อัลกอริทึมในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร

ALGORITHM FOR FINDING MAXIMUM AND MINIMUM VALUES OF FUNCTION OF TWO VARIABLES

กนกพรรณ ส่งประเสริฐ
ณัฐพร สิทธิชาติบูรณะ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2545

ALGORITHM FOR FINDING MAXIMUM AND MINIMUM VALUES OF FUNCTION OF TWO VARIABLES

GANOKPAN SONGPRASERT
NATTAPORN SITTICHATBURANA

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2002

หัวข้อปัญหาพิเศษ	อัลกอริทึมในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร ALGORITHM FOR FINDING MAXIMUM AND MINIMUM VALUES OF FUNCTION OF TWO VARIABLES
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกพรรณ ส่งประเสริฐ 42050003 นางสาวณัฐพร สิทธิชาติบูรณะ 42050016
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ. ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ ผศ. สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ปีการศึกษา 2545

คณะกรรมการ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ. ดร. ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการ	อ. บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ	
กรรมการและที่ปรึกษา	รศ. ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการและที่ปรึกษา	ผศ. สุนทร สุชาติเวชภูมิ	

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	อัลกอริทึมในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกพรรณ ส่งประเสริฐ 42050003
	นางสาวณัฐพร สิทธิชาติบูรณะ 42050016
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2545
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ. ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์
	ผศ. สุนทร สุชาติเวชภูมิ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ จัดทำขึ้นโดยนำความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์และคอมพิวเตอร์ มาใช้ในการสร้างซอฟต์แวร์ สำหรับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร รวมถึงการประยุกต์ในด้านต่างๆ โดยได้นำซอฟต์แวร์วิชวลเบสิก 6 มาใช้ ในการสร้างอินเตอร์เฟซเพื่อรับค่าข้อมูลเข้า จากนั้นนำค่าข้อมูลเข้าที่ได้ไปประมวลผลกับโปรแกรมที่คณะผู้จัดทำได้สร้างขึ้น เพื่อคำนวณหาค่าต่างๆ ที่เกี่ยวข้องในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันออกมา และใช้ซอฟต์แวร์แมททิเมติกามาช่วยในการวาดกราฟของฟังก์ชัน

Special Project Title	ALGORITHM FOR FINDING MAXIMUM AND MINIMUM VALUES OF FUNCTION OF TWO VARIABLES
Student	Miss Ganokpan Songprasert 42050003
	Miss Nattaporn Sittichartburana 42050016
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science , Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2002
Special Project Advisor	Assoc. Prof. Pongpan Rattanathanawan
	Asst. Prof. Sunthorn Suchatvejapoom

ABSTRACT

This special project is a collection of the works on knowledge from Computer and Applied Mathematics for making software to finding maximum and minimum values of functions of two variables and three variables and application. This program uses VISUAL BASIC 6.0 for create input 's interface and then bring the input value to calculate at the program that create by creator and uses MATHEMATICA for drawing graph.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง อัลกอริทึมในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีนั้น ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ. ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ และ ผศ. สุนทร สุชาติเวชภูมิ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ไขปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสาทวิชาความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยทุกประการ

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2545

สารบัญ

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร สามารถหาได้หลายวิธีซึ่งในแต่ละวิธีก็จะมีวิธีการหาที่แตกต่างกันออกไป คณะผู้จัดทำมีความสนใจและประสงค์ที่จะศึกษาวิธีการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร 2 วิธี คือวิธี The Second-Partials Test และวิธี Lagrange Multipliers และเล็งเห็นว่าในปัจจุบันวิวัฒนาการด้านคอมพิวเตอร์ได้ก้าวหน้าไปมากจึงมีแนวคิดว่าผู้ที่กำลังศึกษาในหัวข้อเรื่อง ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร น่าจะนำความรู้ทางด้านคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ ดังนั้นคณะผู้จัดทำจึงได้จัดทำโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อช่วยในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปรด้วยวิธี The Second-Partials Test และวิธี Lagrange Multipliers

โปรแกรมที่จัดทำนี้สามารถนำไปใช้ในการเรียนการสอนวิชา Calculus โดยจะเน้นเฉพาะหัวข้อ "การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร " เท่านั้น และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ด้วย

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1) เพื่อศึกษาขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร
2) เพื่อสร้างโปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับ การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปรและแสดงกราฟของฟังก์ชัน

1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

ได้ศึกษาหัวข้อเรื่องการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปรได้อย่างละเอียด โดยเฉพาะวิธี The Second-Partials test และวิธี Lagrange Multipliers ที่สามารถหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร และสามารถแสดงกราฟของฟังก์ชันได้

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการศึกษา

การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปรโดยวิธี The Second-Partials Test และวิธี Lagrange Multipliers และในการหาจุดวิกฤตได้ใช้วิธีของ Newton มาใช้ และในการแสดงกราฟได้นำโปรแกรม Mathematica มาใช้

1.5 ขอบเขตของการศึกษา

โปรแกรมที่จัดทำขึ้นจะเน้นในส่วนของการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นพหุนามของสองตัวแปรทั้งที่มีเงื่อนไข และไม่มีเงื่อนไข โดยใช้โปรแกรมวิชวลเบสิก 6 ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และใช้โปรแกรม Mathematica ช่วยในการหาผลเฉลยของระบบสมการ

1.6 ขั้นตอนการศึกษา

1) ทำการศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร
2) ทำการศึกษาที่มาและขั้นตอนของแต่ละวิธีที่จะนำมาใช้
3) ทำการศึกษาและเลือก Software ที่เหมาะสมสำหรับโปรแกรมนี้
4) ทำการเขียนโปรแกรมสำหรับโปรแกรมสำเร็จรูป
5) ทำการทดสอบโปรแกรมที่ได้สร้างขึ้น
6) ตรวจสอบข้อผิดพลาดและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นให้มีความถูกต้องสมบูรณ์

1.7 ข้อตกลงเบื้องต้น

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นนี้จะเรียกใช้ Software Mathematica ดังนั้นคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการติดตั้งจึงมี Software Mathematica อยู่ด้วย คุณสมบัติของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เหมาะสมกับการใช้งานโปรแกรม Mathematica มีดังนี้

1) มี CPU Pentium II MMX ขึ้นไป
2) มีหน่วยความจำไม่น้อยกว่า 32 Mb
3) มีระบบปฏิบัติการ Window 98 , Me หรือ 2000
4) มีพื้นที่ว่างใน Hardisk มากกว่า 500 Mbขึ้นไป
5) มี CD-ROM
6) มี Display Card 8 Mb

1.8 ข้อจำกัดของการศึกษา

1) เลขสัมประสิทธิ์สามารถรับได้เฉพาะจำนวนเต็ม และทศนิยมเท่านั้น
2) ตัวแปรที่พิมพ์ในฟังก์ชันพิมพ์ได้เฉพาะ x และ y เท่านั้น
3) เลขชี้กำลังสามารถรับได้เฉพาะจำนวนเต็มบวกเท่านั้น
4) ไม่สามารถรับฟังก์ชันที่ป้อนเครื่องหมายลบซ้อนกันได้
5) ไม่สามารถรับฟังก์ชันที่ป้อนวงเล็บได้

บทที่2

ทฤษฎีและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

2.1 ฟังก์ชันสองตัวแปร

นิยาม 2.1.1 ตัวแปร z เรียกว่าเป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y ถ้าสำหรับค่า x และ y หนึ่งคู่ สามารถหาค่า z ได้หนึ่งค่า

ตัวอย่างที่ 2.1.1.1 ให้ s แทนพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งประกอบด้วยด้านยาว x และด้านกว้าง y จะได้ว่า $s = xy$ นั่นคือสำหรับด้าน x และ y ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง สามารถหาค่าได้จำกัดค่าหนึ่งซึ่งเป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้านั้น ในที่นี้ s เป็นฟังก์ชันของ x และ y

ตัวอย่างที่ 2.1.1.2 พิจารณาความสัมพันธ์ของตัวแปร x , y และ z ที่กำหนดโดย $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

จะได้ $z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ เมื่อกำหนดคู่ลำดับ (x,y) หนึ่งค่าจะได้ z สองค่าคือ

$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ และ $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

ความสัมพันธ์แบบนี้ เรียกว่า ฟังก์ชันหลายค่า (multiple-valued function)ส่วนฟังก์ชันที่กล่าวไว้ในนิยามที่ 2.1.1 เรียกว่า ฟังก์ชันค่าเดียว (single-valued function)

เมื่อ z เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$z = f(x,y)$ หรือ $z = z(x,y)$

เรียก x และ y ว่าเป็นตัวแปรอิสระหรือตัวแปรต้น

เรียก z ว่าเป็นตัวแปรตามหรือตัวแปรไม่อิสระ

นิยาม 2.1.2 เซตของคู่อันดับ (x,y) ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ หาค่าได้เป็นจำนวนจริงตามที่กำหนดเรียกว่า โดเมนของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2.1.2.1 จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $z = 2x - y$

เพราะว่า $2x - y$ หาค่าได้เป็นจำนวนจริงสำหรับทุกๆค่า x และ y ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชันคือ $\{(x,y) |\ x \varepsilon R$ และ $y \varepsilon R\}$

หมายเหตุ ฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไป เรียกว่าฟังก์ชันหลายตัวแปร (function of several variables)

2.2 การเขียนกราฟของฟังก์ชันสองตัวแปร

พิจารณาฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ซึ่งนิยามบนโดเมน D ในเรขาคณิตสามมิติจะแทน D ด้วยบริเวณของจุด (x, y) บนระนาบ xy สำหรับแต่ละจุด (x, y) ในโดเมน D จะมีจุด P หนึ่งจุด ซึ่งมีพิกัดเป็น $(x, y, f(x, y))$

