โปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น

CAI FOR VECTOR SPACE AND LINEAR TRANSFORMATION

วิไลลักษณ์ เลี้ยงบุตร
สมชาย สัจจปิยะนิจกุล
อาทิตย์ เวชสิทธิ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2542

CAI FOR VECTOR SPACE AND LINEAR TRANSFORMATION

WILAILUK LEANGBUT

SOMCHAI SATJAPIYANIJAKUL

ARTIT WETCHASITH

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILIMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE
MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 1999

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น CAI FOR VECTOR SPACE AND LINEAR TRANSFORMATION
ชื่อนักศึกษา	นางสาววิไลลักษณ์ เลี้ยงบุตร 39054141 นายสมชาย สัจจปิยะนิจกุล 39054146 นายอาทิตย์ เวชสิทธิ์ 39054153
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2542

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการ	อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก	เทอดขวัญ
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ	

(อาจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น
ชื่อนักศึกษา	นางสาววิไลลักษณ์ เลี้ยงบุตร 39054141
	นายสมชาย สัจจปิยะนิจกุล 39054146
	นายอาทิตย์ เวชสิทธิ์ 39054153
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2542
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างในสถาบันการศึกษาว่า โปรแกรมช่วยสอนมีความสำคัญและมีความจำเป็นต่อการศึกษาเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการศึกษา การศึกษาจะมีประสิทธิภาพและสำเร็จได้จะต้องมีสื่อและอุปกรณ์ทางการศึกษาที่ดีและทันสมัยพอสมควร

ดังนั้นโปรแกรมช่วยสอนการแปลงเชิงเส้นและปริภูมิเวกเตอร์จึงได้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดยใช้โปรแกรม Macromedia Authorware Versoin 5.0 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ผู้ใช้เกิดความเข้าใจในบทเรียนของวิชาพีชคณิตเชิงเส้นได้ดียิ่งขึ้น โดยนำเสนอในเรื่องการปริภูมิเวกเตอร์และแปลงเชิงเส้น รูปแบบของโปรแกรมออกแบบมาเพื่อให้ผู้ใช้สามารถเลือกเรียนในหัวข้อที่ต้องการได้ ในแต่ละหัวข้อจะมีเนื้อหา แบบฝึกหัดและแบบทดสอบ ในส่วนของการกำหนดค่าเองจะมีเฉพาะบางหัวข้อเท่านั้น

Special Project Title	CAI for Vector Space and Linear Transformation
Students	Miss. Wilailuk Leangbut 39054141
	Mr. Somchai Satjapiyanijakut 39054146
	Mr. Artit Wetchasith 39054153
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	1999
Special Project Advisor	Assistant Professor Patcharin Hemchote

ABSTRACT

Today, it is widely known in educational field Computer Aided Instruction is very significant and necessary for education in order to increase its efficiency. The good and update medias and equipments are important for the success and efficiency of the education.

Therefore, Computer Aided Instruction are developed by Macromedia Authorware Version 5.0. The purpose of this program is to help the users understand the Linear Algebra by presenting the Vector space and Linear Transformation.

The program is designed so that the users can select the topics they want. Each topic will contain concepts, exercise and test. There are just some topics that the users can be defined their own values.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องโปรแกรมช่วยสอนการแปลงเชิงเส้นและปริภูมิเวกเตอร์สามารถลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำปรึกษาอันก่อให้เกิดแนวความคิดที่สามารถแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ นอกจากนี้ยังช่วยแนะแนวทางในการดำเนินงานด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างดียิ่ง

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ รวมทั้งเพื่อน ๆ และ พี่ ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ เป็นอย่างดีเกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2543

สารบัญ

หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเป็นวิชาพื้นฐานที่นำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่น ๆ ซึ่งปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น ก็เป็นหัวข้อหนึ่งที่น่าสนใจในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นและเนื่องจากคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นวิธีหนึ่งที่ง่ายและรวดเร็วในการที่จะทำให้ผู้ใช้เข้าใจเนื้อหาต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้น ทางคณะผู้จัดทำ จึงมีความประสงค์ที่จะจัดทำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นในหัวข้อของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นขึ้น เพื่อให้นักเรียน นักศึกษาหรือผู้ที่สนใจนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ไปใช้ให้เกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อสร้างบทเรียนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นสื่อการสอน

1.2.2 เพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจ เนื้อหาเกี่ยวกับปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นมากยิ่งขึ้น

1.2.3 เพื่อศึกษาเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียน ซึ่งสามารถใช้ในการสร้างและพัฒนาบทเรียนเรื่องอื่น ๆ อีกต่อไป

1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

โปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นที่ถูกสร้างขึ้นอย่างสมบูรณ์แล้วจะทำให้ผู้ใช้เข้าใจบทเรียนมากขึ้นและเป็นแนวทางให้กับผู้ที่สนใจนำไปพัฒนาโปรแกรมอื่น ๆ ให้ดียิ่งขึ้น

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการศึกษา

รูปแบบของโปรแกรมประกอบด้วยเนื้อหา แบบฝึกหัดและแบบทดสอบของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น และจะมีส่วนที่ให้ผู้ใช้กำหนดค่าเองเพื่อทดสอบความเข้าใจในเฉพาะบางหัวข้อ ในการเรียนนั้นผู้เรียนสามารถเลือกเรียนในหัวข้อใดก็ได้ตามต้องการ ในส่วนของแบบฝึกหัดเมื่อทำเสร็จแต่ละข้อโปรแกรมจะเฉลยว่าถูกหรือผิดถ้าผิดโปรแกรมจะบอกว่าให้ผู้ใช้กลับไปอ่านเนื้อหาหัวข้อของแบบฝึกหัดข้อนั้น ๆ

1.5 ขอบเขตการศึกษา

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นโปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น โดยจะคลอบคลุมเนื้อหาในส่วนของ ปริภูมิแบบยุคลิด n มิติ, ปริภูมิเวกเตอร์, มูลฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์, เวกเตอร์แถวและเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์, ผลคูณภายใน, บทนำสำหรับการแปลงเชิงเส้น, ส่วนกลางและเรนจ์, การแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m และเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น

1.6 ขั้นตอนการศึกษา

1.6.1 ศึกษาหลักการและทฤษฎีของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน
1.6.2 ศึกษาเนื้อหาของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น
1.6.3 จัดทำในส่วนรายละเอียดของเนื้อหารวมไปถึงตัวอย่าง แบบฝึกหัดและแบบทดสอบ
1.6.4 ประเมินผลและตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา แบบฝึกหัดและแบบทดสอบ
1.6.5 ศึกษาเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรม
1.6.6 ออกแบบการนำเสนอ
1.6.7 เขียนโปรแกรมและบรรจุเนื้อหา
1.6.8 ทำการทดสอบและแก้ไขความถูกต้องทุกส่วนของโปรแกรม
1.6.9 ปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอให้สวยงาม เพิ่มลูกเล่นต่าง ๆ
1.6.10 จัดทำคู่มือการใช้งาน

บทที่ 2
ทฤษฎีและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

2.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.1.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอน(CAI) คืออะไร

คนส่วนใหญ่มักจะรู้จักคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในชื่อของ CAI ซึ่งย่อมาจากคำในภาษาอังกฤษว่า Computer – Assisted หรือ –Aided Instruction คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) หมายถึง สื่อการเรียนการสอนทางคอมพิวเตอร์ในการนำเสนอสื่อประสมอันได้แก่ ข้อความ ภาพนิ่ง กราฟิก แผนภูมิ กราฟ ภาพเคลื่อนไหว วีดีทัศน์และเสียง เพื่อถ่ายทอดเนื้อหาบทเรียนหรือองค์ความรู้ในลักษณะที่ใกล้เคียงกับการสอนจริงในห้องเรียนมากที่สุด โดยที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะนำเสนอเนื้อหาที่ละหน้าจอภาพ โดยเนื้อหาความรู้ในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะได้รับการถ่ายทอดในลักษณะที่แตกต่างกันออกไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับธรรมชาติและโครงสร้างของเนื้อหา โดยมีเป้าหมายสำคัญก็คือการได้มาซึ่งคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สามารถดึงดูดความสนใจของผู้เรียนและกระตุ้นผู้เรียนให้เกิดความต้องการที่จะเรียนรู้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นตัวอย่างที่ดีของสื่อการศึกษาในลักษณะตัวต่อตัวซึ่งผู้เรียนเกิดการเรียนรู้จากการมีปฏิสัมพันธ์หรือการโต้ตอบพร้อมทั้งการได้รับผลป้อนกลับอย่างสม่ำเสมอกับเนื้อหาและกิจกรรมต่างๆ ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่เกี่ยวเนื่องกับการเรียน นอกจากนี้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนยังเป็นสื่อที่สามารถตอบสนองความแตกต่างระหว่างผู้เรียนได้เป็นอย่างดีรวมทั้งสามารถที่จะประเมินและตรวจสอบความเข้าใจของผู้เรียนได้ตลอดเวลา ดังนั้นผู้สอนจะสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปช่วยการสอนของตนได้อย่างมีประสิทธิภาพเพราะมีงานวิจัยหลายชิ้นที่สนับสนุนว่า ผู้เรียนที่ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการเรียนจะใช้เวลาเพียงสองในสามของผู้เรียนที่เรียนด้วยวิธีที่สอนตามปกติ ในขณะเดียวกันผู้เรียนสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ในการเรียนด้วยตนเองโดยปราศจากข้อจำกัดทางด้านเวลาและสถานที่ในการศึกษา โดยเฉพาะผู้เรียนที่เรียนอ่อนสามารถใช้ประโยชน์จากคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการเรียนเพิ่มเติมนอกเวลาได้

เนื่องจากในขณะนี้ มีการผลิตสื่อการศึกษาทางคอมพิวเตอร์ซึ่งใช้มัลติมีเดียในการนำเสนอเนื้อหาออกเป็นจำนวนมากซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของมัลติมีเดียซีดี-รอม จนทำให้เกิดความสับสนว่า สื่อเหล่านั้นเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนหรือไม่อย่างไร สิ่งสำคัญก็คือ การเข้าใจว่าสื่อการศึกษาทางคอมพิวเตอร์ทั้งหมดไม่ใช่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเนื่องจากหากพิจารณาอย่างละเอียดแล้ว มีการสื่อสารทางคอมพิวเตอร์อยู่จำนวนมากที่จัดว่าเป็นแค่สื่อที่ใช้ในการนำเสนอ (Presentation Media) เนื่องจากสื่อการศึกษาเหล่านั้นต่างขาดคุณลักษณะสำคัญ 4 ประการของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สมบูรณ์ ซึ่งก็ได้แก่ สารสนเทศ,ความแตกต่างระหว่างบุคคล,การโต้ตอบ,ผลป้อนกลับโดยทันที

2.1.2 คุณลักษณะสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน(CAI)

คุณลักษณะที่เป็นองค์ประกอบสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน 4 ประการ ได้แก่

2.1.2.1 สารสนเทศ (Information)

สารสนเทศ (Information) ในที่นี้หมายถึง เนื้อหาสาระที่ได้รับการเรียบเรียงแล้วเป็นอย่างดี ซึ่งทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้หรือได้รับทักษะอย่างหนึ่งอย่างใดตามที่ผู้สร้างได้กำหนดวัตถุประสงค์ไว้ โดยการนำเสนอเนื้อหานี้อาจเป็นการนำเสนอในรูปแบบต่างๆ ซึ่งอาจจะเป็นลักษณะทางตรงหรือทางอ้อมก็ได้ โดยลักษณะทางตรงก็ได้แก่การนำเสนอเนื้อหาในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์ ส่วนลักษณะทางอ้อมก็ได้แก่ การนำเสนอเนื้อหาในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกม สารสนเทศเป็นคุณลักษณะสำคัญประการหนึ่งของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ช่วยแยกความแตกต่างระหว่างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกม ออกจากซอฟต์แวร์เกมซึ่งมุ่งเน้นแต่ความบันเทิงและความเพลิดเพลินของผู้ใช้โดยไม่คำนึงถึงการให้ความรู้หรือทักษะแก่ผู้เรียนแต่อย่างใดเช่น ซอฟต์แวร์เกมสตรีทไฟท์เตอร์ เป็นต้น

2.1.2.2 ความแตกต่างระหว่างบุคคล (Individualization)

การตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคลคือลักษณะสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน บุคคลแต่ละบุคคลมีความแตกต่างกันทางการเรียนรู้ซึ่งเกิดจากบุคคลิกภาพ สติปัญญา ความสนใจ พื้นฐานความรู้ที่แตกต่างกันออกไป (Individualization) คอมพิวเตอร์ช่วยสอนซึ่งเป็นสื่อการเรียนการสอนรายบุคคลประเภทหนึ่งจึงต้องได้รับการออกแบบให้มีลักษณะที่ตอบสนองต่อความแตกต่างส่วนบุคคลให้มากที่สุด กล่าวคือคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะต้องมีความยืดหยุ่นมากพอที่ผู้เรียนจะมีอิสระในการควบคุมการเรียนของตน รวมทั้งการเลือกรูปแบบการเรียนที่เหมาะสมกับตนได้ การควบคุมการเรียนของตนนี้ก็มีอยู่หลายลักษณะด้วยกัน ลักษณะสำคัญได้แก่

<u>การควบคุมเนื้อหา</u> การเลือกที่เรียนส่วนใด ข้ามส่วนใด ออกจากบทเรียนเมื่อใดหรือย้อนกลับมาเรียนในส่วนที่ยังไม่ได้ศึกษา เช่น มีเมนูหรือรายการที่แยกเนื้อหาตามหัวข้ออย่างชัดเจนหรือปุ่มควบคุมต่างๆ ในการสืบไปในบทเรียน

<u>การควบคุมลำดับของการเรียน</u> การเลือกที่จะเรียนส่วนใด ก่อนหลังหรือการสร้างลำดับการเรียนด้วยตนเอง เช่น ในลักษณะการเรียนเนื้อหาแบบโยงใยหรือสื่อหลายมิติ (Hypermedia) ซึ่งกำลังเป็นที่นิยมกันอยู่ในปัจจุบัน ซึ่งผู้เรียนสามารถที่กดเลือกข้อมูลที่ต้องการเรียนตามความสนใจความถนัดหรือตามพื้นฐานความรู้ของตนได้

<u>การควบคุมการฝึกปฏิบัติหรือการทดสอบ</u> ความต้องการที่จะฝึกปฏิบัติหรือทำแบบทดสอบหรือไม่ หากทำจะทำมากน้อยเพียงใด เช่น การใช้ปุ่มควบคุมต่างๆ จัดหาไว้ทุกหน้าที่จำเป็น เช่น ปุ่มเลิกทำ ปุ่มกลับไปหน้าเดิม เป็นต้น

นอกจากนี้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สมบูรณ์แบบอาจจะต้องมีการนำระบบผู้เชี่ยวชาญหรือระบบปัญญาประดิษฐ์มาประยุกต์ใช้ เพื่อที่จะสามารถตอบสนองต่อความแตกต่างของผู้เรียนได้อย่างมีประ-สิทธิภาพมากขึ้น

2.1.2.3 การโต้ตอบ (Interaction)

การโต้ตอบ (Interaction) ในที่นี้คือ การมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างผู้เรียนกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนการเรียนการสอนรูปแบบที่ดีที่สุดก็คือการเรียนการสอนในลักษณะที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มี

ปฏิสัมพันธ์กับผู้สอนได้มากที่สุดนอกจากนี้การที่มนุษย์สามารถเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้นหาใช่เกิดขึ้นเพียงจากการสังเกตเท่านั้น หากจะต้องมีการโต้ตอบหรือปฏิสัมพันธ์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการได้มี

ปฏิสัมพันธ์กับผู้สอน ดังนั้นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ได้รับการออกแบบมาอย่างดีจะต้องเอื้ออำนวยให้เกิดการตอบโต้ระหว่างผู้เรียนกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอย่างต่อเนื่องและตลอดทั้งบทเรียนการอนุญาติให้ผู้เรียนเพียงแค่การคลิกเปลี่ยนหน้าจอไปเรื่อยๆ ทีละหน้าไม่ถือว่าเป็นปฏิสัมพันธ์ที่เพียงพอสำหรับการเรียนรู้

อย่างไรก็ดีซอฟต์แวร์มากมายที่โฆษณาตนเองว่าเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแต่เมื่อเปิดใช้กันจริงๆ แล้ว ไม่น่าจะเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้เลย ทั้งนี้ก็เพราะการที่ผู้สร้างไม่ได้นำคุณลักษณะที่สำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในส่วนของปฏิสัมพันธ์นี้ไปประยุกค์ใช้ในการออกแบบซอฟต์แวร์ทางการศึกษาที่ได้รับการออกแบบให้ผู้ใช้กดเมาส์เพื่อพลิกหน้าไปเรื่อยๆ นั้นไม่ถือว่าเป็นการปฏิสัมพันธ์โต้ตอบระหว่างผู้เรียนและผู้สอนที่มีความหมาย (Meaningful) การที่จะทำให้เกิดปฏิสัมพันธ์โต้ตอบระหว่างผู้เรียนและผู้สอน ผู้สร้างซอฟต์แวร์จำเป็นต้องใช้เวลาในส่วนของการสร้างความคิดวิเคราะห์และสร้างสรรค์เพื่อให้ได้มาซึ่งกิจกรรมการเรียน (Activity) หรืองาน (task) ที่ก่อให้เกิดปฏิสัมพันธ์ซึ่งมีความเกี่ยวเนื่องกับบทเรียนและเอื้ออำนวยให้เกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.1.2.4 การให้ผลป้อนกลับโดยทันที (Immediate Feedback)

ลักษณะที่ขาดไม่ได้อีกประการหนึ่งของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนก็คือ การให้ผลป้อนกลับโดยทันที ตามแนวคิดของสกินเนอร์ (Skinner) แล้ว ผลป้อนกลับหรือการให้คำตอบนี้ถือเป็นการเสริมแรงอย่างหนึ่ง การให้ผลป้อนกลับแก่ผู้เรียนในทันทีหมายรวมไปถึงการที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สมบูรณ์จะต้องมีการทดสอบหรือประเมินความเข้าใจของผู้เรียนในเนื้อหาหรือทักษะต่างๆ ตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้ด้วย ซึ่งการให้ผลป้อนกลับแก่ผู้เรียนเป็นวิธีที่อนุญาตให้ผู้เรียนสามารถตรวจสอบการเรียนของตนได้ ทั้งนี้มีงานวิจัยหลายชิ้นซึ่งสนับสนุนว่าการให้ผลป้อนกลับแก่ผู้เรียนจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนได้เป็นอย่างดี ความสามารถในการให้ผลป้อนกลับ

โดยทันทีของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้เองที่ถือได้ว่าเป็นจุดเด่นหรือข้อได้เปรียบประการสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเทียบกับสื่อประเภทอื่นๆไม่ว่าจะเป็นสื่อสิ่งพิมพ์หรือสื่อโสตทัศนวัสดุแล้ว เนื่องจากสื่ออื่นๆ นั้นไม่สามารถที่จะประเมินผลการเรียนของผู้เรียนพร้อมกลับการให้ผลป้อนกลับโดยฉับพลันเช่นเดียวกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ลักษณะของการให้ผลป้อนกลับนี้เป็นสิ่งที่ทำให้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนแตกต่างไปจากมัลติมีเดียซีดีรอมส่วนใหญ่ซึ่งได้มีการรวบรวมและนำเสนอเนื้อหาเกี่ยวกับเรื่องราวของสิ่งต่างๆ หรือเหตุการณ์สำคัญต่างๆ ฯลฯ แต่มัลติมีเดียซีดีรอมไม่ได้มีการประเมินความเข้าใจของผู้ใช้ แต่อย่างใดไม่ว่าจะอยู่ในรูปแบบทดสอบแบบฝึกหัดหรือการตรวจสอบความเข้าใจในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งซึ่งทำให้มัลติมีเดียซีดีรอมเหล่านั้นถูกจัดว่าเป็นสื่อสำหรับการนำเสนอ (Presentation Media) ไม่ใช่คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.1.3 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสามารถแบ่งได้เป็น 5 ประเภทด้วยกัน คือ ประเภทติวเตอร์ ประเภทแบบฝึกหัด ประเภทเกม ประเภทการจำลองและประเภทแบบทดสอบ

2.1.3.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์ คือบทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งนำเสนอเนื้อหาแก่ผู้เรียน ไม่ว่าจะเป็นเนื้อหาใหม่หรือการทบทวนเนื้อหาเดิมก็ตาม ส่วนใหญ่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์จะมีแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัด เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนอยู่ด้วยอย่างไรก็ตาม ผู้เรียนมีอิสระพอที่จะเลือกตัดสินใจว่าจะทำแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัดหรือไม่อย่างไรหรือจะเลือกเรียนเนื้อหาส่วนไหน เรียงลำดับในรูปแบบใด เพราะการเรียนโดยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นผู้เรียนจะสามารถควบคุม การเรียนของตนได้ตามความต้องการของตนเอง

2.1.3.2 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งมุ่งเน้นให้ผู้ใช้ทำแบบฝึกหัดจนสามารถเข้าใจเนื้อหา ในบทเรียนนั้นๆ ได้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัดเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่ได้รับความนิยมมากโดยเฉพาะในระดับอุดมศึกษา ทั้งนี้เนื่องจากเป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนที่เรียนอ่อน หรือเรียนไม่ทันคนอื่นๆ ได้มีโอกาสทำความเข้าใจบทเรียนสำคัญๆได้โดยที่ครูผู้สอนไม่ต้องเสียเวลาในชั้นเรียนอธิบายเนื้อหาเดิมซ้ำแล้วซ้ำอีก

2.1.3.3 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทการจำลอง คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่การนำเสนอบทเรียนในรูปแบบของการจำลองแบบ (simulation) โดยการจำลองสถานการณ์ที่เหมือนจริงขึ้นและบังคับให้ผู้เรียนต้องตัดสินใจแก้ปัญหา (problem-solving) ในตัวบทเรียน จะมีคำแนะนำเพื่อช่วยในการตัดสินใจของผู้เรียนและแสดงผลลัพธ์ในการตัดสินใจนั้นๆ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทการจำลอง คือ การลดค่าใช้จ่ายและการลดอันตรายอันเกิดขึ้นได้จากการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นในสถานการณ์จริง

2.1.3.4 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกม คือบทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ทำให้ผู้ใช้มีความสนุกสนาน เพลิดเพลิน จนลืมไปว่ากำลังเรียนอยู่ เกมคอมพิวเตอร์ทางการศึกษาเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่สำคัญประเภทหนึ่ง เนื่องจากเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่กระตุ้นให้เกิดความสนใจ ในการเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้นิยมใช้กับเด็กตั้งแต่ระดับประถมศึกษา ไปจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นอกจากนี้ยังสามารถนำมาใช้กับผู้เรียนในระดับอุดมศึกษา เพื่อเป็นการปูทางให้ผู้เรียนเกิดความรู้สึกที่ดีกับการเรียนทางคอมพิวเตอร์ได้อีกด้วย

2.1.3.5 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ คือ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสร้างแบบทดสอบ การจัดการการสอบ การตรวจให้คะแนน การคำนวณผลสอบ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบคือ การที่ผู้เรียนได้รับผลป้อนกลับโดยทันที ซึ่งเป็นข้อจำกัดของการทดสอบที่ใช้กันอยู่ทั่วๆไป นอกจากนี้การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณผลทดสอบก็ยังมีความแม่นยำและรวดเร็วอีก

อย่างไรก็ตาม การแบ่งประเภทคอมพิวเตอร์ช่วยสอนออกเป็นประเภทต่างๆ 5 ประเภทนี้เป็นการแบ่งตามลักษณะเฉพาะตัวที่โดดเด่นของแต่ละประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน อย่างไรก็ตามไม่ได้หมายความว่าคอมพิวเตอร์ช่วยสอนทุกโปรแกรมที่ได้รับการพัฒนาออกมานั้นจะต้องเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทใดประเภทหนึ่งเสมอไปคอมพิวเตอร์ช่วยสอนหลายโปรแกรมด้วยกันที่เริ่มด้วยลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์และตามด้วยการนำลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทฝึกปฏิบัติเข้ามาใช้ นอกจากนี้ยังมีการนำลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมมาผสมผสานเพื่อทำการฝึกปฏิบัตินั้นมีความสนุกสนานเพลิดเพลินอีกด้วย ดังนั้นการแบ่งประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนออกเป็นประเภทต่างๆ 5 ประเภทนี้จึงเป็นเหมือนแนวคิดพื้นฐานสำหรับผู้ที่ต้องการจะพัฒนาและออกแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอย่างมีประสิทธิภาพได้ยึดถือเป็นเกณฑ์ในการแบ่งเท่านั้น ไม่ได้มุ่งหวังให้เป็นเกณฑ์ตายตัวแต่อย่างใด

2.1.4 ประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.1.4.1 คอมพิวเตอร์เตอร์ช่วยสอนเกิดจากความพยายามในการที่จะช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนอ่อนสามารถใช้เวลานอกเวลาเรียนในการฝึกฝนทักษะและเพิ่มเติมความรู้เพื่อที่จะปรับปรุงการเรียนของตนให้ทันผู้เรียนอื่นได้ ดังนั้นผู้สอนจึงสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ช่วยในการสอนเสริมหรือสอนทบทวนการสอนปรกติในชั้นเรียนได้ โดยที่ผู้สอนไม่จำเป็นต้องเวลาในสอนซ้ำกับผู้เรียนที่ตามไม่ทันหรือจัดการสอนเพิ่มเติม

2.1.4.2 ผู้เรียนก็สามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ในการเรียนด้วยตนเองในเวลาและสถานที่ซึ่งผู้เรียนสะดวก เช่น แทนที่จะต้องเดินทางมายังชั้นเรียนตามปรกติ ผู้เรียนก็สามารถเรียนด้วยตนเองจากที่บ้านได้ นอกจากนั้นยังสามารถเรียนในเวลาใดก็ได้ที่ต้องการ เป็นต้น

2.1.4.3 ข้อได้เปรียบที่สำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนก็คือคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ได้รับการออกแบบมาอย่างดีถูกต้องตามหลักของการออกแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นสามารถที่จะจูงใจผู้เรียนให้เกิดความกระตือรือร้นที่จะเรียนและสนุกสนานไปกับการเรียนตามแนวคิดของการเรียนรู้ในปัจจุบันที่ว่า "Learning Is Fun" ซึ่งหมายถึง การเรียนรู้เป็นเรื่องสนุก

2.1.5 คุณค่าทางการศึกษาของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนไม่ใช่สื่อการศึกษาใหม่แต่อย่างใด ในสหรัฐอเมริกานั้นเป็นเวลากว่า 3 ทศวรรษแล้วที่ได้มีความพยายามในการนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเข้ามาช่วยในการเรียนการสอน สำหรับประเทศไทยก็เริ่มมีการใช้มาประมาณ 10 กว่าปีได้แล้ว สาเหตุที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้รับความนิยมเรื่อยมาและมีแนวโน้มที่จะเป็นสื่อการศึกษาที่สำคัญต่อไปในอนาคตก็เนื่องจากการที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีคุณค่าทางการศึกษา อีกนัยหนึ่งก็คือ การที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสามารถเข้ามาช่วยการแก้ทางการศึกษาได้นั้นเอง ปัญหาที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสามารถเข้ามาช่วยแก้ได้เป็นอย่างดี ได้แก่

2.1.5.1 ปัญหาการสอนแบบตัวต่อตัว

ในปัจจุบันด้วยอัตราส่วนของครูต่อนักเรียนที่สูงมาก การสอนแบบตัวต่อตัวในชั้นเรียนปกติเป็นสิ่งที่เป็นไปไม่ได้เลยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงเปรียบเสมือนทางเลือกใหม่ที่เปิดโกาสให้ผู้เรียนได้มีปฏิสัมพันธ์หรือมีการโต้ตอบกับผู้สอนได้มากและผู้สอนก็สามารถตอบสนองความต้องการของการผู้เรียนได้ทันที

2.1.5.2 ปัญหาเรื่องภูมิหลังที่แตกต่างกันของผู้เรียน

ผู้เรียนแต่ละคนย่อมที่จะมีพื้นฐานความรู้ซึ่งแตกต่างกันออกไปคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถศึกษาตามความรู้ความสามารถของตน โดยการเลือกลักษณะและรูปแบบการเรียนที่เหมาะสมกับตนได้ เช่น ความเร็วช้าของการเรียน เนื้อหาและลำดับของการเรียน เป็นต้น

2.1.5.3 ปัญหาการขาดแคลนเวลา

ผู้สอนมักจะประสบกับปัญหาการมีเวลาไม่เพียงพอในการทำงาน ดังนั้นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงเป็นทางเลือกอีกทางที่น่าสนใจเนื่องจากมีงานวิจัยหลายชิ้นพบว่าเมื่อเปรียบเทียบการสอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับการสอนด้วยวิธีปกติแล้ว การสอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเข้าช่วยนั้น จะใช้เวลาเพียง 2 ใน 3 เท่าของการสอนด้วยวิธีปกติเท่านั้น

2.1.5.4 ปัญหาการขาดแคลนผู้เชี่ยวชาญ

สถานศึกษาที่อยู่ห่างไกลจากชุมชนมักจะประสบปัญหาการขาดแคลนครูผู้สอนดังนั้นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงเป็นทางออกให้ผู้เรียนได้มีโอกาสศึกษาจากคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้ นอกจากนี้สำหรับสถานศึกษาที่ขาดแคลนผู้เชี่ยวชาญเฉพาะด้านนั้น ก็ยังสามารถที่จะนำคอมพิวเตอร์

ช่วยสอนไปใช้ช่วยสอนได้ โดยในขณะเดียวกันผู้เชี่ยวชาญเองแทนที่จะต้องเดินทางไปสอนหรือเผยแพร่ความรู้ยังสถานศึกษาต่าง ๆ ก็สามารถถ่ายทอดความรู้ลงในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนและเผยแพร่ให้แก่ผู้เรียนที่ศึกษาอยู่ในสถานศึกษาอื่น ๆ ได้ เพราะคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นรูปแบบการสอนที่พร้อมจะทำงานอย่างต่อเนื่องและตลอดเวลา

2.1.6 ข้อพึงระวังของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

แม้จะดูเหมือนว่าคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเต็มไปด้วยประโยชน์มากมาย แต่การนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้อาจเป็นในลักษณะของดาบสองคมได้เช่นกัน กล่าวคือ หากไม่ได้มีการวางแผนให้รอบคอบก่อนนำไปใช้นั้นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนก่อให้เกิดโทษได้ ตัวอย่างเช่น การเพียงแต่กำหนดให้ผู้เรียนไปใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยที่ไม่ได้มีการเตรียมพร้อมใดๆ แก่ผู้เรียนเสียก่อน (เช่น การจัดหาความรู้พื้นฐานที่จำเป็นก่อนการใช้โปรแกรม เป็นต้น) อาจส่งให้เกิดผลลบต่อการเรียนของผู้เรียนแทนการเรียนรู้ได้ ในกรณีนี้ผู้สอนจึงจำเป็นต้องมีการเตรียมวางแผนการนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้อย่างเหมาะสมด้วย นอกจากการวางแผนในการนำไปใช้แล้ว การผลิตคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (หรือการเลือกสรรคอมพิวเตอร์ช่วยสอน) ที่ได้มาตราฐานไว้ใช้งานเป็นสิ่งสำคัญมาก เพราะคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ไม่ได้รับการออกแบบอย่างเหมาะสมตามหลักทางจิตวิทยาและทฤษฎีการเรียนรู้ เช่น คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่มีกิจกรรมที่ให้ผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์กับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนน้อยเกินไป หรือการที่กิจกรรมที่มีไม่สร้างสรรค์ ไม่เอื้ออำนวยให้เกิดการเรียนรู้ในผู้เรียน หรือการที่โครงสร้างของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไม่ยืดหยุ่นพอสำหรับผู้เรียนในการควบคุมการเรียนของตนเองได้จะสามารถทำให้ผู้เรียนรู้สึกเบื่อหน่าย และไม่ต้องการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นๆ อีกต่อไปและทำให้เกิดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนในแง่ลบแทน ยิ่งไปกว่านั้นผู้สนใจสร้างควรที่จะคำนึงไว้ด้วยว่าการผลิตคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ได้มาตราฐานนั้นต้องใช้เวลานานพอสมควรจากงานวิจัยพบว่าคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ออกแบบให้ผู้เรียนใช้เวลาในการเรียนประมาณ 1คาบนั้นจะต้องใช้เวลาในการผลิตประมาณ 60 – 100 ชั่วโมงเลยทีเดียว นอกจากเวลาในการผลิตแล้วค่าใช้จ่ายในการผลิตสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนับว่าสูงเมื่อเปรียบเทียบกับสื่อประเภทอื่นๆ เช่น สื่อสิ่งพิมพ์หรือ สื่อโสตทัศนวัสดุต่างๆ ดังนั้นผู้สนใจในการสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงต้องใช้เวลาคิดพิจารณาในช่วงของการออกแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนให้มากทั้งนี้เพื่อให้ได้มาซึ่งงานที่คุ้มค่ากับเวลาและค่าใช้จ่ายที่ใช้ไป

2.2 ปริภูมิเวกเตอร์

2.2.1 ปริภูมิเวกเตอร์แบบยุคลิด n มิติ (Euclidean n - space)

นิยาม 2.2.1.1 สำหรับจำนวนเต็มบวก n เซตของอันดับ n ตัวทั้งหมด เรียกว่า **ปริภูมิ n มิติ** (n - space) และเขียนแทนเซตนี้ด้วย R^n กล่าวคือ

$$R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in R \text{ ทุกค่า } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

เรียกสมาชิก $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ของปริภูมิ n มิติ ว่า เป็นจุดหรือเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

นิยาม 2.2.1.2 กำหนด $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n

1. เวกเตอร์ u และ v **เท่ากัน (equals)** ก็ต่อเมื่อ $u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ \ldots,\ u_n = v_n$
2. **ผลบวกของเวกเตอร์ u และ v** แทนด้วย $u + v$ กำหนดโดย

   $$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

3. **ผลคูณสเกลาร์ (scalar multiple)** ระหว่างสเกลาร์ k ที่เป็นจำนวนจริงกับเวกเตอร์ u แทนด้วย ku

   กำหนดโดย $ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$

หมายเหตุ การดำเนินการบวก และผลคูณสเกลาร์ที่กำหนดโดย

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

และ

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

เรียกว่า เป็น**การดำเนินการบน R^n แบบมาตรฐาน (Standard Operations on R^n)**

ตัวอย่าง 2.2.1.1 $R^3 = \left\{ (a_1, a_2, a_3) \,\middle|\, (a_1, a_2, a_3) \in R \right\}$

เนื่องจาก (1, 4, 2), (-1, 3, -7) เป็นเวกเตอร์ใน R^3 เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}(1, 4, 2) + (-1, 3, -7) &= (1 + (-1), 4 + 3, 2 + (-7)) \\ &= (0, 7, -5)\end{aligned}$$

ให้ $-4 \in R$ เป็นสเกลาร์ เราจะได้

$$\begin{aligned}-4(1, 4, 2) &= ((-4)(1), (-4)(4), (-4)(2)) \\ &= (-4, -16, -8)\end{aligned}$$

นิยาม 2.2.1.3 เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) ใน R^n หมายถึงเวกเตอร์ (0, 0, …, 0) และมักเขียนแทนด้วย θ กล่าวคือ $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$

นิยาม 2.2.1.4 ให้ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n **นิเสธของเวกเตอร์ u (Negative of Vetor u)** หมายถึงเวกเตอร์ $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ ซึ่งแทนด้วย $-u$

กล่าวคือ $-u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

หมายเหตุ โดยทั่ว ๆ ไปเราเขียนแทน $u + (-w)$ ด้วย $u - w$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ u, w ใน R^n

ทฤษฎีบท 2.2.1.1 กำหนด $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ และ $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ **เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน R^n และสำหรับทุกสเกลาร์ k, l ที่เป็นจำนวนจริง จะได้**

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + \theta = \theta + u = u$
4. $u + (-u) = \theta$
5. $K(lu) = (kl)u$
6. $K(u + v) = ku + kv$
7. $(k + l)u = ku + lu$
8. $1u = u$

ตัวอย่าง 2.2.1.2 กำหนดให้ $u = (1, 4, -5, 7)$ และ $v = (2, 3, -1, 5)$ จงหาค่าของ $4u + (3 + 2)v$

วิธีทำ

$$4u = 4(1, 4, -5, 7) = (4, 16, -20, 28)$$

$$(3 + 2)v = 5v = 5(2, 3, -1, 5) = (10, 15, -5, 25)$$

เพราะฉะนั้น

$$4u + (3 + 2)v = (4, 16, -20, 28) + (10, 15, -5, 25) = (14, 31, 25, 53)$$

นิยาม 2.2.1.5 กำหนด $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n ผลคูณภายในแบบยุคลิด (Euclidean inner product) ของ U และ V เขียนแทนด้วย $u \cdot v$ กำหนดโดย

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

ทฤษฎีบท 2.2.1.2 สำหรับเวกเตอร์ u, v, w ใด ๆใน R^n และสเกลาร์ k ที่เป็นจำนวนจริงจะได้ว่า

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
3. $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$
4. $u \cdot u \geq 0$
5. $u \cdot u = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u = \theta$

นิยาม 2.2.1.6 สำหรับเวกเตอร์ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ใด ๆ ใน R^n **ค่าประจำแบบยุคลิด (Euclidean Norm)** ของเวกเตอร์ u เขียนแทนด้วย $\|u\|$ กำหนดโดย

$$\|u\| = (u \cdot u)^{1/2}$$
$$= \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + \cdots + u_n^{\ n}}$$

ระยะห่างแบบยุคลิด (Euclidean Distance) ระหว่างเวกเตอร์ u และ v เขียนแทนด้วย d(u,v) กำหนดโดย

$$d(u, v) = \|u - v\|$$
$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

ตัวอย่าง 2.2.1.3 ให้ $u = (3, 7, -4)$ และ $v = (4, 2, 5)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 จะได้

$$\|u\| = \sqrt{(3)^2 + (7)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 49 + 16}$$
$$= \sqrt{74}$$

และ

$$d(u, v) = \|(3,7,-4) - (4,2,5)\|$$
$$= \|(-1,5,-9)\|$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (5)^2 + (-9)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 25 + 81}$$
$$= \sqrt{107}$$

2.2.2 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Spaces)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาระบบคณิตศาสตร์แบบหนึ่งที่ประกอบด้วยเซตและการดำเนินการภายในเซตซึ่งพบว่า R^n และการดำเนินการภายในเซต R^n ตามนิยาม 2.2.1.2 ข้อ 2 และ 3 ก็จะมีคุณสมบัติต่าง ๆ ตามระบบที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ด้วย

