k f^k f^m$
	t_{53}	5	15	4	$\sum_j c_i a_{ij} c_j^2$	$f^i_{jm} f^j_{kl} f^k f^l f^m$
	t_{54}	5	30	4	$\sum_{j,k} c_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$f^i_{jm} f^j_k f^k_l f^l f^m$
	t_{55}	5	20	3	$\sum_{j,l} a_{ij} c_j a_{il} c_l$	$f^i_{jl} f^j_k f^k f^l_m f^m$
	t_{56}	5	20	1	$\sum_j a_{ij} c_j^3$	$f^i_j f^j_{klm} f^k f^l f^m$
	t_{57}	5	40	3	$\sum_{j,k} a_{ij} c_j a_{jk} c_k$	$f^i_j f^j_{km} f^k_l f^l f^m$
	t_{58}	5	60	1	$\sum_{j,k} a_{ij} a_{jk} c_k^2$	$f^i_j f^j_k f^k_{lm} f^l f^m$
	t_{59}	5	120	1	$\sum_{j,k,l} a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l$	$f^i_j f^j_k f^k_l f^l_m f^m$

3.1.1 เงื่อนไขอันดับ

ถ้า $y(x)$ เป็นผลเฉลยจริงของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' = f(y) \tag{3.5}$$

สามารถหาอนุพันธ์อันดับ q ของ $y(x)$ ได้โดย [1]

ทฤษฎีบท 3.2 อนุพันธ์อันดับ q ของผลเฉลยจริง $y(x)$ เป็นไปตาม

$$y^{(q)}(x_n) = \sum_{r(t)=q} \alpha(t)F(t)(y_n) \tag{3.6}$$

เช่น จากตารางที่ 3.1 อนุพันธ์อันดับ 4 ของ $y(x)$ หาได้โดย

$t_{41} : \alpha(t_{41}) = 1$ และ $F^i(t_{41}) = f^i_{jkl} f^j f^k f^l$

$t_{42} : \alpha(t_{42}) = 3$ และ $F^i(t_{42}) = f^i_{jk} f^j f^k_l f^l$

$t_{43} : \alpha(t_{43}) = 1$ และ $F^i(t_{43}) = f^i_j f^j_{kl} f^k f^l$

$t_{44} : \alpha(t_{44}) = 1$ และ $F^i(t_{44}) = f^i_j f^j_k f^k_l f^l$

ดังนั้น

$$y^{(4)}(x) = f^i_{jkl} f^j f^k f^l + 3 f^i_{jk} f^j f^k_l f^l + f^i_j f^j_{kl} f^k f^l + f^i_j f^j_k f^k_l f^l$$

ถ้าใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (3.2) หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (3.5) ดังนั้นระเบียบวิธี (3.2) กลายเป็น

$$\begin{aligned} k_i &= f(y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \\ y_{n+1} &= y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \quad ; i = 1,2,\ldots,s \end{aligned} \tag{3.7}$$

แทน k_i ในสมการ (3.7) ด้วย g_i ที่ทำให้ $k_i = f(g_i)$ นั่นคือ

$$g_i = y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j$$

ดังนั้นสมการ (3.7) กลายเป็น

$$\begin{aligned} g_i &= y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(g_j) \ ; \ i = 1,2,..,s \\ y_{n+1} &= y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(g_j) \end{aligned} \tag{3.8}$$

สามารถหาอนุพันธ์อันดับ q ของสมการ (3.8) ได้โดย [1]

ทฤษฎีบท 3.3 อนุพันธ์อันดับ q ของ g_i เป็นไปตาม

$$g_i^{(q)}\Big|_{h=0} = \sum_{r(t)=q} \gamma(t) \sum_{i=1}^{s} a_{ij} \Phi_i(t) F(t)(y_n) \tag{3.9}$$

อนุพันธ์อันดับ q ของ y_{n+1} เป็นไปตาม

$$y_{n+1}^{(q)}\Big|_{h=0} = \sum_{r(t)=q} \alpha(t)\gamma(t) \sum_{i=1}^{s} b_i \Phi_i(t) F(t)(y_n) \tag{3.10}$$

สามารถหาเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยอาศัยนิยามต่อไปนี้ [2]

นิยาม 3.4 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เป็นระเบียบวิธีอันดับ p ถ้า

$$y_{n+1}^{(q)}\Big|_{h=0} = y^{(q)}(x_n) \tag{3.11}$$

สำหรับ $q = 1,2,...,p$

แทนสมการ (3.6) และสมการ (3.10) ในสมการ (3.11) ได้เงื่อนไขอันดับ ดังนี้

$$\sum_{r(t)=q}\alpha(t)\gamma(t)\sum_{i=1}^{s}b_i\Phi_i(t)F(t)(y_n) = \sum_{r(t)=q}\alpha(t)F(t)(y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{s}b_i\Phi_i(t) = \frac{1}{\gamma(t)} \tag{3.12}$$

สามารถใช้สมการ (3.12) สร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับต่างๆได้ เช่น

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

จากสมการ (3.12) ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 มีเงื่อนไขอันดับ ดังนี้

$$\tau \;:\; \sum_{i=1}^{2}b_i = b_1 + b_2 = 1$$

$$t_{21} \;:\; \sum_{i=1}^{2}b_ic_i = b_2c_2 = \tfrac{1}{2}$$

เช่น

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} ,$$

จากสมการ (3.12) ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3 มีเงื่อนไขอันดับ ดังนี้

$$\tau \quad : \quad \sum_{i=1}^{3} b_i = b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

$$t_{21} \ : \ \sum_{i=1}^{3} b_i c_i = b_2 c_2 + b_3 c_3 = \tfrac{1}{2}$$

$$t_{31} \ : \ \sum_{i=1}^{3} b_i c_i^2 = b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \tfrac{1}{3}$$

$$t_{32} \ : \ \sum_{i,j=1}^{3} b_i a_{ij} c_j = b_3 a_{32} c_2 = \tfrac{1}{6}$$

เช่น

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6}
\end{array}$$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}$$

จากสมการ (3.12) ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 มีเงื่อนไขอันดับ ดังนี้

$$\tau \ : \ \sum_{i=1}^{4} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$

$$t_{21} \ : \ \sum_{i=1}^{4} b_i c_i = b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \tfrac{1}{2}$$

$$t_{31} \ : \ \sum_{i=1}^{4} b_i c_i^2 = b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 = \tfrac{1}{3}$$

$$t_{32} \ : \ \sum_{i,j=1}^{4} b_i a_{ij} c_j = b_3 a_{32} c_2 + b_4 a_{42} c_2 + b_4 a_{43} c_3 = \tfrac{1}{6}$$

$$t_{41} \ : \ \sum_{i=1}^{4} b_i c_i^3 = b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 = \tfrac{1}{4}$$

$$t_{42} \ : \ \sum_{i,j=1}^{4} b_i c_i a_{ij} c_j = b_3 c_3 a_{32} c_2 + b_4 c_4 a_{42} c_2 + b_4 c_4 a_{43} c_3 = \tfrac{1}{8}$$

$$t_{43} \ : \ \sum_{i,j=1}^{4} b_i a_{ij} c_i^2 = b_3 a_{32} c_2^2 + b_4 a_{42} c_2^2 + b_4 a_{43} c_3^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$t_{44} \ : \ \sum_{i,j,k=1}^{4} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \tfrac{1}{24}$$

เช่น

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

ขั้นตอนวิธี (algorithm) ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \ ; \ i = 1,2,\ldots,s$$

เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

มีดังนี้

ข้อมูลเข้า : ค่าเริ่มต้น x_0, y_0

ช่วงของการหาผลเฉลย $[a,b]$

ขนาดขั้น h

$n = (b-a)/h$

for i = 1 to n do

begin

$$k_s = f(x_n + c_s h, y_n + h\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j k_j$$

end.

ข้อมูลออก : ค่า x, y

3.1.2 ความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

จากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (3.2) จะเห็นว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเป็นระเบียบวิธีขั้นเดียว โดยทั่วไประเบียบวิธีขั้นเดียวอยู่ในรูปแบบ

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \tag{3.13}$$

ซึ่งมี local truncation error : e_{n+1} ที่จุด x_{n+1} ดังนี้

$$e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_n - h\Phi(x_n, y_n, h) \tag{3.14}$$

เมื่อ $y(x_{n+1})$ คือ ผลเฉลยจริง และ y_{n+1} คือ ผลเฉลยเชิงตัวเลข

และมี global truncation error : E_n ที่จุด x_n ดังนี้

$$E_n = y(x_n) - y_n \tag{3.15}$$

ถ้าฟังก์ชัน $\Phi(x,y,h)$ สอดคล้องกับ Lipschitz condition นั่นคือ ในบริเวณ $a \le x \le b$ จะมีค่าคงที่ L ทำให้

$$\left|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,y^*,h)\right| \le L\left|y - y^*\right|$$

ทุกค่า y, y^* และ $a \le x \le b$ สามารถหาขอบเขตของ E ได้โดย [6]

ทฤษฎีบท 3.5 global truncation error : E_n ที่จุด $x_n = x_0 + nh$ มีขอบเขตดังนี้

$$\left|E_n\right| \le \frac{D}{hL}(e^{nhL} - 1) \le \frac{D}{hL}e^{nhL}$$

เมื่อ $\max\limits_n \left|e_n\right| \le D$

ระเบียบวิธีขั้นเดียวที่ง่ายที่สุดและใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาระเบียบวิธีอื่นๆ คือ ระเบียบวิธีออยเลอร์

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

ซึ่งมี local truncation error : e_{n+1} ที่จุด x_{n+1} ดังนี้

$$e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_n - hf(x_n, y_n) \tag{3.16}$$

กระจาย $y(x_{n+1})$ ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด x_n โดยให้ $y(x_n) = y_n$ และ $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$ ดังนั้นสมการ (3.16) กลายเป็น

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= (y_n + hf(x_n, y_n) + \tfrac{1}{2}h^2 y''(\xi_n)) - y_n - hf(x_n, y_n) \\ &= \tfrac{1}{2}h^2 y''(\xi_n) \end{aligned}$$

เมื่อ $x_{n+1} \le \xi_n \le x_{n+1}$

ถ้า $|y''(\xi_n)| \le M$ ดังนั้น $|e_{n+1}| \le \frac{1}{2}h^2 M$ จาก ทฤษฎีบท 3.5 จะได้

$$|E_n| \le \frac{hM}{2L}\exp[L(x_n - x_0)] \tag{3.17}$$

จากอสมการ (3.17) ถ้า $h \to 0$ แล้ว $y_n \to y(x_n)$ ด้วยอัตราส่วน $O(h)$ ดั้งนั้นจึงเรียก ระเบียบวิธีออยเลอร์ว่าเป็น ระเบียบวิธีอันดับ 1

โดยทั่วไประเบียบวิธี (3.13) เป็นระเบียบวิธีอันดับ p ถ้า

$$\max_n |e_n| \le C h^{p+1} = O(h^{p+1})$$

และ

$$|E_n| \le \frac{C'}{L} e^{nhL} h^p = O(h^p)$$

เมื่อ C และ C' เป็นค่าคงที่

ในทำนองเดียวกับระเบียบวิธีออยเลอร์ ถ้าใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ p หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (3.1) ที่จุด x_{n+1} มี local truncation error ดังนี้

$$e_{n+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{r(t)=p+1} \alpha(t)\, e(t)\, F(t)(y_n) + O(h^{p+2}) \tag{3.18}$$

เมื่อ

$$e(t) = 1 - \gamma(t)\sum_{i=1}^{s} b_i \Phi_i(t) \tag{3.19}$$

เรียกสมการ (3.19) ว่า สัมประสิทธิ์ความคลาดเคลื่อน (error coefficients)

สามารถหา local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ได้ดังนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

จากสมการ (3.19) และตารางที่ 3.1 จะได้

$$e(t_{31}) = 1 - 3\sum_{i=1}^{2} b_i c_i^2 = b_2 c_2^4 = -\tfrac{1}{2}$$

$$e(t_{32}) = 1 - 6\sum_{i,j=1}^{2} b_i a_{ij} c_j = 1$$

ดังนั้น local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 คือ

$$e_{n+1} = \frac{h^3}{6}\{-\tfrac{1}{2} f^i_{jk} f^j f^k (y_n) + f^i_j f^j_k f^k (y_n)\}$$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6}
\end{array}$$