กราฟของฟังก์ชันของฟังก์ชันสองตัวแปร จะเป็นผิว(surface)ในสามมิติซึ่งมีเงาทอดลงบนระนาบ xy เป็นบริเวณเดียวกันกับโดเมนของฟังก์ชัน

2.3 อนุพันธ์ย่อย (Partial Differentiation)

เป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไป

นิยามที่ 2.3.1 ส่วนเปลี่ยนแปลงย่อย (Partial increment) เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0) ของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ คือค่าของ z ที่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม เมื่อ x เปลี่ยนจาก x_0 ไปเป็นจำนวน Δx และ y มีค่าคงที่ ซึ่งให้เท่ากับ y_0 เขียนแทนด้วย

$$\Delta_{x_0} z = f(x_0 + \Delta x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$$

ในทำนองเดียวกัน ส่วนเปลี่ยนแปลงย่อยเทียบกับ y ที่จุด (x_0, y_0) ของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ คือค่าของ z ที่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม เมื่อ y เปลี่ยนจาก y_0 ไปเป็นจำนวน Δy และ x มีค่าคงที่เท่ากับ x_0 เขียนแทนด้วย

$$\Delta_{y_0} z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

นิยามที่ 2.3.2 อนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x ของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ ที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{x_0} z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

ใช้สัญลักษณ์ $f_x(x_0, y_0)$ หรือ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ หรือ $z_x(x_0, y_0)$ หรือ $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$

ในทำนองเดียวกันอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ที่จุด (x_0, y_0)

คือ $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_{y_0} z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

ใช้สัญลักษณ์ $f_y(x_0, y_0)$ หรือ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ หรือ $z_y(x_0, y_0)$ หรือ $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$

สรุปได้ว่าการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x ณ จุด (x,y) ใดๆของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ คือการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ของฟังก์ชัน z เมื่อให้ y คงที่

ในทำนองเดียวกัน การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ณ จุด (x,y) ใดๆของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ คือการหาอนุพันธ์เทียบกับ y ของฟังก์ชัน z เมื่อให้ x คงที่

ตัวอย่างที่ 2.3.1 จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ของฟังก์ชัน $z=x^2\sin y$

วิธีทำ หาอนุพันธ์เทียบกับ x โดยให้ y คงที่จะได้

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ y โดยให้ x คงที่จะได้

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$$

ตัวอย่างที่ 2.3.2 ก. กำหนด $f(x,y)=24xy-6x^2y$ จงหา f_x, f_y พร้อมทั้งหา f_x, f_y ที่ $(1,2)$

ข. กำหนด $f(x,y,z,t)=x^2+y^2+xtz^3$ จงอนุพันธ์ย่อยทั้งหมดของ f

วิธีทำ ก. $f_x(x,y)=24y-12xy$, $f_x(1,2)=48-24=24$

$f_y(x,y)=24x-6x^2$, $f_y(x,y)=24-6=18$

ข. ให้ y และ z และ t คงที่ $\therefore \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+tz^3$

ให้ x , z และ t คงที่ $\therefore \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$

ให้ x , y และ t คงที่ $\therefore \dfrac{\partial f}{\partial z}=3xtz^2$

ให้ x , y และ z คงที่ $\therefore \dfrac{\partial f}{\partial t}=xz^3$

2.4 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

เมื่ออนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ของฟังก์ชันในตัวแปร x และ y หาอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้ได้อีก อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ f นิยามได้ดังนี้ คือ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

ทั้งนี้เราเรียกว่า $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ว่าเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของ f

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.1**</u> จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของฟังก์ชัน $f(x,y) = x^2y^3 + x^4y$

<u>วิธีทำ</u> เราได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + x^4$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 + 4x^3y) = 2y^3 + 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + x^4) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + x^4) = 6xy^2 + 4x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + 4x^3y) = 6xy^2 + 4x^3 \qquad \#$$

โดยการดิฟเฟอเรนทิเอต สืบเนื่องต่อๆไป อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สาม ที่เป็นไปได้ ได้แก่

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \quad , \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right)$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง อาจใช้สัญลักษณ์ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = (f_x)_y$$

หรือบางที ละทิ้งวงเล็บ ก็จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

และอื่นๆ จะได้เป็น ดังนี้

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad , \quad f_{xxyy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.2</u> กำหนดให้ $f(x,y) = y^2 e^x + y$ จงหา f_{xyy}

<u>วิธีทำ</u> $f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2 e^x)$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(2ye^x) = 2e^x \qquad \#$$

สำหรับฟังก์ชัน 3 ตัวแปร จะมีอนุพันธ์ย่อยดังนี้

$$f_x(x,y,z) \ , \ f_y(x,y,z) \ , \ f_z(x,y,z)$$

อนุพันธ์ย่อย f_x หาได้โดยให้ y และ z เป็นค่าคงที่แล้วดิฟเฟอเรนทิเอต เทียบกับ x และ f_y ก็ให้ x และ z คงที่ ในทำนองเดียวกัน f_z ก็ให้ x และ y คงที่

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.3</u> ถ้า $f(x,y,z) = x^3 y^2 z^4 + 2xy + z$ แล้ว

$$f_x(x,y,z) = 3x^2 y^2 z^4 + 2y$$

$$f_y(x,y,z) = 2x^3 y z^4 + 2x$$

$$f_z(x,y,z) = 4x^3 y^2 z^3 + 1$$

$$f_z(-1,1,2) = 4(-1)^3 (1)^2 (2)^3 + 1 = -31 \qquad \#$$

2.5 การหาอนุพันธ์ได้

ถ้า f เป็นฟังก์ชันของ x และ y แล้วจะเรียกสัญลักษณ์ Δf ว่า **ส่วนเปลี่ยนแปลงของ f** อธิบายถึง ส่วนเปลี่ยนแปลงของค่าของ $f(x,y)$ เมื่อ (x,y) เปลี่ยนจาก (x_0,y_0) ไปเป็น $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

ดังนั้น $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ บางครั้งอาจแทน Δf ด้วย Δz

นิยาม 2.5.1 ฟังก์ชัน f ของสองตัวแปร จะเรียกว่า **หาอนุพันธ์ได้** ที่ (x_0,y_0) ถ้า $f_x(x_0,y_0)$ และ $f_y(x_0,y_0)$ มีค่าเกิดขึ้น และ Δf สามารถเขียนได้ในรูปของ

$$\Delta f = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

เมื่อ $\in_1$ และ $\in_2$ เป็นฟังก์ชันของ Δx และ Δy ที่ทำให้ $\in_1 \to 0$ และ $\in_2 \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ (x_0,y_0) แล้ว f มีค่าต่อเนื่องที่ (x_0,y_0)

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง ที่แต่ละจุดในบริเวณเชิงวงกลมบางบริเวณ ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (x_0,y_0) และถ้าอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0) แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ที่ (x_0,y_0)

บทแทรก ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่ง ที่แต่ละจุดของบริเวณเชิงวงกลมบางบริเวณ ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (x_0,y_0) และถ้าอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0) แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0) ด้วย

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน 2 ตัวแปร ถ้า f_x, f_y, f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่องบนเซตเปิด แล้ว $f_{xy} = f_{yx}$ ที่แต่ละจุดของเซตนั้น

<u>ตัวอย่างที่ 2.5.1</u> ให้ $f(x,y)=2e^{xy}\sin y$

$$f_x(x,y)=2ye^{xy}\sin y=(2y\sin y)e^{xy}$$

$$f_{xy}(x,y)=(2y\sin y)(xe^{xy})+e^{xy}(2y\cos y+2\sin y)$$

$$=2e^{xy}(xy\sin y+y\cos y+\sin y)$$

$$f_y(x,y)=2e^{xy}\cos y+2xe^{xy}\sin y$$

$$f_{yx}(x,y)=2ye^{xy}\cos y+2xye^{xy}\sin y+2e^{xy}\sin y$$

$$=2e^{xy}(xy\sin y+y\cos y+\sin y)$$

ดังนั้น $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ สำหรับทุกๆ (x,y) #

2.6 ทฤษฎีบทค่าสุดขีด

ทฤษฎีบทของค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปร มีความคล้ายคลึงกับทฤษฎีบทของฟังก์ชันตัวแปรเดียว ยกตัวอย่างเช่น เราอาจกล่าวว่า $f(x_0,y_0)$ เป็น**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์**ของ f ในขอบเขต R ถ้า (x_0,y_0) อยู่ใน R และ $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ สำหรับทุกๆ (x,y) ใดๆใน R, $f(x_0,y_0)$ เป็น**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์**ของ f ในขอบเขต R ถ้า (x_0,y_0) อยู่ใน R และ $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ สำหรับทุกๆ (x,y) ใดๆ ใน R

f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์**ที่จุด (x_0,y_0) ถ้ามีวงกลมศูนย์กลางอยู่ที่ (x_0,y_0) ที่ทำให้ $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ สำหรับทุกๆ (x,y) ภายในวงกลม, f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**ที่จุด (x_0,y_0) ถ้ามีวงกลมศูนย์กลางอยู่ที่ (x_0,y_0) ที่ทำให้ $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ สำหรับทุกๆ (x,y) ภายในวงกลม

จุด (x_0,y_0) เป็น**จุดวิกฤต**เมื่อเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้คือ ให้ $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ถ้าทั้ง f_x และ f_y หาค่าได้ที่จุด (x,y) แล้ว $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

