สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

เมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสอง

ORTHOGONAL MATRIX AND APPLICATION TO CONIC SECTION AND QUADRATIC SURFACE

T036150

จิรศักดิ์ จิตสมบูรณ์
เบญจมาภรณ์ กลิ่นหอมหวล
ปฏาวุฒิ เมฆเสรีวัฒนา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2542

เลขหมู่..............................
เลขทะเบียน 36150
วัน, เดือน, ปี 11 ก.ค. 2543

...ใช้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ORTHOGONAL MATRIX AND APPLICATION TO CONIC SECTION AND QUADRATIC SURFACE

JIRASAK JITSOMBOON
BENJAMAPORN KLINHORMHUAL
PADAVUT MEKSERIWATTANA

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 1999

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ เมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสอง

ORTHOGONAL MATRIX AND APPLICATION TO CONIC SECTION AND QUADRATIC SURFACE

ชื่อนักศึกษา นายจิรศักดิ์ จิตสมบูรณ์ 39054103

นางสาวเบญจมาภรณ์ กลิ่นหอมหวล 39054119

นายปฏาวุฒิ เมฆเสรีวัฒนา 39054120

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2542

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	อาจารย์พรชัย เจนจิระพงศ์เวช	
กรรมการ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	

(อาจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	เมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสอง
ชื่อนักศึกษา	นายจิรศักดิ์ จิตสมบูรณ์ 39054103
	นางสาวเบญจมาภรณ์ กลิ่นหอมหวล 39054119
	นายปฏาวุฒิ เมฆเสรีวัฒนา 39054120
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2542
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและสร้างโปรแกรมแสดงความสัมพันธ์ของผลเฉลยในรูปของกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ โดยใช้เมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสอง เพื่อเป็นประโยชน์และเพื่อความสะดวกรวดเร็วสำหรับนักศึกษาที่เรียนวิชานี้ โดยได้นำซอฟต์แวร์เดลไฟ 4 มาใช้ในการสร้างอินเตอเฟสเพื่อรับอินพุต จากนั้นอินพุตจะถูกคำนวณโดยซอฟต์แวร์แมททิเมติกา ซึ่งได้ใช้ซอฟต์แวร์วิชวลเบสิกเป็นตัวลิงค์ระหว่าง 2 ซอฟต์แวร์นี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	Orthogonal Matrix and Application to Conic Section and Quadratic Surface
Student	Mr. Jirasak Jitsomboon 39054103
	Miss Benjamaporn Klinhormhual 39054119
	Mr. Padavut Mekseriwattana 39054120
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	1999
Special Project Advisor	Associate Professor Pongpan Rattanathanawan

ABSTRACT

This special problem has some propose concerning in studying and designing a program to calculate in 2 dimension and 3 dimension output. This program uses the method of orthogonal matrix and application to conic sections and quadratic surfaces also this program is used for facilitating process of calculation.

Especially the students who enroll this subject will get benefit from this program. Delphi 4 have been used for interfacing received input. Afterthat, the received input will be calculated by the Software called Mathematica, However these two programs are linked by Visual Basic.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องเมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสองสามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ

รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสาทวิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ผู้จัดทำ จนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2543

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากปัญหาของภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสองสามารถหาผลเฉลยได้หลายวิธี ซึ่งผลเฉลยนั้นจะอยู่ในรูปของกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ ตามลำดับ จึงมีความประสงค์ที่จะนำเสนอวิธีการประยุกต์เมทริกซ์เชิงตั้งฉากในการหาผลเฉลยและได้จัดทำโปรแกรมสำเร็จรูปแสดงความสัมพันธ์ของผลเฉลยในรูปของกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ โดยในส่วนหนึ่งของโปรแกรมนี้ได้พัฒนา "โปรแกรมแก้ปัญหาการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง" ของ นางสาวกนกอร ยอดสร้อย และนางสาวศศิกาญจน์ เสถียรจิกานนท์ นักศึกษาภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ ชั้นปีที่ 4 ปีการศึกษา 2541 ซึ่งได้นำมาเป็นส่วนหนึ่งในการใช้แก้ปัญหา

โปรแกรมที่จัดทำนี้สามารถนำไปใช้ในการเรียนการสอนของวิชาพีชคณิตเชิงเส้น โดยจะเน้นเฉพาะในหัวข้อ "เมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสอง" เท่านั้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อศึกษาการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสอง โดยใช้เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก
2. เพื่อสร้างโปรแกรมสำเร็จรูปแสดงความสัมพันธ์ของผลเฉลยในรูปของกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ

1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

ได้โปรแกรมเมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสองซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ของผลเฉลยในรูปของกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการศึกษา

โปรแกรมที่จัดทำขึ้นนี้ได้นำ "โปรแกรมแก้ปัญหาการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง" ของ นางสาวกนกอร ยอดสร้อย และนางสาวศศิกาญจน์ เสถียรจิกานนท์ นักศึกษาภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ ชั้นปีที่ 4 ปีการศึกษา 2541 มาใช้ในการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง โดยเลือกใช้วิธีจาโคบี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขอบเขตการศึกษา

โปรแกรมที่จัดทำขึ้นนี้จะเน้นในส่วนของการเขียนกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ เป็นหลักใหญ่ โดยใช้การประยุกต์เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

1.6 ขั้นตอนของการศึกษา

1. ศึกษาหัวข้อที่มีประโยชน์และสมควรนำเสนอเป็นหัวข้อวิจัย
2. ทำการศึกษาเนื้อหาการเขียนกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ
3. ทำการศึกษาที่มาและขั้นตอนของแต่ละวิธีที่จะนำมาใช้
4. ทำการศึกษาและเลือกซอฟต์แวร์ที่เหมาะสมสำหรับโปรแกรมนี้
5. เขียนโปรแกรม
6. ตรวจสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นให้มีความถูกต้องตามความเป็นจริง

1.7 ข้อตกลงเบื้องต้น

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นนี้จะเรียกใช้ซอฟต์แวร์แมททิเมติกา ดังนั้นคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการติดตั้งโปรแกรมนี้จึงควรมีซอฟต์แวร์แมททิเมติกาอยู่ด้วย

1.8 ข้อจำกัดของการศึกษา

1. ไม่สามารถพิมพ์สัมประสิทธิ์ของสมการที่ติดค่ารากได้
2. ในส่วนของกราฟ จะต้องทราบขอบเขตของตัวแปร x , y , z ที่เหมาะสมจึงจะได้กราฟที่ถูกต้องและสวยงาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

นิยาม ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้วเวกเตอร์ X ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ใน R^n จะเรียกว่าเวกเตอร์เจาะจงของ A ถ้า AX เป็นผลคูณสเกลาร์ของ X กล่าวคือ $AX = \lambda X$ สำหรับบางสเกลาร์ λ เรียกสเกลาร์ λ ว่าค่าเจาะจงของ A และเรียกเวกเตอร์ X ว่าเป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ λ

<u>**ตัวอย่าง 2.1.1**</u> เวกเตอร์ $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับค่าเจาะจงของ $\lambda = 3$

เมื่อ $AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3X$ #

การหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

จากนิยาม $AX = \lambda X$

เขียนใหม่ได้ $AX = \lambda \mathrm{I} X$

หรือ $(A - \lambda \mathrm{I})X = 0$ (2.11)

สำหรับ λ ที่เป็นค่าเจาะจง ต้องมีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ของระบบสมการนั้น สมการ (2.11) เราจะมีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ได้ก็ต่อเมื่อ

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0 \text{ หรือ } |A - \lambda \mathrm{I}| = 0 \quad (2.12)$$

เรียกสมการ (2.12) ว่าเป็นสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A สเกลาร์ที่สอดคล้องกับสมการนี้คือค่าเจาะจงของ A เมื่อขยายตัวกำหนด $\det\,(A - \mathrm{I})$ จะเป็นพหุนามใน λ เราเรียกว่าพหุนามลักษณะเฉพาะของ A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.1.2 จงหาค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

เพราะว่า $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

แล้วพหุนามลักษณะเฉพาะของ A คือ det $(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

และสมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

ผลเฉลยของสมการนี้คือ $\lambda = 1$ และ $\lambda = 2$ ซึ่งเป็นค่าเจาะจงของ A #

ตัวอย่าง 2.1.3 จงหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

ดังนั้นค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = -1$ และ $\lambda = 3$

หาเวกเตอร์เจาะจงได้จาก $(A - \lambda I)X = 0$

สำหรับ $\lambda = -1$ จะได้

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เมื่อ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจง

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = -1$ คือ $k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

สำหรับ $\lambda = 3$ จะได้

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

ดังนั้นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 3$ คือ $m\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ เมื่อ m เป็นค่าคงที่ใดๆ #

ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้วข้อความต่อไปนี้จะสมมูล

(1) λ เป็นค่าเจาะจงของ A

(2) ระบบสมการ $(A - \lambda \mathrm{I})X = 0$ มีผลเฉลยที่มีคุณค่า

(3) มีเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ใน R^n ที่ทำให้ $AX = \lambda X$

(4) λ เป็นผลเฉลยค่าจริงของสมการลักษณะเฉพาะ $|A - \lambda \mathrm{I}| = 0$

เวกเตอร์เจาะจงทั้งหลายที่สมนัยกับ λ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ในปริภูมิผลเฉลยของ $(A - \lambda \mathrm{I})X = 0$ เราเรียกปริภูมิผลเฉลยนี้ว่า ปริภูมิเจาะจงของ A ที่สมนัยกับ λ

<u>**ตัวอย่าง 2.1.4**</u> จงหามูลฐานสำหรับปริภูมิเจาะจงของ $A = \begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\-2 & 3 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$|A - \lambda \mathrm{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 0\\-2 & 3-\lambda & 0\\0 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lambda = 1, 5, 5$

สำหรับ $\lambda = 1$ หาเวกเตอร์เจาะจงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการจะได้ $x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 0$

ฉะนั้นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 1$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในรูปแบบ

$$X = \begin{bmatrix}t\\t\\0\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นมูลฐานสำหรับปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 1$ คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

สำหรับ $\lambda = 5$ หาเวกเตอร์เจาะจงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการจะได้ $x_1 = -k, x_2 = k, x_3 = t$

เวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 5$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่อยู่ในรูปแบบ

$$X = \begin{bmatrix} -k \\ k \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$= k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น มูลฐานสำหรับ

ปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 5$ คือ $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 มูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ : กระบวนการ กราม-ชมิดต์

นิยาม เซตของเวกเตอร์ในปริภูมิผลคูณภายใน จะเรียกว่า เซตเชิงตั้งฉาก ถ้าทุกๆคู่ของเวกเตอร์ที่ต่างกันในเซตนี้ตั้งได้ฉากกัน เซตเชิงตั้งฉากในแต่ละเวกเตอร์มีค่าประจำเท่ากับ 1 เรียกว่า เชิงตั้งฉากปรกติ

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ $v_1 = (0,1,0)$,$v_2 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$,$v_3 = (1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})$

เซต $s = \{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นเชิงตั้งฉากปรกติ ถ้า R^3 มีผลคูณภายในระบบยุคลิด

แล้ว $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = 0$

และ $\| v_1 \| = \| v_2 \| = \| v_3 \| = 1$ #

ทฤษฎีบท ปริภูมิผลคูณภายในที่มีมิติไม่เป็นศูนย์และมีมิติจำกัดจำนวนทุกๆปริภูมิมีมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ

พิสูจน์ ให้ v เป็นปริภูมิผลคูณภายในมี n มิติที่ไม่เป็นศูนย์และให้ $s = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ เป็นมูลฐานใดๆ สำหรับ v ขั้นตอนตามลำดับต่อไปนี้จะสร้างมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ สำหรับ v

