สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

โปรแกรมช่วยสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยคอมพิวเตอร์

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN NUMERICAL ANALYSIS BY COMPUTER

T 047363

ทวีชัย เอื้อคณารักษ์
นิศากร วัฒนศิริพงษ์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 47363
วัน, เดือน, ปี 30 มิ.ย. 2546

.b.....
.i.....

ปัญหานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2545

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN NUMERICAL ANALYSIS BY COMPUTER

TAWEECHAI EUAKANARAK

NISAKORN WATTANASIRIPONG

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2002

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ โปรแกรมช่วยสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยคอมพิวเตอร์
COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN NUMERICAL ANALYSIS BY COMPUTER

ชื่อนักศึกษา นายทวีชัย เอื้อคณารักษ์ 42050018
นางสาวนิศากร วัฒนศิริพงษ์ 42050024

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์
ผศ.สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2545

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.สุนทร สุชาติเวชภูมิ	

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ คณิตศาสตร์ช่วยสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยใช้คอมพิวเตอร์

ชื่อนักศึกษา นายทวีชัย เอื้อคณารักษ์ 42050018

นางสาวนิศากร วัฒนศิริพงษ์ 42050024

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2545

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ผศ.สุนทร สุชาติเวชภูมิ

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของโครงงานปัญหาพิเศษนี้คือ การสร้างโปรแกรมช่วยสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลข เริ่มต้นด้วยการจัดทำบทเรียนโดยแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนเนื้อหาและแบบฝึกหัด ขั้นตอนต่อไปคือการพัฒนาโปรแกรมโดยใช้ Microsoft Visual Basic เวอร์ชัน 6 และขั้นตอนสุดท้ายคือการประเมินผล ทดสอบ และแก้ไขความผิดพลาดของโปรแกรม ซึ่งโปรแกรมช่วยสอนนี้สามารถเป็นแนวทางแก่นักศึกษาที่กำลังศึกษาในหัวข้อนี้ และผู้ที่สนใจที่จะศึกษาและพัฒนาโปรแกรมต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN NUMERICAL ANALYSIS BY COMPUTER
Students	Mr. Taweechai Euakanarak 42050018
	Miss Nisakorn Wattanasiripong 42050024
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2002
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Pongpan Rattanathanawan
	Asst.Prof.Suthorn Suchatvehapoom

ABSTRACT

The purpose of this special topic is to building CAI in " Numerical Analysis ". The first session is designed courseware. There are two modules that are tutorial and practice in program. The next step, application development by using Microsoft Visual Basic 6.0. The final step is evaluating, testing and debugging program. Besides, this software is very useful for student and user who studying in this topic and also for anybody who want to develop this software in the future.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องคณิตศาสตร์ช่วยสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยคอมพิวเตอร์สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งทางด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และอำนวยความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษนี้

นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2546

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....I

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....II

กิตติกรรมประกาศ.....III

สารบัญ.....IV

สารบัญรูป.....VII

บทที่ 1 บทนำ.....1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....1

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ.....1

1.3 ขอบเขตของการศึกษา.....1

1.4 ขั้นตอนการศึกษา.....2

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....2

บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง.....3

2.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....3

2.1.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) คืออะไร.....3

2.1.2 คุณลักษณะสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI).....4

2.1.3 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....6

2.1.4 ประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....8

2.1.5 คุณค่าทางการศึกษาของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....8

2.1.6 ข้อพึงระวังของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....9

2.2 ความคลาดเคลื่อน.....10

2.2.1 ความผิดพลาดหรือเผลอเรอ.....10

2.2.2 ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย.....11

2.2.3 ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ.....11

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

2.2.4 ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์.....11
2.3 ขั้นตอนการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข.....12
2.4 การหารากของสมการไม่เชิงเส้น.....13
2.4.1 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง.....13
2.4.2 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่.....15
2.4.3 ระเบียบวิธีเซแคนต์.....18
2.4.4 ระเบียบวิธีของนิวตัน.....20
2.5 การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนาม.....22
2.5.1 การประมาณค่าแบบลากรองจ์.....23
2.5.2 การประมาณค่าแบบนิวตัน.....25
2.6 การหาค่าอินทิเกรตและค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข.....29
2.6.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู.....30
2.6.2 ระเบียบวิธีของรอมเบิร์ก.....32
2.6.3 การหาค่าอนุพันธ์.....37
2.7 การสร้างภาพกราฟิกเบื้องต้น.....42
2.7.1 การสร้างจุด.....42
2.7.2 อัตราส่วนแอสเป็กต์.....43
2.7.3 การวาดเส้นตรง.....44

บทที่ 3 การออกแบบระบบและหลักการที่เกี่ยวข้อง.....50
3.1 การออกแบบ.....50
3.2 ระบบงาน.....50
3.3 แผนงานและการพัฒนาระบบ.....50
3.4 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม.....51