นิยาม 2.2.2.1 กำหนดให้ K เป็นเซต และ $K \neq \phi$ ถ้า

$$+ : K \times K \rightarrow K$$

และ $$. : K \times K \rightarrow K$$

เป็นการดำเนินการภายในเซต K ที่มีคุณสมบัติว่า ทุกสมาชิก a b และ c ใน K

1. $a+b$ เป็นสมาชิกของ K
2. $a+b = b+a$
3. $a+(b+c) = (a+b)+c$
4. มีสมาชิก 0 ใน K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a+0 = a = 0+a$
5. มีสมาชิก $-a$ ใน K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a+(-a) = a\ 0 + a$
6. $a . b$ เป็นสมาชิกของ K
7. $a . b = b . a$
8. $a.(b.c) = (a.b).c$
9. มีสมาชิก 1 ใน K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a . 1 = a = 1 . a$
10. ถ้า $a \neq 0$ จะมีสมาชิก a^{-1} ใน K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a . a^{-1} = 1 = a^{-1} . a$
11. $a.(b+c) = a.b + a.c$

แล้วเราเรียก $(K, +, .)$ เป็นสนาม (Field) ภายใต้การบวก (additive) " + " และ การคูณ (multiplicative) " . "

เราจะแทน $(K, +, .)$ ด้วย K และการคูณของสมาชิก K $a . b$ จะเขียนแทนด้วย ab

นิยาม 2.2.2.2 ให้ V เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง K เป็นสนาม u, v, w เป็นสมาชิกใน V และ k, l เป็นสมาชิกในสนาม K ให้ + เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต V $. : K \times V \rightarrow V$ กำหนดโดย $.(k, v) = k . v$ และมีคุณสมบัติต่อไปนี้คือ

1. $u + v$ เป็นสมาชิกของ V
2. $u + v = v + u$

3. $u + (v + w) = (u + v) + w$
4. มีสมาชิก θ ใน V ที่ $v + \theta = \theta + v = v$ ทุกสมาชิก v ใน V
5. สำหรับแต่ละ $v \in V$ จะมี $v^* \in V$ และมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น ที่ $v + v^* = \theta$
6. $k.(v + u)$ เป็นสมาชิกของ V
7. $k.(v + u) = k.v + k.u$
8. $(k + l).v = k.v + l.v$
9. $k(l.v) = (kl).v$
10. $1.u = u$

เราจะเรียก (V , + , .) ว่าเป็น**ปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม** K (V is a vector space over fielf K) สมาชิกของ V เรียกว่า **เวกเตอร์** (vector) และ สมาชิกในสนาม K เรียกว่า **สเกลาร์** (scalar)

เวกเตอร์ θ ในข้อ 4 เรียก **เวกเตอร์ศูนย์** (Zero vector)

เวกเตอร์ v^* ในข้อ 5 เรียก นิเสธของเวกเตอร์ v เขียนแทนด้วย $-v$

ตัวอย่าง 2.2.2.1 ให้ $V = \{\theta\}$ และสนามที่ใช้คือสนามของจำนวนตรรกยะ Q

นิยามการบวกบน V โดย $\theta + \theta = \theta$

นิยามการคูณสมาชิกใน V ด้วยสเกลาร์ k โดย

$$k.\theta = \theta$$

จะได้ว่า (V , + , .) มีคุณสมบัติตามนิยาม 2.2.2.2 ทั้ง 10 ข้อ

นั่นคือ (V , + , .) เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม Q

นิยาม 2.2.2.3 ปริภูมิเวกเตอร์ (V , + , .) บนสนาม K เรียกว่า **ปริภูมิเวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector Space)** ถ้า V มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

ทฤษฎีบท 2.2.2.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K u เป็นเวกเตอร์ใน V และ k เป็นสเกลาร์จะได้

1. $0.u = \theta$
2. $(-1).u = -u$
3. $k.\theta = \theta$
4. ถ้า $k.u = \theta$ แล้ว $u = \theta$

นิยาม 2.2.2.4 ให้ $(V, +, .)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K และ W เป็นเซตย่อยของ V เราเรียก W ว่าเป็น **ปริภูมิย่อย (Subspace)** ของ V ถ้า $(W, +, .)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K

ทฤษฎีบท 2.2.2.2 ให้ $(V, +, .)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K W เป็นเซตย่อยของ V ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิก u, v ใน W และทุกสเกลาร์ k $u + v$ และ $k.u$ เป็นสมาชิกของ W

ตัวอย่าง2.2.2.2 ให้ $V = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \text{ เป็นจำนวนจริง} \right\}$ จะได้ว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ให้ $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \text{ เป็นจำนวนจริง} \right\}$ ดังนั้น W เป็นเซตย่อยของ V

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกของ W

และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$A + B = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ซึ่งเป็นสมาชิกของ } W$$

และ

$$kA = \begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ เป็นสมาชิกของ } W$$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 2.2.2.2 W เป็นปริภูมิย่อยของ V

นิยาม 2.2.2.5 ให้ $(V, +, .)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K $w, v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นสมาชิกของ V เรียก w ว่าเป็น **ผลบวกเชิงเส้น (linear combination)** ของเวกเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ถ้า w เขียนได้ในเทอมของ $w = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นสเกลาร์ใน K

ตัวอย่าง 2.2.2.3 ให้ $u = (1, 2, -1)$ และ $v = (6, 4, 2)$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ให้ $w = (9, 2, 7)$ และ $w' = (4,-1,8)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 k_1, k_2 เป็นจำนวนจริง และ

$$\begin{aligned} w &= (9, 2, 7) \\ &= k_1u + k_2v \end{aligned}$$

$$= k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$
$$= (k_1 + 6k_2,\ 2k_1 + 4k_2,\ -k_1 + 2k_2)$$

เพราะฉะนั้น

$$k_1 + 6k_2 = 9$$
$$2k_1 + 4k_2 = 2$$
$$-k_1 + 2k_2 = 7$$

ซึ่งผลเฉลยของระบบสมการนี้คือ $k_1 = -3$ และ $k_2 = 2$

นั่นคือ $$w = -3u + 2v$$

เพราะฉะนั้น w เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ u และ v

ให้ k_1, k_2 เป็นจำนวนจริง และ

$$w' = (4, -1, 8)$$
$$= k_1u + k_2v$$
$$= (k_1 + 6k_2,\ 2k_1 + 4k_2,\ -k_1 + 2k_2)$$

เพราะฉะนั้น

$$k_1 + 6k_2 = 4$$
$$2k_1 + 4k_2 = -1$$
$$-k_1 + 2k_2 = 8$$

แต่ค่าลำดับชั้นของ $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 2$ น้อยกว่า $3 =$ ค่าลำดับชั้นของ $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น ระบบสมการนี้หาผลเฉลยไม่ได้ นั่นคือ ไม่มี k_1, k_2 ที่ทำให้ $w' = k_1u + k_2v$

เพราะฉะนั้น w' ไม่เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ u และ v

นิยาม 2.2.2.6 ถ้า $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ $(V, +, .)$ บนสนาม K และทุกสมาชิกของ V เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เรากล่าวว่า $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ V (span the space V)**

ตัวอย่าง 2.2.2.4 ในปริภูมิเวกเตอร์ R^3

$$i = (1, 0, 0)$$
$$j = (0, 1, 0)$$
$$k = (0, 0, 1)$$

และทุกเวกเตอร์ (a, b, c) ใน R^3 เขียนได้ในรูปของ

$$(a, b, c) = ai + bj + ck$$

นั่นคือ i, j, k แผ่ทั่วปริภูมิ R^3

ตัวอย่าง 2.2.2.5 ให้ $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$ และ $w = (2, 1, 3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 ให้ $r = (1, 1, 1)$

สมมติให้ k_1, k_2, k_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $r = k_1u + k_2v + k_3w$

เพราะฉะนั้น $(1, 1, 1) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$

$$= (k_1 + k_2 + 2k_3,\ k_1 + k_3,\ 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

นั่นคือ

$$k_1 + k_2 + 2k_3 = 1 \quad ....(1)$$

$$k_1 + k_3 = 1 \quad ....(2)$$

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = 1 \quad ....(3)$$

จากสมการ (1) และ (2) ได้ว่า

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = 2$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมการ (3) เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า ไม่มีจำนวนจริง k_1, k_2, k_3 ที่ทำให้

$$r = k_1u + k_2v + k_3w$$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์ u, v, w ไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3

ทฤษฎีบท 2.2.2.3 ให้ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V บนสนาม K และ $W = \{u \mid u$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ จะได้ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V

นิยาม 2.2.2.7 ให้ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ v บนสนาม K $W = \{u \mid u$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เรียก W ว่าเป็น **ปริภูมิเวกเตอร์แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์** $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (vector space spanned by $v_1, v_2, \ldots, v_n$) **และเขียนแทน W ด้วย** $<v_1, v_2, \ldots, v_n>$

หมายเหตุ ในปริภูมิเวกเตอร์ V บนสนาม K ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V เราใช้สัญลักษณ์ $<S>$ แทน $<v_1, v_2, \ldots, v_n>$

ทฤษฎีบท 2.2.2.4 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K W เป็นปริภูมิย่อยของ V และ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นเวกเตอร์ใน W จะได้ว่า $<v_1, v_2, \ldots, v_n>$ เป็นปริภูมิย่อยของ W

2.2.3 มูลฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์ (Basis and Dimension)

ในปริภูมิเวกเตอร์ R^2 $u = (1, 2)$ และ $v = (3, 5)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^2

เราได้ว่า ถ้า $au + bv = \theta$ แล้ว

$$(0, 0) = (a + 3b, 2a + 5b)$$

นั่นคือ

$$a + 3b = 0$$

$$2a + 5b = 0$$

เพราะว่า $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $a = 0$ และ $b = 0$ เท่านั้น

นั่นคือ ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่ $au + bv = 0$ แล้ว $a = 0 = b$

แต่ถ้าพิจารณาเวกเตอร์ $w = (-1, 4)$ และ $w' = (-2, 8)$ จะเห็นว่า มีจำนวนจริง $a = 2$ และ $b = -1$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} aw + bw' &= 2(-1, 4) + (-1)(-2, 8) \\ &= (-2, 8) + (2, -8) \\ &= (0, 0) \\ &= \theta \end{aligned}$$

โดยทั่วไปเราสามารถแบ่งกลุ่มของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ได้โดยนิยามต่อไปนี้

นิยาม 2.2.3.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ในสนาม K $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V $k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นสเกลาร์ในสนาม K

ถ้า $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = \theta$ แล้ว $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ เรียก $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ว่าเป็น**เวกเตอร์อิสระต่อกัน (linearly independent vectors)**

และ เรียกว่า S เป็น**เซตอิสระต่อกันในตัวเอง (linearly independent set)**

ถ้า $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = \theta$ โดยที่มี $k_i \neq 0$ อย่างน้อยหนึ่งตัว เรียก $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ว่าเป็น**เวกเตอร์ไม่อิสระต่อกัน (linearly dependent vectors)**

และเรียกว่า S **เป็นเซตไม่อิสระต่อกันในตัวเอง (linearly dependent set)**

ตัวอย่าง 2.2.3.1 ในปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ให้ $S = \{i, j, k\}$

โดยที่

$$i = (1, 0, 0)$$

$$j = (0, 1, 0)$$

$$k = (0, 0, 1)$$

ถ้า $ai + bj + ck = \theta$

แล้ว $(a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c) = (0, 0, 0)$

นั่นคือ $a = b = c = 0$

เพราะฉะนั้น S เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.3.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V และ $n \geq 2$ แล้ว S เป็นเซตไม่อิสระต่อกันในตัวเอง ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวใน S ที่เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่เหลือใน S

นิยาม 2.2.3.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V เรียก S ว่าเป็น **มูลฐาน(basis)** ของ V ถ้า

$<S> = V$ และ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นเวกเตอร์อิสระต่อกัน

ตัวอย่าง 2.2.3.2 ในปริภูมิเวกเตอร์ R^3 เวกเตอร์ $i = (1, 0, 0)$ $j = (0, 1, 0)$ และ $k = (0, 0, 1)$ เป็นเวกเตอร์อิสระต่อกัน และทุกเวกเตอร์ (a, b, c) ใน R^3 สามารถเขียนได้เป็น

$$(a, b, c) = ai + bj + ck$$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์ i, j, k แผ่ทั่ว R^3 นั่นคือ $<i, j, k> = R^3$ นั่นคือ $\{i, j, k\}$ เป็นมูลฐานของ R^3 โดยทั่วไปในปริภูมิเวกเตอร์ R^n เราให้

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

เพราะว่า ถ้า

$$k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n = \theta$$

แล้วจะได้ว่า

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) = (0, 0, \ldots, 0)$$

นั่นคือ $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$

เพราะฉะนั้น $e_1, e_2, \ldots, e_n$ เป็นเวกเตอร์อิสระต่อกัน

และเพราะว่า ทุกเวกเตอร์ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ใน R^n

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$$

ดังนั้น เราได้ว่า

$$<e_1, e_2, \ldots, e_n> = R^n$$

นั่นคือ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ เป็นมูลฐานของ R^n และเราเรียก $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ว่าเป็น**มูลฐานมาตรฐาน (Standard basis for R^n) ของ R^n**

ตัวอย่าง 2.2.3.3 ให้ $v_1 = (1, 2, 1)$ $v_2 = (2, 9, 0)$ และ $v_3 = (3, 3, 4)$ จงแสดงว่า $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ R^3

วิธีทำ การแสดงว่า $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นเวกเตอร์อิสระต่อกัน ให้ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นจำนวนจริงที่ $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = \theta$ เพราะฉะนั้น

$(k_1 + 2k_2 + 3k_3,\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3,\ k_1 + 4k_3) = (0, 0, 0)$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

เพราะว่า $$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

ดังนั้น $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ เป็นผลเฉลยเดียวเท่านั้นของระบบสมการนี้

เพราะฉะนั้นเราจึงสรุปได้ว่า $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นเวกเตอร์อิสระต่อกัน

การแสดงว่า $<v_1, v_2, \ldots, v_n> = R^3$ ให้ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= a_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= a_2 \\ k_1 \qquad + 4k_3 &= a_3 \end{aligned}$$

เพราะว่า $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \neq 0$ ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมีผลเฉลย

นั่นคือ มีจำนวนจริง k_1, k_2, k_3 ที่ทำให้

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) &= (k_1 + 2k_2 + 3k_3\ 2k_1 + 9k_2\ 3k_3,\ k_1 + 4k_3) \\ &= k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4) \end{aligned}$$

$= k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

เพราะฉะนั้น (a_1, a_2, a_3) เป็นสมาชิกของ $<v_1, v_2, v_3>$

นั่นคือ $<v_1, v_2, v_3> = R^3$

ดังนั้น $\{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นมูลฐานของ R^3

นิยาม 2.2.3.3 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K ที่ไม่เป็นปริภูมิศูนย์ เราเรียก V ว่าเป็น **ปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด (finite dimensional vector space)** ถ้ามีเซตย่อย $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ของ V ที่เป็นเซตจำกัด และเป็นมูลฐานของ V

นอกจากนี้เราเรียกปริภูมิเวกเตอร์นั้นว่าเป็น **ปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติไม่จำกัด (infinite dimensional vector space)**

ทฤษฎีบท 2.2.3.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K และ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V เราจะได้ว่า ทุกเซตย่อยของ V ที่มีเวกเตอร์มากกว่า n ตัวต้องเป็นเซตไม่อิสระต่อกันในตัวเอง

บทแทรก 2.2.3.3 ในปริภูมิเวกเตอร์ R^n $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V และ $m > n$ จะได้ว่า S เป็นเซตไม่อิสระต่อกันในตัวเอง

ทฤษฎีบท 2.2.3.4 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K ที่มีมิติจำกัด $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ และ $S' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ เป็นมูลฐานของ V แล้วจะได้ว่า $m = n$

นิยาม 2.2.3.4 ในปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด V บนสนาม K ถ้ามีเซตย่อย $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V แล้วเรากล่าวว่า ปริภูมิเวกเตอร์ มีมิติ n (dimension n)

และ เขียนแทนด้วย $\dim(V) = n$

เพราะฉะนั้น $\dim(R^n) = n$ และ $\dim(P_n) = n+1$

ตัวอย่าง 2.2.3.4 จงหามูลฐาน และมิติสำหรับปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

วิธีทำ จากระบบสมการนี้มีผลเฉลยคือ

$$x_1 = -s - t,\ x_2 = s,\ x_3 = -t,\ x_4 = 0,\ x_5 = t$$

ผลเฉลยเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ แผ่ทั่วปริภูมผลเฉลย

และเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น $\{v_1, v_2\}$ เป็นมูลฐานและปริภูมิผลเฉลยมี 2 มิติ

ทฤษฎีบท 2.2.3.5 กำหนด V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K และ $\dim(V) = n$ ถ้าเซตย่อย $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ของ V เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองแล้ว S เป็นมูลฐานของ V

ทฤษฎีบท 2.2.3.6 กำหนด V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K และ $\dim(V) = n$ ถ้า $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = V$ แล้ว $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V

ทฤษฎีบท 2.2.3.7 กำหนด V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K และ $\dim(V) = n$ ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง และ $r < n$ แล้ว จะมีเวกเตอร์ v_{r+1}, $v_{r+2}, \ldots, v_n$ ใน V ที่ทำให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V

2.2.4 เวกเตอร์แถวและเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์ (Row and Column Vectors of a Matrix)

ในเมทริกซ์มิติ m x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์ $r_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$

$r_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$

$\vdots$

$r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$

เป็นเวกเตอร์ใน R^n เรียกว่า **เวกเตอร์แถว (Row Vectors)**

และเวกเตอร์ $c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$, ... $c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

เป็นเวกเตอร์ใน R^m เรียกว่า **เวกเตอร์หลัก (Column Vectors)**

$< r_1, r_2, \ldots, r_m >$ เป็นปริภูมิย่อยของ R^n เรียกว่า **ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A (row vector space of A)**

$< c_1, c_2, \ldots, c_n >$ เป็นปริภูมิย่อยของ R^m เรียกว่า **ปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A (column vector space of A)**

ทฤษฎีบท 2.2.4.1 ถ้าเมทริกซ์ A และ B สมมูลแถวกันแล้ว ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A เท่ากับปริภูมิเวกเตอร์แถวของ B

ทฤษฎีบท 2.2.4.2 กำหนด $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์มิติ m x n มิติของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A = มิติของปริภูมิเวกเตอร์หลักของ A

ตัวอย่าง 2.2.4.1 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

จะได้เมทริกซ์ลดรูปเป็นขั้นแบบแถว (row reduced echelon form) ของ A คือ

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2.2.4.2 ปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A เท่ากับปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A'
พิจารณา A'

$$r'_1 = (1, 0, -1, 3)$$
$$r'_2 = (0, 1, 0, -1)$$
$$r'_3 = (0, 0, 0, 0)$$

เพราะฉะนั้น

$$< r'_1, r'_2, r'_3 > = < r'_1, r'_2 >$$

และ r'_1, r'_2 เป็นเวกเตอร์อิสระต่อกัน เนื่องจาก ถ้า k_1, k_2 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$$k_1 r'_1 + k_2 r'_2 = \theta$$