ขั้นที่1 ให้ $v_1 = u_1 / \| u_1 \|$ เวกเตอร์ v_1 มีค่าประจำเท่ากับ 1

ขั้นที่2 สร้างเวกเตอร์ v_2 ที่มีค่าประจำเท่ากับ 1 และตั้งได้ฉากกับ v_1

ได้จาก $$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\| u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 \|}$$

ขั้นที่3 สร้างเวกเตอร์ v_3 ที่มีค่าประจำเท่ากับ 1 และตั้งได้ฉากกับทั้ง v_1 และ v_2

ได้จาก $$v_3 = \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\| u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 \|}$$

ขั้นที่4 หาเวกเตอร์ v_4 ที่มีค่าประจำเท่ากับ 1 และตั้งได้ฉากกับทั้ง v_1, v_2 และ v_3

ได้จาก $$v_4 = \frac{u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3}{\| u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3 \|}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆจะได้เซตเชิงตั้งฉากปรกติของเวกเตอร์ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ เมื่อ v มี n มิติและเซตเชิงตั้งฉากปรกติทุกๆเซตเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน เซต $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ v

การสร้างมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติตามขั้นตอนต่างๆที่กล่าวมานี้เรียกว่า กระบวนการกราม-ชมิดต์

__ตัวอย่าง 2.2.2__ พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ในผลคูณภายในระบบยุคลิด จงใช้กระบวนการ กราม-ชมิดต์ แปลงมูลฐาน $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ และ $u_3 = (0,0,1)$ ไปเป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ

วิธีทำ

ขั้นที่1 $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

ขั้นที่2 $u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = (0,1,1) - 2/\sqrt{3}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

$= (-2/3, 1/3, 1/3)$

เพราะฉะนั้น

$$v_2 = 3/\sqrt{6}(-2/3, 1/3, 1/3) = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$$

ขั้นที่3 $u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2$

$= (0,0,1) - 1/\sqrt{3}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) - 1/\sqrt{6}(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$

$= (0, -1/2, 1/2)$

เพราะฉะนั้น

$$v_3 = \sqrt{2}(0, -1/2, 1/2) = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

ดังนั้น

$$v_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \text{ , } v_2 = (-2/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \text{ , } v_3 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

สร้างมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ #

ทฤษฎีบท ถ้า s เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ สำหรับปริภูมิผลคูณภายใน n มิติ และถ้า $(u)_s = (u_1, u_2, ..., u_n)$ และ $v(s) = (v_1, v_2, ..., v_n)$ แล้ว

(1) $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$

(2) $d(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + ... + (u_n - v_n)^2}$

(3) $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส A ที่มีคุณสมบัติ $A^{-1} = A^t$ เรียกเมทริกซ์ A นี้ว่า เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

ทฤษฎีบท ข้อความต่อไปนี้สมมูล :

(1) A เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

(2) เวกเตอร์แถวของ A สร้างเซตเชิงตั้งฉากปรกติใน R^n ในผลคูณภายในระบบยุคลิด

(3) เวกเตอร์สดมภ์ของ A สร้างเซตเชิงตั้งฉากใน R^n ในผลคูณภายในระบบยุคลิด

ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมทริกซ์ตั้งฉากแล้ว $|A| = \pm 1$

พิสูจน์

$$A^{-1}A = A^tA = \mathrm{I}$$

$$|A^{-1}A| = |A^tA| = |\mathrm{I}| = 1$$

$$|A^{-1}||A| = |A^t||A| = 1$$

แต่ $|A^t| = |A|$

$$\therefore \quad |A^t||A| = |A||A| = |A|^2 = 1$$

$$\therefore \quad |A| = \pm 1$$

__ตัวอย่าง 2.2.3__ พิจารณาเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์แถวของ A คือ

$$r_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\ ,\ r_2 = (0,0,1)\ ,\ r_3 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

จะได้

$$\|r_1\| = \|r_2\| = \|r_3\| = 1$$

และ $\quad r_1 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_3 = r_1 \cdot r_2 = 0$

ดังนั้นเวกเตอร์แถวของ A สร้างเซตเชิงตั้งฉากปรกติใน R^3 ฉะนั้น A เป็นเชิงตั้งฉากและ

$$A^t = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 การทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียง

นิยาม ถ้า $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มี $a_{ij} = 0$ สำหรับทุกๆ $i \neq j$ แล้วจะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็น เมทริกซ์เฉียง

หรืออาจจะกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า เมทริกซ์เฉียงคือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็นศูนย์ทั้งหมดยกเว้นสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

ถ้า A เป็นเมทริกซ์เฉียงแล้ว A จะเขียนอยู่ในรูป

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส A เรียกว่าทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงได้ ถ้ามีเมทริกซ์หาตัวผกผันได้ P ที่ทำให้ $P^{-1}AP$ เป็นเมทริกซ์เฉียง และเรียกเมทริกซ์ P ว่า ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียง

ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูล

(1) A ทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงได้

(2) A มีเวกเตอร์เจาะจง n เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

<u>ตัวอย่าง 2.3.1</u> จงหาเมทริกซ์ P ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงได้ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จากตัวอย่าง 2.1.4 ค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = 1$ และ $\lambda = 5$

และมีเวกเตอร์ $P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และมีเวกเตอร์ $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 1$

ทั้งนี้ $\{P_1, P_2, P_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ดังนั้น $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงได้

ตรวจสอบได้ดังนี้

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ถ้าเราเปลี่ยนอันดับสดมภ์ของ P แล้วอันดับของค่าเจาะจงในแนวทะแยงมุมของ $P^{-1}AP$ ก็จะเปลี่ยนตาม เช่น $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

แล้วจะได้ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ #

<u>ตัวอย่าง 2.3.2</u> สมการลักษณะเฉพาะของ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ คือ

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0$$

ดังนั้น $\lambda = -1$ เป็นค่าเจาะจงของ A

และเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = -1$ คือ $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ฉะนั้นปริภูมิเจาะจงประกอบด้วยเวกเตอร์ที่อยู่ในรูปแบบ $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นปริภูมิ 1 มิติ

A ไม่มีเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันและไม่ทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงได้ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท ถ้า $v_1, v_2, ..., v_k$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ A ที่สมนัยกับค่าเจาะจงค่าต่างๆกัน $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ แล้ว $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ เป็นเซตที่อิสระเชิงเส้นต่อกัน

ทฤษฎีบท ถ้าเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ มีค่าเจาะจงต่างๆ n ค่า แล้ว A ทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงได้

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 การทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก : เมทริกซ์สมมาตร

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉากได้ ถ้ามีเมทริกซ์ตั้งฉาก P ที่ทำให้ $P^{-1}AP$ (หรือ P^tAP) เป็นเมทริกซ์เฉียง เรียกเมทริกซ์ P ว่าเป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าสมมาตร ถ้า $A = A^t$

<u>ตัวอย่าง 2.4.1</u> ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

แล้ว $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} = A$

ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์สมมาตร #

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นเครื่องมือสำคัญในการตรวจสอบว่าเมทริกซ์ใด จะทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉากได้

ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูล

(1) A ทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉากได้

(2) A มีเซตเชิงตั้งฉากปรกติของเวกเตอร์เจาะจง n เวกเตอร์

(3) A เป็นสมมาตร

ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตรแล้ว เวกเตอร์เจาะจงจากปริภูมิเจาะจงที่ต่างกันเป็นเชิงตั้งฉาก

พิสูจน์ ให้ λ_1 และ λ_2 เป็นค่าเจาะจงที่ต่างกันของเมทริกซ์ A ที่เป็นเมทริกซ์สมมาตร และให้

$v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ และ $v_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ λ_1 และ λ_2 ตามลำดับ

เราต้องแสดงว่า $\langle v_1, v_2 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0$ เมื่อ $v_1^t v_2$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×1 ซึ่งมี $\langle v_1, v_2 \rangle$ เป็นสมาชิกเพียงตัวเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราสามารถทำให้การพิสูจน์สมบูรณ์ได้โดยแสดงว่า $v_1^t v_2 = 0$ เมื่อ v_1 และ v_2 เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ_1 และ λ_2

เราได้ $Av_1 = \lambda_1 v_1$ (1)

$Av_2 = \lambda_2 v_2$ (2)

จาก (1) $(Av_1)^t = (\lambda_1 v_1)^t$

หรือ $v_1^t A^t = \lambda_1 v_1^t$

หรือเมื่อ A เป็นสมมาตร $v_1^t A = \lambda_1 v_1^t$

คูณทางขวามือตลอดสมการด้วย v_2 จะได้

$v_1^t A v_2 = \lambda_1 v_1^t v_2$ (3)

คูณทางซ้ายมือตลอดสมการ (2) ด้วย v_1^t จะได้

$v_1^t A v_2 = \lambda_2 v_1^t v_2$ (4)

ดังนั้นจาก (3) และ (4)

$$\lambda_1 v_1^t v_2 = \lambda_2 v_1^t v_2$$

หรือ $(\lambda_1 - \lambda_2) v_1^t v_2 = 0$

แต่ $\lambda_1 = \lambda_2$ ดังนั้น $v_1^t v_2 = 0$

ผลสืบเนื่องของทฤษฎีบทนี้ทำให้เราได้วิธีการสำหรับทำให้เมทริกซ์สมมาตรเป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉากดังต่อไปนี้

ขั้นที่1 หามูลฐานสำหรับแต่ละปริภูมิเจาะจงของ A

ขั้นที่2 ใช้กระบวนการ กราม-ชมิดต์ กับแต่ละมูลฐานเพื่อสร้างมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับแต่ละปริภูมิเจาะจง

ขั้นที่3 สร้างเมทริกซ์ P ที่มีสดมภ์เป็นเวกเตอร์มูลฐานจากขั้นที่ 2 เมทริกซ์นี้จะทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉากได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่าง 2.4.2**</u> จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงได้

เมื่อ $$A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$$

วิธีทำ

สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-8)=0$$

ค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda=2$ และ $\lambda=8$

สำหรับ $\lambda=2$ ได้มูลฐานสำหรับปริภูมิเจาะจง คือ $\{u_1,u_2\}$ เมื่อ

$$u_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \text{ และ } u_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

ใช้กระบวนการ กราม-ชมิดต์ กับ $\{u_1,u_2\}$ ได้เวกเตอร์เจาะจงเชิงตั้งฉากปรกติ คือ

$$\{v_1,v_2\} \text{ เมื่อ } v_1=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix} \text{ และ } v_2=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

ปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda=8$ มี $\{u_3\}=\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\}$ เป็นมูลฐาน

ใช้กระบวนการ กราม – ชมิดต์กับ u_3 ได้ $v_3=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$

และตอนสุดท้ายใช้เวกเตอร์ v_1,v_2,v_3 เป็นเวกเตอร์สดมภ์ นั่นคือ

$$p=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉากได้ #

ทฤษฎีบท (1) สมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์สมมาตร A มีรากค่าจริงเท่านั้น

(2) ถ้าค่าเจาะจงของเมทริกซ์สมมาตร A เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะซ้ำๆ กัน k ครั้งแล้วปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับ λ มี k มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง 2.4.3</u> สมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์สมมาตร

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

คือ $(\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$

ดังนั้น ค่าเจาะจงคือ $\lambda = 4, \lambda = 1$ และ $\lambda = 2$

เมื่อ $\lambda = 4$ และ $\lambda = 1$ มีค่าซ้ำ 2 ครั้ง ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 4$ และ $\lambda = 1$ มี 2 มิติ และ $\lambda = 2$ มีค่าเดียว ฉะนั้นปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 2$ มี 1 มิติ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

2.5 การประยุกต์ในภาคตัดกรวย

จะกล่าวถึงการประยุกต์ผลของการแปลงพิกัดตั้งได้ฉากกับสมการกำลังสองและภาคตัดกรวย

สมการที่อยู่ในรูปแบบ $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (2.51)$$