จุดอานม้าคือจุดวิกฤตที่ไม่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

<u>หมายเหตุ</u> ค่าสุดขีดของฟังก์ชันสามตัวแปรก็ทำนองเดียวกัน

2.7 วิธีการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์

2.7.1 วิธี THE SECOND PARTIALS TEST

1. $z=f(x,y)$
2. $f_x(x_0,y_0)=0$ และ $f_y(x_0,y_0)=0$ โดยที่ (x_0,y_0) เป็นจุดวิกฤต
3. อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ f หาค่าได้ในวงกลมที่มี (x_0,y_0) เป็นศูนย์กลาง
4. $A=f_{xy}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$ แล้ว

กรณีที่ 1. ถ้า $AC-B^2>0$ และ $A<0$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

กรณีที่ 2. ถ้า $AC-B^2>0$ และ $A>0$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

กรณีที่ 3. ถ้า $AC-B^2<0$ แล้ว f มีจุดอานม้าอยู่ที่จุด (x_0,y_0)

กรณีที่ 4. ถ้า $AC-B^2=0$ ไม่สามารถสรุปได้

ตัวอย่างที่ 2.7.1.1 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x,y)=-x^2-y^2+6x+8y-21$$

วิธีทำ ขั้นที่ 1 หาจุดวิกฤตโดยหา (x,y) ที่ได้จาก $f_x(x,y)=0$ และ $f_y(x,y)=0$

$$f_x(x,y)=-2x+6=0$$

$$x=3$$

$$f_y(x,y)=-2y+8=0$$

$$y=4$$

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $A=f_{xx}(3,4)$, $B=f_{xy}(3,4)$, $C=f_{yy}(3,4)$

$f_{xx}(x,y)=-2$ แล้ว $A=f_{xx}(3,4)=-2$

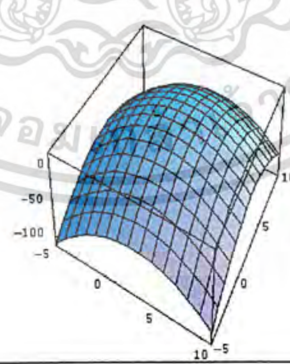
$f_{xy}(x,y)=0$ แล้ว $B=f_{xy}(3,4)=0$

$f_{yy}(x,y)=-2$ แล้ว $C=f_{yy}(3,4)=-2$

ขั้นที่ 3 หาค่า $AC-B^2$ และแทนค่าจุดวิกฤต $(3,4)$ ลงไป

$$AC-B^2=(-2)(-2)-(0)^2=4>0, A=-2<0$$

จะเห็นว่าตรงกับกรณีที่ 1 นั่นคือ $f(3,4)=4$ คือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ #



รูป 2.1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x,y)=-x^2-y^2+6x+8y-21$

<u>ตัวอย่างที่ 2.7.1.2</u> จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์และจุดวิกฤตทั้งหมดของ

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$$

<u>วิธีทำ</u> ขั้นที่ 1 หาจุดวิกฤตของ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y = 0$$

จัดรูปให้อยู่ในเทอม $y = \frac{1}{2}x^2$

$$f_y(x,y) = 3y^2 - 6x = 0$$

$$3y^2 = 6x$$

$$3(\frac{1}{2}x^2)^2 = 6x$$

$$3x(x^3 - 8) = 0$$

$x = 0$ หรือ $x = 2$

$y = 0$ หรือ $y = \frac{1}{2}(2)^2 = 2$

จุดวิกฤตคือ (0,0) และ (2,2)

เมื่อมีจุดวิกฤตสองจุด ขั้นตอนที่ 2 และ 3 จึงต้องทำสองครั้ง

ที่(0,0) ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $A = f_{xx}(0,0), B = f_{xy}(0,0), C = f_{yy}(0,0)$

$f_{xx}(x,y) = 6x$ ดังนั้น $f_{xx}(0,0) = 0$

$f_{xy}(x,y) = -6$ ดังนั้น $f_{xy}(0,0) = -6$

$f_{yy}(x,y) = 6y$ ดังนั้น $f_{yy}(0,0) = 0$

ขั้นที่ 3 หาค่า $AC - B^2$ แล้วแทนค่าจุดวิกฤต(0,0)ลงไป

$$AC - B^2 = (0)(0) - (-6)^2 = -36 < 0$$

จะเห็นว่าตรงกับกรณีที่ 3 ของการตรวจสอบ นั่นคือ f มีจุดอานม้าที่จุด(0,0)

ที่(2,2) ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $A = f_{xx}(2,2), B = f_{xy}(2,2), C = f_{yy}(2,2)$

$f_{xx}(x,y) = 6x$ นั่นคือ $f_{xx}(2,2) = 12$

$f_{xy}(x,y) = -6$ นั่นคือ $f_{xy}(2,2) = -6$

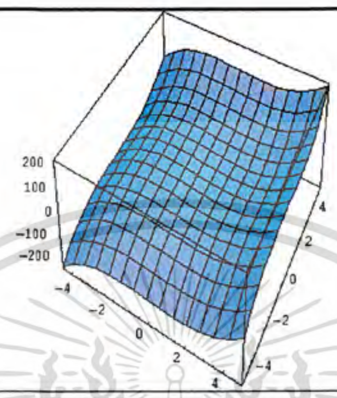
$f_{yy}(x,y) = 6y$ นั่นคือ $f_{yy}(2,2) = 12$

ขั้นที่ 3 หาค่า $AC - B^2$ แล้วแทนค่าจุดวิกฤต(2,2)ลงไป

$AC - B^2 = (12)(12) - (-6)^2 = 108 > 0$ และ $A = 12 > 0$

จะเห็นว่าตรงกับกรณีที่ 2 ของการตรวจสอบ และ $f(2,2) = -8$

คือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ #



รูป 2.2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

2.7.2 วิธีของ LAGRANGE MULTIPLIERS

สำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปร

ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x,y) = 0$ โดยที่ (x_0, y_0) ซึ่ง (x_0, y_0, λ_0) เป็นตัวแก้ปัญหาของ

$$F_x(x,y,\lambda) = 0$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 0$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0$$

ซึ่ง $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ เมื่อข้อกำหนดทั้งหมดสามารถหาค่าได้

<u>**ตัวอย่าง 2.7.2.1**</u> จงหาค่า Maximize $f(x,y) = xy$

Subject to $3x + y = 720$

<u>วิธีทำ</u> ขั้นที่ 1. จัดรูปแบบปัญหาให้อยู่ในรูป

Maximize $f(x,y) = xy$

Subject to $g(x,y) = 3x + y - 720 = 0$

ขั้นที่ 2. $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$$= xy + \lambda(3x + y - 720)$$

ขั้นที่ 3. แก้ปัญหา $F_x = 0, F_y = 0, F_\lambda = 0$. (การแก้ปัญหานี้เรียกว่าจุดวิกฤตของ F)

$$F_x = y + 3\lambda = 0$$

$$F_y = x + \lambda = 0$$

$$F_\lambda = 3x + y - 720 = 0$$

จากสองสมการแรก เราจะเห็นว่า

$$y = -3\lambda$$

$$x = -\lambda$$

นำค่า x และค่า y แทนลงใน $3x + y = 720$ แล้วคำนวณหาค่า λ

$$-3\lambda - 3\lambda = 720$$

$$-6\lambda = 720$$

$$\lambda = -120$$

ดังนั้น

$$y = -3(-120) = 360$$

$$x = -(-120) = 120$$

และ $(x_0, y_0, \lambda_0) = (120, 360, -120)$ เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวของ F

ขั้นที่ 4. Max $f(x,y) = f(120,360)$

$$= (120)(360) = 43{,}200$$ #

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับขั้นที่ 4. ของวิธีของ LAGRANGE MULTIPLIERS สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า (x_0, y_0, λ_0) เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวของ F แล้วเราจะนำ (x_0, y_0) มาแก้ปัญหาที่เราพิจารณาได้ ถ้า F มีจุดวิกฤตมากกว่าหนึ่งจุดแล้ว เราหาค่า $Z = f(x,y)$ ที่ (x_0, y_0) สำหรับแต่ละจุดวิกฤต (x_0, y_0, λ_0) ของ F สำหรับปัญหาที่เราพิจารณา ค่าของ $Z = f(x,y)$ ในแต่ละจุดวิกฤตที่มีค่ามากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดของ $f(x,y)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x,y) = 0$ และค่าของ $Z = f(x,y)$ ในแต่ละจุดวิกฤตที่มีค่าน้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดของ $f(x,y)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x,y) = 0$

สำหรับฟังก์ชันของสามตัวแปร

ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $W = f(x,y,z)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x,y,z) = 0$ โดยที่ (x_0, y_0, z_0) ซึ่ง $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ เป็นตัวแก้ปัญหาของ

$$F_x(x,y,z,\lambda) = 0$$

$$F_y(x,y,z,\lambda) = 0$$

$$F_z(x,y,z,\lambda) = 0$$

$$F_\lambda(x,y,z,\lambda) = 0$$

ซึ่ง $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$ เมื่อข้อกำหนดทั้งหมดสามารถหาค่าได้

<u>**ตัวอย่าง 2.7.2.2**</u> กล่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งเปิดด้านบน และถูกแบ่งกั้นตามรูปที่1 พื้นที่ผิวทั้งหมดของกล่องมีค่าเท่ากับ 162 นิ้ว จงหาขนาดความกว้าง,ความยาว และความสูงที่ทำให้กล่องมีปริมาตรที่มากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> เราต้องกำหนดว่า Maximize $V(x,y,z) = xyz$

ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าพื้นที่ผิวทั้งหมดของกล่องมีค่าเท่ากับ 162 นิ้ว ดังนั้น x, y และ z ต้องเป็นไปตาม $xz + 2xz + 3yz = 162$

ขั้นที่ 1. Maximize $V(x,y,z) = xyz$

Subject to $g(x,y,z) = xy + 2xz + 3yz - 162 = 0$

ขั้นที่ 2. $F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 3yz - 162)$

ขั้นที่ 3.

$$F_x = yz + \lambda(y + 2z) = 0$$

$$F_y = xz + \lambda(x + 3z) = 0$$

$$F_z = xy + \lambda(2x + 3y) = 0$$

$$F_\lambda = xy + 2xz + 3yz - 162 = 0$$

จากสองสมการแรก เราสามารถเขียน

$$\lambda = \frac{-yz}{y+2z} \qquad \lambda = \frac{-xz}{x+3z}$$

กำจัด λ ออก,เรามี

$$\frac{-yz}{y+2z}=\frac{-xz}{x+3z}$$

$$-xyz-3yz^2=-xyz-2xz^2$$

$$3yz^2=2xz^2$$

$$3y=2x$$

$$x=\frac{3}{2}y$$

จากสมการที่สอง และสมการที่สาม

$$\lambda=\frac{-xz}{x+3z} \qquad \lambda=\frac{-xy}{2x+3y}$$

กำจัด λ ออก,เรามี

$$\frac{-xz}{x+3z}=\frac{-xy}{2x+3y}$$

$$-2x^2z-3xyz=-x^2y-3xyz$$

$$2x^2z=x^2y$$

$$2z=y$$

$$z=\frac{1}{2}y$$

แทนค่า $x=\frac{3}{2}y$ และ $z=\frac{1}{2}y$ ในสมการที่สี่ ,เรามี

$$\left(\frac{3}{2}y\right)y+2\left(\frac{3}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}y\right)+3y\left(\frac{1}{2}y\right)-162=0$$

$$\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}y^2=162$$

$$y^2=36$$

$$y=6$$

$$x=\frac{3}{2}(6)=9 \quad \textit{Using}\ x=\frac{3}{2}y$$

$$z=\frac{1}{2}(6)=3 \quad \textit{Using}\ z=\frac{1}{2}y$$

และ สุดท้ายจะได้

$$\lambda=\frac{-(6)(3)}{6+2(3)}=-\frac{3}{2} \qquad \textit{Using}\ \lambda=\frac{-yz}{y+2z}$$

ดังนั้น มีจุดวิกฤตของ F เพียงจุดเดียวคือ $(9,6,3,-\frac{3}{2})$

ขั้นที่ 4. ค่าต่างๆที่ทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุดคือ

ความกว้างเท่ากับ 9 นิ้ว

ความยาวเท่ากับ 6 นิ้ว

ความสูงเท่ากับ 3 นิ้ว #

บทที่3
วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 กระบวนการและการพัฒนาระบบ

3.1.1 การศึกษาค้นคว้า

ปัญหาพิเศษฉบับนี้คณะผู้จัดทำได้ทำการศึกษาค้นหาความรู้ทางด้านการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดโดยใช้วิธี The Second-Partials Test และวิธีของ Lagrange Multipliers เพื่อนำข้อมูลเหล่านี้มาใช้ในการเขียนโปรแกรม

3.1.2 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ทำการศึกษาหลักการและความรู้ทางด้านการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร ที่ต้องนำมาใช้ในการวางแผนงาน
2. ทำการศึกษาระบบและวิธีการใช้งาน Mathematica เพื่อใช้ในการวาดกราฟ
3. ทำการศึกษาระบบและวิธีการใช้งาน VB 6. เพื่อนำมาใช้ในการพัฒนาระบบ
4. แสดงขั้นตอนการดำเนินงาน โดยทำการออกแบบ Flow Chart ของระบบงานและกำหนด input และ output ของ Flow Chart ในระบบ

3.2 การออกแบบระบบ

ประกอบด้วย 3 ส่วนต่อไปนี้ คือ

- **ส่วนนำข้อมูลเข้า**

เป็นระบบที่นำเข้าข้อมูลอย่างง่าย ข้อมูลที่นำเข้า คือ ฟังก์ชันสองตัวแปร และ ค่า x_n, y_n

- **ส่วนวิเคราะห์และประมวลผล**

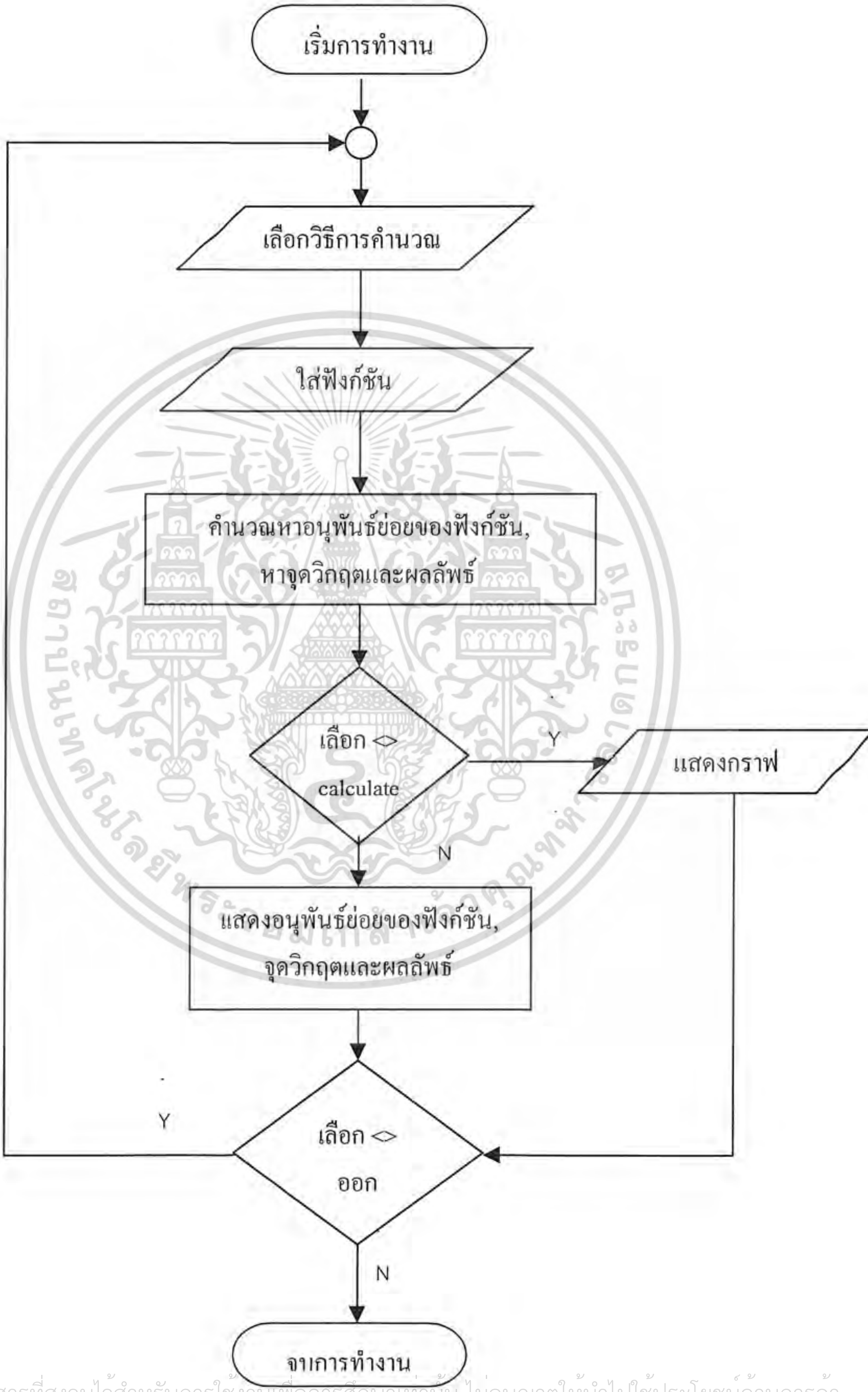
จากข้อมูลส่วนนำเข้า นำข้อมูลฟังก์ชันสองตัวแปรที่ได้มาวิเคราะห์และนำไปคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จากนั้นนำข้อมูลค่า x_n, y_n ที่สุ่มได้มาวิเคราะห์และนำไปคำนวณหาจุดวิกฤตโดยใช้วิธี Newton ช่วยในการหา แล้วนำค่าต่างๆไปประมวลผลเพื่อหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด หรือจุดอานม้า

- **ส่วนแสดงผล**

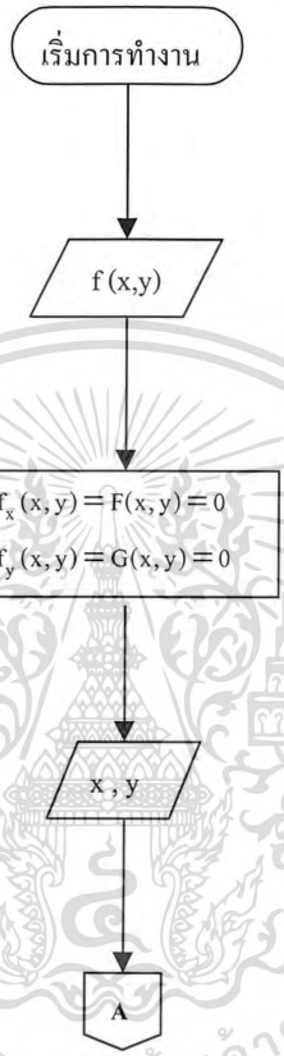
นำข้อมูลส่วนที่ได้จากการประมวลผลมาแสดงทางจอภาพ จะประกอบด้วย อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน จุดวิกฤต และ ผลลัพธ์