แล้วจะได้

$$k_1(1, 0, -1, 3) + k_2(0, 1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0)$$
$$(k_1, k_2, -k_1, 3k_1 - k_2) = (0, 0, 0, 0)$$

นั่นคือ $k_1 = k_2 = 0$
เพราะฉะนั้น มิติของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ A = มิติของปริภูมิเวกเตอร์แถวของ $A' = 2$

ทฤษฎีบท 2.2.4.3 ระบบสมการ AX = B มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $B \in < c_1, c_2, \ldots, c_n >$

ทฤษฎีบท 2.2.4.4 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $\text{rank}(A) = \dim < r_1, r_2, \ldots, r_m >$

ทฤษฎีบท 2.2.4.5 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ข้อความต่อไปนี้เป็นเหตุเป็นผลกันและกัน

1. A^{-1} หาค่าได้
2. $AX = 0$ มีผลเฉลยที่เป็น 0 เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น
3. A สมมูลแถวกับ I_n
4. $AX = B$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวสำหรับทุกเมทริกซ์ B มิติ n x 1
5. $\det A \neq 0$
6. $\text{rank}(A) = n$
7. $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง
8. $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง

2.2.5 ผลคูณภายใน (Inner Product)

ในหัวข้อ 2.2.1 ได้กล่าวถึงผลคูณภายในแบบยุคลิดของเวกเตอร์ใน R^n เช่น ในปริภูมิ R^3 ผลคูณภายในระหว่างเวกเตอร์ (1 , 4 , 2) และ (2 , -4 , 5) คือ

$$\begin{aligned}(1, 4, 2) \cdot (2, -4, 5) &= (1)(2) + (4)(-4) + (2)(5) \\ &= 2 + 16 + 10 \\ &= -4\end{aligned}$$

ส่วนในหัวข้อที่จะศึกษาเกี่ยวกับผลคูณภายในของปริภูมิเวกเตอร์ทั่วไปบนสนามของจำนวนจริง

นิยาม 2.2.5.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนามของจำนวนจริง ฟังก์ชัน $<,> : V \times V \rightarrow R$ เรียกว่าเป็น **ผลคูณภายในปริภูมิเวกเตอร์ V (Inner Product)** ถ้าทุกเวกเตอร์ u, v, w ใน V และทุกสเกลาร์ k ใน R มีคุณสมบัติว่า

1. $<u, v> \quad = \quad <v, u>$
2. $<u+v, w> \quad = \quad <u, w> + <v, w>$
3. $<ku, v> \quad = \quad k<u, v>$
4. $<u, v> \quad \geq \quad 0$ และ

   $<u, u> \quad = \quad 0$ ก็ต่อเมื่อ $u = \theta$

ปริภูมิเวกเตอร์ บนสนามพร้อมด้วยผลคูณภายใน $<,>$ เรียกว่าเป็น **ปริภูมิที่มีผลคูณภายใน (Inner Product Space)**

ตัวอย่าง 2.2.5.1 ให้ $u = (a_1, a_2, a_3)$ และ $v = (b_1, b_2, b_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ

$$\begin{aligned} <u, v> &= u.v \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.2.1.3 ได้ว่า $<, >$ มีคุณสมบัติครบทั้ง 4 ข้อตามนิยาม 2.2.5.1
ดังนั้น R^n พร้อมด้วย $<, >$ เป็นปริภูมิที่มีผลคูณภายในปริภูมิ

ทฤษฎีบท 2.2.5.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนามจำนวนจริง R และ $<, >$ เป็นผลคูณภายในปริภูมิเวกเตอร์ V แล้ว ทุกเวกเตอร์ u, v, w ใน V และทุกสเกลาร์ k ใน R

1. $<\theta, v> \quad = 0$
2. $<u, v+w> \quad = <u, v> + <u, w>$
3.. $<u, kv> \quad = k<u, v>$

ตัวอย่าง 2.2.5.2 กำหนด $<, > : R^2 x R^2 \rightarrow R$ โดยที่ ถ้า $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$ และ $<u, v> = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$ แล้ว $<, >$ เป็นผลคูณภายใน R^2

พิสูจน์ ให้ $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$ และ $w = (c_1, c_2)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^2 และ k เป็นจำนวนจริง

1. $<u, v> \quad = \quad 3a_1b_1 + 2a_2b_2$
$\quad = \quad 3b_1a_1 + 2b_2a_2$
$\quad = \quad <v, u>$

2. $<u+v, w> \quad = \quad 3(a_1 + b_1)c_1 + 2(a_2 + b_2)c_2$
$\quad = \quad 3a_1c_1 + 3b_1c_1 + 2a_2c_2 + 2b_2c_2$
$\quad = \quad (3a_1c_1 + 2a_1c_2) + (3b_1c_1 + 2b_2c_2)$
$\quad = \quad <u, w> + <v, w>$

3. $<ku, v> \quad = \quad 3ka_1b_1 + 2ka_2b_2$
$\quad = \quad k(3a_1b_1 + 2a_2b_2)$
$\quad = \quad k<u, v>$

4. $<u, u> \quad = \quad 3a_1^2 + 2a_2^2 \geq 0$

และถ้า $<u, u> = \quad \theta$

จะได้ $3a_1^2 + 2a_2^2 \quad = \quad 0$

นั่นคือ $a_1 = a_2 = 0$ เพราะฉะนั้น $u = \theta$

ถ้า $u = \theta = (0, 0)$

จะได้ $<u, u> = 0$

เพราะฉะนั้น $<,>$ เป็นผลคูณภายในปริภูมิเวกเตอร์ R^2

ทฤษฎีบท 2.2.5.2 อสมการของโคชีและชวาร์ซ

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายในปริภูมิ $<,>$ ถ้า u, v เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V แล้ว $<u, v>^2 \leq <u, u><v, v>$

นิยาม 2.2.5.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายในปริภูมิ ให้ u เป็นเวกเตอร์ใน V **ค่าประจำของเวกเตอร์ u (norm of vector u)** เขียนแทนด้วย $\|u\|$ นิยามโดย

$$\|u\| = <u, u>^{1/2}$$

ระยะห่าง (distance) ระหว่างเวกเตอร์ u และ v ใน V แทนด้วย d(u , v) นิยามโดย

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

ตัวอย่าง 2.2.5.3 ในปริภูมิเวกเตอร์ R^2 กำหนดผลคูณภายในแบบเดียวกับตัวอย่าง 2.2.5.2 จงหาค่าประจำของ $u = (2, 1)$ และ $v = (3, 5)$ และระยะห่างระหว่าง u และ v

วิธีทำ จากตัวอย่าง 2.2.5.2 $<(a, b), (c, d)> = 3ac + 2bd$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}\|u\| &= <(2, 1), (2, 1)>^{1/2} \\ &= \sqrt{3(2)(2) + 2(1)(1)} \\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|v\| &= <(3, 5), (3, 5)>^{1/2} \\ &= \sqrt{3(3)(3) + 2(5)(5)} \\ &= \sqrt{77}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(u, v) &= \|(2,1) - (3,5)\| \\ &= \|(-1,-4)\| \\ &= <(-1, -4)>^{1/2} \\ &= \sqrt{3(-1)(-1) + 2(-4)(-4)} \\ &= \sqrt{35}\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.2.5.3 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายในปริภูมิ เราจะได้

1. $\|u\| \geq 0$
2. $\|u\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u = \theta$
3. $\|ku\| = |k|\,\|u\|$
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

ทุกเวกเตอร์ u, v ใน V และ สเกลาร์ k ใน R

ทฤษฎีบท 2.2.5.4 ให้ V เป็นปริภูมิที่มีผลคูณภายในปริภูมิ แล้วได้ว่า

1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, v) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$
4. $d(u, v) = d(u, w) + d(w, v)$

ทุกเวกเตอร์ u , v , w ใน V

นิยาม 2.2.5.3 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน ให้ u , v เป็นเวกเตอร์ใน V α เรียกว่า **เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์** u และ v ถ้า $0 \leq \alpha \leq \pi$ และ

$$\cos\alpha = \frac{<u, v>}{\|u\|\,\|v\|}$$

ตัวอย่าง 2.2.5.4 จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $u = (1, 1, 0, 1)$ และ $v = (0, 1, 0, 1)$ ในปริภูมิเวกเตอร์ R^4 ที่มีผลคูณภายในแบบยุคลิด

วิธีทำ จาก $\cos\alpha = \frac{<u, v>}{\|u\|\,\|v\|}$

จะได้ $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น มุมระหว่าง u และ v คือ $\alpha = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

นิยาม 2.2.5.4 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน เรากล่าวว่า เวกเตอร์ u และ v ใน V **ตั้งฉากกัน(orthogonal)** ถ้า $<u, v> = 0$

ทฤษฎีบท 2.2.5.5 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน ให้ u, v เป็นเวกเตอร์ใน V u และ v ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

นิยาม 2.2.5.5 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน เซตย่อย S ของ V เรียกว่าเป็น **เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)** ถ้าทุกเวกเตอร์ใน S ตั้งฉากกัน

นิยาม 2.2.5.6 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน เซตเชิงตั้งฉาก S เรียกว่าเป็น **เซตเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal set)** ถ้าทุกเวกเตอร์ใน S มีค่าประจำเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 2.2.5.5 พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ที่มีผลคูณภายในแบบยุคลิด

ให้ $S = \{e_1, e_2, e_3\}$

เพราะว่า $<e_1, e_2> = 0$

$<e_2, e_3> = 0$

$<e_3, e_1> = 0$

เพราะฉะนั้น S เป็นเซตเชิงตั้งฉาก นอกจากนี้

$\|e_1\| = 1$

$\|e_2\| = 1$

$\|e_3\| = 1$

ดังนั้น S เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ

ในปริภูมิเวกเตอร์ V ที่มีผลคูณภายในปริภูมิ เราได้ว่า ทุกเวกเตอร์ $v \neq \theta$ ใน V

$$\left\|\frac{1}{\|v\|}v\right\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$$

ดังนั้น ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ โดยที่ $v_i \neq \theta$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก แล้ว

$$S' = \{\frac{1}{\|v_1\|}v_1, \frac{1}{\|v_2\|}v_2, \ldots, \frac{1}{\|v_n\|}v_n\}$$

เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ

ทฤษฎีบท 2.2.5.6 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก และ $v_i \neq \theta$ ทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว เป็นเซตที่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

นิยาม 2.2.5.7 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V เราเรียก B ว่าเป็น**มูลฐานเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis)** ถ้า B เป็นเซตเชิงตั้งฉาก และเรียก B ว่าเป็น**มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal basis)** ถ้า B เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ

ทฤษฎีบท 2.2.5.7 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน ถ้า $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติของ V แล้ว $v = <v, v_1>v_1 + <v, v_2>v_2 + \ldots + <v, v_n>v_n$ ทุกเวกเตอร์ v ใน V

ตัวอย่าง 2.2.5.6 พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ที่มีผลคูณภายในแบบยุคลิด

ให้
$$v_1 = (1, 0, 0)$$
$$v_2 = (0, 1, 1)$$
$$v_3 = (0, 1, -1)$$

เราได้ว่า
$$<v_1, v_2> = 0$$
$$<v_2, v_3> = 0$$
$$<v_1, v_3> = 0$$

เพราะฉะนั้น $\{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

ให้
$$v_1' = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = (1, 0, 0)$$
$$v_2' = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$v_3' = \frac{1}{\|v_2\|} v_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

เพราะฉะนั้น $\{v_1', v_2', v_3'\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ

โดยทฤษฎีบท 2.2.5.6 $\{v_1', v_2', v_3'\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

เพราะว่ามิติของ R^3 เท่ากับ 3

เพราะฉะนั้น $\{v_1', v_2', v_3'\}$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติของ R^3

นิยาม 2.2.5.8 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ $W = <v_1, v_2, \ldots, v_n>$ ถ้า v เป็นเวกเตอร์ใน V จะได้ $v = w_1 + w_2$

โดยที่ w_1 เป็นเวกเตอร์ใน W และ w_2 ตั้งฉากกับเซต W

เราเรียก w_1 ว่าเป็น**ภาพฉายเชิงตั้งฉากของ v บน W (orthogonal projection of v on W)** และเขียนแทนด้วย $\mathrm{proj}_w\, v$

และเรียก w_2 ว่า **ส่วนประกอบของ v ที่ตั้งฉากกับ W (component of v orthogonal to W)** และเขียนแทนด้วย $\mathrm{comp}_w\, v$

เพราะฉะนั้น $w_2 = v - \mathrm{proj}_w\, v$ และ $v = \mathrm{proj}_w\, v + w_2$

$= \mathrm{proj}_w\, v + \mathrm{comp}_w\, v$

ตัวอย่าง 2.2.5.7 ให้ W เป็นปริภูมิย่อยของ R^3 ที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์เชิงตั้งฉากปกติ $v_1 = (0,1,0)$ และ $v_2 = \left(\frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$ จงหาภาพฉายเชิงตั้งฉากของ $v = (1,1,1)$ บน W และส่วนประกอบของ v ที่ตั้งฉากกับ W

วิธีทำ ให้ $v = (1,1,1)$

เพราะว่า $W = \langle (0,1,0), (\frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5}) \rangle$

เพราะฉะนั้น ภาพฉายเชิงตั้งฉากของ v บน W

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{proj}_w\, v \\
&= \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 \\
&= (0,1,0) + (\tfrac{4}{25}, 0, \tfrac{-3}{25}) \\
&= (\tfrac{4}{25}, 1, \tfrac{-3}{25})
\end{aligned}
$$

และ ส่วนประกอบของ v ที่ตั้งฉากกับ W

$$
\begin{aligned}
&= v - \mathrm{proj}_w\, v \\
&= (1,1,1) - (\tfrac{4}{25}, 1, \tfrac{-3}{25}) \\
&= (\tfrac{21}{25}, 0, \tfrac{28}{25})
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 2.2.5.8 กระบวนการกราม-ชมิดต์ (Gram – Schmidt process) ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน โดยที่มิติของ V เท่ากับ n แล้ว V ต้องมีมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ

ตัวอย่าง 2.2.5.8 ให้ R^3 เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายในแบบยุคลิด และ $A = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ เป็นมูลฐาน จงหามูลฐานเชิงตั้งฉากปกติของ R^3 โดยใช้กระบวนการของ **Gram - Schmidt**

วิธีทำ ให้

$$v_1 = (1,1,1)$$
$$v_2 = (0,1,1)$$
$$v_3 = (0,0,1)$$

ขั้นที่1 ให้

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ขั้นที่ 2 ให้

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$
$$= (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= (0,1,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

ให้

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{\sqrt{\frac{6}{9}}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

ขั้นที่ 3 ให้ $w_3 = v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= (0, 0, 1) - \left(\frac{-2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ให้ $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$

$$= \frac{\left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{4}}}$$

$$= \sqrt{2}\left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ดังนั้นมูลฐานเชิงตั้งฉากของ R^3 คือ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2.3 การแปลงเชิงเส้น (Linear Transformation)

2.3.1 บทนำสำหรับการแปลงเชิงเส้น

ถ้า V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ T เป็นฟังก์ชันที่สัมพันธ์เวกเตอร์หนึ่งใน W กับเวกเตอร์ใน V เรากล่าวว่า T ส่ง V ไปยัง W และเขียน $T : V \rightarrow W$ ถ้า T สัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ w และเวกเตอร์ v เราจะเขียน $w = T(v)$ และกล่าวว่า w เป็นภาพ ของ v ภายใต้ T

นิยาม 2.3.1.1 ถ้า $T : V \rightarrow W$ เป็นฟังก์ชันจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ W แล้ว T จะเรียกว่าเป็นการแปลงเชิงเส้น ถ้า

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ สำหรับทุกเวกเตอร์ u และ v ใน V
2. $T(ku) = kT(u)$ สำหรับทุกเวกเตอร์ u ใน V และทุกสเกลาร์ k

ตัวอย่าง 2.3.1.1 ให้ $T : R^2 \rightarrow R^3$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$T(x, y) = (x, x+y, x-y)$$

ถ้า $u = (x_1, y_1)$ และ $v = (x_2, y_2)$ แล้ว $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

และ $T(u+v) = (x_1 + x_2, [x_1 + x_2] + [y_1 + y_2], [x_1 + x_2] - [y_1 + y_2])$

$$= (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

$$= T(u) + T(v)$$

ถ้า k เป็นสเกลาร์, $ku = (kx_1, ky_1)$

$$T(ku) = (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1)$$

$$= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1)$$

$$= kT(u)$$

ดังนั้น T เป็นการแปลงเชิงเส้น

นิยาม 2.3.1.2 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ถ้าเราใช้สัญกรณ์เมทริกซ์สำหรับเวกเตอร์ใน R^m และ R^n แล้วเรานิยามฟังก์ชัน $T : R^n \rightarrow R^m$ โดย $T(x) = Ax$ ถ้า x เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times 1$ แล้วผลคูณ Ax จะเป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times 1$ ดังนั้น T จะส่ง R^n ไปยัง R^m และ T เป็นเชิงเส้นด้วย เราจะเรียกการแปลงเชิงเส้นนี้ว่าการคูณโดย A การแปลงเชิงเส้นชนิดนี้ เรียกว่า **การแปลงเมทริกซ์**

ตัวอย่าง 2.3.1.2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

แล้ว $T(x) = Ax$ เป็นการแปลงเมทริกซ์ จาก R^2 ไปยัง R^2 ซึ่งเขียนในพจน์ส่วนประกอบได้

$$\text{คือ } T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$$

$$\text{เช่น } T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

นิยาม 2.3.1.3 กำหนดให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ใด ๆ การส่ง $T : V \rightarrow W$ ที่ทำให้ $T(v) = 0$ สำหรับทุก ๆ v ใน V เป็น การแปลงเชิงเส้น และเรียกการแปลงนี้ว่า **การแปลงศูนย์**

นิยาม 2.3.1.4 กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ใด ๆ การส่ง $T : V \rightarrow V$ นิยามโดย $T(v) = V$ เรียกว่า **การแปลงเอกลักษณ์บน V**

$T : V \rightarrow V$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยังตัวมันเองแล้วเรียก T ว่า **ตัวดำเนินการเชิงเส้นบน V**

นิยาม 2.3.1.5 กำหนดให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน และสมมุติ W เป็นปริภูมิย่อย ที่มีมิติจำกัดจำนวนของ V และมี $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติกำหนดให้
$T : V \rightarrow W$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งเวกเตอร์ v ใน V ไปยังภาพฉายเชิงตั้งฉากของมันบน W กล่าวคือ $T(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \ldots + \langle v, w_r \rangle w_r$

การส่ง T นี้ เรียกว่า **ภาพฉายเชิงตั้งฉากของ V ไปบน W**

ตัวอย่าง 2.3.1.3 ให้ $V = R^3$ มีผลคูณภายในระบบยุคลิด เวกเตอร์ $w_1 = (1, 0, 0)$ และ $w_2 = (0, 1, 0)$ สร้างมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ สำหรับระนาบ xy ดังนั้น ถ้า $v = (x, y, z)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน R^3 ภาพฉายเชิงตั้งฉากของ R^3 ไปบนระนาบ xy กำหนดโดย

$$\begin{aligned} T(v) &= \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\ &= (x, y, 0) \end{aligned}$$

2.3.2 ส่วนกลางและเรนจ์

ทฤษฎีบท 2.3.2.1 ถ้า $T : V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว

1. $T(0) = 0$
2. $T(-v) = -T(v)$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ v ใน V
3. $T(v - w) = T(v) - T(w)$ สำหรับทุก ๆ v และ w ใน V

