

การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้อัลกอริทึมเชิงพีชคณิต
สำหรับเส้นทางเดินแสงแบบกรวย

CROSS SECTION IMAGE RECONSTRUCTION BASED ON
CONE-BEAM USING SIMULTANEOUS ALGEBRAIC ALGORITHMS



ศุภชัย งามอนเกรรัตน์
SUPACHAI NGAMANEKTRAT



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์
บัณฑิตวิทยาลัย

๑๗ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
๙๖๘๓๗ พ.ศ. ๒๕๔๗

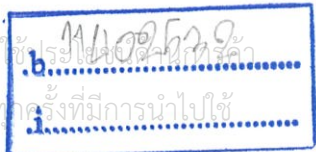
เลขหมู่..... ๒๕๔๗

ISBN 974-9709-65-9

เลขทะเบียน..... 51528

วัน,เดือน,ปี..... ๒๒ ก.ค. ๒๕๔๗

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



**CROSS SECTION IMAGE RECONSTRUCTION BASED ON
CONE-BEAM USING SIMULTANEOUS ALGEBRAIC**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER ENGINEERING IN ELECTRONIC ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2004
ISBN 974-9709-65-9**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2004

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตสำหรับ เส้นทางเดินแสงแบบกรวย
นักศึกษา	นายศุภชัย งามอนเกรรัตน์
รหัสนักศึกษา	45061124
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์
พ.ศ.	2547
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.มนัส สังวรศิลป์
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม	ผศ.ดร.ชูชาติ ปิณฑวิรุจน์

บทคัดย่อ

ภาพตัดขวางสามารถสร้างได้จากชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ แต่เมื่อจำนวนภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ถูกจำกัด ด้วยปริมาณการฉายของรังสีจึงทำให้ภาพที่สร้างจากวิธีฟิลเตอร์แบ็ก โปรเจกชันมีความผิดพลาด และเกิดผลของ Star-artifact บนภาพตัดขวาง จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าภาพตัดขวางที่สร้างจาก อัลกอริทึมเชิงพีชคณิต (Algebraic Reconstruction Algorithm) มีผลของ Star-artifact บน ภาพตัดขวางที่น้อยกว่า แต่เนื่องจากรังสีเอ็กซ์มีคุณสมบัติคล้ายกับแสงคือเดินทางเป็นเส้นตรงแบบ กรวยจึงเกิดผลของมุมมองแบบสายตา (Perspective) ทำให้ภาพเอ็กซ์เรย์ที่ฉายรับมีขนาด โตขึ้น หาก นำไปใช้สร้างภาพตัดขวางโดยพิจารณาเส้นทางเดินแสงเป็นแบบขนานจะทำให้ภาพตัดขวางมี ขนาดผิดไปจากวัตถุจริง ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการสร้างภาพตัดขวางด้วยอัลกอริทึมเชิงคณิต สำหรับเส้นทางเดินแสงแบบกรวย โดยจำลองการสร้างภาพตัดขวางของภาพ Shepp and Logan Head Phantom โดยใช้ข้อมูลโปรเจกชันแบบกรวยที่ทำให้ภาพตัดขวางที่สร้างได้จากอัลกอริทึมเชิง พีชคณิตแบบกรวยมีค่าผิดพลาดที่ต่ำกว่าแบบขนาน

Thesis Title	Cross Section Image Reconstruction based on Cone-Beam using Simultaneous Algebraic Algorithm
Student	Mr.Supachai Ngamanekrat
Student ID.	45061124
Degree	Master of Engineering
Programme	Electronics Engineering
Year	2004
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Manas Sangworasil
Thesis Co-Advisor	Asst.Prof.Dr. Chuchart Pintavirooj

ABSTRACT

The cross-sectional image can be reconstructed from the x-ray radiographs. When the number of x-ray radiograph is limited by over-irradiated problem, the image reconstruction from the filtered backprojection technique gives an error and star-artifact. The previous research demonstrated that the algebraic reconstruction algorithm gave the error and star-artifact less than the filtered backprojection. Since the path of the x-ray act as a cone beam resulting in the perspective view, the shade of the object was enlarged. If the x-ray radiograph is reconstructed on the parallel-beam reconstruction, the dimension of the cross-section is mistaken. This research proposes the algebraic reconstruction algorithm based on cone-beam reconstruction that considers the rays as the FeldKamp by rotating the fan-beam around the point source. The simulation of the cone-beam reconstruction of the Shepp and Logan Head Phantom from cone-beam projection has the error less than the parallel-beam reconstruction.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถูกล่วงได้อย่างดี ด้วยความช่วยเหลือและการสนับสนุนจากบุคคลหลายๆ ท่าน ซึ่งผู้เขียนขอขอบพระคุณทุกๆ ท่านดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณคุณพ่อและคุณแม่ ผู้ซึ่งคอยให้การอบรมสั่งสอน เลี้ยงดู ตลอดจนให้กำลังใจเสมอมา

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.มนัส ตั้งวรศิลป์ อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ซึ่งให้คำปรึกษา และคำแนะนำต่างๆ รวมทั้งความเอื้อเฟื้อเครื่องมือเครื่องใช้ในการทำวิจัย ผู้เขียนรู้สึกซาบซึ้งในความเมตตาของท่านเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ ดร.ชูชาติ ปิณฑวิรุจน์ ดร.สุรพันธ์ เอื้อไพบูรณ์ ดร.กิตติพล ชิตสกุล และผศ.ดร.บุษยามา คิดใจเดียว ผู้ซึ่งให้คำปรึกษาและคำแนะนำต่างๆเกี่ยวกับงานวิจัย

ขอขอบคุณ นพ. ธีรศาสน์ ศิริรัฐนิคม ภาควิชาศิลปศาสตร์ออร์โธปิดิกส์ คณะแพทยศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ที่เอื้อเฟื้อข้อมูลในงานวิจัยนี้

ขอขอบคุณ นายบุญอนันต์ เกียงเฮีย นายพิทยา อิงพินิจพงศ์ นายวิฑูร วิทย์ชำนานกุล นายศักดิ์กะพันธ์ คล้ายดอกจันทร์ นายชาญฤทธิ์ ยศสันติกุล นาย อติศักดิ์ ร่มพุดตาล และเพื่อนนักศึกษาในห้องวิจัยทุกคนที่ช่วยให้แนวคิด คำแนะนำและความช่วยเหลือเกี่ยวกับงานวิจัยจนสำเร็จลุล่วงไปได้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

ศุภชัย งามอนเกรรัตน์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญตาราง	VII
สารบัญรูป	VIII
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	1
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	1
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในงานวิจัย	1
1.5 ขอบเขตของงานวิจัย	2
1.6 โครงสร้างวิทยานิพนธ์.....	2
บทที่ 2 ภาพตัดขวางของวัตถุและคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง (Tomography and Mathematic Equation)3	
2.1 บทนำ	3
2.2 วิธีการสร้างภาพตัดขวาง.....	4
2.2.1 ภาพตัดขวางจากเครื่องเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์.....	4
2.2.2 ภาพตัดขวางจากอัลตราซาวนด์	5
2.2.3 ภาพตัดขวางจากโพซิตรอนอิมิตชันโทโมกราฟี (P.E.T)	7
2.2.4 ภาพตัดขวางจากทรานแซกซ์ลิ่งเกิลโฟตอนอิมิตชันโทโมกราฟี (S.P.E.C.T)	7
2.3 ภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์	8
2.3.1 ประวัติการค้นพบเอ็กซ์เรย์.....	8
2.3.2 การเกิดรังสีเอ็กซ์.....	9
2.3.3 ลักษณะและคุณสมบัติของรังสีเอ็กซ์	11
2.3.4 ประโยชน์ของเอ็กซ์เรย์ทางการแพทย์.....	12
2.4 คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวาง.....	12

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

2.4.1	การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนค่าเดียว.....	12
2.4.2	การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่าแบบทิศทางเดียว.....	14
2.4.3	การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่าแบบหลายทิศทาง.....	14
2.4.4	การอินทิเกรตในแนวเส้น (Line Integrals) และการโปรเจกชัน (Projections).....	16
บทที่ 3	วิธีการสร้างภาพตัดขวางแบบขนาน (Parallel-beam Reconstruction).....	18
3.1	บทนำ.....	18
3.2	การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์.....	18
3.2.1	ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์.....	18
3.2.2	การประมาณค่าในช่วงแบบหลายเชิงเส้น (Bilinear Interpolation).....	22
3.2.3	ตัวอย่างโปรแกรมการสร้างภาพด้วยทฤษฎีบทฟูเรียร์สไลด์.....	23
3.3	วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีแบ็คโปรเจกชัน.....	30
3.4	วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน (FBP).....	32
3.5	อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบ ART (Algebraic Reconstruction Techniques).....	35
3.5.1	ART เป็นระบบสมการเชิงเส้น.....	35
3.5.2	การคำนวณหาค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก (Weighting factor).....	36
3.5.3	ทฤษฎีของแคชเมอร์ซ (Kaczmarz Method).....	37
3.5.4	ทำไม ART จึงต้องการจำนวนโปรเจกชันน้อยกว่าวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน.....	40
3.6	อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบ SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Techniques).....	42
3.7	โปรเจกชันและแบ็คโปรเจกชันใน SART.....	42
3.7.1	SART โปรเจกชัน.....	43
3.7.2	SART แบ็คโปรเจกชัน.....	43
บทที่ 4	อัลกอริทึมของการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย (Cone-beam Reconstruction).....	45
4.1	บทนำ.....	45
4.2	การสร้างภาพตัดขวางแบบพัด (Fan-beam reconstruction).....	45
4.2.1	มุมระหว่างเส้นแสงเท่ากัน (equiangular ray).....	46

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
4.2.2 ระยะระหว่างเส้นแสงเท่ากัน (equally space collinear detectors)	49
4.3 การสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย (Cone-beam reconstruction)	52
4.3.1 โปรเจกชันของวัตถุ 3 มิติ (Three-Dimension Projection).....	53
4.3.2 FeldKamp หรือ ฟิลเตอร์แบ็ค โปรเจกชันแบบ 3 มิติ (3D Filtered Backprojection).....	56
4.3.3 ART และ SART แบบ 3 มิติ (3D Algebraic Reconstruction Algorithm) 59	
บทที่ 5 การทดลองและผลการทดลอง	63
5.1 บทนำ.....	63
5.2 การทดลองสร้างภาพตัดขวางจากแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์	63
5.2.1 การทดลองสร้างภาพตัดขวางวิธีเฟลด์แคมป์	65
5.2.2 การทดลองสร้างภาพตัดขวางวิธี ART Cone-beam	68
5.2.3 การทดลองสร้างภาพตัดขวางวิธี SART Cone-beam.....	80
5.3 การทดลองสร้างภาพตัดขวางภาพถ่ายเอ็กซเรย์.....	93
5.3.1 การเตรียมข้อมูลภาพถ่ายเอ็กซเรย์.....	94
5.3.2 ผลการทดลองการสร้างภาพตัดขวางจากชุดข้อมูลภาพถ่ายเอ็กซเรย์	95
5.3.3 การทดลองเปรียบเทียบภาพตัดขวางด้วยเทคนิค Principle Axes	100
บทที่ 6 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ	105
6.1 สรุปผลงานวิจัย	105
6.2 ข้อเสนอแนะ	106
เอกสารอ้างอิง.....	107
ภาคผนวก ก ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์	109
ประวัติผู้เขียน	110

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 พารามิเตอร์รูปทรงเรขาคณิตต่างๆ สำหรับการสร้างภาพ Shepp-Logan head phantom	15
4.1 พารามิเตอร์รูปทรงเรขาคณิต สำหรับสร้าง Shepp-Logan head phantom แบบ 3 มิติ	54
5.1 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธีเฟลด์แคมป์	67
5.2 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี ART จำนวน 30 โปรเจ็คชัน	70
5.3 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี ART จำนวน 60 โปรเจ็คชัน	73
5.4 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี ART จำนวน 90 โปรเจ็คชัน	76
5.5 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี ART จำนวน 120 โปรเจ็คชัน	79
5.6 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี SART จำนวน 30 โปรเจ็คชัน	82
5.7 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี SART จำนวน 60 โปรเจ็คชัน	85
5.8 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี SART จำนวน 90 โปรเจ็คชัน	88
5.9 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี SART จำนวน 120 โปรเจ็คชัน	91
5.10 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางขนาด 256x256 จำนวน 256 สไลด์	92
5.11 โควาเรียนซ์อันดับสองจากพิกัดของวัตถุในภาพตัดขวาง	103
5.12 Eigenvector และ Eigenvalue	103

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1	หลักการสร้างภาพตัดขวางโดยวิธีการส่งผ่านการแผ่และการสะท้อน..... 8
2.2	เครื่องเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์..... 5
(a)	ห้องควบคุม (b) เครื่องสแกนเอ็กซ์เรย์..... 5
2.3	เครื่องตรวจอวัยวะภายในโดยใช้คลื่นความถี่สูง 7
2.4	เครื่องทรานสแอกเซียลซิงเกิลโฟตอนอิมิตชันโทโมกราฟี..... 8
2.5	ฟิล์มเอ็กซ์เรย์มือแบบที่เรินต์เกนค้นพบโดยบังเอิญ..... 9
2.6	ลำรังสีเอ็กซ์ที่ฉายไปยังวัตถุที่มีเนื้อเดียวกันตลอด 13
2.7	การฉายรังสีไปยังวัตถุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่า 14
2.8	ฉายรังสีไปยังวัตถุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่าและมีการฉายรังสีหลายทิศทาง 15
2.9	แสดงภาพตัดขวางของร่างกายมนุษย์..... 16
2.10	โปรเจกชันของวัตถุ $f(x, y)$ ที่มุม θ 17
3.1	ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์แสดงความสัมพันธ์การแปลงฟูเรียร์ของโปรเจกชันกับการแปลงฟูเรียร์ของภาพ 19
3.2	Block diagram แสดงวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์..... 22
3.3	ระบบพิกัด..... 22
(a)	เชิงขั้ว (b) มุมฉาก 22
3.4	การประมาณค่าจุด $P(u, v)$ 23
3.5	โมเดล Shepp-Logan head phantom..... 24
(a)	ภาพ Shepp-Logan head phantom (b) ข้อมูลเรขาคณิต..... 24
3.6	ข้อมูลโปรเจกชันของวัตถุรูปสี่เหลี่ยม..... 25
(a)	ทิศทางตามแนวนอนและแนวตั้ง (b) ทิศทางใดๆ 25
3.7	ภาพ 3 มิติของข้อมูลโปรเจกชันจำนวน 180 มุม 26
3.8	ภาพ 3 มิติของข้อมูลโปรเจกชันที่ผ่านการแปลงฟูเรียร์จำนวน 180 มุม 27
3.9	ตัวอย่างการนำข้อมูลโปรเจกชันมุม 0 มาแปลงฟูเรียร์ในโปรแกรม MatLab 28
(a)	โปรเจกชันของ “radon” (b) โปรเจกชันจัดด้วย “fftshift”..... 28
(c)	โปรเจกชันที่แปลงฟูเรียร์ด้วย “fft” (d) โปรเจกชันที่แปลงฟูเรียร์จัดด้วย “fftshift” 28
3.10	การแปลงฟูเรียร์กลับเพื่อให้ได้ภาพผลลัพธ์ 29
(a)	ข้อมูลฟูเรียร์แบบ 2 มิติ (b) จัดลำดับด้วย “fftshift”..... 29
(c)	แปลงฟูเรียร์กลับแบบ 2 มิติด้วย ifft2 (d) จัดข้อมูลด้วย fftshift จะ ได้ภาพผลลัพธ์..... 29

VIII

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.11 แสดงภาพผลลัพธ์ด้วยคำสั่ง “imshow”	30
3.12 โปรเจ็คชันของฟังก์ชัน 2 มิติ	31
3.13 ตัวกระทำเบ็คโปรเจ็คชันที่มุมเท่ากับ θ	31
3.14 ตัวกระทำเบ็คโปรเจ็คชันที่มุมเท่ากับ θ	32
3.15 Block diagram แสดงวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีฟิลเตอร์เบ็คโปรเจ็คชัน	33
3.16 ภาพแสดงผลตอบสนองทางความถี่ของ Ram-Lak Filter	35
3.17 ภาพแสดงรูปแบบการฉายแสงและการคำนวณค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก	36
3.18 ภาพแสดงตัวอย่างการคำนวณหาค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก	37
3.19 ภาพแสดงการใช้ทฤษฎีของแคลซ์มาร์ช ในการแก้ระบบสมการ 2 ตัวแปร	38
3.20 ภาพแสดง Hyper-plane ของสมการ $\mathbf{h}_1 \cdot \vec{f} = p_1$	39
3.21 ขั้นตอนการทำงานของ SART	43
3.22 การประมาณค่าแบบเชิงเส้น	44
(a) จากภาพสู่เส้นแสง (b) จากเส้นแสงสู่ภาพ	44
4.1 เส้นทางเดินแสง	45
(a) แบบขนาน (parallel-beam) (b) แบบพัด (fan-beam) (c) แบบกรวย (cone-beam)	45
4.2 ข้อมูลโปรเจ็คชันเมื่อพิจารณาทางเดินแสงแบบพัดที่มีระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน (equally space collinear detectors)	46
4.3 ข้อมูลโปรเจ็คชันเมื่อพิจารณาทางเดินแสงแบบพัดที่มีระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน (equally space collinear detectors)	47
4.4 ข้อมูลโปรเจ็คชันเมื่อพิจารณาทางเดินแสงแบบพัดที่มีระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน (Equally space collinear detectors)	50
4.5 เรขาคณิตของทางเดินแสงแบบพัดที่พิจารณาระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน	50
4.6 การสร้างภาพตัดขวางจากวัตถุ 3 มิติ	52
4.7 การพิจารณาทางเดินแสงแบบกรวยในรูปแบบทางเดินแสงแบบพัด	52
4.8 ความสัมพันธ์ของการหมุนของระบบ โคออร์ดิเนต	53
4.9 การสร้างภาพตัดขวางจากวัตถุ 3 มิติ	54
(a) Shepp and Logan head phantom แบบ 3 มิติ (b) ภาพตัดขวาง A สไลด์ที่ 96	54
(c) ภาพตัดขวาง B สไลด์ที่ 208	54
4.10 ภาพแสดงระบบพิกัด (t,s)	57

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.11	บล็อกโคอะแกรมของอัลกอริทึมเชิงพีชคณิต 58
4.12	ภาพแสดงเส้นทางเดินแสงแบบต่างๆ ในข้อมูลเชิงปริมาตร 60
4.13	โปรแกรมการทำงานของ ART แบบเดิม 60
4.14	โปรแกรมการทำงานของ SART แบบเดิม 61
4.15	ภาพแสดงข้อมูลเชิงปริมาตรบนเส้นทางเดินแสง..... 61
5.1	การโปรเจกชันของ Shepp and Logan โดยมีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย 63
5.2	การโปรเจกชันของ Shepp and Logan โดยมีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย 64
5.3	แสดงภาพจากเบ็คโปรเจกชัน 64 (a) แบบขนาน (b) แบบกรวย 64
5.4	ภาพ Shepp and Logan ต้นแบบขนาด 256x256 สไลด์ที่ 98..... 65
5.5	ภาพผลลัพธ์สไลด์ที่ 98 ขนาด 256x256 จากโปรเจกชันแบบกรวย D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 30 โปรเจกชันด้วยวิธีเฟลด์แคมป์ 65
5.6	ภาพผลลัพธ์สไลด์ที่ 98 ขนาด 256x256 จากโปรเจกชันแบบกรวย D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 60 โปรเจกชันด้วยวิธีเฟลด์แคมป์ 66
5.7	ภาพผลลัพธ์สไลด์ที่ 98 ขนาด 256x256 จากโปรเจกชันแบบกรวย D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 90 โปรเจกชันด้วยวิธีเฟลด์แคมป์ 66
5.8	ภาพผลลัพธ์สไลด์ที่ 98 ขนาด 256x256 จากโปรเจกชันแบบกรวย D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 120 โปรเจกชันด้วยวิธีเฟลด์แคมป์ 67
5.9	กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธีเฟลด์แคมป์ 67
5.10	ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 30 โปรเจก ชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam ART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10 68
5.11	กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบ ข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน ART จำนวน 30 โปรเจกชัน มีระยะ D_{sc} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam 67
5.12	กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก ART จำนวน 30 โปรเจกชัน 70
5.13	ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 60 โปรเจก ชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam ART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10 71

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.14 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน ART จำนวน 60 โปรเจกชัน มีระยะ Dsc เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam.....	72
5.15 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก ART จำนวน 60 โปรเจกชัน.....	73
5.16 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 90 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam ART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10.....	74
5.17 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน ART จำนวน 90 โปรเจกชัน มีระยะ Dsc เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam.....	75
5.18 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก ART จำนวน 90 โปรเจกชัน.....	76
5.19 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 120 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam ART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10.....	77
5.20 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน ART จำนวน 120 โปรเจกชัน มีระยะ Dsc เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam.....	78
5.21 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก ART จำนวน 120 โปรเจกชัน.....	79
5.22 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 30 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam SART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10.....	80
5.23 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน SART จำนวน 30 โปรเจกชัน มีระยะ Dsc เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam.....	81
5.24 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก SART จำนวน 30 โปรเจกชัน.....	82
5.25 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 60 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam SART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10.....	83

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.26	กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน SART จำนวน 60 โปรเจกชัน มีระยะ Dsc เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam..... 84
5.27	กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก SART จำนวน 60 โปรเจกชัน..... 85
5.28	ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 90 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam SART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10..... 86
5.29	กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน SART จำนวน 90 โปรเจกชัน มีระยะ Dsc เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam..... 87
5.30	กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก SART จำนวน 90 โปรเจกชัน..... 88
5.31	ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 120 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam SART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10..... 89
5.32	กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน SART จำนวน 120 โปรเจกชัน มีระยะ Dsc เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam..... 90
5.33	กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก SART จำนวน 120 โปรเจกชัน..... 91
5.34	กราฟเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 วิธี FeldKamp, ART และ SART จำนวน 30, 60, 90 และ 120 โปรเจกชัน..... 92
5.35	กราฟเปรียบเทียบเวลาที่ใช้สร้างภาพตัดขวางขนาด 256x256 จำนวน 256 สไลด์ด้วยวิธี FeldKamp, ART และ SART จำนวน 30, 60, 90 และ 120 โปรเจกชันตามลำดับ..... 93
5.36	ชุดภาพถ่ายเอ็กซเรย์ของท่อ PVC..... 93
5.37	ชุดภาพถ่ายเอ็กซเรย์ของกระดูกหัวเข่า..... 94
5.38	ชุดภาพถ่ายเอ็กซเรย์ของกระดูก..... 94
5.39	การแยกข้อมูลภาพวัตถุในภาพถ่ายเอ็กซเรย์..... 95
	(a) ข้อมูลจากเครื่องถ่ายภาพเอ็กซเรย์ (b) ภาพ Background (c) ภาพถ่ายเอ็กซเรย์ของวัตถุ.... 95

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.40 ภาพตัดขวางของท่อ PVC สไลด์ที่ 50 ขนาด 256x256.....	95
(a) แสดงตำแหน่งภาพตัดขวางสไลด์ที่ 50	95
(b) ภาพตัดขวางจากวิธี FeldKamp Dsc = 60 เซนติเมตร	95
(c) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Cone-beam Dsc = 60 เซนติเมตร	95
(d) ภาพตัดขวางจากวิธี SART แบบขนาน	95
5.41 ภาพเชิงพื้นผิวของท่อ PVC จากภาพตัดขวางแบบกรวยระยะ Dsc = 60 เซนติเมตร	96
(a) FeldKamp (b) SART Cone-beam	96
5.42 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) ของท่อ PVC จำนวน 60 โปรเจกชันใช้จำนวนการทำซ้ำ 10 iterations.....	96
(a) SART Parallel-beam (b) SART Cone-beam Dsc = 60 ซม.	96
5.43 ภาพตัดขวางของกระดูกหัวเข่าสไลด์ที่ 50 ขนาด 256x256	97
(a) แสดงตำแหน่งภาพตัดขวางสไลด์ที่ 50	97
(b) ภาพตัดขวางจากวิธี FeldKamp Dsc = 60 เซนติเมตร	97
(c) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Cone-beam Dsc = 60 เซนติเมตร	97
(d) ภาพตัดขวางจากวิธี SART แบบขนาน	97
5.44 ภาพเชิงพื้นผิวของกระดูกหัวเข่าจากภาพตัดขวางแบบกรวยระยะ Dsc = 60 เซนติเมตร.....	97
(a) FeldKamp (b) SART Cone-beam	97
5.45 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) ของกระดูกหัวเข่า จำนวน 60 โปรเจกชันใช้จำนวนการทำซ้ำ 10 iterations.....	98
(a) SART Parallel-beam (b) SART Cone-beam Dsc = 60 ซม.	98
5.46 ภาพตัดขวางของกระดูกสไลด์ที่ 50 ขนาด 256x256	98
(a) แสดงตำแหน่งภาพตัดขวางสไลด์ที่ 50	98
(b) ภาพตัดขวางจากวิธี FeldKamp Dsc = 60 เซนติเมตร	98
(c) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Cone-beam Dsc = 60 เซนติเมตร	98
(d) ภาพตัดขวางจากวิธี SART แบบขนาน	98
5.47 ภาพเชิงพื้นผิวของกระดูกจากภาพตัดขวางแบบกรวยระยะ Dsc = 60 เซนติเมตร.....	99
(a) FeldKamp (b) SART Cone-beam	99

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.48 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) ของกระดูกจำนวน 60 โปรเจกชัน ใช้จำนวนการทำซ้ำ 10 iterations.....	99
(a) SART Parallel-beam (b) SART Cone-beam Dsc = 60 ซม.	99
5.49 การหาขอบวัตถุในภาพตัดขวาง.....	100
(a) ภาพตัดขวางท่อ PVC จากวิธี SART Cone-beam สไลด์ที่ 100.....	100
(b) ภาพขอบของท่อ PVC ในภาพตัดขวาง Cone-beam.....	100
(c) ภาพตัดขวางท่อ PVC จากวิธี SART Parallel-beam สไลด์ที่ 100.....	100
(d) ภาพขอบของท่อ PVC ในภาพตัดขวางแบบ Parallel-beam.....	100
5.50 จำลองการทำงานหาพิกัดของวัตถุ.....	101
(a) กำหนดพิกัดเริ่มต้นให้ Snake.....	101
(b) ผลเฉลยที่ Snake คำนวณได้แต่ละการทำซ้ำ.....	101
(c) ตำแหน่งพิกัดท่อ PVC ในภาพตัดขวางแบบ Cone-beam.....	101
(d) ตำแหน่งพิกัดท่อ PVC ในภาพตัดขวางแบบ Parallel-beam.....	101
5.51 การเลื่อนจุดกำเนิดของวัตถุไปยังจุดกำเนิดของภาพ.....	102
5.52 การเปรียบเทียบรัศมีของวัตถุในภาพตัดขวางกับรัศมีของท่อ PVC.....	103
5.53 ค่าความผิดพลาดรัศมีของท่อ PVC ในภาพตัดขวางแบบ Mean Square Error.....	104

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การสร้างภาพตัดขวางจากภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์จำเป็นต้องใช้ภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ที่มุมต่างๆรอบๆวัตถุ แต่เนื่องจากข้อจำกัดด้านปริมาณของรังสีที่วัตถุจะได้รับ จึงทำให้ได้จำนวนของภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ที่จำกัด ซึ่งจะมีผลอย่างมากกับคุณภาพของภาพตัดขวางที่ได้จากวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน จึงได้มีการนำเสนอวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตซึ่งจะให้ภาพตัดขวางที่มีคุณภาพดีกว่าวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันเมื่อมีจำนวนมุมของข้อมูลมีจำกัด แต่ในงานวิจัยที่ผ่านมาจะวิเคราะห์ระบบทางเดินแสงในการสร้างภาพตัดขวางเป็นแบบขนาน (Parallel-beam) ในขณะที่ภาพเอ็กซ์เรย์ที่นำมาใช้มีผลของมุมมองแบบสายตา (Perspective) คือเงาที่เกิดบนฉากรับมีขนาดใหญ่กว่าวัตถุจริง หากนำไปใช้ในการสร้างภาพตัดขวางโดยพิจารณาเส้นทางเดินแสงแบบขนานจะทำให้วัตถุในภาพมีขนาดใหญ่กว่าวัตถุจริง ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้ทำการศึกษาวิธีการสร้างภาพตัดขวางเชิงพีชคณิตที่พิจารณาทางเดินของแสงเป็นแบบกรวย (Cone-beam) เพื่อให้ภาพตัดขวางมีความถูกต้องยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. ศึกษาการสร้างภาพตัดขวางจากภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์โดยใช้อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตที่มีเส้นทางเดินแสงแบบกรวย
2. เปรียบเทียบภาพตัดขวางที่ได้จากอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตสำหรับเส้นทางเดินแสงแบบขนานกับทางเดินแสงแบบกรวย

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

รังสีเอ็กซ์เป็นรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า มีช่วงคลื่นสั้นมาก คืออยู่ในช่วง 0.04-1000 Å อยู่ในช่วงรังสีแกมมากับรังสีอัลตราไวโอเล็ต เนื่องจากรังสีเอ็กซ์มีคุณสมบัติเหมือนแสงสว่างธรรมดา คือเดินทางเป็นเส้นตรง และยังมีการสะท้อนกลับ หักเห เบี่ยงเบน ได้ นั่นคือลักษณะการกระจายของรังสีเอ็กซ์จะพุ่งออกมาจากแหล่งกำเนิด โดยทางเดินของรังสีจะเป็นทรงกรวยไม่ขนานกัน ซึ่งในงานวิจัยที่ผ่านมาได้วิเคราะห์ทางเดินของรังสีเป็นเส้นตรงแบบขนาน โดยตั้งสมมติฐานว่าทางเดินของรังสีจะมีลักษณะขนานเมื่อระยะการฉายรังสีอยู่ห่างกันมากๆ แต่ในทางปฏิบัติแล้วระยะการฉายรังสีมีระยะที่ใกล้ ทำให้ภาพตัดขวางที่สร้างได้ยังมีความผิดพลาด

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในงานวิจัย

เฟลด์แคมป์ (FeldKamp) คือการสร้างภาพตัดขวางด้วยวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันที่พิจารณาเส้นทางเดินแสงเป็นแบบกรวย แต่จำนวนมุมที่จำกัดทำให้เกิด Star-artifact บนภาพ ซึ่งสามารถ

ปรับปรุงคุณภาพของภาพตัดขวางได้โดยใช้อัลกอริทึมเชิงพีชคณิต (Algebraic Reconstruction Algorithm) ที่ช่วยในการแก้หาผลเฉลยด้วยทฤษฎีของแคชคมาร์ซ (Kaczmarz method) ของเซตของสมการเชิงเส้น (Linear equation) งานวิจัยนี้จึงนำเสนอการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตสำหรับเส้นทางเดินแสงแบบกรวย โดยพิจารณาทางเดินของแสงเป็นแบบพัด (fan-beam) ที่มีลักษณะยกขึ้น-ลงเช่นเดียวกับวิธีเฟลด์แคมป์

1.5 ขอบเขตของงานวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการสร้างภาพตัดขวางอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตสำหรับเส้นทางเดินแสงแบบกรวยและแบบขนานของแบบจำลอง Shepp and Logan head phantom ที่นิยมใช้ทดสอบการสร้างภาพตัดขวางทางการแพทย์ และวิธีฟิลเตอร์แบ็ค โปรเจกชันแบบกรวย (FeldKamp) จากนั้นจึงทดลองนำไปใช้สร้างภาพตัดขวางจากชุดภาพถ่ายเอ็กซเรย์

1.6 โครงสร้างวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 6 บท ในแต่ละบทจะมีเนื้อหาดังต่อไปนี้

บทที่ 1. กล่าวถึงความจำเป็นมาและความสำคัญของปัญหา ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา สมมติฐานของงานวิจัย และขอบเขตของงานวิจัย

บทที่ 2. กล่าวถึงการสร้างภาพตัดขวางภาพถ่ายเอ็กซเรย์ และคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างภาพตัดขวาง

บทที่ 3. กล่าวถึงวิธีการสร้างภาพตัดขวางแบบขนาน ซึ่งได้แก่ วิธีการแปลงฟูเรียร์ วิธีแบ็คโปรเจกชัน วิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน และวิธีเชิงพีชคณิต

บทที่ 4. กล่าวถึงวิธีการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย ได้แก่ วิธีเฟลด์แคมป์วิธีแบบพีชคณิต

บทที่ 5. กล่าวถึงการทดลอง และผลการทดลอง

บทที่ 6. เป็นการสรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะแนวทางในการทำวิจัยต่อไป

บทที่ 2

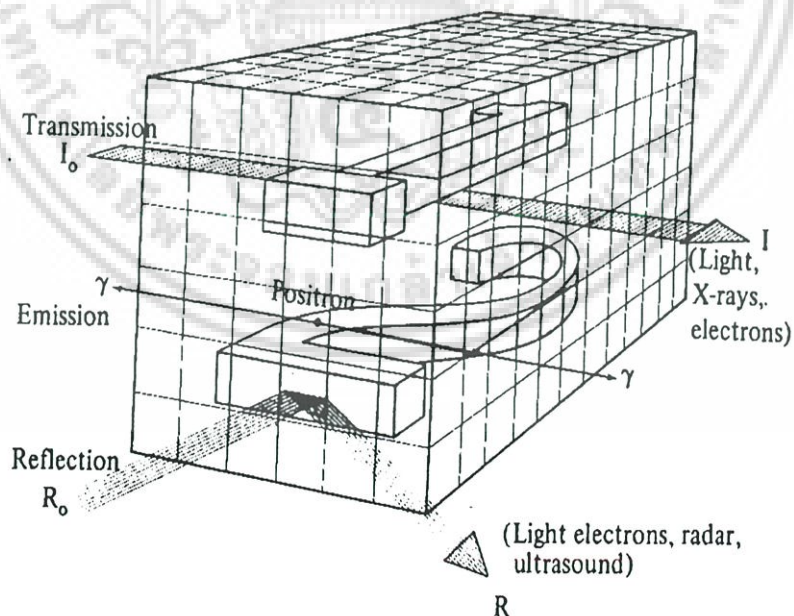
ภาพตัดขวางของวัตถุและคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง (Tomography and Mathematic equation)

2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างภาพตัดขวางด้วยวิธีการต่างๆ ภาพถ่ายเอ็กซเรย์ คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างภาพตัดขวาง ซึ่งจะแบ่งออกเป็น การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน, การอินทิเกรตในแนวเส้นและการ โปรเจกชัน และการแปลงเรดอน (radon)

2.2 วิธีการสร้างภาพตัดขวาง

ปัญหาสำคัญในการสร้างภาพตัดขวางของวัตถุที่ไม่ทำลายวัตถุโดยใช้กรรมวิธีต่างๆเช่น การทาบทำลายวัตถุเพื่อให้เห็นชิ้นส่วนภายในของวัตถุเป็นต้น จากรูปที่ 2.1 พิจารณารูปสี่เหลี่ยมทรงลูกบาศก์ตัน ภายในประกอบด้วยเลขหนึ่งและสอง วิธีการที่ง่ายที่สุดเพื่อที่จะรู้ว่าภายในสี่เหลี่ยมตันนี้ประกอบด้วยอะไรบ้าง คือ การผ่าวัตถุตามแนวขวางให้ผ่านส่วนที่ต้องการดู อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติในกรณีต่างๆ เช่น การวินิจฉัยโรคทางการแพทย์ การสังเกตการณ์ทางดาราศาสตร์ (Astronomical observation) การทดสอบในทางอุตสาหกรรมโดยไม่ต้องทำลาย (Industrial nondestructive testing) เป็นต้น จะไม่สามารถใช้วิธีการนี้ได้



รูปที่ 2.1 หลักการสร้างภาพตัดขวางโดยวิธีการส่งผ่านการแผ่และการสะท้อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยไม่ต้องทำลายวัตถุ แบ่งออกเป็นหลักใหญ่ๆ 3 วิธี คือ การส่งผ่าน (Transmission) การแผ่ (Emission) และการสะท้อน (Reflection) ในการส่งผ่านเราจะใช้รังสีเอกซ์ ลำอิเล็กตรอน ความร้อนหรือพลังงานใดๆก็ได้ที่ประพฤติตามกฎของการดูดซึม (Absorption law) โดยพลังงานที่ผ่านเข้าไปในวัตถุจะถูกดูดซึมในส่วนต่างๆของวัตถุไม่เท่ากัน พลังงานส่วนที่ทะลุออกมา เรียกว่า โปรเจกชัน และภาพตัดขวางที่ได้จากวิธีนี้ คือ ภาพตัดขวางจากเครื่องเอกซเรย์คอมพิวเตอร์ ในวิธีการแผ่เราจะฉีดสารที่มีกัมมันตภาพรังสีเป็นส่วนประกอบ เมื่อสารนี้ไปยังอวัยวะที่สนใจก็จะแผ่รังสีแกมมาในทิศทางที่แตกต่างกัน ความแตกต่างของเวลาที่ใช้ในการเดินทางของรังสีแกมมาที่ผ่านตำแหน่งเดียวกันนี้จะสามารถนำไปใช้ประมวลผลหาตำแหน่งของจุดนั้นได้ ภาพตัดขวางวิธีนี้คือภาพตัดขวางจากเครื่องโพซิตรอนอิมิตชันโทโมกราฟี (Positron Emission Tomography: P.E.T) และเครื่องซิงเกิลโฟตอนอิมิตชันโทโมกราฟี (Single Photon Emission Computed Tomography: S.P.E.C.T) ส่วนการสะท้อนจะใช้คุณสมบัติการสะท้อนของผิวหน้าของวัตถุมาตรวจสอบหาลักษณะของวัตถุได้ แหล่งพลังงานที่ใช้ เช่น แสง ลำอิเล็กตรอน เรดาร์ หรืออัลตราโซนิก ภาพตัดขวางที่ได้จากวิธีนี้คือภาพตัดขวางจากเครื่องอัลตราซาวด์ (Ultrasound)

2.2.1 ภาพตัดขวางจากเครื่องเอกซเรย์คอมพิวเตอร์

เมื่อเดือนตุลาคม พ.ศ. 2522 ค็อกเตอร์กอดเฟรย์ นิวโบลด์ เฮนส์ฟิลด์ (Dr. Godfrey Newbold Hounsfield) วิศวกรไฟฟ้าชาวอังกฤษ และอัลเลน แมคลีออด คอร์แมค (Allen MacLeod Cormack) นักฟิสิกส์แห่งมหาวิทยาลัยทัฟของสหรัฐอเมริกา เป็นผู้ได้รับรางวัลโนเบลร่วมกันจากสถาบันสตอกโฮล์ม แคโรลินสกา ในสาขาสรีรวิทยา (physiology) การค้นพบเอกซเรย์คอมพิวเตอร์นี้ นักวิทยาศาสตร์ทั้งสองท่านนี้ไม่เคยรู้จักกันมาก่อนเลย แต่บังเอิญทำการค้นคว้าในเรื่องเดียวกันและประสบความสำเร็จพร้อมกัน โดยนายคอร์แมค ซึ่งเกิดในแอฟริกาใต้และได้ย้ายถิ่นที่อยู่ไปอยู่ในสหรัฐอเมริกา เมื่อปีพ.ศ. 2499 ได้เป็นผู้พบทฤษฎีว่าด้วยการที่เนื้อเยื่อต่างๆในร่างกายมีความหนาแน่นไม่เท่ากัน และมีโครงสร้างต่างๆกัน สามารถสกัดกันเอกซเรย์ได้ไม่เท่ากัน ถ้าหากสร้างเครื่องเอกซเรย์ที่มีหลอดเอกซเรย์หมุนรอบตัวคนไข้ แล้วสร้างเครื่องวัดจำนวนเอกซเรย์ที่ทะลุผ่านคนไข้ออกมาในมุมต่างๆกันแล้ว จะได้ข้อมูลออกมาจำนวนมากในรูปของสัญญาณไฟฟ้า ซึ่งเมื่อนำไปป้อนเข้าเครื่องคอมพิวเตอร์แล้วจะสามารถสร้างรูปอวัยวะภายในระบบสามมิติขึ้นได้บนจอโทรทัศน์ นายคอร์แมคเป็นชาวอเมริกันคนที่ 53 ที่ได้รับรางวัลโนเบล ขณะที่รับรางวัลเขามีอายุ 55 ปี ส่วนนายเฮนส์ฟิลด์นั้นเชื่อว่าเอกซเรย์ เมื่อผ่านคนไข้แล้ววัดด้วยเครื่องวัด จำนวนรังสีจะสามารถแปลงเป็นสัญญาณไฟฟ้า แล้วเอามาสร้างรูปได้เช่นเดียวกับกับที่คอร์แมคคิด แต่เขาได้สร้างเครื่องขึ้นจริงๆ และทำสำเร็จเมื่อ พ.ศ. 2515 ขณะที่เขาได้รับรางวัลโนเบล เขามีอายุ 60 ปี

เมื่อพิจารณาถึงวิธีการทำงานของเอกซเรย์คอมพิวเตอร์เพื่อให้ได้ภาพตัดขวางที่เหมือนตัดร่างกายออกมาเป็นชิ้นบางๆนั้นพบว่ามีความสลับซับซ้อนอยู่มากพอสมควร เพราะเป็นวิธีการที่ต้อง

อาศัยความรู้ทางฟิสิกส์วิศวกรรมและคอมพิวเตอร์เป็นอย่างดี ตามทฤษฎีการสร้างภาพของเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์ ทำให้ทราบว่าข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณสร้างภาพ คือค่าความเข้มของรังสีเอ็กซ์ที่ทะลุผ่านร่างกายผู้ป่วยซึ่งบางๆดังกล่าวออกมาในทิศทางต่างๆจำนวนมาก หลักการทำงานของเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์ง่ายที่สุดขณะนี้ คือ บังรังสีเอ็กซ์ลำแคบออกไปจากหลอดรังสีเอ็กซ์ แล้วใช้หัววัดรังสีเอ็กซ์ไปตั้งไว้ที่ฝั่งตรงข้าม แล้วเคลื่อนหลอดรังสีเอ็กซ์ให้รังสีเอ็กซ์ลำแคบตัดผ่านไปในระนาบของผู้ป่วยที่ต้องการ การเคลื่อนที่ตัดในแนวเส้นตรงแบบนี้ 1 ครั้งจะได้ข้อมูลความเข้มของรังสีเอ็กซ์ 1 โปรไฟล์ (profile) สำหรับเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์ที่เฮนสฟิลด์สร้างขึ้นครั้งแรก 1 โปรไฟล์จะประกอบด้วย 160 เรย์ซัม เมื่อการเคลื่อนที่ตัดในแนวเส้นตรงครั้งแรกจบลง การเคลื่อนที่ตัดจะเริ่มขึ้นอีก แต่รังสีเอ็กซ์ลำแคบจะบิดไปจากแนวเดิม 1 องศา แล้วเคลื่อนที่ตัดแบบเดิมในระนาบเดิม การเคลื่อนที่ตัดจะต้องกระทำจนกระทั่งครบ 180 องศา ข้อมูลความเข้มของรังสีทั้งหมด 180 โปรไฟล์ หรือ 180×160 เรย์ซัม จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณสร้างภาพ



(a)



(b)

รูปที่ 2.2 เครื่องเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์

(a) ห้องควบคุม

(b) เครื่องสแกนเอ็กซ์เรย์

ในปัจจุบันการใช้เครื่องเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ทำให้แพทย์วินิจฉัยโรคได้ดี ถ้วนรวดเร็ว ปลอดภัยและไร้ความเจ็บปวด นับได้ว่าเป็นความก้าวหน้าที่สำคัญยิ่งในทางการแพทย์ ในระยะแรกเครื่องเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์นี้มีขนาดเล็ก ตรวจสอบได้แต่ส่วนศีรษะและสมอง แต่เวลาต่อมาก็มีการปรับปรุงให้ดีขึ้นอย่างรวดเร็ว จนสามารถถ่ายภาพเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์ได้ทั่วร่างกาย

2.2.2 ภาพตัดขวางจากอัลตราซาวนด์ [1]

อัลตราซาวนด์ คือ คลื่นเสียงที่มีความถี่เกิน 20,000 เฮิรตซ์ หรือเกิน 20,000 รอบต่อวินาที เป็นความถี่ที่สูงเกินกว่าที่มนุษย์จะได้ยิน คลื่นเสียงเป็นพลังงานกลที่เดินทางไปและกลับได้ตามทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น โดยต้องอาศัยเดินทางผ่านตัวกลางที่มีความยืดหยุ่น ความเร็วของคลื่น

เสียงที่เดินทางผ่านตัวกลางจะเร็วมากหรือน้อยสุดแต่ความหนาแน่นและความยืดหยุ่นที่อุณหภูมิ และความดันนั้นๆของตัวกลาง อาทิเช่น ความเร็วของคลื่นเสียงในอากาศ 333 เมตรต่อวินาที ในน้ำ 1,495 เมตรต่อวินาที และในกระดูก 5,080 เมตรต่อวินาที ในปี พ.ศ. 2423 คูรีค้นพบหลักการใช้ผลึกแร่ในการบังคับให้กระแสไฟฟ้าเดินไปทางเดียว (piezoelectricity) โดยอธิบายว่า ถ้านำกระแสไฟฟ้าสลับมาผ่านผลึกควอตซ์ (quartz) จะทำให้ผลึกควอตซ์สั่นสะเทือนจากการอัดและขยายของผลึกเมื่อกระแสไฟสลับเปลี่ยนขั้ว และถ้าการเปลี่ยนขั้วมีความถี่สูง ควอตซ์ก็จะสั่นเร็วมาก และสามารถส่งความสะเทือนผ่านตัวกลาง เช่น น้ำหรือเนื้อเยื่อต่างๆต่อไปได้ อันนับว่าเป็นหลักการสร้างคลื่นเสียงความถี่สูงในหัวตรวจ (transducer) ของเครื่องอัลตราซาวนด์สมัยใหม่นี้เอง คูรียังอธิบายด้วยว่า ถ้าทำให้ผลึกควอตซ์อันเดิมนั้นเองสั่นสะเทือนถี่ ๆ โดยใช้พลังงานจากคลื่นเสียงที่ผ่านตัวกลางมากระทบผลึกควอตซ์แล้ว ผลึกควอตซ์นั้นจะสามารถสร้างกระแสไฟฟ้าสลับออกมาจากขั้วของมันได้