เมื่อ $a,b,...,f$ เป็นจำนวนจริงและ a,b,c อย่างน้อย 1 ตัว ไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า สมการกำลังสองในตัวแปร x และ y ซึ่งแทนสมการของภาคตัดกรวย เส้นกราฟของภาคตัดกรวยที่สำคัญ ได้แก่ วงรี วงกลม พาราโบลาและ ไฮเปอร์โบลา

พิจารณาลักษณะของภาคตัดกรวยที่มีการหมุนแกนของรูปออกจากแกนมาตรฐานจาก สมการ (2.51) เราเขียนในระบบเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

หรือ $$X'AX + KX + f = 0$$

เมื่อ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$

เรียก เมทริกซ์สมมาตร A ว่าเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง $X'AX$

<u>**ตัวอย่าง 2.5.1**</u> เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง

$3x^2 + 5xy + 7y^2$ และ $8x^2 - 4y^2$ คือ

$\begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 7 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

36150

พิจารณาภาคตัดกรวย C ที่มีสมการ

$$X^t AX + KX + f = 0 \tag{2.52}$$

ในที่นี้จะแสดงให้เห็นว่ามีการหมุนแกนพิกัด xy ซึ่งทำให้สมการของภาคตัดกรวยอยู่ในระบบพิกัด $x'y'$

ขั้นที่ 1 หาเมทริกซ์ $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$

ซึ่งทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก

ขั้นที่ 2 สับเปลี่ยนสดมภ์ของ P (ถ้าจำเป็น) เพื่อทำให้ $\det(P) = 1$

การแปลงพิกัดเชิงตั้งฉาก $X = PX'$ กล่าวคือ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

เป็นการหมุนแกน เพราะว่าจากตัวอย่างการแปลงพิกัดเชิงตั้งฉาก ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ เป็นการหมุนแกน

เพราะว่า $\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1$

แกนทางบวก x' และ y' ไปตามเวกเตอร์สดมภ์

$$u_1' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ และ } u_2' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 เพื่อให้ได้สมการของ C ในระบบ $x'y'$ แทน (2.53) ลงใน (2.52) จะได้

$$(PX')^t A(PX') + K(PX') + f = 0$$

หรือ

$$X'^t (P^t AP)X' + (KP)X' + f = 0 \tag{2.54}$$

เมื่อ P ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก

$$P^t AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ λ_1 และ λ_2 เป็นค่าเจาะจงของ A ดังนั้น (2.54) อาจเขียนใหม่ได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

หรือ

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

(เมื่อ $d' = dp_{11} + ep_{21}$ และ $e' = dp_{12} + ep_{22}$)

ทฤษฎีบท ให้ $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ เป็นสมการของภาคตัดกรวย C และให้ $X'AX = ax^2 + 2bxy + cy^2$ แล้วแกนพิกัดจะหมุนซึ่งทำให้สมการสำหรับ C อยู่ในระบบพิกัดใหม่ $x'y'$ ที่มีรูปแบบเป็น $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0$ เมื่อ λ_1 และ λ_2 เป็นค่าเจาะจงของ A การหมุนแกนสามารถทำได้โดยการแทนค่า $X = PX'$ เมื่อ P ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก และ $\det(P) = 1$

<u>ตัวอย่าง 2.5.2</u> จงอธิบายรูปตัดกรวย C ซึ่งมีสมการ คือ $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

วิธีทำ

รูปแบบเมทริกซ์ของสมการนี้ คือ

$$X'AX - 36 = 0 \qquad (1)$$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

ดังนั้นค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = 4$ และ $\lambda = 9$

เวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 4$ หาได้จาก

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการนี้จะได้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นมูลฐานสำหรับปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 4$

สร้างมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติสำหรับปริภูมิเจาะจงนี้ จะได้

$v_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ และในทำนองเดียวกัน จะได้ $v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติสำหรับปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 9$ เพราะฉะนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P=\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก และ $|P|=1$ จึงทำให้การแปลงพิกัดตั้งฉาก $\quad X = PX' \quad$ (2)

เป็นการหมุนแกน แทน (2) ลงใน (1) จะได้

$$(PX')^t A(PX')-36=0$$

หรือ

$$(X')^t\left(P^t AP\right)X'-36=0$$

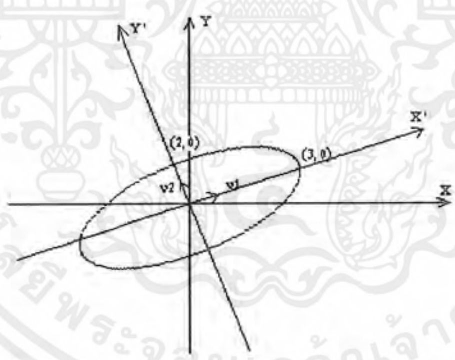
เมื่อ

$$P^t AP=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$$

เขียนสมการนี้ได้เป็น $\quad \begin{bmatrix}x' & y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}-36=0$

หรือ $\quad 4(x')^2+9(y')^2-36=0$

จัดเข้ารูปแบบ $\quad \dfrac{(x')^2}{9}+\dfrac{(y')^2}{4}=1 \quad$ ซึ่งเป็นสมการของวงรี ดังรูป



รูปที่ 2.1 กราฟของสมการตัวอย่าง 2.5.2 #

<u>**ตัวอย่าง 2.5.3**</u> จงอธิบายภาคตัดกรวย C ที่มีสมการ คือ

$$5x^2-4xy+8y^2+\left(20/\sqrt{5}\right)x-\left(80\sqrt{5}\right)y+4=0$$

วิธีทำ

รูปแบบเมทริกซ์ของสมการนี้ คือ

$$X^t AX+KX+4=0 \qquad (1)$$

เมื่อ $\quad A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix} \quad$ และ $\quad K=\begin{bmatrix}20/\sqrt{5} & -80/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังที่แสดงในตัวอย่าง 2.5.2

$$P=\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$ ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก

แทน $X = PX'$ ลงใน (1) จะได้

$$(PX')^t A(PX') + K(PX') + 4 = 0$$

หรือ $$(X')^t(P^tAP) + (KP)X' + 4 = 0 \qquad (2)$$

เมื่อ $$P^tAP=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$$

และ $$KP=\begin{bmatrix}20/\sqrt{5} & -80/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -36\end{bmatrix}$$

สมการ (2) เขียนใหม่ได้เป็น

$$4(x')^2 + 9(y')^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \qquad (3)$$

เพื่อจัดรูปภาคตัดกรวยเข้าสู่ตำแหน่งมาตรฐาน ต้องมีการย้ายแกน $x'y'$

จัดสมการ (3) ใหม่ จะได้

$$4\left((x')^2 - 2x'\right) + 9\left((y')^2 - 4y'\right) = -4$$

จัดกำลังสองสมบูรณ์

$$4\left((x')^2 - 2x' + 1\right) + 9\left((y')^2 - 4y' + 4\right) = -4 + 4 + 36$$

หรือ

$$4(x'-1)^2 + 9(y'-4)^2 = 36 \qquad (4)$$

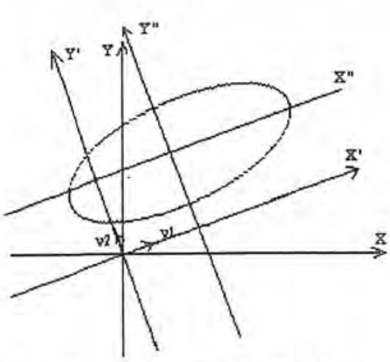
ถ้าเราย้ายแกนพิกัดเราจะได้สมการ

$$x'' = x' - 1 \qquad\qquad y'' = y' - 2$$

ซึ่งสมการ (4) จะเป็น $4(x'')^2 + 9(y'')^2 = 36$

หรือ $$\frac{(x'')^2}{9} + \frac{(y'')^2}{4} = 1$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรี ดังรูป



รูปที่ 2.2 กราฟของสมการตัวอย่าง 2.5.3 #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6 รูปแบบกำลังสอง : ประยุกต์ในทางพื้นผิวกำลังสอง

สมการที่อยู่ในรูปแบบ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exy + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \qquad (2.61)$$

เมื่อ $a, b, \ldots, f$ ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด เรียกว่า สมการกำลังสองในตัวแปร x, y และ z และเรียกนิพจน์ $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exy + 2fyz$ ว่าเป็น รูปแบบกำลังสองสมทบ

สมการ (2.61) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ คือ

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

หรือ

$$X^t AX + KX + j = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} h & g & i \end{bmatrix}$$

เรียกเมทริกซ์สมมาตร A ว่าเป็น เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง

$$X^t AX = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exy + 2fyz$$

<u>**ตัวอย่าง 2.6.1**</u> รูปแบบกำลังสองสมทบของสมการกำลังสอง

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz + 7x + 2y + 3z - 7 = 0$$

คือ

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz$$

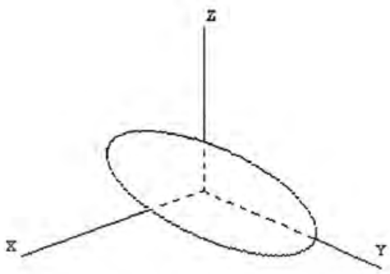
เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองนี้ คือ

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3/2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3/2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

#

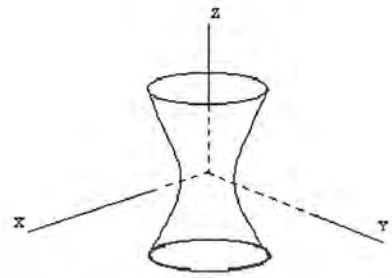
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟของสมการกำลังสองใน x,y และ z เรียกว่า พื้นผิวกำลังสองตัวอย่างพื้นผิวกำลังสองได้แก่



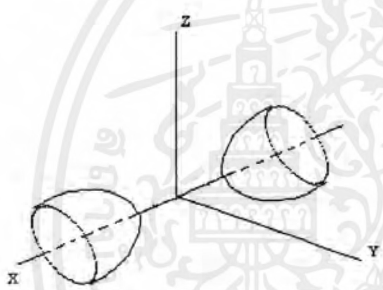
$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1$$

ทรงรี



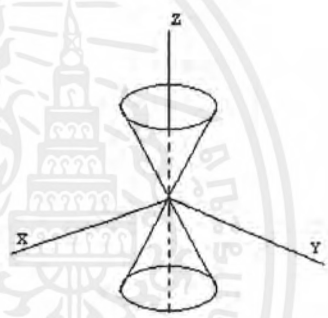
$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=1$$

ไฮเปอร์โบลอยด์เชื่อมโยงกัน



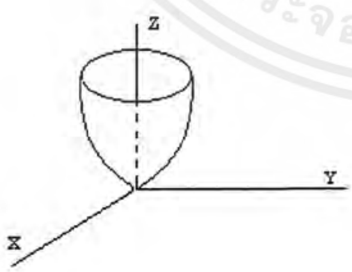
$$\frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=1$$

ไฮเปอร์โบลอยด์สองชิ้น



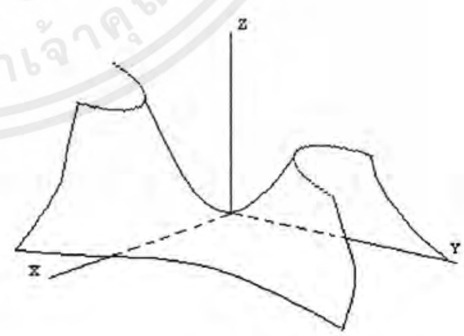
$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=0$$