นิยาม 2.3.2.1 ถ้า $T : V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้วเซตของเวกเตอร์ ใน V ที่ T ส่งไปยัง 0 เรียกว่า ส่วนกลาง หรือ ปริภูมิว่าง ของ T เขียนแทนด้วย ker(T) และเซตของทุกเวกเตอร์ ใน W ที่เป็นภาพภายใต้ T ของอย่างน้อยที่สุดหนึ่งเวกเตอร์ ใน V เรียกว่า เรนจ์ของ T หรือ พิสัยของ T เขียนแทนด้วย R(T)

ตัวอย่าง 2.3.1 ให้ $T : R^n \rightarrow R^n$ เป็นการคูณโดยเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

ส่วนกลางของ T ประกอบด้วย $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

ซึ่งเป็นเวกเตอร์ผลเฉลย (solution vectors) ของระบบสมการเอกพันธ์ $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

เรนจ์ของ T ประกอบด้วยเวกเตอร์ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ซึ่งระบบสมการ $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

เป็นระบบแนบนัย (consistent)

ทฤษฎีบท 2.3.2.2 ถ้า $T : V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว

1. ส่วนกลางของ T เป็นปริภูมิย่อยของ V
2. เรนจ์ (พิสัย) ของ T เป็นปริภูมิย่อยของ W

ทฤษฎีบท 2.3.2.3 ถ้า $T : V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานหนึ่งของ V แล้ว $R(T) = \text{Span}\ (T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_3))$

ตัวอย่าง 2.3.2.2 กำหนด $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นมูลฐานของ R^3 ซึ่ง $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$ ให้ $T : R^3 \rightarrow R^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและ $T(v_1) = (1, 0), T(v_2) = (2, -1), T(v_3) = (4, 3)$ จงหาสูตรของ $T(x_1, x_2, x_3)$ แล้วใช้สูตรที่ได้หา $T(2, -3, 5)$

วิธีทำ เริ่มเขียน $x = (x_1, x_2, x_3)$ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ และ $v_3 = (1, 0, 0)$ ถ้า $(x_1, x_2, x_3) = k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 1, 0) + k_3(1, 0, 0)$

โดยการเท่ากันของตัวประกอบ ลำดับเดียวกัน

จะได้

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= x_1 \\ k_1 + k_2 &= x_2 \\ k_1 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\therefore\ k_1 = x_3, k_2 = x_2 - x_3, k_3 = x_1 - x_2,$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0) \\ &= x_3v_1 + (x_2 - x_3)v_2 + (x_1 - x_2)v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ T(x_1, x_2, x_3) &= x_3v_1T(v_1) + (x_2 - x_3)T(v_2) + (x_1 - x_2)T(v_3) \\ &= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_2)(4, 3) \end{aligned}$$

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

นิยาม 2.3.2.2 ถ้า $T : V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว มิติของเรนจ์(พิสัย) ของ T เรียกว่า ค่าลำดับชั้นของ T แทนด้วย rank T และมิติของส่วนกลาง เรียกว่า นัลลิตี้ ของ T แทนด้วย null T

ทฤษฎีบท 2.3.2.4 ถ้า $T : V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก ปริภูมิเวกเตอร์ V ที่มี n มิติไปยังปริภูมิเวกเตอร์ W แล้ว rank T + null T = n

ในกรณีพิเศษ เมื่อ $V = R^n, W = R^m$ และ $T : V \rightarrow W$ เป็นตัวคูณโดยเมทริกซ์ A ขนาด

$m \times n$ ทฤษฎีนี้จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

null T = n - rank T

(จำนวนของสดมภ์ของ A) - (ค่าลำดับชั้นของ T)

ทฤษฎีบท 2.3.2.5 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ ขนาด $m \times n$ แล้ว มิติของปริภูมิผลเฉลย ของ $Ax = 0$ คือ n - (ค่าลำดับชั้น ของ A)

ตัวอย่าง 2.3.2.3 จากระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad\quad + x_5 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 \quad\quad\quad - x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

มีปริภูมิผลเฉลยมี 2 มิติ จากการแก้สมการและหามูลฐาน เมื่อ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

มี 5 สดมภ์ จากทฤษฎีบท 2.3.2.5 ค่าลำดับชั้นของ A จะสอดคล้องกับ 2 = 5 - (ค่าลำดับชั้นของ A) ฉะนั้น ค่าลำดับชั้นของ A = 3

ตัวอย่าง 2.3.2.4 กำหนดให้ $T : R^2 \longrightarrow R^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ซึ่ง $T(1, 1) = (0, 2, 2)$, $T(1, -1) = (4, 0, 0)$ จงหา T(x, y, z), R(T), ker(T), rank T, null T และ เวกเตอร์ที่มีภาพเป็น (1, 0, 0)

วิธีทำ เพราะว่า $\{(1, 1), (1, -1)\}$ เป็นมูลฐานหนึ่ง สำหรับ R_2

ให้ $\quad v = (x, y) \in R^2$

และให้ $\quad v = (x, y) = a(1, 1) + b(1, -1) \quad\quad (1)$

จะได้ $\quad x = a + b, y = a - b$ แล้วแก้สมการได้

$a = (x + y)/2, b = (x - y)/2$

แทนค่า a, b ใน (1) ดังนั้น

$$(x, y) = ((x + y)/2)\ (1, 1) + ((x - y)/2)\ (1, -1)$$

$$T(x, y) = ((x + y)/2)\ T(1, 1) + ((x - y)/2)\ T(1, -1)$$

$$= ((x + y)/2)\ (0, 2, 2) + ((x - y)/2)\ (4, 0, 0)$$

$$= (2x - 2y, x + y, x + y)$$

$$R(T) = \mathrm{Span}(T(1, 1), T(1, -1))$$

$$= \mathrm{Span}(0, 2, 0), (4, 0, 0)$$

$$\mathrm{rank}\ T = 2$$

ker (T) ประกอบด้วยเวกเตอร์ (x, y) ที่ทำให้

$(2x - 2y, x + y, x + y) = (0, 0, 0)$

ดังนั้น $2x - 2y = 0, x + y = 0$

แก้สมการได้ $x = 0, y = 0$

ดังนั้น $\ker (T) = \{(0, 0)\}$

$\mathrm{null}\ T = 0$

หาเวกเตอร์ที่มีภาพเป็น (1, 0, 0) ได้จาก

ให้ $(2x - 2y, x + y, x + y) = (1, 0, 0)$

ดังนั้น $2x - 2y = 1,\ x + y = 0$

แก้สมการได้ $x = 1/4, y = -1/4$

นั่นคือ เวกเตอร์ที่มีภาพ เป็น (1, 0, 0) คือ (1/4, - 1/4)

2.3.3 การแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m

ในตอนนี้ จะแสดงให้เห็นว่าทุก ๆ การแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m เป็นการแปลงเมทริกซ์ จะแสดงว่า ถ้า $T : R^n \rightarrow R^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้นใด ๆ แล้วเราสามารถหาเมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ ที่ทำให้ T เป็นตัวคูณโดย A เพื่อให้เห็นจริง ดังนี้ ให้ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ เป็นมูลฐานมาตรฐานสำหรับ R^n และให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่มี $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$ เป็นเวกเตอร์สดมภ์ ตัวอย่างเช่น ถ้า $T : R^2 \rightarrow R^2$ กำหนดโดย

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ T(e_1) & T(e_2) \end{matrix}$$

นอกจากนั้น, ถ้า

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \; T(e_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \; T(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ T(e_1) & T(e_2) & \ldots\ldots & T(e_n) \end{matrix}$$

ต่อไปจะแสดงว่าการแปลงเชิงเส้น $T : R^n \longrightarrow R^m$ เป็นตัวคูณโดย A เริ่มต้นสังเกตว่า

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

เพราะฉะนั้น จากการเป็นเชิงเส้นของ T

$$T(x) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \ldots + x_nT(e_n) \qquad (2)$$

ในอีกลักษณะหนึ่ง จะได้

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Ax = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \ldots + x_nT(e_n) \tag{3}$$

จากสมการ (2) และ (3) จะได้ว่า $T(x) = Ax$ กล่าวคือ T เป็นตัวคูณโดย A
เมทริกซ์ใน (1) เรียกว่า **เมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ T**

ตัวอย่าง 2.3.3.1 จงหาเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับการแปลง $T : R^3 \rightarrow R^4$ ที่นิยามโดย

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ใช้ $T(e_1)$, $T(e_2)$ และ $T(e_3)$ เป็นเวกเตอร์สดมภ์ เราจะได้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบ โดยสังเกตว่า

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นจริงตามสูตรการแปลง T

ตัวอย่าง 2.3.3.2 ให้ $R^n \rightarrow R^m$ เป็นตัวคูณโดย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ T

วิธีทำ

เวกเตอร์ $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$ เป็นเวกเตอร์สดมภ์ที่สืบเนื่องของ A ดังตัวอย่าง

$$T(e_1) = Ae_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์มาตรฐาน สำหรับ T คือ

$$[T(e_1) : T(e_2) : \ldots : T(e_n)] = A$$

<u>หมายเหตุ</u> เมทริกซ์มาตรฐานสำหรับการแปลงเมทริกซ์ คือ เมทริกซ์ตัวมันเอง

2.3.4 เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น

ถ้า $T : V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เราสามารถแทนด้วยการแปลงเมทริกซ์ ความคิดพื้นฐาน คือ เลือกมูลฐานสำหรับ V และ W แล้วใช้เมทริกซ์พิกัดที่สัมพัทธ์กับมูลฐานเหล่านี้

สมมติ V มี n มิติ และ W มี m มิติ ถ้าเราเลือกมูลฐาน B และ D สำหรับ V และ W ตามลำดับ แล้วสำหรับแต่ละเวกเตอร์ x ใน V เมทริกซ์พิกัด $[x]_B$ จะเป็นเวกเตอร์ใน R^n และ เมทริกซ์พิกัด $[T(x)]_D$ เป็นเวกเตอร์ใน R^m ดังนั้น ในกระบวนการส่ง x ไปยัง T(x) การแปลงเชิงเส้น T จะก่อกำเนิดการส่งจาก R^n ไปยัง R^m โดยส่ง $[x]_B$ ไปยัง $[T(x)]_D$ ทั้งนี้สามารถแสดงได้โดยใช้เมทริกซ์มาตรฐาน A สำหรับการแปลงนี้กล่าวคือ $A[x]_B = [T(x)]_D$ เราสามารถหาเมทริกซ์ A และ T(x) ได้จาก 3 ขั้นตอน ต่อไปนี้

1. หาเมทริกซ์พิกัด $[x]_B$
2. คูณ $[x]_B$ ด้านซ้ายด้วย A เพื่อหา $[T(x)]_D$
3. สร้าง T(x) ใหม่จากเมทริกซ์พิกัด $[T(x)]_D$

สมมติ V เป็นปริภูมิ n มิติ ที่มีมูลฐาน B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ และ W เป็นปริภูมิ m มิติ ที่มีมูลฐาน D = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เราหาเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

ที่ทำให้สมการ (1) เป็นจริงสำหรับทุกเวกเตอร์ x ใน V

โดยเฉพาะ เมื่อ x เป็นเวกเตอร์มูลฐาน u_1 เราต้องการ

$$A[u_1]_B = [T(u_1)]_D \tag{2}$$

แต่

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A[u_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

จาก (2) จะได้ว่า $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(u_1)]_D$

กล่าวคือ สดมภ์แรกของ A เป็นเมทริกซ์พิกัดสำหรับเวกเตอร์ $T(u_1)$ เมื่อเทียบกับมูลฐาน D ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราให้ $x = u_2$ ในสมการ (2)

เราจะได้ $A[u_2]_B = [T(u_2)]_D$

แต่

$$[u_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A[u_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

จาก (2) จะได้ $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(u_2)]_D$

กล่าวคือ สดมภ์ที่สองของ A เป็นเมทริกซ์พิกัดสำหรับเวกเตอร์ $T(u_2)$ ซึ่งเทียบกับมูลฐาน D ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ เราจะพบสดมภ์ที่ j ของ A เป็นเมทริกซ์พิกัดสำหรับเวกเตอร์ $T(u_j)$ เมื่อเทียบกับมูลฐาน D เมทริกซ์หนึ่งเมทริกซ์เดียว A เรียกว่า **เมทริกซ์ของ T เมื่อเทียบกับมูลฐาน B และ D** เราเขียนเมทริกซ์ A นี้ โดยสัญลักษณ์

A = เมทริกซ์ของ T เมื่อเทียบกับมูลฐาน = $[\,[T(u_1)]_D : [T(u_2)]_D : [T(u_n)]_D]$ B และ D

ตัวอย่าง 2.3.4.1 ให้ $T : P_1 \rightarrow P_2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นนิยามโดย $T(p(x)) = xp(x)$ จงหาเมทริกซ์สำหรับ T เมื่อเทียบกับมูลฐาน $B = \{u_1, u_2\}$ และ $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ เมื่อ $u_1 = 1,\ u_2 = x\ ;\ v_1 = 1,\ v_2 = x,\ v_3 = x^2$

วิธีทำ จากสูตรสำหรับ T เราได้ $T(u_1) = T(1) = (x)(1) = x$

$$T(u_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

โดยการพินิจ เราสามารถกำหนดเมทริกซ์พิกัด สำหรับ $T(u_1)$ และ $T(u_3)$ สัมพันธ์กับ D จะได้

$$[T(u_1)]_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad [T(u_2)]_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ สำหรับ T เมื่อเทียบกับ B และ D คือ

$$A = [\ [T(u_1)]_D : [T(u_2)]_D\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.3.4.2 ถ้า $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ เป็นมูลฐานใด ๆ สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ V ที่มีมิติจำกัดจำนวน และ $I : V \rightarrow V$ เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์บน V แล้ว
$I(u_1) = u_1, I(u_2) = u_2, \ldots, I(u_n) = u_n$ เพราะฉะนั้น

$$[I(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [I(u_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots \ [I(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ของตัวดำเนินการเอกลักษณ์ เมื่อเทียบกับมูลฐานใด ๆ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

ตัวอย่าง 2.3.4.3 ให้ $T : R^2 \rightarrow R^2$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นนิยามโดย

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -2x_1 & 4x_2 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ของ T เมื่อเทียบกับมูลฐาน $B = \{u_1, u_2\}$
เมื่อ $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากนิยามของ T

$$T(u_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2u_1 \quad \text{และ} \quad T(u_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3u_2$$

เพราะฉะนั้น $[T(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $[T(u_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

แล้วเมทริกซ์ของ T เมื่อเทียบกับมูลฐาน B คือ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

3.1.1 ศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น

3.1.2 ศึกษาการใช้ Macromedia Authorware version 5.0 เพื่อใช้พัฒนาโปรแกรม

3.1.3 ศึกษาการใช้ซอฟท์แวร์ทางด้านมัลติมิเดีย เพื่อช่วยในการพัฒนาโปรแกรม

3.1.4 สร้างโปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น

3.1.5 ทดสอบการใช้งานโปรแกรม และทำการแก้ไขข้อบกพร่อง

3.1.6 จัดเตรียมคู่มือการใช้โปรแกรม

3.2 คุณลักษณะของโปรแกรมที่จะออกแบบและพัฒนา

3.2.1 สามารถแสดงรูปภาพที่มีสีสันสวยงาม มีทั้งภาพนิ่งและภาพเคลื่อนไหว

3.2.2 สามารถแสดงเสียงได้

3.2.3 บทเรียนที่แสดงจัดเรียงและแบ่งเป็นหัวข้อ ๆ ของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น

3.2.4 แต่ละหัวข้อจะมีแบบฝึกหัดในท้ายหัวข้อ และมีแบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังจากเรียนจบแล้ว

3.2.5 ง่ายและสะดวกต่อการใช้งาน

3.3 การพัฒนาโปรแกรมช่วยสอน

3.3.1 ศึกษาหลักการทำงานของโปรแกรมช่วยสอนที่เคยมีการพัฒนามาก่อนแล้วจากแหล่งต่าง ๆ

3.3.2 นำข้อดีและส่วนที่น่าสนใจของโปรแกรมที่ศึกษามาประยุกต์ใช้เป็นแนวทางในการสร้างโปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น

3.3.3 กำหนดเนื้อหาและเรียบเรียงให้รัดกุม

3.3.4 จัดทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบพร้อมทั้งทำเฉลย

3.3.5 ศึกษาโปรแกรมที่ใช้สร้างรูปภาพเพื่อเพิ่มความสนใจให้กับผู้ใช้

3.3.6 ออกแบบและกำหนดรูปแบบให้เหมาะสม

3.3.7 สร้างโปรแกรมตามขอบเขตที่ได้วางไว้

3.3.8 ทดลองใช้โปรแกรมเพื่อหาข้อบกพร่อง

3.3.9 แก้ไขปรับปรุงข้อบกพร่องของโปรแกรมเพื่อให้ได้โปรแกรมช่วยสอนที่สมบูรณ์ที่สุด

3.4 การกำหนดเนื้อหา

เนื้อหาทั้งหมดได้มีการจัดเรียงตามลำดับดังนี้ คือ

3.4.1 ปริภูมิเวกเตอร์แบบยุคลิด n มิติ

3.4.2 ปริภูมิเวกเตอร์

3.4.3 มูลฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์

3.4.4 เวกเตอร์แถวและเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์

3.4.5 ผลคูณภายใน

3.4.6 บทนำสำหรับการแปลงเชิงเส้น

3.4.7 ส่วนกลางและเรนจ์

3.4.8 การแปลงเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m

3.4.9 เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น

3.5 โปรแกรมประยุกต์ที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอน

3.5.1 Macromedia Authorware version 5.0 เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ในการสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยจะเป็นการนำไอคอนที่มีคุณสมบัติเฉพาะในด้านต่าง ๆ มาจัดเรียงตามขั้นตอนที่ต้องการในแนวทางของการเขียนแผนผังการทำงาน

3.5.2 Adobe Photoshop version 5.0 และACD See 32 Version 3.0 เป็นโปรแกรมจัดการด้านภาพ ซึ่งเป็นโปรแกรมทางด้าน Graphics ที่มีความสามารถสูง เพื่อเพิ่มความสวยงามให้กับโปรแกรม