ปัจจุบันนี้เครื่องอัลตราซาวนด์ ใช้หลักการนี้ คือ ใช้ผลึกควอตซ์หรือเซรามิกคริสตัล (Ceramic crystal) เช่น แบเรียมไททาเนต (barium titanate) หรือเลดเซอร์โคเนต (lead zirconate) ทำหัวตรวจที่มีความถี่ต่างๆกันตามลักษณะของอวัยวะที่จะตรวจ ตั้งแต่ 1-10 เมกะเฮิรตซ์ เมื่อเอากระแสไฟฟ้าสลับป้อนเข้าหัวตรวจแล้วเอาหัวตรวจไปแตะกับอวัยวะที่จะตรวจโดยผ่านตัวกลางที่เหมาะสม หัวตรวจจะสร้างคลื่นเสียงความถี่สูงและปล่อยให้เดินทางผ่านตัวกลางเข้าไปในอวัยวะที่จะตรวจนั้น เมื่อคลื่นเสียงกระทบกับอวัยวะภายใน เช่น รก หรือทารกในมดลูก ก็จะสะท้อนกลับออกมาภายนอกร่างผ่านตัวกลาง เช่น น้ำมันที่ทาหน้าท้อง แล้วผ่านเข้าสู่หัวตรวจอีกครั้งหนึ่ง หัวตรวจเมื่อได้รับคลื่นเสียงก็จะสั่นสะเทือนและสร้างกระแสไฟฟ้าสลับออกมา เครื่องอัลตราซาวนด์ธรรมดา ก็จะเอากระแสไฟฟ้าสลับนี้มาสร้างเป็นเส้นกราฟให้แพทย์อ่านและแปลผล เป็นขนาดหัวเด็กได้ ต่อมานักวิทยาศาสตร์สามารถเอากระแสไฟฟ้าสลับนี้มาป้อนเข้าคอมพิวเตอร์ให้คำนวณและสร้างภาพมดลูก ภาพรกและภาพทารก ตลอดจนการเคลื่อนไหวของทารกขึ้นบนจอภาพ ให้แพทย์แปลผลว่ามีความผิดปกติหรือพิการหรือไม่ ในบางรายก็จะบอกเพศทารกได้ด้วย ระบบการนำข้อมูลในรูปของกระแสไฟฟ้ามาสร้างภาพขึ้นในจอภาพก็จะใช้ระบบเดียวกับเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์นั่นเอง ปัจจุบันเรียกว่า อัลตราโซโนกราฟี หรือการตรวจโดยใช้คลื่นเสียงความถี่สูงนี้ว่า อัลตราซาวนด์คอมพิวเตอร์โทโมกราฟี (Ultrasound computed tomography หรือ U.C.T) ดังแสดงในรูปที่ 2.3 เครื่องอัลตราซาวนด์โทโมกราฟี ในปัจจุบันได้ก้าวหน้าไปอีกเป็นอันมาก เครื่องบางแบบได้นำเอาระบบโซนาร์ (Sonar) ของทหารเรือแบบที่ใช้ค้นหาตำแหน่งที่เรือได้นำมาใช้ เครื่องแบบนี้ใช้หัวตรวจขนาดใหญ่ 8 หัว มาจวมลงไว้ในถังน้ำขนาดใหญ่ ทำงานโดยใช้คอมพิวเตอร์สั่งงานโดยตลอด ปล่อยคลื่นเสียงผ่านน้ำในถังขึ้นมาที่แผ่นพลาสติกบางๆที่คลุมปากถัง คนไข่นอนคว่ำเอาหน้าท้องที่ต้องการตรวจสัมผัสกับแผ่นพลาสติก โดยใช้น้ำมันพืชใส่หรือเจลลีทาแผ่นพลาสติกก่อน คลื่นเสียงจะเดินทางจากหัวตรวจผ่านน้ำ ผ่านแผ่นพลาสติกบาง ผ่านน้ำมันหรือวุ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และหน้าห้องเข้าสู่มดลูก แล้วสะท้อนกลับตามทางเดิมกลับเข้าหัวตรวจทั้ง 8 หัว ได้สัญญาณป้อนเข้าคอมพิวเตอร์เพื่อนำไปสร้างภาพเด็กขึ้นบนจอโทรทัศน์ เครื่องแบบนี้ใช้ตรวจอวัยวะได้หลายอย่าง เช่น มดลูก ทารก ถุงน้ำดี ตับ ไต และลิ้นหัวใจ ตลอดจนช่องน้ำเลี้ยงสมองในเด็กที่อายุต่ำกว่า 18 เดือนลงมา เครื่องแบบนี้ เรียกว่า เครื่องตรวจอวัยวะภายในโดยใช้คลื่นเสียงความถี่สูง (automated waterpath ultrasonograph) เพราะใช้ระบบโซนาร์และ ทำงานโดยอัตโนมัติ



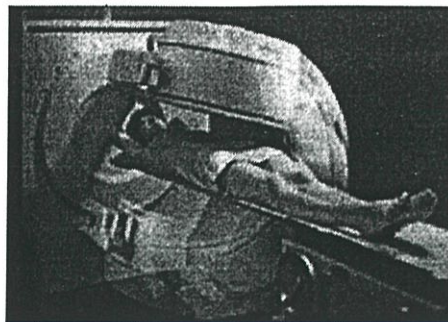
รูปที่ 2.3 เครื่องตรวจอวัยวะภายในโดยใช้คลื่นความถี่สูง

2.2.3 ภาพตัดขวางจากโพซิตรอนอิมิสชันโทโมกราฟี (P.E.T) [1]

ใช้โพซิตรอนซึ่งมีลักษณะเป็นประจุไฟฟ้าบวกแต่คล้ายอิเล็กตรอน เป็นต้นกำเนิดแทนรังสีเอ็กซ์ เครื่องนี้มีใช้โดยเฉพาะในบางประเทศที่เจริญ ซึ่งการผลิตโพซิตรอนได้ด้วยเครื่องไซโคลตรอน (Cyclotron) นั้นมีราคาแพงและยุ่งยากมาก แต่ผลที่ได้ก็คล้ายคลึงกันกับที่ได้จากเครื่องถ่ายภาพด้วยคลื่นแม่เหล็ก

2.2.4 ภาพตัดขวางจากทรานแอกเซียลซิงเกิลโฟตอนอิมิสชันโทโมกราฟี (S.P.E.C.T) [1]

เครื่องชนิดนี้ได้เปรียบเครื่องโพซิตรอนอิมิสชันโทโมกราฟีตรงที่ไม่ต้องมีไซโคลตรอน จึงทำได้ง่ายกว่า เครื่องนี้มักส่องถ่ายเกมมาที่หมุนได้รอบตัวคนไข้ เราให้อิโซโทปแก่คนไข้ แล้วใช้กล้องเกมมาหมุนรอบตัวคนไข้เพื่อวัดรังสีเกมมาที่ผ่านตัวออกมา แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ จะได้ภาพตัดขวางที่แสดงถึงรูปแบบสามมิติของการกระจายของสารไอโซโทปในอวัยวะที่จะตรวจ ซึ่งให้ประโยชน์มากกว่าการตรวจด้วยกล้องสองมิติ รูปที่ 2.4 แสดงถึงเครื่องทรานแอกเซียลซิงเกิลโฟตอนอิมิสชันโทโมกราฟี



รูปที่ 2.4 เครื่องทรานแซกเซียลซิงเกิลโฟตอนอิมิตชันโทโมกราฟี

2.3 ภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์

รังสีเอ็กซ์หรือที่เรียกกันทั่วไปอย่างแพร่หลายว่า เอ็กซ์เรย์ เป็นพลังงานรูปหนึ่งเช่นเดียวกับแสงสว่าง แต่เป็นชนิดที่เราไม่สามารถมองเห็นได้ด้วยตาเปล่า รังสีเอ็กซ์นี้ไม่ได้เกิดเองตามธรรมชาติ มนุษย์ต้องสร้างขึ้นโดยใช้เครื่องมือชนิดหนึ่ง เรียกว่า เครื่องเอ็กซ์เรย์ เมื่อเราป่วยไข้ เราได้ยินเสมอๆว่าแพทย์สั่งให้เราไปเอ็กซ์เรย์ เพื่อหาสาเหตุว่าเราป่วยเป็นอะไร เมื่อเราไปเอ็กซ์เรย์ เจ้าหน้าที่ซึ่งเรียกว่า พนักงานรังสีวิทยา ก็จะพาเราเข้าห้องเอ็กซ์เรย์ ฉายรังสีเอ็กซ์ทะลุตัวเราไปถูกฟิล์มเอ็กซ์เรย์ ซึ่งเหมือนกับถ่ายรูปแต่แผ่นใหญ่กว่า แม้รังสีเอ็กซ์จะผ่านทะลุตัวเราแต่เราก็จะไม่รู้สึกอะไรเลย ต่อมาเจ้าหน้าที่ก็นำฟิล์มไปล้างตามกรรมวิธีในห้องมืด ไม่ช้าก็ได้รูปตัวเราออกมามองเห็นเนื้อหนังกระดูก ตับ ไต และอวัยวะต่างๆปรากฏอยู่บนฟิล์มเอ็กซ์เรย์ แพทย์รังสีซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญในการ ใช้รังสีเอ็กซ์ทางแพทย์ จะเป็นผู้อ่านฟิล์มเหล่านั้น เพื่อทำรายงานการวินิจฉัยว่าเรามีโรคหรือสิ่งผิดปกติใดๆอยู่ในร่างกายหรือไม่ เมื่อแพทย์ผู้รักษาได้อ่านรายงานของแพทย์รังสีแล้ว ก็จะรักษาโรคของเราได้ถูกทาง ด้วยเหตุนี้ จึงนับได้ว่ารังสีวิทยามีประโยชน์มากมาย และเป็นอย่างยิ่งในการแพทย์แผนปัจจุบัน

2.3.1 ประวัติการค้นพบเอ็กซ์เรย์

มีการค้นพบรังสีเอ็กซ์ เมื่อวันที่ 8 พฤศจิกายน พ.ศ. 2438 โดยศาสตราจารย์วิลเฮล์ม คอนราด เรินต์เกน(Wilhelm Konrad Roenigen, ค.ศ. 1845-1923 ชาวเยอรมัน) อาจารย์สอนวิชาฟิสิกส์ แห่งมหาวิทยาลัย วูร์ซบูร์ก (Wurzburg) ประเทศเยอรมนี ในเวลาใกล้ ๆ กัน เบกเคอเรล (Antonic Becquerel, ค.ศ. 1852-1908 ชาวฝรั่งเศส) ค้นพบว่า แร่ยูเรเนียมมีกัมมันตภาพรังสีและมาดามคูรี (Madame Marie Curie, ค.ศ. 1867-1934 ชาวฝรั่งเศส) ค้นพบแร่กัมมันตรังสี เรเดียม รังสีที่เรินต์เกนค้นพบนี้เขาเรียกว่า รังสีเอ็กซ์ หรือ เอ็กซ์เรย์ (X-ray) หมายความว่า เป็นรังสีใหม่ที่ยังไม่มีการรู้จัก ในภายหลังจึงมีผู้เรียกรังสีเอ็กซ์นี้ว่า รังสีเรินต์เกน เพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้ค้นพบ รังสีเรินต์เกนมีคุณสมบัติทางกายภาพหลายอย่างที่ทำให้มีลักษณะที่ทั้งเหมือนและแตกต่างจากรังสีอื่นๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เรินต์เกนพบว่า รังสีเอ็กซ์สามารถฉายทะลุวัตถุทึบแสง เช่น ร่างกายมนุษย์ได้ เขาจึงลองเอารังสีเอ็กซ์มาใช้ประโยชน์ทางการแพทย์ โดยใช้รังสีเอ็กซ์ผ่านมือคน เนื้อ เอ็น และกระดูกในมือคน กัน รังสีเอาไว้บางส่วนปล่อยให้ผ่านไปบางส่วน ส่วนเนื้อและเอ็นกันรังสีได้น้อยมากก็มีรังสีออกมา มาก กระดูกกันรังสีได้มากก็มีรังสีผ่านออกมาน้อย รังสีทั้งหมดที่ผ่านมือออกมาจะมีความเข้มต่อพื้นที่ไม่เท่ากัน ทำให้เกิดเป็นรูปแบบ (Pattern) ของความเข้มของรังสีในรูปมือขึ้น เมื่อเอารังสีที่มีรูปแบบแล้วนี้ไปกระทบกับวัสดุที่ไวต่อแสง เช่น ฟิล์มถ่ายรูปหรือกระดาษอัดรูป (Photographic material) แล้วนำไปล้างด้วยน้ำยาล้างรูป ก็จะเกิดภาพของมือที่มีกระดูกซ่อนอยู่ในเนื้อ แพทย์จึงสามารถบอกได้ว่ากระดูกข้างในมือนั้นหักหรือไม่ โดยไม่จำเป็นต้องผ่าเอาเนื้อที่หุ้มกระดูกออกมาดู ดังแสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ฟิล์มเอ็กซ์เรย์มือแบบที่เรินต์เกนค้นพบ โดยบังเอิญ

2.3.2 การเกิดรังสีเอ็กซ์

รังสีเอ็กซ์มิได้เกิดขึ้นโดยธรรมชาติ แต่เป็นรังสีที่มนุษย์สร้างขึ้น โดยใช้ปรากฏการณ์อันหนึ่งที่ภาษาเยอรมันเรียกว่า เบรมมส์ตราห์ลุง (bremsstrahlung) ซึ่งแปลว่า สก๊ตกันหรือทำให้ช้าลงหรือทำให้หยุด (braking radiation) เพราะรังสีเอ็กซ์ส่วนใหญ่ เกิดขึ้นจากการที่อิเล็กตรอน ซึ่งเป็นวัสดุที่มีมวลและมีน้ำหนัก (อิเล็กตรอน 1 ตัวมีมวล 9.11×10^{-28} กรัม) วิ่งไปกระทบกับโลหะทั้งสเดน และถูกทั้งสเดนสก๊ตกันไว้ จนวิ่งช้าลงหรือจนหยุด ทำให้อิเล็กตรอนคายพลังงานจลน์ (kinetic energy) ของมันออกมา ตามกฎที่ว่าพลังงานย่อมไม่สูญหาย กล่าวคือ เมื่ออิเล็กตรอนกำลังวิ่ง มีพลังงาน 2 รูป คือ พลังงานศักย์ (potential energy) และพลังงานจลน์พอถูกทั้งสเดนหน่วงเหนี่ยวให้หยุดจะเหลือแต่พลังงานศักย์ ส่วนพลังงานจลน์ไม่สูญหาย แต่เปลี่ยนรูปไปเป็น พลังงานใหม่อีก 2 รูป คือ ส่วนใหญ่ (มากกว่า 99%) เป็นความร้อน และ ส่วนน้อย (น้อยกว่า 1%) เป็นพลังงานในรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เรียกว่า รังสีเอ็กซ์ รังสีเอ็กซ์ที่เกิดขึ้นนี้เป็นส่วนผสมของรังสีเอ็กซ์ที่มีความยาวคลื่นต่างๆกัน ตั้งแต่ความยาวคลื่นสั้นที่สุดซึ่งมีพลังงานสูงสุดที่เกิดจากอิเล็กตรอนที่ถูกทำให้หยุด และความยาวคลื่นปานกลางขนาดต่างๆ ไปจนถึงความยาวคลื่นที่ยาวมากๆ ซึ่งเป็นรังสีเอ็กซ์ที่มีพลังงานต่ำ และยังมีพลังงานจนเหลืออยู่ ส่วนผสมของรังสีเอ็กซ์นี้เรียกว่า เอ็กซ์เรย์สเปกตรัม (X-ray spectrum) รังสีเอ็กซ์ที่มีคลื่นสั้นมีพลังงานสูง จึงมีอำนาจทะลุทะลวงสูงกว่ารังสีเอ็กซ์ที่มีความยาวคลื่นยาว รังสีเอ็กซ์ยังเกิดขึ้นได้อีกวิธีหนึ่ง คือ เมื่ออิเล็กตรอนหลายวงที่วิ่งวนรอบนิวเคลียสของอะตอม กระโดดจากวงหนึ่งที่มีระดับพลังงานสูงกว่าไปสู่วงอื่นที่มีระดับพลังงานต่ำกว่า จะคายพลังงานออกมาในรูปของรังสีเอ็กซ์ ที่มีพลังงานเฉพาะและคงที่ แล้วแต่ลักษณะอะตอมของธาตุนั้น ๆ รังสีเอ็กซ์ที่ได้มาด้วยวิธีนี้ จึงเรียกว่า รังสีลักษณะเฉพาะ

ในการเกิดรังสีเอ็กซ์นี้อาศัยองค์ประกอบสำคัญ 5 ประการ คือ

1. ทำให้เกิดอนุภาคอิเล็กตรอน หรือการแยกอิเล็กตรอนออกจากอะตอมของโลหะ

อิเล็กตรอนจะเกิดขึ้น หรือแยกจากอะตอมของโลหะที่ทำเป็นไส้หลอดเอ็กซ์เรย์ โดยการที่เราผ่านกระแสไฟฟ้า เข้าไปในไส้หลอด (Filament) จนกระทั่งไส้หลอดร้อนขึ้น ประมาณ 2000°C หรือมากกว่านั้น จะมีผลทำให้เกิดเทอร์มิโอนิกอิมิชัน (Thermionic Emission) คือ อิเล็กตรอนหลุดออกจาก เซลล์หรือวงโคจรของมันเมื่อถูกความร้อน อิเล็กตรอนที่หลุดออกมานี้ จะมาออกันอยู่รอบๆผิวหน้าของโลหะ จนกลายเป็นกลุ่ม (Cloud) เรียกว่า Space charge สาเหตุที่อิเล็กตรอนไม่สามารถหลุดพ้น ไปจากผิวหน้าโลหะ เพราะว่าแรงดึงดูดระหว่าง อิเล็กตรอนและอะตอมของโลหะ ยังมีอยู่

2. การทำให้อนุภาคอิเล็กตรอนหลุด และเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วสูง

วิธีที่จะทำให้อนุภาคอิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมไปได้ คือ ต้องหาสิ่งที่มีพลังงาน หรือแรงดึงดูด มากกว่าแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนกับอะตอมของโลหะมาดึงดูดอิเล็กตรอน สิ่งนั้นก็คือ ไฟฟ้าแรงสูง (High voltage) ไฟฟ้าแรงสูงนี้ นอกจากจะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากผิวหน้าของโลหะแล้ว ยังทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่หรือวิ่งไปด้วยความเร็วสูง กล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ ต้องทำให้ไฟฟ้าระหว่างขั้วบวกและขั้วลบให้ต่างกัน ความต่างศักย์นี้ ถ้ายังมีค่ามากขึ้นเท่าใด ก็ยิ่งทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากผิวหน้าของไส้หลอด ได้มาก และวิ่งไปด้วยความเร็วสูงขึ้น ความต่างศักย์ 100 กิโลโวลต์ จะทำให้อิเล็กตรอนมีความเร็วประมาณ 165 กิโลเมตรต่อวินาที

3. การทำให้เส้นทางที่อิเล็กตรอนวิ่งผ่านไป ต้องไม่มีสิ่งกีดขวาง

จึงจะทำให้อิเล็กตรอนวิ่งไปด้วยความเร็วสูง ดังนั้นภายในหลอดเอ็กซ์เรย์ จึงเป็นสุญญากาศ เพราะถ้ามีอากาศ หรือก๊าซอยู่ภายในหลอด แม้เพียงเล็กน้อยก็ตาม ความเร็วของอิเล็กตรอนจะลดลง เนื่องจากเกิดไอออนไนเซชัน (Ionization)

4. การทำให้อิเล็กตรอนมีความเข้มข้น (Concentration of electron)

จะต้องมีวิธีการที่จะให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในแนวทิศทางเดียวกัน คือ พุ่งไปหาจุดโฟกัสของเป้าด้วยปริมาณ (ความเข้ม) ที่มากพอสมควร ซึ่งทำให้ได้โดยการใช้ เครื่องมือที่เรียกว่า "Electron focusing device" คอยควบคุมให้อิเล็กตรอนส่วนใหญ่ไปตกในบริเวณจุดโฟกัสของเป้า

5. การทำให้อิเล็กตรอนหยุดวิ่งในทันทีทันใด

การที่จะทำให้อิเล็กตรอนที่วิ่งมาด้วยความเร็วสูงนี้หยุดวิ่งในทันทีทันใด ทำได้โดยหาวัตถุมาถนัด หรือขวางอิเล็กตรอนวัตถุนั้นก็คือ เป้า (Target) ผลที่เกิดขึ้น คือ เกิดการชน หรือ กระแทกกันระหว่างอิเล็กตรอนกับเป้าอย่างแรง อิเล็กตรอนดังกล่าว จะไปชนอิเล็กตรอนที่อยู่ในวงโคจร ของอะตอมของเป้านั้น ให้อิเล็กตรอนกระเด็นออกนอกวงโคจร และจะมีอิเล็กตรอนจากวงโคจรอื่นๆ ที่อยู่ถัดไป วิ่งเข้ามาแทน แต่เนื่องจาก พลังงาน ของอิเล็กตรอนในแต่ละวงโคจร จะไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงมีการคายพลังงานส่วนเกินออกมา ในรูปของเอ็กซ์เรย์และความร้อน (ส่วนใหญ่จะเป็นความร้อนมากกว่า) กล่าวคือ จากพลังงานของอิเล็กตรอนทั้งหมด ที่วิ่งไปสู่เป้านั้น 99.8% จะเปลี่ยนเป็นความร้อน และ 0.2 % เป็นเอ็กซ์เรย์

2.3.3 ลักษณะและคุณสมบัติของรังสีเอ็กซ์

1. เป็นรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า มีช่วงคลื่นสั้นมาก คืออยู่ในช่วงตั้งแต่ 0.04-1000 Å หรือ อยู่ในช่วงระหว่างรังสีแกมมา กับ รังสีอัลตราไวโอเล็ต
2. มีคุณสมบัติเหมือนแสงสว่างธรรมดา เช่น เดินทางเป็นเส้นตรง ถ้าเดินทางในสุญญากาศแล้ว เดินทางด้วยความเร็วเท่ากับแสงคือ 186,000 ไมล์ต่อวินาที หรือ 3×10^{10} เซนติเมตร/วินาที นอกจากนั้นแล้ว ยังมีการสะท้อนกลับ หักเห และ เบี่ยงเบนได้ เช่นเดียวกับแสงสว่างธรรมดา
3. ไม่หักเหโดยสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้า
4. ไม่สามารถมองเห็นได้ด้วยตาเปล่า
5. มีอำนาจในการทะลุทะลวง (Penetration) สูง สามารถฉายให้ผ่านทะลุวัตถุทึบแสง เช่น เนื้อหนังของมนุษย์และสัตว์ได้ แต่ไม่สามารถทะลุผ่านแผ่นตะกั่วหรือคอนกรีตหนาๆ ได้
6. เป็นพลังงานในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ไม่มีอนุภาค จึง ไม่มีมวลและไม่มีน้ำหนัก
7. เมื่อผ่านเข้าไปในวัตถุหรือสสาร รังสีจะถูกดูดกลืนไปโดยสสารนั้นๆ มากหรือน้อยแล้วแต่ความหนาแน่นของสสารนั้น ถ้าสสารมีความหนาแน่นมาก เช่น กระจก ก็จะดูดกลืนรังสีเอ็กซ์ไว้มาก ทำให้รังสีผ่านไปได้ น้อย ถ้าสสารมีความหนาแน่นน้อย เช่น อากาศ ก็ดูดกลืนรังสีไว้ได้น้อย ทำให้รังสีผ่านไปได้มาก
8. เมื่อผ่านไปในอากาศหรือก๊าซ จะทำให้เกิดการปล่อยประจุไฟฟ้า ถ้าวัดประจุไฟฟ้านี้แล้วนำไปคำนวณหาจำนวนของรังสีเอ็กซ์ที่ผ่านไปในอากาศหรือก๊าซนั้นได้ จึงเป็นการวัดจำนวนรังสีทางอ้อม
9. ทำให้เกิดปฏิกิริยาต่อฟิล์มถ่ายรูป หรือกระดาษอัดรูปได้ เช่นเดียวกับแสงสว่างธรรมดา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

10. ทำให้เกิดการเรืองแสง เมื่อฉายกระทาบวัตถุบางอย่าง เช่น แบเรียมแพลตินิกไซอไซด์ (barium platinocyanide) แคลเซียมทังสเตต (calcium tungstate) หรือ ซิงค์ซัลไฟด์ (zinc sulphide) เพราะพลังงานจากรังสีเอ็กซ์จะเปลี่ยนรูปไปเป็นแสงสว่างธรรมดาที่มองเห็นได้ด้วยตาเปล่า

11. เมื่อฉายผ่านทะลุวัตถุบางอย่าง นอกจากรังสีเอ็กซ์จะถูกดูดกลืนแล้ว ยังทำให้เกิดรังสีเอ็กซ์ชนิดใหม่ที่มีพลังงานน้อยกว่าเดิม และมีทิศทางผิดจากทิศทางเดิมด้วย เรียกว่า เกิดสแคตเทอริงเอฟเฟกต์ (Scattering effects)

12. ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงทางชีววิทยา มนุษย์จึงสามารถเอาผลการเปลี่ยนแปลงนี้มาประยุกต์ใช้ในวิชารังสีรักษา (Radiotherapy) ได้ เช่น การรักษาโรคมะเร็งโดยการฉายรังสีเอ็กซ์เป็นต้น และสามารถทำให้เซลล์ของร่างกายเปลี่ยนแปลง หรือ เกิดการผ่าเหล่า (Genetic mutation) ถ้าได้รับรังสีเป็นจำนวนมากและนานพอ

2.3.4 ประโยชน์ของเอ็กซ์เรย์ทางการแพทย์ [1]

รังสีเอ็กซ์ เมื่อฉายทะลุอวัยวะที่ต้องการตรวจแล้ว จะเกิดเป็นรูปแบบขึ้นบนฟิล์มเอ็กซ์เรย์ เมื่อนำฟิล์มเอ็กซ์เรย์ไปล้างตามกรรมวิธีจะได้ภาพทั้งภายนอกและภายในของอวัยวะ เช่น กระดูกที่ฝังอยู่ในเนื้อหรือแผลฉีกขาดที่อยู่ในเนื้อปอด ทำให้วินิจฉัยโรคได้โดยไม่ต้องผ่าอวัยวะนั้นเข้าไปดูภายใน ถ้าฉายรังสีที่มีรูปแบบแล้วนำไปดูกระจกที่ฉายด้วยแบเรียมแพลตินิกไซอไซด์ หรือ แคลเซียมทังสเตตในห้องมืด ก็จะได้เห็นภาพของอวัยวะภายในได้ทันที แต่ภาพนี้ไม่ค่อยจะชัดนัก เพราะแสงเรืองที่เกิดขึ้นนั้นอ่อนมาก จึงต้องดูในห้องมืดและรังสีแพทย์ผู้ตรวจต้องปิดตาหรืออยู่ในห้องมืดเสียก่อนราว 20 นาที จนตาคุ้นกับความมืดจึงจะดูเห็นการตรวจด้วยวิธีนี้เรียกว่า ฟลูออโรสโคปี (fluoroscopy) ซึ่งในปัจจุบันนี้มีผู้นำภาพจากแสงเรืองๆในห้องมืดนี้มาฉายผ่านเครื่องปรับความเข้มของแสงที่เรียกว่า อิมเมจอินเทนซิไฟเออร์ (image intensifier) แล้วนำสัญญาณภาพไปฉายออกทางจอภาพ ทำให้รังสีแพทย์ทำการตรวจอวัยวะภายในโดยการทำฟลูออโรสโคปีในห้องที่มีแสงสว่างธรรมดาได้และชัดเจนกว่าการทำในห้องมืด การตรวจด้วยวิธีนี้ แพทย์รังสีจะเห็นการเคลื่อนไหวของอวัยวะภายในได้สะดวก ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนคือการตรวจกระเพาะอาหาร ลำไส้ และถุงน้ำดี แสดงถึงเครื่องทำฟลูออโรสโคปีชนิดที่ใช้เครื่องปรับความเข้มของแสงและโทรทัศน์วงจรปิด

2.4 คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวาง [2]

2.4.1 การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนค่าเดียว

จุดมุ่งหมายของคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวาง คือ การแมปค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนของการฉายรังสีเอกซ์ไปยังวัตถุ ซึ่งเราจะฉายรังสีเอกซ์ไปยังวัตถุ และตรวจจับรังสีเอกซ์ที่ถูกดูดกลืน ซึ่งค่าของรังสีเอกซ์ที่ถูกดูดกลืน จะเรียกว่า ข้อมูล โปรเจกชัน กรณีที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหนึ่งค่าหรือการฉายแสงไปยังวัตถุที่มีเนื้อเดียวกันตลอด



รูปที่ 2.6 ฉายรังสีเอกซ์ที่ฉายไปยังวัตถุที่มีเนื้อเดียวกันตลอด

พิจารณารูปที่ 2.6 ถ้าเราทำการฉายรังสีเอกซ์ไปยังวัตถุ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $N, \Delta N, \Delta x$ และ μ ดังสมการที่ 2.1

$$\frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\mu \quad (2.1)$$

- ซึ่ง N คือ จำนวนโฟตอนที่ออกจากวัตถุ
 N_0 คือ จำนวนโฟตอนที่ฉายเข้าไปในวัตถุ
 μ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน
 x คือ ความหนาของวัตถุ

จากนั้น จึงหาลิมิต โดยให้ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 จะได้สมการที่ 2.2

$$\frac{1}{N} dN = -\mu dx \quad (2.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อินทิเกรตทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\mu \int_0^x dx \quad (2.3)$$

จัดรูปสมการใหม่ โดยการใส่ล็กการริ้มทั้ง 2 ข้าง จะได้

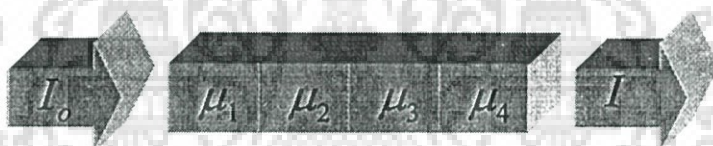
$$\ln N - \ln N_0 = -\mu x \quad (2.4)$$

จัดสมการใหม่ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโฟตอนที่ฉายไปยังวัตถุ กับโฟตอนที่ออกจากวัตถุ ดังสมการที่ 2.5

$$N = N_0 e^{-\mu x} \quad (2.5)$$

2.4.2 การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่าแบบทิศทางเดียว

พิจารณารูปที่ 2.7 เป็นการฉายรังสีเอ็กซ์ผ่านชิ้นส่วนของเนื้อเยื่อซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน 4 ค่า คือ μ_1 , μ_2 , μ_3 และ μ_4 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโฟตอนที่ออกจากวัตถุ (I) กับจำนวนโฟตอนที่ฉายเข้าไปในวัตถุ (I_0) ดังสมการที่ 2.8



รูปที่ 2.7 การฉายรังสีไปยังวัตถุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่า

$$I = I_0 \exp[-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)x] \quad (2.6)$$

ซึ่ง x คือ ระยะทางของลำอิเล็กตรอน จากนั้นจึงเอาล็กการริ้ม คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

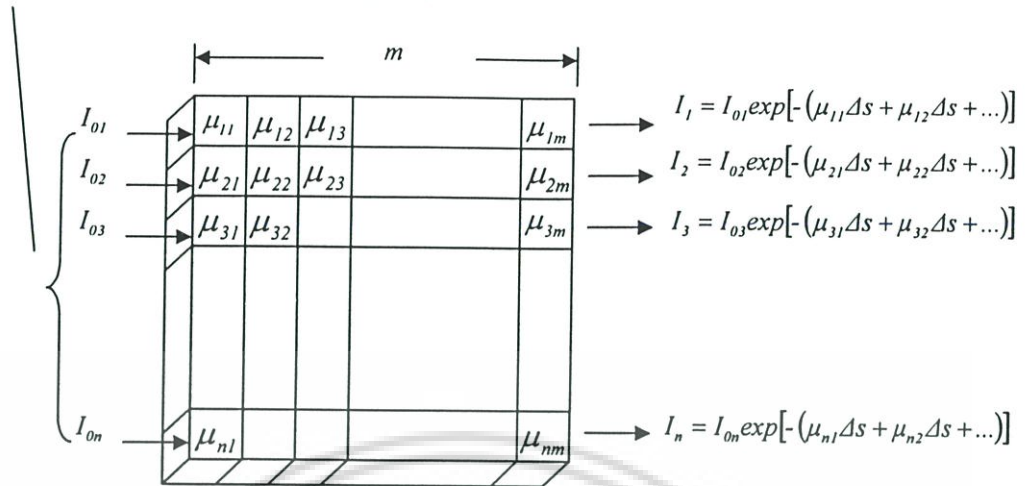
$$\ln \frac{I}{I_0} = \sum_{i=1}^4 \mu_i = p(x) \quad (2.7)$$

2.4.3 การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่าแบบหลายทิศทาง

พิจารณารูปที่ 2.8 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโฟตอนที่ฉายไปยังวัตถุกับโฟตอนที่ออกจากวัตถุ ดังสมการที่ 2.8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Scan at zero degree (1^{st})



รูปที่ 2.8 ฉายรังสีไปยังวัตถุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่าและมีการฉายรังสีหลายทิศทาง

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{01} \exp[-(\mu_{11}\Delta x + \mu_{12}\Delta x + \mu_{13}\Delta x + \dots + \mu_{1m}\Delta x)] \\
 I_2 &= I_{02} \exp[-(\mu_{21}\Delta x + \mu_{22}\Delta x + \mu_{23}\Delta x + \dots + \mu_{2m}\Delta x)] \\
 &\vdots \\
 I_n &= I_{0n} \exp[-(\mu_{n1}\Delta x + \mu_{n2}\Delta x + \mu_{n3}\Delta x + \dots + \mu_{nm}\Delta x)]
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

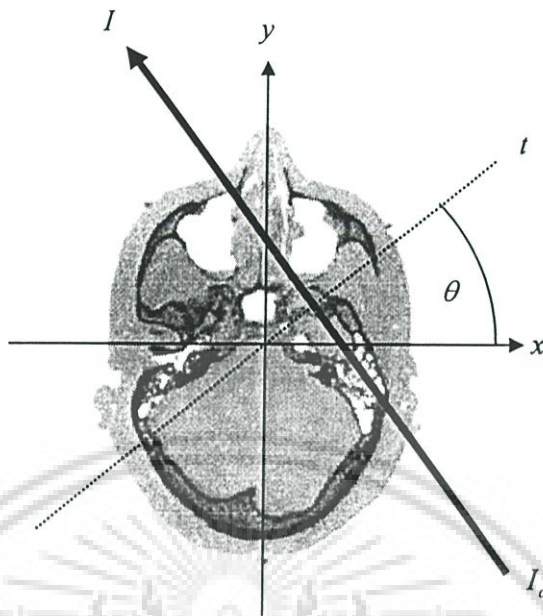
จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$p_i(x) = \mu_{i1} + \mu_{i2} + \mu_{i3} + \dots + \mu_{im} \tag{2.9}$$

ต่อมาพิจารณารูปที่ 2.9 เป็นภาพตัดขวางของร่างกายมนุษย์ ซึ่งจะถือว่าเป็นวัตถุที่มีสารหลายชนิดประกอบกัน จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง I_0 กับ I ดังสมการที่ 2.10

$$I = I_0 \exp \left[- \int_{\text{ray}} f(x, y) du \right] \tag{2.10}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.9 แสดงภาพตัดขวางของร่างกายมนุษย์

จากนั้น จึงจัดรูปสมการใหม่ จะได้สมการที่ 2.11

$$\int_{ray} f(x, y) du = \ln \frac{I_0}{I} \quad (2.11)$$

ซึ่ง I_0 คือ จำนวนโฟตอนที่ฉายเข้าไปในวัตถุ

I คือ จำนวนโฟตอนที่ออกจากวัตถุ

du คือ ระยะทางตลอดความยาวของรังสี

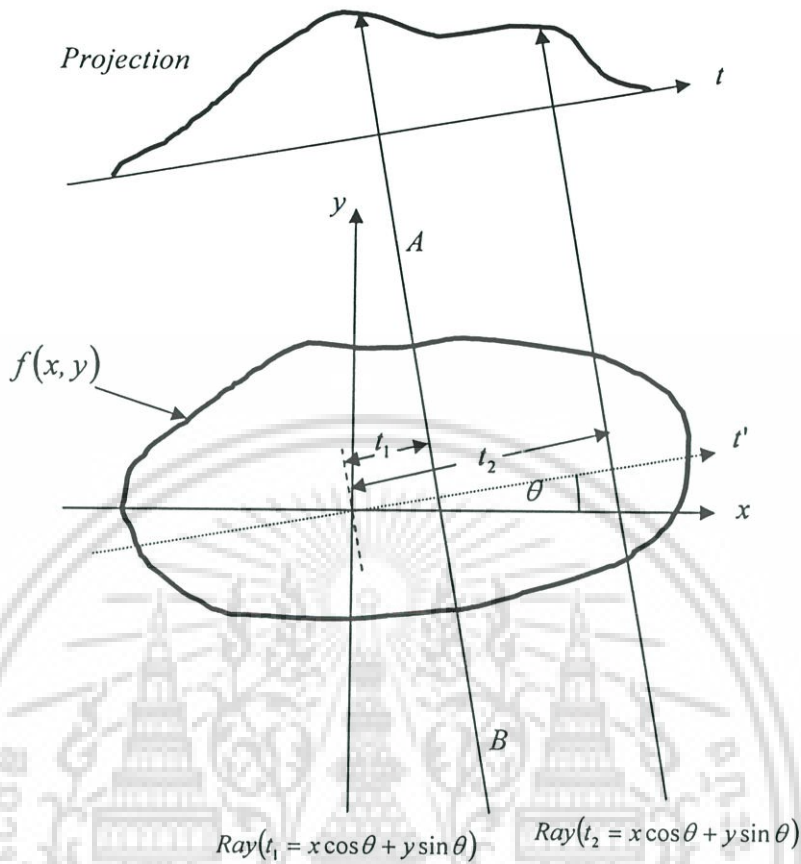
$f(x, y)$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน

อย่างไรก็ตาม ในคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวางนั้น การแก้ค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน $f(x, y)$ นั้น เราจะต้องทำการฉายรังสีไปยังวัตถุมากกว่า 1 มุม จากการศึกษาแหล่งกำเนิดรังสีเอ็กซ์และตัวตรวจจับนั้น จะได้ข้อมูลโปรเจกชันที่มุมแตกต่างกัน ซึ่งข้อมูลโปรเจกชันนี้เราจะนำไปใช้ในการสร้างภาพตัดขวางของวัตถุ

2.4.4 การอินทิเกรตในแนวเส้น (Line Integrals) และการโปรเจกชัน (Projections)

การอินทิเกรตในแนวเส้น [3] เป็นการแสดงถึงการอินทิเกรตของตัวแปรของวัตถุตลอดแนวเส้น จากรูปที่ 2.10 แสดงถึงใช้ระบบพิกัด (Coordinate system) อธิบายการอินทิเกรตในแนวเส้นและการโปรเจกชัน จากภาพ สมมติให้ $f(x, y)$ คือวัตถุรูปร่าง 2 มิติ และสมการของเส้น AB ในรูปที่ 2.10 คือ

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t \tag{2.12}$$



รูปที่ 2.10 โปรเจกชันของวัตถุ $f(x, y)$ ที่มุม θ

จากความสัมพันธ์ใน (2.12) จะได้นิยามของการอินทิเกรตในแนวเส้น คือ

$$P_\theta(t) = \int_{(\theta, t) \text{ line}} f(x, y) ds \tag{2.13}$$

ใช้เคลด้า ฟังก์ชัน เขียนใหม่ได้เป็น

$$P_\theta(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \tag{2.14}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีการสร้างภาพตัดขวางแบบขนาน (Parallel-beam Reconstruction)

3.1 บทนำ

จากบทที่ผ่านมาได้ทราบถึงประวัติความเป็นมา ส่วนประกอบและการทำงานของคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวาง และคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องการสร้างภาพตัดขวางไปแล้ว ในวิธีการสร้างภาพตัดขวางนั้นจะสามารถแบ่งออกเป็น 3 ประเภท [3] คือ การสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบขนาน (Parallel-Beam) การสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบพัด และการสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบรูปกรวย (Cone-Beam) ในบทนี้จะกล่าวถึงอัลกอริทึมที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางแบบขนานคือการพิจารณาทางเดินของแสงที่พุ่งออกมาจากแหล่งกำเนิดเป็นแบบขนาน

อัลกอริทึมที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบขนานนั้นมีอยู่หลายวิธีในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึง 4 วิธีได้แก่

- วิธีการแปลงฟูเรียร์
- วิธีแบ็ค โปรเจกชัน
- วิธีฟิลเตอร์แบ็ค โปรเจกชัน
- วิธีเชิงพีชคณิต

3.2 การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์

3.2.1 ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์

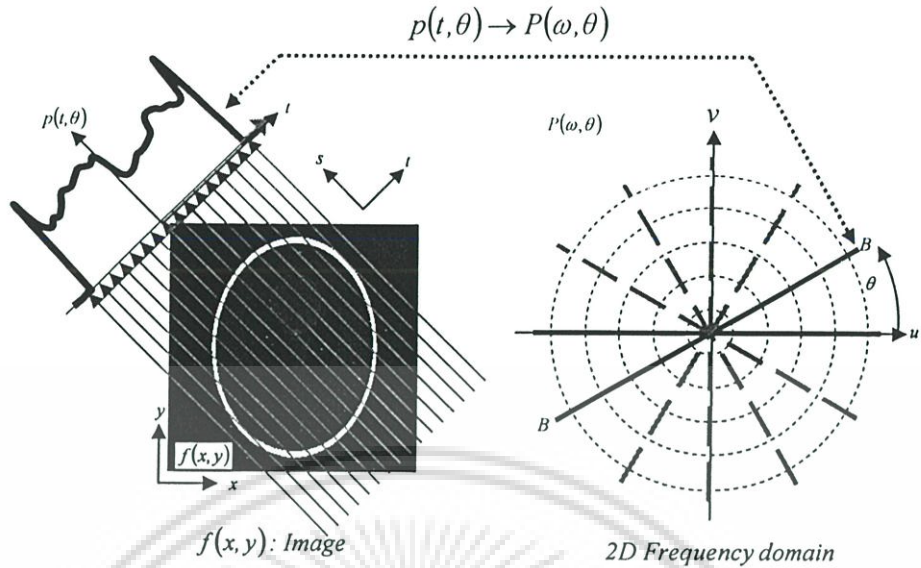
การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์เป็นวิธีการสร้างภาพตัดขวาง โดยใช้นิยามจากทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ (The Fourier Slice Theorem) ซึ่งระบุว่า เมื่อเราทำการหาโปรเจกชันของภาพ $f(x, y)$ ที่มุมต่างๆ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ แล้วทำการแปลงฟูเรียร์โปรเจกชันเหล่านั้นจะมีค่าเท่ากับแปลงฟูเรียร์สองมิติของภาพตามแนวเส้นที่ทำมุม $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ เช่นกัน ดังรูปที่ 3.1

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์เริ่มต้นจากการนิยามของการแปลงฟูเรียร์ 2 มิติของภาพ $f(x, y)$ จะได้

$$F(u, v) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (3.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำนองเดียวกัน ข้อมูลโปรเจกชันที่มุม $\theta(p_\theta)$ นำไปแปลงฟูเรียร์ p_θ ได้โดย



รูปที่ 3.1 ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์แสดงความสัมพันธ์การแปลงฟูเรียร์ของโปรเจกชันกับการแปลงฟูเรียร์ของภาพ [3]

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\alpha}^{\alpha} p_\theta(t) e^{-j2\pi\omega t} dt \quad (3.2)$$

ตัวอย่างการแปลงฟูเรียร์จากข้อมูลโปรเจกชันที่มุม $\theta = 0$ เมื่อพิจารณาการแปลงฟูเรียร์ของวัตถุในโดเมนความถี่ โดยให้ $v = 0$ จะได้

$$F(u, 0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) e^{-j2\pi u x} dx dy \quad (3.3)$$

แต่เนื่องจากตัวประกอบเฟส (Phase factor) จะไม่ขึ้นอยู่กับ y เราสามารถแบ่งการอินทิเกรตออกเป็น 2 ส่วนคือ

$$F(u, 0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) dy \right] e^{-j2\pi u x} dx \quad (3.4)$$

พบว่าเทอมที่อยู่ในวงเล็บตัวแปล x จะคงที่ ซึ่งก็คือสมการ โปรเจกชันของวัตถุแบบขนานที่มุม $\theta = 0$ นั่นเองโดย

$$p_{\theta=0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (3.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทน (3.5) ใน (3.4) จะได้

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta=0}(x)e^{-j2\pi ux} dx \quad (3.6)$$

ทางด้านขวามือของสมการที่ 3.6 แสดงถึงการแปลงฟูเรียร์ 1 มิติ ของโปรเจกชัน $p_{\theta=0}$ ดังนั้น เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโปรเจกชันในแนวตั้งกับการแปลง 2 มิติ ของ ฟังก์ชันวัตถุ คือ

$$F(u,0) = S_{\theta=0}(u) \quad (3.7)$$

จากการพิจารณารูปแบบอย่างง่ายของทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ พบว่าผลที่ได้ไม่ขึ้นกับระบบการหมุนระหว่างวัตถุกับระบบพิกัด (t,s) คือระบบพิกัดที่หมุนไปจากระบบพิกัด (x,y) เป็นมุม θ จากสมการการแปลงฟูเรียร์ของข้อมูลโปรเจกชัน (3.6) จะมีค่าเท่ากับการแปลงฟูเรียร์แบบ 2 มิติ ของวัตถุตามเส้นแนวนอนที่หมุนไปเป็นมุม θ เช่นกัน

การแปลงฟูเรียร์ของข้อมูลโปรเจกชันแบบขนานของภาพวัตถุ $f(x,y)$ ที่มุมเท่ากับ θ จะได้เท่ากับการแปลงฟูเรียร์ 2 มิติ $F(u,v)$ บนแกน u ที่หมุนไปเป็นมุม θ หรือเส้นตรง BB ดังรูปที่ 3.1 สำหรับความสัมพันธ์ของโคออร์ดิเนตที่หมุนไปคือ

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

ซึ่งในระบบพิกัด (t,s) เราสามารถหาค่าโปรเจกชันตามทางเดินแกน s สำหรับตำแหน่งต่างๆ บนแกน t ได้เป็น

$$p_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s) ds \quad (3.9)$$

เอานิยามของโปรเจกชันไปแทนในสมการที่ (3.2) จะได้

$$S_{\theta}(w) = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,s) ds \right] e^{-j2\pi wt} dt \quad (3.10)$$

จากนั้นเอาผลมาแปลงให้อยู่ในระบบพิกัด (x,y) โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (3.8) ได้

$$S_{\theta}(w) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi w(x \cos\theta + y \sin\theta)} dx dy \quad (3.11)$$

ทางด้านขวาของสมการ คือการแปลงฟูเรียร์ 2 มิติ ที่ความถี่ $u = w \cos \theta, v = w \sin \theta$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$S_o(w) = F(w, \theta) = F(w \cos \theta, w \sin \theta) \quad (3.12)$$

จากทั้งหมดที่ผ่านมาแสดงให้เห็นถึงโปรเจกชันของฟังก์ชันวัตถุที่มุม $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ และการแปลงฟูเรียร์ของแต่ละโปรเจกชันนั้น เราสามารถหาค่าของ $F(u, v)$ ได้ถ้าจำนวนโปรเจกชันมีค่าเป็นอนันต์ ดังนั้นควรจะรู้ค่า $F(u, v)$ ในทุกๆจุดในระนาบ (u, v) จากนั้นจึงทำการแปลงกลับฟูเรียร์เพื่อที่จะหาค่าฟังก์ชันวัตถุ $f(x, y)$

$$f(x, y) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (3.13)$$

ถ้าฟังก์ชัน $f(x, y)$ มีขอบเขต คือ $-A/2 < x < A/2$ และ $-A/2 < y < A/2$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ (3.13) ใหม่ได้เป็น

$$f(x, y) = \frac{1}{A^2} \sum_m \sum_n F\left(\frac{m}{A}, \frac{n}{A}\right) e^{j2\pi(m/A)x + (n/A)y}, \quad -\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2}, -\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2} \quad (3.14)$$

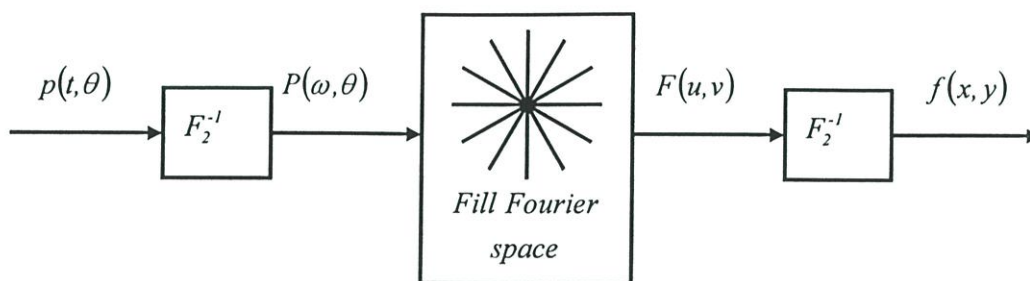
ในทางปฏิบัติ เราจะรู้ว่าส่วนประกอบของฟูเรียร์มีจำนวนจำกัด สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(x, y) = \frac{1}{A^2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} F\left(\frac{m}{A}, \frac{n}{A}\right) e^{j2\pi(m/A)x + (n/A)y}, \quad -\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2}, -\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2} \quad (3.15)$$