จากสมการ (3.19) และตารางที่ 3.1 จะได้

$$e(t_{41}) = 1 - 4\sum_{i=1}^{3} b_i c_i^3 = b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 = 0$$

$$e(t_{42}) = 1 - 8\sum_{i,j=1}^{3} b_i c_i a_{ij} c_j = b_3 c_3 a_{32} c_2 = \tfrac{1}{3}$$

$$e(t_{43}) = 1 - 12\sum_{i,j=1}^{3} b_i a_{ij} c_j^2 = b_3 a_{32} c_2^2 = -1$$

$$e(t_{44}) = 1 - 24\sum_{i,j,k=1}^{3} b_i a_{ij} a_{ik} c_k = b_3 a_{31} a_{32} c_2 + b_3 a_{32} a_{32} c_2 = -1$$

ดังนั้น local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3 คือ

$$e_{n+1} = \frac{h^4}{24}\{f_{jl}^i f_k^j f^k f^l(y_n) - f_j^i f_{kl}^j f^k f^l(y_n) - f_j^i f_k^j f_l^k f^l(y_n)\}$$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}$$

เช่น ระเบียบวิธี

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

จากสมการ (3.19) และตารางที่ 3.1 จะได้

$$e(t_{51}) = 1 - 5\sum_{i=1}^{4} b_i c_i^4 = b_2 c_2^4 + b_3 c_3^4 + b_4 c_4^4 = -\tfrac{1}{24}$$

$$e(t_{52}) = 1 - 10\sum_{i,j=1}^{4} b_i c_i^2 a_{ij} c_j = b_3 c_3^2 a_{32} c_2 + b_4 c_4^2 a_{43} c_3 = -\tfrac{1}{24}$$

$$e(t_{53}) = 1 - 15\sum_{i,j=1}^{4} b_i c_i a_{ij} c_j^2 = b_3 c_3 a_{32} c_2^2 + b_4 c_4 a_{43} c_3^2 = \tfrac{1}{16}$$

$$e(t_{54}) = 1 - 30\sum_{i,j,k=1}^{4} b_i c_i a_{ij} a_{ik} c_k = b_4 c_4 a_{43} a_{32} c_2 = -\tfrac{1}{4}$$

$$e(t_{55}) = 1 - 20\sum_{i,j,l=1}^{4} b_i a_{ij} c_j a_{il} c_l = b_3 a_{32} c_2 a_{32} c_2 + b_4 a_{43} c_3 a_{43} c_3 = -\tfrac{2}{3}$$

$$e(t_{56}) = 1 - 20\sum_{i,j=1}^{4} b_i a_{ij} c_j^3 = b_3 a_{32} c_2^3 + b_4 a_{43} c_3^3 = \tfrac{1}{6}$$

$$e(t_{57}) = 1 - 40\sum_{i,j,k=1}^{4} b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k = b_4 a_{43} c_3 a_{32} c_2 = \tfrac{1}{6}$$

$$e(t_{58}) = 1 - 60\sum_{i,j,k=1}^{4} b_i a_{ij} a_{ik} c_k^2 = b_4 a_{43} a_{32} c_2^2 = -\tfrac{1}{4}$$

$$e(t_{59}) = 1 - 120\sum_{i,j,l=1}^{4} b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l = 1$$

ดังนั้น local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 คือ

$$\begin{aligned} e_{n+1} = \frac{h^5}{120}\{ & -\tfrac{1}{24} f^i_{jklm} f^j f^k f^l f^m(y_n) - \tfrac{1}{4} f^i_{jlm} f^j_k f^k f^m(y_n) + \tfrac{1}{4} f^i_{jm} f^j_{kl} f^k f^l f^m(y_n) \\ & - f^i_{jm} f^j_k f^k_l f^l f^m(y_n) - 2 f^i_{jl} f^j_k f^k f^l_m f^m(y_n) + \tfrac{1}{6} f^i_j f^j_{klm} f^k f^l f^m(y_n) \\ & + \tfrac{1}{2} f^i_j f^j_{km} f^k_l f^l f^m(y_n) - \tfrac{1}{4} f^i_j f^j_k f^k_{lm} f^l f^m(y_n) + f^i_j f^j_k f^k_l f^l_m f^m(y_n)\} \end{aligned}$$

3.1.3 เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

การวิเคราะห์เสถียรภาพ ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา คือการศึกษาการลู่เข้าสู่จุดศูนย์ของผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อผลเฉลยจริงลู่เข้าสู่จุดศูนย์ โดยในการศึกษาจะใช้ปัญหาทดสอบมาตรฐาน (standard test problem)

$$y' = \lambda y \quad , \quad y(0) = 1 \tag{3.20}$$

ทดสอบระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งปัญหา (3.20) มีผลเฉลยจริงคือ

$$y(x) = e^{\lambda x} \tag{3.21}$$

จากสมการ (3.21) $y \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lambda < 0$ ถ้าใช้ปัญหา (3.20) ทดสอบระเบียบวิธีออยเลอร์

$$y_{n+1} = y_n + hf(x, y)$$

จากปัญหา (3.20) จะได้

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_1 &= y_0 + h(\lambda y_0) = 1 + h\lambda \\
y_2 &= y_1 + h(\lambda y_1) = (1 + h\lambda)y_1 = (1 + h\lambda)^2 \\
&\vdots \\
y_n &= (1 + h\lambda)^n = (1+z)^n \;\; ; \;\; z = h\lambda \\
y_n &= (F(z))^n
\end{aligned} \tag{3.22}$$

จากสมการ (3.22) $y_n \to 0$ ก็ต่อเมื่อ $|F(z)| < 1$ นั่นคือ $h\lambda \in (-2, 0)$ เรียก $|1 + h\lambda| < 1$ ว่า **บริเวณเสถียรภาพ (stability region)**

สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาสามารถวิเคราะห์เสถียรภาพได้ดังต่อไปนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h \,,\, y_n + hk_1) \\
y_{n+1} &= y_n + h(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2)
\end{aligned}$$

จากปัญหา (3.20) จะได้

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lambda y_n \\
k_2 &= \lambda(y_n + hk_1) = (\lambda + h\lambda^2)y_n \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}h(\lambda y_n + (\lambda + h\lambda^2)y_n) \\
&= (1 + h\lambda + \tfrac{1}{2}h^2\lambda^2)y_n \\
&= (1 + z + \tfrac{1}{2}z^2)y_n \ ; \ z = h\lambda \\
&= F(z)y_n
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

ในทำนองเดียวกับระเบียบวิธีออยเลอร์ จากสมการ (3.23) $y_{n+1} \to 0$ ก็ต่อเมื่อ $|F(z)|<1$ นั่นคือ $h\lambda \in (-2,0)$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h\ ,\ y_n + hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h\ ,\ y_n + h(\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{1}{4}k_2)) \\
y_{n+1} &= y_n + h(\tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2 + \tfrac{4}{6}k_3)
\end{aligned}
$$

จากปัญหา (3.20) จะได้

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lambda y_n \\
k_2 &= \lambda(y_n + hk_1) = (\lambda + h\lambda^2)y_n \\
k_3 &= \lambda(y_n + \tfrac{1}{4}h(k_1 + k_2)) \\
&= (\lambda + \tfrac{1}{2}h\lambda^2 + \tfrac{1}{4}h^2\lambda^3)y_n \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h(k_1 + k_2 + 4k_3) \\
&= (1 + h\lambda + \tfrac{1}{2}h^2\lambda^2 + \tfrac{1}{6}h^3\lambda^3)y_n \\
&= (1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3)y_n \ ; \ z = h\lambda \\
&= F(z)y_n
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

ในทำนองเดียวกับระเบียบวิธีออยเลอร์ จากสมการ (3.24) $y_{n+1} \to 0$ ก็ต่อเมื่อ $|F(z)|<1$ นั่นคือ $h\lambda \in (-2.51,0)$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h\,,\, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h\,,\, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h\,,\, y_n + hk_3) \\
y_{n+1} &= y_n + h(\tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{2}{6}k_2 + \tfrac{2}{6}k_3 + \tfrac{1}{6}k_4)
\end{aligned}
$$

จากปัญหา (3.20) จะได้

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lambda y_n \\
k_2 &= \lambda(y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) = (\lambda + \tfrac{1}{2}h\lambda^2)y_n \\
k_3 &= \lambda(y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\
&= (\lambda + \tfrac{1}{2}h\lambda^2 + \tfrac{1}{4}h^2\lambda^3)y_n \\
k_4 &= \lambda(y_n + hk_3) \\
&= (\lambda + h\lambda^2 + \tfrac{1}{2}h^2\lambda^3 + \tfrac{1}{4}h^3\lambda^4)y_n \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= (1 + h\lambda + \tfrac{1}{2}h^2\lambda^2 + \tfrac{1}{6}h^3\lambda^3 + \tfrac{1}{24}h^4\lambda^4)y_n \\
&= (1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{24}z^4)y_n \;;\; z = h\lambda \\
&= F(z)y_n
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

ในทำนองเดียวกับระเบียบวิธีออยเลอร์ จากสมการ (3.25) $y_{n+1} \to 0$ ก็ต่อเมื่อ $|F(z)|<1$ นั่นคือ $h\lambda \in (-2.78,0)$

ตารางที่ 3.2 เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

อันดับ	$F(z)$	บริเวณเสถียรภาพ
1	$1 + z$	$(-2,0)$
2	$1 + z + \frac{1}{2}z^2$	$(-2,0)$
3	$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$	$(-2.51,0)$
4	$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$	$(-2.78,0)$

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาสำหรับกรณีระบบสมการเชิงเส้นก็จะศึกษาเหมือนกับกรณีสมการเดียว กำหนดให้ระบบสมการเชิงเส้นอยู่ในรูปแบบ

$$y' = Ay \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.26}$$

เมื่อ A คือ เมตริกซ์ค่าคงที่ขนาด $n \times n$ ผลเฉลยจริงของระบบสมการ (3.26) อยู่ในรูปแบบ

$$y(x) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n x} \tag{3.27}$$

เมื่อ λ_i คือ ค่าเจาะจง (eigenvalue) ของ A

v_i คือ เวกเตอร์เจาะจง (eigenvector) ที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ_i ของ A

c_i คือ ค่าคงที่

จากสมการ (3.27) $y(x) \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lambda_i < 0$ ทุกค่า $i = 1,2,\ldots,n$ ซึ่งการวิเคราะห์จะพิจารณาค่าเจาะจงที่เป็นลบมากที่สุด หรือพิจารณา $\max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$ ซึ่งถ้า λ_i เป็นจำนวนจริง บริเวณเสถียรภาพของ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจะอยู่ภายในช่วงเหมือนกับตารางที่ 3.2 แต่ถ้า λ_i เป็นจำนวนเชิงซ้อนบริเวณเสถียรภาพต้องอยู่ภายในขอบเขตที่กำหนดโดย $|F(z_i)| < 1$ เมื่อ $z_i = h\lambda_i$ บริเวณเสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 1 ถึงอันดับ 4 แสดงดังรูปที่ 3.2

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาสำหรับกรณีระบบสมการไม่เชิงเส้นก็จะศึกษาเหมือนกับกรณีระบบสมการเชิงเส้น แต่ต้องทำการ ลิเนียรไลเซชัน (linearization) ระบบสมการไม่เชิงเส้นก่อนจึงทำการวิเคราะห์

จากระบบสมการไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.28}$$

สมมุติว่าผลเฉลยจริงของระบบสมการ (3.28) ลู่เข้าสู่จุดวิกฤต (critical point) $\bar{y} = 0$ (จุดที่ทำให้ $f(x,\bar{y}) = 0$ ทุกค่า x) สามารถทำการ ลิเนียรไลเซชันสมการ (3.28) ได้โดยกระจาย $f(x,y)$ ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) รอบจุด $\bar{y} = 0$ จะได้

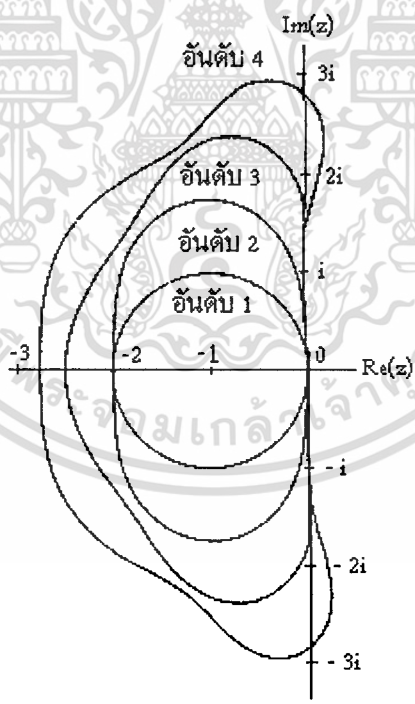
$$f(x,y) = f(x,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)y + \ldots$$