กรวยเชิงวงรี



$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}-z=0$$

พาราโบลอยด์เชิงวงรี



$$\frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2}{m^2}+z=0$$

ไฮเปอร์โบลิคพาราโบลอยด์

รูปที่ 2.3 กราฟของสมการกำลังสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการของพื้นผิวตามรูป เป็นพื้นผิวที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน ซึ่งสัมพันธ์กับแกนพิกัด ถ้า สมการมีตัวแปรที่อยู่ในรูปผลคูณ xy, xz และ yz จะเป็นสมการที่แทนพื้นผิวกำลังสองที่หมุนออกจากตำแหน่งมาตรฐาน และถ้าสมการ มีตัวแปรทั้ง x^2 และ x, y^2 และ y หรือ z^2 และ z ซึ่งไม่มีเทอมผลคูณสมการเหล่านี้จะแทนพื้นผิวกำลังสองที่ย้ายแกนออกจากตำแหน่งมาตรฐาน

<u>ตัวอย่าง 2.6.2</u> จงอธิบายพื้นผิวกำลังสองที่มีสมการ คือ

$$4x^2+36y^2-9z^2-16x-216y+304=0$$

วิธีทำ

จัดสมการใหม่

$$4(x^2-4x)+36(y^2-6y)-9z^2=-304$$

นำกำลังสองสมบูรณ์

$$4(x^2-4x+4)+36(y^2-6y+9)-9z^2=-304+16+324$$

หรือ

$$4(x-2)^2+36(y-3)^2-9z^2=36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+(y-3)^2-\frac{z^2}{4}=1$$

ย้ายแกนใหม่ โดย $x'=x-2$, $y'=y-3$, $z'=z$

จะได้ $\dfrac{(x')^2}{9}+(y')^2-\dfrac{(z')^2}{4}=1$

ซึ่งเป็นสมการของไฮเปอร์โบลอยด์เชื่อมโยงกัน #

ทฤษฎีบท กำหนดให้

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0 \qquad (2.62)$$

เป็นสมการของพื้นผิวกำลังสอง Q และให้

$$X'AX=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$$

เป็นรูปแบบกำลังสองสมทบแล้วการหมุนแกนพิกัดที่ทำให้สมการของ Q อยู่ในระบบพิกัด $x'y'z'$ มีรูปแบบเป็น

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+g'x'+h'y'+i'z'+j'=0 \qquad (2.63)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ λ_1, λ_2 และ λ_3 เป็นค่าเจาะจงของ A

การหมุนแกนทำได้โดยการแทนค่า $X = PX'$

เมื่อ P ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉากและ $|P| = 1$

ทฤษฎีบทนี้ นำไปสู่กระบวนการกำจัดเทอมผลคูณจากสมการของพื้นผิวกำลังสองใน x, y และ z

ขั้นที่ 1 หาเมทริกซ์ P ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก

ขั้นที่ 2 สับเปลี่ยนสดมภ์ 2 สดมภ์ (ถ้าจำเป็น) เพื่อทำให้ $|P| = 1$ ซึ่งจะทำให้การเปลี่ยนแปลงพิกัดเชิงตั้งฉาก

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

เป็นการหมุนแกน

ขั้นที่ 3 แทน (2.64) ลงใน (2.63)

<u>**ตัวอย่าง 2.6.3**</u> จงอธิบายพื้นผิวกำลังสองที่มีสมการ คือ

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

วิธีทำ

รูปแบบเมทริกซ์ของสมการนี้ คือ

$$X'AX - 3 = 0 \tag{1}$$

เมื่อ
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A มีค่าเจาะจง คือ $\lambda = 2$ และ $\lambda = 8$

และ A ถูกทำให้เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก โดย P เมื่อ

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

เมื่อเวกเตอร์ใน 2 สดมภ์แรกของ P เป็นเวกเตอร์เจาะจง ที่สมนัยกับ $\lambda = 2$ และ เวกเตอร์ในสดมภ์ที่ 3 เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 8$ เมื่อ $|P| = 1$ การแปลงพิกัดเชิงตั้งฉาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$X = PX'$ กล่าวคือ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ (2)

เป็นการหมุนแกน

แทน (2) ลงใน (1) จะได้

$$(PX')^t A(PX') - 3 = 0$$

หรือ $(X')^t (P^t AP) X' - 3 = 0$ (3)

เมื่อ $P^t AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

แทนค่าใน (3) ได้

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

หรือ $2(x')^2 + 2(y')^2 + 8(z')^2 = 3$

เขียนใหม่ได้เป็น $\frac{(x')^2}{3/2} + \frac{(y')^2}{3/2} + \frac{(z')^2}{3/8} = 1$

ซึ่งเป็นสมการของทรงรี #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

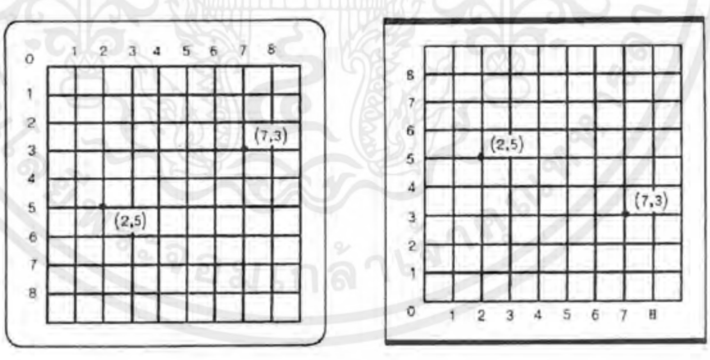
2.7 การสร้างภาพกราฟิกเบื้องต้น

ภาพกราฟิกที่คอมพิวเตอร์สร้างขึ้นนั้นจะสร้างขึ้นได้โดยใช้ภาพกราฟิกเบื้องต้นต่างๆซึ่งได้แก่ จุด(points), เส้นตรง(straight lines), เส้นโค้ง(curves),และภาพรูปทรงเรขาคณิตต่างๆ (geometric figures) เช่น วงกลม,วงรี หรือรูปเหลี่ยม เป็นต้น นอกจากนี้ยังต้องประกอบด้วยคำสั่งที่เกี่ยวกับการจัดการหน้าจอเช่น การลบหน้าจอ,การวางภาพที่กำหนดไว้ในตำแหน่งที่ต้องการบนจอภาพ เป็นต้น

ในช่วงก่อนปี ค.ศ. 1980 ฮาร์ดแวร์(hardware) และซอฟต์แวร์(software) ของคอมพิวเตอร์สามารถช่วยนักเขียนโปรแกรมประยุกต์พัฒนาโปรแกรมสำเร็จรูปทางกราฟิกได้โดยใช้วิธีทำโปรแกรมย่อยรวบรวมไว้ให้เลือกใช้ตามที่ต้องการ

2.7.1 การสร้างจุด

ภาพบนจอภาพแบบแรสเตอร์สแกนเกิดจากจุดสว่างหลายๆจุดซึ่งจะกำหนดตำแหน่งได้โดยกำหนดจุดในเฟรมบัฟเฟอร์ที่สอดคล้องกับจุดจริงบนจอภาพ ทั้งจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์จะใช้ระบบจุดพิกัด 2 มิติ ในการอ้างถึงจุดต่างๆโดยมีจุดกำเนิดหรือจุด (0,0) อยู่ที่มุมบนซ้ายของจอภาพ(รูปที่2.4 (ก))ซึ่งต่างจากระบบพิกัดที่เรามักใช้ในการเขียนกราฟ กล่าวคือ จุดกำเนิดอยู่ที่มุมล่างซ้าย(รูปที่2.4(ข)) การอ้างถึงพิกเซลใดพิกเซลหนึ่งจะใช้คู่ลำดับ(x , y) โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.4



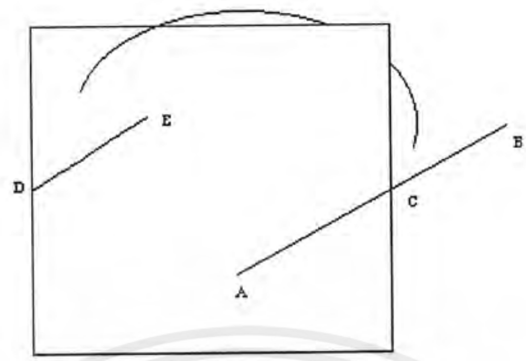
(ก) (ข)

รูปที่ 2.4 ระบบพิกัดของจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์เทียบกับระบบพิกัดที่เราใช้กัน

ค่าของจุดพิกัด x และ y จะต้องมีค่าไม่เกินค่าขอบเขตของจอภาพที่ใช้ ถ้ามีการกำหนดค่าเกินขอบเขตจะต้องมีการจัดการอย่างใดอย่างหนึ่งเพื่อกันเหตุการณ์เช่นนี้ ตัวอย่างเช่น ให้จุดที่มีค่าอยู่เกินขอบเขตไม่ว่าจะเป็นขอบเขตบน ล่าง ซ้าย หรือขวา ถูกเปลี่ยนค่าให้เป็นค่าที่ขอบเขต นั่นคือภาพที่มีพิกัดเกินขอบเขตจะถูกตัดออกไปเลย (clipping) อีกวิธีเป็นการให้ค่าที่เกินขอบเขตไปเริ่มจากจุดเริ่มต้นอีกที(ดูรูปที่2.5) ดังนั้นจุดต่างๆของภาพส่วนที่เกินขอบเขตทางขวาไปจะมาปรากฏ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

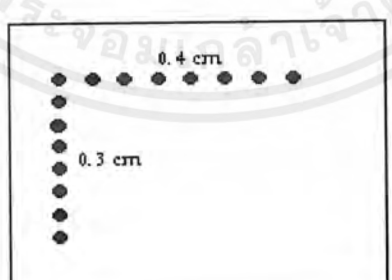
ทางด้านซ้ายของจอภาพแทน ซึ่งเรียกว่า ผลวนรอบ (wrap around effect) สำหรับการอธิบายในตอนนี้จะถือว่าภาพอยู่ในขอบเขตของจอภาพทั้งหมด



รูปที่ 2.5 ปรากฏการณ์วนรอบ

2.7.2 อัตราส่วนแอสเป็กต์

ถ้าเราใช้คำสั่งสร้างพิกเซลขึ้นมา 8 พิกเซลบนจอภาพทั้งในแนวดิ่งและแนวนอน แสดงดังรูปที่ 2.6 แล้วลองวัดความยาวของพิกเซลที่ต่อติดกันทั้ง 8 พิกเซลจะพบว่าความยาวในแนวนอนและในแนวดิ่งมีค่าต่างกันแม้ว่าจะมีจำนวนพิกเซลเท่ากัน จากรูปที่ 2.6 เราได้ว่าพิกเซลในแนวนอนมีความยาว 0.4 เซนติเมตร ส่วนในแนวดิ่งยาว 0.3 เซนติเมตร อัตราว่านระหว่างความยาวในแนวนอนกับความยาวในแนวดิ่ง = 0.4/0.3 หรือประมาณ 1.33 นี่เรียกว่า *อัตราส่วนแอสเป็กต์(aspect Ratio)* ค่านี้เกิดจากการที่ระยะห่างระหว่างพิกเซลในแนวนอนของจอภาพมีค่าไม่เท่ากับระยะห่างระหว่างพิกเซลในแนวดิ่งของจอภาพนั่นเอง ซึ่งต่อมาในปัจจุบันมีการปรับปรุงให้ระยะห่างระหว่างพิกเซลนี้มีขนาดเท่ากันทั้งในแนวนอนและในแนวดิ่งจึงทำให้อัตราส่วนแอสเป็กต์มีค่าเป็น 1