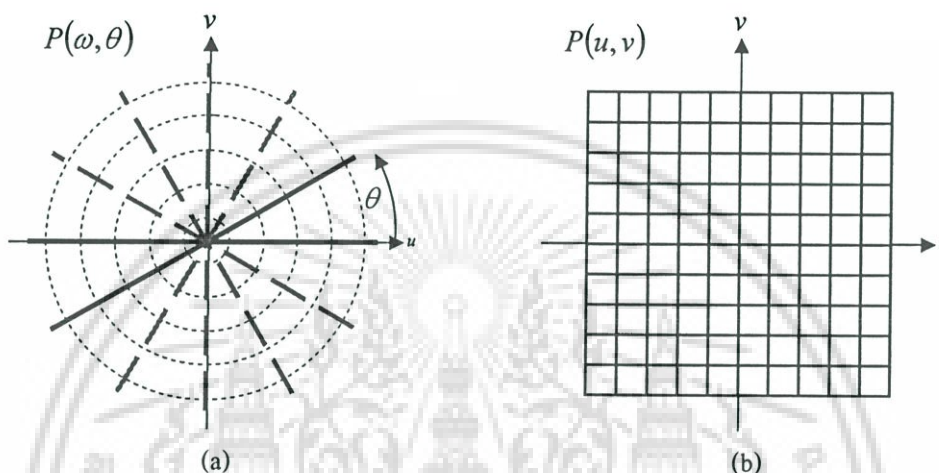
โดยสมมติว่า N เป็นจำนวนเต็มคู่ เราจะเห็นว่ารายละเอียด (Resolution) ของภาพที่สร้างได้จะถูกกำหนดโดย N สมการ (3.15) สามารถถูกคำนวณได้แบบเร็วโดยใช้อัลกอริทึมการแปลงฟูเรียร์เร็ว (FFT) ถ้าเรารู้สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์จำนวน N^2 ของ $F(m/A, n/A)$

จากทฤษฎีข้างต้นนี้เราสามารถแบ่งขั้นตอนวิธีการสร้างภาพย้อนกลับด้วยวิธีการแปลงฟูเรียร์ออกเป็น 3 ขั้นตอนดังรูปที่ 3.2 คือ

- 1) นำข้อมูลโปรเจกชันไปแปลงฟูเรียร์ 1 มิติ จะได้ $F_1\{p(t, \theta)\} = P(\omega, \theta)$
- 2) วาง $P(\omega, \theta)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) จากนั้นจึงประมาณค่าให้อยู่ในระบบพิกัดมุมฉาก (rectangular coordinate) ดังรูปที่ 3.3
- 3) ทำการแปลงกลับฟูเรียร์ 2 มิติของ $F(u, v)$ จะได้ $f(x, y)$



รูปที่ 3.2 Block diagram แสดงวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์



รูปที่ 3.3 ระบบพิกัด (a) เชิงขั้ว (b) มุมเชิงฉาก

3.2.2 การประมาณค่าในช่วงแบบหลายเชิงเส้น (Bilinear Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นคือการประมาณค่าให้กับตำแหน่งใดๆจากข้อมูลที่มีอยู่โดยการเฉลี่ยค่าด้วยอัตราส่วนที่คงที่ตามระยะความห่างจากจุดใดๆถึงจุดอ้างอิง จากรูปที่ 3.4 เป็นตัวอย่างการประมาณค่าแบบ 2 มิติให้กับพิกัดตำแหน่ง $P(u, v)$ ที่มีข้อมูลที่ทราบค่าและตำแหน่งที่แน่นอน 4 ตำแหน่ง $P(\omega_1, \theta_1)$, $P(\omega_2, \theta_1)$, $P(\omega_1, \theta_2)$ และ $P(\omega_2, \theta_2)$ ขั้นแรกให้ทำการประมาณค่าแบบเชิงเส้นบนแกนความถี่ ω ที่พิกัดจุด A และ B ดังสมการต่อไปนี้

$$A = \frac{P(\omega_2, \theta_2) - P(\omega_1, \theta_2)}{\omega_2 - \omega_1} \cdot (\omega - \omega_1) + P(\omega_1, \theta_2), \quad \omega = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (3.16)$$

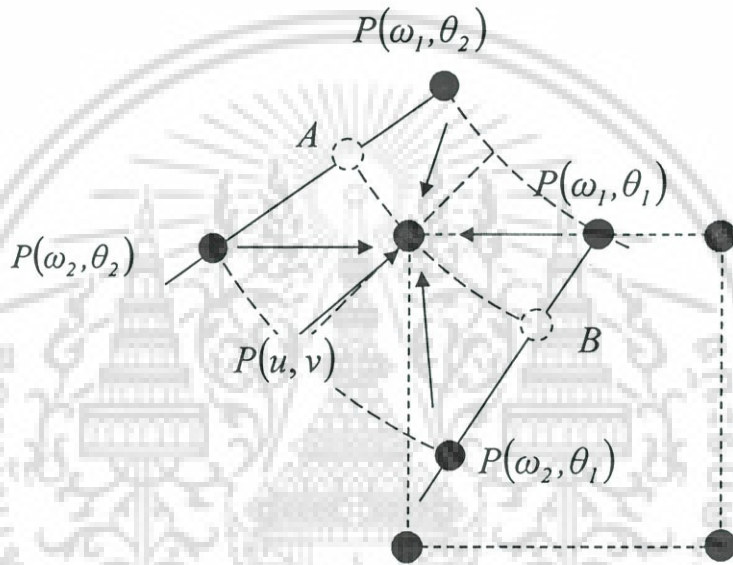
$$B = \frac{P(\omega_2, \theta_1) - P(\omega_1, \theta_1)}{\omega_2 - \omega_1} \cdot (\omega - \omega_1) + P(\omega_1, \theta_1), \quad \omega = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (3.17)$$

จากนั้นทำการประมาณค่าให้กับ $P(u, v)$ โดยใช้ข้อมูลที่ประมาณได้ที่จุด A และ B ตามเส้นพิกัดของมุม θ ดังนี้

$$P(u, v) = \frac{A - B}{\theta_2 - \theta_1} \cdot (\theta - \theta_1) + B, \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{u}{\omega}\right) \quad (3.18)$$

เนื่องจากมุมมีอัตราส่วนของระยะห่างระหว่างมุมคงที่ ดังนั้นจึงสามารถทำการประมาณค่าแบบเชิงเส้นได้ สำหรับการคำนวณหามุมในสมการที่ (3.18) นั้นใช้ฟังก์ชัน Cosine เนื่องจากเรากำหนดให้ตำแหน่งมุมนั้นเท่ากับพิคัดแกน x จากมุม 0 ถึง 180 องศาตามสมมติฐานการโปรเจกชันแบบขนาน

Bilinear Interpolation



รูปที่ 3.4 การประมาณค่าจุด $P(u, v)$

3.2.3 ตัวอย่างโปรแกรมการสร้างภาพด้วยทฤษฎีบทฟูเรียร์สไลด์

โปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมการสร้างภาพย้อนกลับด้วยวิธีการแปลงฟูเรียร์หรือที่เรียกว่าฟูเรียร์สไลด์ (The Fourier Slice Theorem) ซึ่งในส่วนการเขียนโปรแกรมได้จำแนกออกเป็น 3 ส่วน คือ

- การสร้างภาพจำลองต้นแบบ
- การสร้างข้อมูลโปรเจกชัน
- โปรแกรมการสร้างภาพย้อนกลับแบบฟูเรียร์สไลด์

- การสร้างภาพจำลองต้นแบบ (Shepp-Logan head phantom)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพที่นิยมใช้ทดสอบสำหรับกระบวนการสร้างภาพย้อนกลับจากข้อมูลโปรเจกชันคือภาพ Shepp-Logan head phantom ที่แสดงค่าสีระดับเทาระดับต่างๆจากรูปทรงเรขาคณิต ภาพดังกล่าวสามารถสร้างได้ด้วยฟังก์ชัน Phantom ของโปรแกรม Matlab ในส่วนชุดคำสั่งของ Image Processing Toolbox

List 3.1 Shepp-Logan head phantom generation

บรรทัด	คำสั่ง	คำอธิบายโปรแกรม
1	<code>clear;</code>	เคลียร์ตัวแปรและฟังก์ชันต่างๆในหน่วยความจำ
2	<code>IMG=phantom(256);</code>	สร้างภาพ Shepp-Logan head phantom ด้วยคำสั่ง Phantom ขนาด 256x256 พิกเซล
3	<code>figure(1), imshow(IMG);</code>	แสดงภาพ Shepp-Logan head phantom ที่สร้างได้
4	<code>xlabel('x-axis');</code>	กำหนดชื่อแกน x
5	<code>ylabel('y-axis');</code>	กำหนดชื่อแกน y

เมื่อพิมพ์โค้ดโปรแกรมใน List 3.1 ข้างต้นแล้วให้กด F5 เพื่อรันหรือไปที่เมนู Debug->Run เราก็จะได้ภาพต้นแบบที่ชื่อว่า Shepp-Logan head phantom ขนาด 256x256 พิกเซลดังรูปที่ 3.5 (a) ซึ่งก็คือรูปร่างหลายรูปมาวางซ้อนกันนั่นเอง ซึ่งมีพารามิเตอร์ต่างๆดังรูปที่ 3.5 (b) และตารางที่ 3.1



รูปที่ 3.5 โมเดล Shepp-Logan head phantom

(a) ภาพ Shepp-Logan head phantom (b) ข้อมูลเรขาคณิต

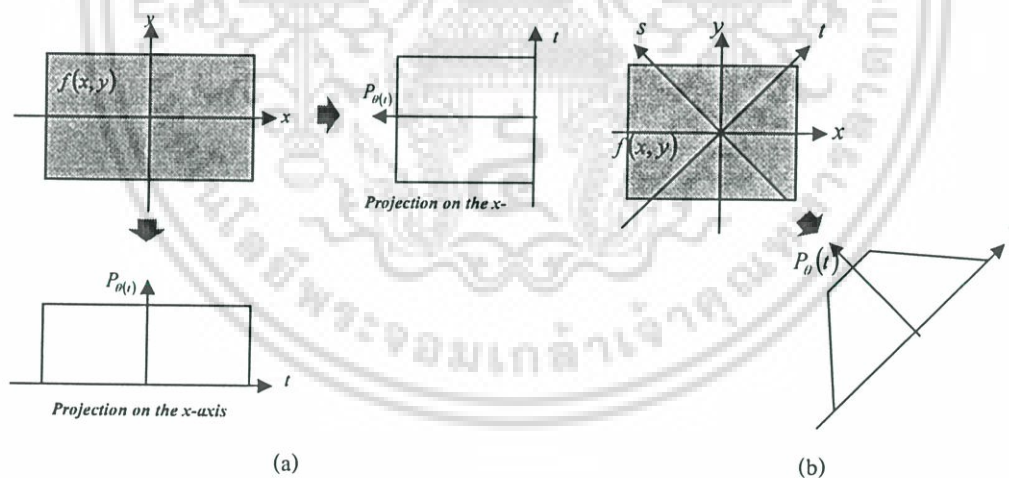
ตารางที่ 3.1 พารามิเตอร์รูปทรงเรขาคณิตต่างๆ สำหรับการสร้างภาพ Shepp-Logan head phantom

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Center Coordinate	Major Axis	Minor Axis	Rotation Angle	Refractive Index
(0,0)	0.92	0.69	90	2.0
(0,-0.0184)	0.874	0.6624	90	-0.98
(0.22,0)	0.31	0.11	72	-0.02
(-0.22,0)	0.41	0.16	108	-0.02
(0,0.35)	0.25	0.21	90	0.01
(0,0.1)	0.046	0.046	0	0.01
(0,-0.1)	0.046	0.046	0	0.01
(-0.08,-0.605)	0.046	0.023	0	0.01
(0,-0.605)	0.023	0.023	0	0.01
(0.06,-0.605)	0.046	0.023	90	0.01

- การสร้างข้อมูลโปรเจกชัน (Radon Transform)

แปลงเรดอนของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ใช้ในการอธิบายวัตถุที่อยู่ในภาพ โดยใช้นิยามของเรย์ซัม (Ray-Sum) ที่หมายถึงการอินทิเกรตตามเส้นทางที่ถูกกำหนดด้วยโคออร์ดิเนต (t,s) สำหรับมุม θ ใดๆ มุมหนึ่งดังรูปที่ 3.6 ตามสมการที่ 3.9



รูปที่ 3.6 ข้อมูลโปรเจกชันของวัตถุรูปสี่เหลี่ยม

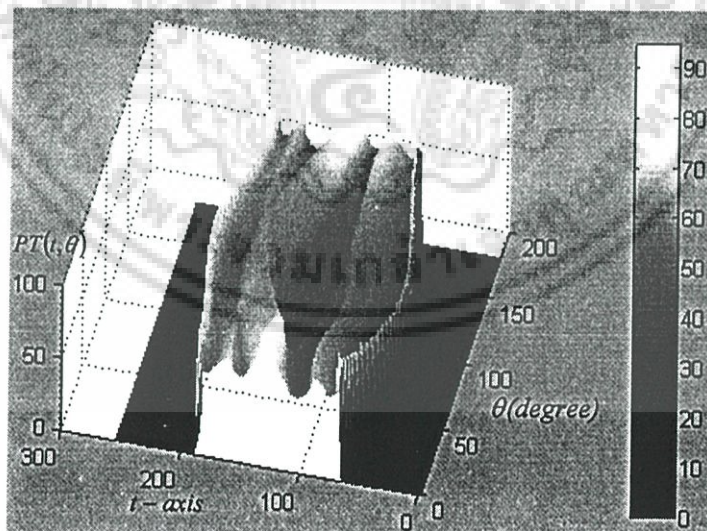
- (a) ทิศทางตามแนวนอนและแนวตั้ง
- (b) ทิศทางใดๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับในโปรแกรม Matlab เราสร้างข้อมูลโปรเจกชันได้โดยใช้คำสั่ง “radon” กับภาพ Shepp-Logan head phantom ดัง List 3.2 คือ

List 3.2 Radon transform

บรรทัด	คำสั่ง	คำอธิบายโปรแกรม
7	<code>[w w]=size(IMG);</code>	หาขนาดของภาพด้วยคำสั่ง <code>size</code> เก็บในตัวแปร <code>w</code>
8	<code>nView=180;</code>	กำหนดจำนวนมุมสำหรับสร้างข้อมูลโปรเจกชันเท่ากับ 180 มุม
9	<code>PT=radon(IMG,0:180/nView:179,w);</code>	สร้างข้อมูลโปรเจกชันจากภาพ Shepp-Logan head phantom เป็นจำนวน <code>nView</code> มุมจาก 0-179 องศาเก็บไว้ในตัวแปร <code>PT</code> ขนาด 2 มิติและกำหนดขนาดพิกัดแกน <code>t</code> ให้เท่ากับ <code>w</code>
10	<code>figure(2), mesh(PT);</code>	แสดงภาพแบบ 3 มิติของข้อมูลโปรเจกชันด้วยคำสั่ง <code>mesh</code>
11	<code>xlabel('\theta (degrees)');</code>	กำหนดชื่อระบบพิกัดตำแหน่งมุม <code>theta</code> บนแกน <code>x</code> ของภาพ 3 มิติ
12	<code>ylabel('t-axis');</code>	กำหนดชื่อระบบพิกัดแกน <code>t</code> บนแกน <code>y</code> ของภาพ 3 มิติ
13	<code>zlabel('P(t,\theta)');</code>	กำหนดชื่อระบบพิกัด <code>P(t,\theta)</code> บนแกน <code>x</code> ของภาพ 3 มิติ
14	<code>colormap(hot), colorbar;</code>	ใส่สีภาพกราฟฟิกแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.7 ภาพ 3 มิติของข้อมูลโปรเจกชันจำนวน 180 มุม

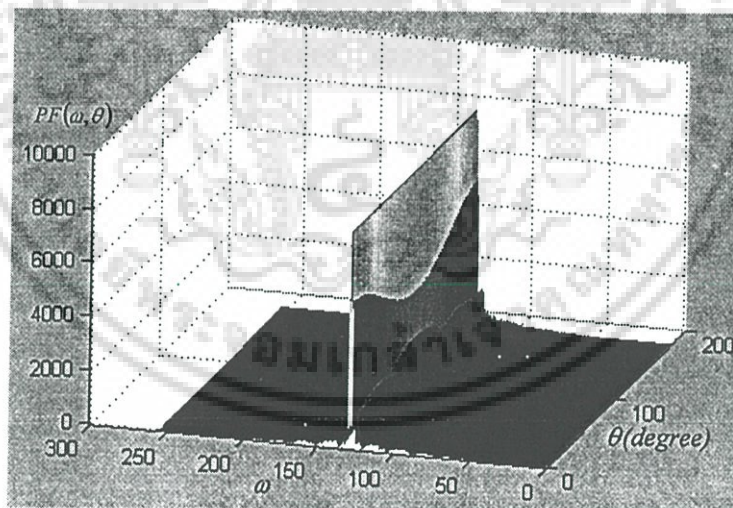
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- โปรแกรมการสร้างภาพย้อนกลับแบบฟูเรียร์สไลด์ (The Fourier Slice Theorem programming)

ส่วนสุดท้ายเป็นโปรแกรมการสร้างภาพย้อนกลับด้วยวิธีฟูเรียร์สไลด์ ซึ่งเริ่มต้นจากการนำข้อมูลโปรเจกชันมาแปลงฟูเรียร์แบบ 1 มิติทีละมุมได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 3.8 ซึ่งสร้างได้โดยโปรแกรม List 3.3 ดังนี้

List 3.3 1D-Fourier transform of projection data

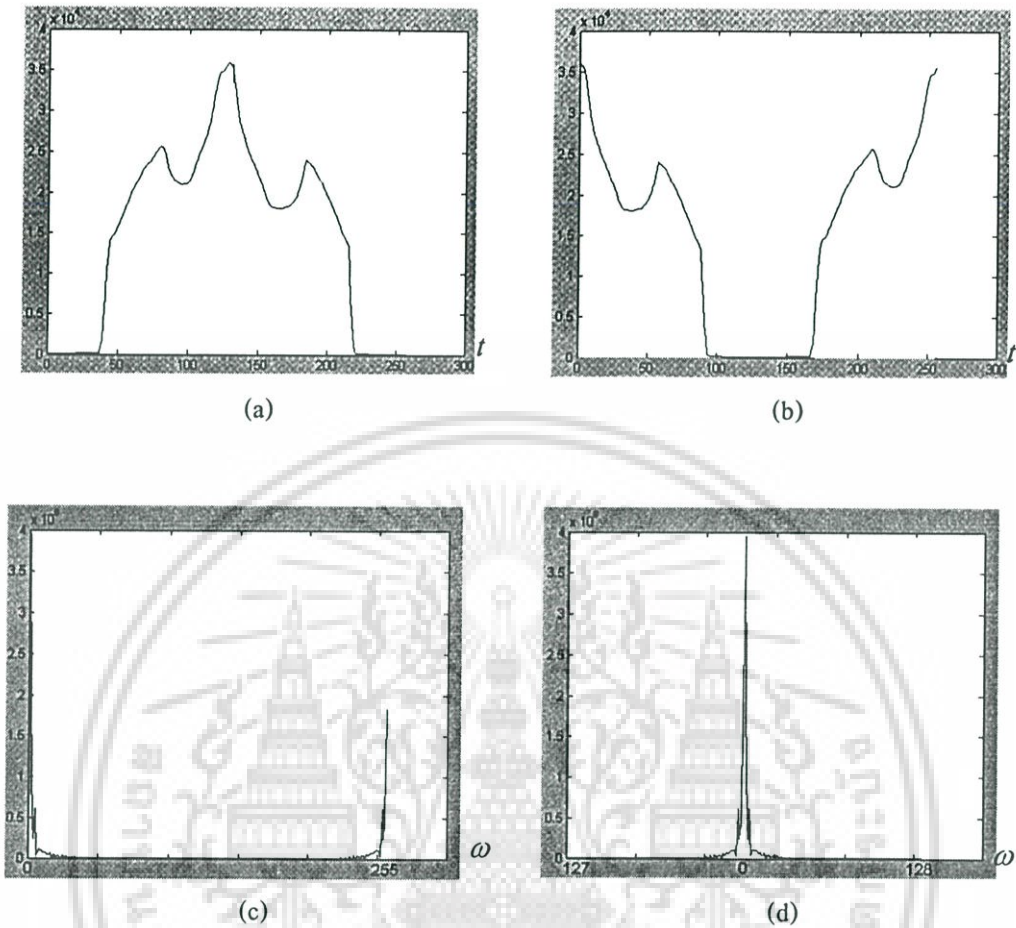
บรรทัด	คำสั่ง	คำอธิบายโปรแกรม
15	for i=1:nView,	แปลงฟูเรียร์ข้อมูลโปรเจกชันทั้งหมดทีละมุม โดยใช้คำสั่ง <code>fft</code> แต่คำสั่งนี้มีเงื่อนไขที่ต้องจัดลำดับของข้อมูลใหม่ ดังรูปที่ ... ก่อนและหลังแปลงฟูเรียร์
16	PF(:,i)=fftshift(fft(fftshift(PT(:,i))));	
17	end;	
18	figure(3), mesh(abs(PF));	แสดงภาพ 3 มิติของข้อมูลโปรเจกชันที่ผ่านการแปลงฟูเรียร์แล้ว
19	xlabel('w');	กำหนดแกน x เป็นแกนความถี่ w
20	ylabel('\theta');	กำหนดแกน y เป็นแกนตำแหน่งมุม
21	zlabel('P(w,\theta)');	กำหนดแกน z เป็นแกนโปรเจกชันที่ได้จากการแปลงฟูเรียร์



รูปที่ 3.8 ภาพ 3 มิติของข้อมูลโปรเจกชันที่ผ่านการแปลงฟูเรียร์จำนวน 180 มุม

สำหรับโปรแกรม Matlab การแปลงฟูเรียร์จำเป็นต้องมีการจัดลำดับของข้อมูลโปรเจกชันใหม่ โดยใช้คำสั่ง “`fftshift`” ดังรูปที่ 3.9 (b) แล้วจึงนำข้อมูลโปรเจกชันไปแปลงฟูเรียร์ด้วยคำสั่ง “`fft`” ดัง

รูปที่ 3.9 (c) จากนั้นทำการจัดลำดับใหม่อีกครั้งด้วยคำสั่ง “fftshift” ดังรูปที่ 9 (d) เพื่อที่เราจะนำไปวางในระนาบแบบ 2 มิติตามทฤษฎีบทฟูเรียร์สโกลด์ต่อไป

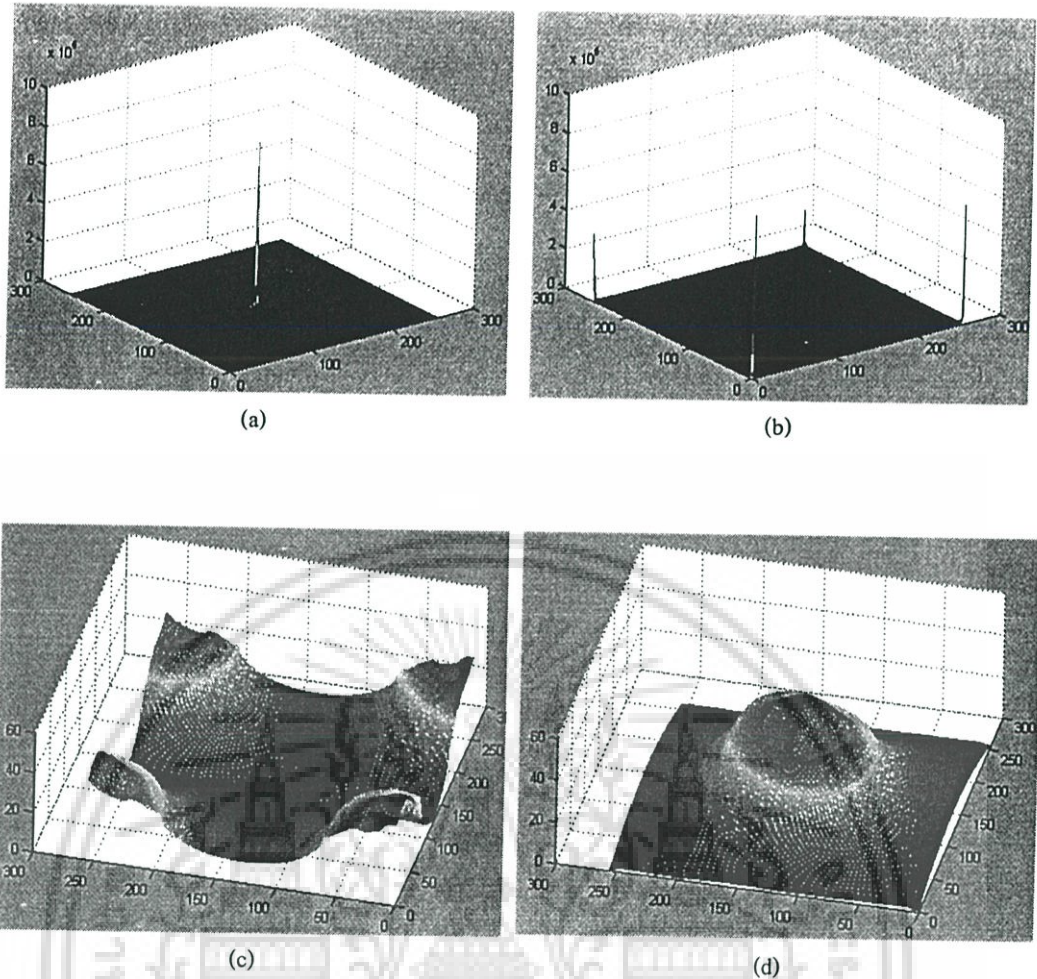


รูปที่ 3.9 ตัวอย่างการนำข้อมูลโปรเจกชันมุม 0 มาแปลงฟูเรียร์ใน โปรแกรม Matlab

- (a) โปรเจกชันของ “radon
- (b) โปรเจกชันจัดด้วย “fftshift”
- (c) โปรเจกชันที่แปลงฟูเรียร์ด้วย “fft”
- (d) โปรเจกชันที่แปลงฟูเรียร์จัดด้วย “fftshift”

การนำข้อมูลฟูเรียร์แบบ 1 มิติไปวางลงบน โคออร์ดิเนตแบบ 2 มิติสามารถทำได้โดยการใช้ฟังก์ชันการหมุนภาพด้วยคำสั่ง “imrotate” ที่มีอยู่ในโปรแกรม Matlab ที่มีการประมาณค่าแบบเชิงเส้น (Bilinear interpolation) วางทีละมุมจนครบแล้วจึงนำไปแปลงฟูเรียร์กลับแบบ 2 มิติด้วยคำสั่ง “ifft2” โดยก่อนและหลังแปลงฟูเรียร์กลับต้องจัดลำดับข้อมูลก่อนด้วยคำสั่ง “fftshift”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.10 การแปลงฟูเรียร์กลับเพื่อให้ได้ภาพผลลัพธ์

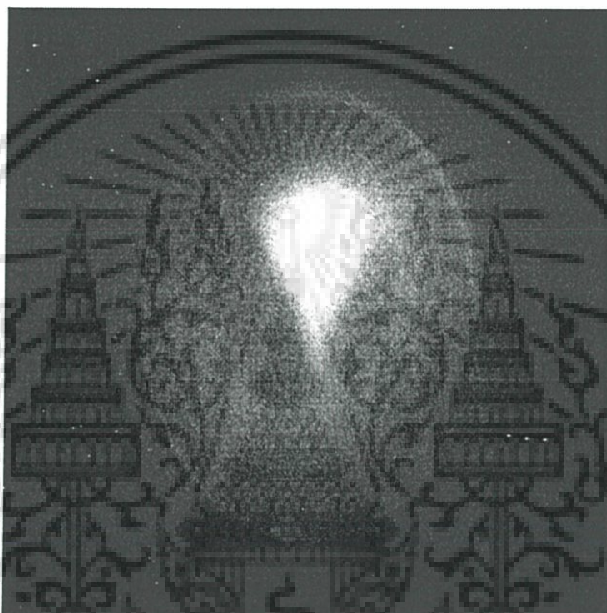
- (a) ข้อมูลฟูเรียร์แบบ 2 มิติ
- (b) จัดลำดับด้วย fftshift
- (c) แปลงฟูเรียร์กลับแบบ 2 มิติด้วย ifft2
- (d) จัดข้อมูลด้วย fftshift จะ ได้ภาพผลลัพธ์

List 3.4 2D-Fourier transform of projection data

บรรทัด	คำสั่ง	คำอธิบายโปรแกรม
22	for view=1:nView,	ลูปจำนวนข้อมูลโปรเจกชัน
23	FR = zeros(w,w);	เคลียร์ข้อมูลของตัวแปร
24	FR(:,w/2) = PF(:,view);	โหลดข้อมูลโปรเจกชันที่ผ่านการแปลงฟูเรียร์ให้กับตัวแปรแบบ 2 มิติ FR
25	FR = imrotate(FR,view*180/nView,'bilinear','crop');	หมุนระบบพิกัด FR ด้วยคำสั่ง imrotate

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

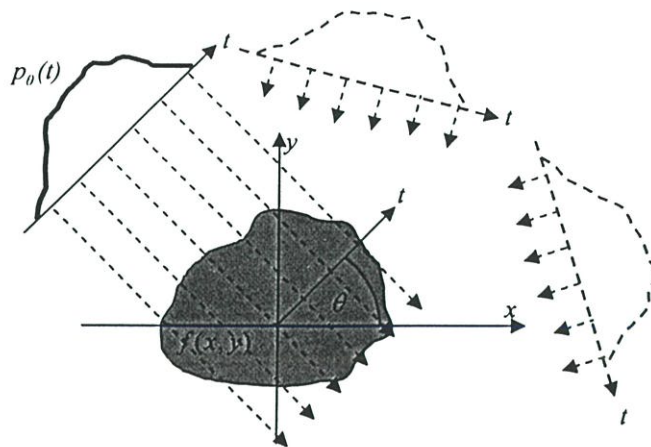
<pre> 26 FD = FD + FR; 27 end 28 IMO = fftshift(iff2(fftshift(FD))); 29 figure(4), imshow(abs(IMO)/max(max(abs(IMO)))); 30 xlabel('x-axis'); 31 ylabel('y-axis');</pre>	<p>นำข้อมูลที่หมุนแล้วไปใส่รวมกันในตัวแปรแบบ 2 มิติ FD</p> <p>คำสั่งปิดรูป for</p> <p>inverse fourier แบบ 2 มิติด้วยคำสั่ง iff2 และคำสั่ง fftshift</p> <p>แสดงผลลัพธ์พร้อมทั้งสเกลค่าให้อยู่ในช่วง 0 ถึง 1 โดยการนำข้อมูลตัวแปร IMO ทั้งหมดหารด้วยค่าสูงสุดของตัวแปร IMO</p>
---	--



รูปที่ 3.11 แสดงภาพผลลัพธ์ด้วยคำสั่ง “imshow”

3.3 วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีแบ็คโปรเจกชัน

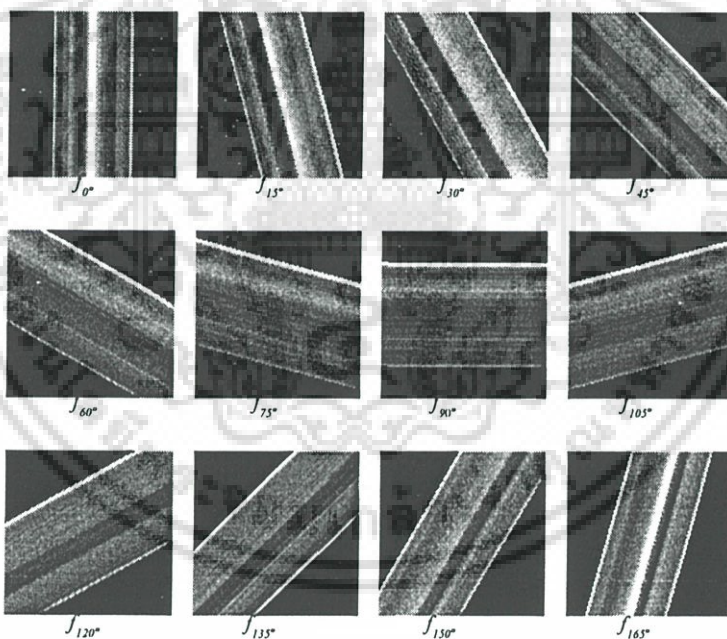
การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีแบ็คโปรเจกชันนั้นเป็นวิธีที่ง่ายที่สุด ความยุ่งยากทางคณิตศาสตร์มีน้อย โดยมีคูห์ล (Kuhl) และเอดเวิร์ดส์ (Edwards) [5, 6] เป็นสองคนแรกที่นำวิธีนี้ไปสร้างภาพตัดขวางของผู้ป่วยได้สำเร็จ



รูปที่ 3.12 โปรเจกชันของฟังก์ชัน 2 มิติ

จากนิยามของโปรเจกชันที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 จะได้นิยามของแบ็คโปรเจกชันของโปรเจกชันที่มุม θ ดังรูปที่ 3.12 คือ

$$f_\theta(x, y) = \int_0^\pi p_\theta(t) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dt \quad (3.19)$$

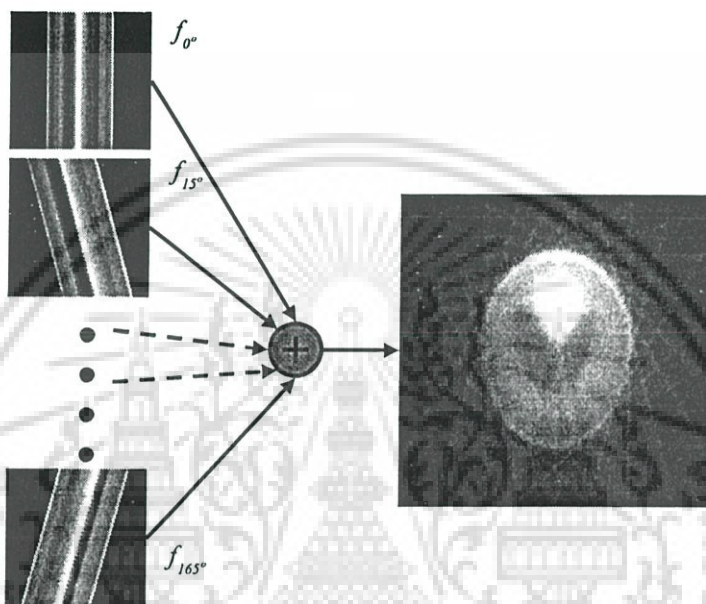


รูปที่ 3.13 ตัวกระทำแบ็คโปรเจกชันที่มุมเท่ากับ θ

$f_\theta(x, y)$ คือตัวกระทำแบ็คโปรเจกชัน (Back projection operator) ของโปรเจกชัน $p_\theta(t)$ ที่มุม θ ดังนั้น การสร้างภาพกลับ (Reconstruction) จากวิธีแบ็คโปรเจกชัน คือ ผลรวมของตัวกระทำแบ็คโปรเจกชันแต่ละมุมดังรูปที่รวมกันจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_0^\pi f_\theta(x, y) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_{-\alpha}^\alpha p_\theta(t) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dt d\theta
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

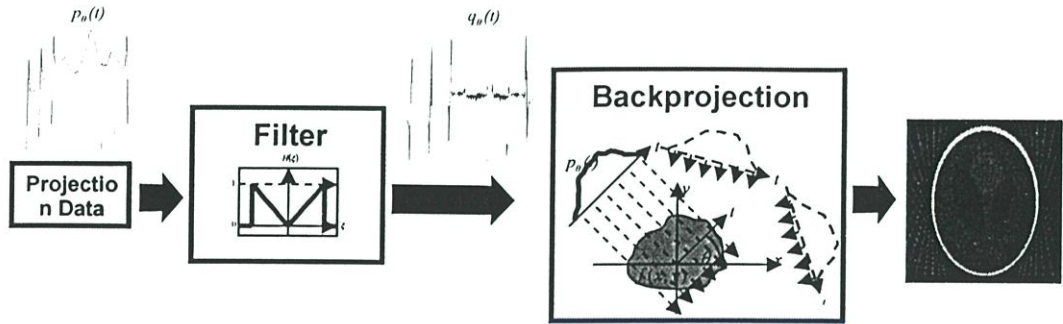


รูปที่ 3.14 การนำตัวกระทำแบ็คโปรเจกชันมารวมกันให้ได้ภาพผลลัพธ์

ภาพที่ได้จากวิธีนี้จะเบลอ สามารถแก้ปัญหานี้ได้ด้วยการใช้วิธีฟิลเตอร์ก่อนที่แบ็คโปรเจกชัน ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

3.4 วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน (FBP)

วิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน [3], [15-19] นี้เป็นวิธีที่เป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการสร้างภาพตัดขวางทั้งนี้เนื่องจากเป็นวิธีที่ได้รับการปรับปรุงจากวิธีแบ็คโปรเจกชันในการเพิ่มความชัดเจนของภาพ ซึ่งวิธีนี้จะใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ช่วยในการพิสูจน์



รูปที่ 3.15 Block diagram แสดงวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน

จากทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ ภาพ $f(x, y)$ จะสามารถหามาได้จากการแปลงฟูเรียร์ย้อนกลับ

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (3.21)$$

ถ้าให้ (ω, θ) เป็นระบบพิกัดแบบโพลาร์ (Polar Coordinate) ในระนาบ (u, v) เราสามารถเขียนสมการ (3.21) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \\ &= + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta + \pi) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))} \omega d\omega d\theta \end{aligned} \quad (3.22)$$

จากนั้นใช้คุณสมบัติ

$$F(\omega, \theta + \pi) = F(-\omega, \theta) \quad (3.23)$$

สมการ (3.22) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.24)$$

โดยที่

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3.25)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเราสามารถเขียนสมการ(3.24) ใหม่ได้เป็น

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (3.26)$$

โดยที่

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(w) |w| e^{j2\pi w t} dw \quad (3.27)$$

จากสมการข้างบนจะเห็นว่า ในการสร้างภาพตัดขวางเราสามารถทำได้โดยการนำข้อมูลแต่ละโปรเจกชัน $P_{\theta}(t)$ มาทำการฟิลเตอร์ที่มีผลตอบสนองทางความถี่ (Frequency Response) เท่ากับ $|w|$ ดังสมการ (3.27) จากนั้นจึงนำค่าที่ได้มาทำการแบ็คโปรเจกชันดังสมการ (3.38) โดยที่ฟิลเตอร์ในสมการ (3.26) เรียกว่า Ram-Lak Filter

พารามิเตอร์ ω เป็นตัวแปรความถี่โดยหลักการแล้วอินทิกรัลในสมการ (3.27) ต้องทำตลอดทุกย่านความถี่ ในทางปฏิบัติพลังงานที่อยู่ในส่วนประกอบ (Components) การแปลงฟูเรียร์เหนือความถี่ค่าหนึ่งจะมีค่าน้อย ดังนั้นการโปรเจกชันจึงถูกทำในแถบความถี่ที่จำกัด (Band-limited) โดยให้ W แทนค่าความถี่ซึ่งถ้าเกินจากนี้พลังงานสำหรับการโปรเจกชันจะมีค่าน้อยมาก

เราสมมติว่าข้อมูลโปรเจกชันถูกสุ่มด้วยช่วงของการสุ่มเท่ากับ τ ชม. โดยสมมติว่าไม่มีปัญหาเรื่อง Aliasing ซึ่งกล่าวเป็นนัยว่าในโดเมนของการแปลง (Transform Domain) โปรเจกชันไม่มีพลังงานนอกย่านความถี่ $(-W, W)$ โดยที่

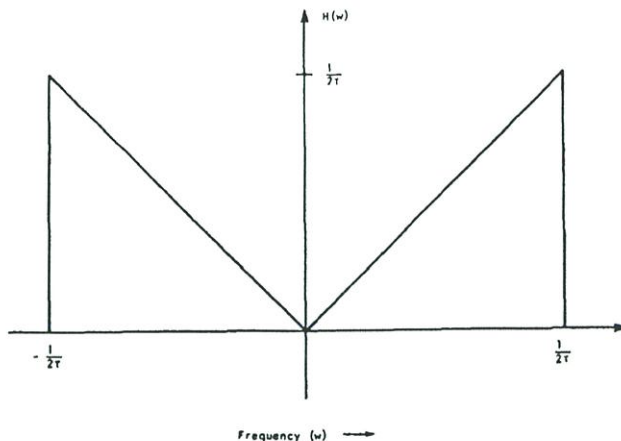
$$W = \frac{1}{2\tau} \quad \text{ไซเคิลต่อชม.} \quad (3.28)$$

เราจะสามารถเขียนสมการ Ram-Lak Filter ได้เป็น

$$H(w) = |w| b_w(w) \quad (3.29)$$

โดยที่

$$b_w(w) = \begin{cases} 1 & |w| \leq \frac{1}{2\tau} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (3.30)$$



รูปที่ 3.16 ภาพแสดงผลตอบสนองทางความถี่ของ Ram-Lak Filter

3.5 อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบ ART (Algebraic Reconstruction Techniques)

วิธีการสร้างภาพเชิงพีชคณิตเป็นวิธีการสร้างภาพกลับโดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ Algebraic Reconstruction Algorithm [3, 8] มีอยู่หลายวิธีหลายแบบซึ่งในวิทยานิพนธ์เล่มนี้จะกล่าวถึงวิธี Algebraic Reconstruction Technique (ART) และวิธี Simultaneous ART (SART) เนื่องจากงานวิจัย [7] ได้พิสูจน์ให้เห็นอย่างชัดเจนแล้วว่าทั้งสองวิธีให้ค่าความผิดพลาดที่ต่ำ โดย SART เป็นวิธีการที่ถูกพัฒนามาจากวิธี ART โดย Anderson and Kak [9] เพื่อลดความผิดพลาดจากกระบวนการสร้างภาพของวิธี ART (ที่เรียกว่า salt and pepper noise) กระบวนการสร้างภาพกลับเชิงพีชคณิตแบบ Algebraic Reconstruction Technique (ART) ถูกเสนอโดยนาย Gordon, Bender และ Herman เรื่อง [8] ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างภาพตัดขวางแบบ 3 มิติจากเครื่องสแกนอิเล็กทรอนิกส์ ไมโครสโคปิกและภาพถ่ายเอ็กซเรย์

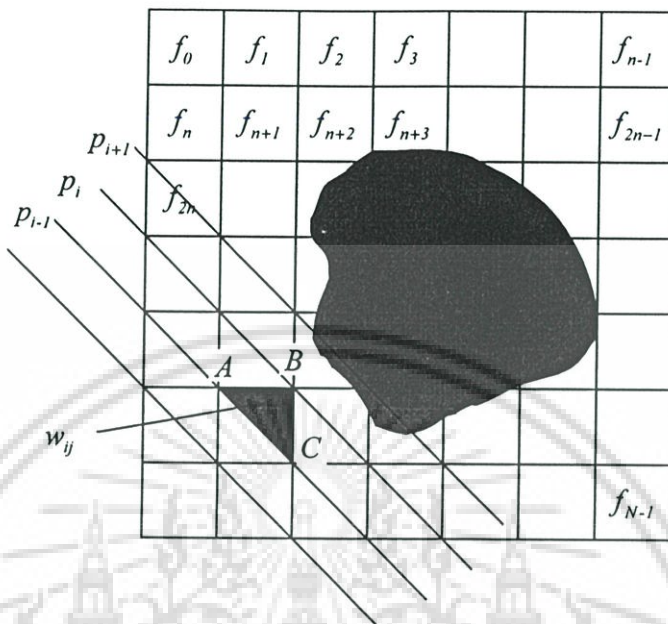
3.5.1 ART เป็นระบบสมการเชิงเส้น

ART ใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ในการแก้สมการแบบเชิงเส้น (Linear equation) $WF = P$ เมื่อ F คือตัวแปรไม่ทราบค่าเป็นเวกเตอร์ 1 มิติขนาด N ตัว โดยที่ $N = n^2$ และ $0 \leq j \leq N-1$ พิกเซลสำหรับวัตถุแบบ 2 มิติหรือภาพ 1 สไลด์และ $N = n^3$ วอกเซลสำหรับวัตถุแบบ 3 มิติหรือเป็นปริมาตร และ P คือข้อมูลโปรเจกชันที่แบ่งออกเป็นเส้นแสงในรูปของเวกเตอร์แบบ 1 มิติ โดยที่ M คือจำนวนรังสีทั้งหมด (ในทุกโปรเจกชัน) และ $0 \leq i \leq M-1$ ส่วน W คือค่าแฟกเตอร์ของเซลล์ที่ j^{th} ที่มีต่อรังสีเส้นที่ i^{th} โดยแฟกเตอร์ w_{ij} มีค่าเท่ากับสัดส่วนของพื้นที่ของเซลล์ที่ j^{th} ที่ตัดกับรังสี i^{th} ดังแสดงให้ดูหนึ่งเซลล์ในรูปที่ 3.17 เขียนเป็นสมการแบบเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + \dots + w_{1N}f_N &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + \dots + w_{2N}f_N &= p_2 \\
 &\dots\dots \\
 w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + \dots + w_{MN}f_N &= p_M
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$



รูปที่ 3.17 ภาพแสดงรูปแบบการฉายแสงและการคำนวณค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก

จากสมการ (3.31) สามารถแก้สมการได้โดยตรงคือการใช้ระบบการแก้สมการแบบเมทริกซ์ซึ่งเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix}
 w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} \\
 w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 w_{M1} & w_{M2} & w_{M3} & w_{MN}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 f_1 \\
 f_2 \\
 \vdots \\
 f_N
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 p_1 \\
 p_2 \\
 \vdots \\
 p_M
 \end{bmatrix}
 \tag{3.33}$$

ถ้า N และจำนวนของรังสีทั้งหมดมีค่าน้อย เราสามารถใช้ทฤษฎีเมทริกซ์ต่างๆไปในการแปลงกลับ (Invert matrix) ระบบสมการใน (3.33) อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ N อาจจะมีค่ามาก (ในกรณีของภาพขนาด $256 \times 256 = 65536$) และโดยมากที่จำนวนรังสีทั้งหมด (M) จะมีขนาดใหญ่พอๆกัน ถ้า M และ N มีค่าดังกล่าว ขนาดของเมทริกซ์ w_{ij} ใน (3.33) คือ 65536×65536 ซึ่งไม่สามารถใช้การแปลงกลับเมทริกซ์ได้เลย

3.5.2 การคำนวณค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก (Weighting factor)

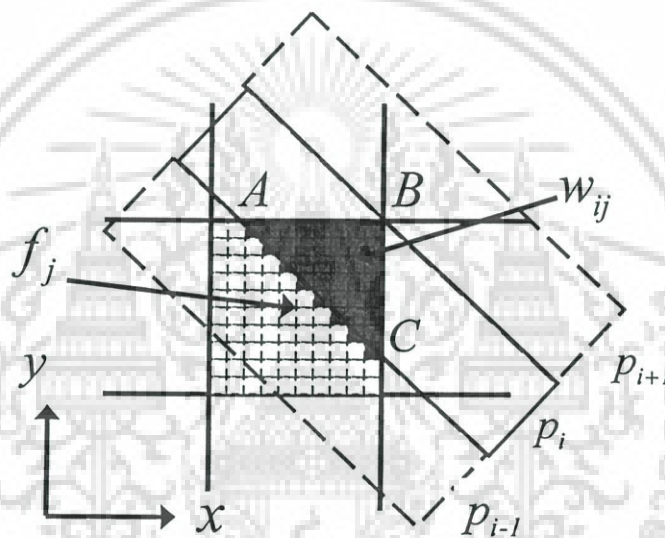
พิจารณารูปที่ 3.17 เป็นภาพของวัตถุที่มีแสงผ่านวัตถุ ซึ่ง p_i คือผลรวมของแสงเส้นที่ i^{th} ผ่านวัตถุในแต่ละพิกเซลหรือออกเซล แต่ข้อมูลของวัตถุในภาพนั้นเป็นข้อมูลแบบสุ่มในระนาบของ

ภาพ ดังนั้นในการหาค่าผลรวมของแสงเส้นที่ i^{th} จะต้องทราบสัดส่วนของข้อมูลในแต่ละพิกเซล j^{th} นั่นก็คือค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก (Weighting factor) w_{ij} จากรูปที่ 3.17 เขียนเป็นสมการได้คือ

$$w_{ij} = \frac{\text{area of } ABC}{\text{area of cell}} \quad (3.34)$$

จะเห็นว่าการทำงานหาค่าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC ของแต่ละเซลล์ที่แสงผ่านนั้น เป็นการคำนวณที่ยุ่งยากในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้ทำการคำนวณค่าแฟกเตอร์น้ำหนักโดยทำการแบ่งเซลล์แต่ละเซลล์ออกเป็นเซลล์ย่อยๆ แล้วทำการคำนวณหาว่าเซลล์ย่อยแต่ละเซลล์อยู่ในเส้นทางที่แสงผ่านหรือไม่

$$w_{ij} = \frac{\text{จำนวนของเซลล์ย่อยที่อยู่ในเส้นทางเดินแสง}}{\text{จำนวนของเซลล์ย่อยทั้งหมด}} \quad (3.35)$$