ดังนั้นระบบสมการ (3.28) กลายเป็น

$$y' = \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.29}$$

ถ้า $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \neq 0$ การวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาสำหรับระบบสมการ (3.29) ใช้หลักการเดียวกับระบบสมการเชิงเส้น (3.26) แต่ถ้า $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$ ไม่สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาได้

จากการวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผ่านมาทั้งหมดสามารถสรุปได้ว่า ถ้าใช้ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (3.20) ในกรณี $\lambda < 0$ ต้องเลือกขนาดขั้น h ที่ทำให้ $h\lambda$ อยู่ภายในบริเวณเสถียรภาพ $S = \{z \in C : |F(z)| < 1\}$ และถ้าบริเวณเสถียรภาพ $S \supset C^- = \{z : \text{Re}(z) < 0\}$ แล้วจะเรียกระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาว่าเป็น **A-stable** ซึ่งจะเห็นว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเป็น A-stable ถ้า $\lambda < 0$



รูปที่ 3.2 บริเวณเสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 1 ถึงอันดับ 4

3.2 ระเบียบวิธีรูงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น

ระเบียบวิธีรูงเง-คุตตา (3.2) ประมาณค่าผลเฉลยจริง $y(x)$ ของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.30}$$

ด้วยผลเฉลยเชิงตัวเลข $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ ที่เซตของจุด $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots$ โดยใช้ขนาดขั้น h เมื่อ $h = x_{n+1} - x_n$ ถ้าต้องการผลเฉลยที่มีความละเอียดหรือมีความหนาแน่นต้องใช้ h ขนาดเล็กมาก ซึ่งทำให้จำนวนครั้งในการคำนวณเพิ่มขึ้นมาก ระเบียบวิธีรูงเง-คุตตา (3.2) สามารถพัฒนาให้เป็นระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ได้โดยการเปลี่ยนค่าคงที่ b_j ให้เป็นพหุนาม ดังนั้น ระเบียบวิธี (3.2) กลายเป็น

$$\begin{aligned} k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \ ; i = 1,2,\ldots,s^* \\ u(x_n + \theta h) &= y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j(\theta) k_j \ ; \ 0 \le \theta \le 1 \end{aligned} \tag{3.31}$$

เรียกระเบียบวิธี (3.31) ว่า **ระเบียบวิธีรูงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น (continuous Runge-Kutta method หรือ dense output formula for Runge-Kutta method)** ซึ่ง $b_j(\theta)$ เป็นไปตามเงื่อนไข

$$b_j(0) = 0 \quad , \quad b_j(1) = b_j \ ; \ j = 1,2,\ldots,s^* \tag{3.32}$$

ดังนั้น $u(x_n + \theta h)$ เป็นไปตามเงื่อนไข

$$u(x_n) = y_n \quad , \quad u(x_n + h) = y_{n+1} \tag{3.33}$$

ระเบียบวิธี (3.31) มีเงื่อนไขอันดับ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ [1]

ทฤษฎีบท 3.6 ระเบียบวิธี (3.31) เป็นระเบียบวิธีอันดับ p^* ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{j=1}^{s^*} b_j(\theta)\Phi_j(\theta) = \frac{\theta^{r(t)}}{\gamma(t)} \quad \text{สำหรับ} \quad r(t) \le p^*$$

$$\sum_{j=1}^{s^*} b_{j,r(t)}\Phi_j(\theta) = \frac{1}{\gamma(t)} \quad \text{สำหรับ} \quad r(t) \le p^* \qquad (3.34)$$

เมื่อ

$$b_j(\theta) = \sum_{r(t)=1}^{p^*} b_{j,r(t)}\theta^{r(t)}$$

จากสมการ (3.34) จะได้

$$\begin{aligned}
r(t) = 1:&\ \Phi_1(\tau)b_{11} + \Phi_2(\tau)b_{21} + \dots + \Phi_{s^*}(\tau)b_{s^*1} = 1 \\
r(t) = 2:&\ \Phi_1(t_{21})b_{12} + \Phi_2(t_{21})b_{22} + \dots + \Phi_{s^*}(t_{21})b_{s^*2} = \tfrac{1}{2} \\
r(t) = 3:&\ \Phi_1(t_{31})b_{13} + \Phi_2(t_{31})b_{23} + \dots + \Phi_{s^*}(t_{31})b_{s^*3} = \tfrac{1}{3} \\
&\ \Phi_1(t_{32})b_{13} + \Phi_2(t_{32})b_{23} + \dots + \Phi_{s^*}(t_{32})b_{s^*3} = \tfrac{1}{6} \\
\vdots \qquad & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

ซึ่งก็คือระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \Phi_1(t_{21}) & \Phi_2(t_{21}) & \cdots & \Phi_{s^*}(t_{21}) \\ \Phi_1(t_{31}) & \Phi_2(t_{31}) & \cdots & \Phi_{s^*}(t_{31}) \\ \Phi_1(t_{32}) & \Phi_2(t_{32}) & \cdots & \Phi_{s^*}(t_{32}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p^*} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p^*} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3p^*} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s^*1} & b_{s^*2} & \cdots & b_{s^*p^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \qquad (3.35)$$

สามารถใช้ระบบสมการ (3.35) สร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นได้ดังต่อไปนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 2 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 2 ($p^* = 2, s^* = 2$) ได้ดังนี้ จากระบบสมการ (3.35) จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Phi_1(t_{21}) & \Phi_2(t_{21}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

จากตารางที่ 3.1 จะได้

$$\Phi_i(t_{21}) = c_i$$

ดังนั้น จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

ผลเฉลยของระบบสมการ (3.36) คือ

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{1}{2}\theta^2 \\ b_2(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

ดังนั้น ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 2 อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2) \;;\; 0 \le \theta \le 1 \end{aligned} \tag{3.38}$$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 ($p^* = 3, s^* = 4$) ได้โดยเพิ่มสถานะ $k_4 = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ เข้าไปในสูตรเดิมโดยที่ $c_4 = 1$ และ $a_{4j} = b_j$ ทุกค่า j ซึ่งสามารถสร้างได้ดังนี้

จากระบบสมการ (3.35) จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \Phi_1(t_{21}) & \Phi_2(t_{21}) & \Phi_3(t_{21}) & \Phi_4(t_{21}) \\ \Phi_1(t_{31}) & \Phi_2(t_{31}) & \Phi_3(t_{31}) & \Phi_4(t_{31}) \\ \Phi_1(t_{32}) & \Phi_2(t_{32}) & \Phi_3(t_{32}) & \Phi_4(t_{32}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

จากตารางที่ 3.1 จะได้

$$\Phi_i(t_{21}) = c_i$$
$$\Phi_i(t_{31}) = c_i^2$$
$$\Phi_i(t_{32}) = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} c_j$$

ดังนั้น จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

ผลเฉลยของระบบสมการ (3.39) คือ

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= 2\theta^2 - \tfrac{4}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= -\theta^2 + \theta^3
\end{aligned}
\qquad (3.41)
$$

ดังนั้น ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 อยู่ในรูปแบบ

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + h(\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{1}{4}k_2)) \\
k_4 &= f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4)\ ;\ 0 \le \theta \le 1
\end{aligned}
\qquad (3.42)
$$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}
$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & & & \\
\tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \tfrac{1}{6} & \tfrac{2}{6} & \tfrac{2}{6} & \tfrac{1}{6}
\end{array}
$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 $(p^{*} = 3, s^{*} = 4)$ ได้ดังนี้ จากระบบสมการ (3.35) จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \Phi_1(t_{21}) & \Phi_2(t_{21}) & \Phi_3(t_{21}) & \Phi_4(t_{21}) \\ \Phi_1(t_{31}) & \Phi_2(t_{31}) & \Phi_3(t_{31}) & \Phi_4(t_{31}) \\ \Phi_1(t_{32}) & \Phi_2(t_{32}) & \Phi_3(t_{32}) & \Phi_4(t_{32}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

จ่ากตารางที่ 3.1 จะได้

$$\Phi_i(t_{21}) = c_i$$

$$\Phi_i(t_{31}) = c_i^2$$

$$\Phi_i(t_{32}) = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} c_j$$

ดังนั้น จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

ผลเฉลยของระบบสมการ (3.43) คือ

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= -\tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

ดังนั้น ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 อยู่ในรูปแบบ

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4)\ ;\ 0 \le \theta \le 1
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

ขั้นตอนวิธีระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น s^* สถานะ อันดับ p^*

$$k_i = f(x_n + c_i h_x, y_n + h_x \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \ ; i = 1,2,\ldots,s^*$$

$$u(x_n + \theta h_x) = y_n + h_x \sum_{j=1}^{i} b_j(\theta) k_j \ ; \ 0 \le \theta \le 1$$

สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา s สถานะ อันดับ p

$$k_i = f(x_n + c_i h_x, y_n + h_x \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_x \sum_{j=1}^{i} b_j k_j \ ; \ i = 1,2,\ldots,s$$

เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

มีดังนี้

ข้อมูลเข้า : ค่าเริ่มต้น x_0, y_0

ช่วงของการหาผลเฉลย $[a,b]$

ขนาดขั้นสำหรับ x : h_x

ขนาดขั้นสำหรับ θ : h_θ

$n = (b-a)/h_x$, $m = 1/h_\theta$

for $i = 1$ to n do

begin

$$k_i = f(x_n + c_i h_x, y_n + h_x \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \ ; \ i = 1,2,\ldots,s^*$$

$\theta = h_\theta$

for $l = 1$ to m do

begin

$$u(x_n + \theta h_x) = y_n + h_x \sum_{j=1}^{i} b_j(\theta) k_j \ ; \ i = 1,2,\ldots,s^*$$

$\theta = \theta + h_\theta$

end

$$y_{n+1} = y_n + h_x \sum_{j=1}^{i} b_j k_j \ ; \ i = 1,2,\ldots,s$$

$x_{n+1} = x_n + h_x$

end.

ข้อมูลออก : ค่า x, u

ในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ $p \geq 3$ เป็นสูตรพื้นฐาน สามารถใช้การประมาณค่าภายในช่วงแบบแฮร์มิตต์ (Hermite interpolation) มาช่วยในการสร้างได้ ซึ่งจะมีความสะดวกมากกว่าใช้ระบบสมการ (3.35) โดยการหาพหุนามดีกรี 3 ที่เป็นไปตามเงื่อนไข

$$\begin{aligned} u(x_n) &= y_n \quad , \quad u'(x_n) = hf(x_n, y_n) \\ u(x_n + h) &= y_{n+1} \quad , \quad u'(x_n + h) = hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{aligned} \tag{3.47}$$

ซึ่งพหุนามนั้น คือ

$$u(x_n + \theta h) = b_1(\theta) y_n + b_2(\theta) hf(x_n, y_n) + b_3(\theta) y_{n+1} + b_4(\theta) hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{3.48}$$

เมื่อ $0 \leq \theta \leq 1$ และ

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= 1 - 3\theta^2 + 2\theta^3 \\ b_2(\theta) &= \theta - 2\theta^2 + \theta^3 \\ b_3(\theta) &= 3\theta^2 - 2\theta^3 \\ b_4(\theta) &= -\theta^2 + \theta^3 \end{aligned}$$

ถ้าแทน y_{n+1} ในสมการ (3.48) ด้วยสมการ (3.2) แล้วสมการ (3.48) กลายเป็น

$$\begin{aligned} u(x_n + \theta h) &= b_1(\theta) y_n + b_2(\theta) hf(x_n, y_n) + b_3(\theta)(y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i) \\ &\quad + b_4(\theta) hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ &= y_n + b_2(\theta) hf(x_n, y_n) + b_3(\theta)(h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i) \\ &\quad + b_4(\theta) hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ &= y_n + \{b_2(\theta) + b_3(\theta) b_1\} hk_1 + b_3(\theta) h\sum_{i=2}^{s} b_i k_i + b_4(\theta) hk_s. \end{aligned} \tag{3.49}$$

เมื่อ $0 \leq \theta \leq 1$ ซึ่งเป็นกรณีหนึ่งของระเบียบวิธี (3.31)

ตัวอย่างการสร้างระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 โดยใช้สมการ (3.49) มีดังนี้

1. ใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
c_2 & a_{21} & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}
$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6}
\end{array}
$$