รูปที่ 2.6 อัตราส่วนแอสเป็กต์ซึ่งมีค่าเป็น 1.33

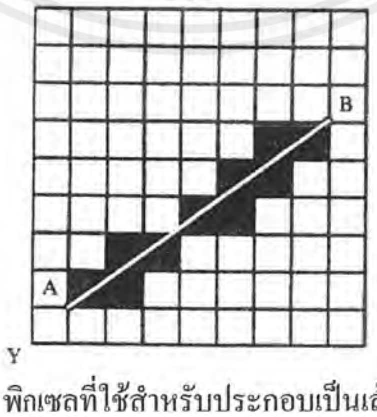
อัตราส่วนนี้มีผลต่อความถูกต้องของภาพที่วาดบนจอภาพ ตัวอย่างเช่น เราต้องการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีความกว้างเท่ากับ 80 พิกเซล สำหรับจอภาพซึ่งมีอัตราส่วนแอสเป็กต์เป็น4/3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความยาวจริงในแนวนอนบนจอภาพจะเท่ากับ 0.4 × 10 = 4 เซนติเมตร(8 พิกเซล =0.4 เซนติเมตร) และถ้าเราลากเส้นในแนวดิ่งโดยใช้จำนวนพิกเซลเท่าเดิมคือ 80 พิกเซล ความยาวจริงของเส้นบนจอภาพจะสั้นกว่าเส้นที่อยู่ในแนวนอน นั่นคือจะยาวเพียง 0.3×10 =3 เซนติเมตร ทำให้ภาพที่ได้ไม่ใช่สี่เหลี่ยมจัตุรัสตามที่ต้องการ การแก้ไขทำได้โดยใช้จำนวนพิกเซลมากกว่า 80 พิกเซลซึ่งจะทำให้ความยาวจริงของเส้นในแนวดิ่งบนจอภาพเท่ากับ 4 เซนติเมตรด้วย จำนวนพิกเซลที่ต้องการหาได้ 80 × 4/3 ซึ่งมีค่าประมาณ 107 พิกเซล หมายความว่าในการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนจองภาพที่มีอัตราส่วนแอสเป็กต์เป็น 4/3 เราต้องใช้พิกเซล 80 พิกเซล สำหรับการวาดเส้นในแนวนอนและใช้พิกเซล 107 พิกเซล สำหรับการวาดในแนวดิ่ง เราจึงจะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามต้องการการวาดรูปวงกลมก็มีปัญหาเช่นเดียวกันกับการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส กล่าวคือ ถ้าไม่ได้คำนึงถึงอัตราส่วนแอสเป็กต์ ภาพวงกลมที่ปรากฏบนจอภาพก็จะเป็นรูปวงรี การแก้ไขก็ทำได้เช่นเดียวกับการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นั่นคือ ความยาวในแนวดิ่งจะต้องคูณด้วยค่าอัตรส่วนแอสเป็กต์ก่อนแล้วจึงนำไปวาดลงบนจอภาพ สำหรับการพิมพ์ภาพลงบนกระดาษก็ต้องคำนึงถึงอัตราส่วนแอสเป็กต์ของเครื่องพิมพ์ด้วย ภาพที่ได้จึงมีอัตราส่วนที่ถูกต้อง

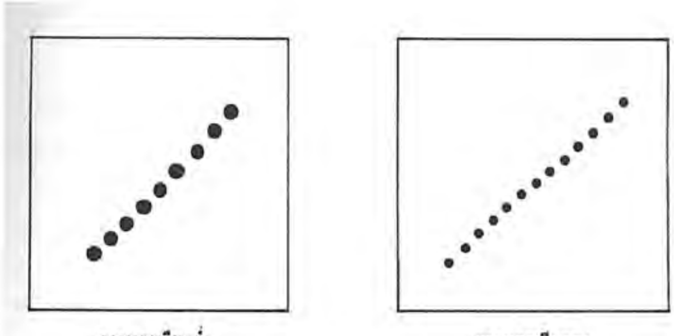
2.7.3 การวาดเส้นตรง

เส้นตรงก็คือพิกเซลที่จัดเรียงเป็นลำดับติดๆกันในแนวตรง สำหรับจอภาพแบบแรสเตอร์สแกน การลากเส้นตรงในแนวเฉียง เราจำเป็นต้องเลือกพิกเซลที่ใกล้กับแนวเส้นที่สุดเพื่อให้ได้เส้นตรงที่ดีที่สุด รูปที่ 2.7 แสดงเส้นที่ลากบนจอภาพแบบแรสเตอร์สแกน ความถูกต้องและคุณภาพของเส้นที่แสดงบนจอภาพจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของจอภาพ ถ้าเป็นจอภาพที่มีความละเอียดสูง เช่น 1024×1024 จุด จะสามารถวาดเส้นได้ตรงและต่อเนื่องมากกว่าจอภาพที่มีความละเอียดต่ำ เส้นที่ปรากฏบนจอภาพที่มีความละเอียดต่างกัน



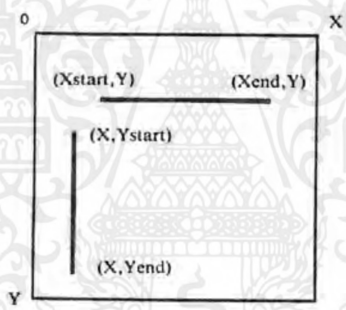
รูปที่ 2.7 พิกเซลที่ใช้สำหรับประกอบเป็นเส้นตรง AB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.8 เปรียบเทียบภาพเส้นตรงที่ได้จากจอภาพที่มีความละเอียดต่างกัน

ในระบบกราฟิกที่มีความสามารถสูง การวาดเส้นตรงจะทำโดยทางฮาร์ดแวร์ซึ่งจะทำให้สามารถวาดเส้นได้อย่างรวดเร็วมาก ส่วนระบบกราฟิกที่มีความสามารถต่ำ ก็จะวาดเส้นโดยใช้ซอฟต์แวร์ซึ่งวาดได้ช้ากว่ามาก ในการวาดเส้นเรามักจะต้องเป็นคนกำหนดจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเอง แล้วระบบกราฟิกจะวาดเส้นเชื่อมจุดที่เรากำหนดไว้



รูปที่ 2.9 เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่ง

2.7.3.1 เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่ง

เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่งเป็นเส้นที่วาดได้ง่ายที่สุด ถ้าค่าของ x ที่จุดเริ่มต้นน้อยกว่าค่าของ x ที่จุดสิ้นสุด การวาดเส้นแนวนอนทำได้โดยให้ค่าทางแกน y คงที่ แล้วเพิ่มค่าทางแกน x ขึ้นทีละ1พิกเซล ดังแสดงในรูปที่ 2.9 เป็นภาพเส้นแนวนอนซึ่งลากจากจุด(Xstart,Y)ไปยัง (Xend,Y) และ Xstart<= Xend แต่ถ้าXstart> Xend เราก็จะทำกลับกัน กล่าวคือ ให้ค่า y คงที่ แล้วลดค่าทางแกน x ลงทีละ 1 พิกเซล

ส่วนเส้นแนวดิ่งก็สามารถวาดได้โดยให้ค่าทางแกน x คงที่ แล้วเพิ่มค่าทางแกน y ขึ้นทีละ 1 พิกเซล ถ้าลากเส้นจากจุด y ซึ่งมีค่าน้อยไปยัง y ที่มีค่ามากกว่า แต่ถ้าต้องการลากเส้นจากจุด y ที่มีค่ามากไปยัง y ที่มีค่าน้อย ก็จะต้องลดค่าทางแกน y ลงทีละ 1 พิกเซลในขณะที่ค่าทางแกน x คงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7.3.2 เส้นทแยงมุม

การวาดเส้นทแยงมุมซึ่งมีความลาดชันเป็น+1 เราสามารถทำได้โดยการเพิ่มค่าทางแกน x และ y ขึ้นทีละ 1 พิกเซลจากจุดเริ่มต้นซึ่งมีพิกัดน้อยกว่าพิกัดของจุดสิ้นสุด หรือการลดค่าทางแกน x และ y ลงทีละ 1 พิกเซลในกรณีกลับกัน สำหรับเส้นทแยงมุมที่มีความลาดชันเป็น –1 สามารถทำได้โดยการเพิ่มค่าทางแกน x และลดค่าทางแกน y ลงทีละ 1 พิกเซลพร้อมๆกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8 Mathematica

คำสั่งของแมททิเมติกาที่ใช้ในโปรแกรม

MLInitialize() เป็นการเริ่มต้นการใช้ฟังก์ชัน Library ใน MathLink

MLOpenArgv() เป็นการทำการติดต่อกับ MathLink โดยผ่านทางตัวแปร argv

MLOpenString() เป็นการทำการติดต่อกับ MathLink โดยผ่านทางตัวแปรที่ประกาศเป็น character

MLClose() เป็นการทำการยกเลิกการติดต่อกับ MathLink

MLEndPacket() เป็นการแสดง packet สุดท้ายในการเชื่อมต่อกับ MLink

MLNextPacket() เป็นการหาจุดเริ่มต้นของ packet ต่อไปในการเชื่อมต่อกับ MLink

MLNewPacket() เป็นการข้ามไปที่จุดสุดท้ายของ packet ปัจจุบันในการเชื่อมต่อกับ MLink

MLReady() เป็นการทดลองการรออ่านของข้อมูลในการเชื่อมต่อกับ MLink

MLPlush() เป็นการช่วยในการบรรจุข้อมูลนองที่อยู่นอก Buffers เพื่อรอที่จะส่งบนข้อมูลในการเชื่อมต่อกับ MLink

ImplicitPlot[equ,{x,xmin,xmax},PlotRange->{ymin,ymax}]

เป็นการเขียนกราฟ 2 มิติของสมการ โดยมีขอบเขตของ x อยู่ระหว่าง (xmin,xmax) และขอบเขตของ y อยู่ระหว่าง (ymin,ymax)

ContourPlot3D[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},{z,zmin,zmax}]

เป็นการเขียนกราฟ 3 มิติ ของฟังก์ชัน โดยมีขอบเขตของ x อยู่ระหว่าง (xmin,xmax) ขอบเขตของ y อยู่ระหว่าง (ymin,ymax) และขอบเขตของ z อยู่ระหว่าง (zmin,zmax)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 ระบบงาน

3.1.1 ส่วนนำข้อมูลเข้า

เป็นระบบที่นำข้อมูลเข้าอย่างง่าย ข้อมูลที่นำเข้าคือ สมการของภาคตัดกรวย หรือสมการของพื้นผิวกำลังสอง

3.1.2 ส่วนวิเคราะห์และประมวลผล

จากส่วนนำข้อมูลเข้า นำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์และนำไปคำนวณหาเมทริกซ์ P ซึ่งทำให้เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก และหาผลเฉลยของสมการเพื่อใช้ในการเขียนกราฟ