รูปที่ 3.18 ภาพแสดงตัวอย่างการคำนวณหาแฟกเตอร์น้ำหนัก

จากรูปที่ 3.18 จะเห็นว่าเซลล์จะถูกแบ่งเป็น 100 เซลล์ย่อย โดยจะมี 36 เซลล์ย่อยที่อยู่ในเส้นทางเดินแสง ดังนั้นเซลล์นี้มีค่าแฟกเตอร์น้ำหนักมีค่าเท่ากับ $(36/100) = 0.36$

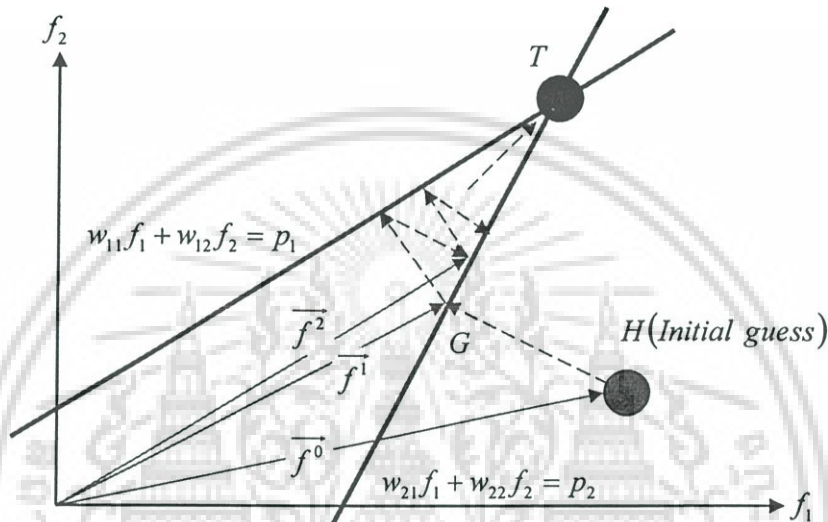
จะเห็นได้ว่าถ้าแบ่งเซลล์ f_j ให้ละเอียดมากขึ้นก็จะทำให้ค่าแฟกเตอร์น้ำหนักที่คำนวณได้จะมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นเช่นกัน เป็นผลให้เวลาการคำนวณเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนเท่าของจำนวนเซลล์ย่อย ซึ่งอาจแก้ไขได้โดยการคำนวณค่าแฟกเตอร์น้ำหนักไว้ล่วงหน้าแล้วเก็บเป็นไฟล์ไว้เพื่อใช้ในการสร้างภาพตัดขวางได้โดยไม่ต้องคำนวณใหม่ทุกครั้ง ซึ่งจะช่วยลดเวลาในการคำนวณลงได้

3.5.3 หลักการของแคชแมร์ซ (Kaczmarz Method)

ทฤษฎีของแคชแมร์ซ (Kaczmarz Method) เป็นทฤษฎีที่ใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีรูปแบบดังสมการ (3.32) โดยผลเฉลยที่ถูกแทนด้วย (f_1, f_2, \dots, f_N) จะถูกพิจารณาว่า

เป็นจุดในสเปซ (Space) N มิติ ในสเปซดังกล่าวแต่ละสมการจะแทน Hyper-plane เมื่อระบบสมการสามารถหาผลเฉลยที่เป็นหนึ่งเดียว (Unique Solution) จุดตัดของ Hyper-plane ทั้งหมดจะมีจุดเดียวและเป็นค่าผลเฉลยของสมการ (Solution) เพื่อที่จะให้เห็นชัดถึงแนวคิดดังกล่าวเราได้แสดงให้เห็นในภาพ 3.19 ซึ่งเป็นกรณีที่เรามีตัวแปรแค่สองตัว f_1 และ f_2 และมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} w_{11}f_1 + w_{12}f_2 &= p_1 \\ w_{21}f_1 + w_{22}f_2 &= p_2 \end{aligned} \tag{3.36}$$



รูปที่ 3.19 ภาพแสดงการใช้ทฤษฎีของแคชมาร์ช ในการแก้ระบบสมการสองตัวแปร

ในวิธีของ Kaczmarz เราต้องทำการสุ่มค่าตอบครั้งแรกให้กับ $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}$ การสุ่มสามารถเขียนแทนแบบเวกเตอร์ได้เป็น $\vec{f}^{(0)}$ ในสเปซ (Space) N มิติ การสุ่มครั้งแรกนี้จะถูกโปรเจกต์ไปบน Hyper-plane ซึ่งก็คือสมการแรกใน (3.36) ได้เป็น $\vec{f}^{(1)}$ ดังแสดงในรูป 3.19 สำหรับกรณีสองมิติ การคำนวณในขั้นตอนแรกนี้ทำได้โดยใช้สูตร

$$\vec{f}^{(1)} = \vec{f}^{(0)} - \frac{(\vec{w}_1 \cdot \vec{f}^{(0)} - p_1)}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1 \tag{3.37}$$

โดยที่ $\vec{w}_1 = (w_{11}, w_{12})$ คือสัมประสิทธิ์ของสมการแรกใน(3.32) การพิสูจน์ (3.37) ทำได้โดยการเขียน (3.32) ใหม่ดังนี้

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{f} = p_1 \tag{3.38}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$|\vec{HG}| = \frac{\vec{f}^{(0)} \cdot \vec{w}_1 - p_1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}} \quad (3.43)$$

เนื่องจากทิศทางของ \vec{HG} เหมือนกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย \vec{OU} เราสามารถเขียน

$$\vec{HG} = |\vec{HG}| \vec{OU} = \frac{\vec{f}^{(0)} \cdot \vec{w}_1 - p_1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}} \quad (3.44)$$

แทนค่า (3.44) ลงใน (3.41) เราจะได้ (3.37)

หลังจากได้ $\vec{f}^{(1)}$ เราทำการโปรเจ็ค $\vec{f}^{(1)}$ บน Hyper-plane ซึ่งคือสมการที่สองของ (3.32) ซึ่งจะได้เป็น $\vec{f}^{(2)}$ ดังแสดงในรูป 3.19 ขบวนการ Process ก็ทำซ้ำสำหรับ Hyper-plane ต่อๆ ไป การโปรเจ็คบน Hyper-plane ที่ i^{th} สามารถได้จากการโปรเจ็คชั้นบน Hyper-plane ที่ $(i-1)^{\text{th}}$ ดังนี้

$$\vec{f}^{(k)} = \vec{f}^{(k-1)} - \frac{(\vec{w}_i \cdot \vec{f}^{(k-1)} - p_i)}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \vec{w}_i \quad (3.45)$$

โดยที่ $\vec{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN})$ และ k เป็นจำนวนการทำซ้ำ

ขบวนการ (Process) ของการทำโปรเจ็คชั้นบน Hyper-plane ต่างกันจะดำเนินต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งเราได้ $\vec{f}^{(M)}$ ซึ่งคือการโปรเจ็คชั้นของสมการสุดท้ายของ (3.32) จากนั้นก็จะทำการวนซ้ำโดยการโปรเจ็คชั้น $\vec{f}^{(M)}$ ไปบน Hyper-plane อันแรก

ในการประยุกต์ใช้งานจริงจำเป็นต้องมีจำนวนของโปรเจ็คชั้นจำนวนมากและภาพที่ต้องการสร้างกลับคืนมีขนาดใหญ่ทำให้เกิดความยุ่งยากที่จะใช้สมการ (3.32) ในการคำนวณ เนื่องจากปัญหาในเรื่องการคำนวณ เมื่อที่หน่วยความจำและการที่จะเรียกสัมประสิทธิ์น้ำหนัก w_{ij} พิจารณากรณีที่เราจะสร้างภาพขนาด 128×128 จากข้อมูล 150 โปรเจ็คชั้น โดยแต่ละโปรเจ็คชั้นมี 150 เส้นรังสี (Ray) จำนวนของสัมประสิทธิ์น้ำหนัก w_{ij} ทั้งหมดที่ใช้คือ $128 \times 128 \times 150 \times 150$ ($\approx 2.7 \times 10^8$) ซึ่งเป็นจำนวนมหาศาล

เพื่อที่จะแก้ปัญหาคำนวณยุ่งยากในการคำนวณวิธีทางพีชคณิตอื่นๆ ได้ถูกนำเสนอ เพื่อที่จะวิเคราะห์การประมาณที่สามารถคำนวณได้ง่าย เราจะได้ (3.45) ใหม่ในรูปแบบที่ต่างไปคือ

$$f_j^{(k)} = f_j^{(k-1)} + \frac{\left(p_i - \sum_{h=1}^N f_h^{(k-1)} w_{hm} \right)}{\sum_{m=1}^N w_{im}^2} w_{ij} \quad (3.46)$$

3.5.4 ทำไม ART จึงต้องการจำนวนโปรเจ็คชั้นน้อยกว่าวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจ็คชัน

คำถามนี้ได้รับการตอบโดย Guan และ Gordon [8] สำหรับกรณีของการสร้างภาพกลับแบบ 2 มิติโดยใช้ลำแสงแบบขนาน และได้มีการอธิบายถึงในกรณีของการสร้างภาพกลับแบบ 3 มิติโดย Mueller ใน [13]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การสร้างภาพกลับของภาพที่เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $n \times n$ ดังนั้นจำนวนเซลล์ทั้งหมดของภาพจะเป็น $N = n^2$ โดยทั่วไปเราจะสมมติให้ขอบเขตของการสร้างภาพกลับเป็นวงกลม โดยพื้นที่นอกวงกลมถือว่าไม่มีข้อมูล ในกรณีนี้เราจะมี $(1/4)\pi n^2$ เซลล์ที่ไม่ทราบค่าและข้อมูลโปรเจกชัน n ค่าต่อโปรเจกชันหนึ่งมุม จากสมการ (3.32) ในการจะหาผลเฉลยของสมการ จำนวนโปรเจกชันของภาพ M_{ART} ต้องการเป็น

$$M_{ART} = \frac{(1/4)\pi n^2}{n} = \frac{\pi n}{4} = 0.785 \cdot n \quad (3.47)$$

จากนั้นมาดูจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการสำหรับวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน (FBP) ค่าระยะห่างของการสุ่มข้อมูลในโดเมนความถี่ (Fourier space) ที่น้อยที่สุดเป็น $\Delta\omega = 1/nT_g$ และค่าความถี่สูงสุดเป็น $\omega_{\max} = 1/(2T_g)$ แต่เนื่องจากการสุ่มในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar sampling) ทำให้ความหนาแน่นในการสุ่มข้อมูลลดลงเมื่อออกห่างจากแกน จากอัตราการสุ่มข้อมูลที่น้อยที่สุด $\Delta\omega$ จะเป็นตัวกำหนดขอบเขตในการคำนวณค่ามุมระหว่างโปรเจกชันที่น้อยที่สุดที่ต้องการสำหรับวิธี FBP ดังสมการ

$$\Delta\varphi_p = \frac{\Delta\omega}{\omega_{\max}} = \frac{2T_g}{nT_g} = \frac{2}{n} \quad (3.48)$$

ดังนั้นจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการสำหรับวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันเป็น

$$M_{FBP} = \frac{\pi}{\Delta\varphi_p} = \frac{\pi n}{2} = 1.57 \cdot n \quad (3.49)$$

จะเห็นว่าจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการสำหรับวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันเป็นเป็นสองเท่าของจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการสำหรับวิธีART

ในการสร้างภาพกลับแบบสามมิติปริมาตรที่ต้องการสร้างกลับสี่เหลี่ยมลูกบาศก์มีขนาด $n \times n \times n$ ดังนั้นจำนวนของเซลล์ทั้งหมดของปริมาตรจะเป็น $N = n^3$ เช่นเดียวกันโดยทั่วไปแล้วจะสมมติให้ขอบเขตของการสร้างภาพกลับเป็นทรงกลม เราจะมีเซลล์ที่ไม่ทราบค่า $\frac{1}{6}\pi n^3$ เซลล์และข้อมูลโปรเจกชันจำนวน $\frac{1}{4}\pi n^3$ ต่อโปรเจกชันหนึ่งมุม ดังนั้นจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการ M_{ART3D} เป็น

$$M_{ART3D} = \frac{(1/6)\pi n^3}{(1/4)\pi n^2} = 0.67n \quad (3.50)$$

3.6 อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบ SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Techniques)

ในปี 1984 Anderson และ Kak [9] คิดว่าการที่ข้อมูลในแต่ละเซลล์จะถูกเส้นแสงเป็นจำนวนมากผ่านสำหรับการทำซ้ำ 1 ครั้ง พวกเขาอธิบายถึงวิธีการ ART ว่าเป็นการปรับปรุงข้อมูลในทุกๆ เส้นแสง โดยการนำค่าโปรเจกชันที่คำนวณได้ของแสงเส้นที่ i (q_i) มาเปรียบเทียบกับข้อมูลโปรเจกชันต้นฉบับของแสงเส้นที่ i (p_i) แล้วนำค่าผลต่างไปปรับปรุงให้กับเซลล์ที่แสงเส้นที่ i ทำให้เกิดริ้วรอยจากทางเดินของแสง (striping) หรือ salt and pepper noise ที่ได้กล่าวข้างต้น ความผิดพลาดดังกล่าวนี้แก้ไขได้โดยวิธี Simultaneous Iterative Reconstruction Technique (SIRT) [10, 11] ที่ทำให้ผลของ striping หายไป แต่ปัญหาของ SIRT คือผลลัพธ์ที่ได้จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยค่อนข้างช้ามาก Anderson และ Kak ได้นำข้อดีทั้งสองวิธีมารวมกันและพัฒนาใหม่เป็น Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART) [9] ซึ่งวิธีนี้จะปรับปรุงข้อมูลต่อ โปรเจกชันเขียนสมการได้คือ

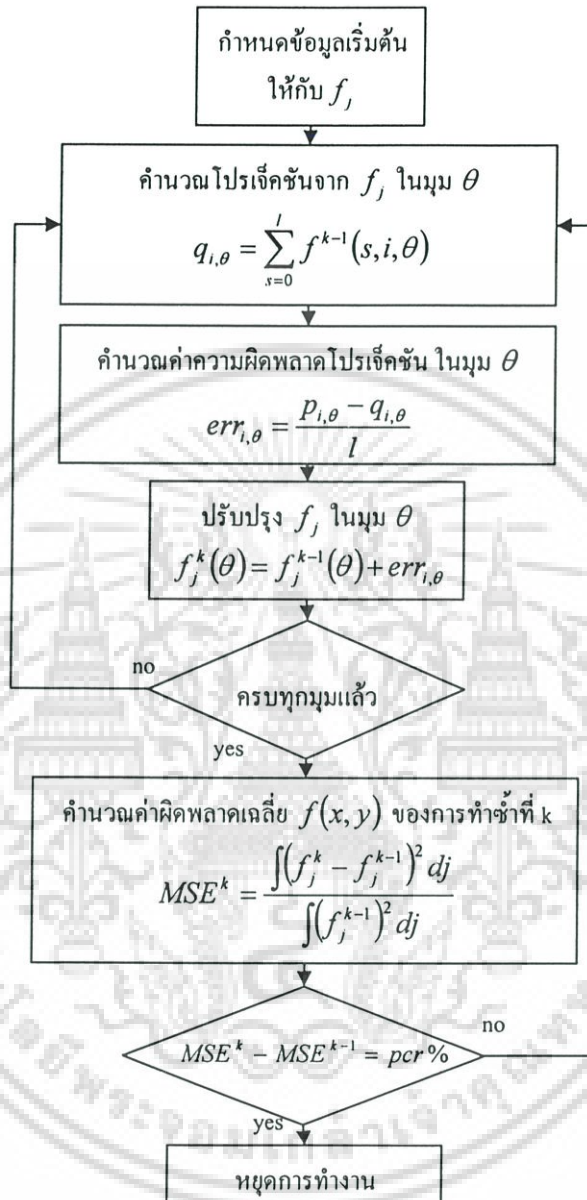
$$f_j^k = f_j^{k-1} + \lambda \frac{\sum_{p_i \in P_\varphi} \left(\frac{p_i - \sum_{n=1}^N w_n f_n^{k-1}}{\sum_{n=1}^N w_n} \right) w_{ij}}{\sum_{p_i \in P_\varphi} w_{ij}} \quad (3.51)$$

จากสมการที่ (3.51) จะต่างจากสมการที่ (3.46) 2 อย่าง โดยกรณีแรกเทอมของผลต่างของโปรเจกชัน (Correction term) ถูกคำนวณจากภาพ f_n ในทุกๆ เซลล์สำหรับโปรเจกชันมุมที่ φ กรณีที่สองผลรวมของค่าแฟกเตอร์น้ำหนักในเทอมการคำนวณโปรเจกชัน $\sum_{n=1}^N w_n$ ถูกคำนวณจากเซลล์ทุกๆ เซลล์ที่สัมพันธ์กับเส้นแสงลำดับที่ i แต่ $\sum_{p_i \in P_\varphi} w_{ij}$ เป็นผลรวมของค่าแฟกเตอร์น้ำหนักในเทอมการหาค่าผิดพลาดจากทุกๆ เส้นแสงในโปรเจกชันที่สัมพันธ์กับเซลล์ลำดับที่ j

3.7 โปรเจกชันและแบ็คโปรเจกชันใน SART

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง ขั้นตอนการ โปรเจกชันและแบ็คโปรเจกชันของกระบวนการเชิงพีชคณิต SART มีขั้นตอนการหาค่าผิดพลาดจากโปรเจกชันที่คำนวณได้กับโปรเจกชันต้นฉบับของเส้นแสงในโปรเจกชันมุมเท่ากับ θ จากนั้นนำค่าผิดพลาดดังกล่าวไปปรับปรุงให้กับภาพสำหรับมุม θ จนครบทุกมุมโปรเจกชัน แล้วจึงคำนวณค่าความผิดพลาดของภาพ MSE^k สำหรับอิเทอเรชันที่ k กระบวนการก็จะวนทำซ้ำทั้งหมดจนกว่าผลต่างของค่าผิดพลาดเฉลี่ย MSE^k กับ MSE^{k-1} จะมีค่าต่ำกว่าค่า pre-specified stopping criteria (pcr) ที่กำหนดไว้

$$f_j^k(\theta) = f_j^{k-1}(\theta) + \lambda \frac{p_{i,\theta} - \sum_{s=0}^l f^{k-1}(s, i, \theta)}{l} \quad (3.52)$$



รูปที่ 3.21 ขั้นตอนของ SART

3.7.1 SART โปรเจกชัน

การโปรเจกชันสามารถทำได้โดยนำค่าของวัตถุหรือภาพของแสงเส้นที่ i^{th} ผ่านมารวมกัน แต่เนื่องจากข้อมูลของวัตถุหรือภาพนั้นเป็นข้อมูลแบบสุมที่อยู่ในระบบพิกัดฉาก (Cartesian-coordinate) ทำให้ตำแหน่งการสุมข้อมูลของเส้นแสงไม่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน จึงต้องใช้การ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประมาณค่าให้กับตำแหน่งดังกล่าว จากรูปที่ 3.22 (a) เป็นการประมาณค่าแบบเชิงเส้น (Linear-Interpolation) จากข้อมูลภาพ $f_{x,y}$ ให้กับแสงเส้นที่ i^{th} โดยนำค่าข้อมูลภาพรอบๆ $f_{x,y}$ คือ f_{x_0,y_0} , f_{x_1,y_0} , f_{x_0,y_1} และ f_{x_1,y_1} มาเฉลี่ยตามแกนนอนให้ที่จุด A สมการที่ (3.53) และจุด B สมการที่ (3.54) แล้วจึงนำไปเฉลี่ยตามแกนตั้งคือ $f_{x,y}$ สมการที่ (3.55)

$$A = (f_{x_1,y_0} - f_{x_0,y_0}) \cdot (x - x_0) + f_{x_0,y_0} \tag{3.53}$$

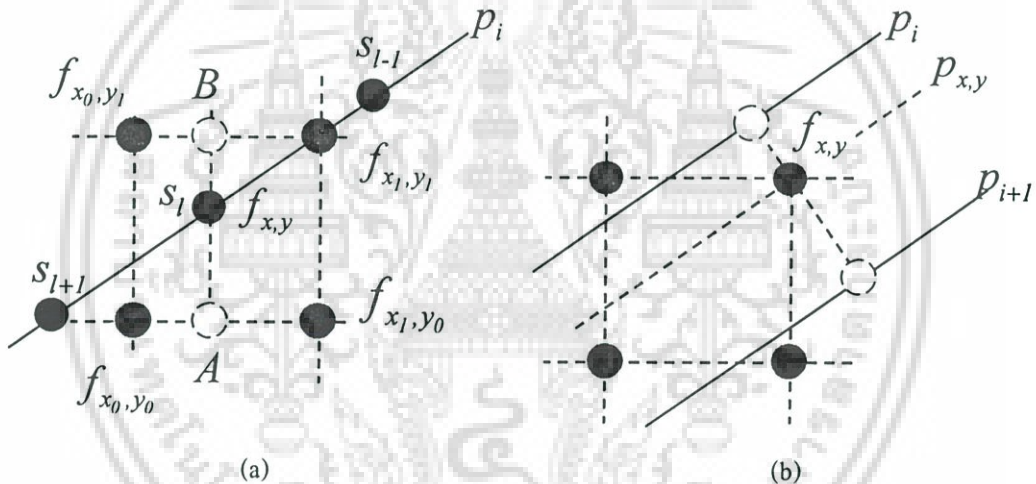
$$B = (f_{x_1,y_1} - f_{x_0,y_1}) \cdot (x - x_0) + f_{x_0,y_1} \tag{3.54}$$

$$f_{x,y} = (B - A) \cdot (y - y_0) + A \tag{3.55}$$

3.7.2 SART แบ็คโปรเจกชัน

แบ็คโปรเจกชันเป็นการนำข้อมูลจากเส้นแสง $p_{x,y}$ ไปใส่ให้ที่ภาพ $f_{x,y}$ พิจารณารูปที่ 3.22 (b) $p_{x,y}$ หาได้จากการเฉลี่ยค่าจากเส้นแสง p_i กับ p_{i+1} ดังสมการที่ (3.56)

$$p_{x,y} = (p_{i+1} - p_i) \cdot (x \cos \theta + y \sin \theta - i) + p_i \tag{3.56}$$



รูปที่ 3.22 การประมาณค่าแบบเชิงเส้น

(a) จากภาพสู่เส้นแสง

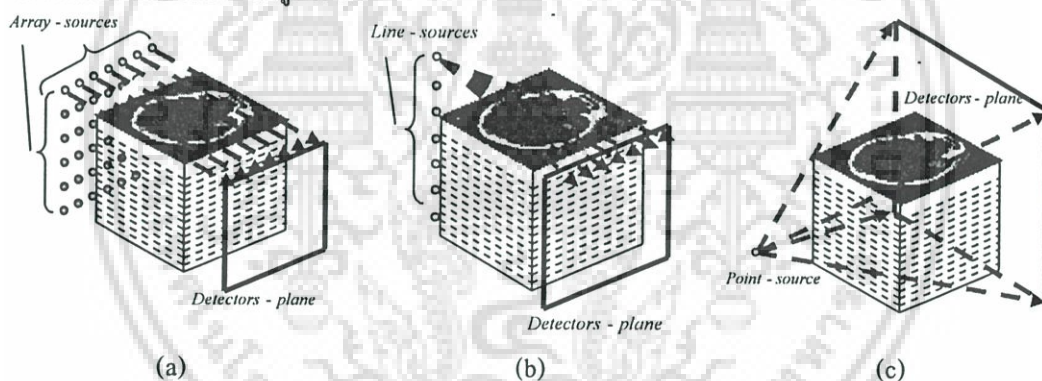
(b) จากเส้นแสงสู่ภาพ

บทที่ 4

อัลกอริทึมของการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย (Cone-beam Reconstruction)

4.1 บทนำ

อัลกอริทึมที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางสำหรับทางเดินแสงรูปกรวยในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีเฟลคแคม (Feldkamp Cone-beam) และวิธีเชิงพีชคณิตแบบ ART (Algebraic Reconstruction Technique Cone-beam) และ SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique Cone-beam) ซึ่งพิจารณาทางเดินแสงเป็นแบบกรวย [10, 11] จากบทที่ 3 เป็นกระบวนการสร้างภาพตัดขวางแบบ 2 มิติที่สามารถสร้างภาพตัดขวางของวัตถุได้ครั้งละระนาบ ถ้าวัตถุมีข้อมูลเป็นแบบปริมาตรก็สามารถทำได้โดยการแบ่งวัตถุออกเป็นหลายๆระนาบแล้วสร้างภาพตัดขวางทีละระนาบ แต่การสร้างภาพแบบขนานนี้ยังไม่สามารถนำไปใช้กับข้อมูลจริงได้ ดังนั้นจึงมีการพิจารณาทางเดินของแสงใหม่ให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงคือทางเดินแสงแบบพัดและทางเดินแสงแบบกรวยดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 เส้นทางเดินแสง

- (a) แบบขนาน (parallel-beam)
- (b) แบบพัด (fan-beam)
- (c) แบบกรวย (cone-beam)

4.2 การสร้างภาพตัดขวางแบบพัด (Fan-beam reconstruction)

กระบวนการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้อัลกอริทึมแบบ 3 มิติ (cone-beam reconstruction) [3,] พิจารณาทางเดินแสงเป็นแบบกรวย ซึ่งมีลักษณะเหมือนพัดที่ยกขึ้น-ลงรอบจุดหมุนที่ตำแหน่ง

แหล่งกำเนิดแสง (point source) เพื่อให้เกิดความเข้าใจจึงต้องกล่าวถึงวิธีการสร้างภาพแบบพัด (fan-beam reconstruction) [3] เสียก่อนซึ่งถูกแบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

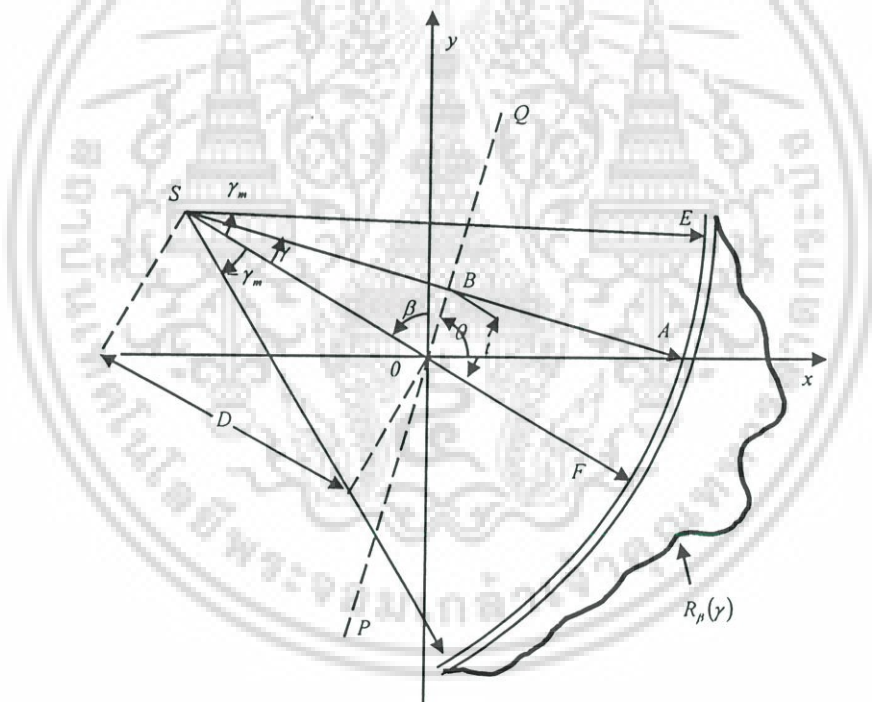
4.2.1 มุมระหว่างเส้นแสงเท่ากัน (equiangular ray)

กำหนดให้ $R_\beta(s)$ เป็นข้อมูลโปรเจกชันที่มีทางเดินแสงเป็นแบบพัดดังรูปที่ 4.2 ซึ่ง β เป็นมุมที่ทำกับแกน y พิจารณาเส้นแสง \overline{SA} ถ้าโปรเจกชันถูกสร้างโดยพิจารณาทางเดินแสงเป็นแบบขนาน นั่นคือ \overline{SA} เป็นเส้นแสงเส้นหนึ่งของโปรเจกชัน $p_\theta(t)$ มีมุมเท่ากับ θ ตำแหน่ง t

$$\begin{aligned}\theta &= \beta + \gamma \\ t &= D \sin \gamma\end{aligned}\quad (4.1)$$

โดย D คือระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสง S ถึงจุดกำเนิด O ความสัมพันธ์ในสมการที่ 4.1 ถูกนำมาใช้ในการพิจารณาให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันกับทางเดินแสงแบบขนาน

$$f(x, y) = \int_0^{t_m} \int_{-t_m}^{t_m} p_\theta(t) \cdot h(x \cos \theta + y \sin \theta) dt d\theta \quad (4.2)$$



รูปที่ 4.2 ข้อมูลโปรเจกชันเมื่อพิจารณาทางเดินแสงแบบพัดที่มีระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน (equally space collinear detectors)

โดยที่ t_m คือขอบเขตบนแกนดีเทคเตอร์ สมการ (4.2) นี้เป็นสมการการสร้างภาพตัดขวางวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันโดยพิจารณาทางเดินแสงแบบขนาน ดังนั้นช่วงมุมโปรเจกชันจึงอยู่ระหว่าง

0 ถึง 180 องศา อย่างไรก็ตามการสร้างภาพตัดขวางจากโปรเจกชันที่เป็นแบบพัตนั้นจำเป็นต้องใช้ช่วงมุมที่มากกว่าคือระหว่าง 0 ถึง 360 องศา ดังนั้นเขียนสมการ (4.2) ได้ใหม่คือ

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{t_m} \int_{-t_m}^{t_m} p_o(t) \cdot h(x \cos \theta + y \sin \theta) dt d\theta \quad (4.3)$$

จากรูปที่ 4.3 ที่พิกัด (x, y) หรือที่จุด C สามารถเขียนให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r, ϕ) ได้คือ

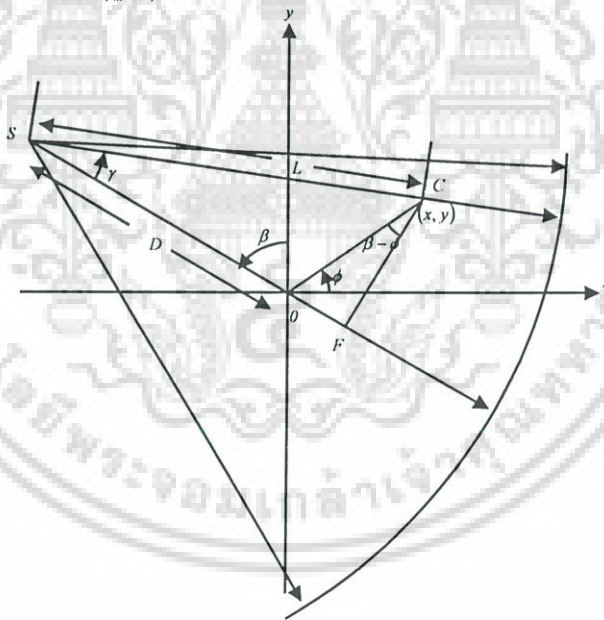
$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (4.4)$$

สมการที่ 4.3 เขียนให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้เป็น

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{t_m} \int_{-\gamma}^{2\pi - \gamma} p_o(t) h(r \cos(\theta - \phi) - t) dt d\theta \quad (4.5)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.1) จะได้

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{2\pi - \gamma} \int_{-\sin^{-1}(t_m/D)}^{\sin^{-1}(t_m/D)} p_{\beta+\gamma} (D \sin \gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (4.6)$$



รูปที่ 4.3 ข้อมูลโปรเจกชันเมื่อพิจารณาทางเดินแสงแบบพัตที่มีระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน (equally space collinear detectors)

โดยที่ $dt d\theta = D \cos \gamma d\gamma d\beta$ ช่วง $-\gamma$ ถึง $2\pi - \gamma$ จะครอบคลุมมุมการโปรเจกชัน 360 องศา และ β เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบอาจแทนได้ด้วย 0 ถึง 2π ส่วน $\sin^{-1}(t_m/D)$ เป็นขอบเขตของเส้นแสงที่ครอบคลุมวัตถุจากรูปที่ 4.2 คือ \overline{SE} ดังนั้นอาจเขียนขอบเขตได้ใหม่ด้วย γ_m และ $-\gamma_m$

ตามลำดับ สำหรับการอธิบายฟังก์ชัน $p_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma)$ ให้พิจารณาเส้นแวง \overline{SA} ในทอมการโปรเจ็คชันแบบขนาน $p_\theta(t)$ ดังนั้นโปรเจ็คชันแบบพัด $R_\beta(\gamma)$ เขียนสมการที่ 4.6 ใหม่ได้คือ

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (4.7)$$

พารามิเตอร์ในฟังก์ชัน h เขียนได้เป็น

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = r \cos(\beta - \phi) \cos \gamma - (r \sin(\beta - \phi) + D) \sin \gamma \quad (4.8)$$

L คือระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสง S ถึง พิกัด (x, y) หรือ (r, ϕ) ในระบบพิกัดทรงกลมเช่น จุด C ในรูป 4.3 ซึ่ง L เป็นฟังก์ชันของ 3 ตัวแปรคือ r, ϕ, β และ γ' เป็นมุมของเส้นแวงที่ผ่านพิกัด (r, ϕ) ซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้คือ

$$\begin{aligned} L \cos \gamma' &= D + r \sin(\beta - \phi) \\ L \sin \gamma' &= r \cos(\beta - \phi) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$L(r, \phi, \beta) = \sqrt{[D + r \sin(\beta - \phi)]^2 + [r \cos(\beta - \phi)]^2} \quad (4.10)$$

และ

$$r' = \tan^{-1} \left[\frac{r \cos(\beta - \phi)}{D + r \sin(\beta - \phi)} \right] \quad (4.11)$$

นำสมการ (4.9) แทนใน (4.8) ได้

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = L \sin(\gamma' - \gamma) \quad (4.12)$$

และนำไปแทนใน (4.7) จะได้

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(L \sin(\gamma' - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (4.13)$$

สำหรับฟังก์ชัน h เป็นทอมของการฟิลเตอร์ ซึ่ง $h(t)$ เป็นการแปลงกลับฟูเรียร์ของ $|\omega|$ ในโดเมนของความถี่

$$h(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \quad (4.14)$$

เพราะฉะนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$h(L \sin \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega L \sin \gamma} d\omega \quad (4.15)$$

กำหนด ω' ให้เป็น

$$\omega' = \frac{\omega L \sin \gamma}{\gamma} \quad (4.16)$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} h(L \sin \gamma) &= \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega' \gamma} d\omega \\ &= \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 h(\gamma) \end{aligned} \quad (4.17)$$

สมการที่ 4.13 เขียนได้เป็น

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) g(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (4.18)$$

โดย

$$g(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 h(\gamma) \quad (4.19)$$

ดังนั้นสมการการสร้างภาพตัดขวางวิธีฟิลเตอร์เบ็ค โปรเจกชันทางเดินแสงแบบพัดโดยพิจารณาумระหว่างเส้นแสงเท่านั้น เขียนสมการที่ (4.18) ได้เป็น

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} Q_\beta(\gamma') d\beta \quad (4.18)$$

โดยที่

$$Q_\beta(\gamma) = R'_\beta(\gamma') * g(\gamma) \quad (4.19)$$

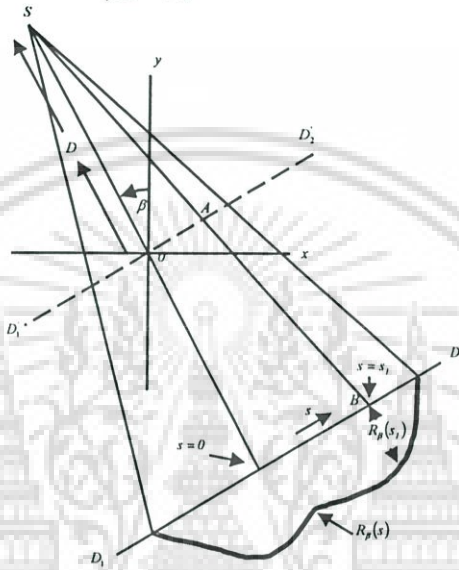
$$R'_\beta(\gamma') = R_\beta(\gamma) \cdot D \cdot \cos \gamma \quad (4.20)$$

4.2.2 ระยะระหว่างเส้นแสงเท่ากัน (equally space collinear detectors)

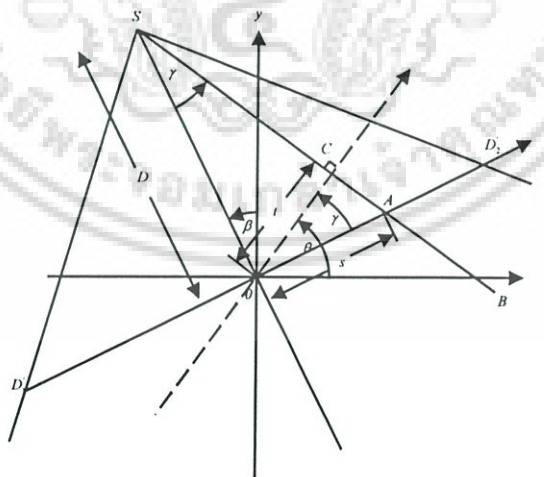
กำหนดให้ $R_\beta(s)$ เป็นโปรเจกชันแบบพัด (fan-beam projection) โดยที่มุมภายในระหว่างเส้นแสงห่างเท่าๆกัน จากรูปที่ 4.4 ให้ $\overline{D_1 D_2}$ เป็นแกนดีเทกเตอร์เสมือนตัดผ่านจุดหมุนหรือจุดกำเนิด ถ้าพิจารณาเส้นแสงจากแหล่งกำเนิดแสงไปยังฉากรับ \overline{SB} ซึ่งผ่านจุด A บนแกน $\overline{D_1 D_2}$

เช่นเดียวกับจุด B บน $\overline{D_1 D_2}$ จากรูปที่ 4.3 แกนเคทีเทคเตอร์สมมติ $\overline{D_1' D_2'}$ พิจารณาเส้นแสง \overline{SA} พบว่าค่า s มีระยะเท่ากับ \overline{OA} และถ้าสมมติการสร้างข้อมูลโปรเจกชันพิจารณาทางเดินแสงเป็นแบบขนานเส้นแสง \overline{SA} ก็คือเส้นแสงตำแหน่งที่ t ทำมุม θ หรือ $p_\theta(t)$ ดังนั้นเขียนสมการความสัมพันธ์ระหว่าง β กับ t สำหรับการพิจารณาทางเดินแสงแบบขนาน (parallel-beam projection) ดังสมการที่ (4.21)

$$\begin{aligned} t &= s \cos \gamma & \theta &= \beta + \gamma \\ t &= \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} & \theta &= \beta + \tan^{-1} \frac{s}{D} \end{aligned} \quad (4.21)$$



รูปที่ 4.4 ข้อมูลโปรเจกชันเมื่อพิจารณาทางเดินแสงแบบพัดที่มีระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน (Equally space collinear detectors)



รูปที่ 4.5 เรขาคณิตของทางเดินแสงแบบพัดที่พิจารณาระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่มุม AOC เท่ากันกับมุม OSC และ D คือระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสงที่จุด S ถึงจุดกำเนิด O จากสมการโปรเจกชันแบบขนานเขียนสมการการสร้างภาพตัดขวางแบบฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันได้คือ

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-t_m}^{t_m} p_\beta(t) h(r \cos(\theta - \phi) - t) dt d\theta \quad (4.22)$$

เมื่อ $f(r, \phi)$ คือภาพที่สร้างได้ในระบบพิกัดทรงกลม (polar coordinates) ให้แทนความสัมพันธ์สมการ (4.21) ในสมการ (4.22) จะได้

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_{-\tan^{-1}(s_m/D)}^{2\pi - \tan^{-1}(s_m/D)} \int_{-s_m}^{s_m} p_{\beta+\gamma} \left(\frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \cdot h \left(r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \left(\frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (4.23)$$

โดยที่

$$dt d\theta = \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (4.24)$$

จากสมการที่ 4.23 s_m คือค่าที่มากที่สุดของ s ของแต่ละโปรเจกชันและเท่ากับ t_m ของโปรเจกชันแบบขนาน $-\tan^{-1}(s_m/D)$ และ $2\pi - \tan^{-1}(s_m/D)$ เป็นมุมอยู่ในช่วง 0 ถึง 360 องศา เขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลโปรเจกชันแบบตัดกับแบบขนานได้เป็น

$$R_\beta(s) = p_{\beta+\gamma} \left(\frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \quad (4.25)$$

แทน $R_\beta(s)$ โปรเจกชันแบบตัดในสมการ (4.23) เขียนสมการได้เป็น

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_{-\tan^{-1}(s_m/D)}^{2\pi - \tan^{-1}(s_m/D)} \int_{-s_m}^{s_m} R_\beta(s) \cdot h \left(r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \left(\frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (4.26)$$

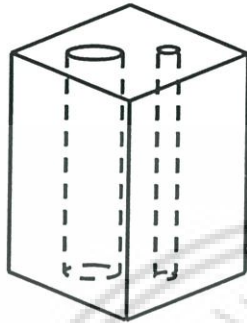
เทอมของฟิลเตอร์ h เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \left(\frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \\ = r \cos(\beta - \phi) \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} - (D + r \sin(\beta - \phi)) \frac{s}{\sqrt{D^2 + s^2}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

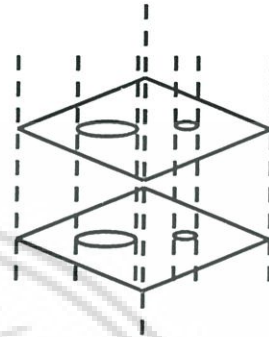
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 การสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย (Cone-beam reconstruction)

การสร้างภาพจากวัตถุที่เป็น 3 มิติจากวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยพิจารณาทางเดินแสงแบบขนาน (parallel-beam reconstruction) และแบบพัด (fan-beam reconstruction) นั้นสามารถทำได้ โดยการสร้างภาพตัดขวางของวัตถุแบบ 3 มิติที่ละสไลด์หรือเป็นแบบ 2 มิติ แล้วภาพตัดขวางแต่ละสไลด์มารวมกันดังรูปที่ 4.6



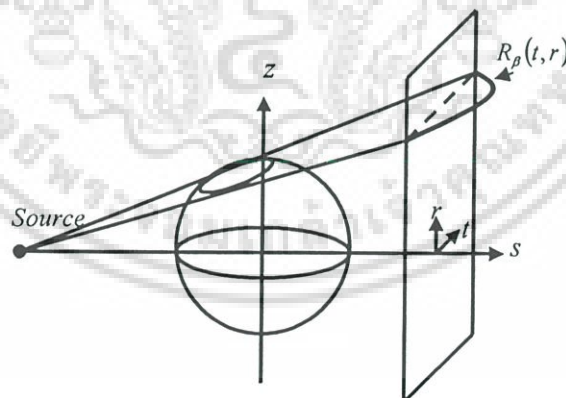
วัตถุแบบ 3 มิติ



ภาพตัดขวางที่สร้างได้ที่ละสไลด์

รูปที่ 4.6 การสร้างภาพตัดขวางจากวัตถุ 3 มิติ

ในการสร้างภาพตัดขวางที่พิจารณาทางเดินแสงแบบกรวย (cone-beam reconstruction) ใช้การพิจารณาเช่นเดียวกับกับทางเดินแสงแบบพัด (fan-beam) [3] ดังหัวข้อที่ 4.2.2 คือแทนทางเดินแสงแบบพัดที่ทำมุมเอียงกับระนาบ (x, y) ของภาพแต่ละสไลด์มีจุดหมุนอยู่ที่ตำแหน่งแหล่งกำเนิดแสง (point source) ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 การพิจารณาทางเดินแสงแบบกรวยในรูปแบบทางเดินแสงแบบพัด

ข้อดีของการฉายแสงแบบกรวยคือลดเวลาในการทำงานให้น้อยลงซึ่งมีผลให้ผู้ป่วยได้รับปริมาณรังสีเอ็กซน้อยลงด้วย เนื่องจากในแต่ละมุมจะฉายรังสีเอ็กซเพียงครั้งเดียวโดยใช้ตัวกำเนิด

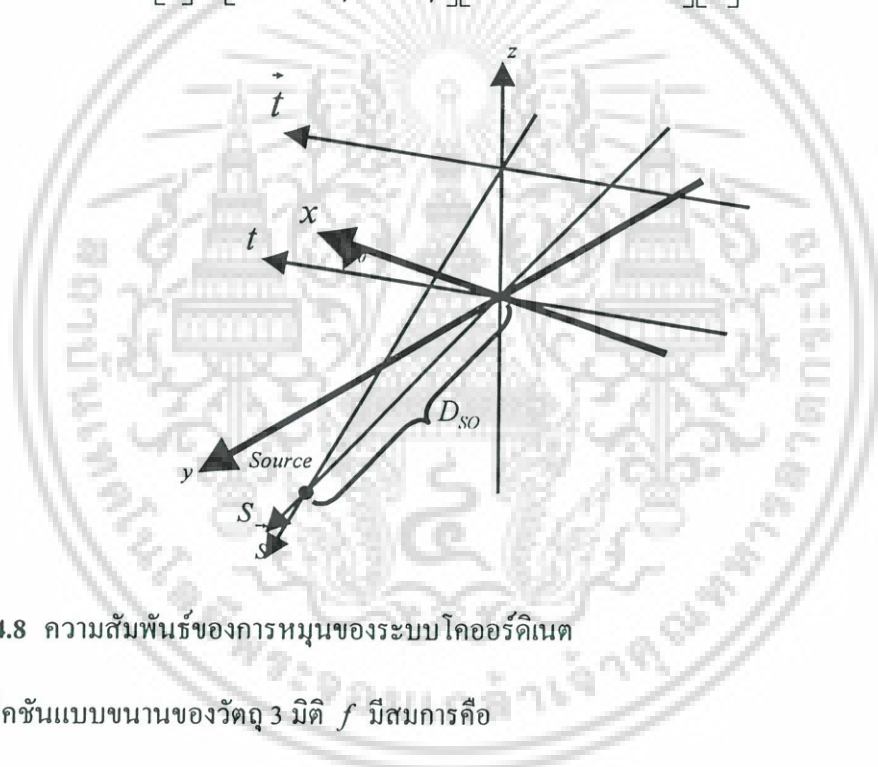
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แสงเพียงอันเดียว จากรูปที่ 4.7 $R_\beta(t,r)$ เป็นโปรเจกชันที่ได้จากหัววัดรังสีเอ็กซ์คู่กวางเรียงเป็นระนาบ 2 มิติ ซึ่งโปรเจกชัน $R_\beta(t,r)$ นี้เป็นฟังก์ชันของมุม β และตำแหน่งบนระนาบ 2 มิติ (t,r)

4.3.1 โปรเจกชันของวัตถุ 3 มิติ (Three-Dimension Projection)

โปรเจกชันของวัตถุ 3 มิติประกอบด้วย 2 ส่วนคือโคออร์ดิเนตของทางเดินแสง (t,s,r) และโคออร์ดิเนตของวัตถุ (x,y,z) มีความสัมพันธ์กันจากการหมุนดังรูปที่ 4.8 (coordinate-rotation) ที่มี 2 การหมุนคือรอบแกน z ของลำดับมุมการฉายแสงเท่ากับ θ และที่จุดกำเนิดแสงรอบแกน t เป็นมุมเท่ากับ γ ซึ่งเขียนสมการความสัมพันธ์ในฟังก์ชันของเมตริก [3,14] คือ

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.28)$$



รูปที่ 4.8 ความสัมพันธ์ของการหมุนของระบบโคออร์ดิเนต

โปรเจกชันแบบขนานของวัตถุ 3 มิติ f มีสมการคือ

$$P_{\theta,\gamma}(t,r) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t,s,r) ds \quad (4.29)$$