เป็นสูตรพื้นฐาน จากสมการ (3.49) จะได้

$$
\begin{aligned}
u(x_n+\theta h) &= y_n + \{(\theta^3 - 2\theta^2 + \theta) + (-2\theta^3 + 3\theta^2)\tfrac{1}{6}\}hk_1 + (-2\theta^3 + 3\theta^2)\tfrac{1}{6}hk_2 \\
&\quad + (-2\theta^3 + 3\theta^2)\tfrac{4}{6}hk_3 + (\theta^3 - \theta^2)hk_4 \\
&= y_n + (\tfrac{2}{3}\theta^3 - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \theta)hk_1 + (-\tfrac{1}{3}\theta^3 + \tfrac{1}{2}\theta^2)hk_2 + (-\tfrac{4}{3}\theta^3 + 2\theta^2)hk_3 \\
&\quad + (\theta^3 - \theta^2)hk_4
\end{aligned}
$$

เมื่อ $0 \le \theta \le 1$ ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเดียวกันกับระเบียบวิธี (3.42)

2. ใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}
$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

เป็นสูตรพื้นฐาน จากสมการ (3.49) จะได้

$$
\begin{aligned}
u(x_n+\theta h) &= y_n + \{(\theta^3-2\theta^2+\theta)+(-2\theta^3+3\theta^2)\tfrac{1}{6}\}hk_1 + (-2\theta^3+3\theta^2)\tfrac{2}{6}hk_2 \\
&\quad + (-2\theta^3+3\theta^2)\tfrac{2}{6}hk_3 + (-2\theta^3+3\theta^2)\tfrac{1}{6}hk_4 + (\theta^3-\theta^2)hk_5 \\
&= y_n + (\tfrac{2}{3}\theta^3-\tfrac{3}{2}\theta^2+\theta)hk_1 + (-\tfrac{2}{3}\theta^3+\theta^2)hk_2 + (-\tfrac{2}{3}\theta^3+\theta^2)hk_3 \\
&\quad + (-\tfrac{1}{3}\theta^3+\tfrac{1}{2}\theta^2)hk_4 + (\theta^3-\theta^2)hk_5
\end{aligned}
$$

เมื่อ $0 \le \theta \le 1$ ซึ่งเป็นระเบียบวิธี 5 สถานะ อันดับ 3

3.2.1 ความคลาดเคลื่อนของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น

จากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น (3.31) จะเห็นว่าเป็นระเบียบวิธีขั้นเดียว ดังนั้นที่จุด x_{n+1} ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ p^* มี local truncation error ดังนี้ [3]

$$
e_{n+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{r(t)=p+1}\alpha(t)e(t)F(t)(y_n) + O(h^{p+2}) \tag{3.50}
$$

เมื่อ

$$
e(t) = \theta^{p+1} - \gamma(t)\sum_{i=1}^{s^*} b_i(\theta)\Phi_i(t) \tag{3.51}
$$

สามารถหา local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ได้ดังนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 2 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
c_2 & a_{21} & \\
\hline
 & b_1 & b_2
\end{array}
$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 2 ($p^* = 2,\ s^* = 2$) ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2)\ ;\ 0 \le \theta \le 1
\end{aligned}
$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{1}{2}\theta^2 \\
b_2(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2
\end{aligned}
$$

จากสมการ (3.51) และตารางที่ 3.1 จะได้

$$
\begin{aligned}
e(t_{31}) &= \theta^3 - 3\sum_{i=1}^{2} b_i(\theta)c_i^2 = \theta^3 - 3(b_2(\theta)c_2^4) \\
&= \theta^3 - \tfrac{3}{2}\theta^2 \\
e(t_{32}) &= \theta^3 - 6\sum_{i,j=1}^{2} b_i(\theta)a_{ij}c_j = \theta^3
\end{aligned}
$$

ดังนั้น local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 2 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 คือ

$$e_{n+1} = \frac{h^3}{6}\{(\theta^3 - \tfrac{3}{2}\theta^3) f^i_{jk} f^j f^k(y_n) + \theta^3 f^i_j f^j_k f^k(y_n)\}$$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 $(p^* = 3, s^* = 4)$ โดยที่ $c_4 = 1$ และ $a_{4j} = b_j$ ทุกค่า j ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + h(\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{1}{4}k_2)) \\ k_4 &= f(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{aligned}$$

$$u(x_n + \theta h) = y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4)\ ;\ 0 \le \theta \le 1$$

เมื่อ

$$b_1(\theta) = \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3$$
$$b_2(\theta) = \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3$$
$$b_3(\theta) = 2\theta^2 - \tfrac{4}{3}\theta^3$$
$$b_4(\theta) = -\theta^2 + \theta^3$$

จากสมการ (3.51) และตารางที่ 3.1 จะได้

$$\begin{aligned}
e(t_{41}) &= \theta^4 - 4\sum_{i=1}^{4} b_i(\theta)c_i^3 = \theta^4 - 4(b_2(\theta)c_2^3 + b_3(\theta)c_3^3 + b_4(\theta)c_4^3) \\
&= \theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2 \\
e(t_{42}) &= \theta^4 - 8\sum_{i,j=1}^{4} b_i(\theta)c_i a_{ij} c_j = \theta^4 - 8(b_3(\theta)c_3 a_{32}c_2 + b_4(\theta)c_4 a_{42}c_2 + b_4(\theta)c_4 a_{43}c_3) \\
&= \theta^4 - \tfrac{8}{3}\theta^3 + 2\theta^2 \\
e(t_{43}) &= \theta^4 - 12\sum_{i,j=1}^{4} b_i(\theta)a_{ij}c_j^2 = \theta^4 - 12(b_3(\theta)c_{32}c_2^2 + b_4(\theta)c_{42}c_2^2 + b_4(\theta)c_{43}c_3^2) \\
&= \theta^4 + \theta^3 - 3\theta^2 \\
e(t_{44}) &= \theta^4 - 24\sum_{i,j,k=1}^{4} b_i(\theta)a_{ij}a_{ik}c_k \\
&= \theta^4 - 24\{b_3(\theta)a_{31}a_{32}c_2 + b_3(\theta)a_{32}a_{32}c_2 \\
&\quad + (b_4(\theta)a_{41} + b_4(\theta)a_{42} + b_4(\theta)a_{43})(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)\} \\
&= \theta^4 - 8\theta^3 + 6\theta^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3 คือ

$$\begin{aligned}
e_{n+1} = \frac{h^4}{24}\{&(\theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2)f^i_{jkl}f^j f^k f^l(y_n) + (\theta^4 - \tfrac{8}{3}\theta^3 + 2\theta^2)f^i_{jl}f^j_k f^k f^l(y_n) \\
&+ (\theta^4 + \theta^3 - 3\theta^2)f^i_j f^j_{kl} f^k f^l(y_n) + (\theta^4 - 8\theta^3 + 6\theta^2)f^i_j f^j_k f^k_l f^l(y_n)\}
\end{aligned}$$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}
$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 ($p^* = 3, s^* = 4$) ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3)
\end{aligned}
$$

$$u(x_n + \theta h) = y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4)\ ;\ 0 \le \theta \le 1$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= -\tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3
\end{aligned}
$$

จากสมการ (3.51) และตารางที่ 3.1 จะได้

$$e(t_{41}) = \theta^4 - 4\sum_{i=1}^{4} b_i(\theta)c_i^3 = \theta^4 - 4(b_2(\theta)c_2^3 + b_3(\theta)c_3^3 + b_4(\theta)c_4^3)$$

$$= \theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2$$

$$e(t_{42}) = \theta^4 - 8\sum_{i,j=1}^{4} b_i(\theta)c_i a_{ij} c_j = \theta^4 - 8(b_3(\theta)c_3 a_{32} c_2 + b_4(\theta)c_4 a_{43} c_3)$$

$$= \theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2$$

$$e(t_{43}) = \theta^4 - 12\sum_{i,j=1}^{4} b_i(\theta)a_{ij}c_j^2 = \theta^4 - 12(b_3(\theta)c_{32}c_2^2 + b_4(\theta)c_{43}c_3^2)$$

$$= \theta^4 - \theta^3$$

$$e(t_{44}) = \theta^4 - 24\sum_{i,j,k=1}^{4} b_i(\theta)a_{ij}a_{ik}c_k = \theta^4 - 24(b_3(\theta)a_{32}a_{32}c_2 + b_4(\theta)a_{43}a_{43}c_3)$$

$$= \theta^4 - 6\theta^3 + 3\theta^2$$

ดังนั้น local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 คือ

$$e_{n+1} = \frac{h^4}{24}\{(\theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2)f_{jkl}^i f^j f^k f^l(y_n) + (\theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2)f_{jl}^i f_k^j f^k f^l(y_n)$$
$$+ (\theta^4 - \theta^3)f_j^i f_{kl}^j f^k f^l(y_n) + (\theta^4 - 6\theta^3 + 3\theta^2)f_j^i f_k^j f_l^k f^l(y_n)\}$$

4. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 ที่สร้างโดยการประมาณค่าภายในช่วงแบบแฮร์มิตต์

จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 ($p^* = 3, s^* = 5$) โดยที่ $c_5 = 1$ และ $a_{5j} = b_j$ ทุกค่า j ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
k_5 &= f(x_{n+1}, y_{n+1})
\end{aligned}$$

$$u(x_n + \theta h) = y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4 + b_5(\theta)k_5);\ 0 \le \theta \le 1$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3 \\
b_5(\theta) &= -\theta^2 + \theta^3
\end{aligned}$$

จากสมการ (3.51) และตารางที่ 3.1 จะได้

$$\begin{aligned}
e(t_{41}) &= \theta^4 - 4\sum_{i=1}^{5} b_i(\theta)c_i^3 = \theta^4 - 4(b_2(\theta)c_2^3 + b_3(\theta)c_3^3 + b_4(\theta)c_4^3 + b_5(\theta)c_5^3) \\
&= \theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2 \\
e(t_{42}) &= \theta^4 - 8\sum_{i,j=1}^{5} b_i(\theta)c_i a_{ij} c_j \\
&= \theta^4 - 8(b_3(\theta)c_3 a_{32} c_2 + b_4(\theta)c_4 a_{43} c_2 + b_5(\theta)c_5(a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4)) \\
&= \theta^4 - 3\theta^3 + \tfrac{3}{2}\theta^2 \\
e(t_{43}) &= \theta^4 - 12\sum_{i,j=1}^{5} b_i(\theta)a_{ij}c_j^2 \\
&= \theta^4 - 12(b_3(\theta)c_{32}c_2^2 + b_4(\theta)c_{43}c_3^2 + b_5(\theta)(c_{52}c_2^2 + c_{53}c_3^2 + c_{54}c_4^2)) \\
&= \theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2
\end{aligned}$$

$$e(t_{44}) = \theta^4 - 24\sum_{i,j,k=1}^{5} b_i(\theta)a_{ij}a_{ik}c_k$$
$$= \theta^4 - 24\{b_3(\theta)a_{32}a_{32}c_2 + b_4(\theta)a_{43}a_{43}c_3 + b_5(\theta)(a_{52}a_{52}c_2 + a_{53}a_{53}c_3 + a_{54}a_{54}c_4)\}$$
$$= \theta^4 + 8\theta^3 - \tfrac{17}{3}\theta^2$$

ดังนั้น local truncation error ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 ที่สร้างโดยการประมาณค่าภายในช่วงแบบแฮร์มิตต์ คือ

$$e_{n+1} = \frac{h^4}{24}\{(\theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2)f^i_{jkl}f^j f^k f^l(y_n) + (\theta^4 - 3\theta^3 + \tfrac{3}{2}\theta^2)f^i_{jl}f^j_k f^k f^l(y_n) + (\theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2)f^i_j f^j_{kl} f^k f^l(y_n) + (\theta^4 + 8\theta^3 - \tfrac{17}{3}\theta^2)f^i_j f^j_k f^k_l f^l(y_n)\}$$

3.2.2 เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น

เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นขึ้นอยู่กับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ที่เป็นสูตรพื้นฐาน ดังจะเห็นได้จากเงื่อนไข (3.33) จากการวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 1 ถึงอันดับ 4 โดยใช้ปัญหาทดสอบมาตรฐาน

$$y' = \lambda y \quad , \quad y(0) = 1 \tag{3.52}$$

จะเห็นว่า

$$y_{n+1} = F(z)y_n$$

ซึ่ง $F(z)$ ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับต่างๆแสดงดังตารางที่ 3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธี (3.31) จะวิเคราะห์โดยอาศัยนิยามต่อไปนี้ [4]