3.1.3 ส่วนแสดงผล

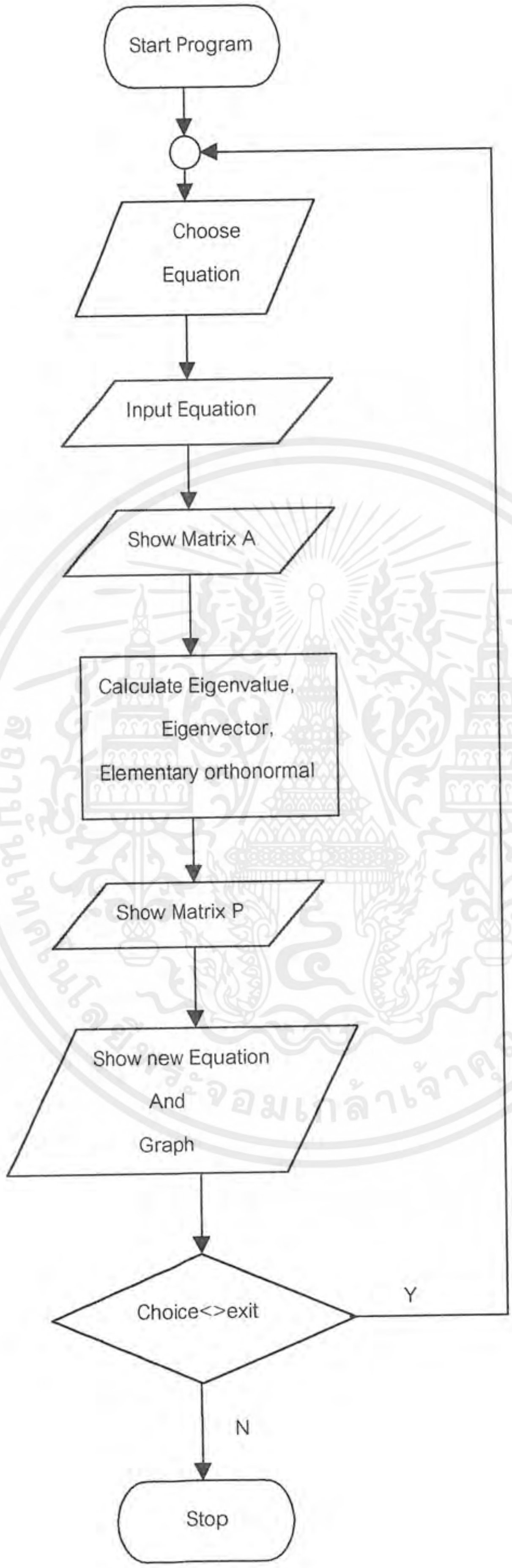
นำส่วนที่ได้จากส่วนที่ 2 มาแสดงผลทางจอภาพ ซึ่งจะมีเมทริกซ์ P สมการใหม่หลังจากหมุนแกน และกราฟ 2 มิติของภาคตัดกรวย หรือกราฟ 3 มิติของพื้นผิวกำลังสอง

3.2 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. นำข้อมูลเข้า โดยข้อมูลที่นำเข้าจะเป็นสมการของภาคตัดกรวย หรือจะเป็นสมการของพื้นผิวกำลังสอง และขอบเขตของตัวแปร x , y ,z
2. จากสมการที่นำเข้านี้ มาแปลงให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ A
3. ทำการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง
4. สร้างมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติสำหรับปริภูมิเจาะจงที่ได้จากข้อ 3
5. จะได้เมทริกซ์ P ซึ่งทำให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก และ $|P| = 1$
6. นำเมทริกซ์ P ที่ได้มาเขียนสมการใหม่หลังจากหมุนแกนแล้ว
7. วาดกราฟจากสมการที่ได้
8. จบการทำงาน

แสดงด้วย System Flow Diagram ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



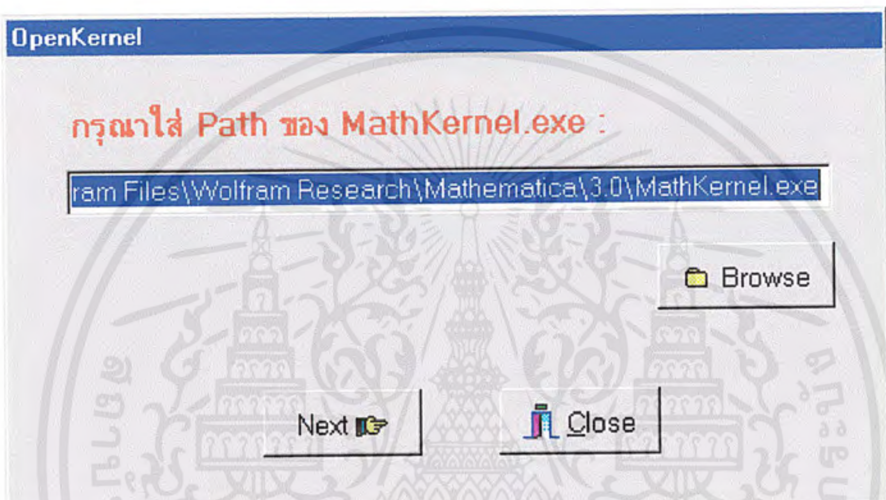
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการทดลอง

4.1 ขั้นตอนต่างๆในการทำงานของโปรแกรม

4.1.1 เมื่อทำการรันโปรแกรม จะปรากฏฟอร์มดังรูป

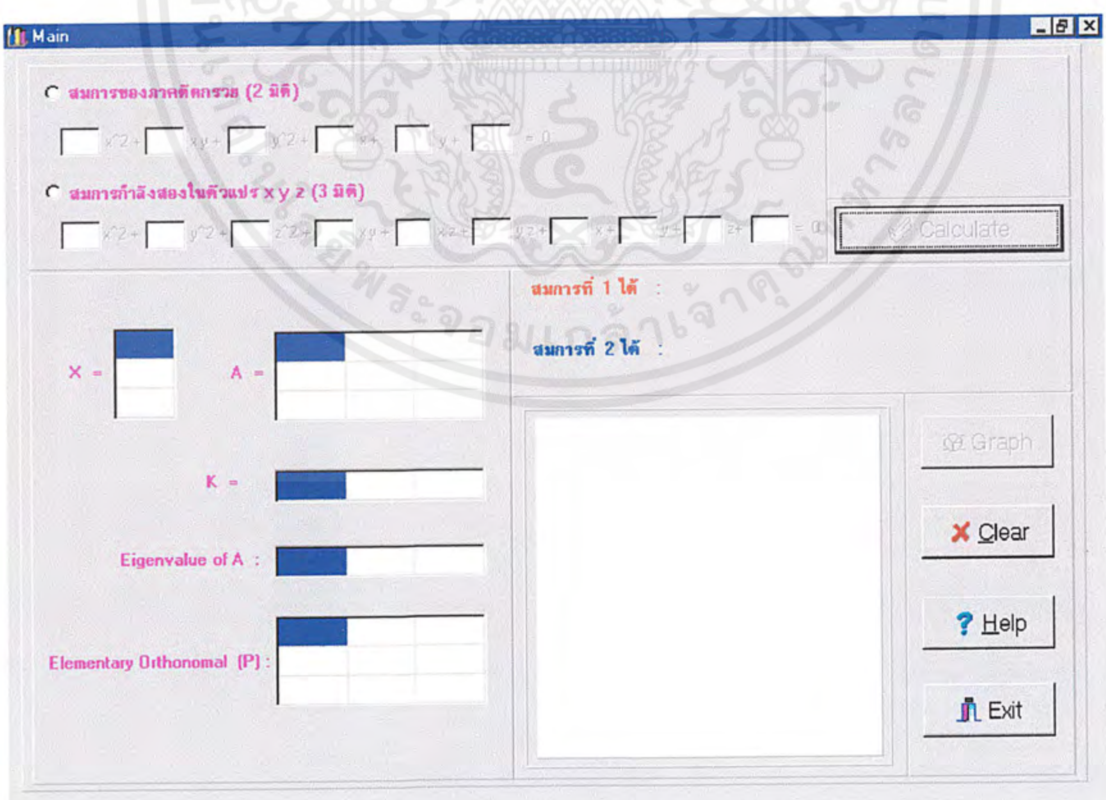


รูปที่ 4.1 แสดงการใส่พาท MathKernel.exe

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.2 หาพาท MathKernel.exe ในแมททิเมติกา โดยการใช้ปุ่ม Browse เมื่อหาได้แล้วให้คลิกที่ปุ่ม Next จะปรากฏฟอร์มดังรูป

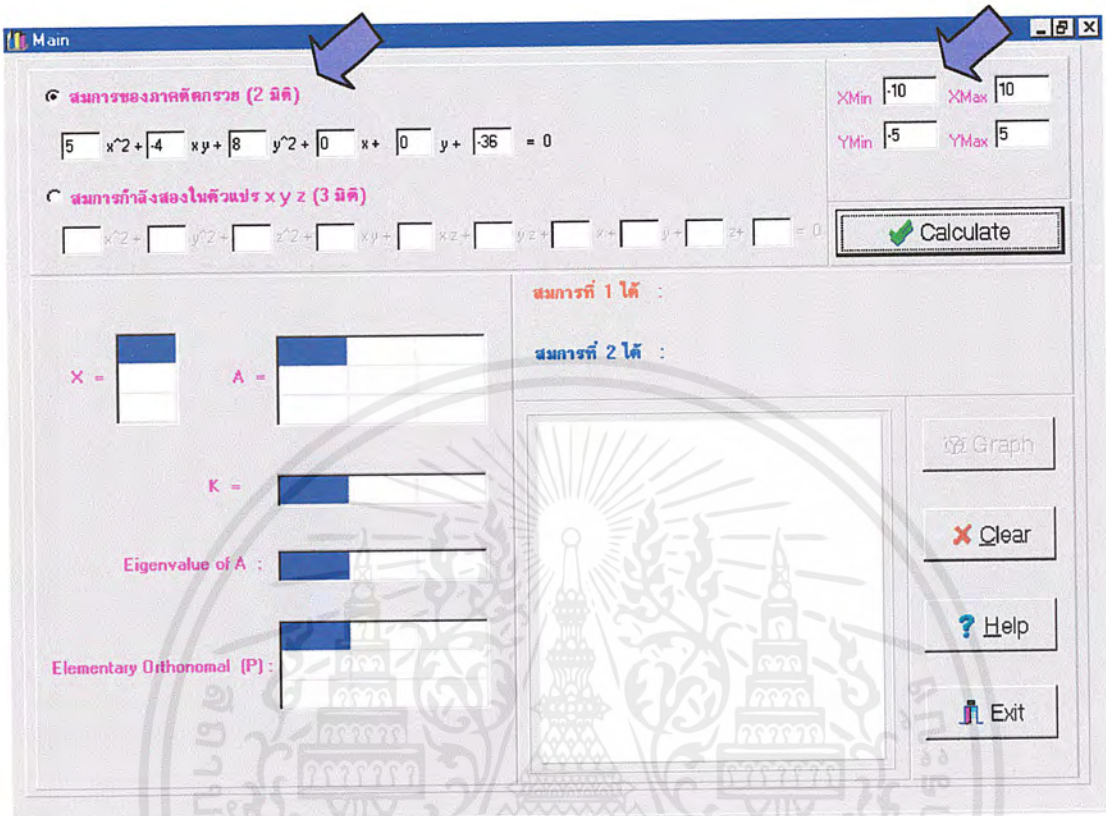
รูปที่ 4.2 แสดงชื่อโปรแกรม



รูปที่ 4.3 แสดงหน้าจอหลักของโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.3 เลือกรูปแบบของสมการที่ต้องการ ถ้าผู้ใช้เลือกสมการของภาคตัดกรวย จะปรากฏฟอร์มดังรูป