จากสมการที่ (4.29) โปรเจกชันเป็นฟังก์ชัน 4 ตัวแปรคือ (t,θ) เป็นตัวแปรสำหรับระนาบขนาดและทิศทางของระบบพิกัด (x,y) และ (r,γ) สำหรับระบบพิกัด (s,z) แต่ในระบบทางเดินแสงแบบกรวย (cone-beam system) แหล่งกำเนิดแสงจะถูกหมุนด้วยมุมเท่ากับ β และผลรวมของแสงที่วัดได้แทนด้วย $R_\beta(p',s')$ โดยที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$p = \frac{p' D_{SO}}{D_{SO} + D_{DE}} \quad \zeta = \frac{\zeta' D_{SO}}{D_{SO} + D_{DE}} \quad (4.30)$$

เมื่อ D_{SO} คือระยะห่างระหว่างจุดหมุน (Center of rotation) ถึงแหล่งกำเนิดแสง และ D_{DE} คือระยะห่างระหว่างจุดหมุนถึงฉากรับซึ่งเขียนความสัมพันธ์ของตัวแปรในระบบทางเดินแสงทั้งสองได้คือ

$$t = p \frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + \zeta^2}} \quad (4.31)$$

$$\theta = \beta + \tan^{-1} \left[\frac{p}{D_{SO}} \right] \quad (4.32)$$

$$r = \zeta \frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + \zeta^2}} \quad (4.33)$$

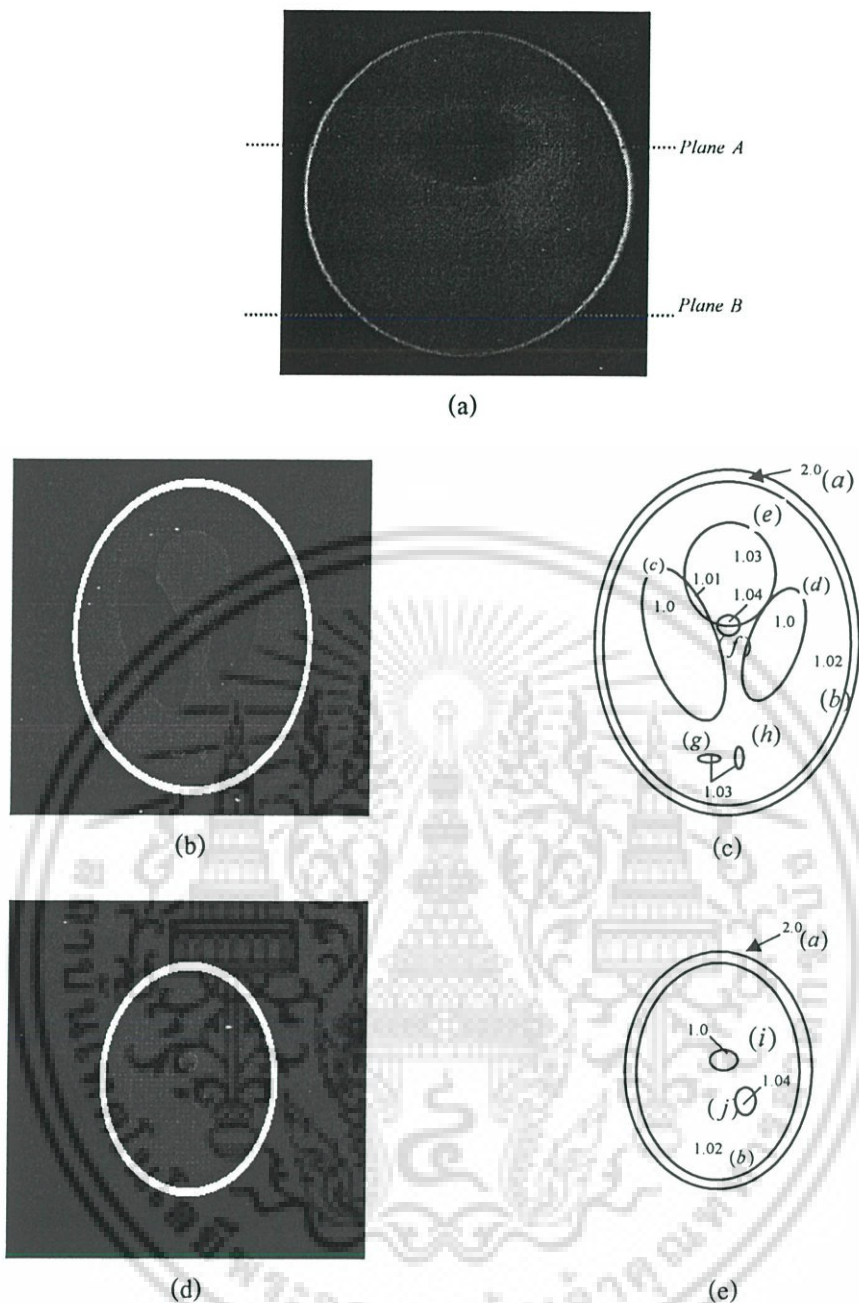
โดยที่ r และ ζ ทำหน้าที่ระบุตำแหน่งของระนาบแสงแบบพัด (Tilted fan) ที่ผ่านวัตถุ

ในการทดสอบกระบวนการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวยนี้จะใช้แบบจำลอง Shepp and Logan head phantom แบบ 3 มิติที่ประกอบกันจากวัตถุรูปทรงรี ตารางที่ 4.1 แสดงขนาดและตำแหน่งของรูปทรงรีต่างๆดังรูปที่ 4.9

ตารางที่ 4.1 พารามิเตอร์รูปทรงเรขาคณิต สำหรับสร้าง Shepp-Logan head phantom แบบ 3 มิติ

Ellipsoid	Coordinates of the	Axis Lengths	Rotation Angle	Gray Level
	Center (x,y,z)	(A, B, C)	β (deg)	ρ
a	(0, 0, 0)	(0.69, 0.92, 0.9)	0	2.0
b	(0, 0, 0)	(0.6624, 0.874, 0.88)	0	-0.98
c	(-0.22, 0, -0.25)	(0.41, 0.16, 0.21)	108	-0.02
d	(0.22, 0, -0.25)	(0.31, 0.11, 0.22)	72	-0.02
e	(0, 0.1, -0.25)	(0.046, 0.046, 0.046)	0	0.02
f	(0, 0.1, -0.25)	(0.046, 0.046, 0.046)	0	0.02
g	(-0.8, -0.65, -0.25)	(0.046, 0.023, 0.02)	0	0.01
h	(0.06, -0.065, -0.25)	(0.046, 0.023, 0.02)	90	0.01
i	(0.06, -0.105, 0.625)	(0.56, 0.04, 0.1)	90	0.02
j	(0, 0.1, -0.625)	(0.056, 0.056, 0.1)	0	-0.02

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.9 Shepp and Logan head phantom แบบ 3 มิติสำหรับการทดสอบกระบวนการสร้างภาพแบบกรวย

- (a) Shepp and Logan head phantom แบบ 3 มิติ
- (b) ภาพตัดขวาง A สไลด์ที่ 98
- (c) รูปเรขาคณิตในภาพตัดขวาง A สไลด์ที่ 98
- (d) ภาพตัดขวาง B สไลด์ที่ 208
- (e) รูปเรขาคณิตในภาพตัดขวาง B สไลด์ที่ 208

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.2 FeldKamp หรือ ฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันแบบ 3 มิติ (3D Filtered Backprojection)

การสร้างภาพกลับวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันแบบ 3 มิติ [3, 14, 15] นั้นมีวิธีการเช่นเดียวกันกับวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันแบบขนาน แต่ต่างกันที่เส้นทางเดินของแสง ซึ่งสามารถพิจารณาทางเดินของแสงให้เป็นรูปพัด (Fan-beam) ในระนาบ 2 มิติ แล้วนำระนาบดังกล่าวหมุนรอบแกน p โดยจุดหมุนอยู่ที่แหล่งกำเนิดแสง

เริ่มแรกให้พิจารณาสมการการสร้างภาพกลับแบบพัด (Fan-beam reconstruction) ในระบบพิกัด (r, ϕ) คือ

$$g(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_\beta(p) h(p'-p) \frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + p^2}} dp d\beta \quad (4.34)$$

$$p' = \frac{D_{SO} r \cos(\beta - \phi)}{D_{SO} + r \sin(\beta - \phi)} \quad h(p) = \int_{-w}^w |\omega| \cdot e^{j\omega p} d\omega \quad (4.35)$$

$$U(r, \phi, \beta) = \frac{D_{SO} + r \sin(\beta - \phi)}{D_{SO}} \quad (4.36)$$

เขียนสมการความสัมพันธ์ (r, ϕ) ให้อยู่ในระบบโคออร์ดิเนตการหมุน (t, s) ได้คือ

$$t = x \cos \beta + y \sin \beta \quad s = y \cos \beta - x \sin \beta \quad (4.37)$$

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (4.38)$$

$$p' = \frac{D_{SO} \cdot t}{D_{SO} - s} \quad U(x, y, z) = \frac{D_{SO} - s}{D_{SO}} \quad (4.39)$$

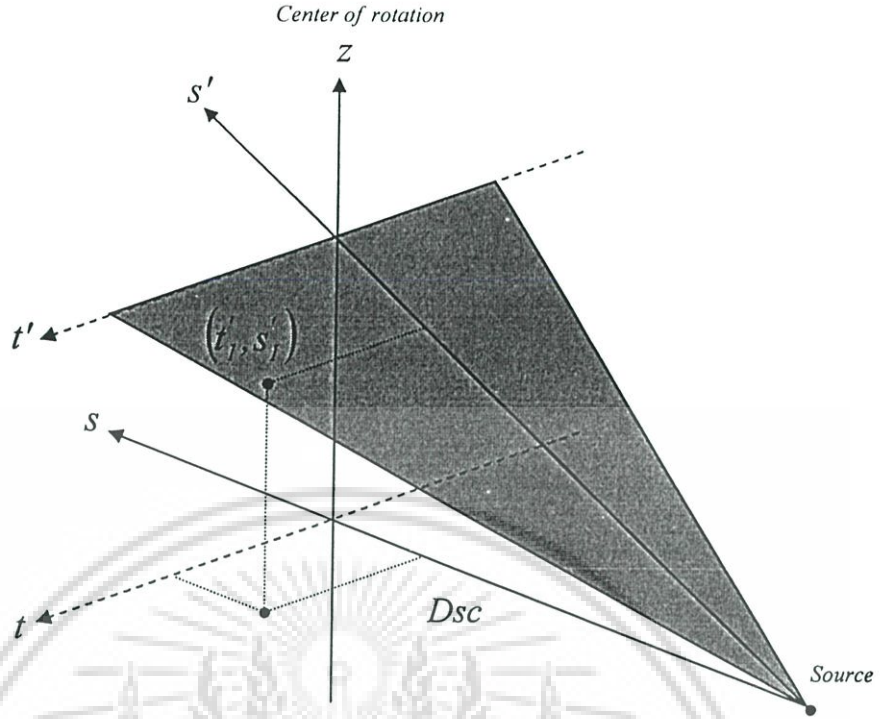
สมการสร้างภาพแบบพัดในระบบโคออร์ดิเนต (t, s) เขียนได้เป็น

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{SO}^2}{(D_{SO} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_\beta(p) h\left(\frac{D_{SO} \cdot t}{D_{SO} - s} - p\right) \frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + p^2}} dp d\beta \quad (4.40)$$

เมื่อแสงเปลี่ยนระนาบไปดังรูปที่ 4.10 ทำให้ไม่สามารถใช้สมการที่ (4.40) ได้เนื่องจากระยะทางของแสงเปลี่ยนไป เขียนสมการสร้างภาพแบบพัดสำหรับ (t', s') คือ

$$g(t', s') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{SO}'^2}{(D_{SO}' - s')^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta'}(p, \zeta) h\left(\frac{D_{SO}' \cdot t'}{D_{SO}' - s'} - p\right) \frac{D_{SO}'}{\sqrt{D_{SO}'^2 + p^2}} dp d\beta' \quad (4.41)$$

โดยที่ ζ คือความสูงของแสงแบบพัดบนแกนหมุน และ $d\beta'$ หาได้จาก

รูปที่ 4.10 ภาพแสดงระบบพิกัด (t,s)

$$D_{SO} d\beta = D'_{SO} d\beta' \quad d\beta' = \frac{D_{SO} d\beta}{D'_{SO}} \quad (4.42)$$

$$t' = t \quad s' = D'_{SO} \frac{s}{D_{SO}} \quad \zeta = D_{SO} \frac{z}{D_{SO} - s} \quad (4.43)$$

$$D'_{SO} = \sqrt{D_{SO}^2 + \zeta^2} \quad (4.44)$$

แทนค่า D'_{SO} ด้วย D_{SO} และ β' ด้วย β เขียนสมการ (4.41) สำหรับทุกระนาบแสงได้เป็น

$$g(t,s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{SO}^2}{(D_{SO} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta'}(p,\zeta) h\left(\frac{D_{SO} \cdot t}{D_{SO} - s} - p\right) \frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + \zeta^2 + p^2}} dp d\beta \quad (4.45)$$

สรุปขั้นตอนของฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันแบบ 3 มิติมีดังต่อไปนี้

1. นำโปรเจกชัน $R_{\beta}(p,\zeta)$ คูณด้วยฟังก์ชัน $\frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + \zeta^2 + p^2}}$ เพื่อหาค่า $R'_{\beta}(p,\zeta)$ คือ

$$R'_{\beta}(p,\zeta) = R_{\beta}(p,\zeta) \frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + \zeta^2 + p^2}} \quad (4.46)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. คอนโวลูชันโปรเจกชัน $R'_\rho(p, \varsigma)$ กับ $\frac{1}{2}h(p)$ ได้ค่า $Q_\rho(p, \varsigma)$ คือ

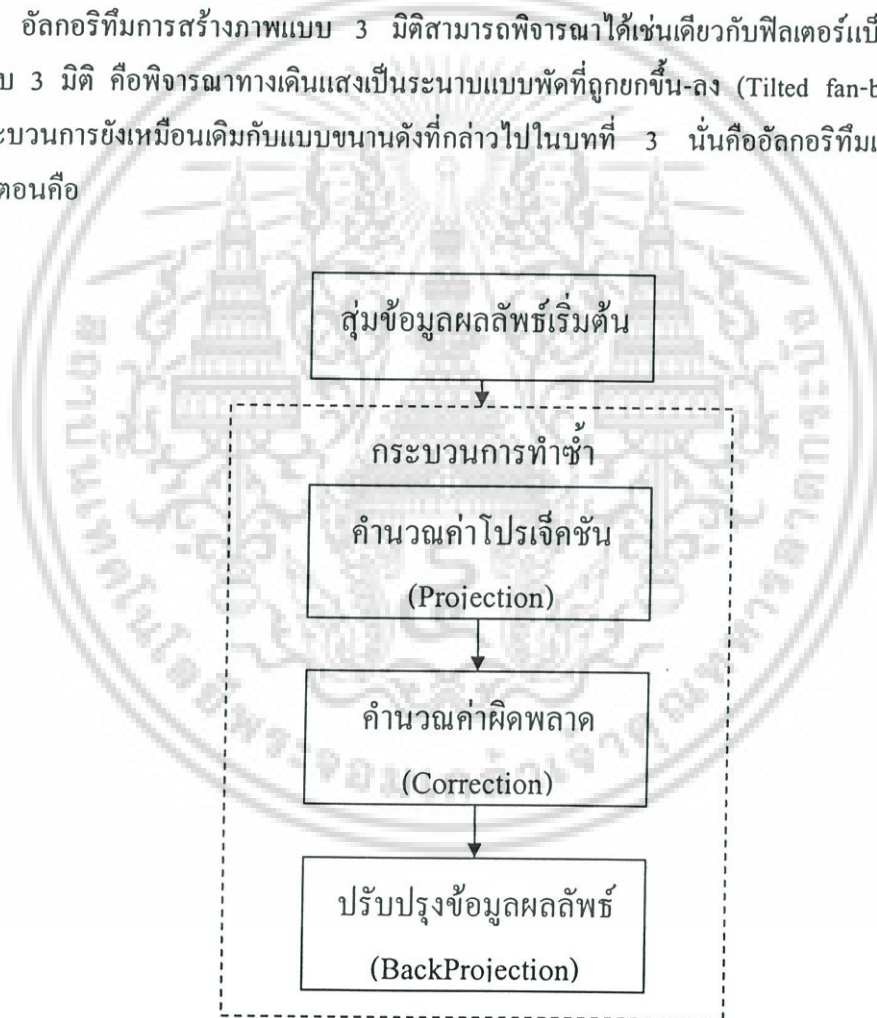
$$Q_\rho(p, \varsigma) = R'_\rho(p, \varsigma) * \frac{1}{2}h(p) \quad (4.47)$$

3. แเบ็คโปรเจกชันด้วยค่าแฟกเตอร์น้ำหนักตามระยะทางของเส้นแสงสำหรับระบบโคออร์ดิเนตแบบ 3 มิติ

$$g(t, s, z) = \int_0^{2\pi} \frac{D_{SO}^2}{(D_{SO} - s)^2} Q_\rho \left(\frac{D_{SO} \cdot t}{D_{SO} - s}, \frac{D_{SO} \cdot z}{D_{SO} - s} \right) d\beta \quad (4.48)$$

4.3.3 ART และ SART แบบ 3 มิติ (3D Algebraic Reconstruction Algorithm)

อัลกอริทึมการสร้างภาพแบบ 3 มิติสามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกับฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันแบบ 3 มิติ คือพิจารณาทางเดินแสงเป็นระนาบแบบพัดที่ถูกยกขึ้น-ลง (Tilted fan-beam) โดยที่กระบวนการยังเหมือนเดิมกับแบบขนานดังที่กล่าวไปในบทที่ 3 นั่นคืออัลกอริทึมเชิงพีชคณิตมีขั้นตอนคือ



รูปที่ 4.11 บล็อกไดอะแกรมของอัลกอริทึมเชิงพีชคณิต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หลักการทํางานของอัลกอริทึมเชิงพีชคณิต แบบ 3 มิติจะเหมือนกับแบบ 2 มิติ แต่ต่างกันที่เราจะพิจารณาข้อมูลภาพเป็นปริมาตรหรือภาพหลายๆสไลด์แทนเขียนสมการได้คือ

$$v_j^{(k)} = v_j^{(k-1)} + \frac{\left(p_i - \sum_{h=1}^N v_n^{(k-1)} w_{in} \right)}{\sum_{n=1}^N w_{in}^2} w_{ij} \quad (4.49)$$

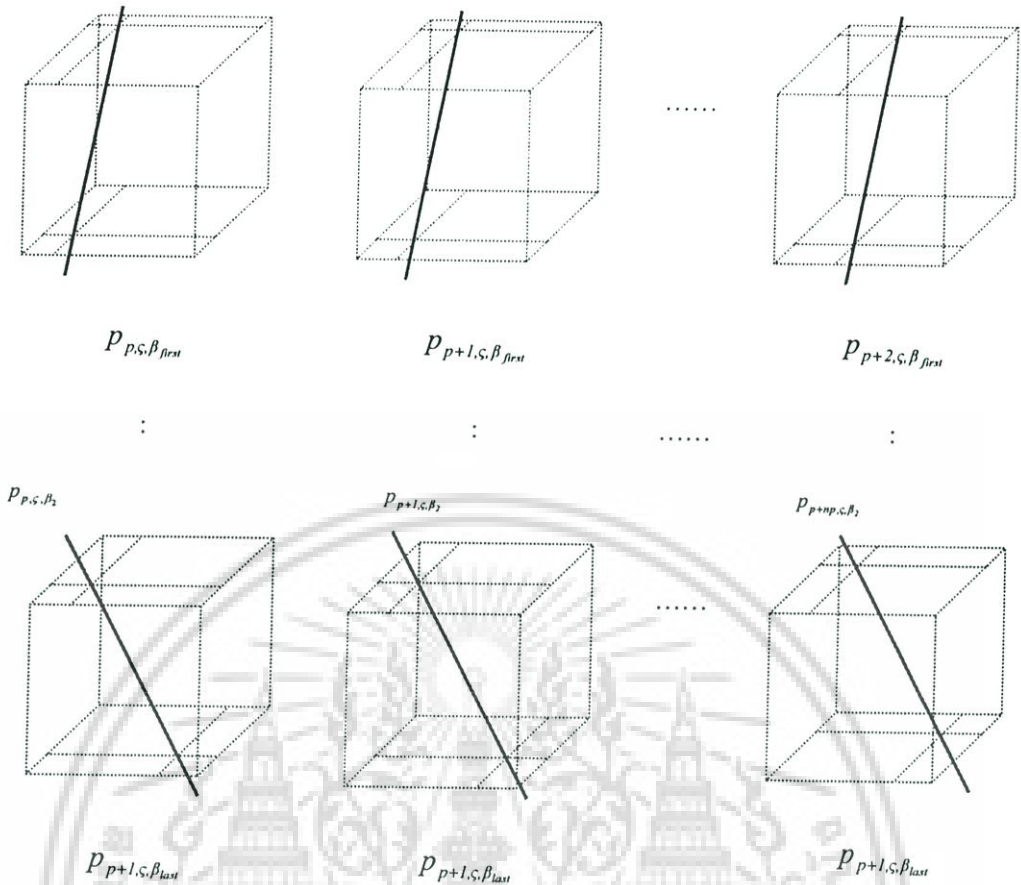
หรือเขียนให้อยู่ในระบบพิกัด (x, y, z) และ (p, ζ, β) คือ

$$v_{x,y,z}^{(k)} = v_{x,y,z}^{(k-1)} + \lambda \frac{\left(p_{p,\zeta,\beta} - \sum_{c=1}^{nz} \sum_{b=1}^{ny} \sum_{a=1}^{nx} v_{a,b,c}^{(k-1)} w_{p,\zeta,\beta,a,b,c} \right)}{\sum_{c=1}^{nz} \sum_{b=1}^{ny} \sum_{a=1}^{nx} w_{p,\zeta,\beta,a,b,c}^2} w_{p,\zeta,\beta,x,y,z} \quad (4.50)$$

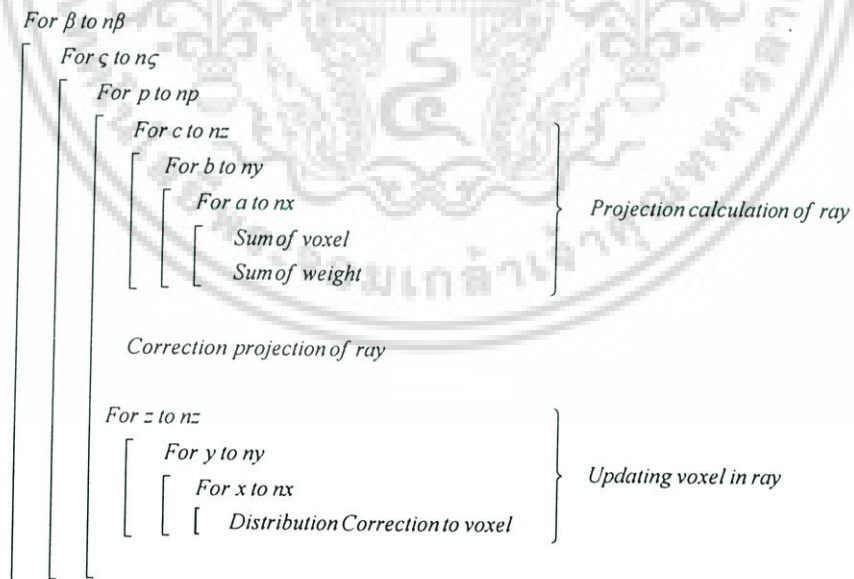
$$v_{x,y,z}^k = v_{x,y,z}^{k-1} + \lambda \frac{\sum_{p,\zeta,\beta \in P\varphi} \left(\frac{p_{p,\zeta,\beta} - \sum_{c=1}^{nz} \sum_{b=1}^{ny} \sum_{a=1}^{nx} v_{a,b,c}^{(k-1)} w_{p,\zeta,\beta,a,b,c}}{\sum_{c=1}^{nz} \sum_{b=1}^{ny} \sum_{a=1}^{nx} w_{p,\zeta,\beta,a,b,c}^2} \right)}{\sum_{p,\zeta,\beta \in P\varphi} w_{p,\zeta,\beta,x,y,z}} w_{p,\zeta,\beta,x,y,z} \quad (4.51)$$

จากสมการที่ (4.50) และ (4.51) เป็นสมการการสร้างภาพกลับด้วยวิธีเชิงพีชคณิตแบบ 3 มิติที่อธิบายด้วยระบบโคออร์ดิเนต $(p, \zeta, \beta, x, y, z)$ พบว่าฟังก์ชัน $w_{p,\zeta,\beta,x,y,z}$ มีขนาดใหญ่มาก ตัวอย่างเช่นถ้าต้องการสร้างภาพขนาด 64×64 พิกเซลจำนวน 64 สไลด์หรือ $64 \times 64 \times 64$ วอกเซล จากข้อมูลโปรเจกชันขนาด 64×64 จำนวน 24 มุม ดังนั้นขนาดของ $w_{p,\zeta,\beta,x,y,z}$ คือ $64 \times 64 \times 64 \times 64 \times 64 \times 24 = 25,769,803,776$ หรือประมาณ 25.769 G-byte เนื่องจากต้องเก็บค่าแฟกเตอร์น้ำหนักของแต่ละเส้นแสงเป็นปริมาตรดังรูปที่ 4.12 และขั้นตอนการคำนวณแฟกเตอร์น้ำหนักจะยิ่งเพิ่มขึ้นเป็นเท่าตัวเมื่อใช้การคำนวณแบบแบ่งเซลล์ย่อยดังที่กล่าวไปในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.52 เช่นถ้าแบ่งเซลล์ย่อยเป็น 100 เซลล์ย่อย ดังนั้นขั้นตอนการคำนวณจะเท่ากับ $25,769,803,776 \times 100$ ดังนั้นจึงเป็นการยากเมื่อนำไปใช้งานจริงสำหรับข้อมูลที่มีขนาดใหญ่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.12 ภาพแสดงเส้นทางเดินแสงแบบต่างๆ ในข้อมูลเชิงปริมาตร



รูปที่ 4.13 โปรแกรมการทำงานของ ART แบบเดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาทางเดินแสงดังรูปที่ 4.15 จะเห็นบริเวณที่แสงผ่านในข้อมูลปริมาตรนั้นมีอยู่เพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นการเก็บข้อมูลค่าแฟกเตอร์น้ำหนักจึงไม่จำเป็นต้องเก็บทุกตำแหน่ง ซึ่งอาจพิจารณาในรูปของพิกัดแทนได้เพื่อลดจำนวนการทำงานและพื้นที่ข้อมูลที่จำเป็นให้น้อยลง

$$\begin{aligned} O(ART_{org}) &= O(nr \cdot np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{Projection} \\ &\quad + O(np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{Correction} \\ &\quad + O(nr \cdot np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{BackProjection} \end{aligned} \quad (4.52)$$

โดยที่ m คือค่าดัชนีตำแหน่งของค่าแฟกเตอร์น้ำหนักชั้นตอนคำนวณค่าโปรเจกชันช่วง $0 < m < nm$ เมื่อ nm เป็นจำนวนค่าดัชนีของเส้นแสง $p_{p,\zeta,\beta}$ และ $nm \ll nx.ny.nz$
 r คือค่าดัชนีตำแหน่งของค่าแฟกเตอร์น้ำหนักชั้นตอนแบ็คโปรเจกชันช่วง $0 < r < nr$
 เมื่อ nr เป็นจำนวนค่าดัชนีของเส้นแสง $p_{p,\zeta,\beta}$ และ $nr \ll nx.ny.nz$

$$v_{x(r),y(r),z(r)}^{(k)} = v_{x(r),y(r),z(r)}^{(k-1)} + \lambda \frac{\left(P_{p,\zeta,\beta} - \sum_{m=1}^{nm} v_{a(m),b(m),c(m)}^{(k-1)} W_{p,\zeta,\beta,m} \right)}{\sum_{m=1}^{nm} W_{p,\zeta,\beta,m}^2} W_{p,\zeta,\beta,r} \quad (4.53)$$

$$v_{x(r),y(r),z(r)}^k = v_{x(r),y(r),z(r)}^{k-1} + \lambda \frac{\sum_{p_{p,\zeta,\beta} \in P\varphi} \left(\frac{P_{p,\zeta,\beta} - \sum_{m=1}^{nm} v_{a(m),b(m),c(m)}^{(k-1)} W_{p,\zeta,\beta,m}}{\sum_{m=1}^{nm} W_{p,\zeta,\beta,m}} \right)}{\sum_{p_{p,\zeta,\beta} \in P\varphi} W_{p,\zeta,\beta,r}} W_{p,\zeta,\beta,r} \quad (4.54)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

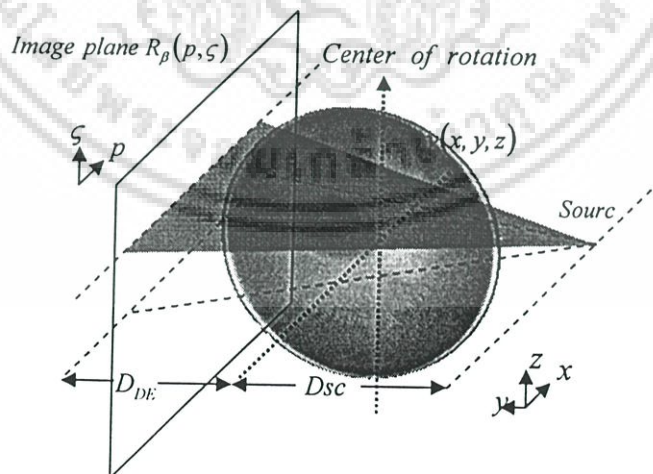
การทดลองและผลการทดลอง

5.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการทดลองซึ่งประกอบด้วยการสร้างภาพตัดขวางแบบขนานและแบบกรวย ด้วยวิธีแบ็คโปรเจกชัน วิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันและวิธีเชิงพีชคณิต(ART, SART) ซึ่งแบ่งการทดลองออกเป็น 2 ส่วน คือ การทดลองที่สร้างภาพตัดขวางจากแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์ และการทดลองที่สร้างภาพตัดขวางจากข้อมูลของภาพถ่ายเอ็กซเรย์จริง ในการทดลองนี้กระทำการบนเครื่องคอมพิวเตอร์ Intel® Pentium4 1.8 GHz หน่วยความ DDR-333 512 MB และใช้โปรแกรม Visual Studio .Net ภาษา C# ในการสร้างภาพกลับ

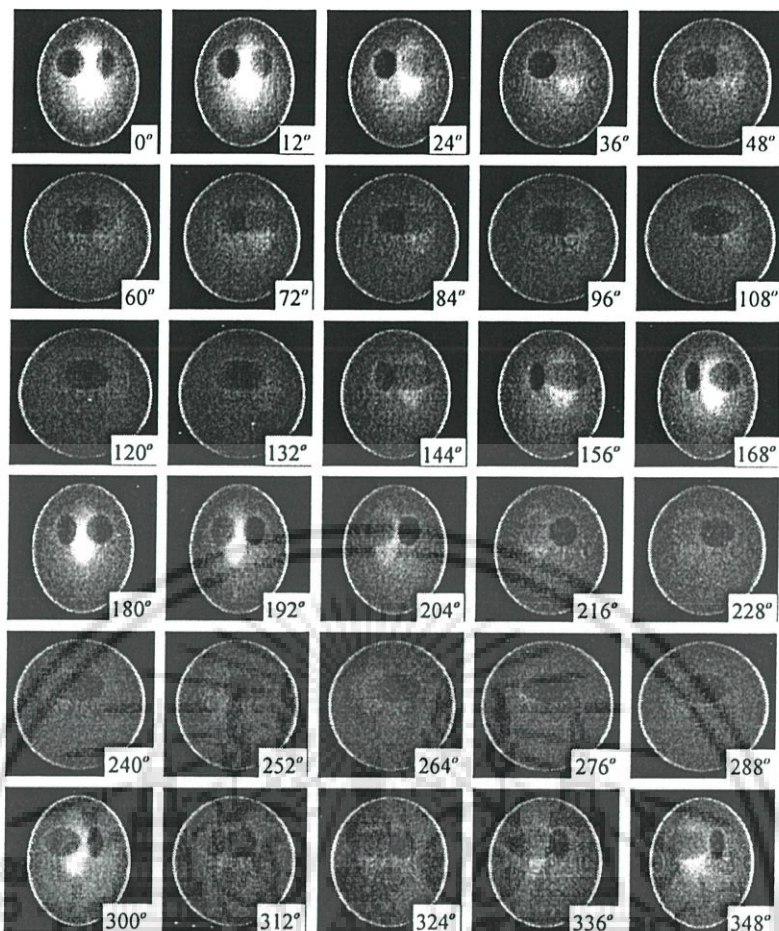
5.2 การทดลองสร้างภาพตัดขวางจากแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์

ในการทดลองนี้ได้เลือกที่จะทำการทดลองกับแบบจำลองของ Shepp and Logan Phantom ซึ่งเป็นแบบจำลองที่นิยมใช้ในการทดสอบอัลกอริทึมการสร้างภาพตัดขวางทางการแพทย์สามารถสร้างได้ในหัวข้อที่ 4.3.1 เพื่อทำการทดลองสร้างภาพตัดขวางสำหรับทางเดินแสงแบบขนาน (Parallel-beam reconstruction) และทางเดินแสงแบบกรวย (Cone-beam reconstruction) ด้วยวิธีแบ็คโปรเจกชัน วิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน และการใช้อัลกอริทึมแบบพีชคณิต (ART, SART) จากข้อมูลโปรเจกชันที่มีทางเดินแสงแบบกรวย (Cone-beam projection) ของแบบจำลอง Shepp and Logan head phantom ขนาด $256 \times 256 \times 256$ วอกเซล จำนวน 30, 60, 90 และ 120 โปรเจกชันสำหรับช่วงมุม 0 ถึง 360 องศา (full-scan) และมีระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสงถึงจุดหมุน (D_{SO}) เท่ากับ 900 หน่วย (1 หน่วยเท่ากับ 1 วอกเซล)

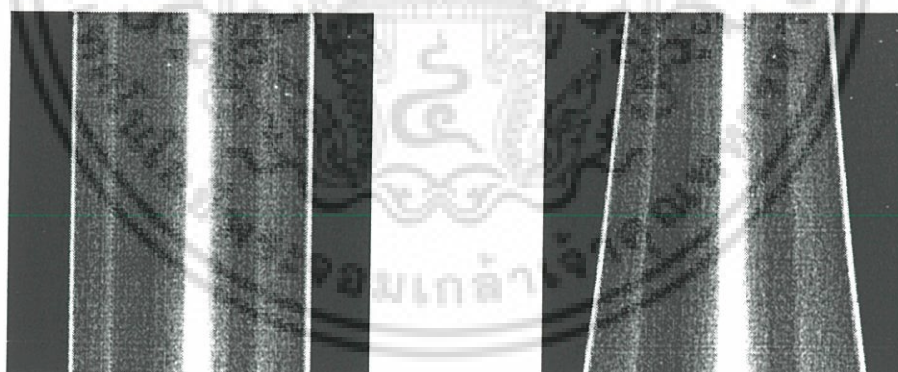


รูปที่ 5.1 การ โปรเจกชันของ Shepp and Logan โดยมีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.2 การ โปรเจกชันของ Shepp and Logan โดยมีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย



(a)

(b)

รูปที่ 5.3 แสดงภาพจากแบ็คโปรเจกชัน (a) แบบขนาน (b) แบบกรวย

สำหรับการประเมินสมรรถนะของกระบวนการการสร้างภาพตัดขวางทำได้โดยการหาค่าความคลาดเคลื่อนระดับเทาของภาพที่ถูกสร้างกลับเทียบกับภาพทดสอบ ทำได้ 2 วิธี [3] คือ

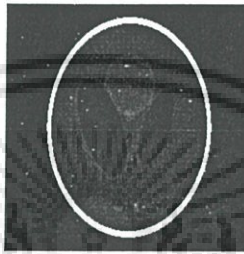
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. Qualitative evaluation เช่น การเปรียบเทียบด้วยตา (Visual comparison)
2. Quantitative evaluation เช่น การคำนวณค่าความผิดพลาดวิธี Mean-Square Error (MSE)

สมการหาค่าความผิดพลาดวิธี MSE คือ

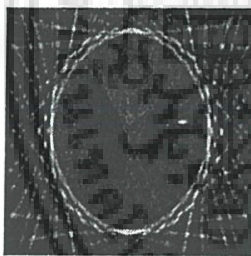
$$MSE(\%) = \frac{\iint [o(\vec{r}) - o'(\vec{r})]^2 d\vec{r}}{\iint [o(\vec{r})]^2 d\vec{r}} \times 100 \quad (5.1)$$

โดยที่ $o(\vec{r})$ เป็นภาพต้นฉบับ, $o'(\vec{r})$ เป็นภาพตัดขวางที่ถูกสร้างกลับ และ r เป็นขอบเขตที่สนใจ ซึ่งในการหาค่าความผิดพลาดในการทดลองการสร้างภาพตัดขวางจากแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์นี้เลือกใช้ภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 ดังรูปที่ 5.3

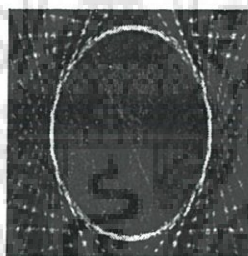


รูปที่ 5.4 ภาพ Shepp and Logan คั่นแบบขนาด 256x256 สไลด์ที่ 98

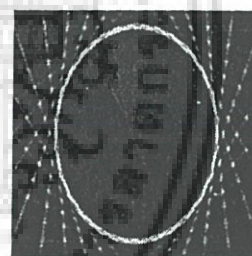
5.2.1 การทดลองสร้างภาพตัดขวางวิธีเฟลด์แคมป์



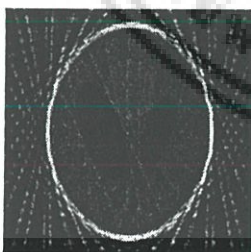
(a) Cone-beam $D_{so} = 300$



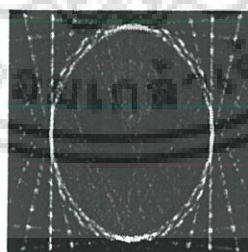
(b) Cone-beam $D_{so} = 500$



(c) Cone-beam $D_{so} = 900$



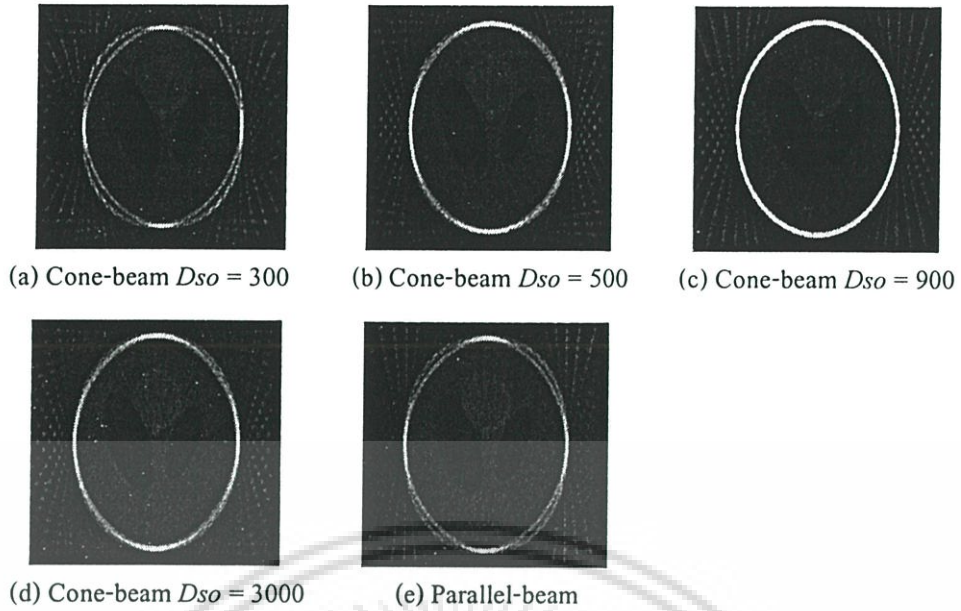
(d) Cone-beam $D_{so} = 3000$



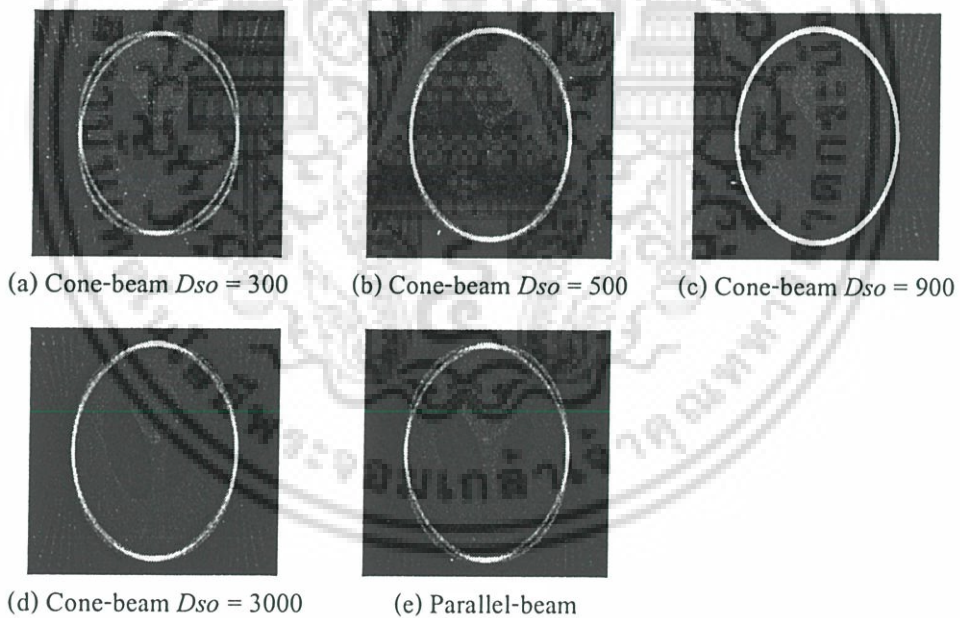
(e) Parallel-beam

รูปที่ 5.5 ภาพผลลัพธ์สไลด์ที่ 98 ขนาด 256x256 จากโปรเจกชันแบบกรวย D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 30 โปรเจกชันด้วยวิธีเฟลด์แคมป์ โดย (a), (b), (c) และ (d) เป็นผลลัพธ์แบบกรวย D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วยตามลำดับ (e) เป็นผลลัพธ์แบบขนาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

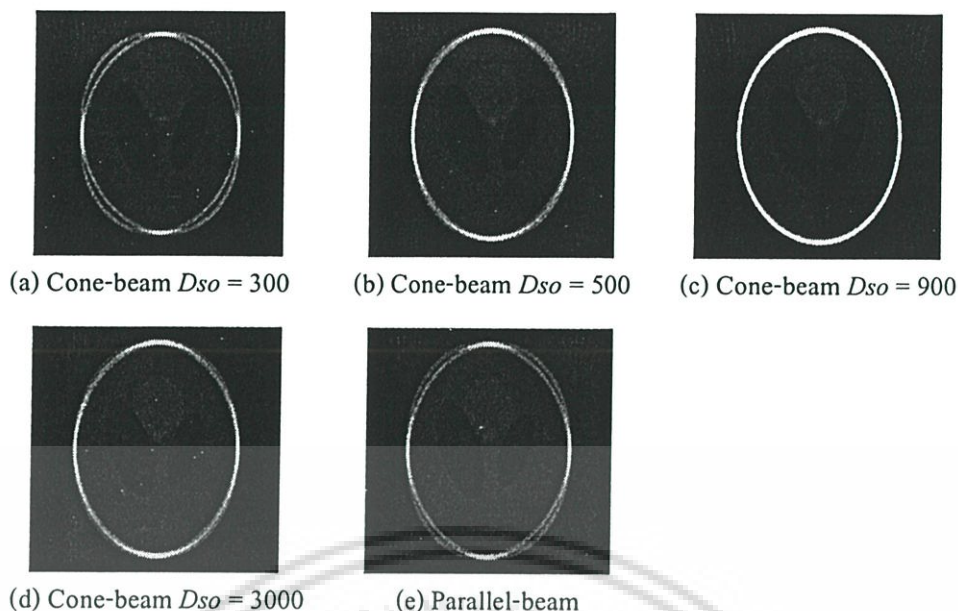


รูปที่ 5.6 ภาพผลลัพธ์สไลด์ที่ 98 ขนาด 256x256 จากโปรเจกชันแบบกรวย D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 60 โปรเจกชันด้วยวิธีเฟลด์แคมป์ โดย (a), (b), (c) และ (d) เป็นผลลัพธ์แบบกรวย D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วยตามลำดับ (e) เป็นผลลัพธ์แบบขนาน



รูปที่ 5.7 ภาพผลลัพธ์สไลด์ที่ 98 ขนาด 256x256 จากโปรเจกชันแบบกรวย D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 90 โปรเจกชันด้วยวิธีเฟลด์แคมป์ โดย (a), (b), (c) และ (d) เป็นผลลัพธ์แบบกรวย D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วยตามลำดับ (e) เป็นผลลัพธ์แบบขนาน

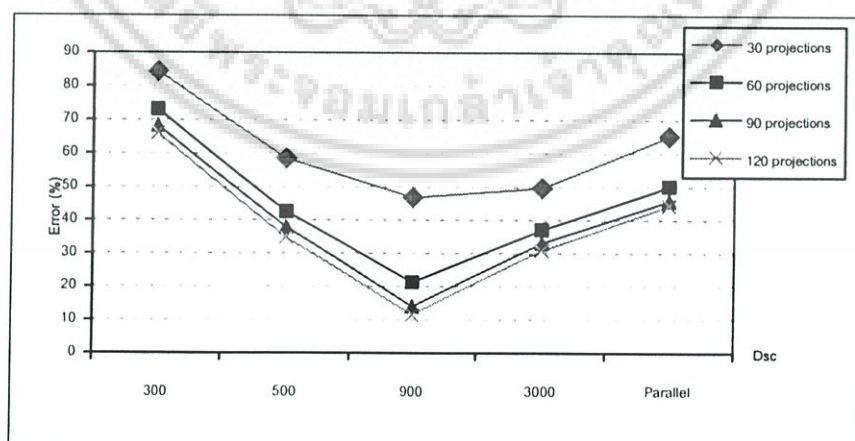
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.8 ภาพผลลัพธ์สไลด์ที่ 98 ขนาด 256x256 จากโปรเจกชันแบบกรวย D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 120 โปรเจกชันด้วยวิธีเฟลด์แคมป์ โดย (a), (b), (c) และ (d) เป็นผลลัพธ์แบบกรวย D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วยตามลำดับ (e) เป็นผลลัพธ์แบบขนาน