นิยาม 3.7 ระเบียบวิธี (3.31) เป็นระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพ ที่สัมพันธ์กับระเบียบวิธี (3.2) ถ้ามีค่าคงที่ $M \geq 1$ ซึ่งทำให้

$$\max_{0\le\theta\le1}|u(x_n + \theta h)| \leq M \cdot \max\{1, |y_{n+1}|\}$$

สำหรับทุกๆ $z \in C^-$

จากนิยาม 3.7 ถ้าระเบียบวิธี (3.2) เป็น A-stable แล้วเงื่อนไขของเสถียรภาพสำหรับระเบียบวิธี (3.31) กลายเป็น

$$\max_{0\le\theta\le 1}\left|u(x_n + \theta h)\right| \le M$$

สำหรับทุกๆ $z \in C^-$

จากนิยาม 3.7 สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นได้ดังต่อไปนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 2 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2)\ ;\ 0\le\theta\le 1 \end{aligned} \tag{3.53}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{1}{2}\theta^2 \\ b_2(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 \end{aligned}$$

จากปัญหา (3.52) จะได้

$$\begin{aligned} u(x_n + \theta h) &= y_n + h\{b_1(\theta)\lambda y_n + b_2(\theta)(\lambda + h\lambda^2)y_n\} \\ &= \{1 + (b_1(\theta) + b_2(\theta))z + b_2(\theta)z^2\}y_n \\ \left|u(x_n + \theta h)\right| &\le \{1 + \left|b_1(\theta) + b_2(\theta)\right|\left|z\right| + \left|b_2(\theta)\right|\left|z^2\right|\}\left|y_n\right| \\ &\le \{1 + \left|z\right| + \tfrac{1}{2}\left|z^2\right|\}\left|y_n\right| \\ &\le M\cdot\max\{1,\left|y_n\right|\} \quad ;\ M = 1 + \left|z\right| + \tfrac{1}{2}\left|z^2\right| \\ &\le M \end{aligned}$$

ดังนั้นระเบียบวิธี (3.53) เป็นระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพตามนิยาม 3.7

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + h(\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{1}{4}k_2)) \\
k_4 &= f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4) \ ; 0 \le \theta \le 1
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= 2\theta^2 - \tfrac{4}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= -\theta^2 + \theta^3
\end{aligned}
$$

จากปัญหา (3.52) จะได้

$$
\begin{aligned}
u(x_n + \theta h) &= y_n + h\{b_1(\theta)\lambda y_n + b_2(\theta)(\lambda + h\lambda^2)y_n + \\
&\quad b_3(\theta)(\lambda + \tfrac{1}{2}h\lambda^2 + \tfrac{1}{4}h^2\lambda^3)y_n + b_4(\theta)\lambda y_{n+1}\} \\
&= y_n + (b_1(\theta) + b_2(\theta) + b_3(\theta))zy_n + (b_2(\theta) + \tfrac{1}{2}b_3(\theta))z^2 y_n \\
&\quad \tfrac{1}{4}b_3(\theta)z^3 y_n + b_4(\theta)zF(z)y_n \\
&= \{1 + (b_1(\theta) + b_2(\theta) + b_3(\theta))z + (b_2(\theta) + \tfrac{1}{2}b_3(\theta))z^2 + \\
&\quad \tfrac{1}{4}b_3(\theta)z^3 + b_4(\theta)F(z)z\,\}y_n \\
|u(x_n + \theta h)| &\le \{1 + |b_1(\theta) + b_2(\theta) + b_3(\theta)||z| + |b_2(\theta) + \tfrac{1}{2}b_3(\theta)||z^2| + \\
&\quad |\tfrac{1}{4}b_3(\theta)||z^3| + |b_4(\theta)F(z)||z|\}|y_n| \\
&\le \{1 + (1 + |b_4(\theta)||F(z)|)|z| + \tfrac{1}{2}|z^2| + \tfrac{1}{6}|z^3|\}|y_n| \\
&\le M \cdot \max\{1, |y_n|\} \quad ; \ M = \max_{0 \le \theta \le 1}\{1 + (1 + |b_4(\theta)|)|z| + \tfrac{1}{2}|z^2| + \tfrac{1}{6}|z^3|\} \\
&\le M
\end{aligned}
$$

ดังนั้นระเบียบวิธี (3.54) เป็นระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพตามนิยาม 3.7

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \qquad (3.55) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4) \;\; ; 0 \le \theta \le 1
\end{aligned}
$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= -\tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3
\end{aligned}
$$

จากปัญหา (3.52) จะได้

$$
\begin{aligned}
u(x_n + \theta h) &= y_n + h\{b_1(\theta)\lambda y_n + b_2(\theta)(\lambda + \tfrac{1}{2}h\lambda^2)y_n + b_3(\theta)(\lambda + \tfrac{1}{2}h\lambda^2 + \tfrac{1}{4}h^2\lambda^3)y_n + \\
&\quad b_4(\theta)(\lambda + h\lambda^2 \; \tfrac{1}{2}h^2\lambda^3 + \tfrac{1}{4}h^3\lambda^4)y_n\} \\
&= y_n + (b_1(\theta) + b_2(\theta) + b_3(\theta) + b_4(\theta))zy_n + (\tfrac{1}{2}b_2(\theta) + \tfrac{1}{2}b_3(\theta) + b_4(\theta))z^2 y_n \\
&\quad (\tfrac{1}{4}b_3(\theta) + \tfrac{1}{2}b_4(\theta))z^3 y_n + \tfrac{1}{4}b_4(\theta)z^4 y_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|u(x_n + \theta h)| &\le \{1 + |b_1(\theta) + b_2(\theta) + b_3(\theta) + b_4(\theta)||z| + |\tfrac{1}{2}b_2(\theta) + \tfrac{1}{2}b_3(\theta) + b_4(\theta)||z^2| + \\
&\quad |\tfrac{1}{4}b_3(\theta) + \tfrac{1}{2}b_4(\theta)||z^3| + |\tfrac{1}{4}b_4(\theta)||z^4|\}|y_n| \\
&\le \{1 + |z| + \tfrac{1}{2}|z^2| + \tfrac{1}{6}|z^3| + \tfrac{1}{24}|z^4|\}|y_n| \\
&\le M \cdot \max\{1, |y_n|\} \quad ; \; M = 1 + |z| + \tfrac{1}{2}|z^2| + \tfrac{1}{6}|z^3| + \tfrac{1}{24}|z^4| \\
&\le M
\end{aligned}
$$

ดังนั้นระเบียบวิธี (3.55) เป็นระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพตามนิยาม 3.7

4. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 สำหรับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 ที่สร้างโดยการประมาณค่าภายในช่วงแบบแฮร์มิตต์

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\ k_5 &= f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4 + b_5(\theta)k_5) \end{aligned} \tag{3.56}$$

เมื่อ $0 \le \theta \le 1$ และ

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\ b_2(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\ b_3(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\ b_4(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3 \\ b_5(\theta) &= -\theta^2 + \theta^3 \end{aligned}$$

จากปัญหา (3.52) จะได้

$$\begin{aligned} u(x_n + \theta h) &= y_n + h\{b_1(\theta)\lambda y_n + b_2(\theta)(\lambda + \tfrac{1}{2}h\lambda^2)y_n + b_3(\theta)(\lambda + \tfrac{1}{2}h\lambda^2 + \tfrac{1}{4}h^2\lambda^3)y_n + \\ &\qquad b_4(\theta)(\lambda + h\lambda^2\ \tfrac{1}{2}h^2\lambda^3 + \tfrac{1}{4}h^3\lambda^4)y_n + b_5(\theta)\lambda y_{n+1}\} \\ &= y_n + (b_1(\theta) + b_2(\theta) + b_3(\theta) + b_4(\theta))zy_n + (\tfrac{1}{2}b_2(\theta) + \tfrac{1}{2}b_3(\theta) + b_4(\theta))z^2 y_n \\ &\qquad (\tfrac{1}{4}b_3(\theta) + \tfrac{1}{2}b_4(\theta))z^3 y_n + \tfrac{1}{4}b_4(\theta)z^4 y_n + b_5(\theta)zF(z)y_n \\ |u(x_n + \theta h)| &\le \{1 + |b_1(\theta) + b_2(\theta) + b_3(\theta) + b_4(\theta)||z| + |\tfrac{1}{2}b_2(\theta) + \tfrac{1}{2}b_3(\theta) + b_4(\theta)||z^2| + \\ &\qquad |\tfrac{1}{4}b_3(\theta) + \tfrac{1}{2}b_4(\theta)||z^3| + |\tfrac{1}{4}b_4(\theta)||z^4| + |b_5(\theta)F(z)||z|\}|y_n| \\ &\le \{1 + (1 + |b_5(\theta)||F(z)|)|z| + \tfrac{1}{2}|z^2| + \tfrac{1}{6}|z^3| + \tfrac{1}{24}|z^4|\}|y_n| \\ &\le M \cdot \max\{1, |y_n|\} \quad ; \; M = \max_{0 \le \theta \le 1}\{1 + (1 + |b_5(\theta)|)|z| + \tfrac{1}{2}|z^2| + \tfrac{1}{6}|z^3| + \tfrac{1}{24}|z^4| \\ &\le M \end{aligned}$$

ดังนั้นระเบียบวิธี (3.56) เป็นระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพตามนิยาม 3.7

3.3 บทสรุป

ในบทนี้ได้ศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตานั้นจะใช้สมการ (3.12) มาช่วยในการสร้าง กล่าวคือใช้สมการ (3.12) หาเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 อันดับ 3 และอันดับ 4 ซึ่งในขั้นตอนนี้เป็นการสร้างสูตรพื้นฐานที่จะนำไปสร้างให้เป็นระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น สำหรับการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นนั้นจะนำระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่สร้างในหัวข้อ 3.1.1 มาสร้างให้เป็นระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยใช้ระบบสมการ (3.35) มาช่วยในการสร้าง กล่าวคือใช้ระบบสมการ (3.35) หาพหุนาม $b_j(\theta)$ ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 2 และอันดับ 3 ในกรณีของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อันดับ 3 นอกจากใช้ระบบสมการ (3.35) มาช่วยในการสร้างแล้วยังสามารถใช้ การประมาณในช่วงแบบแฮร์มิตต์มาช่วยในการสร้างได้ด้วย ซึ่งก็คือการใช้สมการ (3.49) มาช่วยในการสร้าง เมื่อสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นเสร็จแล้ว ปัญหาที่ตามมาคือระเบียบวิธีที่สร้างขึ้นมานั้นสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นได้หรือไม่ ซึ่งการทดสอบว่าระเบียบวิธีที่สร้างขึ้นมานั้นสามารถนำไปใช้ได้หรือไม่นั้น จะกล่าวถึงในบทต่อไป

บทที่ 4
ผลของการวิจัย

ในบทนี้เป็นการทดสอบประสิทธิภาพของ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ที่สร้างในหัวข้อ 3.2 การทดสอบจะใช้ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่สร้างในหัวข้อ 3.1.1 และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาที่นำมาทดสอบ แล้วเปรียบเทียบ ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา กับค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยคาดหวังว่าค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดของทั้งสองระเบียบวิธีจะมีค่าเท่ากัน หรือมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งผลการทดสอบจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้เป็นการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ที่สร้างในหัวข้อ 3.2 โดยใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา ดังต่อไปนี้

1. ปัญหา A :

$$y' = -y \quad , \quad y(0) = 1 \tag{4.1}$$

มีผลเฉลยจริงคือ

$$y(x) = e^{-x} \tag{4.2}$$

จากสมการ (4.2) เมื่อ $x \to \infty$ แล้ว $y(x) \to 0$ ดังนั้นในการใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.1) ต้องใช้ขนาดขั้น $h_x \in (0,2)$ สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 $h_x \in (0,2.51)$ สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3 และ $h_x \in (0,2.78)$ สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 จึงจะทำให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริง

2. ปัญหา B :

$$y' = -\tfrac{1}{2} y^3 \quad , \quad y(0) = 1 \tag{4.3}$$

มีผลเลยจริงคือ

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \tag{4.4}$$

จากสมการ (4.4) เมื่อ $x \to \infty$ แล้ว $y(x) \to 0$ ไม่สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.3) ได้เพราะ $\frac{\partial y^3}{\partial y}(x,0)y = 3y^2(x,0)y = 0$ แต่คาดหวังว่าถ้าใช้ขนาดขั้น h_x ที่เล็กเพียงพอจะทำให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริง