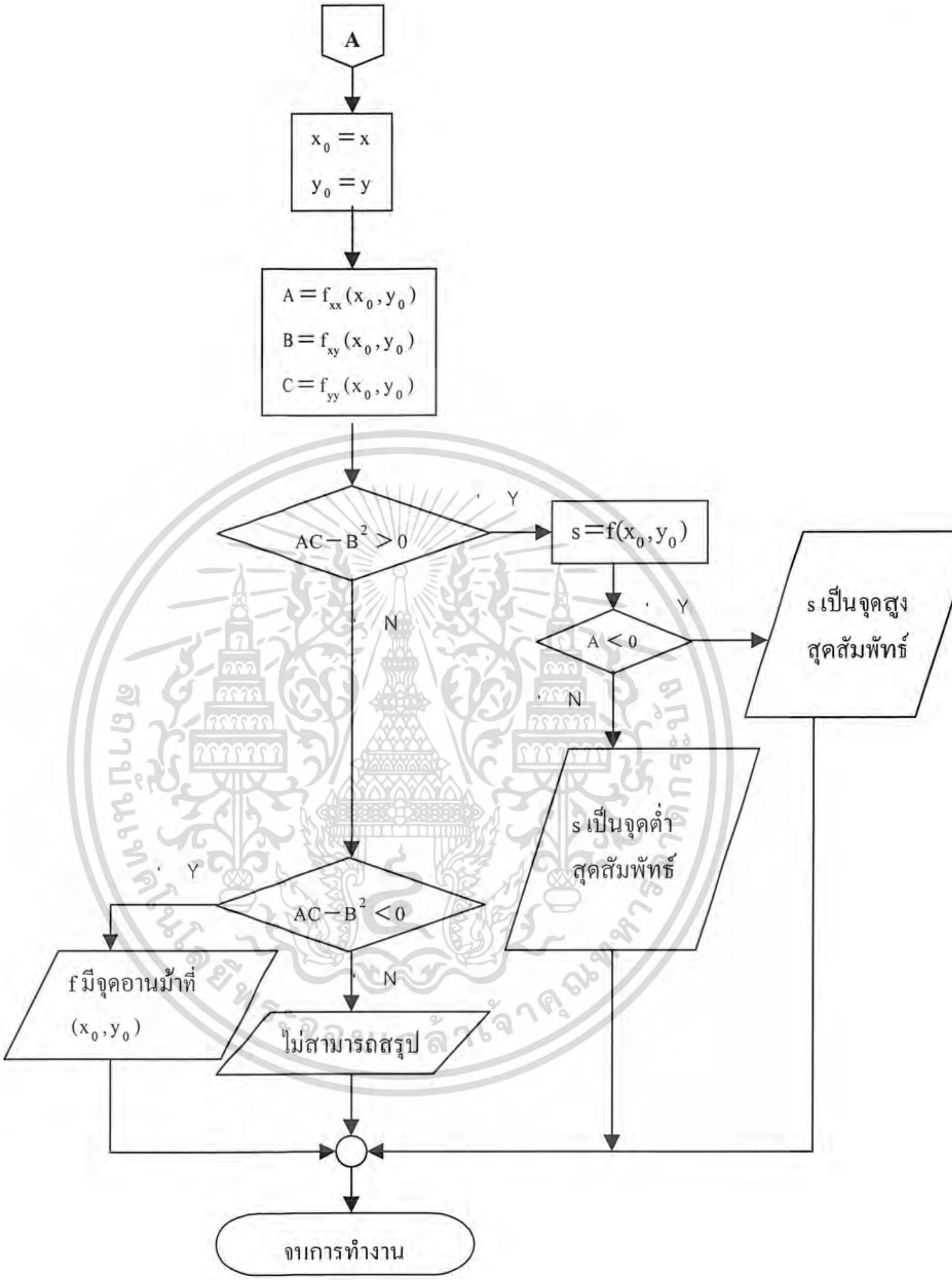
3.3 ขั้นตอนการดำเนินงาน

แสดงเป็น System Flow Diagram ได้ดังนี้

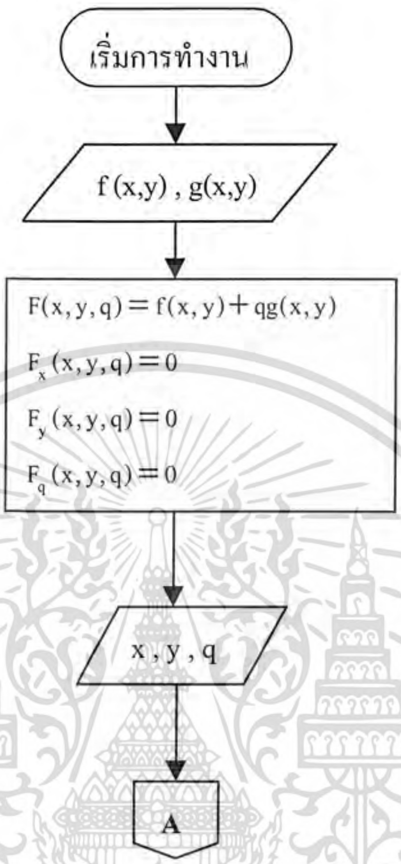


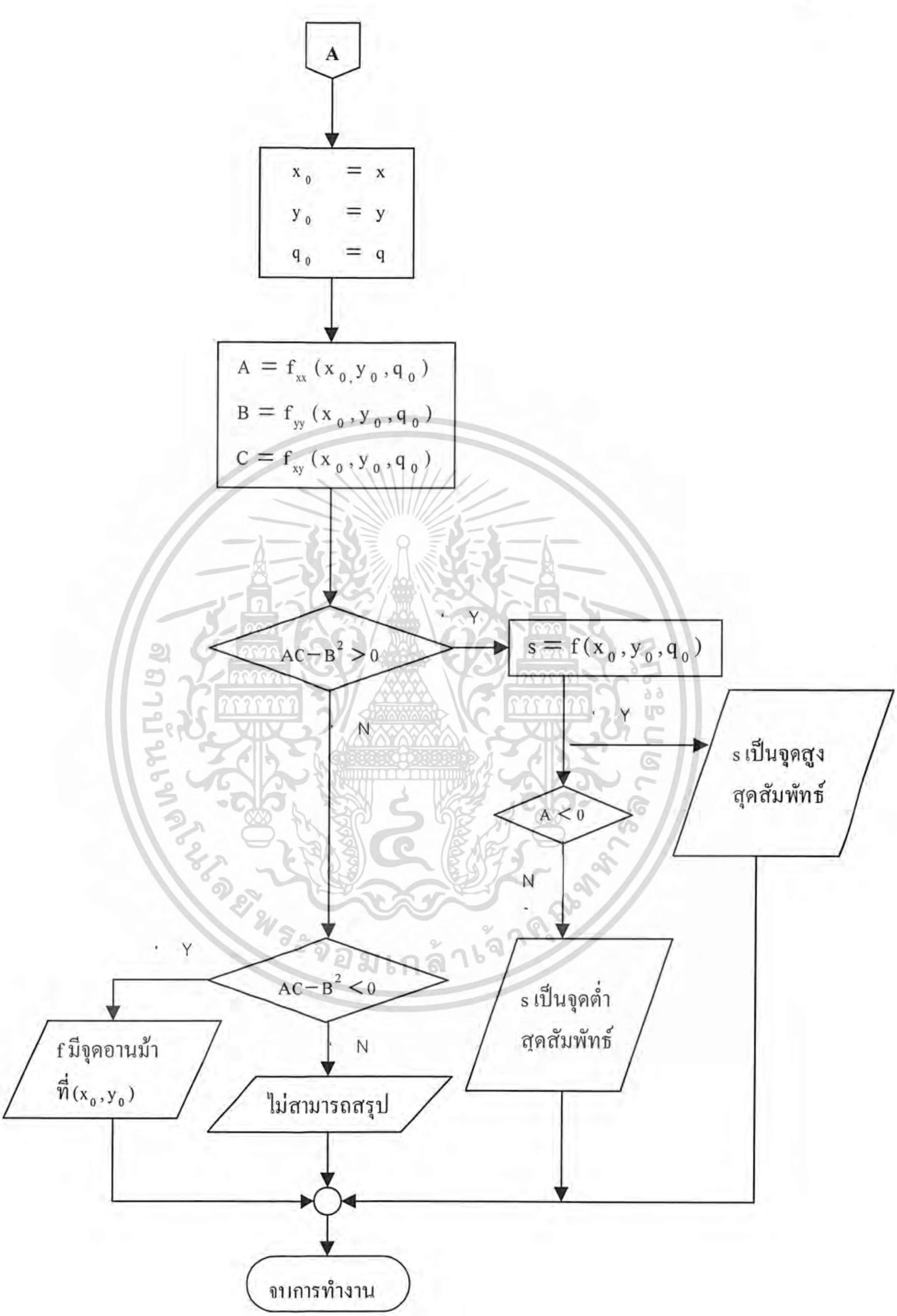
อัลกอริทึมในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดโดยวิธี **The Second-Partials Test** แสดงได้ดังนี้




A
$x_0 = x$
$y_0 = y$
$A = f_{xx}(x_0, y_0)$
$B = f_{xy}(x_0, y_0)$
$C = f_{yy}(x_0, y_0)$
$AC - B^2 > 0$
Y
N
$s = f(x_0, y_0)$
$A < 0$
Y
N
s เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์
s เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์
$AC - B^2 < 0$
Y
N
f มีจุดอานม้าที่ (x_0, y_0)
ไม่สามารถสรุป
จบการทำงาน

อัลกอริทึมในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดโดยวิธี **Lagrange Multiplier** แสดงได้ดังนี้




A
$x_0 = x$
$y_0 = y$
$q_0 = q$
$A = f_{xx}(x_0, y_0, q_0)$
$B = f_{yy}(x_0, y_0, q_0)$
$C = f_{xy}(x_0, y_0, q_0)$
$AC - B^2 > 0$
Y
$s = f(x_0, y_0, q_0)$
N
Y
s เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์
$A < 0$
N
Y
$AC - B^2 < 0$
s เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์
N
f มีจุดอานม้าที่ (x_0, y_0)
ไม่สามารถสรุป
จบการทำงาน

บทที่ 4

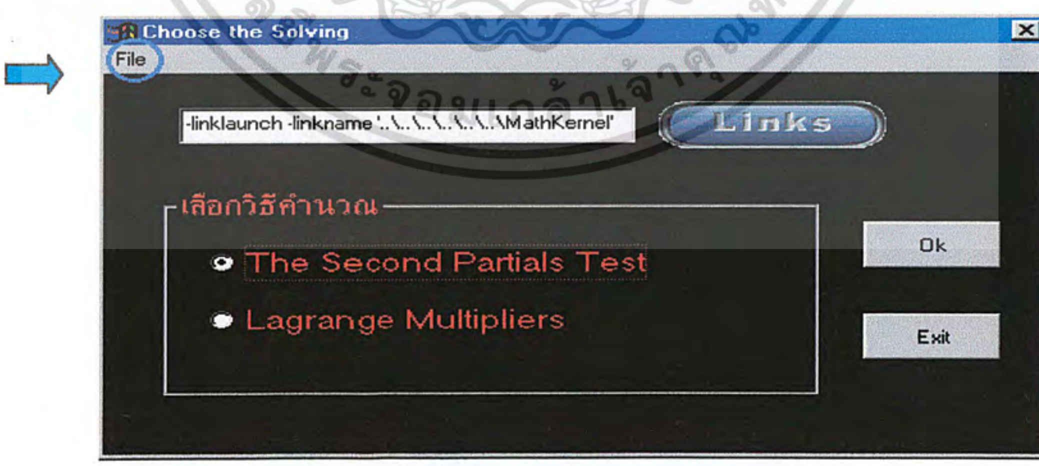
ผลการทดลอง

4.1 ขั้นตอนต่างๆในการทำงานของโปรแกรม

4.1.1 เมื่อทำการรันโปรแกรมจะปรากฏฟอร์มดังรูป

รูปที่ 4.1 แสดงหน้าจอเริ่มการทำงาน

เมื่อกดปุ่ม HOME จะปรากฏฟอร์มหลักของโปรแกรมดังนี้



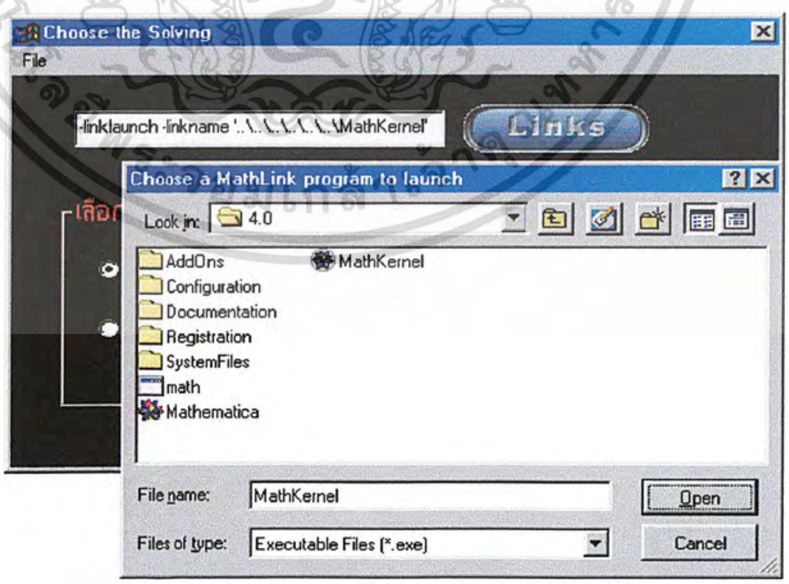
รูปที่ 4.2 แสดงหน้าจอหลัก

เมื่อเลือก File แล้วกดเลือก Team Project จะปรากฏฟอร์มแสดงชื่อผู้จัดทำดังนี้

รูปที่ 4.3 แสดงชื่อผู้จัดทำ

4.1.2 การเชื่อมต่อกับโปรแกรม Mathematica ซึ่งจากรูปที่ 4.2 โดยเลือกกดปุ่ม 

แล้วจะปรากฏ ไดอะล็อก ให้หาพาท Mathkernal และทำการเปิด แสดงได้ดังรูป



รูปที่ 4.4 ระบุไดเรกทอรี่โดยใช้ฟอร์มไดเรกทอรี่

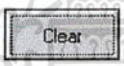
เมื่อทำการเชื่อมต่อแล้ว ให้เลือกวิธีที่ต้องการคำนวณจากรูปที่ 4.2