ตารางที่ 5.1 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธีเฟลด์แคมป์

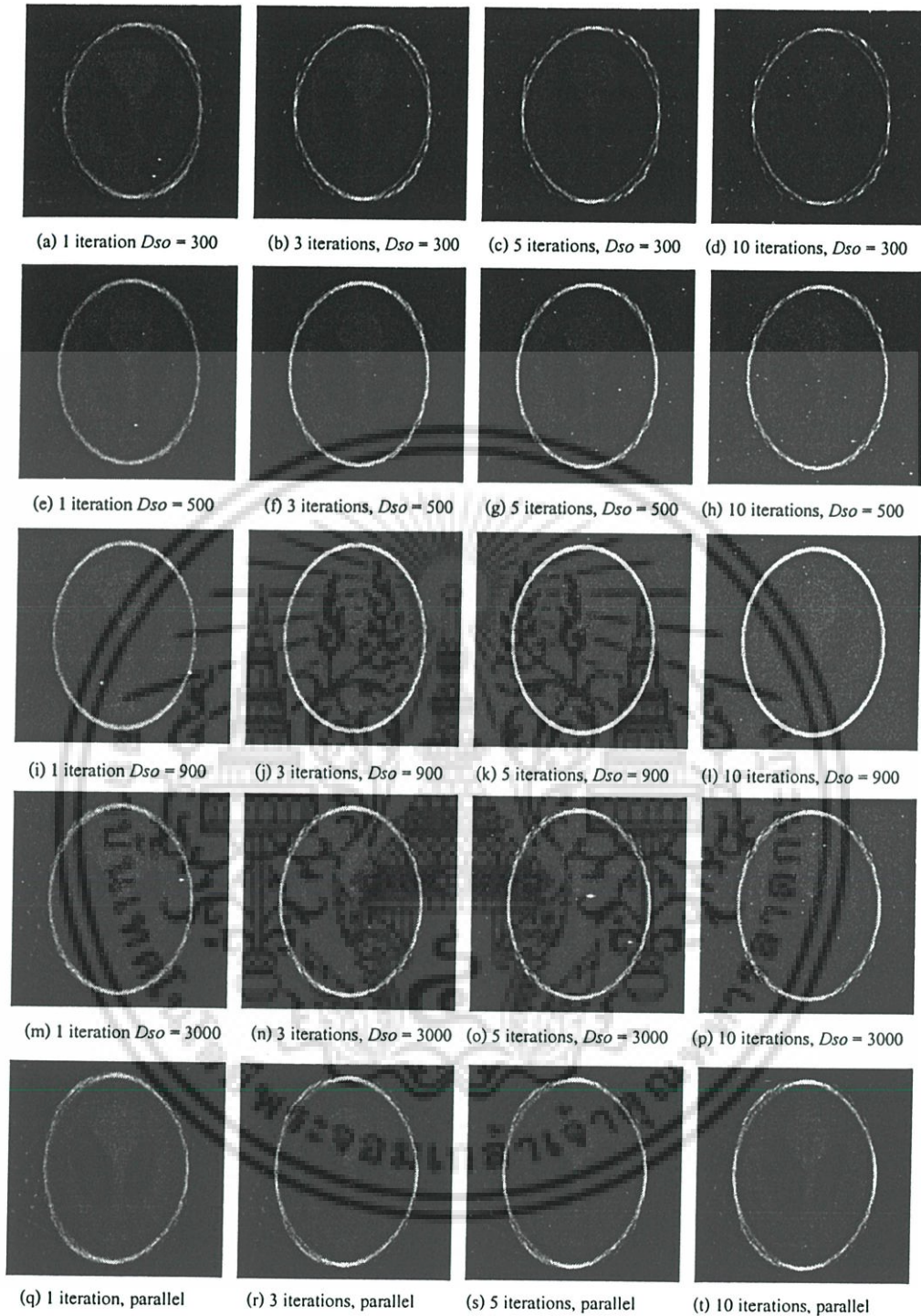
D_{SO}	300	500	900	3000	Parallel
โปรเจกชัน 30	84.38836	58.49142	46.96837	49.72268	65.19264
โปรเจกชัน 60	73.11704	42.58934	21.301	37.10065	50.21192
โปรเจกชัน 90	68.27777	37.9607	14.03987	33.18071	45.93002
โปรเจกชัน 120	66.13614	34.80005	11.46082	30.92357	44.44987



รูปที่ 5.9 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธีเฟลด์แคมป์

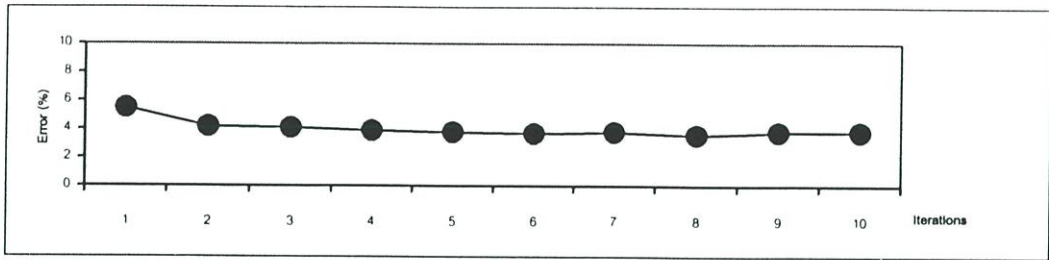
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2.2 การทดลองสร้างภาพตัดขวางวิธี ART Cone-beam

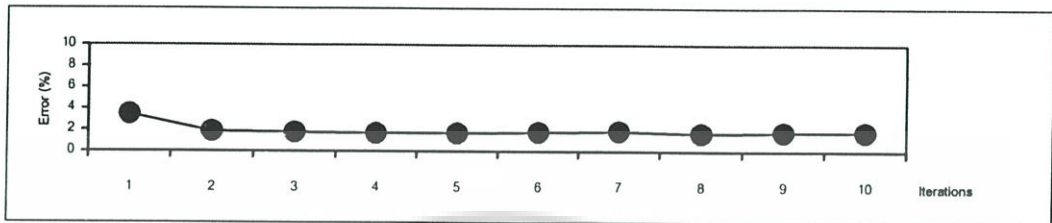


รูปที่ 5.10 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 30 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam ART ที่ระยะ D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10

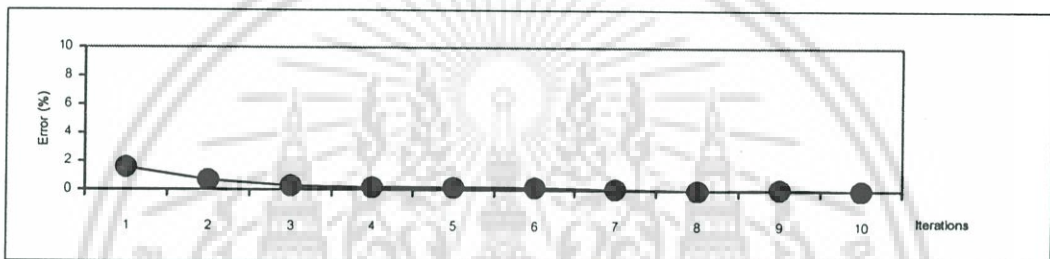
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



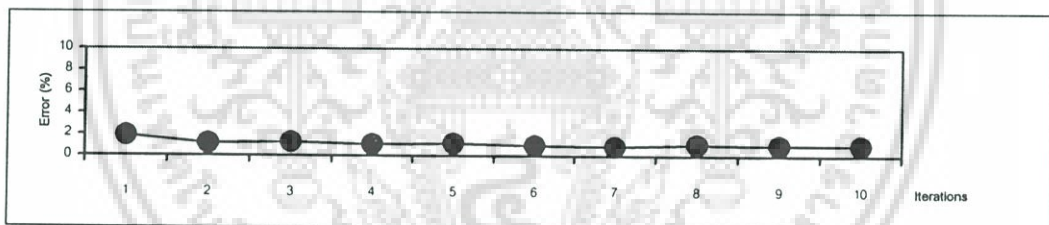
(a)



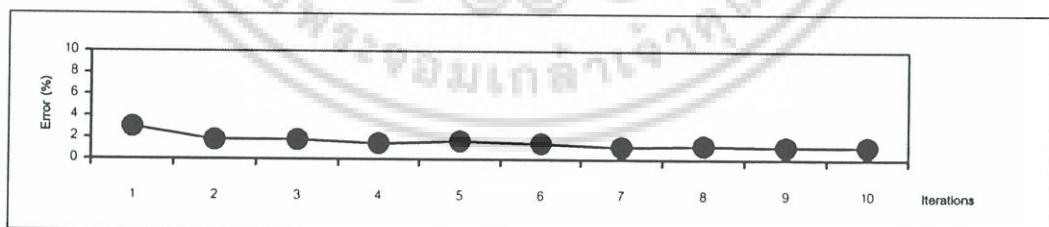
(b)



(c)



(d)



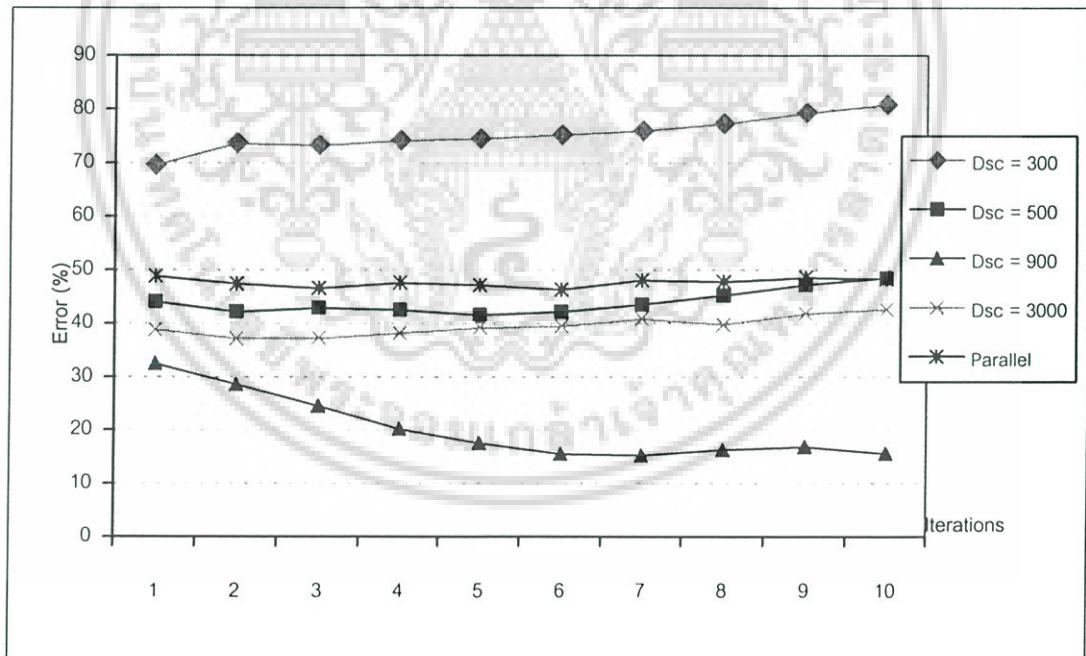
(e)

รูปที่ 5.11 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน ART จำนวน 30 โปรเจกชัน มีระยะ D_{50} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

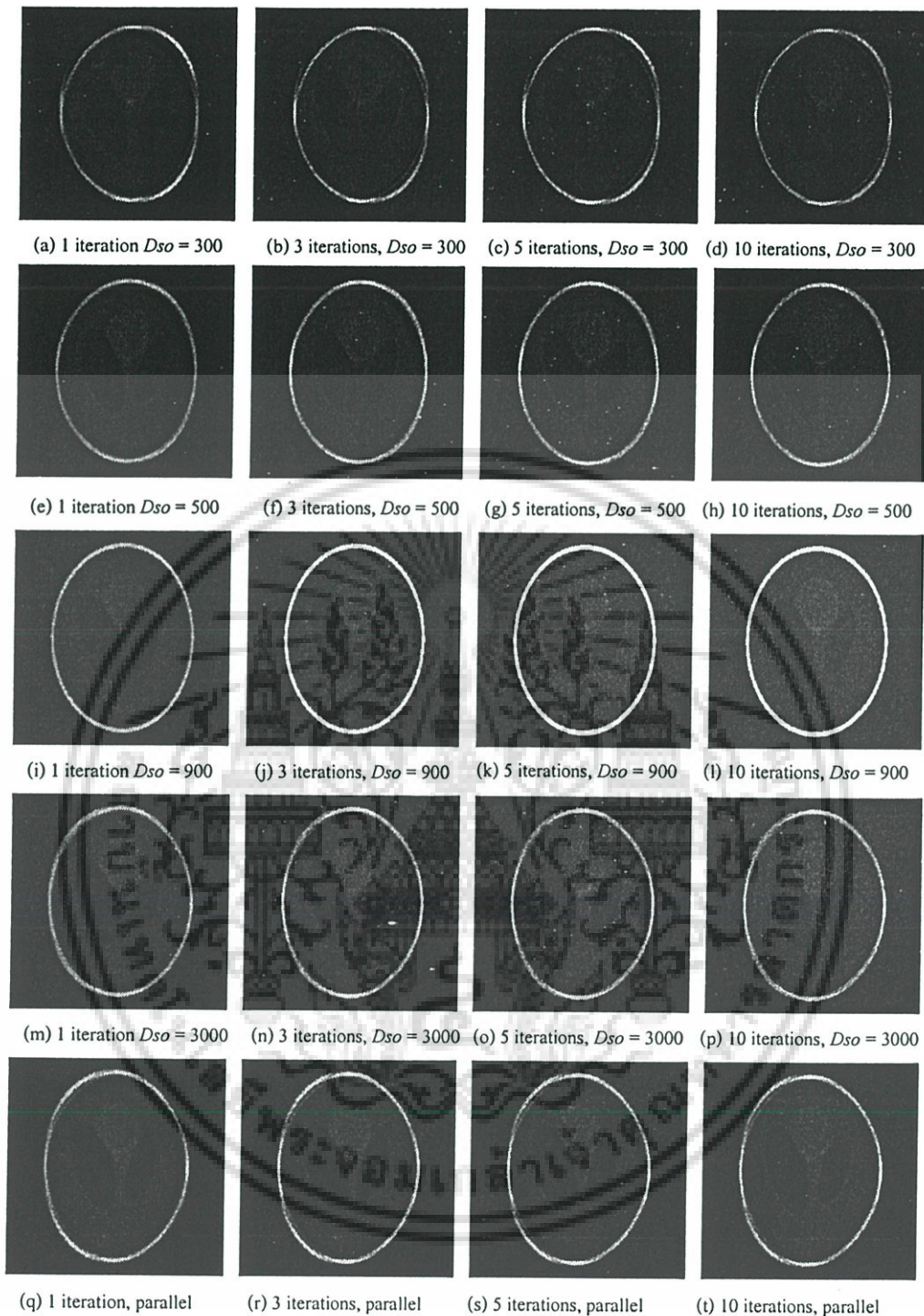
ตารางที่ 5.2 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี ART จำนวน 30 โปรเจกชัน

D_{so} \ Iterations	300	500	900	3000	Parallel
1	69.654654	44.12325	32.522285	38.88452	48.85599
2	73.6452	42.23554	28.64363	37.258822	47.4585
3	73.326565	42.98658	24.5465325	37.231658	46.6536
4	74.2152	42.55468	20.23135	38.2816972	47.69754
5	74.521256	41.589765	17.546539	39.23189	47.2155
6	75.289965	42.236498	15.546523	39.53215	46.3549
7	75.95546	43.56548	15.2459632	40.856542	48.12365
8	77.298652	45.26349	16.246328	39.865465	47.846553
9	79.29255	47.2455	16.84654	41.84564	48.654128
10	80.86255	48.54548	15.56555	42.65498	48.32155



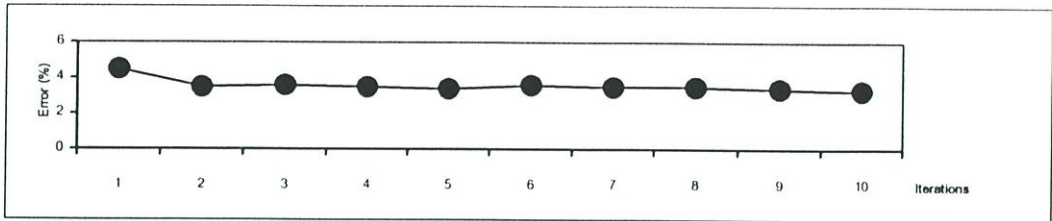
รูปที่ 5.12 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก ART จำนวน 30 โปรเจกชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

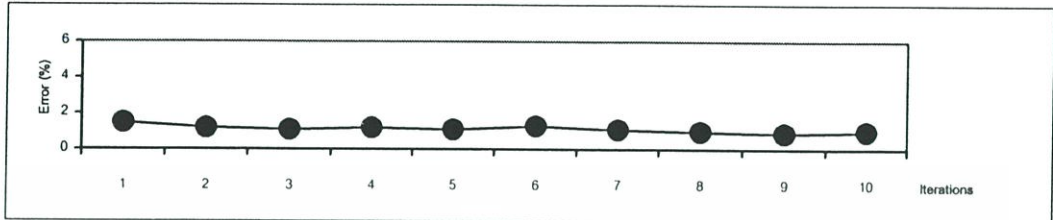


รูปที่ 5.13 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 60 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam ART ที่ระยะ D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10

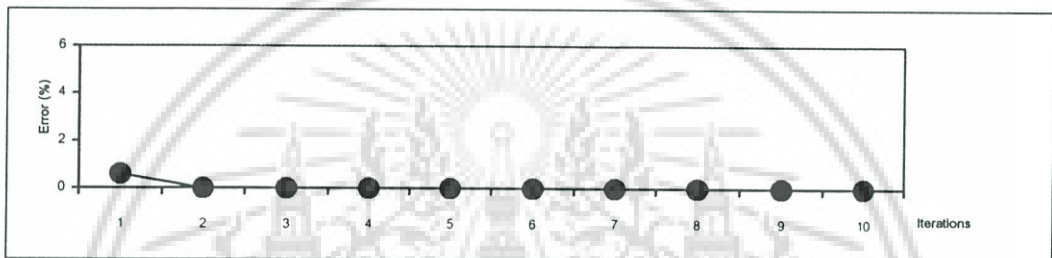
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



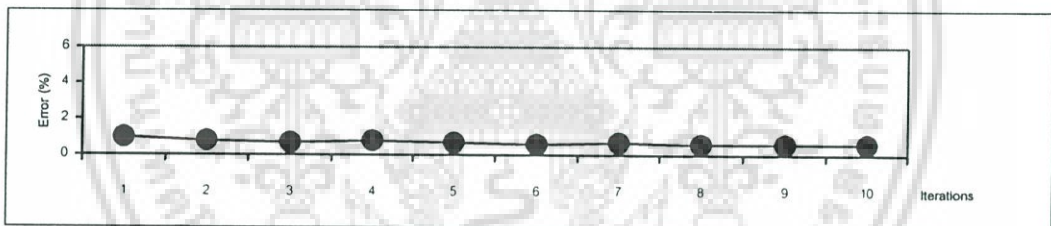
(a)



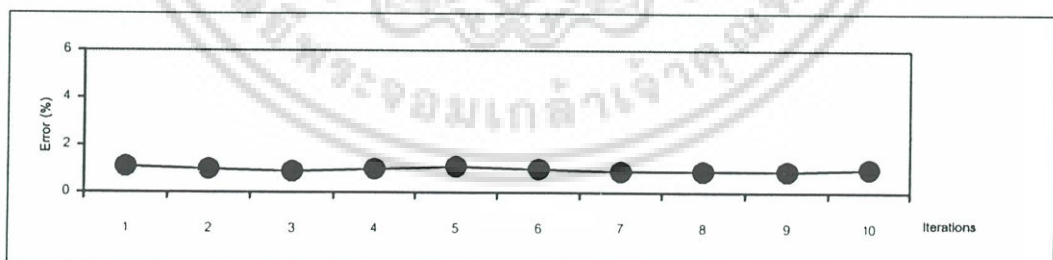
(b)



(c)



(d)



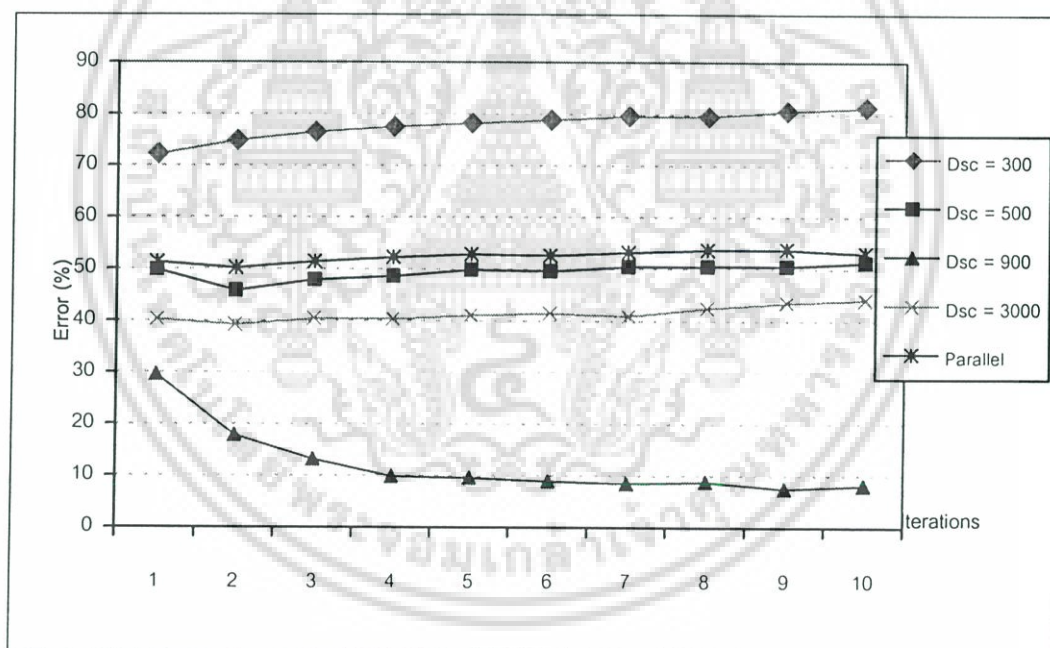
(e)

รูปที่ 5.14 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน ART จำนวน 60 โปรเจกชัน มีระยะ D_{so} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

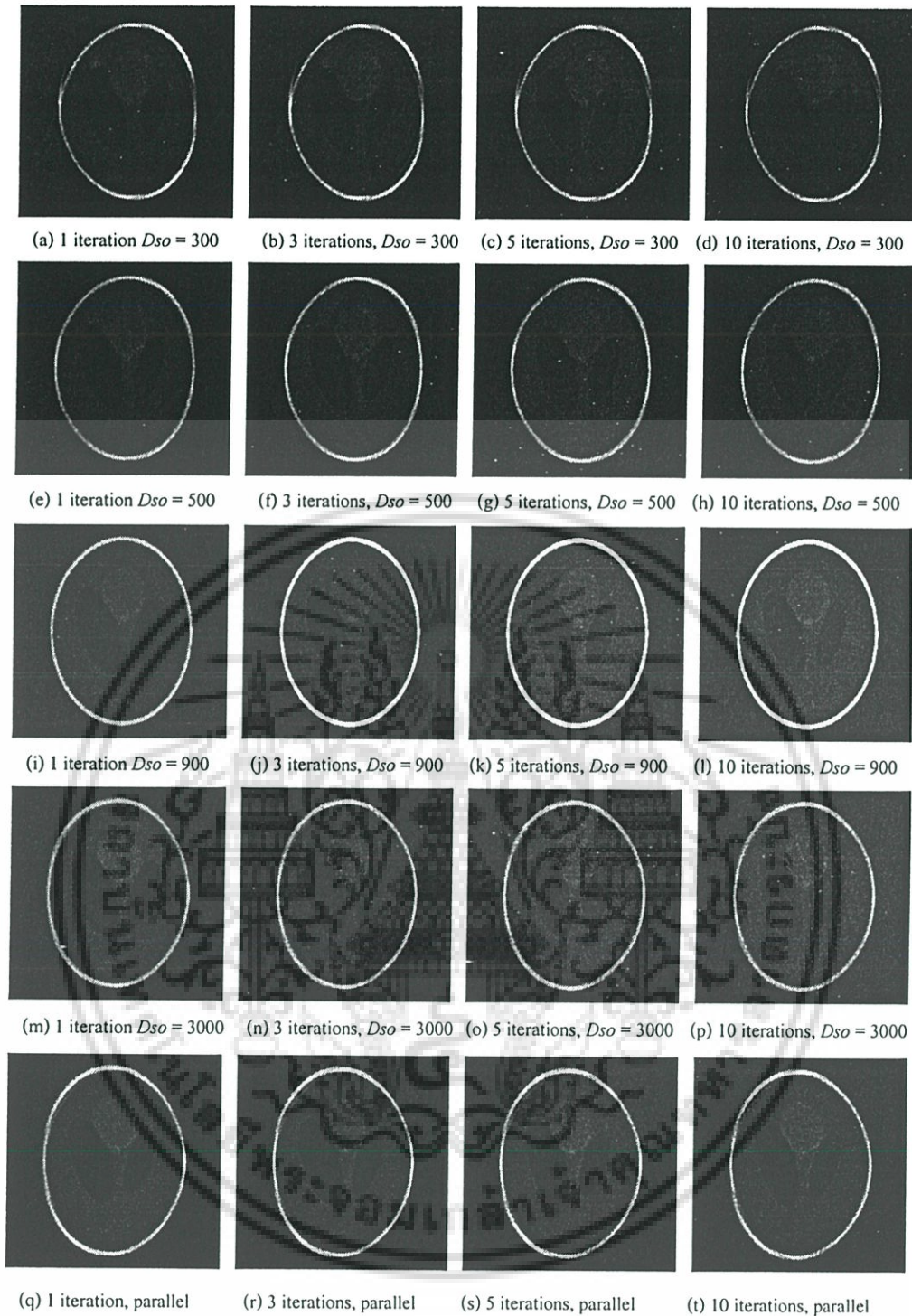
ตารางที่ 5.3 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี ART จำนวน 60 โปรเจ็กชัน

D_{so}	300	500	900	3000	Parallel
Iterations					
1	72.22346	49.8956	29.64623	40.3235	51.32855
2	74.86562	45.8565	17.89756	39.22336	50.231589
3	76.546542	47.98726	13.22659	40.45689	51.44526
4	77.5453546	48.65438	9.96872	40.35232	52.2759525
5	78.242546	49.897845	9.66542	41.123220	52.892264
6	78.878225	49.65799	8.9852	41.542358	52.654655
7	79.58987	50.55275	8.5468	40.9875	53.249652
8	79.54556	50.5666	8.8852	42.54655	53.74654
9	80.645626	50.56465	7.54546	43.56462	53.8452
10	81.31562	51.3256	8.2135	44.132556	53.121239



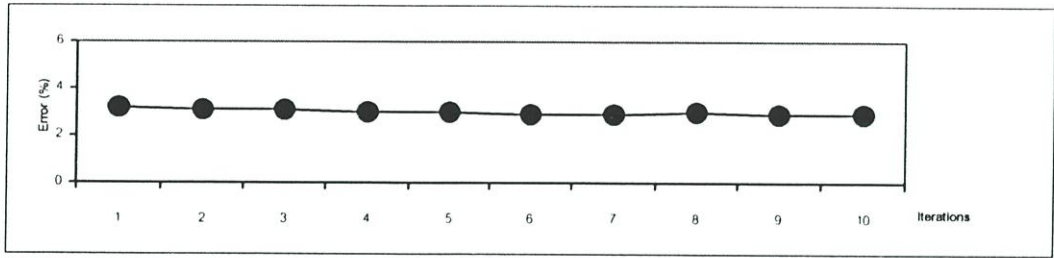
รูปที่ 5.15 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก ART จำนวน 60 โปรเจ็กชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

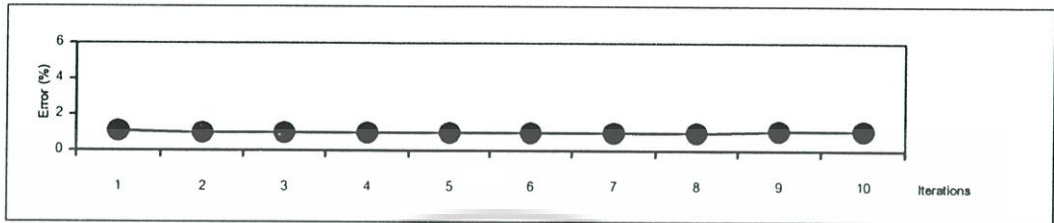


รูปที่ 5.16 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{SO} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 90 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam ART ที่ระยะ D_{SO} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10

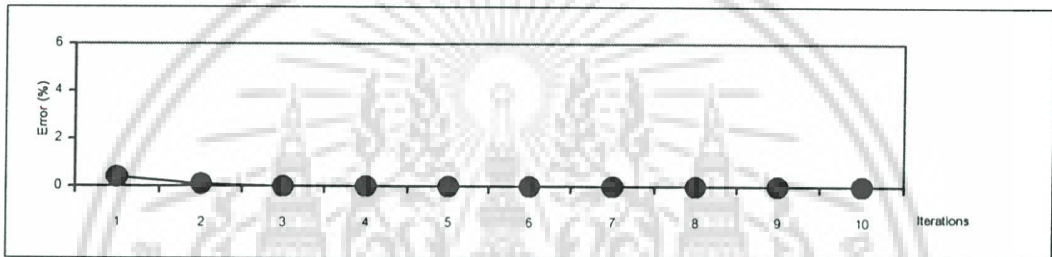
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



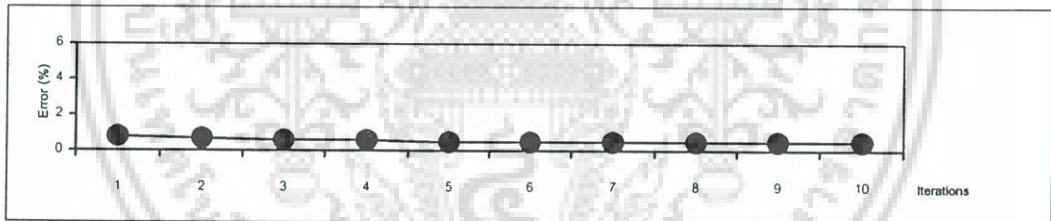
(a)



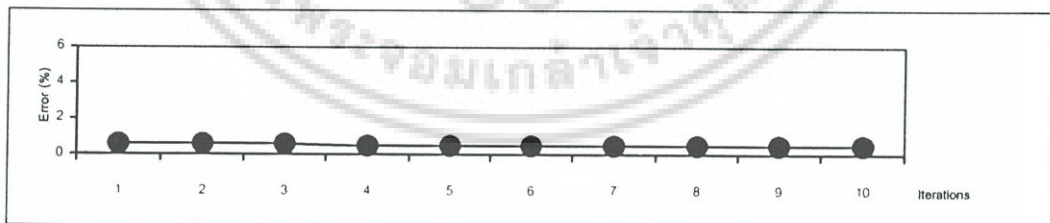
(b)



(c)



(d)



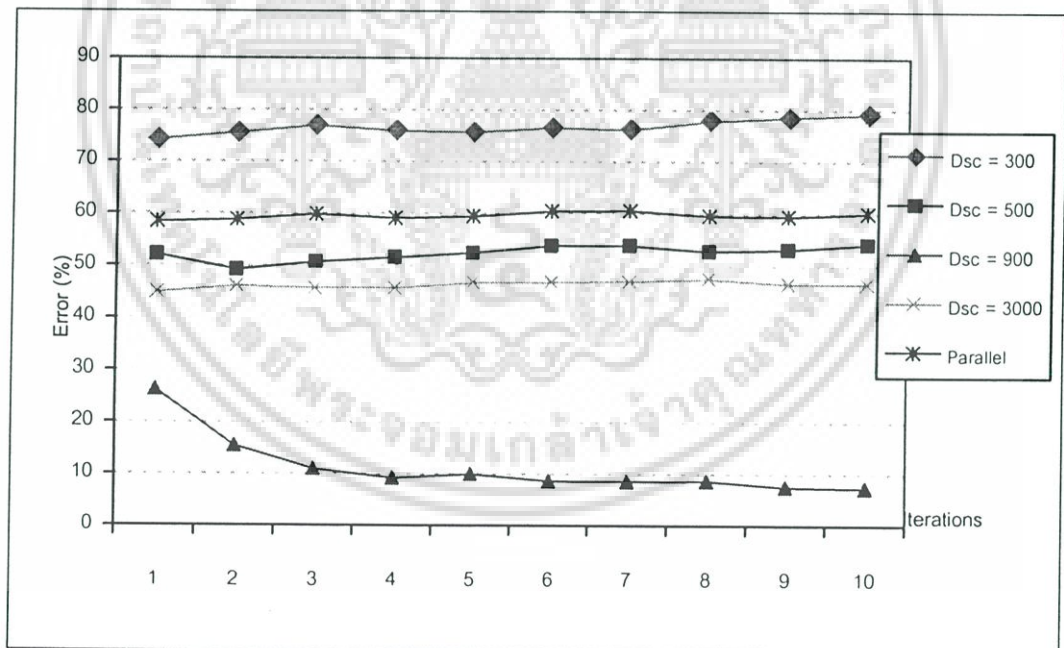
(e)

รูปที่ 5.17 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน ART จำนวน 90 โปรเจกชัน มีระยะ D_{so} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

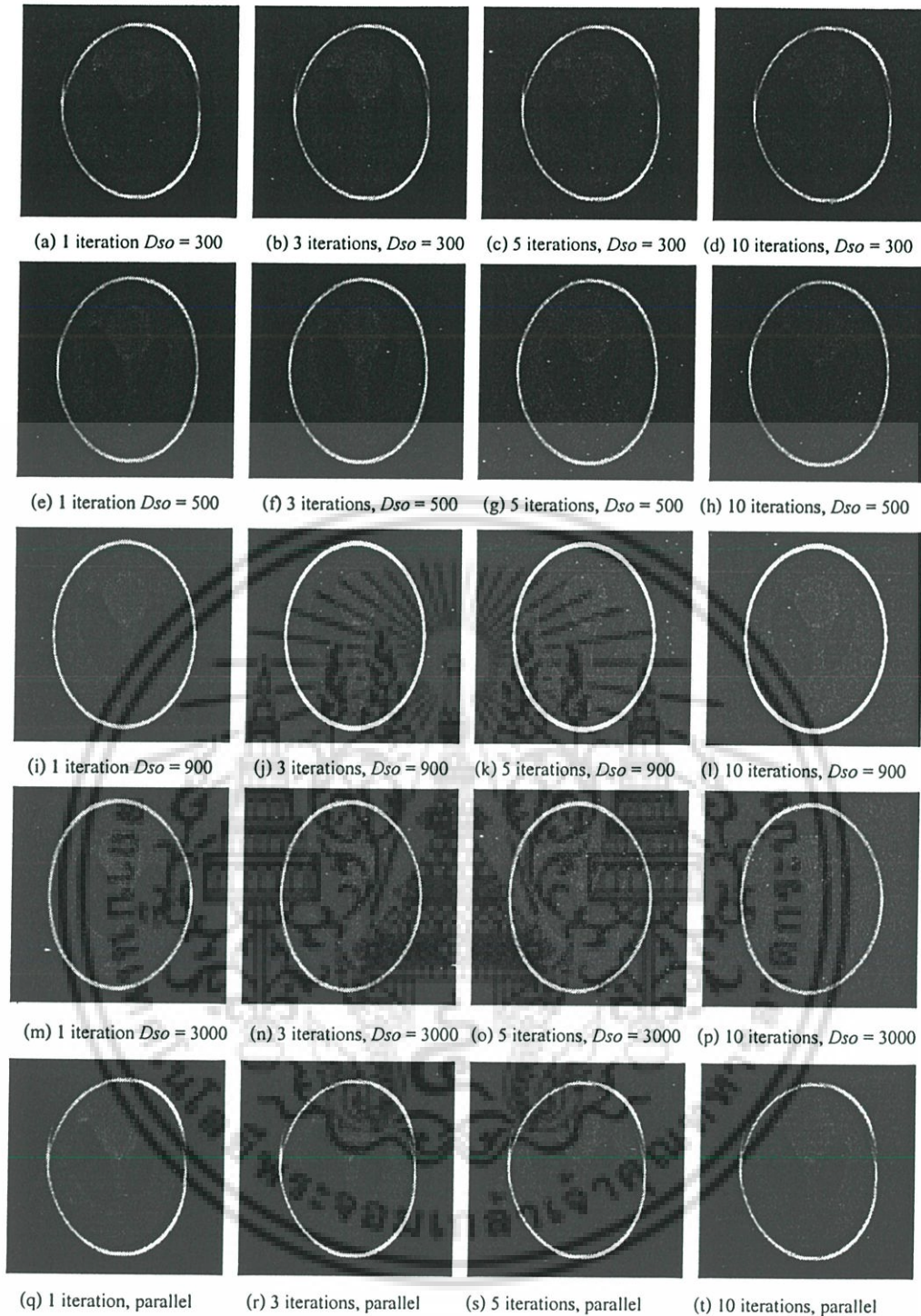
ตารางที่ 5.4 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี ART จำนวน 90 โปรเจ็กชัน

D_{so}	300	500	900	3000	Parallel
Iterations					
1	74.21254	52.12389	26.333456	44.899523	58.41526
2	75.545628	49.2456	15.4625	46.16212	58.845865
3	76.9856	50.7549	10.97889	45.7156	59.87958
4	75.95213	51.65482	9.212156	45.78916	59.12659
5	75.654257	52.54234	9.985221	46.86216	59.545428
6	76.54686	53.8945	8.654659	46.982165	60.5459898
7	76.22454	53.987652	8.56423	47.16167	60.654652
8	77.89558	52.84658	8.65462	47.561277	59.65468
9	78.545288	53.23645	7.564652	47.221393	59.54569
10	79.21356	54.216519	7.32456	46.646654	60.1239852



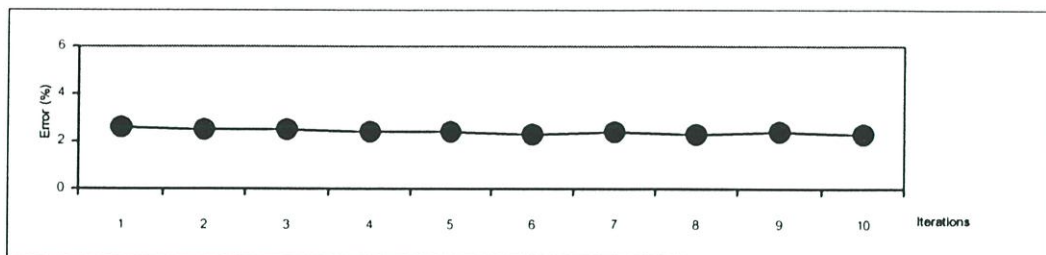
รูปที่ 5.18 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก ART จำนวน 90 โปรเจ็กชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

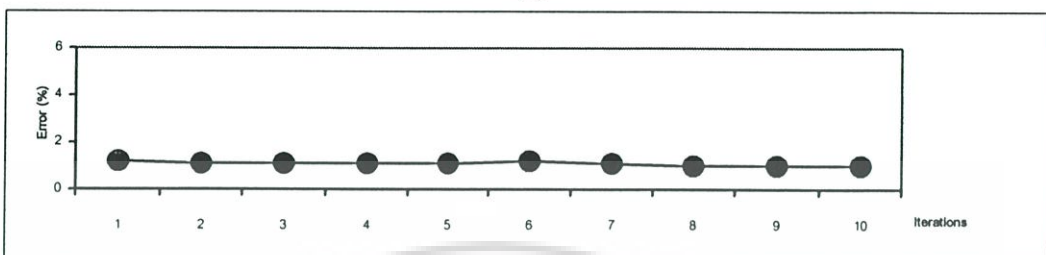


รูปที่ 5.19 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 120 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam ART และ Cone-beam ART ที่ระยะ D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10

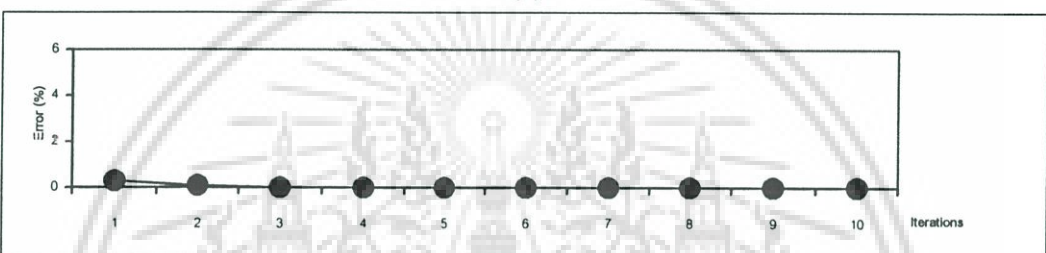
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



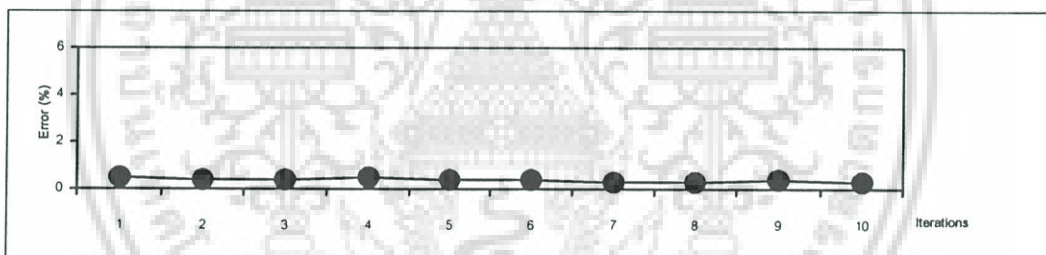
(a)



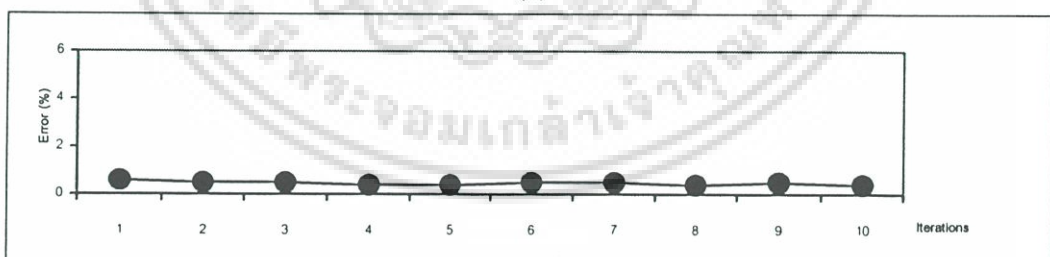
(b)



(c)



(d)



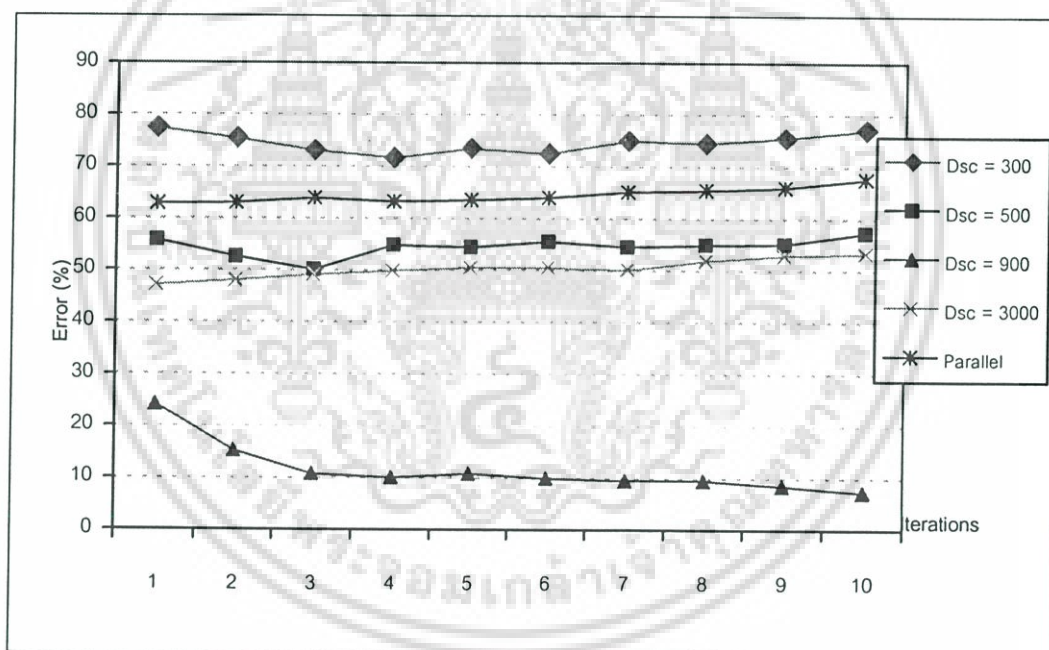
(e)

รูปที่ 5.20 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน ART จำนวน 120 โปรเจกชัน มีระยะ D_{so} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 5.5 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี ART จำนวน 120 โปรเจกชัน

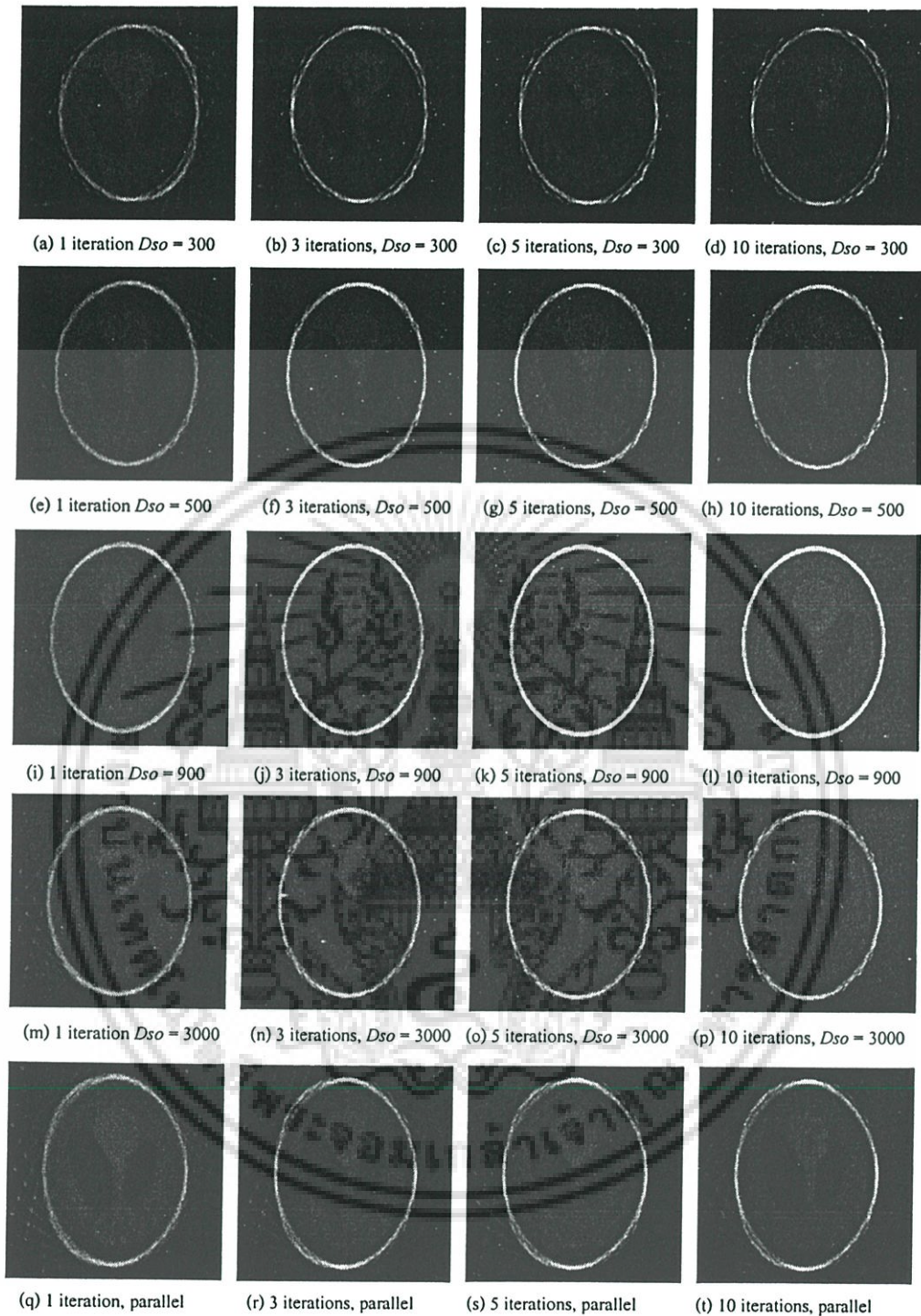
D_{so}	300	500	900	3000	Parallel
1	77.346458	55.765652	24.12337	47.1216	62.805462
2	75.442325	52.554567	15.252259	48.0160	62.98788
3	73.112379	50.123589	10.8111	49.10	63.899798
4	71.6753	54.8852	10.098898	49.887913	63.2165496
5	73.46856	54.445879	10.854654	50.55456	63.55452
6	72.545858	55.54544	9.998452	50.5566	64.057998
7	74.96548	54.54567	9.5454689	50.115647	65.12359
8	74.546525	54.98524	9.546255	51.885456	65.5016
9	75.545456	55.12359	8.56654654	52.9845	66.005665
10	77.125652	57.32458	7.32156568	53.321564	67.64558