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่ 4 ผลการทดลอง.....52

4.1 การทดลองและผลการทดลอง.....52

4.1.1 การทดลองที่1.....54

4.1.2 การทดลองที่2.....63

4.1.3 การทดลองที่3.....71

4.1.4 การทดลองที่4.....76

4.2 การแสดงข้อผิดพลาดของโปรแกรม.....78

4.2.1 เกิดจากการป้อนตัวอักษร.....78

4.2.2 เกิดจากไม่ได้ใส่ค่าเอฟซาลอน.....79

4.2.3 เกิดจากค่ารากไม่ได้อยู่ในช่วงที่กำหนด.....80

4.2.4 เตือนให้ใส่ค่าที่ต้องการประมาณให้อยู่ในช่วง x.....81

4.2.5 เตือนเมื่อป้อนค่าข้อมูลครบแล้ว.....82

4.2.6 เกิดจากป้อนจำนวนข้อมูลเกิน 8.....83

4.2.7 เกิดจากยังไม่ได้ป้อนค่าข้อมูล.....84

4.2.8 เกิดจากป้อนค่าจำนวนข้อมูลเป็น 0.....85

4.2.9 เกิดจากป้อนค่าจำนวนข้อมูลเป็นเลขคู่เมื่อเลือกวิธี Center.....86

บทที่ 5 สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ.....87

5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ.....87

5.2 สรุปผล.....87

5.3 ข้อจำกัดของโปรแกรม.....87

5.4 ข้อเสนอแนะ.....88

บรรณานุกรม.....89

ภาคผนวก.....90

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

2.1 ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงเพื่อใช้หารากของสมการ f(x) = 0.....13
2.2 ความเป็นไปได้ของ f(c)ที่จะมีค่าเป็นบวกหรือลบนั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งของ aและb.....14
2.3 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ สำหรับการหารากของสมการ f(x) = 0.....15
2.4 ความเป็นไปได้ของ f(X1)ที่จะมีค่าเป็นบวกหรือลบนั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งของ aและb.....17
2.5 ระเบียบวิธีเซแคนต์.....19
2.6 ระเบียบวิธีของนิวตัน.....21
2.7 การแทนพื้นที่ใต้เส้นโค้งด้วยรูปสี่เหลี่ยมคางหมู.....30
2.8 ความหมายของค่าอนุพันธ์โดยประมาณและค่าอนุพันธ์แท้จริง.....37
2.9 การเปรียบเทียบระหว่างค่าอนุพันธ์แม่นตรงกับค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบต่าง ๆ.....39
2.10 ระบบพิกัดของจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์เทียบกับระบบพิกัดที่ใช้ในการเขียนกราฟ.....43
2.11 ปรากฏการณ์วนรอบ.....43
2.12 อัตราส่วนแอสเป็กต์ซึ่งมีค่าเป็น1.33.....44
2.13 พิกเซลที่ใช้สำหรับประกอบเป็นเส้นตรง AB.....45
2.14 เปรียบเทียบภาพเส้นตรงที่ได้จากจอภาพที่มีความละเอียดต่างกัน.....45
2.15 เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่ง.....46
3.1 ขั้นตอนการทำงานของระบบ.....51
4.1 แสดงหน้าจอแรกของโปรแกรม.....52
4.2 แสดงการเลือกเรื่องคำแนะนำในการใช้โปรแกรม.....53
4.3 แสดงการเลือกเรื่องการหารากของสมการไม่เชิงเส้น.....54
4.4 แสดงวิธีการหารากของสมการไม่เชิงเส้น.....55
4.5 แสดงเนื้อหาเรื่อง Bisection.....56
4.6 แสดงการเลือกวิธีคำนวณในหน้าตัวอย่างของการหาราก.....57
4.7 แสดงการหารากของสมการไม่เชิงเส้น.....58
4.8 แสดงการเลือกรากของสมการไม่เชิงเส้น.....59
4.9 แสดงการวาดกราฟ $f(x) = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130$.....60
4.10 แสดงแบบทดสอบเรื่อง Bisection.....61