4.1.3 เมื่อเลือกวิธี The Second Partials Test จะปรากฏฟอร์มดังนี้

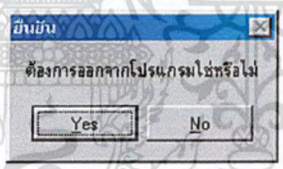
รูปที่ 4.5 ฟอร์มใส่ค่า Input

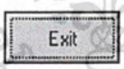
เมื่อกดปุ่ม 

จะกลับไปยังฟอร์มหลักของโปรแกรมนั่นคือ รูปที่ 4.2

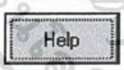
เมื่อกดปุ่ม 

จะทำการ Clear ค่าในช่อง Input ทั้งหมด

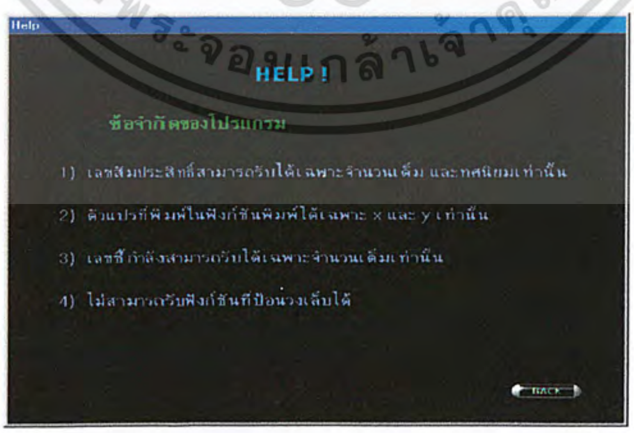


เมื่อกดปุ่ม 

จะปรากฏ

เมื่อกดปุ่ม 

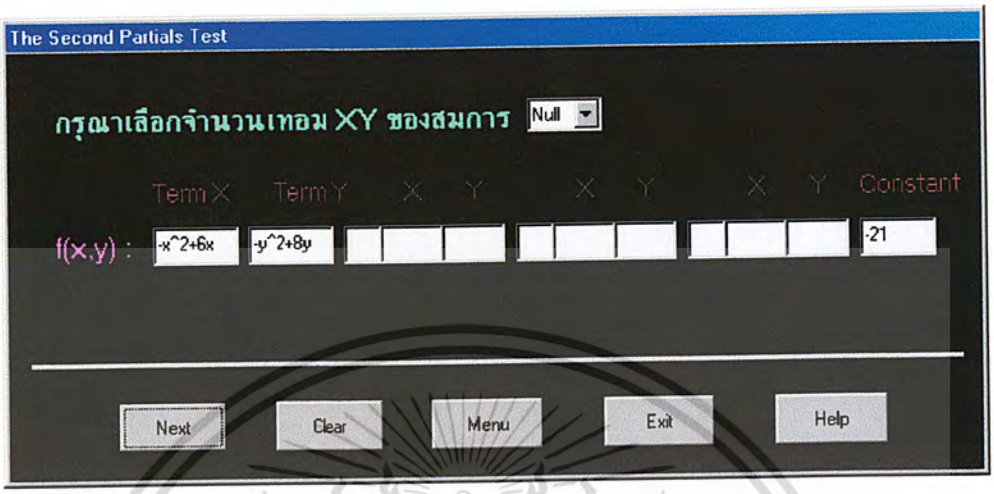
จะปรากฏฟอร์มดังรูป



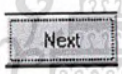
รูปที่ 4.6 แสดงข้อจำกัดของโปรแกรม

ในการใส่ค่า Input ก่อนอื่นต้องเลือกจำนวนเทอมของ xy โดยเลือกที่ 

จากนั้นใส่ค่าของฟังก์ชันซึ่งแสดงได้ดังนี้

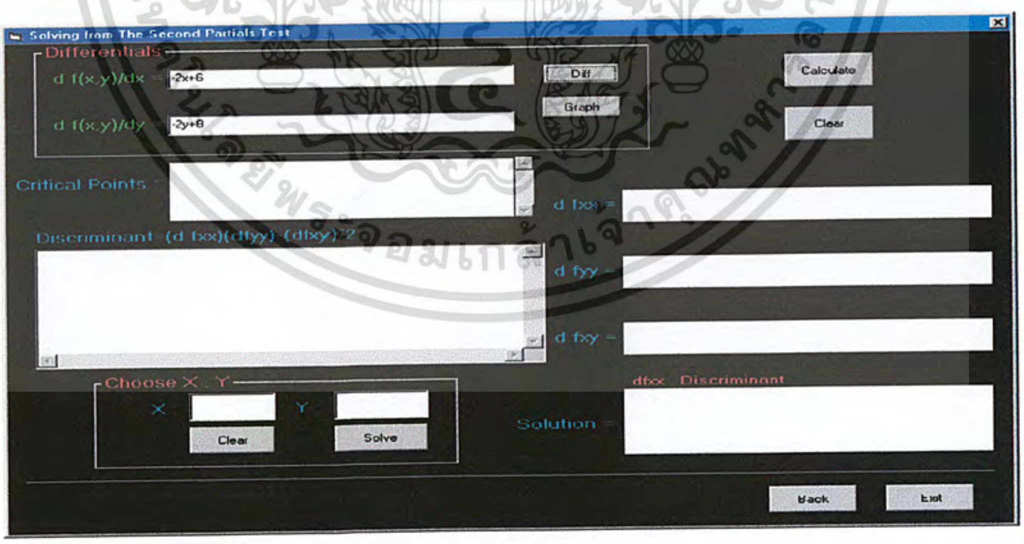


รูปที่ 4.7 แสดงการใส่ฟังก์ชัน

แล้วกดปุ่ม 

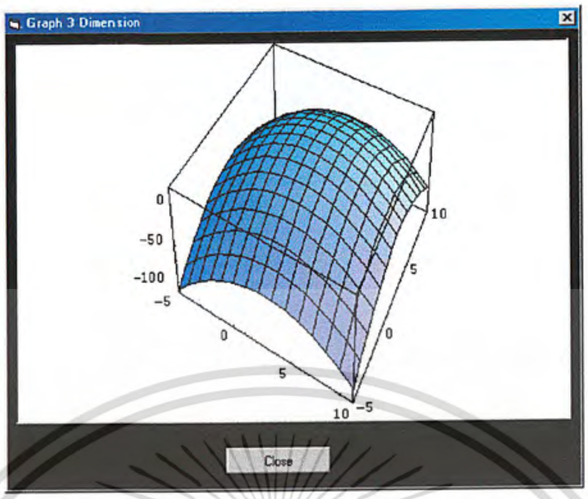
จะปรากฏฟอร์ม Solving from The Second Partials Test แล้วกดปุ่ม 

จะทำการแสดงค่าการ Differentials ของฟังก์ชันดังรูป



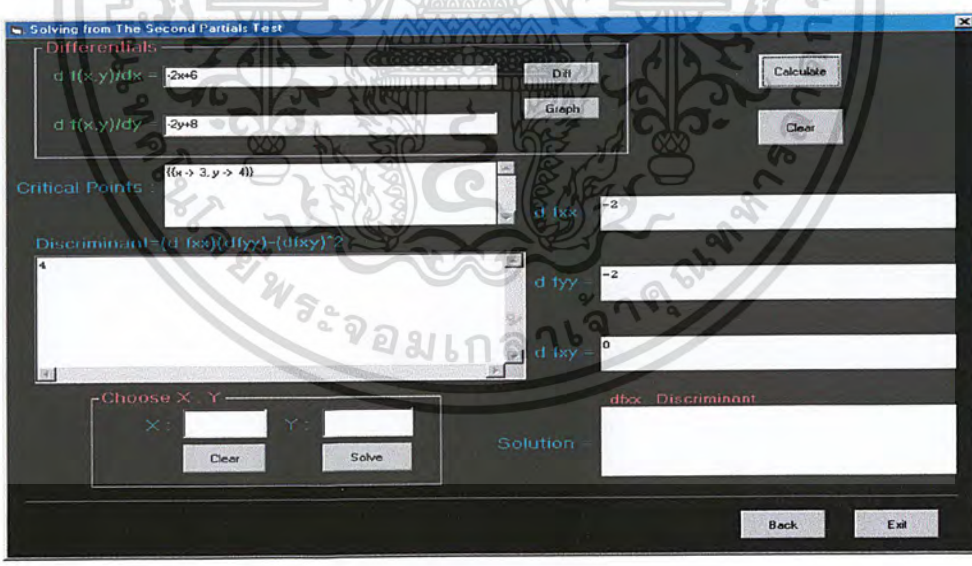
รูปที่ 4.8 ฟอร์มแสดงผล Differentials

หากต้องการแสดงกราฟให้กดปุ่ม Graph จะปรากฏฟอร์มแสดงกราฟของฟังก์ชัน ดังตัวอย่างฟังก์ชันที่เราใส่ในรูปที่ 4.7 จะแสดงกราฟได้ตามฟอร์มดังนี้



รูปที่ 4.9 ฟอร์มแสดงกราฟของฟังก์ชัน

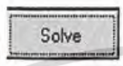
จากนั้นให้กดปุ่ม Calculate จะปรากฏผลเฉลยดังรูป



รูปที่ 4.10 แสดงค่า Critical Points , Discriminant และ อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของฟังก์ชัน

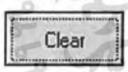
หลังจากนั้นทำการเลือกค่า x และ y จาก Critical Poiont ที่ต้องการให้แสดงในช่อง Solution ซึ่งจากตัวอย่างมี Critical Point เพียงจุดเดียวคือ x เป็น 3 และ y เป็น 4 แสดงการใส่ค่า x และ y ดังนี้

รูปที่ 4.11 แสดงการใส่ค่า x และ y

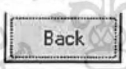
จากนั้นดับเบิ้ลคลิกที่ปุ่ม 

แล้วจะแสดงค่า Solution ดังนี้

รูปที่ 4.12 แสดงค่าของ dfxx และ Discriminant

สำหรับฟังก์ชันที่มีจุดวิกฤตหลายจุด และต้องการให้แสดง Solution จุดอื่นๆ ก็สามารถทำได้โดยกดปุ่ม 

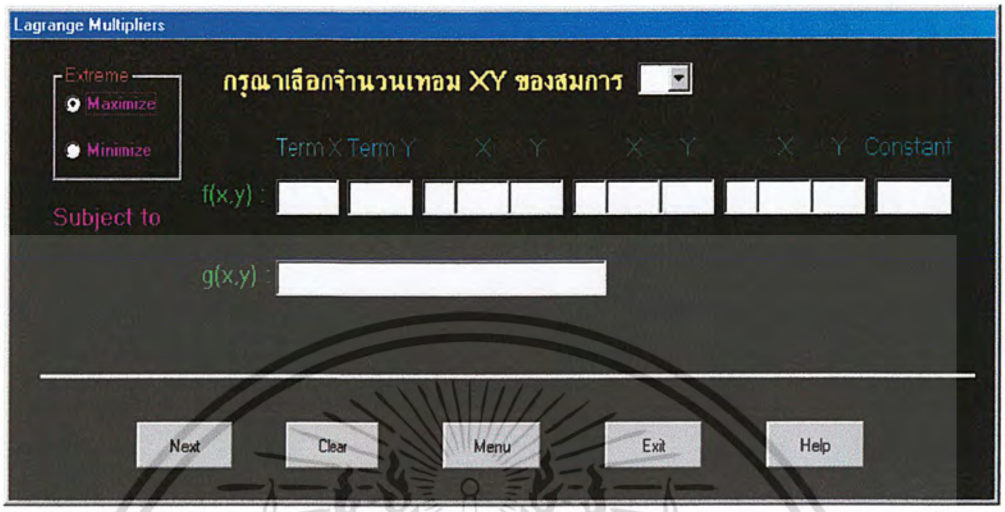
แล้วใส่ค่า x และ y นั้นๆใหม่ และดำเนินการตามเดิม

เมื่อกดปุ่ม 

จะกลับไปยังฟอร์ม The Second Partials Test หรือฟอร์ม Input ตามรูปที่ 4.7

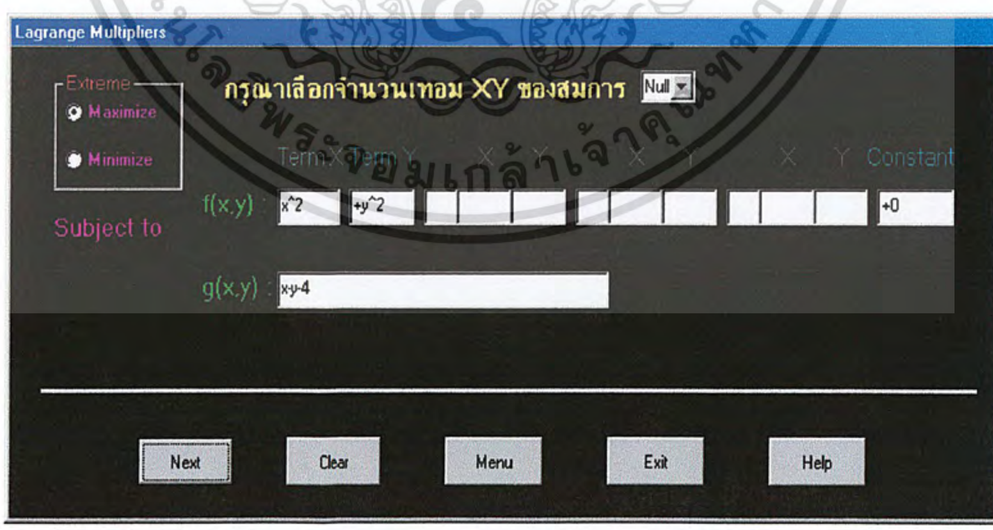
สำหรับวิธี The Second Partials Test หากต้องการคำนวณฟังก์ชันอื่นต้องทำการ Clear ค่าทุกๆช่องแล้วกลับไปทำการเชื่อมต่อกับโปรแกรม Mathematica ใหม่ทุกครั้ง