รูปที่ 5.21 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก ART จำนวน 120 โปรเจกชัน

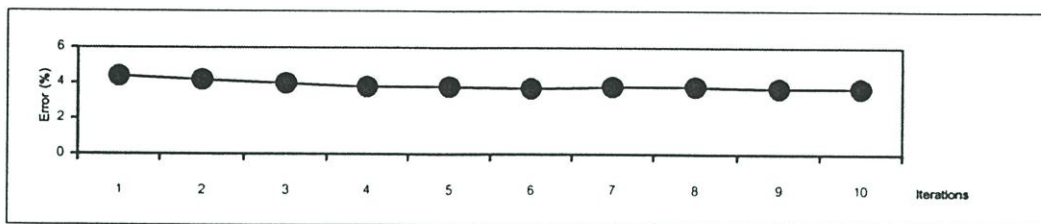
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2.3 การทดลองสร้างภาพตัดขวางวิธี SART Cone-beam

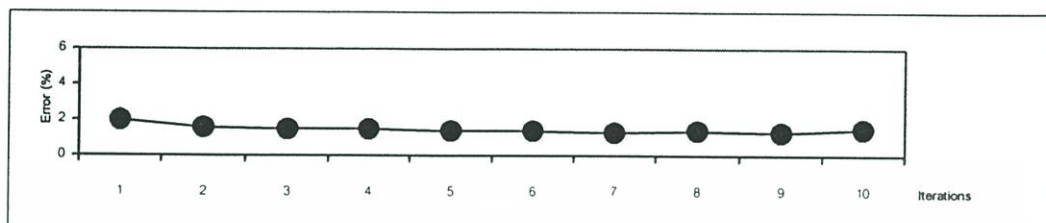


รูปที่ 5.22 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 30 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam SART และ Cone-beam SART ที่ระยะ D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10

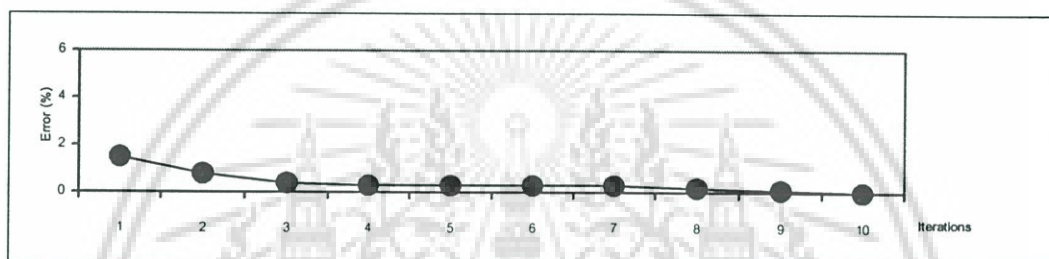
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



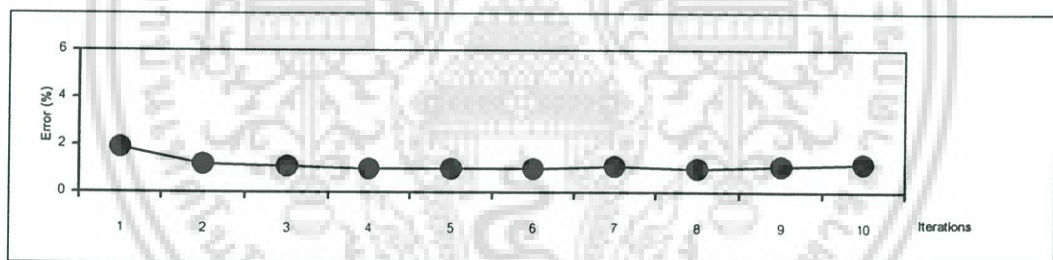
(a)



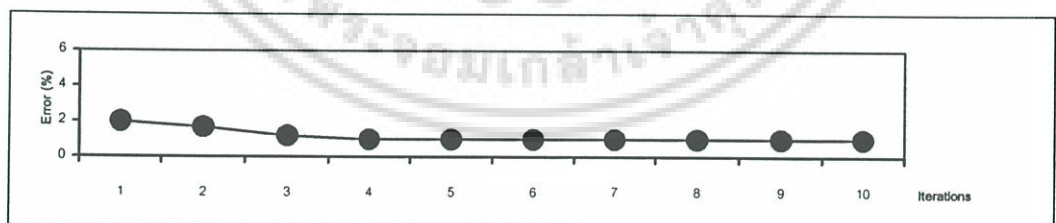
(b)



(c)



(d)



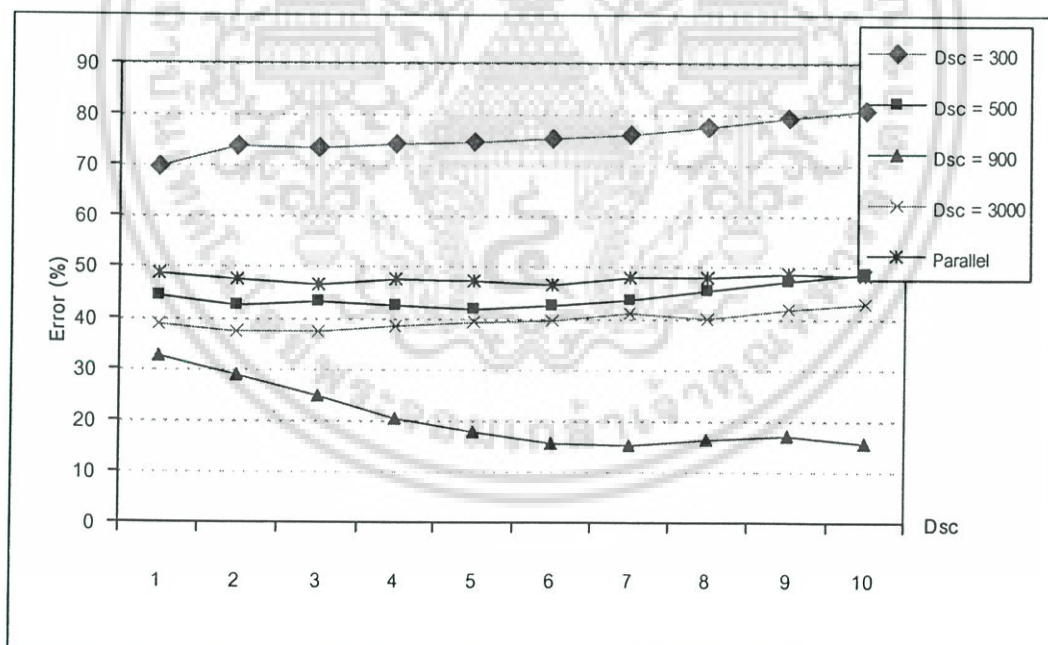
(e)

รูปที่ 5.23 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน SART จำนวน 30 โปรเจกชัน มีระยะ D_{so} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

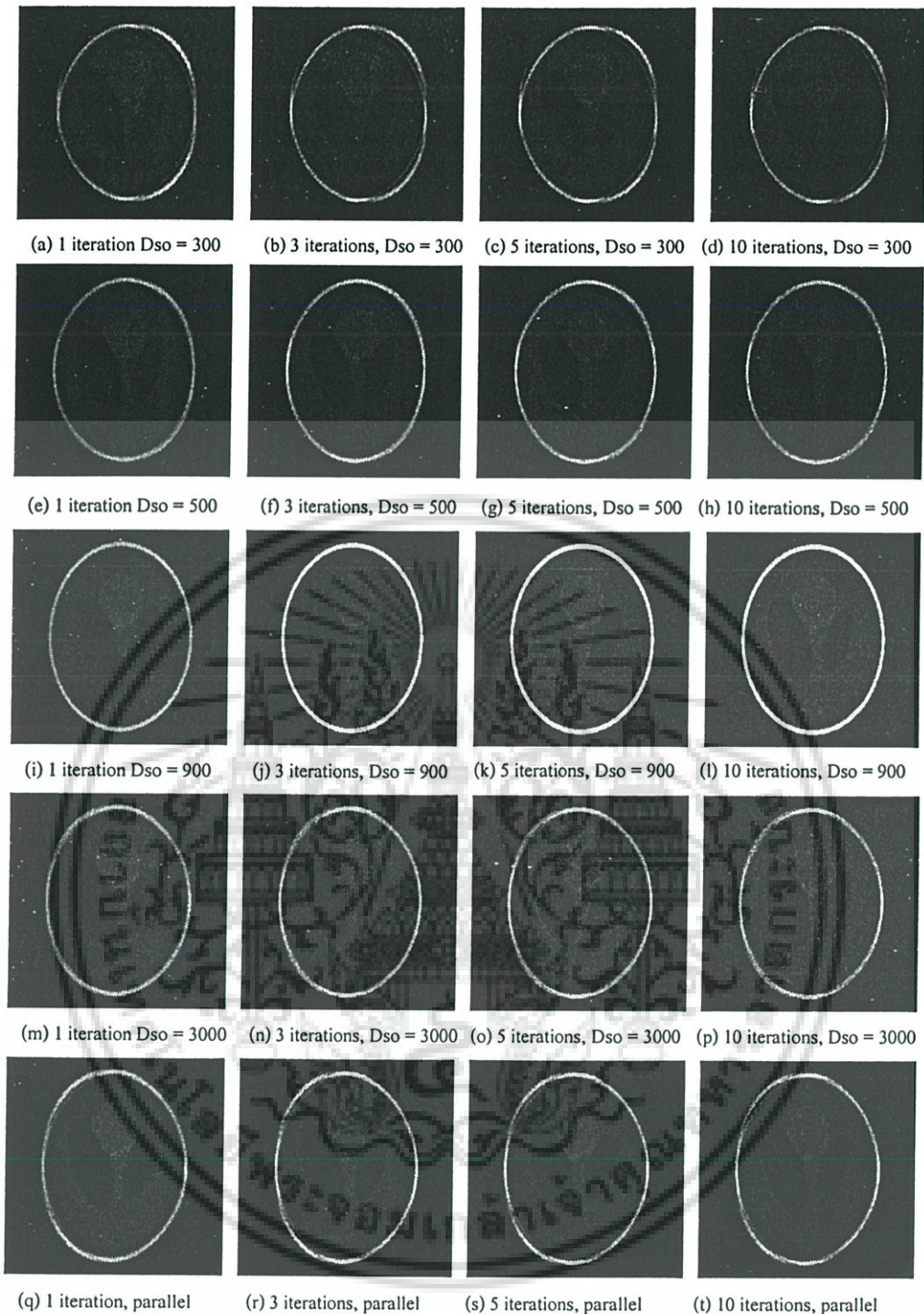
ตารางที่ 5.6 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี SART จำนวน 30 โปรเจกชัน

D_{50}	300	500	900	3000	Parallel
1	67.71873	44.33529	30.18332	36.89505	46.05729
2	69.35078	38.99987	26.61767	35.67158	45.13718
3	71.53697	40.04546	22.81365	35.56262	44.86848
4	73.07984	41.65751	19.20521	36.20971	45.1086
5	74.22977	42.96595	16.26951	37.00208	45.42622
6	75.11898	44.03334	14.93856	37.73043	45.7485
7	75.84046	44.94853	14.75239	38.38355	46.04327
8	76.45088	45.72934	14.57667	38.97171	46.31484
9	77.23993	46.42606	14.56204	39.49685	46.54443
10	78.84309	47.04144	14.69099	39.95282	46.75342



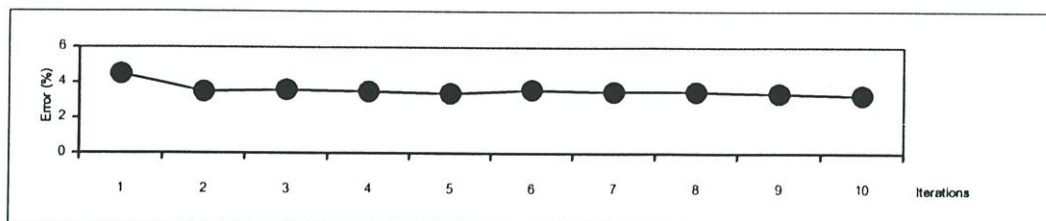
รูปที่ 5.24 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก SART จำนวน 30 โปรเจกชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

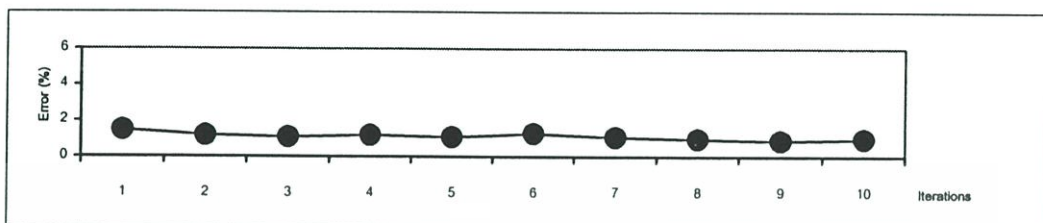


รูปที่ 5.25 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 60 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam SART และ Cone-beam SART ที่ระยะ D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10

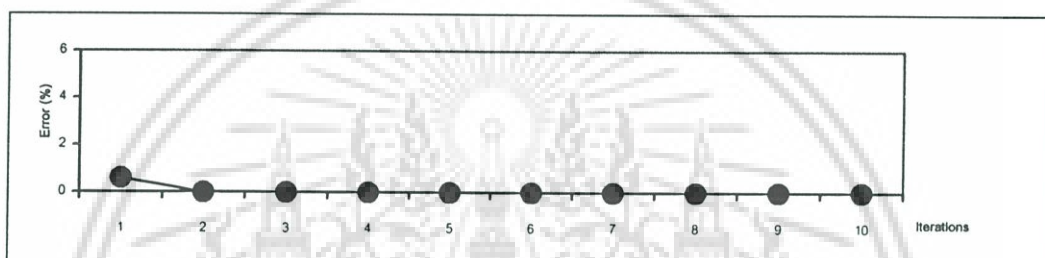
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



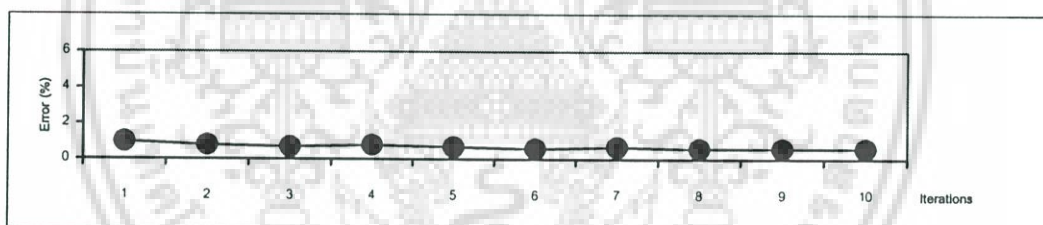
(a)



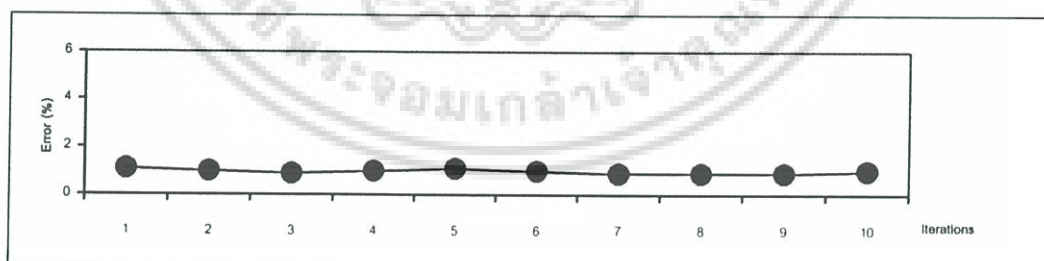
(b)



(c)



(d)



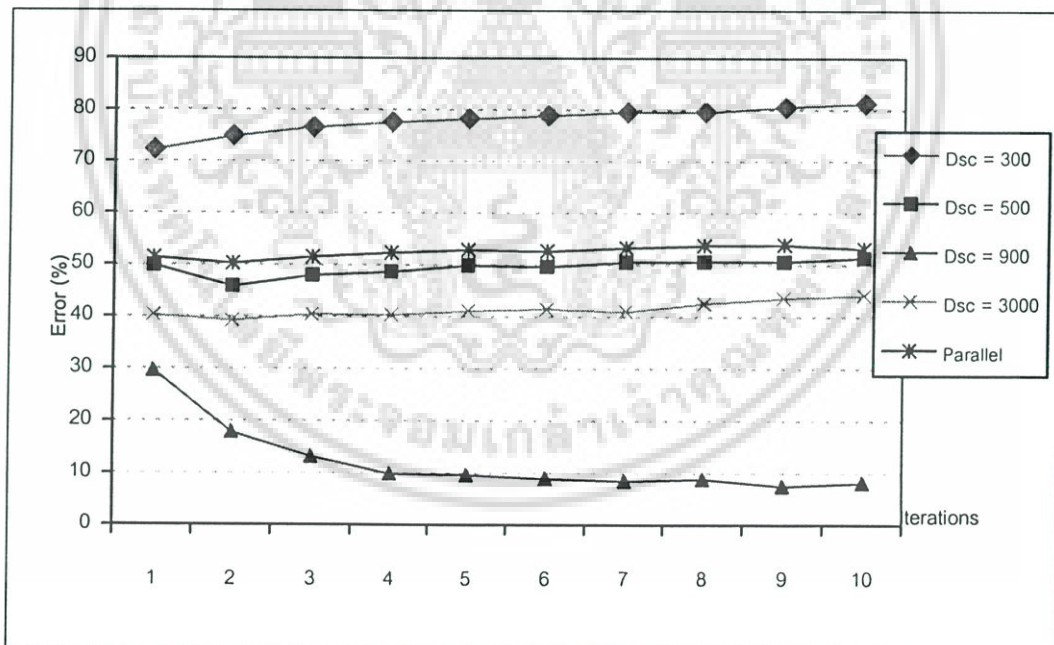
(e)

รูปที่ 5.26 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน SART จำนวน 60 โปรเจกชัน มีระยะ D_{so} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

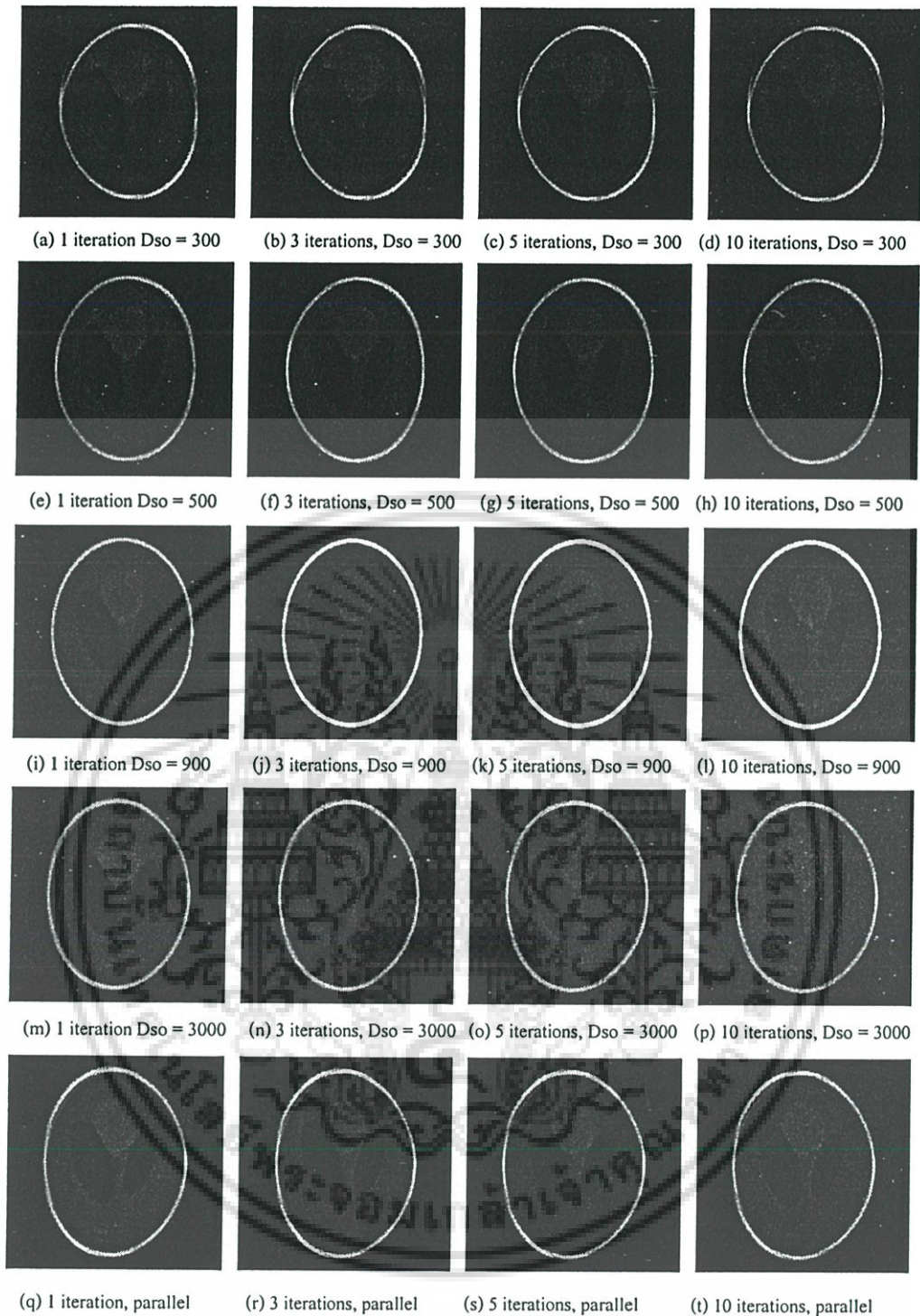
ตารางที่ 5.7 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี SART จำนวน 60 โปรเจกชัน

D_{so}	300	500	900	3000	Parallel
Iterations					
1	70.49328	47.88722	27.41109	39.29319	51.49451
2	72.35029	43.75646	19.10446	37.8256	50.9359
3	74.13142	45.41855	12.58838	38.65076	51.4714
4	75.23263	46.48611	8.587898	39.47148	52.02103
5	76.05415	47.25197	7.769403	40.16001	52.54015
6	76.70121	47.85927	7.629081	40.6992	52.95923
7	77.24525	48.35064	7.570485	41.14961	53.29278
8	77.69701	48.77828	7.314376	41.59146	53.56933
9	78.11227	49.14791	7.186225	41.9599	53.79707
10	78.4892	49.47672	7.003505	42.27361	53.99323



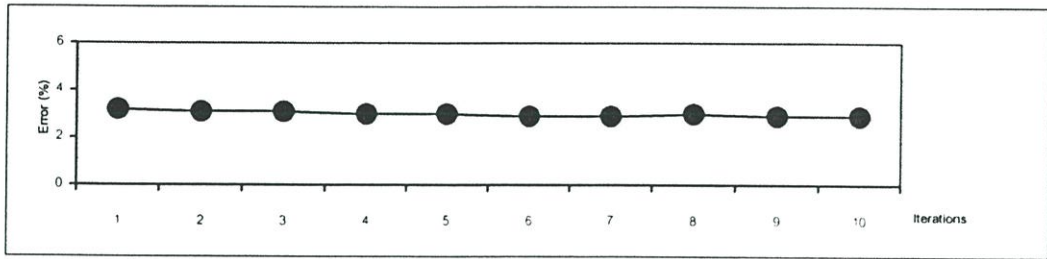
รูปที่ 5.27 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก SART จำนวน 60 โปรเจกชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

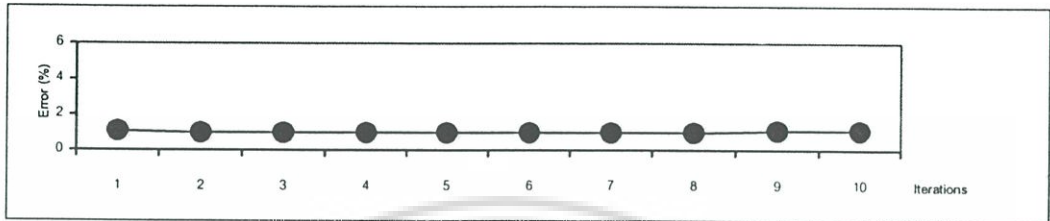


รูปที่ 5.28 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 90 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam SART และ Cone-beam SART ที่ระยะ D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10

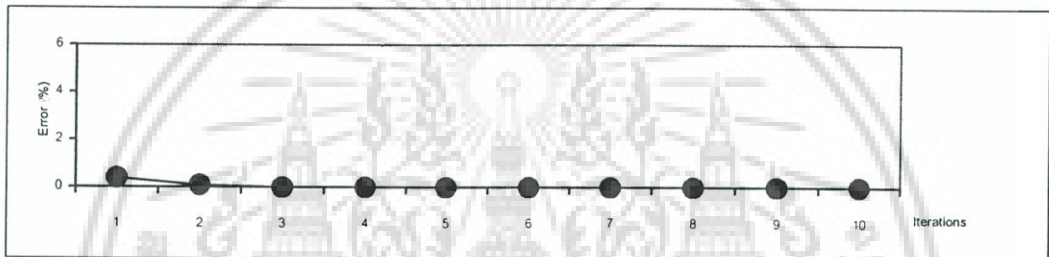
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



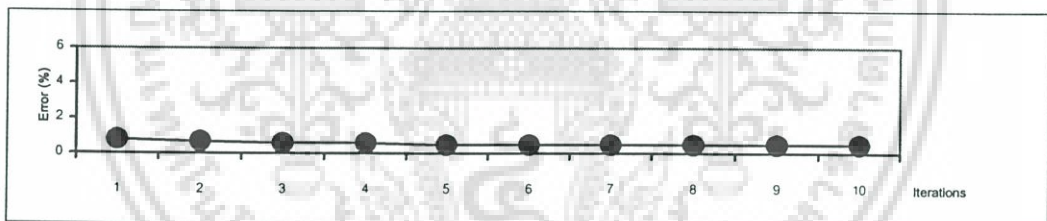
(a)



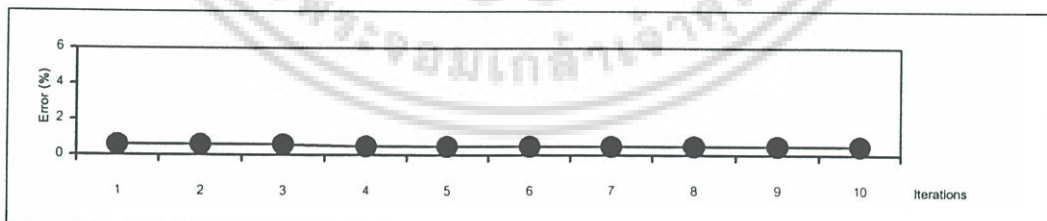
(b)



(c)



(d)



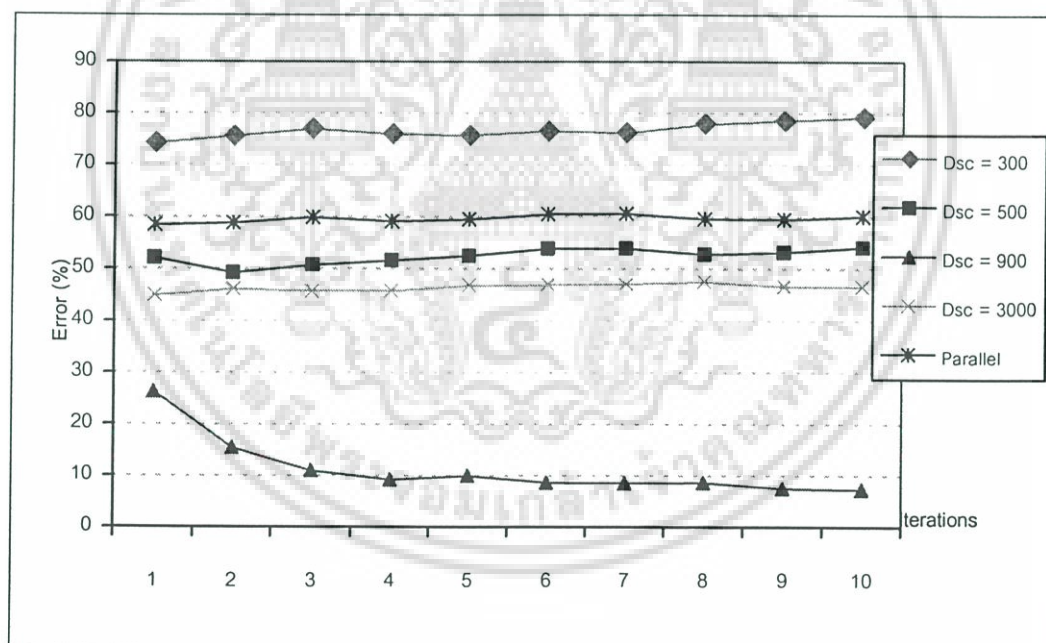
(e)

รูปที่ 5.29 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน SART จำนวน 90 โปรเจกชัน มีระยะ D_{50} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

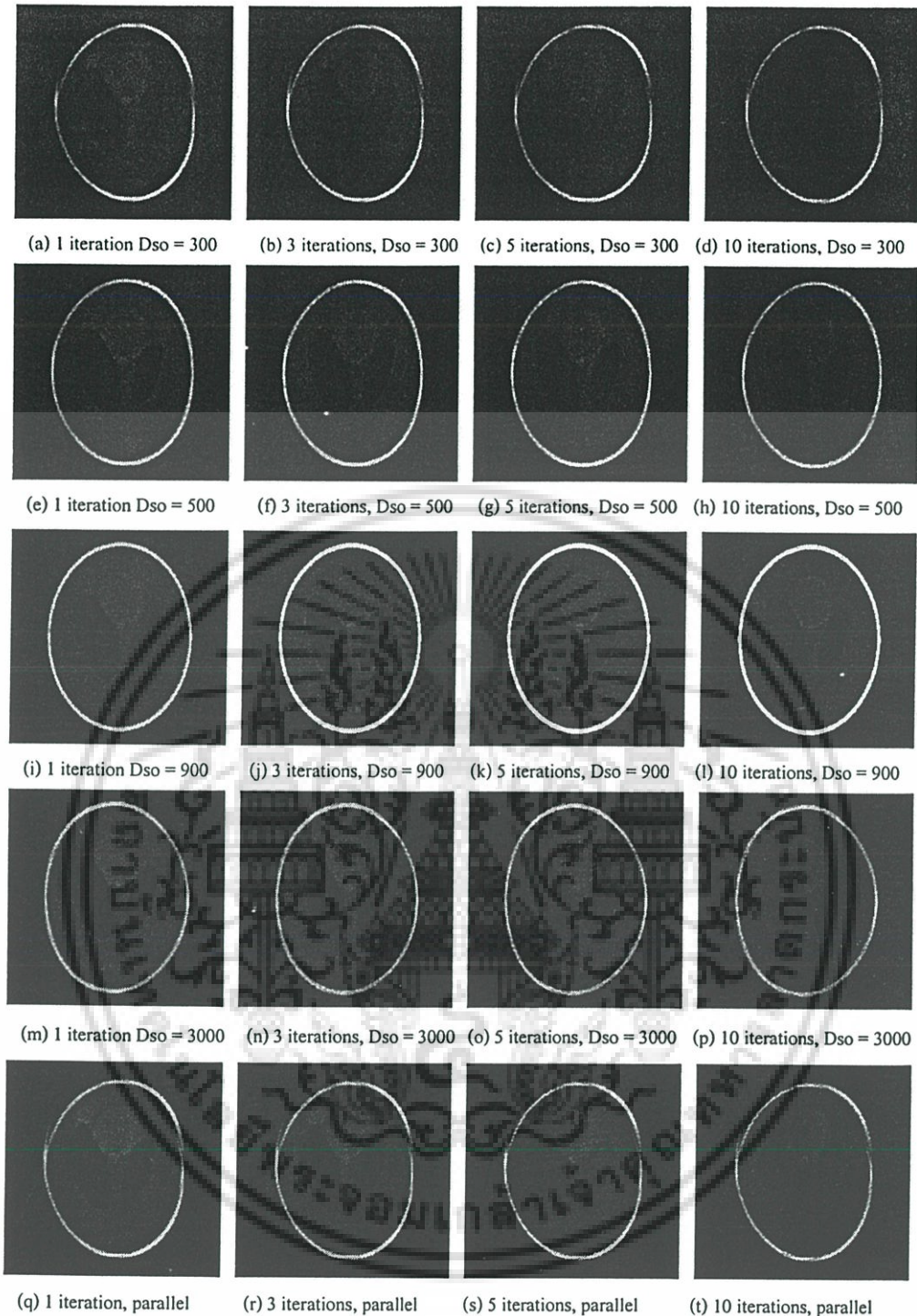
ตารางที่ 5.8 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี SART จำนวน 90 โปรเจ็กชัน

D_{so}	300	500	900	3000	Parallel
Iterations					
1	71.30158	50.74946	24.4183	42.97635	56.2584
2	72.15306	48.04824	14.13398	42.39368	56.50558
3	73.35892	49.40738	8.711767	43.15801	57.14418
4	74.07345	50.3238	6.997857	43.72712	57.58614
5	74.64473	51.04244	6.103656	44.31119	57.88741
6	75.09274	51.63603	6.09956	44.83419	58.10869
7	75.46111	52.13061	5.951749	45.23685	58.25768
8	75.78556	52.55051	5.872648	45.55837	58.37843
9	76.06008	52.91922	5.830443	45.81913	58.64141
10	76.30935	53.23388	5.8188918	46.03005	58.89535



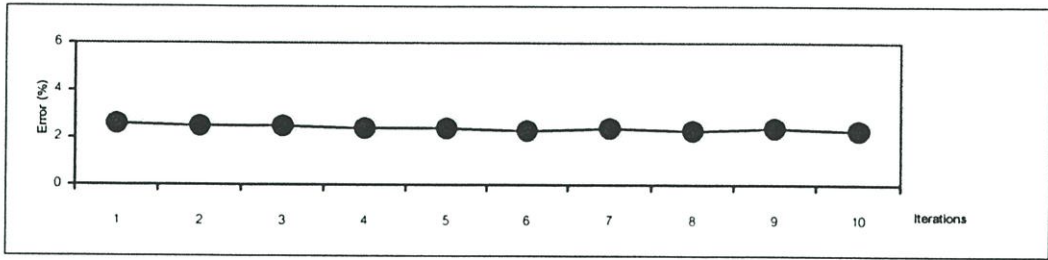
รูปที่ 5.30 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก SART จำนวน 90 โปรเจ็กชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

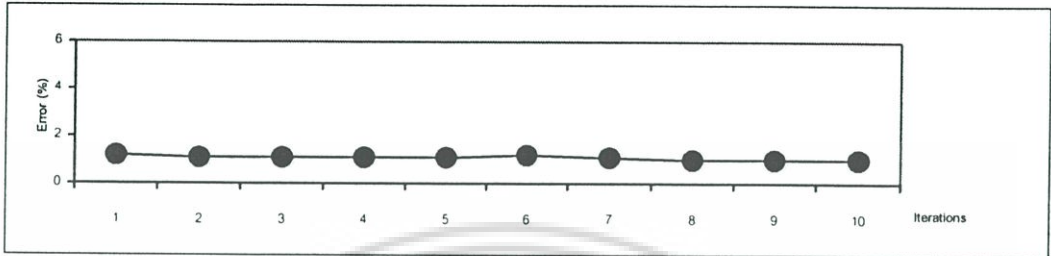


รูปที่ 5.31 ภาพผลลัพธ์จากโปรเจกชันแบบกรวยที่มีระยะ D_{so} เท่ากับ 900 หน่วย จำนวน 120 โปรเจกชันด้วยวิธี Parallel-beam SART และ Cone-beam SART ที่ระยะ D_{so} เท่ากับ 300, 500, 900 และ 3000 หน่วย โดยใช้จำนวนอิตเทอเรชันเท่ากับ 1, 3, 5 และ 10

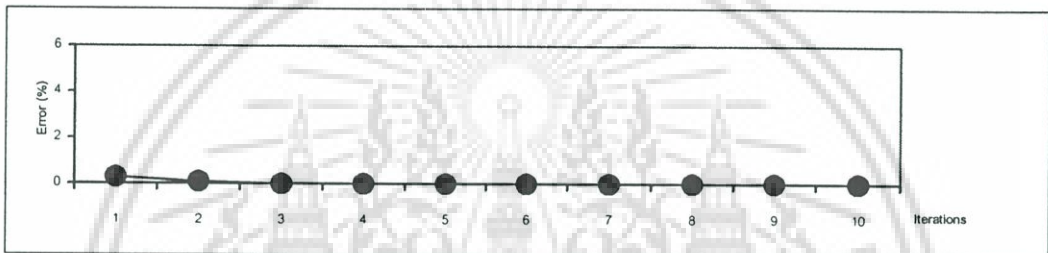
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



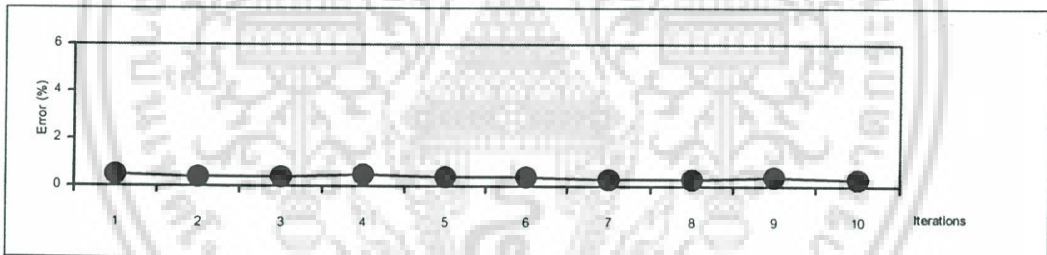
(a)



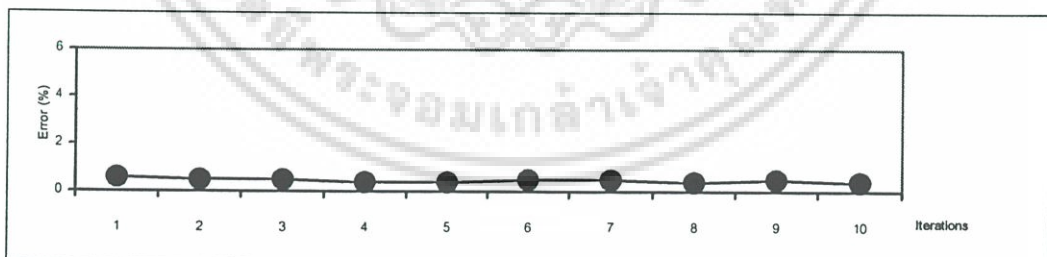
(b)



(c)



(d)



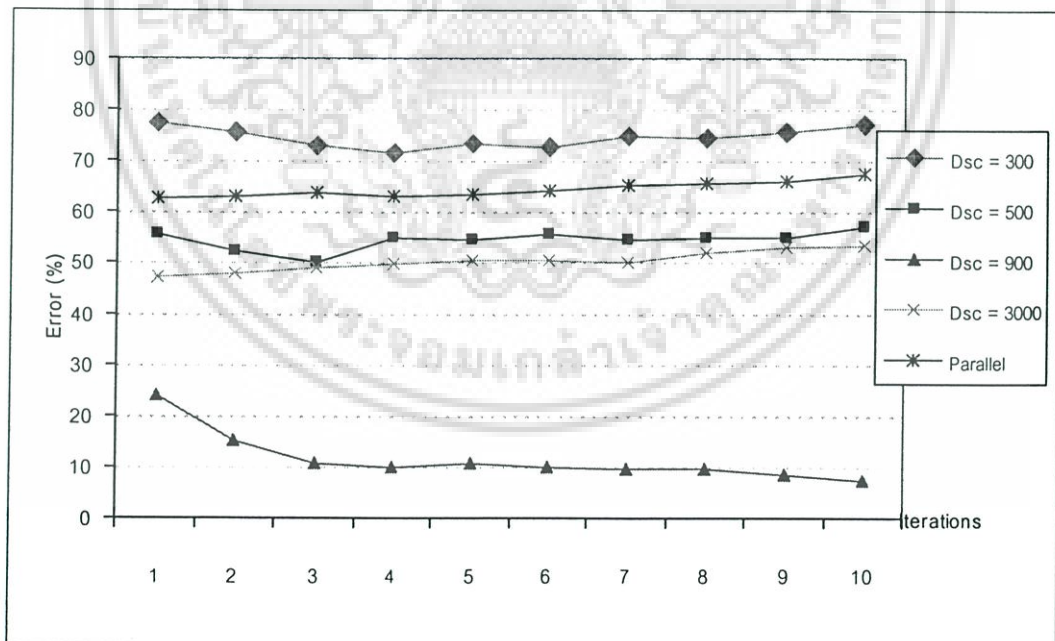
(e)

รูปที่ 5.32 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) จากการเปรียบเทียบข้อมูลโปรเจกชันจริงกับโปรเจกชันที่คำนวณได้ใน SART จำนวน 120 โปรเจกชัน มีระยะ D_{so} เท่ากับ (a) 300, (b) 500, (c) 900, (d) 3000 และ (e) Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 5.9 ค่าผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จากวิธี SART จำนวน 120 โปรเจ็กชัน

D_{so} \ Iterations	300	500	900	3000	Parallel
1	71.9305	52.02608	22.97921	45.98059	60.19347
2	72.48536	50.57692	12.95847	46.77623	60.9869
3	73.51754	51.30141	8.103266	47.31763	61.43914
4	74.15071	52.11641	5.790578	47.6803	61.71148
5	74.57537	52.78545	5.589445	48.16566	61.87428
6	74.88573	53.35664	5.386473	48.80481	61.99523
7	75.12441	53.87057	5.25527	49.38102	62.07137
8	75.356	54.32621	5.059521	49.84078	62.27956
9	75.59016	54.72651	4.75275	50.21184	62.27956
10	75.79312	55.08459	4.434762	50.50649	62.43741

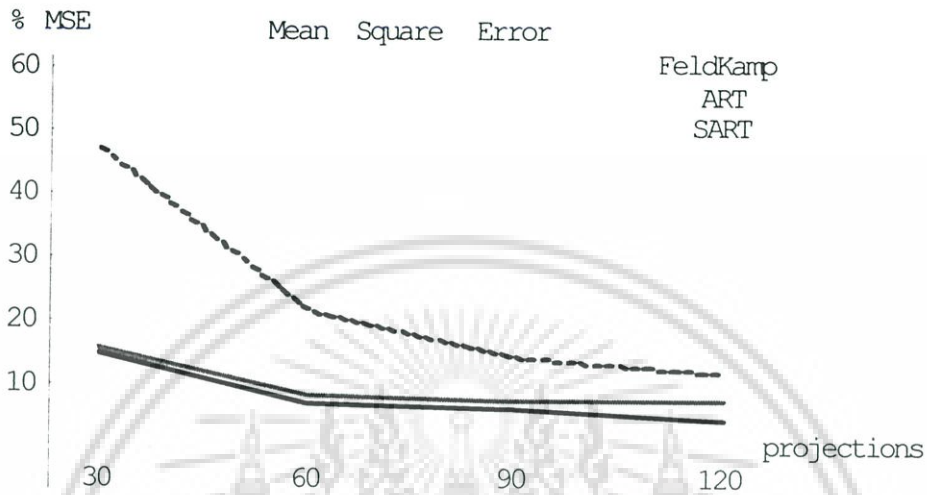


รูปที่ 5.33 กราฟค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 จาก SART จำนวน 120 โปรเจ็กชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2.4 การเปรียบเทียบวิธีการสร้างตัดขวาง

การเปรียบเทียบวิธีการสร้างภาพตัดขวางทั้ง 3 วิธีนั้นเลือกใช้ภาพผลลัพธ์ที่ระยะ D_{50} เท่ากับ 900 หน่วย เพราะมีค่าความผิดพลาดต่ำสุดในแต่ละวิธี โดยวิธี ART และ SART ใช้ภาพผลลัพธ์ที่ไอเทอเรนซ์ที่ 10

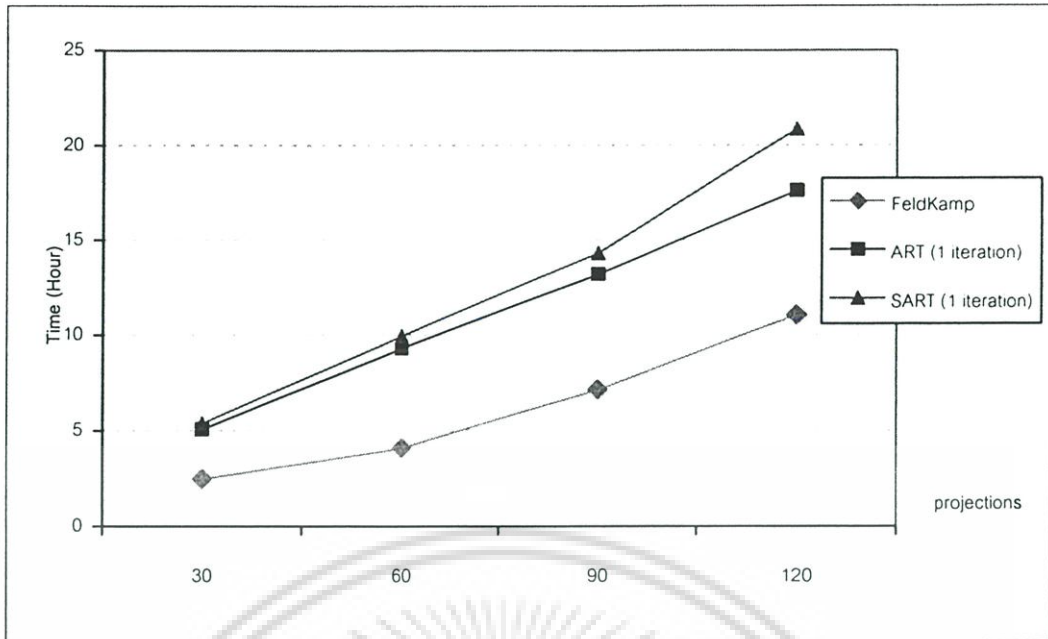


รูปที่ 5.34 กราฟเปรียบเทียบค่าความผิดพลาดภาพตัดขวางสไลด์ที่ 98 วิธี FeldKamp, ART และ SART จำนวน 30, 60, 90 และ 120 โปรเจกชัน

ตารางที่ 5.10 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางขนาด 256x256 จำนวน 256 สไลด์

Algorithms \ projections	30	60	90	120
FeldKamp	2.4877 (min)	4.1042 (min)	7.1539 (min)	11.0779 (min)
ART (1 iteration)	5.0841 (min)	9.3216 (min)	13.2158 (min)	17.6414 (min)
SART (1 iteration)	5.4069 (min)	9.9723 (min)	14.3127 (min)	20.8799 (min)
ART (10 iteration)	49.8246 (min)	91.3514 (min)	129.5146 (min)	172.8853 (min)
SART (10 iteration)	52.4470 (min)	98.2273 (min)	139.2630 (min)	192.0948 (min)

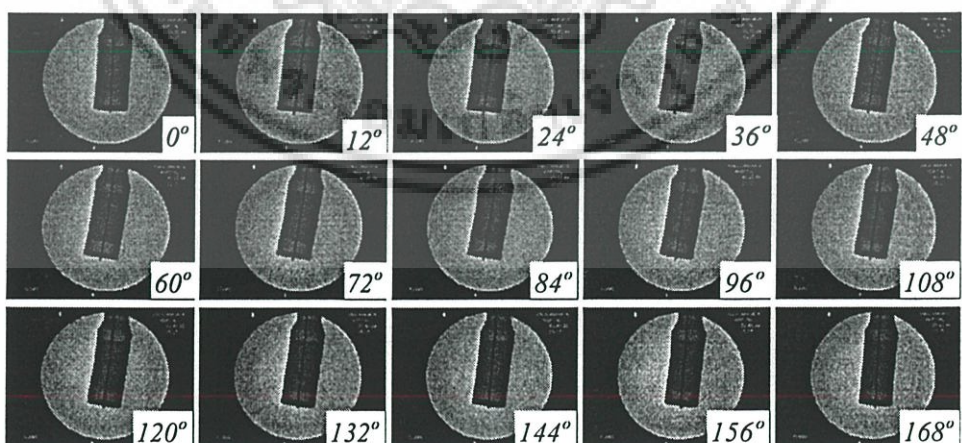
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.35 กราฟเปรียบเทียบเวลาที่ใช้สร้างภาพตัดขวางขนาด 256x256 จำนวน 256 สไลด์ด้วยวิธี FeldKamp, ART และ SART จำนวน 30, 60, 90 และ 120 โปรเจกชันตามลำดับ