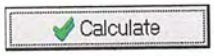


รูปที่ 4.4 แสดงการป้อนอินพุตต่างๆ

ในฟอร์มนี้ผู้ใช้ต้องทำการป้อนค่าต่างๆดังนี้

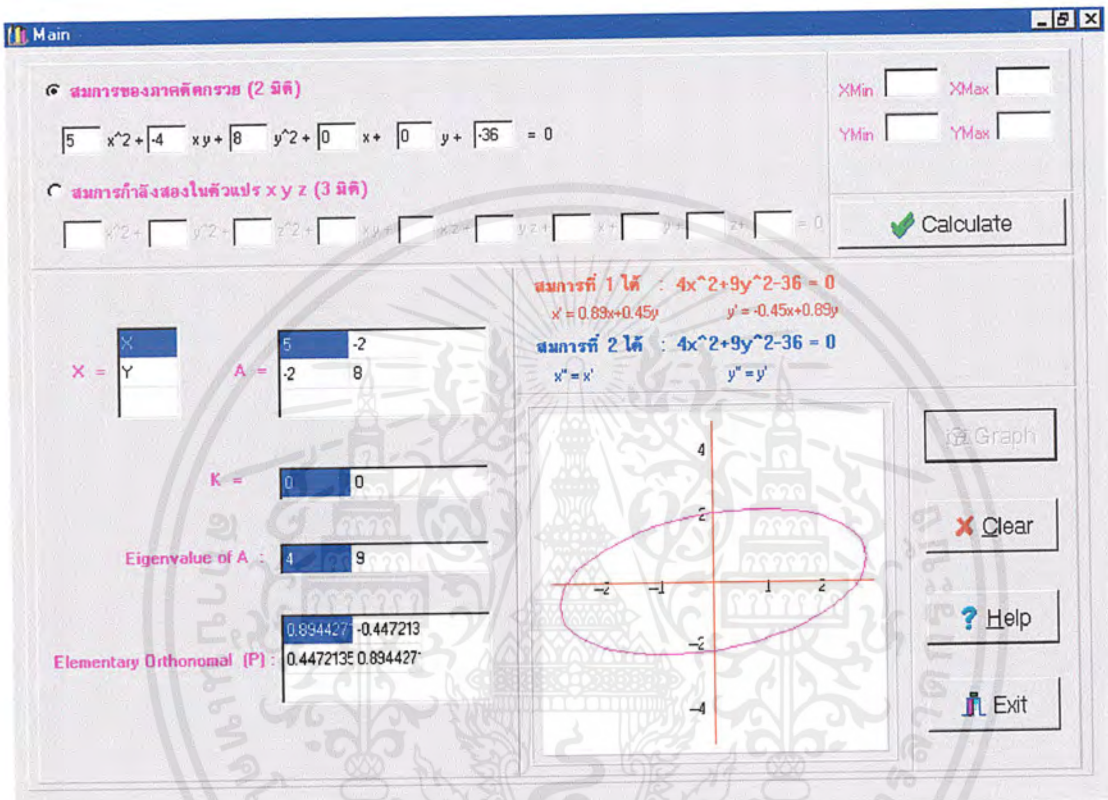
1. สัมประสิทธิ์ของสมการ
2. ขอบเขตของค่า x และ y

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

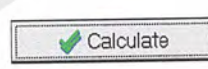
หลังจากนั้นคลิกปุ่ม 

จะแสดงเมทริกซ์ X เมทริกซ์ A เมทริกซ์ K ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ P ซึ่งทำให้เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก และคลิกปุ่ม 

จะแสดงรูปกราฟ 2 มิติ ดังรูป



รูปที่ 4.5 แสดงผลลัพธ์ของสมการภาคตัดกรวย

ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนขอบเขตของ x และ y ใหม่ได้ หลังจากนั้นคลิกปุ่ม 

อีกครั้ง และ คลิกที่ปุ่ม 

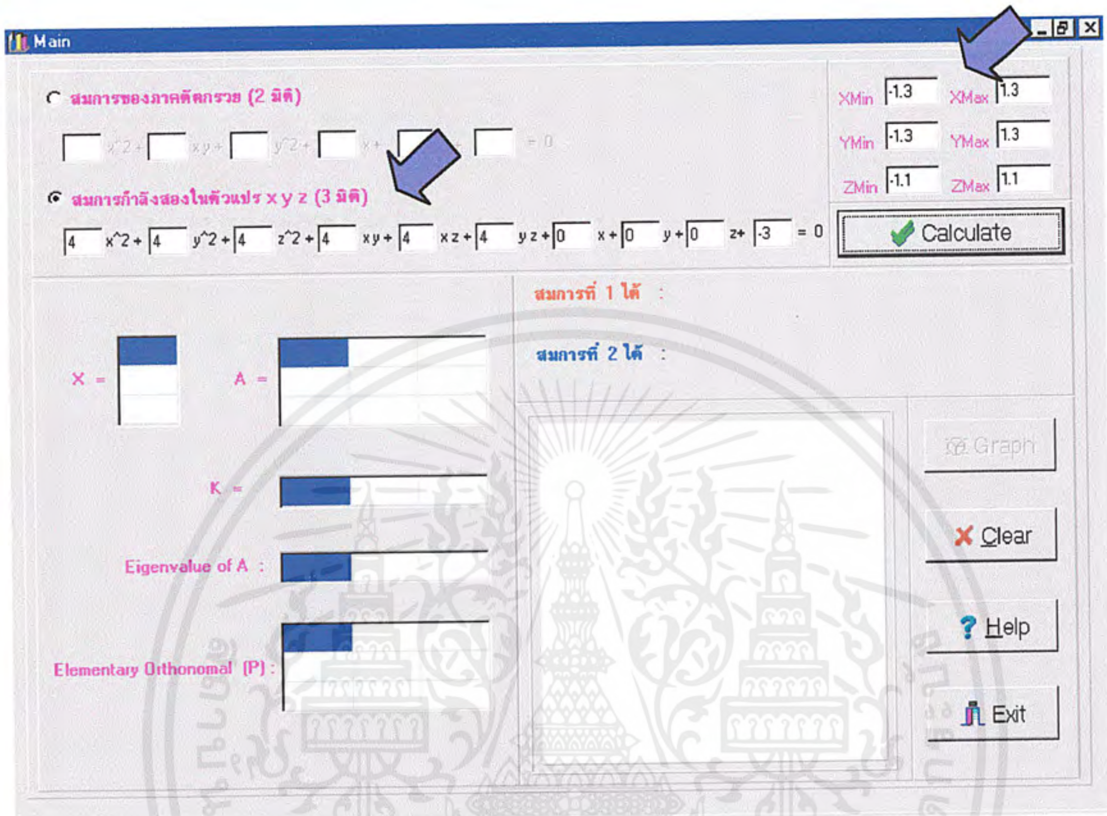
เพื่อให้ได้รูปกราฟที่เหมาะสมขึ้น

จากรูปที่ 4.5 สมการที่ 1 คือสมการที่ได้หลังจากการหมุนแกน

สมการที่ 2 คือสมการที่ได้หลังจากการย้ายแกนเมื่อเทียบกับสมการที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.4 ถ้าผู้ใช้เลือกสมการกำลังสองในตัวแปร x , y , z จะปรากฏฟอร์มดังนี้



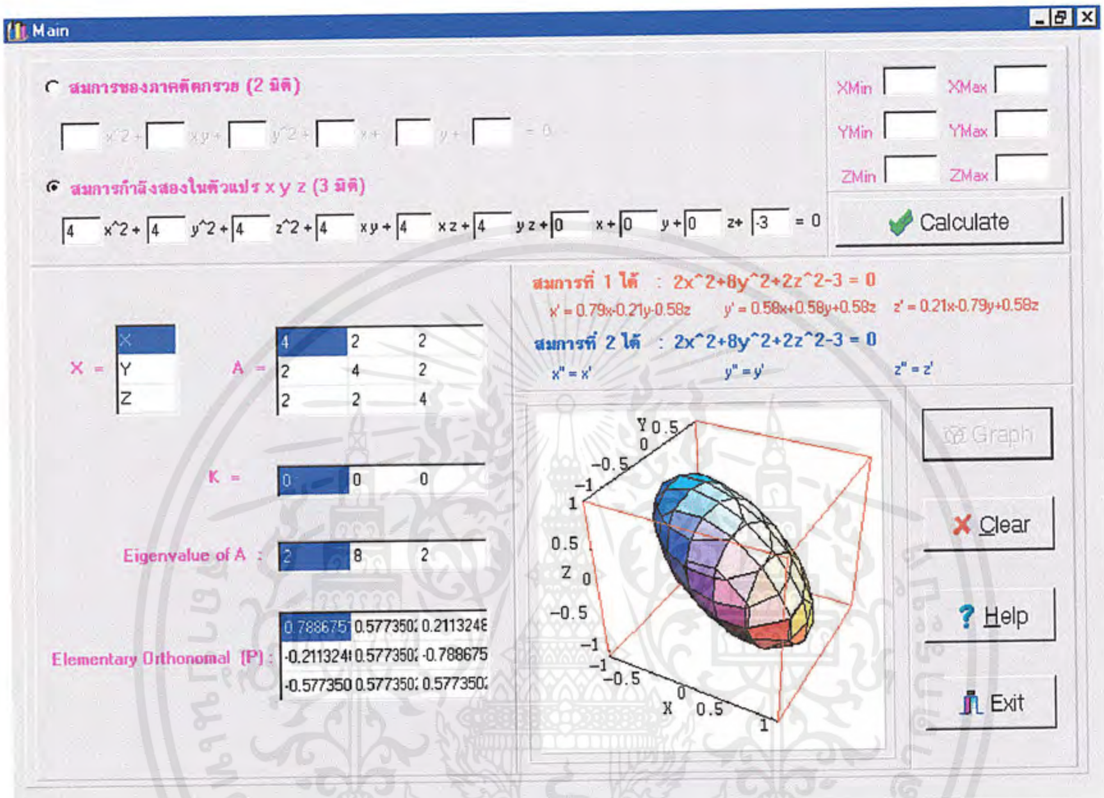
รูปที่ 4.6 แสดงการป้อนค่าอินพุตต่างๆ

ในฟอร์มนี้ผู้ใช้ต้องทำการป้อนค่าต่างๆดังนี้

1. สัมประสิทธิ์ของสมการ
2. ขอบเขตของค่า x , y , z

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หลังจากนั้นคลิกปุ่ม Calculate จะแสดงเมทริกซ์ X เมทริกซ์ A เมทริกซ์ K ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ P ซึ่งทำให้เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก และคลิกปุ่ม Graph จะแสดงรูปกราฟ 3 มิติ ดังรูป



รูปที่ 4.7 แสดงผลลัพธ์สมการกำลังสอง

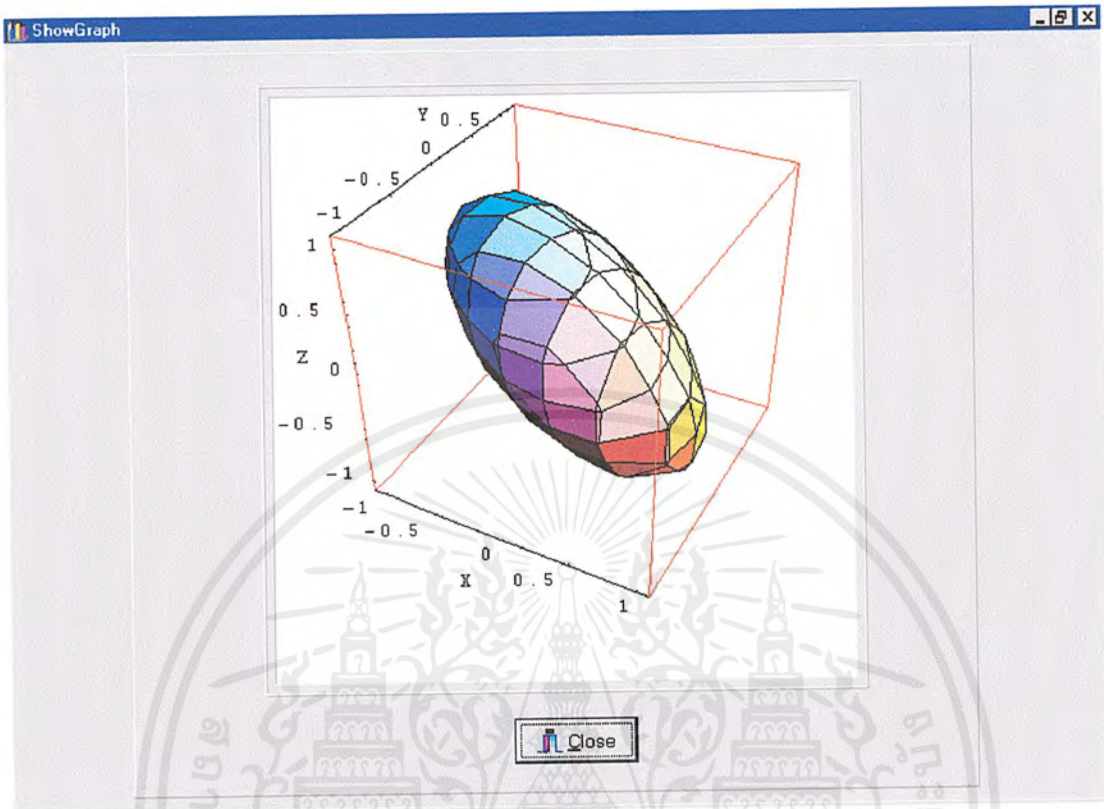
ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนขอบเขตของ x y และ z ใหม่ได้ หลังจากนั้นคลิกปุ่ม Calculate อีกครั้ง และ คลิกที่ปุ่ม Graph เพื่อให้ได้รูปกราฟที่เหมาะสมขึ้น