3. ปัญหา C :

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 \quad , \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= -y_2 \quad , \quad y_2(0) = 1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

มีผลเฉลยจริงคือ

$$y_1(x) = e^{-2x} \quad , \quad y_2(x) = e^{-x} \tag{4.6}$$

จากสมการ (4.6) $y_1(x) \to 0$ และ $y_2(x) \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$ ค่าเจาะจงของระบบสมการ (4.5) คือ -1 และ -2 ดังนั้นในการใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบสมการ (4.5) ต้องใช้ขนาดขั้น $h_x \in (0,1)$ สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 $h_x \in (0,1.26)$ สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3 และ $h_x \in (0,1.4)$ สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 จึงจะทำให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริง

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ที่ทำการทดสอบ มีดังต่อไปนี้

1. CRK 2 สำหรับ RK 2

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2) \; ; 0 \le \theta \le 1 \end{aligned}$$

เมื่อ

$$b_1(\theta) = \theta - \tfrac{1}{2}\theta^2$$
$$b_2(\theta) = \tfrac{1}{2}\theta^2$$

2. CRK 3 สำหรับ RK 3

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{4}h(k_1 + k_2))$$
$$k_4 = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$
$$u(x_n + \theta h) = y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4) \; ; 0 \le \theta \le 1$$

เมื่อ

$$b_1(\theta) = \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3$$
$$b_2(\theta) = \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3$$
$$b_3(\theta) = 2\theta^2 - \tfrac{4}{3}\theta^3$$
$$b_4(\theta) = -\theta^2 + \theta^3$$

3. CRK 3 สำหรับ RK 4

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$
$$u(x_n + \theta h) = y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4) \; ; 0 \le \theta \le 1$$

เมื่อ

$$b_1(\theta) = \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3$$
$$b_2(\theta) = \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3$$
$$b_3(\theta) = \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3$$
$$b_4(\theta) = -\tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3$$

4. CRK 3 (H) สำหรับ RK 4

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
k_5 &= f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4 + b_5(\theta)k_5)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $0 \le \theta \le 1$ และ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3 \\
b_5(\theta) &= -\theta^2 + \theta^3
\end{aligned}
$$

และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ใช้ทดสอบ มีดังต่อไปนี้

1. RK 2

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}h(k_1 + k_2)
\end{aligned}
$$

2. RK 3

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{4}h(k_1 + k_2)) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h(k_1 + k_2 + 4k_3)
\end{aligned}
$$

3. RK 4

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

ในแต่ละปัญหาจะหาผลเฉลยเชิงตัวเลขในช่วง $[0,2]$ โดยใช้ $h_x = 0.1, 0.05$ และ 0.01 สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นในแต่ละช่วง $[x_n, x_{n+1}]$ จะประมาณค่าผลเฉลยจริง 10 จุด นั่นคือใช้ $h_\theta = 0.1$

ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ของแต่ละระเบียบวิธีจะบันทึกค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุด ของแต่ละวิธีเอาไว้ ผลสรุปที่ได้แสดงดังตารางที่ 4.1 สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และตารางที่ 4.2 สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น

ตารางที่ 4.1 ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ระเบียบวิธี	ปัญหา	ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของแต่ละ h_x		
		0.1	0.05	0.01
RK 2	A	6.6×10^{-4}	1.6×10^{-4}	6.2×10^{-6}
	B	2.4×10^{-4}	6.0×10^{-5}	2.3×10^{-6}
	C	2.9×10^{-3}	6.6×10^{-4}	2.5×10^{-5}
RK 3	A	1.7×10^{-5}	2.0×10^{-6}	1.5×10^{-8}
	B	1.2×10^{-5}	1.4×10^{-6}	1.1×10^{-8}
	C	1.4×10^{-4}	1.7×10^{-5}	1.2×10^{-7}
RK 4	A	3.3×10^{-7}	2.0×10^{-8}	3.1×10^{-11}
	B	1.3×10^{-8}	1.2×10^{-9}	2.4×10^{-12}
	C	5.8×10^{-6}	3.3×10^{-7}	5.0×10^{-10}

ตารางที่ 4.2 ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น

ระเบียบวิธี	ปัญหา	ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของแต่ละ h_x		
		0.1	0.05	0.01
CRK 2 สำหรับ RK 2	A	6.6×10^{-4}	1.6×10^{-4}	6.2×10^{-6}
	B	2.4×10^{-4}	6.0×10^{-5}	2.3×10^{-6}
	C	2.9×10^{-3}	6.6×10^{-4}	2.5×10^{-5}
CRK 3 สำหรับ RK 3	A	1.7×10^{-5}	2.0×10^{-6}	1.5×10^{-8}
	B	1.2×10^{-5}	1.4×10^{-6}	1.1×10^{-8}
	C	1.5×10^{-4}	1.7×10^{-5}	1.2×10^{-7}
CRK 3 สำหรับ RK 4	A	1.4×10^{-6}	9.0×10^{-8}	1.4×10^{-10}
	B	2.6×10^{-6}	1.7×10^{-7}	2.9×10^{-10}
	C	2.3×10^{-5}	1.4×10^{-6}	2.3×10^{-9}
CRK 3(H) สำหรับ RK 4	A	3.3×10^{-7}	2.0×10^{-8}	3.1×10^{-11}
	B	1.4×10^{-6}	9.5×10^{-7}	1.8×10^{-10}
	C	5.8×10^{-6}	3.3×10^{-7}	5.0×10^{-10}

จากตารางที่ 4.1 และ 4.2 สามารถหาอัตราส่วนค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุด ซึ่งเกิดจากค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น หารด้วย ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งค่าที่ได้ต้องมีค่าใกล้เคียงกับ 1 ผลสรุปที่ได้แสดงดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 อัตราส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุด

ระเบียบวิธี	ปัญหา	อัตราส่วนของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของแต่ละ h_x		
		0.1	0.05	0.01
CRK 2 สำหรับ RK 2	A	1.0	1.0	1.0
	B	1.0	1.0	1.0
	C	1.0	1.0	1.0
CRK 3 สำหรับ RK 3	A	1.0	1.0	1.0
	B	1.0	1.0	1.0
	C	1.07	1.0	1.0
CRK 3 สำหรับ RK 4	A	4.24	4.5	4.52
	B	200	141.67	120.83
	C	3.97	4.24	4.6
CRK 3(H) สำหรับ RK 4	A	1.0	1.0	1.0
	B	107.69	79.17	7.5
	C	1.0	1.0	1.0

จากตารางที่ 4.3 สามารถอธิบายผลการทดสอบ ได้ดังนี้

1. ระเบียบวิธี CRK 2 สำหรับ RK 2 อัตราส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดมีค่าเท่ากับ 1 ทุกปัญหาและทุกขนาด h_x แสดงว่า CRK 2 สำหรับ RK 2 มีประสิทธิภาพเท่ากับ RK 2

2. ระเบียบวิธี CRK 3 สำหรับ RK 3 อัตราส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดมีค่าเท่ากับ 1 หรือใกล้เคียงกับ 1 ทุกปัญหาและทุกขนาด h_x แสดงว่า CRK 3 สำหรับ RK 3 มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับ RK 3

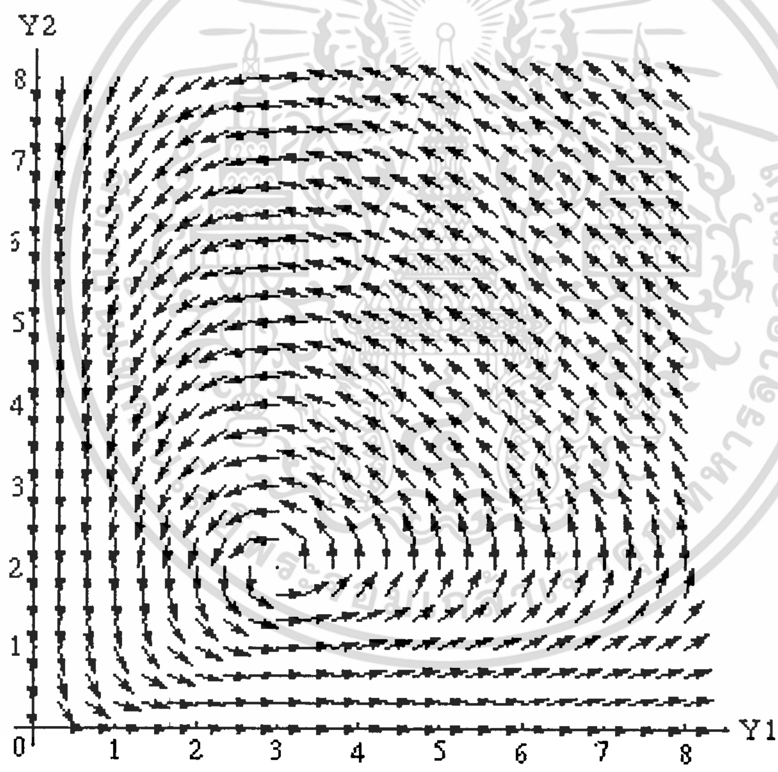
3. ระเบียบวิธี CRK 3 สำหรับ RK 4 อัตราส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดมีค่าไม่แน่นอน ซึ่งมีสาเหตุมาจากอันดับที่ลดลงของ RK4 เมื่อสร้างเป็น CRK 3

4. ระเบียบวิธี CRK 3(H) สำหรับ RK 4 อัตราส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของปัญหา A และ C มีค่าเท่ากับ 1 ทุกขนาด h_x เพราะปัญหา A และ C เป็นปัญหาเชิงเส้น ส่วนอัตราส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของปัญหา B มีค่าไม่แน่นอน ซึ่งมีสาเหตุมาจากปัญหา B เป็นปัญหาไม่เชิงเส้นและอันดับที่ลดลงของ RK4 เมื่อสร้างเป็น CRK 3(H) อย่างไรก็ตาม เมื่อเปรียบเทียบ CRK 3(H) สำหรับ RK 4 กับอีกสามระเบียบวิธีแล้ว CRK 3(H) สำหรับ RK 4 จะมีประสิทธิภาพดีกว่าทั้งสามระเบียบวิธีวิธี ซึ่งเห็นได้จากค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดของทุกระเบียบวิธี ดังตารางที่ 4.2

ในกรณีที่นำระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาที่ไม่สามารถหาผลเฉลยจริงได้หรือมีความยุ่งยากในการหาผลเฉลยจริง เช่น ปัญหา

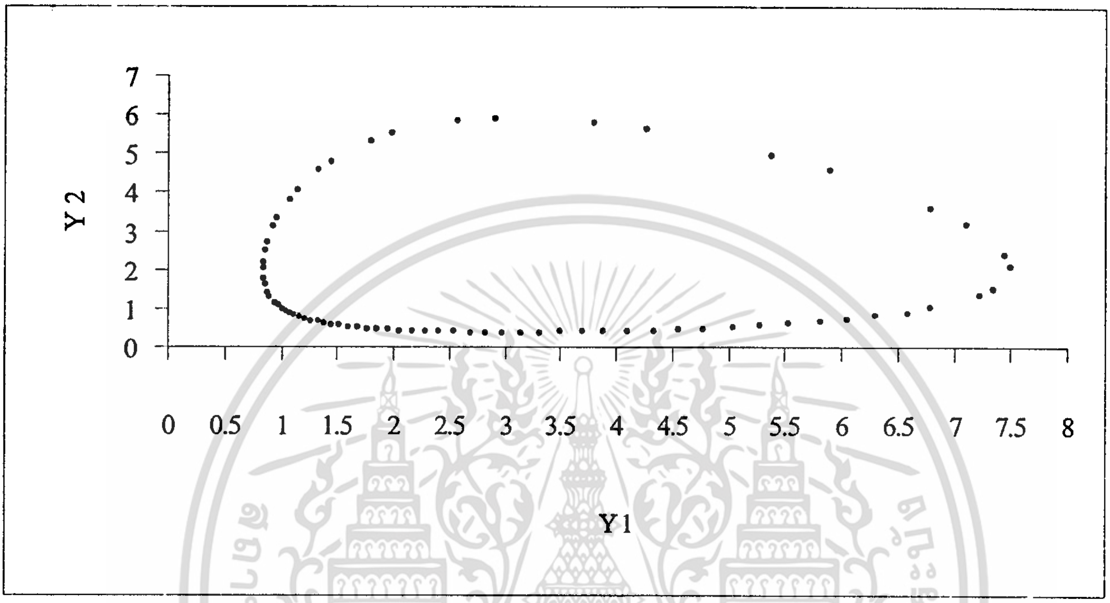
$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_1y_2 \quad , \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= -3y_2 + y_1y_2 \quad , \quad y_2(0) = 1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