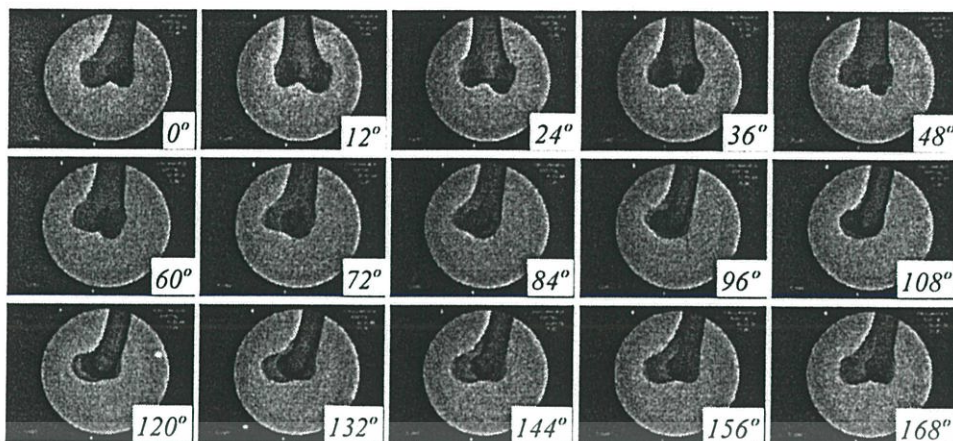
5.3 การทดลองสร้างภาพตัดขวางภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์

การทดลองสร้างภาพตัดขวางจากภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์นี้ได้ทำการทดลองกับชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ 3 ชุด คือชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของท่อ PVC ที่มีลวดอยู่ภายใน ชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของกระดูกหัวเข่า และชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของกระดูก เป็นจำนวน 60 มุม ระยะห่างระหว่างหัวส่งกับจุดหมุน (D_{so}) เท่ากับ 60 เซนติเมตร ขนาดของภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ 256x256 พิกเซล ดังรูปที่ 5.36, 5.37 และ 5.38 ตามลำดับ

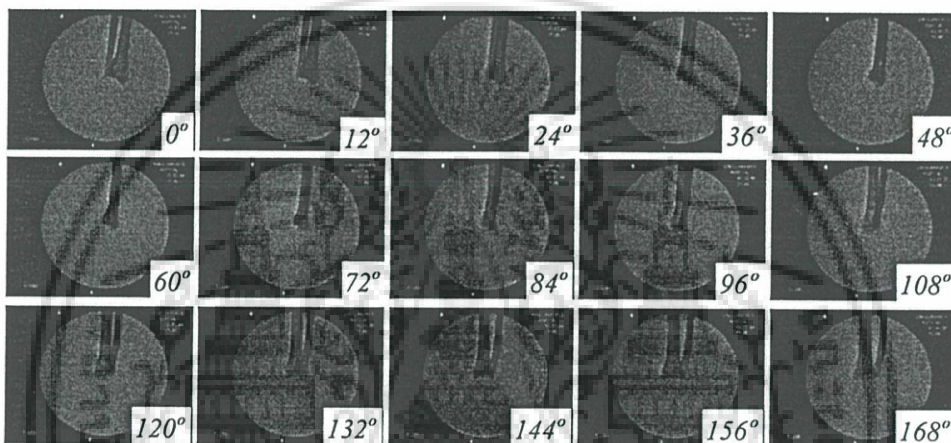


รูปที่ 5.36 ชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของท่อ PVC

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.37 ชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของกระดุกหัวเข้า



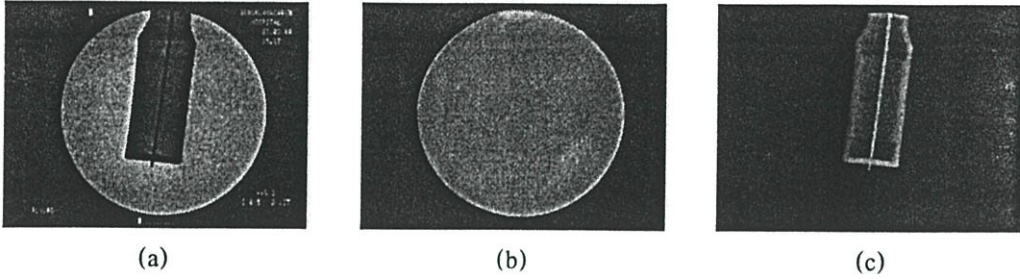
รูปที่ 5.38 ชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของกระดุก

5.3.1 การเตรียมข้อมูลภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์

จากภาพที่ 5.39 (a) เป็นตัวอย่างภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของท่อ PVC ขนาด 768x576 จะเห็นได้ว่า ข้อมูลที่จะนำมาใช้อยู่ในหน้าต่างวงกลม จึงต้องแยกเอาภาพข้อมูลเอ็กซ์เรย์ของวัตถุออกมา มีขั้นตอนดังนี้

1. สร้าง Background ที่เป็นภาพเฉพาะหน้าต่างรูปวงกลมดังรูปที่ 5.39 (b) โดยใช้โปรแกรม Photoshop ตัดเอาวัตถุและตัวหนังสือด้วยคำสั่ง Magic wand tool แยกออกไปแล้วเกลี่ยสีของพื้นหลังด้วยคำสั่ง Smudge ข้อมูลจากเครื่องถ่ายภาพเอ็กซ์เรย์
2. นำภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์มาลบกับภาพ Background เตรียมไว้ก็จะได้ข้อมูลภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ดังรูปที่ 5.39 (c)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

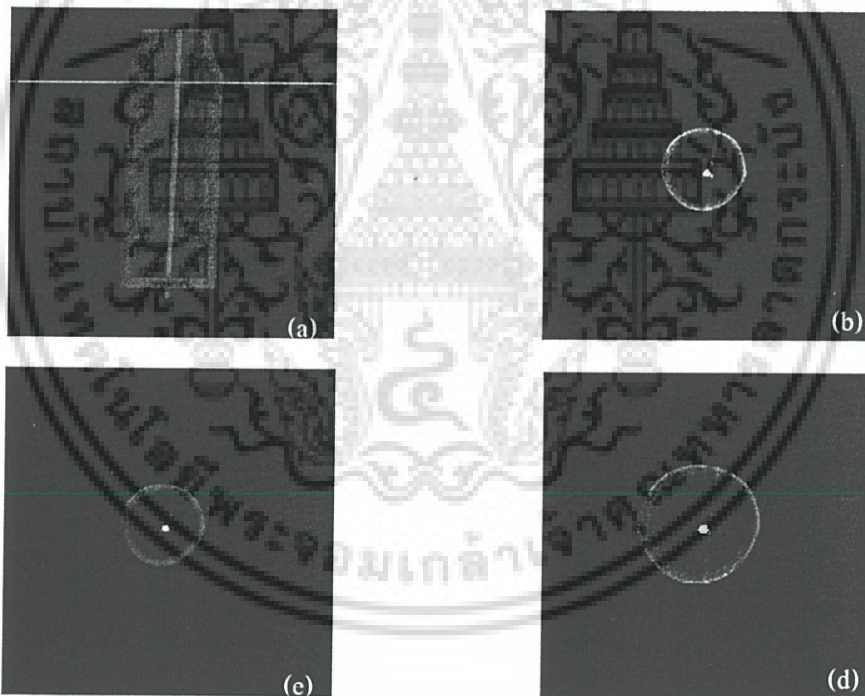


รูปที่ 5.39 การแยกข้อมูลภาพวัตถุในภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์

- (a) ข้อมูลจากเครื่องถ่ายภาพเอ็กซ์เรย์
- (b) ภาพ Background
- (c) ข้อมูลภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของวัตถุ

5.3.2 ผลการทดลองการสร้างภาพตัดขวางจากชุดข้อมูลภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์

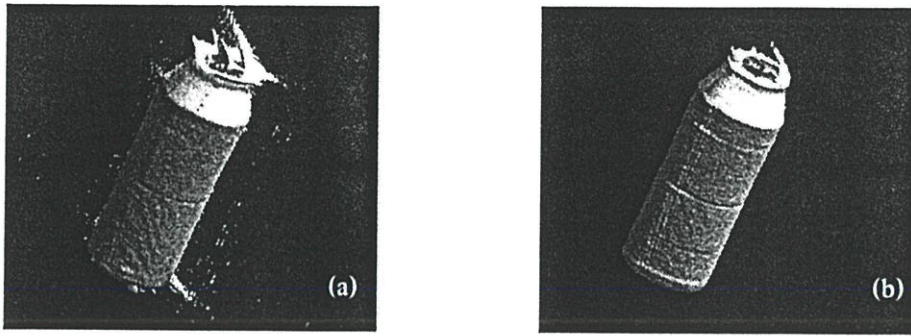
การทดลองเลือกใช้ชุดภาพเอ็กซ์เรย์ทั้ง 3 ชุด โดยแต่ละชุดมีจำนวน 60 มุม ขนาด 256x256 พิกเซล มีระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสงถึงจุดหมุน (D_{so}) เท่ากับ 92 ซม. ซึ่งภาพผลลัพธ์ที่สร้างได้จะมีขนาดเป็น 256x256 พิกเซล และมีจำนวน 256 สไลด์



รูปที่ 5.40 ภาพตัดขวางของท่อ PVC สไลด์ที่ 50 ขนาด 256x256

- (a) แสดงตำแหน่งภาพตัดขวางสไลด์ที่ 50
- (b) ภาพตัดขวางจากวิธี FeldKamp $D_{so} = 60$ เซนติเมตร
- (c) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Cone-beam $D_{so} = 60$ เซนติเมตร
- (d) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Parallel-beam

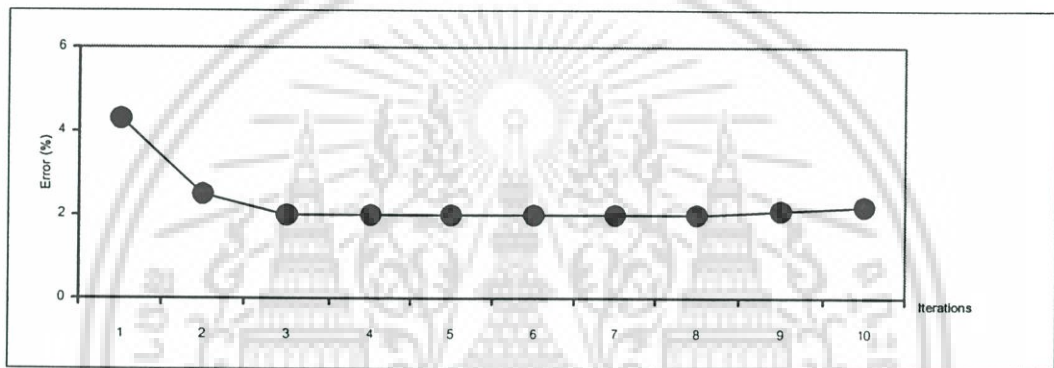
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



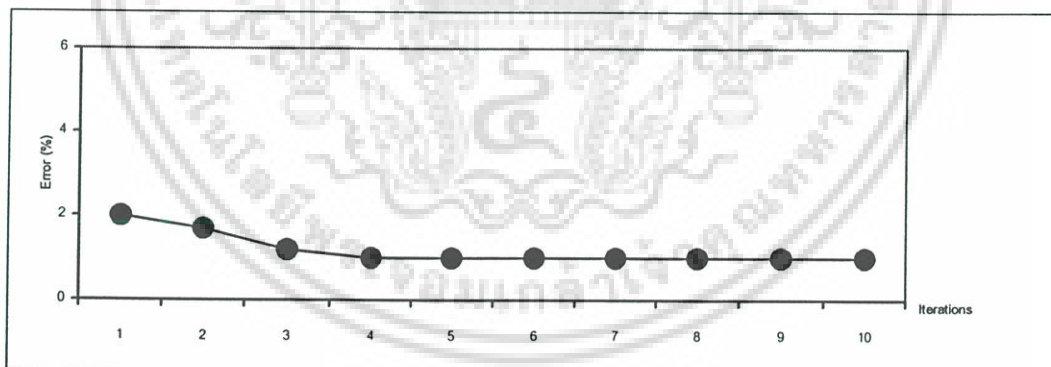
รูปที่ 5.41 ภาพเชิงพื้นผิวของท่อ PVC จากภาพตัดขวางแบบกรวยระยะ $D_{so} = 60$ เซนติเมตร

(a) FeldKamp

(b) SART Cone-beam



(a)

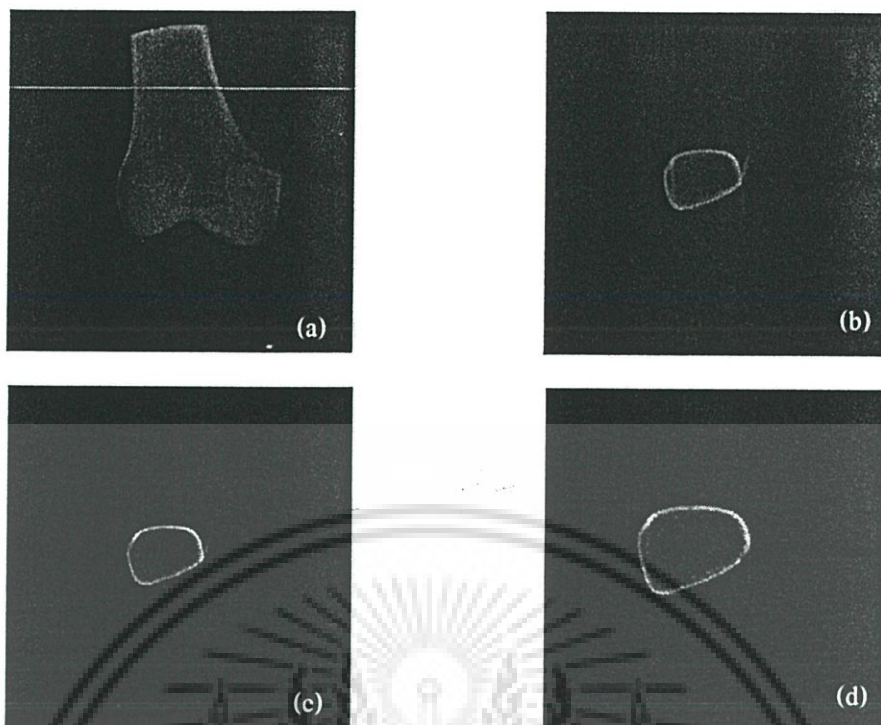


(b)

รูปที่ 5.42 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) ของท่อ PVC จำนวน 60 โปรเจกชันใช้จำนวนการทำซ้ำ 10 iterations

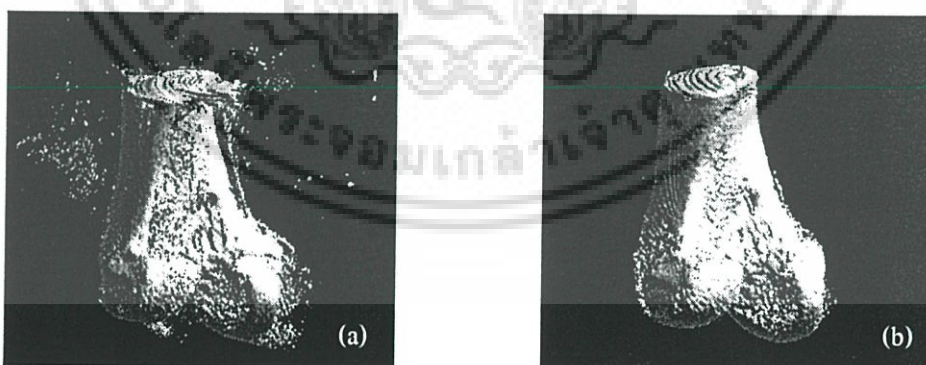
(a) SART Parallel-beam (b) SART Cone-beam $D_{so} = 60$ ซม.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.43 ภาพตัดขวางของกระจุกหัวเข้าสไลด์ที่ 50 ขนาด 256x256

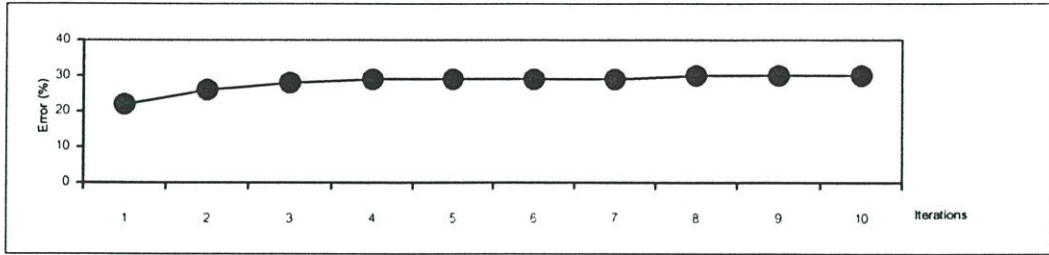
- (a) แสดงตำแหน่งภาพตัดขวางสไลด์ที่ 50
- (b) ภาพตัดขวางจากวิธี FeldKamp ระยะ $D_{so} = 60$ เซนติเมตร
- (c) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Cone-beam $D_{so} = 60$ เซนติเมตร
- (d) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Parallel-beam



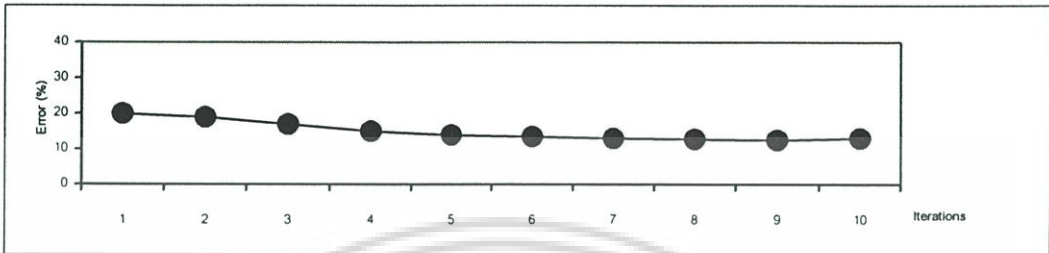
รูปที่ 5.44 ภาพเชิงพื้นผิวของกระจุกหัวเข้าจากภาพตัดขวางแบบกรวยระยะ $D_{so} = 60$ เซนติเมตร

- (a) FeldKamp
- (b) SART Cone-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



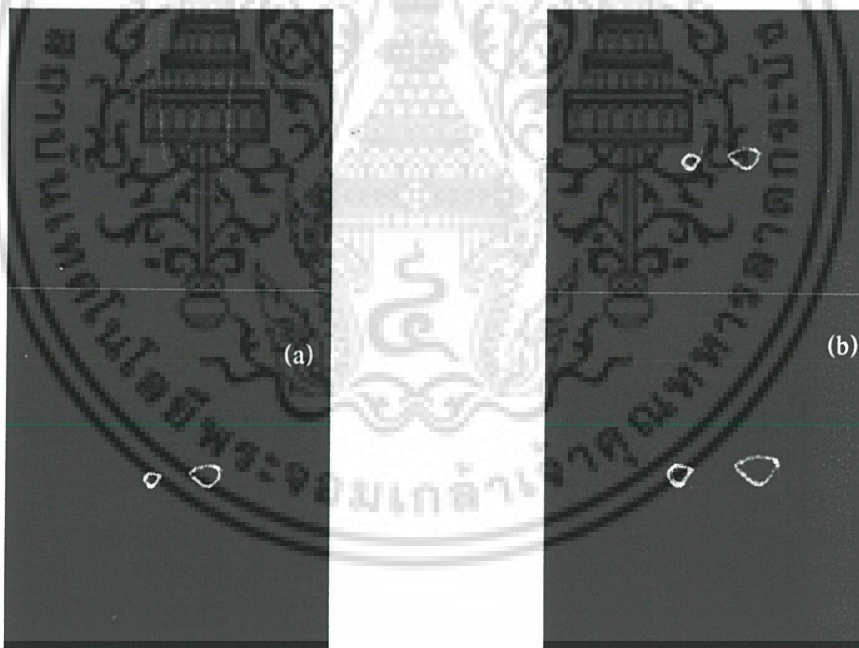
(a)



(b)

รูปที่ 5.45 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) ของกระดูกหัวเข่า จำนวน 60 โปรเจกชันใช้จำนวนการทำซ้ำ 10 iterations ของ

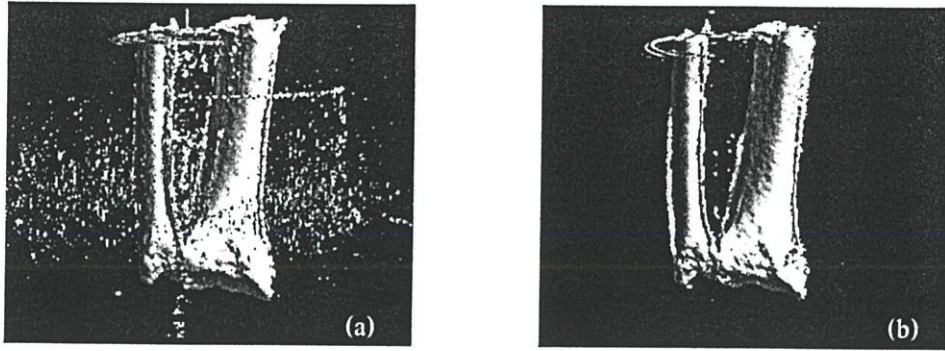
(a) SART Parallel-beam (b) SART Cone-beam $D_{so} = 60$ ซม.



รูปที่ 5.46 ภาพตัดขวางของกระดูกสไลด์ที่ 50 ขนาด 256x256

- (a) แสดงตำแหน่งภาพตัดขวางสไลด์ที่ 50
- (b) ภาพตัดขวางจากวิธี FeldKamp ระยะ $D_{so} = 60$ เซนติเมตร
- (c) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Cone-beam $D_{so} = 60$ เซนติเมตร
- (d) ภาพตัดขวางจากวิธี SART Parallel-beam

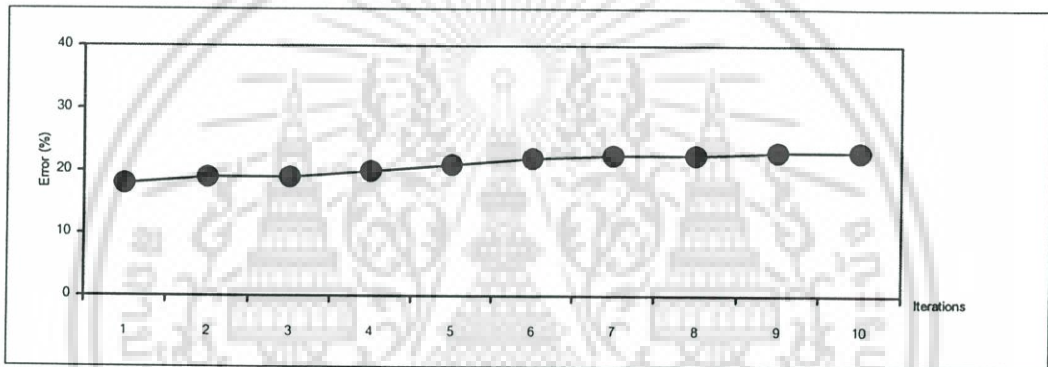
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



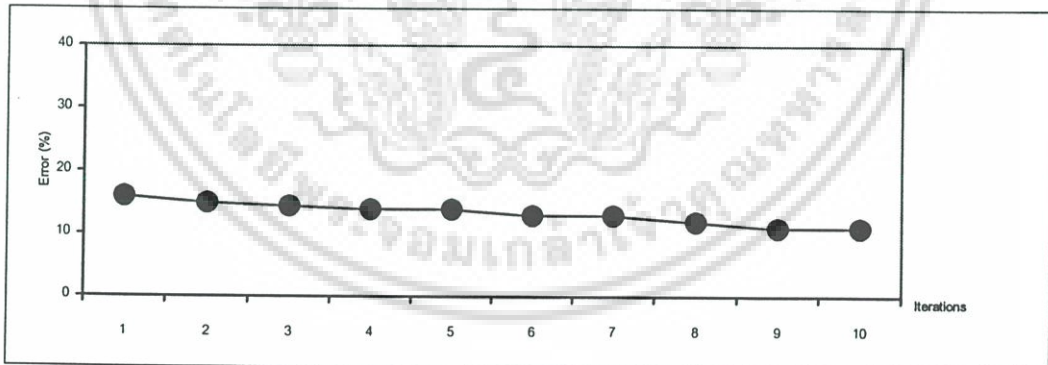
รูปที่ 5.47 ภาพเชิงพื้นผิวของกระดุกหัวเข้าจากภาพตัดขวางแบบกรวยระยะ $D_{so} = 60$ เซนติเมตร

(a) FeldKamp

(b) SART Cone-beam



(a)



(b)

รูปที่ 5.48 กราฟเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) ของกระดุกจำนวน 60 โปรเจกชันใช้จำนวนการทำซ้ำ 10 iterations ของ

(a) SART Parallel-beam (b) SART Cone-beam $D_{so} = 60$ ซม.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.3.3 การทดลองเปรียบเทียบภาพตัดขวางด้วยเทคนิค Principle Axes

เทคนิค Principle Axes นี้ เป็นวิธีการหาโคออดิเนตของวัตถุวิธีหนึ่งที่อยู่ภายในรูปของขนาดและทิศทางของวัตถุ ในการทดลองนี้ใช้ภาพตัดขวางของท่อ PVC ที่สร้างจากอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบ SART ทั้งแบบขนานและแบบกรวยมาใช้ในการทดสอบ เนื่องจากวัตถุภาพตัดขวางของท่อ PVC มีลักษณะเป็นรูปทรงเรขาคณิต คือรูปวงกลมมีรัศมีเท่ากับ 5.6 เซนติเมตร ซึ่งขั้นตอนของ Principle Axes มีดังนี้

5.3.3.1 กำหนดพิกัดรอบวัตถุโดยใช้เทคนิคของ Snake

ก่อนนำภาพมาคำนวณค่าพิกัดของวัตถุแบบ Snake นั้น ต้องนำภาพไปทำกระบวนการหาขอบของวัตถุก่อน ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้โปรแกรมตกแต่งภาพทั่วไป ในที่นี้ใช้โปรแกรม Adobe Photoshop CS หาขอบของวัตถุในภาพด้วยฟังก์ชัน “Find Edges” ดังรูปที่ 5.49

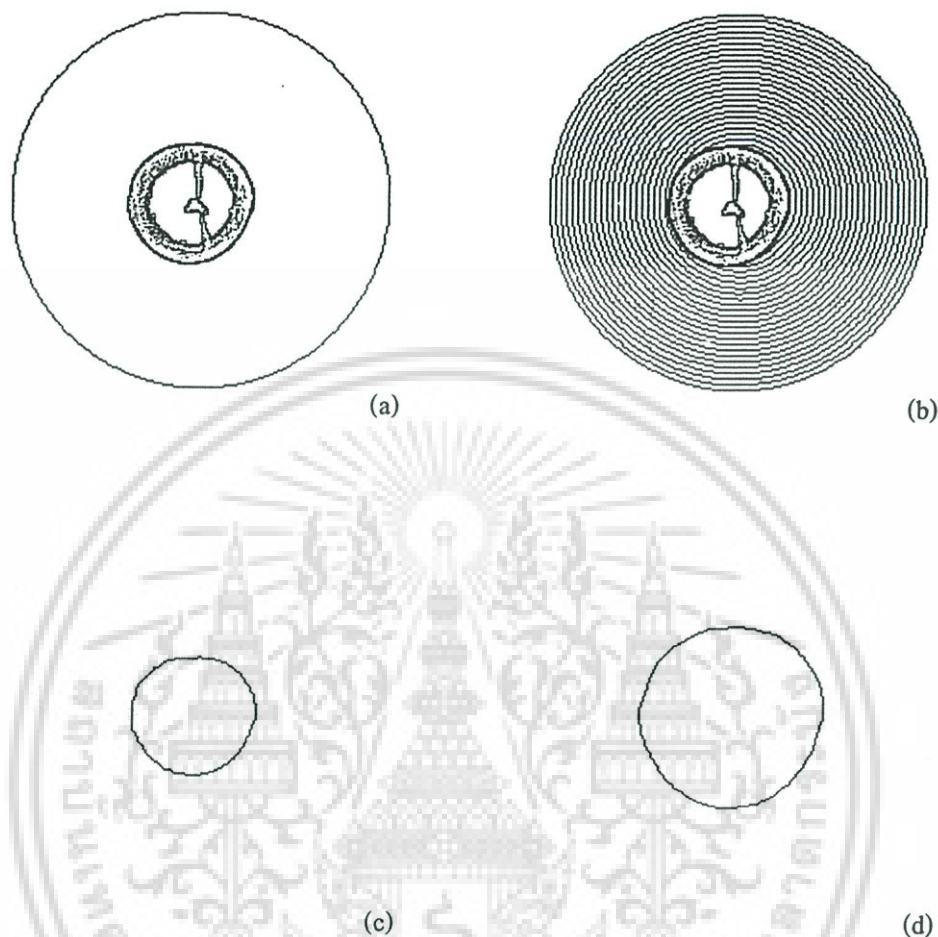


รูปที่ 5.49 การหาขอบวัตถุในภาพตัดขวาง

- (a) ภาพตัดขวางท่อ PVC จากวิธี SART Cone-beam สไลด์ที่ 100
- (b) ภาพขอบของท่อ PVC ในภาพตัดขวาง Cone-beam
- (c) ภาพตัดขวางท่อ PVC จากวิธี SART Parallel-beam สไลด์ที่ 100
- (d) ภาพขอบของท่อ PVC ในภาพตัดขวางแบบ Parallel-beam

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นนำภาพที่ผ่านการหาขอบภาพดังรูปที่ 5.49 (b) ไปใช้หาค่าแห่งฟังก์ชัน (Fit-Curve) รอบนอกของวัตถุด้วยวิธี Snake เราก็จะได้ฟังก์ชันรอบนอกวัตถุดังรูปที่ 4.50



รูปที่ 5.50 จำลองการทำงานหาฟังก์ชันของวัตถุ

- กำหนดฟังก์ชันเริ่มต้นให้ Snake
- ผลเฉลยที่ Snake คำนวณได้แต่ละการทำซ้ำ
- ตำแหน่งฟังก์ชันต่อ PVC ในภาพตัดขวางแบบ Cone-beam
- ตำแหน่งฟังก์ชันต่อ PVC ในภาพตัดขวางแบบ Parallel-beam

5.3.3.2 เลื่อนจุดกำเนิดของวัตถุไปยังจุดกำเนิดของภาพ

ในการเลื่อนจุดกำเนิดวัตถุไปยังจุดกำเนิดภาพทำได้โดยคำนวณหาจุดศูนย์กลางถ่วงของวัตถุจากฟังก์ชันรอบนอกของท่อ PVC โดยใช้สมการ

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \quad (5.1)$$

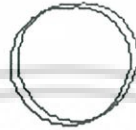
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$q_i = p_i - c \quad (5.2)$$

เมื่อ p_i คือพิกัดของวัตถุ

c คือพิกัดที่เลื่อนออกไปจากจุดกำเนิดภาพ

q_i คือพิกัดของวัตถุที่เลื่อนวัตถุเท่ากับ c



รูปที่ 5.51 การเลื่อนจุดกำเนิดของวัตถุ ไปยังจุดกำเนิดของภาพ

5.3.3.3 คำนวณ โควาเรียนซ์อันดับสอง Eigenvalue และ Eigenvectors

นำ q_i มาใช้คำนวณค่าโควาเรียนซ์อันดับสองดังสมการที่ 5.3 เพื่อนำไปหาค่า Eigenvalue และ Eigenvectors ที่บอกถึงลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างแกนภายในของรูปร่างกลมกับโคออดิเนตของภาพ

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} q_i^x q_i^x & q_i^x q_i^y \\ q_i^y q_i^x & q_i^y q_i^y \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$M = USU^T \quad (5.4)$$

$$U = \begin{bmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

เมื่อ M คือโควาเรียนซ์อันดับสองจากพิกัดของวัตถุ

U คือค่า Eigenvector ที่บอกทิศทางของแกน A, B ของแกนภายในโคออดิเนตของวัตถุ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

S คือค่า Eigenvalue ที่บอกขนาดด้วยสัมประสิทธิ์ λ ของแกนภายใน โคออดิเนตของวัตถุ

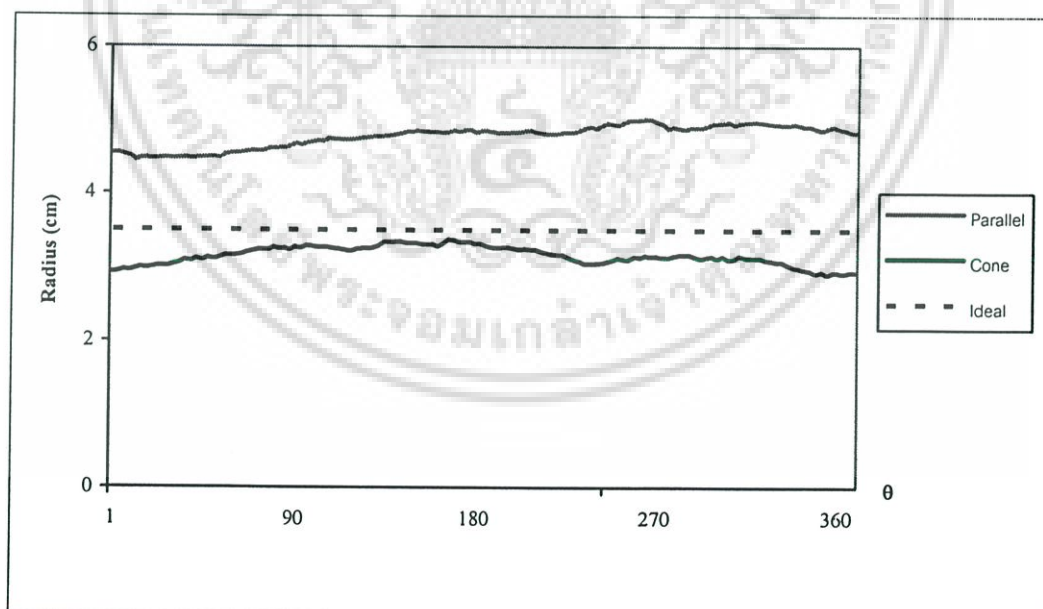
ตารางที่ 5.11 โควาเรียนซ์อันดับสองจากพิกัดของวัตถุในภาพตัดขวาง

	Second order co-variance			
	$M \times 10^4$			
	$q_i^x q_i^x$	$q_i^x q_i^y$	$q_i^y q_i^x$	$q_i^y q_i^y$
Parallel-beam	23.292	-0.197	-0.197	22.413
Cone-beam	6.8089	0.0337	0.0337	6.7745

ตารางที่ 5.12 Eigenvector และ Eigenvalue

	Eigenvector				Eigenvalue		$\frac{\lambda_a}{\lambda_b}$
	U (หน่วย)				$S \times 10^4$ (หน่วย)		
	A_x	A_y	B_x	B_y	λ_a	λ_b	
Parallel-beam	-0.2087	-0.9780	-0.9780	0.2087	22.371	23.334	0.9587
Cone-beam	0.5225	-0.8526	-0.8526	-0.5225	6.7538	6.8295	0.9889

วัตถุวงกลม (ท่อ PVC) จะมีอัตราส่วน Eigenvalue (λ_a / λ_b) เท่ากับ 1 จากผลการทดลองในตารางที่ 5.12 แสดงให้เห็นว่า อัตราส่วน Eigenvalue ของวัตถุในภาพตัดขวางแบบกรวยมีค่าใกล้เคียง 1 นั่นคือวัตถุมีรูปทรงเป็นวงกลมมากกว่าวัตถุในภาพตัดขวางแบบขนานนั่นเอง



รูปที่ 5.52 การเปรียบเทียบรัศมีของวัตถุในภาพตัดขวางกับรัศมีของท่อ PVC

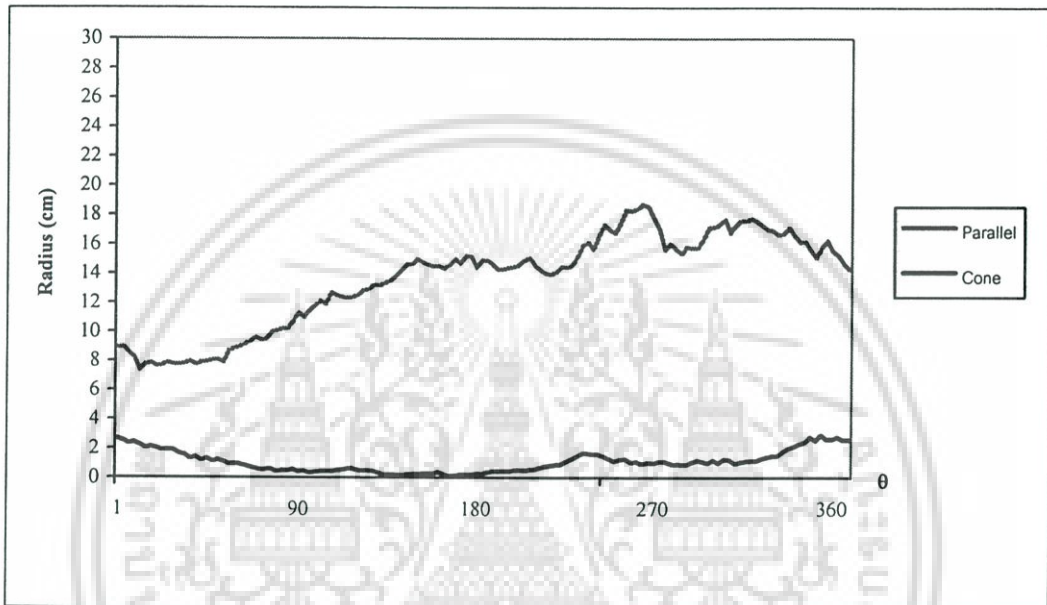
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อนำพิกัดของวัตถุในภาพตัดขวางทั้งสองแบบมาเขียนในระบบพิกัดเชิงขั้วพล็อตเปรียบเทียบ กับขนาดรัศมีของท่อ PVC ดังรูปที่ 5.52 และรูปที่ 5.53 เป็นกราฟค่าผิดพลาดขนาดของรัศมีของท่อ PVC ในภาพตัดขวาง

$$MSE(\%) = \frac{\int [r(i) - r'(i)]^2 d\bar{i}}{\int [r(i)]^2 d\bar{i}} \times 100 \quad (5.7)$$

เมื่อ r_i คือรัศมีที่วัดจากท่อ PVC

r'_i คือรัศมีที่คำนวณจากพิกัดของท่อ PVC



รูปที่ 5.53 ค่าความผิดพลาดรัศมีของท่อ PVC ในภาพตัดขวางแบบ Mean Square Error

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอการสร้างภาพตัดขวางอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตสำหรับเส้นทางเดินแสงแบบกรวย เพื่อเพิ่มความถูกต้องให้กับภาพตัดขวางเนื่องจากผลของมุมมองแบบสายตา (Perspective) ของภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ โดยพิจารณาเส้นทางเดินแสงเป็นแบบพัดที่ยกขึ้น-ลง เช่นเดียวกับวิธีการสร้างภาพตัดขวางแบบเฟลด์แคมป์ การทดลองได้แบ่งออกเป็น 2 ส่วน

ส่วนแรกเป็นการทดลองสร้างภาพตัดขวางจากแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์ (ซึ่งได้ใช้แบบจำลองของ Shepp and Logan Phantom) มีจำนวน 30, 60, 90 และ 120 โปรเจกชันตามลำดับ โดยใช้วิธีเฟลด์แคมป์ อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบขนาน (Parallel-beam) และอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบกรวย (Cone-beam) แล้วทำการหาค่าผิดพลาด (Error) MSE (%) ซึ่งจากผลการทดลองที่ 5.2 เมื่อเลือกใช้ระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสงถึงจุดหมุน (Dsc) ของการ โปรเจกชันให้มีสัดส่วนเท่ากับระยะการฉายภาพเอ็กซ์เรย์จริงคือ 60 เซนติเมตร พบว่าภาพตัดขวางที่สร้างได้ของแต่ละวิธีจะมีความผิดพลาดต่ำสุดเมื่อเลือกใช้ค่า Dsc ของการสร้างภาพตัดขวางเท่ากัน และจากผลการทดลองพบว่าภาพตัดขวางที่สร้างจากอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตมีความผิดพลาดต่ำกว่าวิธีเฟลด์แคมป์ และเมื่อเปรียบเทียบค่าความผิดพลาด โปรเจกชัน (Correction of projection) ซึ่งเป็นขั้นตอนการเปรียบเทียบหาผลเฉลยในอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตที่ระยะการฉายภาพเอ็กซ์เรย์ต่างๆ มาพล็อตกราฟพบว่าผลเฉลยของภาพตัดขวางมีลักษณะลู่เข้าเมื่อใช้ค่า Dsc เท่ากัน

ส่วนที่สองเป็นการทดลองการสร้างภาพตัดขวางจากภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของท่อ PVC และกระดูกแบบต่างๆ ที่ถ่ายในมุมที่ต่างกันจำนวน 60 ภาพ มีระยะการฉายจากหัวส่งถึงจุดหมุนเท่ากับ 60 เซนติเมตร พบว่าภาพตัดขวางของวิธีเฟลด์แคมป์เกิดความผิดพลาดเนื่องจากผล Star-artifact ซึ่งสามารถสังเกตได้ด้วยตาเปล่าได้อย่างชัดเจนดังผลการทดลองที่ 5.2 และ 5.3 ส่วนการเปรียบเทียบเส้นทางเดินแสงแบบขนานและแบบกรวยของอัลกอริทึมเชิงพีชคณิต ไม่สามารถเปรียบเทียบคุณภาพของภาพตัดขวางได้โดยตรง เนื่องจากต้องทราบถึงคุณสมบัติของวัตถุในระนาบเดียวกันกับภาพตัดขวางนั้นๆ ที่ถูกต้องและมีความแม่นยำสูงเพื่อใช้ในการอ้างอิงและเปรียบเทียบกับภาพตัดขวางที่ถูกสร้างขึ้นมา แต่จากผลการทดลองสร้างภาพตัดขวางชุดภาพถ่ายเอ็กซ์เรย์ของท่อ PVC พบว่าภาพตัดขวางของท่อ PVC จากอัลกอริทึมเชิงพีชแบบกรวยมีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาดเป็น 5.24 เซนติเมตร ซึ่งใกล้เคียงกับเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ PVC จริงที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาดเป็น 5.6 เซนติเมตร ในขณะที่ภาพตัดขวางของท่อ PVC จากอัลกอริทึมเชิงพีชแบบขนานที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางที่โตกว่าคือ 10.48 เซนติเมตร เนื่องจากผลของมุมมองแบบสายตาของชุดภาพถ่าย

เอ็กซ์เรย์ นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณาการลู่เข้าของผลเฉลยได้จากกราฟของค่าความผิดพลาดโปรเจกชัน (Correction of projection) ของขั้นตอนในอัลกอริทึมเชิงพีชคณิต จากผลการทดลองที่ 5.3 ภาพตัดขวางของอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบกรวย (ระยะ Dsc เท่ากับ 60 เซนติเมตร) จะมีค่าความผิดพลาดโปรเจกชันที่ต่ำกว่าและมีอัตราการลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่ดีกว่าภาพตัดขวางของอัลกอริทึมเชิงพีชคณิตแบบขนาน ซึ่งให้ผลที่สอดคล้องกับผลการทดลองสร้างภาพตัดขวางจากแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์

6.2 ข้อเสนอแนะ

สิ่งที่ควรศึกษาต่อไปคือการเพิ่มความเร็วให้กับอัลกอริทึมการสร้างภาพเชิงพีชคณิตสำหรับเส้นทางเดินแสงแบบกรวย โดยใช้ความสามารถของการ์ดแสดงผลกับไลบรารี OpenGL ที่มีฟังก์ชันการประมวลผลข้อมูลเชิงปริมาตรมุมมองแบบสายตาได้



เอกสารอ้างอิง

- [1] ชนาธิป นิลแก้ว, ชูชาติ ปิณฑวิรุจน์, มนัส สัจจวรศิลป์ และ กิติพล ชิตสกุล, 2544. “การสร้างภาพ 3 มิติจากภาพถ่ายเอ็กซเรย์” หน้า 1220-1225. การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 24. กรุงเทพฯ : คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
- [2] มานัส มงคลสุข. พื้นฐานทางฟิสิกส์ของ CT และ MRI. กรุงเทพฯ : ไทศาลศิลป์การพิมพ์. 2532.
- [3] Avinash C. Kak and M.C. Slaney, “Principles of Computerized Tomographic Imaging”. New York: IEEE Press. 1988.
- [4] Avinash C. Kak and S. X. Pan, “A computational study of reconstruction algorithms for diffraction tomography: Interpolation vs. filtered-backpropagation,” IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing, vol. ASSP-31, pp. 1262-1275, Oct. 1983.
- [5] Kuhl DE, Edwards RQ. Image sepaltion radioisotope scanning. Radiology. 1963; 80:653-661.
- [6] Kihl DE, Hale J, Eaton WL. Transmission scanning : a useful adjunct to conventional emission scanning for accurately keying isotope deposition to radiographic anatomy. Radiology 1966; 87:278-284.
- [7] P. Ungpinitpong, S. Ngamanekrat, K. Sepsirisuk, C. Pintavirooj, M. Sangworasil. “3D Visualization form X-Ray Radiograph Using Algebraic Reconstruction Technique”. "Proceeding of International Congress on Biological and Medical Engineering, Singapore, pp.84, December 2002.
- [8] R. Gordon, R. Bender, and G.T. Herman, “Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography,” J. Theoretical Biology, vol. 29, pp. 471-481, 1970.
- [9] A.H. Andersen and A.C. Kak, “Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm,” Ultrason. Img., vol. 6, pp. 81-84, 1984.
- [10] Mueller, K.; Yagel, R; “Rapid 3-D cone-beam reconstruction with the simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) using 2-D texture mapping hardware” Medical Imaging, IEEE Transactions on , Volume: 19 , Issue: 12 , Dec. 2000 pp:1227 – 1237.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [11] P. Gilbert, "Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections," *J. Theo. Biol.*, vol. 36, pp. 105-117, 1972.
- [12] S. Kaczmarz, "Angenaherte auflosung von systemen linearer gleichungen," *Bull. Acad. Pol. Sci. Lett. A*, vol. 6-8A, pp. 355-357, 1937.
- [13] K. Mueller. Fast and accurate three-dimensional reconstruction of algebraic methods for 3D reconstruction from cone-beam data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Sept 1999.
- [14] L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress, "Practical cone-beam algorithm," *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 1, pp. 612-619, June 1984.
- [15] A. C. Kak and B. Roberts, "Image reconstruction from projections," in *Handbook of Pattern Recognition and Image Processing*, T. Y. Young and K. S. Fu, Eds. New York, NY: Academic Press, 1986.
- [16] K. Tanabe, "Projection method for solving a singular system," *Numer. Math.*, vol. 17, pp. 703-714, 1971.
- [17] H. guan and R. Gordon. Computed tomography using algebraic reconstruction techniques (art) with different projection access schemes: a comparison study under practical situations. *Phys. Med. Biol.*, 41:1727-1743, 1996.
- [18] Chenyang Xu and Jerry L. Prince, "Gradient Vector Flow: A New External Force for Snakes" *IEEE Proc. Conf. on Comp.* 1997.

ประวัติผู้เขียน

นายศุภชัย งามอนเณรัตน์ เกิดเมื่อวันที่ 3 พฤษภาคม 2522 ที่จังหวัดสระบุรี สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปีการศึกษา 2544 และประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สาขาอิเล็กทรอนิกส์ จากวิทยาลัยเทคนิคท่าหลวง ปีการศึกษา 2541



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้