4.1.4 เมื่อเลือกวิธี Lagrange Multipliers จะปรากฏฟอร์มดังนี้



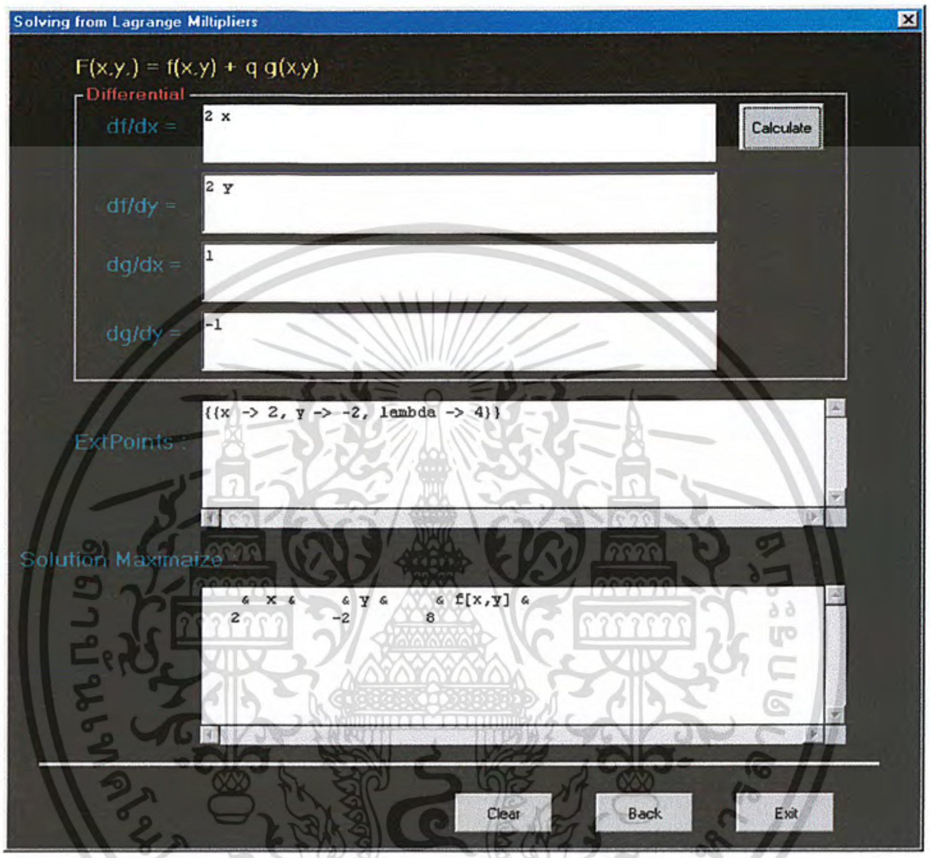
รูปที่ 4.13 ฟอร์มสำหรับใส่ค่า Input

วิธีการใส่ค่า Input ของวิธี Lagrange Multipliers คล้ายกับวิธีการของ The Second Partials Test ต่างกันตรงที่ g(x,y) หากค่าที่ใส่มี x และ y ติดกันให้เว้นหนึ่งตัวอักษร ตัวอย่างการใส่ฟังก์ชันแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 4.14 แสดงการใส่ฟังก์ชัน

เมื่อใส่ฟังก์ชันถูกต้องแล้วกดปุ่ม Next จะปรากฏฟอร์ม Solving from Lagrange Multipliers แล้วกดปุ่ม Calculate จะแสดงผลเฉลยดังแสดงได้ดังรูป



รูปที่ 4.15 แสดงผลเฉลย

สำหรับวิธี Lagrange Multipliers หากต้องการคำนวณฟังก์ชันอื่นให้ทำการ Clear ค่าในทุกช่อง แล้วทำการใส่ฟังก์ชันใหม่และดำเนินการตามเดิมได้เลย

บทที่ 5
การวิจารณ์หรืออภิปรายผล

ผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาและทำการสร้างโปรแกรมสำเร็จรูปในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร โดยวิธี The Second-Partials Test และวิธี Lagrange Multipliers สามารถประเมินผลได้ดังนี้

5.1 ส่งเสริมให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจในเรื่องการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร

การเรียนการสอนในวิชาแคลคูลัส นักศึกษาจะต้องทำความเข้าใจในเรื่องการหาจุดวิกฤตก่อน แล้วจึงนำจุดวิกฤตนั้นมาหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร เนื่องจากขั้นตอนในการคำนวณค่อนข้างจะยากและใช้เวลานาน ด้วยสาเหตุนี้จึงได้นำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอนในวิชาแคลคูลัสในเรื่องการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร ซึ่งจะทำให้นักศึกษาสามารถศึกษาและเข้าใจในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปรได้ดีมากยิ่งขึ้น

5.2 ด้านการใช้งานและความเข้าใจ

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นเป็นโปรแกรมที่ใช้งานบนระบบปฏิบัติการวินโดว์ ผู้ใช้สามารถเลือกคำสั่งการทำงานต่างๆของโปรแกรมได้โดยการใช้เมาส์ และเป็นโปรแกรมที่ง่ายต่อการใช้งานอีกด้วย

5.3 ข้อเสนอแนะที่ควรแก้ไข

1) สามารถหาวิธีการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปรด้วยวิธีอื่นๆ
2) สามารถรับฟังก์ชันอดิสัย และฟังก์ชันตรรกยะ ได้นอกเหนือจากฟังก์ชันพหุนาม
3) สามารถทำการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่มีตัวแปรมากกว่าสองตัวแปรขึ้นไปได้
4) เขียนโปรแกรมการแสดงกราฟแทนการเชื่อมต่อกับโปรแกรม Mathematica

บทที่ 6
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษที่จัดทำโปรแกรมการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร ซึ่งโปรแกรมนี้จะแสดงจุดวิกฤต ค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุด และกราฟของฟังก์ชัน โดยที่โปรแกรมนี้ได้สร้างขึ้นมาจากโปรแกรมวิชวลเบสิก 6 และแสดงกราฟบนซอฟต์แวร์ Mathematica ซึ่งได้ทำการเชื่อมต่อระหว่างโปรแกรมวิชวลเบสิก 6 และโปรแกรม Mathematica ไว้แล้ว จากนั้นจึงทำการแสดงผลบนหน้าจอข้อมูออก แต่โปรแกรมนี้มีข้อจำกัดบางอย่างเช่น จะต้องมีซอฟต์แวร์ Mathematica อยู่บนเครื่องคอมพิวเตอร์นั้น

6.2 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากปัญหาพิเศษในหัวข้อการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปรนี้เป็นส่วนหนึ่งของวิชาแคลคูลัส ดังนั้นโปรแกรมนี้จึงเหมาะที่จะนำไปใช้ในการเรียนการสอนในวิชาแคลคูลัส อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆได้หลายด้าน เช่น ด้านการผลิต การก่อสร้าง เป็นต้น

บรรณานุกรม

กิตติ ภักดีวัฒนะกุล และ จำลอง ครูอุตสาหะ. 2543. **Visual Basic 6.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพฯ : บริษัท เคทีพี คอมพ์ แอนด์ คอนซัลท์ จำกัด.

ธาริน สิทธิธรรมชารี. 2532.**Visual Basic Version 6.0.** พิมพ์ครั้งที่ 4 กรุงเทพฯ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์. **แคลคูลัส II เล่ม 1.** กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

James Stewart. **Multivariable Calculus.** 2ed California, Cole Publishing Company.

Raymond A. Barnett and Michael R. Ziegler. **Applied Calculus.** 6ed . Prentice-Hall International, Inc.

Step Wolfram. **The Mathematica Book.** 3ed. Addison-Wesley Publishing company.

ภาคผนวก

ตัวอย่างโจทย์

ตัวอย่างโจทย์

1. $f(x,y)=6-x^2-4x-y^2$
2. $f(x,y)=x^2+y^2-4x+6y+23$
3. $f(x,y)=-3x^2+2xy-2y^2+x+10y-5$
4. $f(x,y)=2x^2-2xy+3y^2-4x-8y+20$
5. $f(x,y)=xy+4x-2y+1$
6. $f(x,y)=-x^2-y^3-6x+3y+4$
7. $f(x,y)=x^2+2y^2+2xy+2x+4y+7$
8. $f(x,y)=y^3-x^2-2x-12y$
9. $f(x,y)=5x-4y+5$
10. $f(x,y)=x^3-2xy+4y$
11. Minimize x^2+y^2 on the hyperbola $xy=1$
12. Minimize xy^2 on circle $x^2+y^2=1$
13. Maximize x^2+y^2 on curve $x^4+7x^2y^2+y^4=1$
14. Maximize (or Minimize) $f(x,y)=x^2-4xy+y^2+200$

    Subject to constraint $2x+y=26$
15. Maximize (or Minimize) $f(x,y)=x^2+6xy+y^2$

    Subject to constraint $x+y=10$
16. Maximize (or Minimize) $f(x,y)=x^2+6xy+y^2$

    Subject to constraint $4x+y=18$
17. Maximize (or Minimize) $f(x,y)=x^2+4xy+y$

    Subject to constraint $x+y=12$
18. Maximize (or Minimize) $f(x,y)=x^2+2xy+y^2-3x-5y$

    Subject to constraint $x+y=18$
19. Maximize (or Minimize) $f(x,y)=-y^2+xy+x$

    Subject to constraint $2x+y=19$
20. Maximize (or Minimize) $f(x,y)=x^2-5xy+2y^2$

    Subject to constraint $3x+y=20$