สิ่งที่สามารถใช้ตรวจสอบอย่างหยาบ ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขมีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริงหรือไม่คือ **ไดเรกชัน ฟิลด์ (direction field)** (กราฟของเวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้งผลเฉลยที่จุด (y_1, y_2) ใดๆของปัญหา (4.7) ในระนาบ y_1y_2) ซึ่งไดเรกชัน ฟิลด์จะแสดงให้เห็นแนวโน้มว่าผลเฉลยจริงมีพฤติกรรมอย่างไร ไดเรกชัน ฟิลด์ของปัญหา (4.7) มีลักษณะดังรูปที่ 4.1

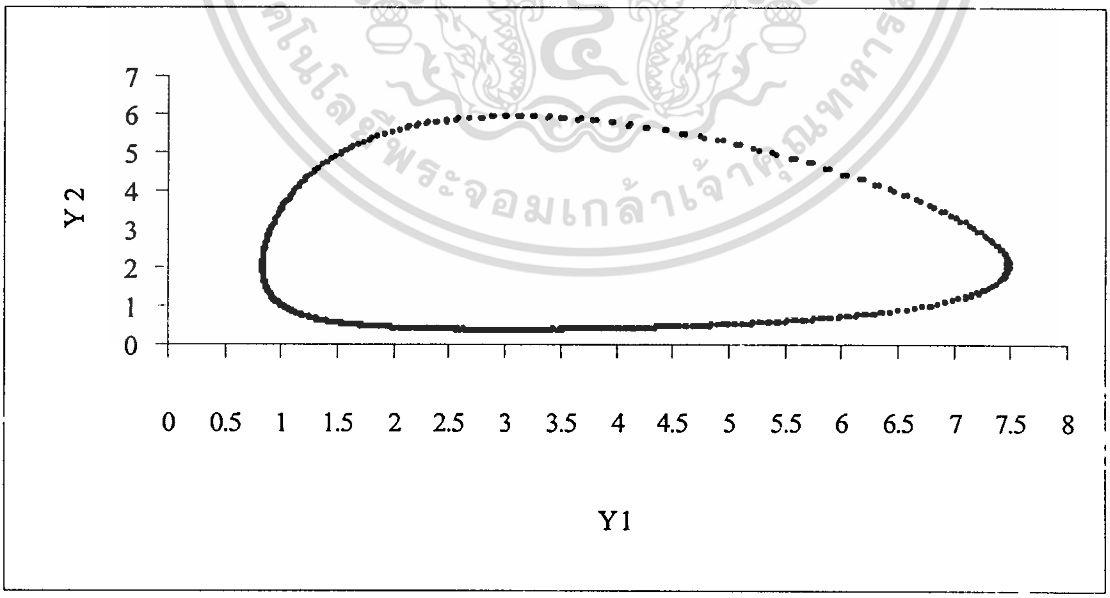


รูปที่ 4.1 ไดเรกชัน ฟิลด์ของปัญหา (4.7)

จากรูปที่ 4.1 แสดงว่าผลเฉลยจริงเคลื่อนที่เป็นวัฏจักรรอบจุด (3,2) เมื่อใช้ RK 2 และ CRK 2 สำหรับ RK 2 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) โดยใช้ $h_x = 0.1$ กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีลักษณะดังรูปที่ 4.2 และรูปที่ 4.3 ตามลำดับ

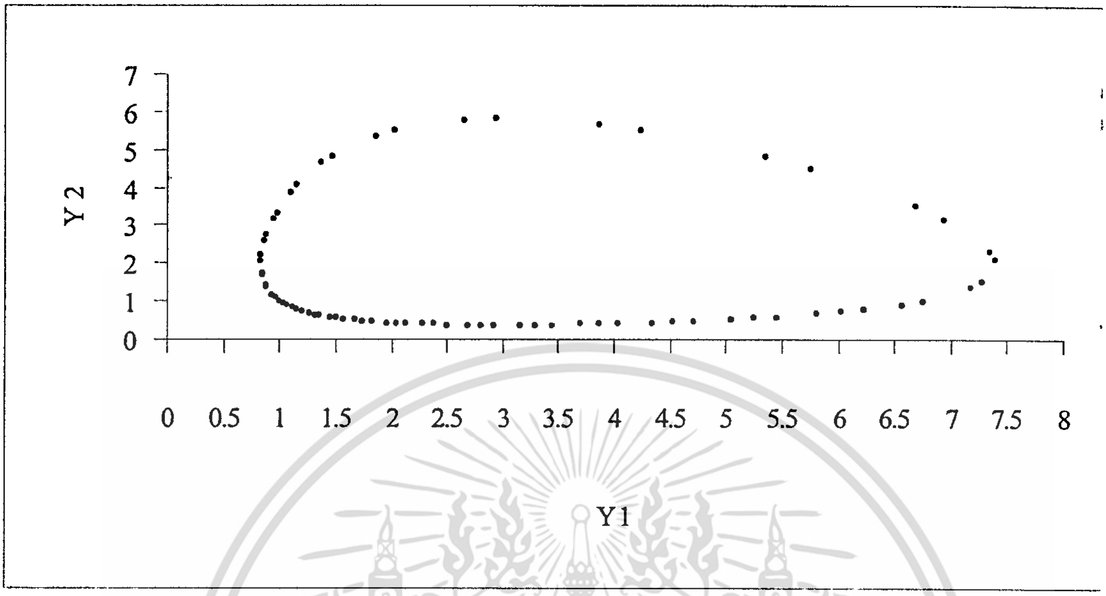


รูปที่ 4.2 กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) เมื่อใช้ RK 2

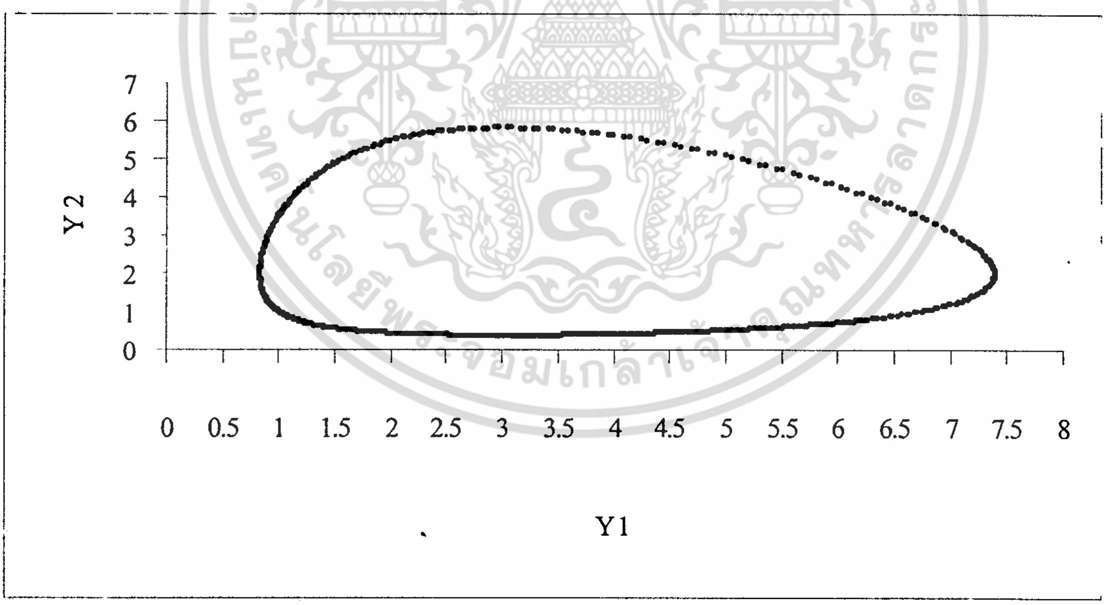


รูปที่ 4.3 กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) เมื่อใช้ CRK 2 สำหรับ RK 2

เมื่อใช้ RK 3 และ CRK 3 สำหรับ RK 3 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) โดยใช้ $h_x = 0.1$ กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีลักษณะดังรูปที่ 4.4 และรูปที่ 4.5 ตามลำดับ

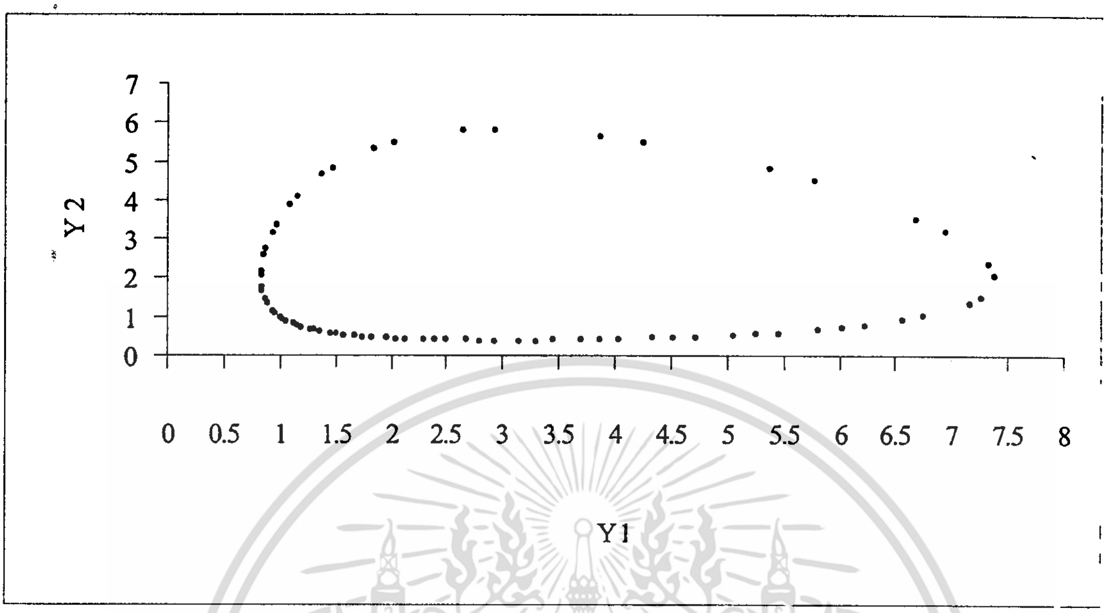


รูปที่ 4.4 กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) เมื่อใช้ RK 3

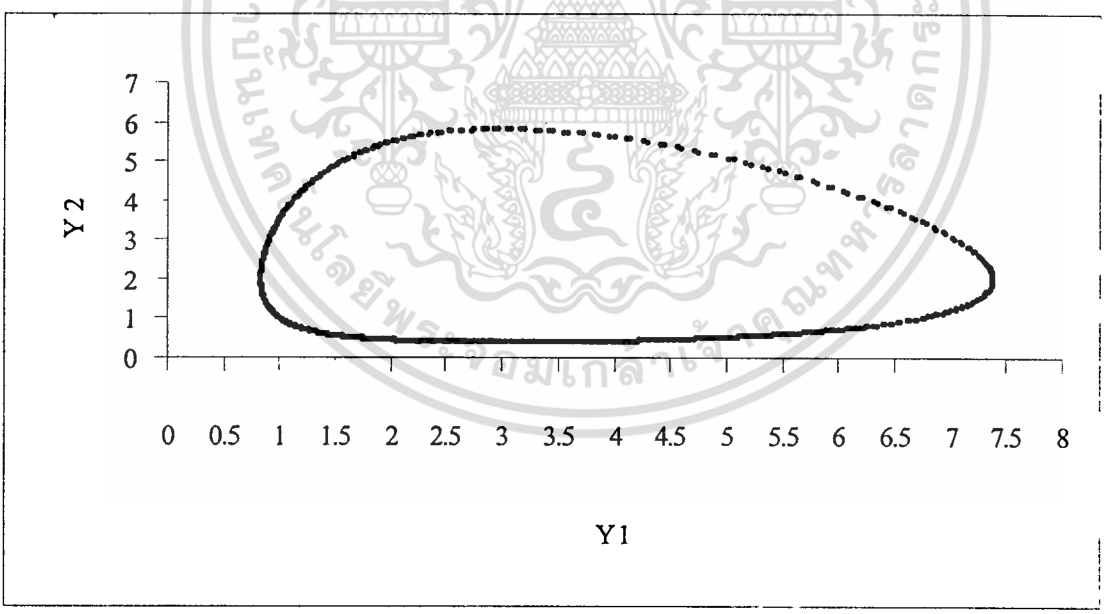


รูปที่ 4.5 กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) เมื่อใช้ CRK 3 สำหรับ RK 3