3.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรม

3.6.1 Pentium 166

3.6.2 Ram 32 MB

3.6.3 Hardisk 4.3 GB

3.6.4 Window 98

3.6.5 จอภาพ Super VGA ตั้งความละเอียดไว้ที่ 800 * 600 pixel

3.6.6 CD – ROM 8x ขึ้นไป

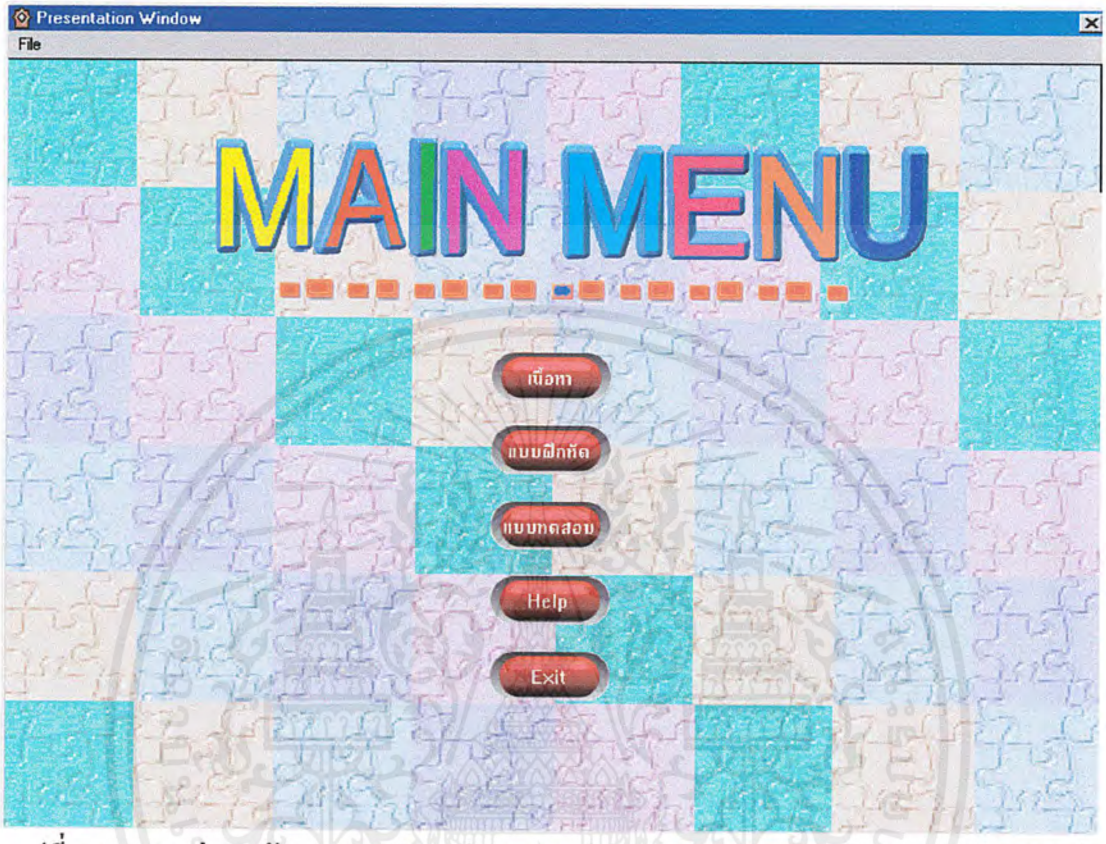
3.6.7 Sound Card

3.6.8 Speaker

3.6.9 แผ่น Diskttetes 3.5 นิ้ว และแผ่น CD – ROM

บทที่ 4

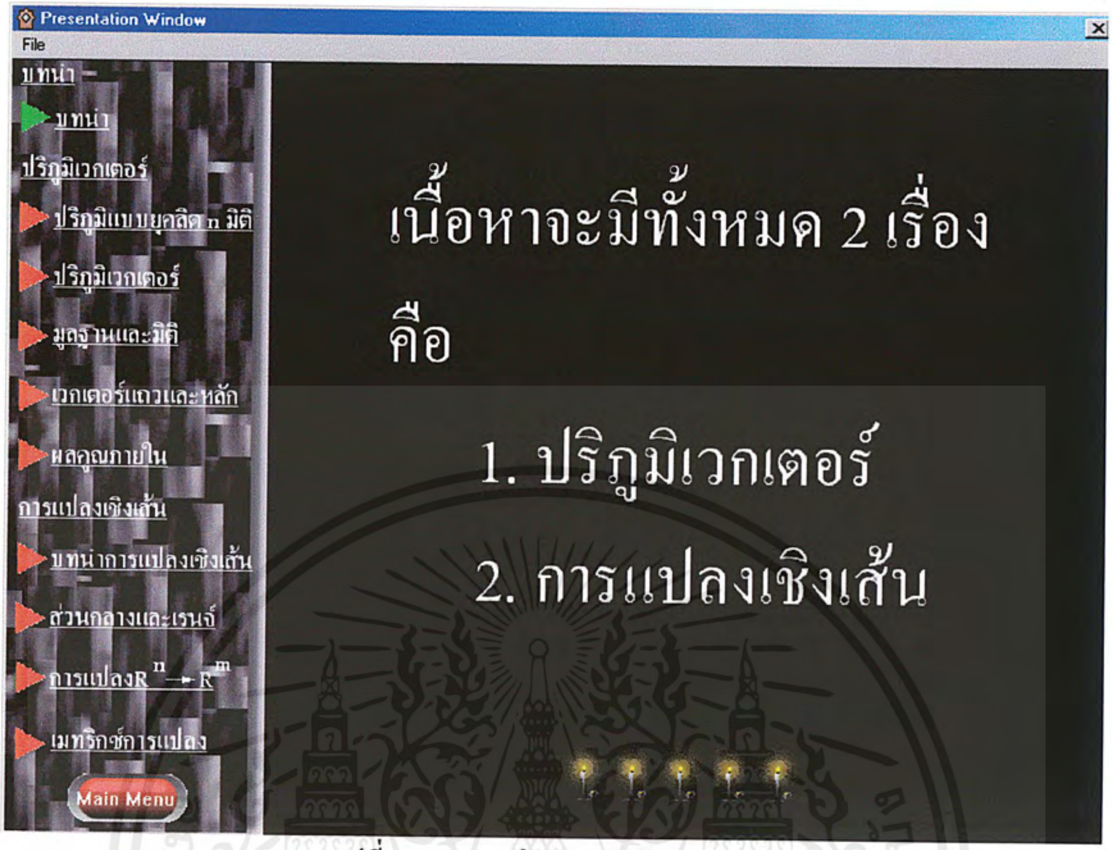
ผลการทดลอง



รูปที่ 4.1 แสดงส่วนหน้าจอเมนูหลักของโปรแกรมช่วยสอนการแปลงเชิงเส้นและปริภูมิเวกเตอร์

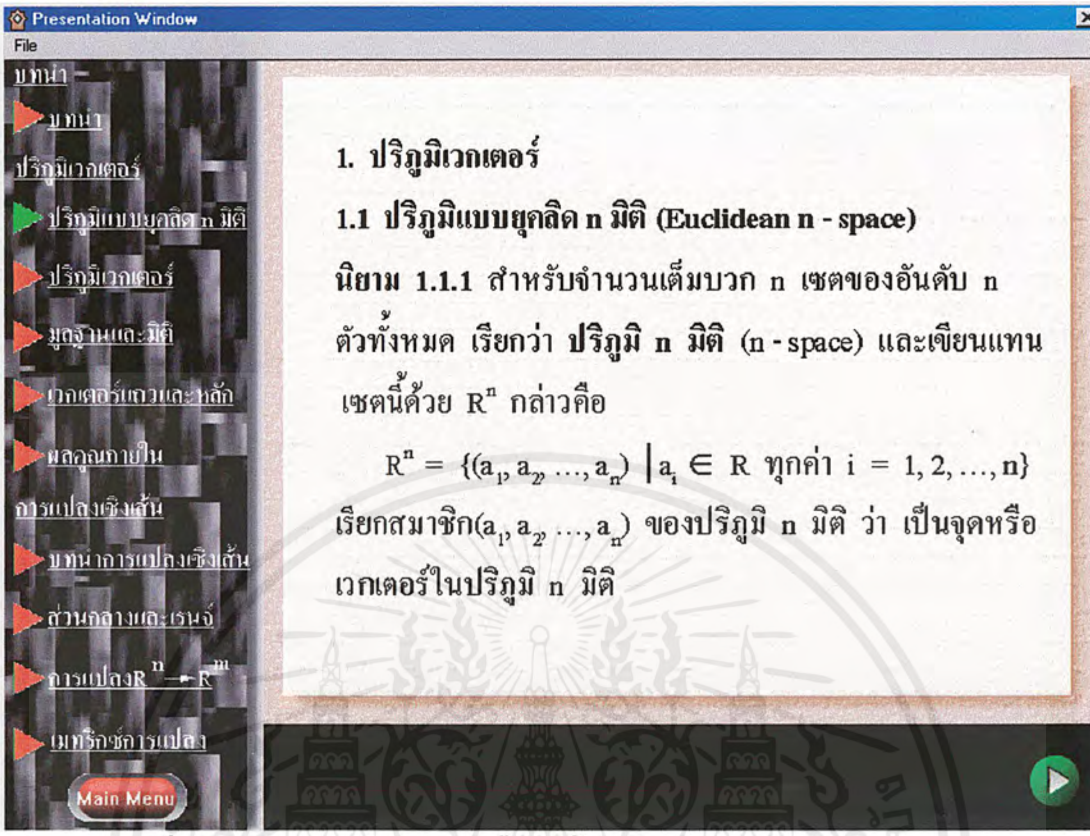
ซึ่งจะประกอบด้วยปุ่มต่างๆ เพื่อให้เลือกกดตามความต้องการ ได้แก่

1. เนื้อหา - เมื่อกดเข้าไปแล้วจะเข้าสู่ส่วนของเนื้อหาทั้งหมดของการแปลงเชิงเส้นและปริภูมิเวกเตอร์
2. แบบฝึกหัด - เมื่อกดเข้าไปแล้วจะพบเมนูแบบฝึกหัด เพื่อให้เลือกว่าจะทำแบบฝึกหัดในเรื่องใด
3. แบบทดสอบ - เมื่อกดเข้าไปแล้วจะเป็นการเริ่มเข้าสู่การทำแบบทดสอบซึ่งจะพบหน้าจอสำหรับให้ใส่ชื่อ
4. Help - เมื่อกดเข้าไปแล้วจะพบหน้าจอของ Help
5. Exit - เมื่อกดแล้วจะเป็นการออกจากโปรแกรมช่วยสอนการแปลงเชิงเส้นและปริภูมิเวกเตอร์



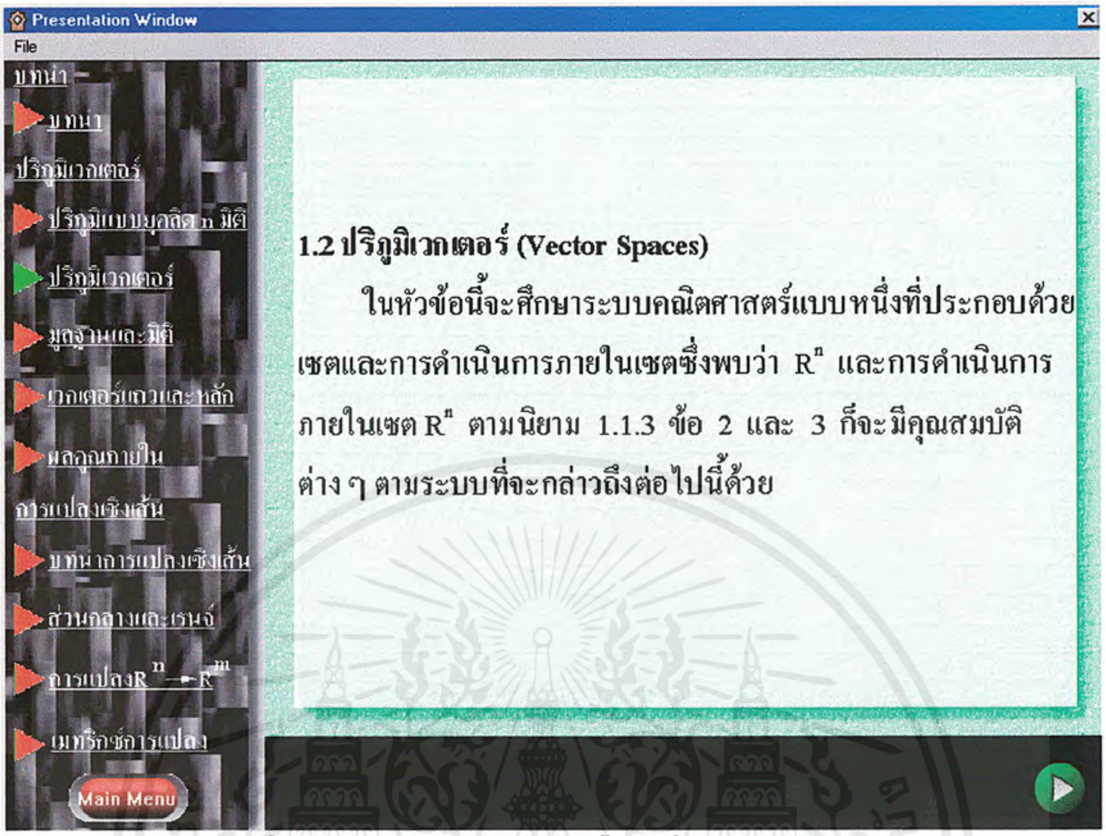
รูปที่ 4.2 แสดงส่วนของหน้าจอบทนำ

เป็นส่วนของหน้าจอบทนำว่าประกอบด้วย 2 เรื่อง คือ ปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น



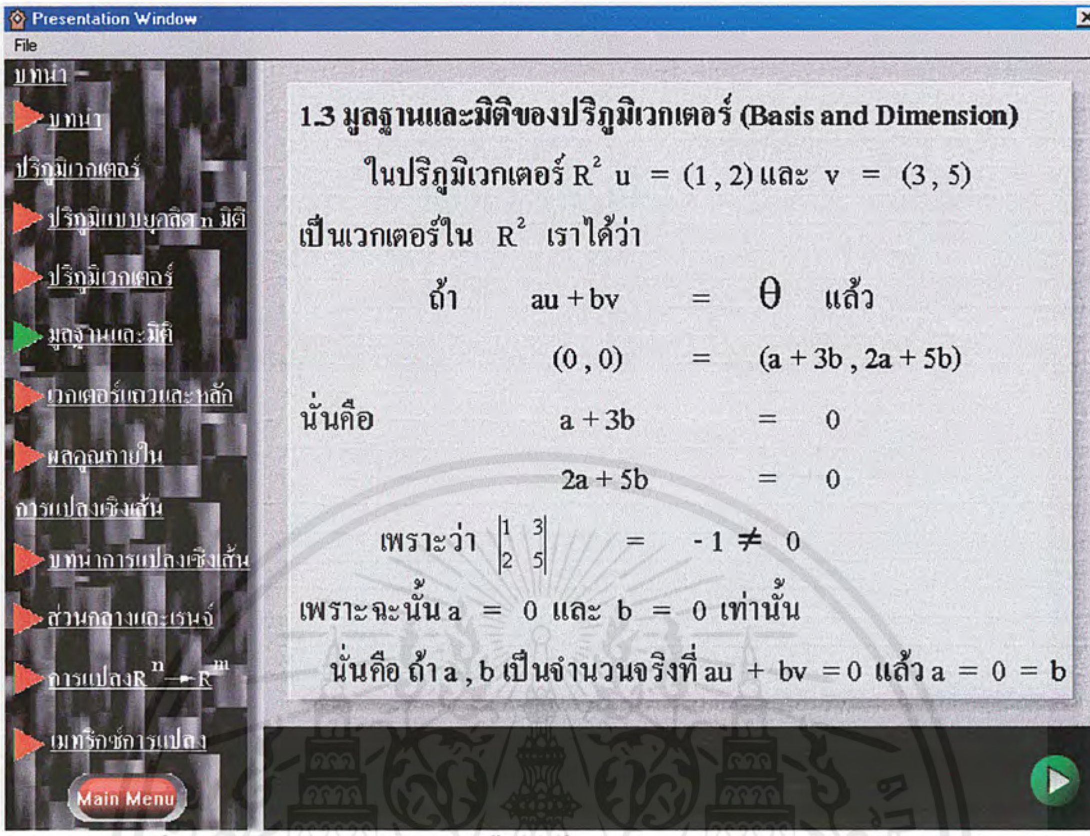
รูปที่ 4.3 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องปริภูมิเวกเตอร์แบบยุคลิด n มิติ

เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องปริภูมิเวกเตอร์แบบยุคลิด n มิติ



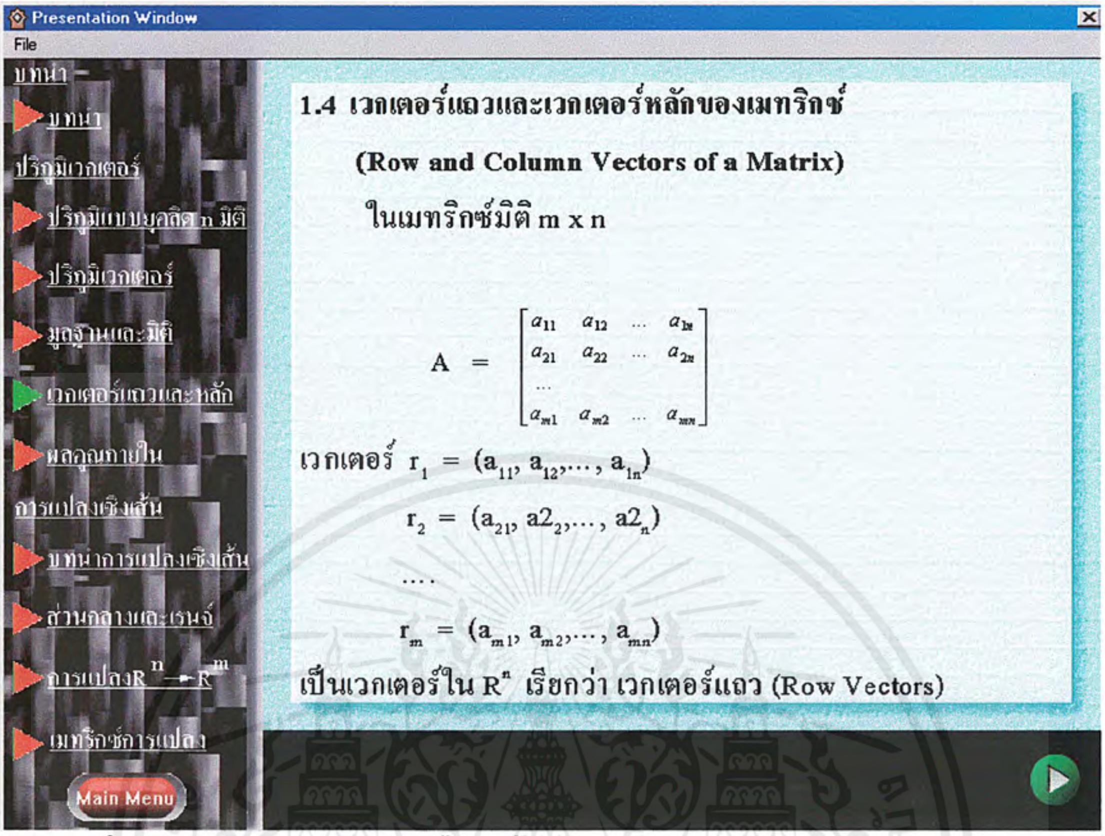
รูปที่ 4.4 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องปริภูมิเวกเตอร์

เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องปริภูมิเวกเตอร์



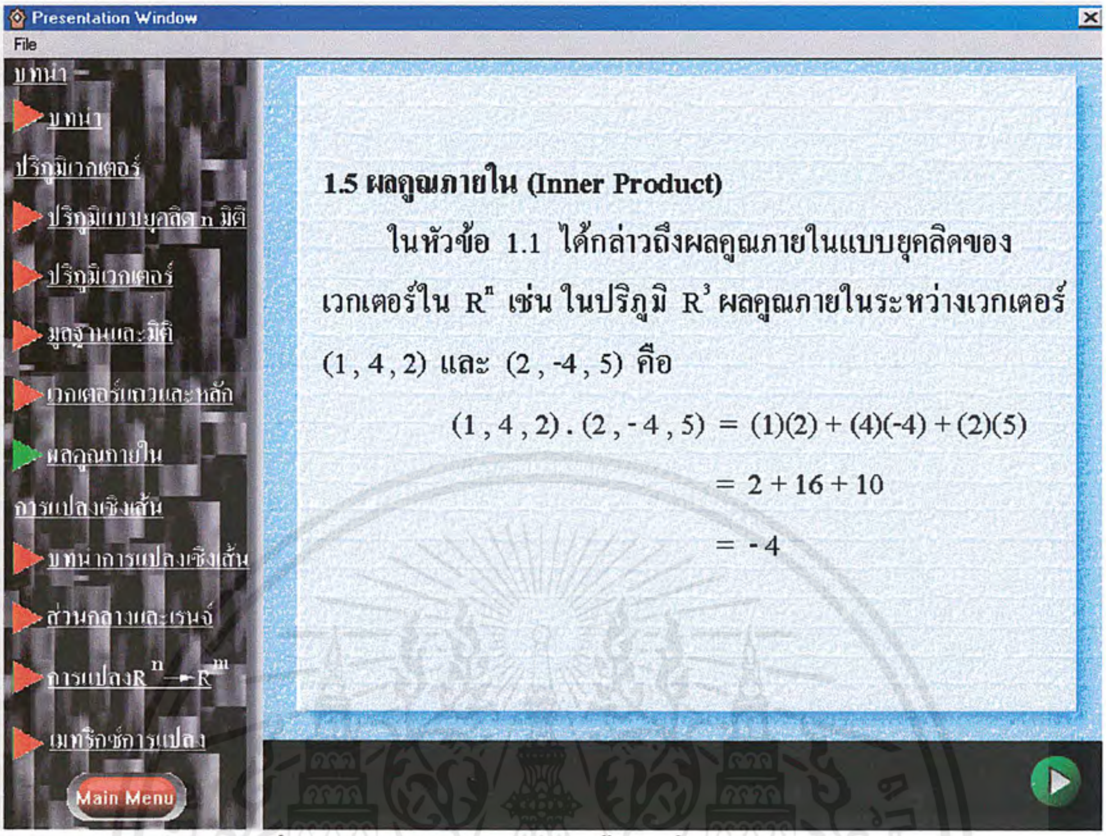
รูปที่ 4.5 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องมูลฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์

เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องมูลฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์



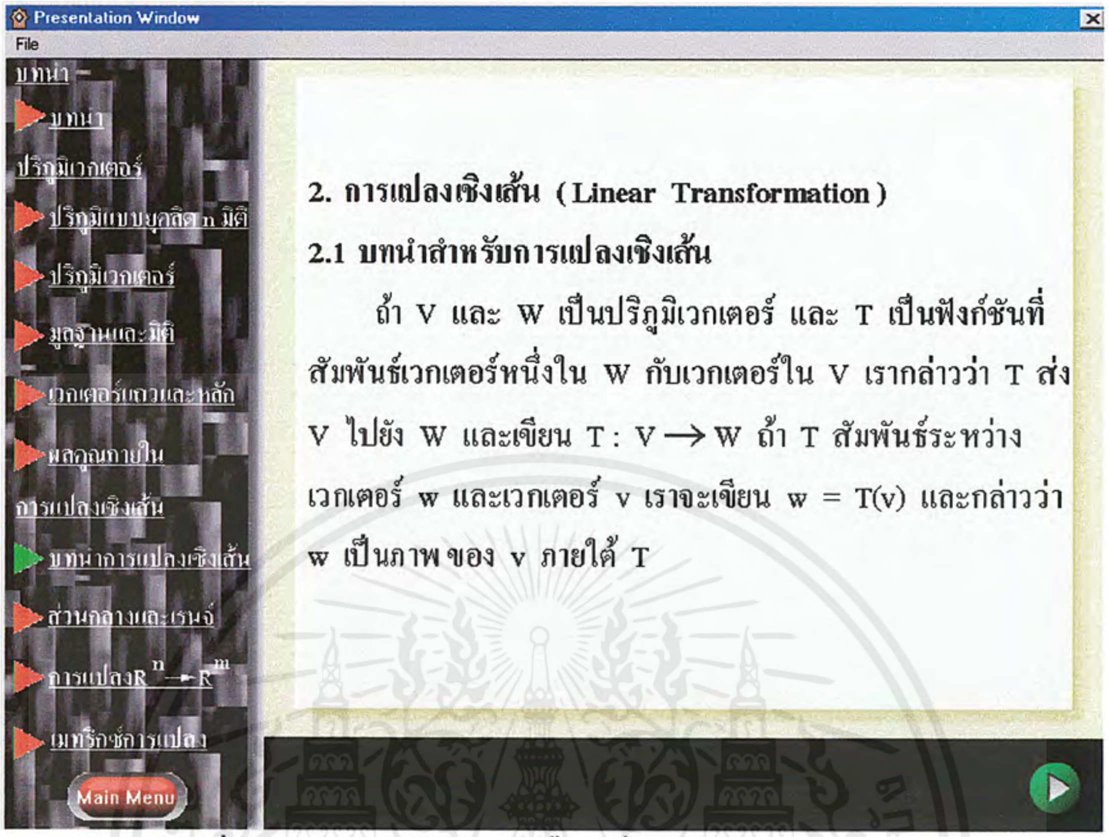
รูปที่ 4.6 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์แถวและเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์

เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์แถวและเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์



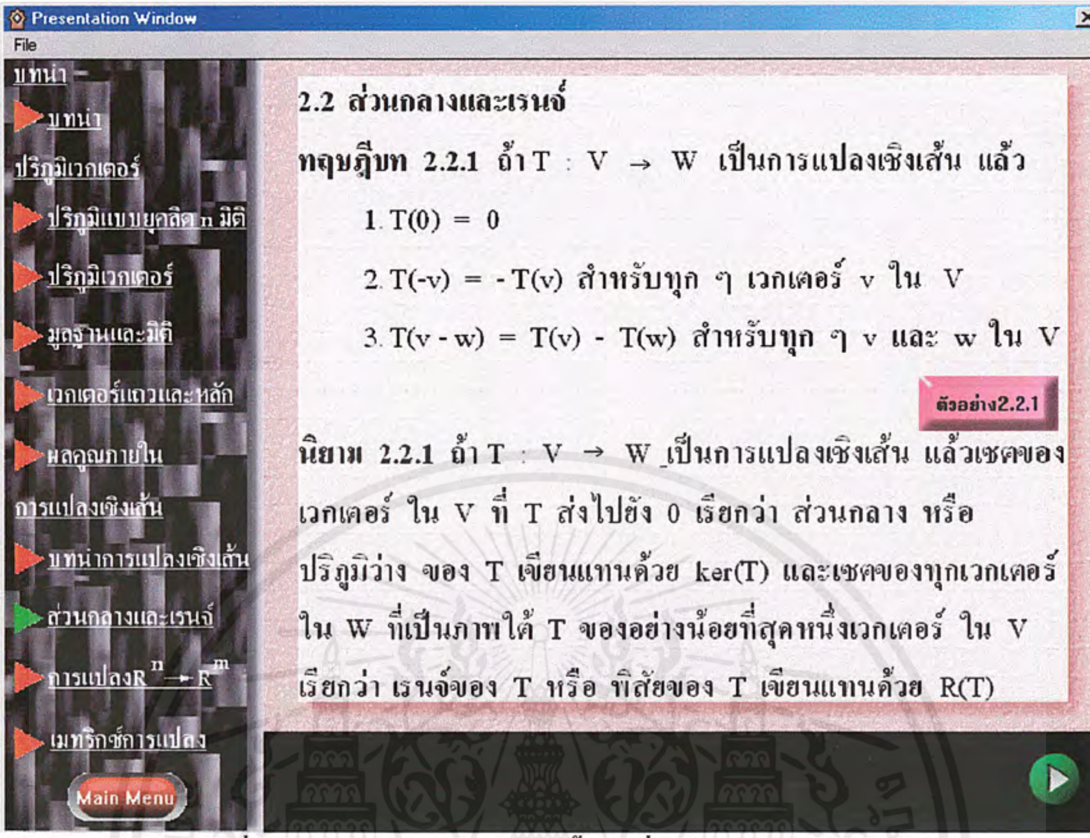
รูปที่ 4.7 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องผลคูณภายใน

เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องผลคูณภายใน



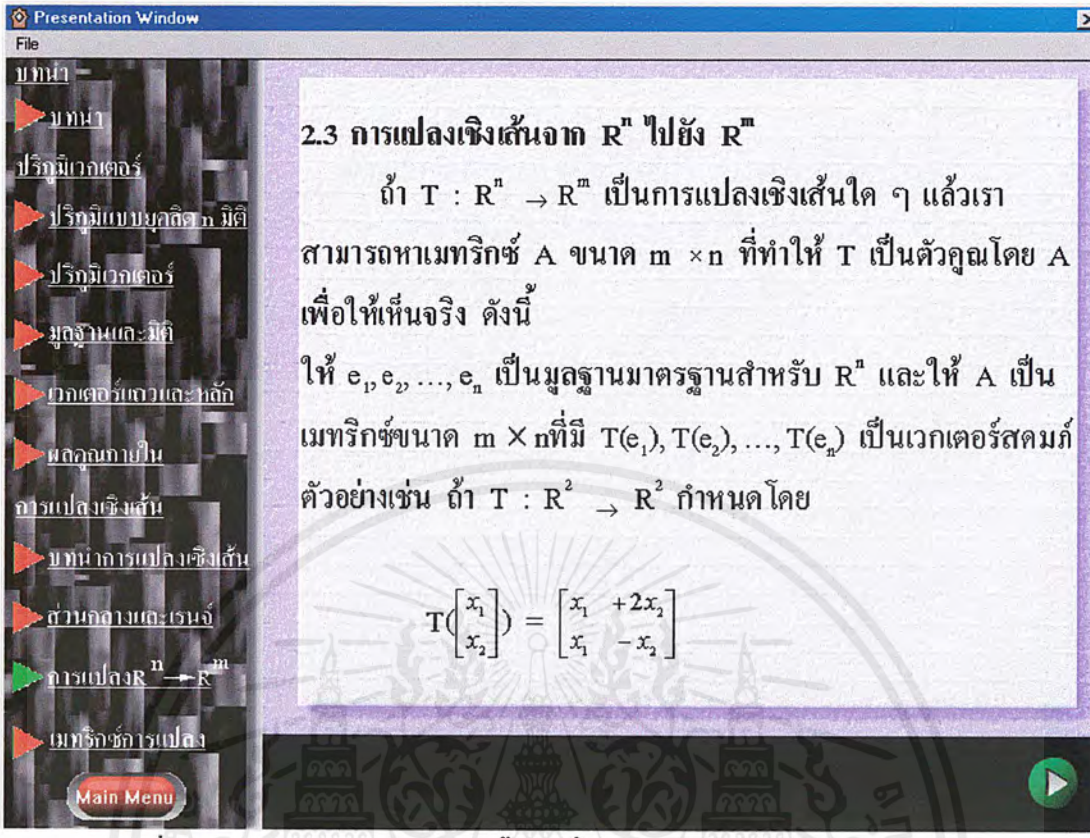
รูปที่ 4.8 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องบทนำการแปลงเชิงเส้น

เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องบทนำการแปลงเชิงเส้น



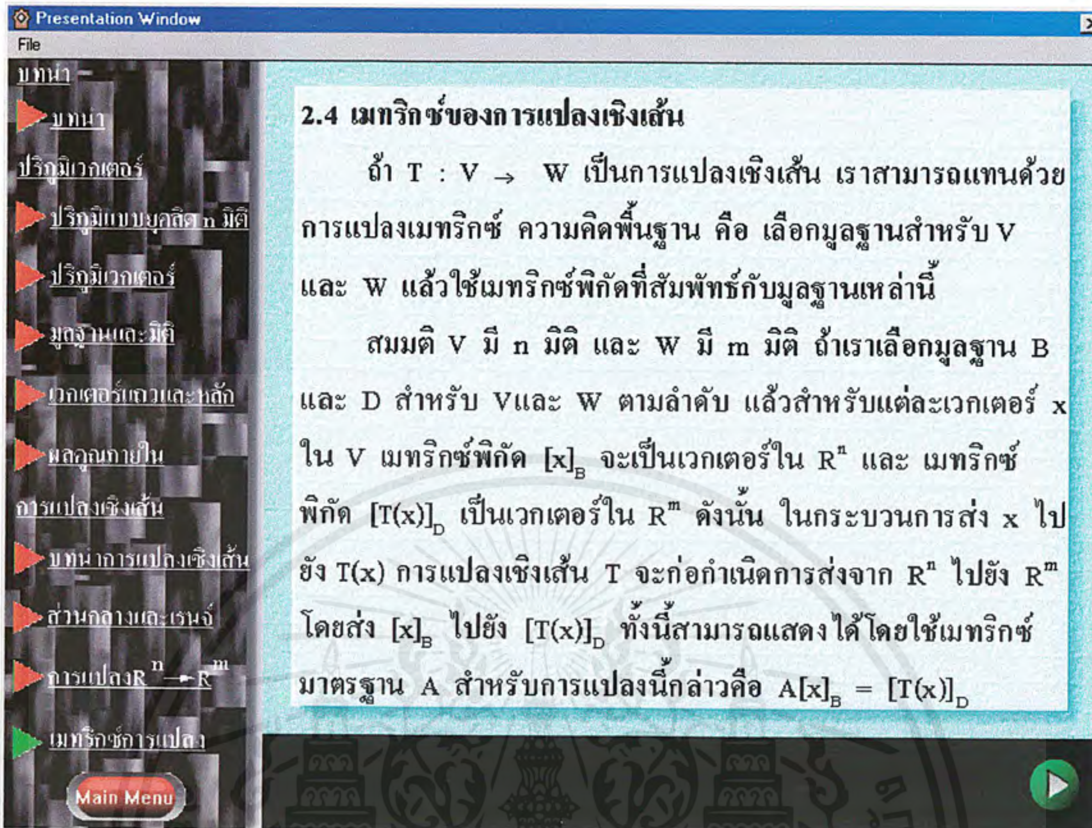
รูปที่ 4.9 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องส่วนกลางและเรนจ์

เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องส่วนกลางและเรนจ์



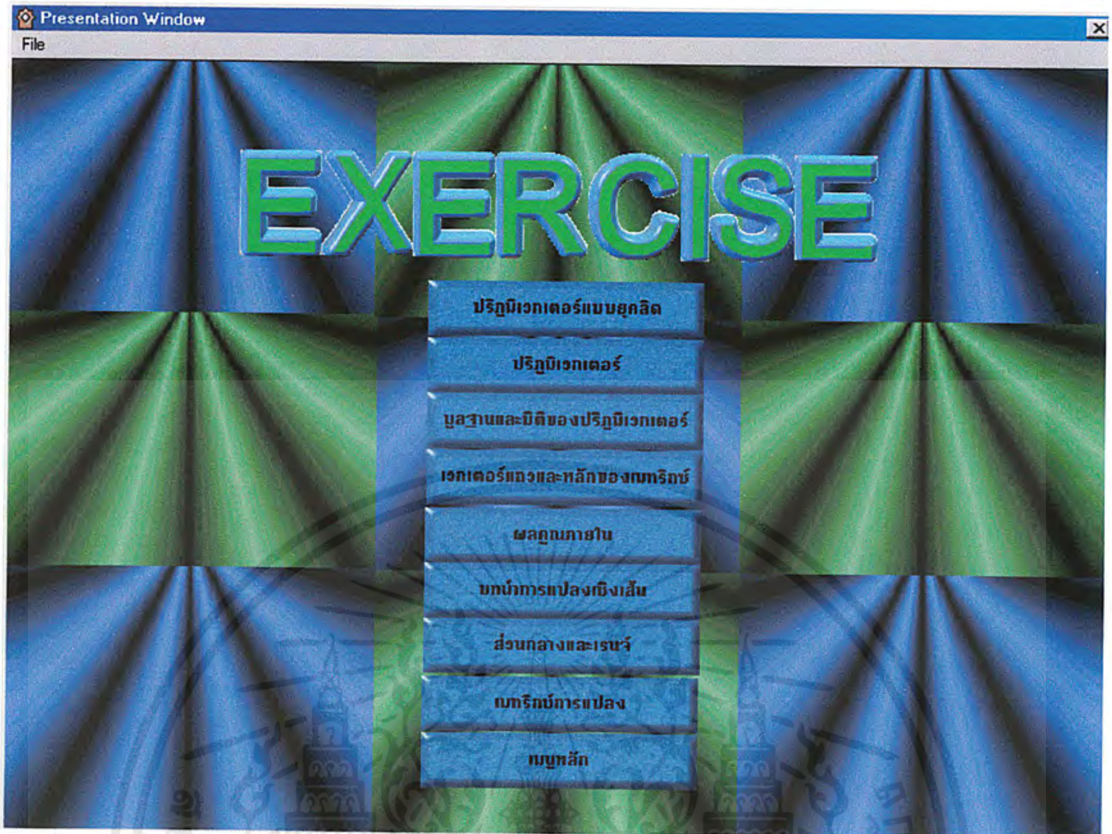
รูปที่ 4.10 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องการแปลงเชิงเส้นจาก $R^n \to R^m$

เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องการแปลงเชิงเส้นจาก $R^n \to R^m$



รูปที่ 4.11 แสดงส่วนของหน้าจอเนื้อหาเรื่องเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น

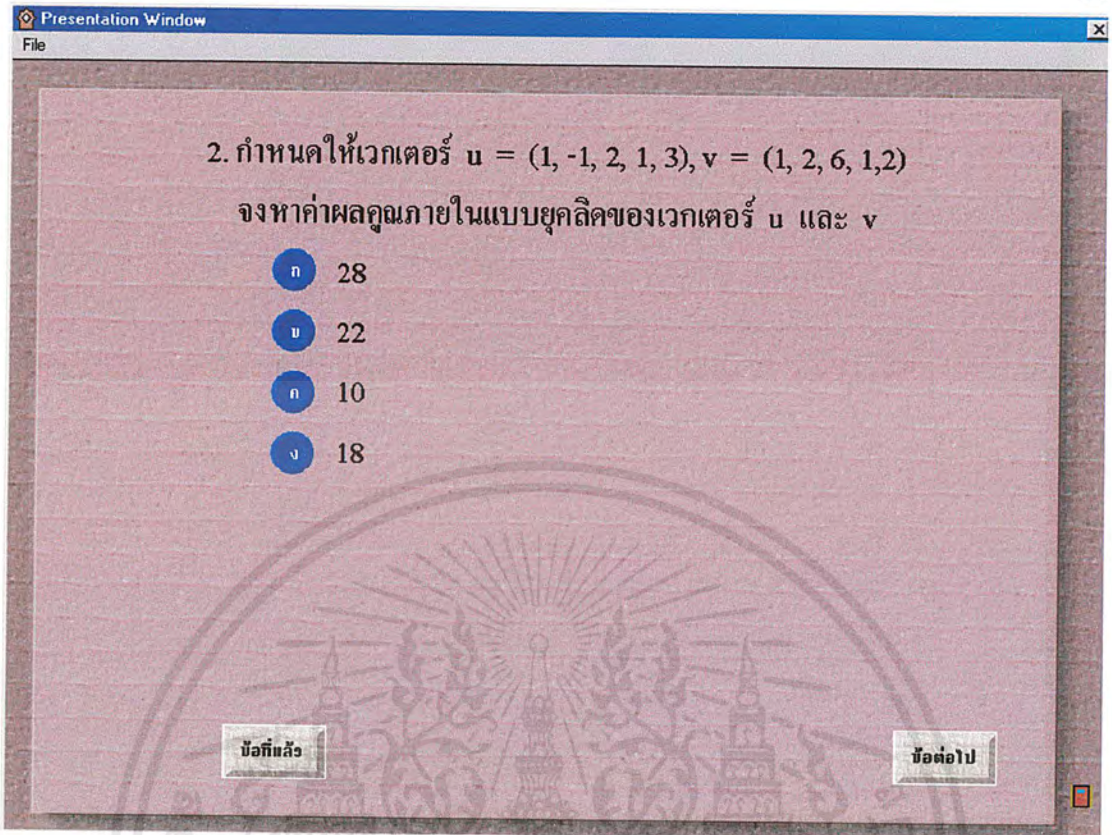
เป็นส่วนของหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อเรื่องเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น