จากรูปที่ 4.7 สมการที่ 1 คือสมการที่ได้หลังจากการหมุนแกน

สมการที่ 2 คือสมการที่ได้หลังจากการย้ายแกนเมื่อเทียบกับสมการที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

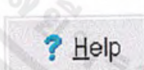
4.1.5 คลิกหนึ่งครั้งที่รูปกราฟเพื่อแสดงกราฟออกมา ดังรูป



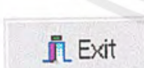
รูปที่ 4.8 แสดงรูปกราฟ

4.1.6 คลิกที่ปุ่ม 

เพื่อทำการรีเซ็ทค่าใหม่

4.1.7 คลิกที่ปุ่ม 

จะแสดงเกี่ยวกับบทเรียนและผู้จัดทำ

4.1.8 คลิกที่ปุ่ม 

เพื่อออกจากโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
การอภิปรายผล

ผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาและพัฒนาโปรแกรมสำเร็จรูปแสดงความสัมพันธ์ของผลเฉลยในรูปของกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ โดยวิธีการประยุกต์เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก สามารถประเมินผลในแต่ละด้านได้ดังนี้

5.1 ส่งเสริมให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจในเรื่องการประยุกต์เมทริกซ์เชิงตั้งฉากในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสอง

การเรียนการสอนในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเรื่องเมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสองนั้น นักศึกษาจะต้องทำความเข้าใจในเรื่องการหาค่าเจาะจง เวกเตอร์เจาะจง เมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉากก่อน จึงนำมาประยุกต์ใช้ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสองเพื่อแก้สมการให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถบ่งบอกได้ว่าเป็นกราฟในรูปแบบใด ซึ่งลักษณะของภาคตัดกรวยนั้นจะมีการหมุนแกนของรูปออกจากแกนมาตรฐาน เนื่องจากนักศึกษาต้องทำความเข้าใจในหลายเรื่องและการคำนวณค่อนข้างจะยาก ด้วยสาเหตุนี้จึงได้นำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอนทางพีชคณิตเชิงเส้นในเรื่องเมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสอง ทำให้นักศึกษาสามารถศึกษาและสามารถเห็นภาพกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ ทำให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น

5.2 ใช้งานง่ายและมีความเข้าใจง่าย

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นเป็นโปรแกรมที่ใช้งานบนระบบปฏิบัติการวินโดว์ ซึ่งแสดงส่วนการติดต่อกับผู้ใช้แบบกราฟฟิก จึงทำให้การใช้งานง่าย ผู้ใช้สามารถเลือกคำสั่งการทำงานต่างๆ ได้โดยใช้เมาส์และเป็นโปรแกรมที่ง่ายต่อการเข้าใจอีกด้วย

5.3 ข้อเสนอแนะที่ควรแก้ไข

1. สามารถที่จะพิมพ์เอาท์พุตออกทางเครื่องพิมพ์ได้
2. ไม่จำเป็นจะต้องมีซอฟต์แวร์แมททิเมติกาในเครื่องคอมพิวเตอร์
3. สามารถรับค่าสัมประสิทธิ์ของสมการที่เป็นจำนวนอตรรกยะและเศษส่วนได้
4. สามารถที่จะคัดลอกรูปภาพไปใช้ในงานอื่นได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษที่จัดทำขึ้นนี้ได้จัดทำโปรแกรมเมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสองของวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ซึ่งโปรแกรมนี้จะแสดงความสัมพันธ์ของผลเฉลยในรูปของกราฟ 2 มิติและกราฟ 3 มิติ ทำการคำนวณหาค่าเจาะจง เวกเตอร์เจาะจงและเมทริกซ์ P ซึ่งทำให้เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์เฉียงเชิงตั้งฉาก ซึ่งได้ใช้ "โปรแกรมแก้ปัญหาการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง" ของนางสาวกนกอร ยอดสร้อย และนางสาวศศิกาญจน์ เสถียรรุจิกานนท์ นักศึกษาภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ชั้นปีที่ 4 ปีการศึกษา 2541 ในการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง แสดงสมการของแกนใหม่หลังจากหมุนแกน ซึ่งในส่วนของการรับอินพุตได้ใช้ซอฟต์แวร์เดลไฟมาสร้างอินเตอเฟสและในส่วนของการแสดงกราฟถูกคำนวณโดยซอฟต์แวร์แมททิเมติกา โดยนำอินพุตที่ได้รับมาคำนวณ และแสดงกราฟบนซอฟต์แวร์เดลไฟ ในการลิงค์นั้นเนื่องจากซอฟต์แวร์เดลไฟไม่สามารถทำการลิงค์โดยตรงกับซอฟต์แวร์แมททิเมติกาได้จึงได้ใช้ซอฟต์แวร์วิชวลเบสิกทำการลิงค์ซอฟต์แวร์ทั้งสองไว้ แต่โปรแกรมที่จัดทำขึ้นนี้มีข้อจำกัดหลายอย่างเช่น จะต้องมีซอฟต์แวร์แมททิเมติกาในคอมพิวเตอร์ที่ต้องการติดตั้งโปรแกรมนี้ ไม่สามารถรับค่าสัมประสิทธิ์ของสมการที่เป็นจำนวนอตรรกยะและเศษส่วนได้ และในส่วนของกราฟจะต้องทราบขอบเขตของตัวแปร x , y , z ที่เหมาะสมจึงจะได้กราฟที่ถูกต้องและสวยงาม

6.2 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากปัญหาพิเศษในหัวข้อเมทริกซ์เชิงตั้งฉากกับการประยุกต์ในภาคตัดกรวยและพื้นผิวกำลังสองเป็นส่วนหนึ่งของวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ดังนั้นโปรแกรมนี้จึงเหมาะที่จะนำไปใช้ในการเรียนการสอนในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นหรือวิชาอื่นที่เกี่ยวข้อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

ตัวอย่างโจทย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างโจทย์

2 มิติ

ข้อ 1 $x^2 + y^2 = 25$

ขอบเขต {x , -5 , 5} {y , -5 , 5}

สมการที่ 1 (หลังการหมุนแกน) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

$x' = x$ $y' = y$

สมการที่ 2 (หลังการย้ายแกน) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

$x'' = x'$ $y'' = y'$

ข้อ 2 ตัวอย่าง 2.5.2 หน้า 19 $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

ขอบเขต {x , -5 , 5} {y , -5 , 5}

สมการที่ 1(หลังการหมุนแกน) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

$x' = 0.89x + 0.45y$ $y' = -0.45x + 0.89y$

สมการที่ 2 (หลังการย้ายแกน) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

$x'' = x'$ $y'' = y'$

ข้อ 3 ตัวอย่าง 2.5.3 หน้า 20 $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 8.944272x - 35.77088y + 4 = 0$

ขอบเขต {x , -5 , 5} {y , -2 , 5}

สมการที่ 1(หลังการหมุนแกน) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

$x' = 0.89x + 0.45y$ $y' = -0.45x + 0.89y$

สมการที่ 2 (หลังการย้ายแกน) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

$x'' = x' - 1$ $y'' = y' - 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3 มิติ

ข้อ 1 ตัวอย่าง 2.6.2 หน้า 24 $4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$

ขอบเขต $\{x, -6, 10\}$ $\{y, 0, 6\}$ $\{z, -5, 5\}$

สมการที่ 1 (หลังการหมุนแกน) $4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$

$x' = x$ $y' = y$ $z' = z$

สมการที่ 2 (หลังการย้ายแกน) $4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 36 = 0$

$x'' = x' - 2$ $y'' = y' - 3$ $z'' = z'$

ข้อ 2 ตัวอย่าง 2.6.3 หน้า 25 $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$

ขอบเขต $\{x, -1.3, 1.3\}$ $\{y, -1.3, 1.3\}$ $\{z, -1.1, 1.1\}$

สมการที่ 1(หลังการหมุนแกน) $2x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 3 = 0$

$x' = 0.79x - 0.21y - 0.58z$ $y' = 0.58x + 0.58y + 0.58z$ $Z' = 0.21x - 0.79y + 0.58z$

สมการที่ 2 (หลังการย้ายแกน) $2x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 3 = 0$

$x'' = x'$ $y'' = y'$ $z'' = z'$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างโจทย์

2 มิติ

1. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$	{x , 0 , 4}	{y , 0 , 7}
2. $x^2 - 16y^2 + 8x + 128y - 256 = 0$	{x , -20 , 15}	{y , -10 , 20}
3. $2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y + 41 = 0$	{x , -20 , 20}	{y , -15 , 20}
4. $2x^2 - 4xy + y^2 + 8 = 0$	{x , -10 , 10}	{y , -20 , 20}
5. $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$	{x , -15 , 10}	{y , -5 , 10}
6. $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 9 = 0$	{x , -2 , 2}	{y , -2 , 2}
7. $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$	{x , -1 , 3}	{y , -1 , 5}
8. $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$	{x , -20 , 30}	{y , -20 , 20}
9. $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y + 14 = 0$	{x , -5 , 10}	{y , -10 , 5}
10. $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$	{x , 0 , 6}	{y , -6 , 2}

3มิติ

1. $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z - 153 = 0$	{x , -6 , 8}	{y , -2 , 6}	{z , -7 , 13}
2. $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z + 7 = 0$	{x , -7 , 4}	{y , -5 , 10}	{z , -8 , 5}
3. $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z - 544 = 0$	{x , -2.5 , 2.5}	{y , -6 , 0}	{z , -30 , -20}
4. $x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z - 15 = 0$	{x , -12 , 10}	{y , -2 , 4}	{z , -2 , 5}
5. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$	{x , -2 , 2}	{y , -2 , 2}	{z , -2 , 2}
6. $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$	{x , -2 , 5}	{y , -6 , 6}	{z , -4 , 5}
7. $2xy + z = 0$	{x , -10 , 10}	{y , -10 , 10}	{z , -10 , 10}
8. $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$	{x , -4 , 8}	{y , -4 , 8}	{z , -4 , 8}
9. $7x^2+7y^2+10z^2-2xy-4xz+4yz-12x+12y+60z-24 = 0$	{x , -5 , 5}	{y , -5 , 5}	{z , -6 , 1}
10. $2xy-6x+10y+z-31=0$	{x , -15 , 7}	{y , -10 , 15}	{z , -10 , 10}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์. 2529. **พีชคณิตเชิงเส้น**. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

สมพัฒน์ รุ่งตะวันเรืองศรี. 2537. **เรียนรู้คอมพิวเตอร์กราฟฟิก 2 มิติ ด้วยภาษา C**. คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่.

Stephen Wolfram. **The Mathematica Book**. 3 ed. Addision-Wesley Publishing Company.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้