เมื่อใช้ RK 4 และ CRK 3 สำหรับ RK 4 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) โดยใช้ $h_x = 0.1$ กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีลักษณะดังรูปที่ 4.6 และรูปที่ 4.7 ตามลำดับ

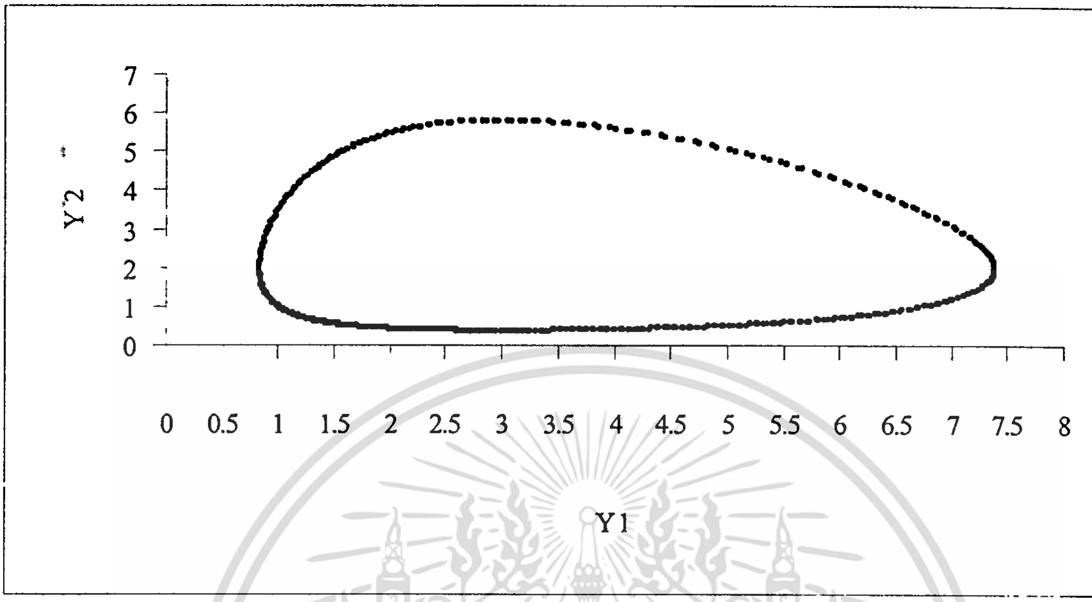


รูปที่ 4.6 กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) เมื่อใช้ RK 4



รูปที่ 4.7 กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) เมื่อใช้ CRK 3 สำหรับ RK 4

เมื่อใช้ CRK 3(H) สำหรับ RK 4 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) โดยใช้ $h_x = 0.1$ กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีลักษณะดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา (4.7) เมื่อใช้ CRK 3(H) สำหรับ RK 4

จากกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขรูปที่ 4.2 ถึงรูปที่ 4.8 จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของทุกระเบียบวิธีมีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริง นั่นคือจะเคลื่อนที่เป็นวัฏจักรรอบจุด (3 , 2)

4.2 บทสรุป

จากการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ในหัวข้อที่ผ่านมาแสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นได้ ถึงแม้ว่าบางปัญหาไม่สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพได้ เช่น ปัญหา B แต่ก็สามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริงได้ ซึ่งข้อดีของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นคือการให้ผลเฉลยที่มีความหนาแน่นโดยที่ไม่ต้องใช้ขนาดขั้นที่มีขนาดเล็ก ระเบียบวิธีที่เหมาะสมที่จะนำไปใช้คือ CRK 3(H) สำหรับ RK 4

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้กล่าวถึง สรุปผลการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เป็นสูตรพื้นฐาน รวมทั้งได้เสนอแนะแนวทางในการศึกษาระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นแบบอื่นให้กับผู้ที่สนใจจะศึกษาด้วย ซึ่งจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ที่ได้กล่าวมาแล้ว ทั้งที่สร้างโดยระบบสมการ (3.35) และสร้างโดยการประมาณค่าภายในช่วงแบบแฮร์มิตต์ สามารถสรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา 2 สถานะ อันดับ 2

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{aligned}$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + h k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2} h(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น 2 สถานะ อันดับ 2 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + h k_1) \\ u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta) k_1 + b_2(\theta) k_2) \; ; \; 0 \le \theta \le 1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{1}{2}\theta^2 \\ b_2(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 \end{aligned}$$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา 3 สถานะ อันดับ 3

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \\
k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3)
\end{aligned}
$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + h k_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2} h, y_n + \tfrac{1}{4} h(k_1 + k_2)) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6} h(k_1 + k_2 + 4k_3)
\end{aligned}
$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น 4 สถานะ อันดับ 3 ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + h k_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2} h, y_n + \tfrac{1}{4} h(k_1 + k_2)) \\
k_4 &= f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta) k_1 + b_2(\theta) k_2 + b_3(\theta) k_3 + b_4(\theta) k_4)\ ;\ 0 \le \theta \le 1
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= 2\theta^2 - \tfrac{4}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= -\theta^2 + \theta^3
\end{aligned}
$$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา 4 สถานะ อันดับ 4

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\ k_4 &= f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4) \end{aligned}$$

เช่น ระเบียบวิธี

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2} h, y_n + \tfrac{1}{2} h k_1) \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2} h, y_n + \tfrac{1}{2} h k_2) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + h k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

สามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ได้ดังนี้

3.1. สร้างโดยระบบสมการ (3.35) ได้ระเบียบวิธี 4 สถานะ อันดับ 3

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2} h, y_n + \tfrac{1}{2} h k_1) \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2} h, y_n + \tfrac{1}{2} h k_2) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + h k_3) \\ u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta) k_1 + b_2(\theta) k_2 + b_3(\theta) k_3 + b_4(\theta) k_4) \; ; 0 \le \theta \le 1 \end{aligned} \tag{5.3}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\ b_2(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\ b_3(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\ b_4(\theta) &= -\tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \end{aligned}$$

3.2. สร้างโดยการประมาณค่าภายในช่วงแบบแฮร์มิตต์ ได้ระเบียบวิธี 5 สถานะ อันดับ 3

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
k_5 &= f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + b_4(\theta)k_4 + b_5(\theta)k_5)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

เมื่อ $0 \le \theta \le 1$ และ

$$
\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \theta - \tfrac{3}{2}\theta^2 + \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_2(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_3(\theta) &= \theta^2 - \tfrac{2}{3}\theta^3 \\
b_4(\theta) &= \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^3 \\
b_5(\theta) &= -\theta^2 + \theta^3
\end{aligned}
$$

จากการวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น ในหัวข้อ 3.2.2 แสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธี (5.1) ถึงระเบียบวิธี (5.4) เป็นระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพ นั่นคือ ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่หาโดยระเบียบวิธี (5.1) ถึง (5.4) จะมีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริง

จากการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธี (5.1) ถึงระเบียบวิธี (5.4) กับปัญหา A, B และ C โดยใช้ขนาดขั้น 0.1, 0.05 และ 0.01 ในหัวข้อ 4.1 แสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธี (5.1) ถึงระเบียบวิธี (5.4) สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

ทั้งที่เป็นปัญหาเชิงเส้น, ไม่เชิงเส้น และระบบสมการ ถึงแม้ว่าบางปัญหาไม่สามารถหาผลเฉลยจริงได้ เช่น ปัญหา (4.7) ซึ่งสามารถตรวจสอบความน่าเชื่อถือของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ โดยใช้ไดเรกชัน ฟิลด์ หรือบางปัญหาที่ไม่สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพได้ เช่น ปัญหา B แต่จากการวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธี (5.1) ถึงระเบียบวิธี (5.4) ก็มั่นใจได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่เกิดจากระเบียบวิธี (5.1) ถึงระเบียบวิธี (5.4) นั้น มีพฤติกรรมเหมือนผลเฉลยจริง ซึ่งระเบียบวิธีที่เหมาะสมที่จะนำไปใช้คือ ระเบียบวิธี (5.4)

จากการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เป็นสูตรพื้นฐานที่กล่าวมาแล้วนั้น จะเห็นว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น อยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \ ; i = 1,2,\ldots,s^* \\
u(x_n + \theta h) &= y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j(\theta) k_j \ ; \ 0 \le \theta \le 1
\end{aligned}
\qquad (5.5)
$$

แต่ถ้าใช้ Rosenbrock-Type method เป็นสูตรพื้นฐาน [5] เมื่อสร้างเป็นระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นแล้ว อยู่ในรูปแบบ

$$
u(x_n + \theta h) = y_n + \sum_{i=1}^{s} b_i(\theta) k_i \ ; \ 0 \le \theta \le 1 \qquad (5.6)
$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
k_i &= hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} k_j + \gamma_i h^2 \frac{\partial f}{\partial t}(x_n, y_n) \\
i &= 1,2,\ldots,s
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้านำทั้งสองระเบียบวิธีไปหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นแล้ว ระเบียบวิธี (5.5) มีความสะดวกในการใช้มากกว่า ระเบียบวิธี (5.6) เพราะแต่ละ k_i ของระเบียบวิธี (5.6) จะต้องหาอนุพันธ์ย่อยของ $f(x,y)$ ด้วยทำให้ไม่สะดวกในการใช้

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาการสร้างระเบียบวิธีที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นสำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เป็นการศึกษาการสร้างโดยใช้เฉพาะระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2 อันดับ 3 และอันดับ 4 เป็นสูตรพื้นฐาน ผู้ที่สนใจสามารถนำแนวคิดวิธีการสร้างไปประยุกต์ใช้ในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ผลเฉลยมีความหนาแน่น โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่สูงขึ้นเป็นสูตรพื้นฐานได้ รวมทั้งยังสามารถนำแนวคิดวิธีการสร้างไปประยุกต์ เพื่อสร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ผลเฉลยมีความหนาแน่นโดยใช้ระเบียบวิธีอื่นๆเป็นสูตรพื้นฐาน เช่นใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาไม่ชัดแจ้ง (implicit Runge-Kutta method)

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{i} b_j k_j \quad ; i = 1,2,\ldots,s$$

เป็นสูตรพื้นฐาน เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์แข็งตึง (stiff differential equations)

เอกสารอ้างอิง

[1] E. Hairer, S. P. Norsett and G. Wanner. **Solving Ordinary Differential Equations I.** 2nd Ed. Berlin : Springer-Verlag. 1993.

[2] J. C. Butcher. **The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations.** New York : John Wiley & Sons. 1987.

[3] W. H. Enright, K. R. Jackson, S.P. Norsett and P. G. Thomsen. "Interpolants for Runge-Kutta Formulas." ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 12, no. 3, September 1986. pp. 193-218.

[4] A. Bellen and M. Zennaro. "Stability Properties of Interpolants for Runge-Kutta Methods." SIAM Journal. Numer. Anal, vol. 25, no. 2, April 1988. Pp. 411-432.

[5] A. Ostermann. "Continuous Extensions of Rosenbrock-Type Methods." Computing, vol. 44, 1990. pp. 59-68.

[6] H. R. Schwarz and J. Waldvogel. **Numerical Analysis.** New York : John Wiley & Sons. 1989.

[7] E. Hairer and G. Wanner. **Solving Ordinary Differential Equations II.** Berlin : Springer-Verlag. 1993.

[8] James L. Buchanan and Peter R. Turner. **Numerical Methods and Analysis.** New York : McGraw-Hill, Inc. 1992.

[9] Richard L. Burden and J. D. Faires. **Numerical Analysis.** Boston : PWS Publishing Company. 1993.

[10] William E. Boyce and Richard C. Dipraima. **Elementary Differential Equations.** 6th Ed. New York : John Wiley & Sons. 1996.

[11] Joe D. Hoffman. **Numerical Methods for Engineers and Scientists.** New York : McGraw-Hill, Inc. 1992.

[12] Martha L. Abell and James P. Braselton. **Differential Equations with Mathematica.** San Diego : Academic Press. 1997.

ประวัติผู้เขียน

นายวัชรากร พาหะนิชย์ เกิดเมื่อวันที่ 26 พฤศจิกายน 2517 ที่จังหวัดร้อยเอ็ด สำเร็จการศึกษาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยรามคำแหง ปีการศึกษา 2538