รูปที่ 4.12 แสดงเมนูแบบฝึกหัดในเรื่องต่างๆ

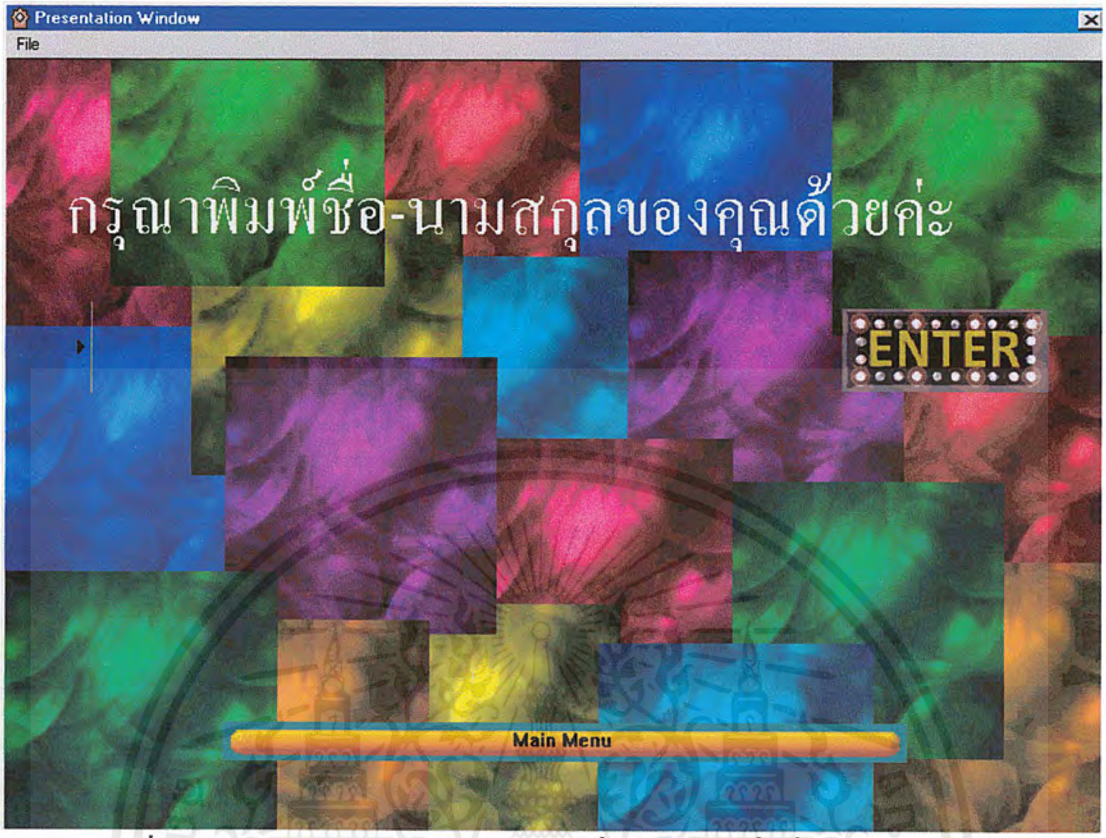
ซึ่งประกอบด้วยปุ่มต่าง ๆ เพื่อให้เลือกเข้าไปทำในแบบฝึกหัดในเรื่องต่างๆ ที่ต้อง ได้แก่

1. ปุ่มแบบฝึกหัดเรื่องปริภูมิเวกเตอร์แบบยุคลิด ภายในมีทั้งหมด 5 ข้อ
2. ปุ่มแบบฝึกหัดเรื่องปริภูมิเวกเตอร์ ภายในมีทั้งหมด 5 ข้อ
3. ปุ่มแบบฝึกหัดเรื่องมูลฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์ ภายในมีทั้งหมด 4 ข้อ
4. ปุ่มแบบฝึกหัดเรื่องเวกเตอร์แถวและเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์ ภายในมีทั้งหมด 5 ข้อ
5. ปุ่มแบบฝึกหัดเรื่องผลคูณภายใน ภายในมีทั้งหมด 5 ข้อ
6. ปุ่มแบบฝึกหัดเรื่องบทนำของการแปลงเชิงเส้น ภายในมีทั้งหมด 5 ข้อ
7. ปุ่มแบบฝึกหัดเรื่องส่วนกลางและเรนจ์ ภายในมีทั้งหมด 5 ข้อ
8. ปุ่มแบบฝึกหัดเรื่องเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น ภายในมีทั้งหมด 5 ข้อ
9. ปุ่มเมนูหลัก เมื่อต้องการกลับไปเมนูหลักให้กดปุ่มนี้



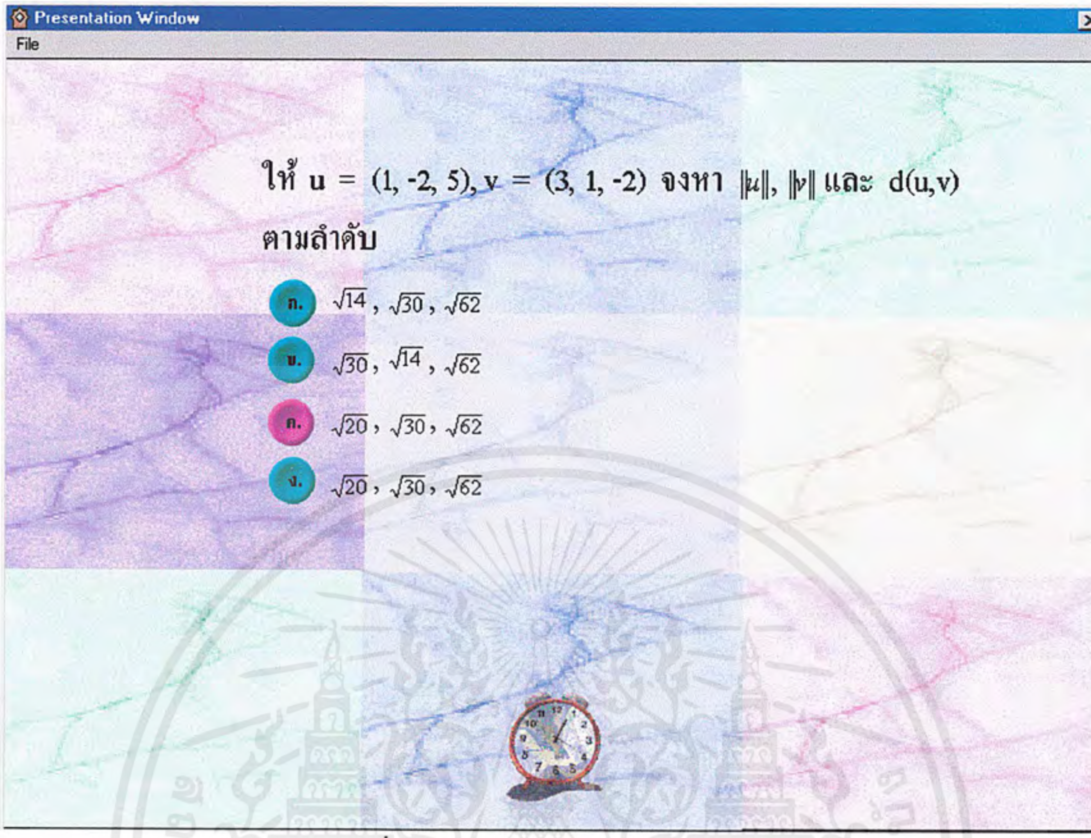
รูปที่ 4.13 แสดงตัวอย่างหน้าจอของแบบฝึกหัดในเรื่องปริภูมิเวกเตอร์แบบยุคลิด n มิติ

ซึ่งในแบบฝึกหัดแต่ละข้อนั้นจะมีตัวเลือกทั้งหมด 4 ตัวเลือก คือ ก., ข., ค., ง. ซึ่งแล้วแต่ผู้ทำจะเลือกตอบข้อไหนก็ให้กดที่ปุ่มตัวเลือกนั้น เมื่อกดแล้วจะทำการเฉลยคำตอบว่าผิดหรือถูก



รูปที่ 4.14 แสดงหน้าจอสำหรับให้ผู้ใช้พิมพ์ชื่อ-นามสกุลเพื่อเริ่มทำแบบทดสอบ

เมื่อกดเลือกแบบทดสอบจากเมนูหลักจะปรากฏหน้าจอสำหรับให้ผู้ใช้พิมพ์ชื่อ-นามสกุล เมื่อพิมพ์เสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้กด Enter เพื่อเริ่มเข้าสู่การทำแบบทดสอบ



รูปที่ 4.15 แสดงหน้าจอแบบทดสอบ

ซึ่งในแต่ละข้อของแบบทดสอบจะมีตัวเลือกทั้งหมด 4 ตัวเลือก คือ ก., ข., ค., ง. ซึ่งแล้วแต่ผู้ทำจะเลือกตอบข้อไหนก็ให้กดที่ปุ่มตัวเลือกนั้น แบบทดสอบทั้งหมดจะมี 30 ข้อ โดยที่เมื่อเลือกคำตอบแต่ละข้อจะไม่สามารถย้อนกลับมาทำใหม่ได้ และ ไม่สามารถออกจากแบบทดสอบได้จนกว่าจะทำแบบทดสอบเสร็จ ในตอนท้ายจะมีการสรุปผลการทดสอบให้ ซึ่งจะแสดงให้ดูในรูปที่ 4.15

รูปที่ 4.16 แสดงหน้าจอสรุปผลการทำแบบทดสอบ

แสดงหน้าจอสรุปผลการทำแบบทดสอบโดยที่จะแสดงชื่อ-นามสกุลของผู้ที่ทำแบบทดสอบ เวลาที่เริ่มใช้โปรแกรม เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ เฉลยแบบทดสอบในแต่ละข้อ ตัวเลือกที่ผู้ทำแบบทดสอบเลือก คะแนนที่ได้ในแต่ละข้อ คะแนนรวม เปอร์เซ็นต์ที่ทำแบบทดสอบได้

รูปที่ 4.17 แสดงหน้าจอของโปรแกรมช่วยเหลือ

อธิบายส่วนต่าง ๆ ของโปรแกรมว่าแต่ละส่วนประกอบด้วยอะไรบ้างมีการทำงานอย่างไร เพื่อเพิ่มความสะดวกและความเข้าใจแก่ผู้ใช้

บทที่ 5
การวิจารณ์หรืออภิปรายผล

ในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ทำให้ได้โปรแกรมช่วยสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นในเรื่องของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นขึ้น โดยใช้ง่ายไม่ซับซ้อน มีการติดต่อกับผู้ใช้และเข้าใจง่ายพอสมควร ซึ่งโปรแกรมจะอยู่ในรูปของการเลือกที่จะเรียนในหัวข้อที่ต้องการและจะจบการทำงานเมื่อไหร่ก็ได้ตามต้องการของผู้ใช้ ทุกหัวข้อย่อยจะมีแบบฝึกหัดเพื่อเพิ่มความเข้าใจในหัวข้อนั้น ๆ มากขึ้น โดยแบบฝึกหัดข้อหนึ่งผู้ใช้จะทำกี่ครั้งก็ได้จนกว่าจะเกิดความพอใจถ้าทำถูกโปรแกรมจะบอกว่าถูก ในทำนองเดียวกันถ้าผิดก็จะบอกว่าผิดพร้อมทั้งยังบอกอีกด้วยว่าให้ย้อนกลับไปดูเนื้อหาส่วนไหน สำหรับแบบทดสอบผู้เรียนจะต้องทำให้ครบทุกข้อตามที่กำหนดไว้เมื่อทำเสร็จแล้วโปรแกรมจะเฉลยว่าคำตอบที่ถูกต้องคือข้อไหนและผู้ใช้ตอบข้อไหน จะรวมคะแนนพร้อมทั้งคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ให้ ผู้ใช้จะสังเกตเห็นได้ว่าในส่วนของการกำหนดค่าเองจะถูกนำมาแสดงไม่มากนักทั้งนี้เนื่องจากบางหัวข้อไม่มีสูตรการคำนวณที่แน่นอน ประกอบกับระยะเวลาที่มีอยู่ค่อนข้างจำกัด จึงทำให้ยากต่อการพัฒนาโปรแกรมให้เป็นไปตามที่ต้องการอย่างสมบูรณ์แบบ

โปรแกรมจะประกอบไปด้วยภาพเคลื่อนไหวและเสียงเพื่อเพิ่มความสนใจให้กับผู้ใช้และสนุกไปกับการเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

บทที่ 6

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษฉบับนี้จุดมุ่งหมายก็คือสร้างโปรแกรมช่วยสอนการแปลงเชิงเส้นขึ้นในเรื่องของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น โดยใช้โปรแกรม Macromedia Authorware Version 5 เป็นเครื่องมือในการพัฒนาโปรแกรม

เนื้อหาภายในโปรแกรมมีการจัดเรียงลำดับตามหัวข้อของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น โปรแกรมได้มีการออกแบบหน้าต่างของบทเรียนในลักษณะเป็นปุ่มให้เลือกคลิ๊กเพื่อที่จะให้ผู้เรียนเลือกเรียนได้ตามต้องการ คือเลือกในหน้าต่อไปหรือกลับไปเรียนในหน้าที่ผ่านมาแล้วได้หรือแม้แต่จะทำการออกจากโปรแกรมหนึ่งไปอีกโปรแกรมหนึ่งก็กระทำได้ง่าย และในโปรแกรมยังประกอบด้วยภาพเคลื่อนไหวและมีเสียงประกอบในระหว่างเรียนด้วยเพื่อเพิ่มความสนใจให้กับผู้เรียนมากขึ้น ในส่วนของแบบฝึกหัดแต่ละข้อจะมีการเฉลยคำตอบว่าคุณตอบถูกหรือผิดถ้าตอบผิดโปรแกรมจะบอกว่าให้ย้อนกลับไปอ่านเนื้อหาตรงไหนจะทำให้เข้าใจว่าทำไมถึงตอบข้อนี้ สำหรับแบบทดสอบ เมื่อทำครบทุกข้อแล้วโปรแกรมจะเฉลยว่าคำตอบที่ถูกคือข้อไหนและผู้ใช้ได้ตอบข้อใด พร้อมทั้งรวมคะแนนและคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ให้

โปรแกรมได้ออกแบบให้ติดตั้งและใช้งานบน window 95 และ window 98 เนื่องจากโปรแกรมมีขนาดใหญ่มากจึงจำปีนต้องบันทึกโปรแกรมทั้งหมดลงบนแผ่นซีดีเพื่อความสะดวกในการนำไปใช้และติดตั้ง

6.2 ปัญหาและอุปสรรค

สำหรับการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นนี้ ได้เกิดปัญหาขึ้นหลายประการดังนี้

6.2.1 เนื่องจากโปรแกรมช่วยสอนนี้มีเนื้อที่ขนาดใหญ่มาก ทำให้ไม่สะดวกในการเคลื่อนย้ายโปรแกรม จึงทำให้การเผยแพร่โปรแกรมทำได้ไม่ค่อยสะดวกนัก

6.2.2 เนื่องจากบางหัวข้อมีรูปแบบของสมการที่ไม่แน่นอน จึงไม่เหมาะที่จะนำมาใช้ในสร้างโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ

6.2.3 ในบางหัวข้อของเนื้อหาที่จะต้องมีการพิสูจน์ไม่สามารถนำมาทำเป็นแบบฝึกหัดและแบบทดสอบที่ให้แสดงการพิสูจน์ได้

6.3 ข้อเสนอแนะ

ในการทำโปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นนี้ คณะผู้จัดทำได้เล็งเห็นปัญหาหลายประการจึงนำมาเป็นข้อเสนอแนะ เพื่อว่าจะก่อให้เกิดประโยชน์กับผู้ที่สนใจและง่ายต่อการนำโปรแกรมไปพัฒนาต่อไป

6.3.1 ในการใช้โปรแกรมช่วยสอนปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นนี้ผู้ใช้ควรมีความรู้พื้นฐานในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นบ้างพอสมควร

6.3.2 เนื่องจากบางหัวข้อจะต้องมีการพิสูจน์ ฉะนั้นแบบฝึกหัดและแบบทดสอบจึงไม่สามารถกำหนดโจทย์โดยให้ผู้เรียนแสดงการพิสูจน์ให้เห็นได้ จึงต้องใช้โจทย์ที่เป็นคำตอบให้เลือกแทน

6.3.3 ทำการศึกษาโปรแกรมต่าง ๆ ที่เล็งเห็นว่าจะต้องใช้และเกี่ยวข้องกับการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอน

6.3.4 จัดเตรียมอุปกรณ์ให้พร้อมในการจัดเก็บข้อมูลเนื่องจากเป็นโปรแกรมที่มีขนาดใหญ่มาก

6.3.5 ควรอย่างยิ่งที่จะทดลองใช้โปรแกรมช่วยสอนกับนักศึกษาที่ต้องเรียนในเรื่องเดียวกับโปรแกรมช่วยสอนที่กำลังจะพัฒนาขึ้นแล้วทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากความเข้าใจในบทเรียนของนักศึกษา

6.3.6 ใช้เวลาในการศึกษาและพัฒนาโปรแกรมอย่างต่อเนื่องเพื่อให้ได้โปรแกรมช่วยสอนที่สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพที่สุด

บรรณานุกรม

ดำรงค์ ทิพย์โยธา และเพ็ญพรรณ ยังคง. 2540. **พีชคณิตเชิงเส้น.** พิมพ์ครั้งที่ 3 แก้ไขเพิ่มเติม. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬา.

ถนอม (ตันพิพัฒน์) เลาหจรัสแสง. 2541. **คอมพิวเตอร์ช่วยสอน** ภาควิชาโสตทัศนศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: บริษัทวงกมล โพรดักชัน จำกัด.

บูรณะ สมชัย. 2542. **การสร้าง CAI - Multimedia ด้วย Authorware 4.** กรุงเทพฯ : บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด(มหาชน).

พัชรินทร์ เหมโชติ. **เอกสารประกอบการเรียนวิชา พีชคณิตเชิงเส้น.**

ราชบัณฑิตยสถาน. 2540. **ศัพท์คณิตศาสตร์** พิมพ์ครั้งที่ 7 กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์มหาจุฬาลงกรณ์ราชวิทยาลัย.

วีระพันธ์ คำดี. **คู่มือการใช้ Macromedia Authorware 5** กรุงเทพฯ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

สมพร สูตินันท์โอภาส, ผู้แปล. 2537. **ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์พีชคณิตเชิงเส้น** กรุงเทพฯ : บริษัท แมครอ - ฮิลอินเตอร์เนชั่นแนลเอ็นเตอร์ไพรส์ จำกัด.

Bigwa Nath Data. 1995. **Numerical Linear Algebra and Application** . Northern Illinois University : BROOKS/COLE PUBLISHING COMPANY.