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
4.11	แสดงการตรวจคำตอบของแบบทดสอบ Bisection	62
4.12	แสดงการเลือกเรื่องการประมาณค่าในช่วง	63
4.13	แสดงวิธีเรื่องการประมาณค่าในช่วง	64
4.14	แสดงหน้าจอตัวอย่างลากรองจ์	65
4.15	แสดงการรับค่าของตัวอย่างลากรองจ์	66
4.16	แสดงคำตอบของตัวอย่างลากรองจ์	67
4.17	แสดงตัวอย่างการประมาณค่าในช่วงวิธีนิวตัน	68
4.18	แสดงการใส่ข้อมูลการประมาณค่าในช่วงวิธีนิวตัน	69
4.19	แสดงคำตอบการประมาณค่าในช่วงวิธีนิวตัน	70
4.20	แสดงการเลือกเรื่องการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข	71
4.21	แสดงการป้อนฟังก์ชันในตัวอย่างเรื่องกฎสี่เหลี่ยมคางหมู	72
4.22	แสดงการหาค่าอินทิเกรตโดยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู	73
4.23	แสดงการป้อนฟังก์ชันในตัวอย่างเรื่องรอมเบิร์ก	74
4.24	แสดงการหาค่าอินทิเกรตโดยวิธีรอมเบิร์ก	75
4.25	แสดงการป้อนข้อมูลเรื่องการหาอนุพันธ์วิธีนิวตัน	76
4.26	แสดงการหาค่าอนุพันธ์วิธีนิวตัน	77
4.27	แสดงข้อผิดพลาดเมื่อป้อนตัวอักษร	78
4.28	แสดงข้อผิดพลาดเมื่อไม่ได้ป้อนค่าเอฟซาลอน	79
4.29	แสดงข้อผิดพลาดเมื่อค่ารากไม่อยู่ในช่วง	80
4.30	แสดงคำเตือนให้ป้อนค่าที่ต้องการประมาณให้อยู่ในช่วง x	81
4.31	แสดงคำเตือนเมื่อป้อนข้อมูลครบแล้ว	82
4.32	แสดงข้อผิดพลาดเมื่อป้อนจำนวนข้อมูลเกิน 8	83
4.33	แสดงข้อผิดพลาดเมื่อยังไม่ได้ป้อนค่าใด ๆ	84
4.34	แสดงข้อผิดพลาดเมื่อป้อนจำนวนข้อมูลเป็น	85
4.35	แสดงข้อผิดพลาดเมื่อป้อนจำนวนข้อมูลเป็นเลขคู่เมื่อเลือกวิธี Center	86

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วิชาคณิตศาสตร์ จัดว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญของสาขาวิชาต่างๆ สำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขก็จัดเป็นหนึ่งในวิชานี้ด้วยเช่นกัน เนื่องจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นวิชาพื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ในการศึกษาระเบียบวิธีการคำนวณขั้นสูงต่อไป เช่น การหารากของสมการไม่เชิงเส้น การประมาณค่าในช่วง และการหาค่าอินทิเกรตและค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข ฯลฯ เพื่อประกอบกับการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านการคำนวณในปัจจุบัน ผู้ใช้จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานของการคำนวณ จึงจะสามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างๆได้ถูกต้องอย่างมีประสิทธิภาพ นักเรียนและนักศึกษารวมทั้งผู้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้ จึงเริ่มตระหนักถึงความสำคัญของความรู้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อใช้เป็นสื่อการเรียนการสอนเรื่องการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

1.2.2 เพื่อให้ผู้ใช้สามารถศึกษาเนื้อหาเรื่องการวิเคราะห์เชิงตัวเลขได้ด้วยตนเอง

1.2.3 เพื่อให้ผู้ใช้สามารถนำความรู้เรื่องการวิเคราะห์เชิงตัวเลขไปใช้แก้ปัญหาในเรื่องฟิสิกส์และวิศวกรรมได้

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1.3.1 จัดทำสื่อการสอนเรื่องการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

1.3.2 ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

1.3.3 จัดทำตัวอย่างและแบบทดสอบเกี่ยวกับเนื้อหาในบทเรียน

1.4 ขั้นตอนการศึกษา

1.4.1 กำหนดขอบเขตในเรื่องการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ต้องการศึกษา

1.4.2 ค้นคว้าและรวบรวมเนื้อหาที่เกี่ยวข้องตามขอบเขตที่ได้กำหนดไว้ในขั้นต้น

1.4.3 ศึกษาทฤษฎีและเนื้อหาที่ได้รวบรวมมา

1.4.4 ทำการออกแบบและเขียนโปรแกรมโดยใช้เนื้อหาที่ได้ศึกษามาแล้ว เพื่อที่จะแสดงการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

1.4.5 ทดสอบความถูกต้องการทำงานของโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4.6 สรุป ประเมินผลและจัดทำข้อเสนอแนะ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

1.5.2 ช่วยฝึกฝนความชำนาญในการแก้ปัญหาเรื่องการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

1.5.3 ได้โปรแกรมสำเร็จรูปที่สะดวกและง่ายต่อการใช้งาน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

2.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.1.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอน(CAI) คืออะไร

คนส่วนใหญ่มักจะรู้จักคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในชื่อของ CAI ซึ่งย่อมาจากคำในภาษาอังกฤษว่า Computer – Assisted หรือ –Aided Instruction คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) หมายถึง สื่อการเรียนการสอนทางคอมพิวเตอร์ในการนำเสนอสื่อประสมอันได้แก่ ข้อความ ภาพนิ่ง กราฟิก แผนภูมิ กราฟ ภาพเคลื่อนไหว วีดีทัศน์และเสียง เพื่อถ่ายทอดเนื้อหาบทเรียนหรือองค์ความรู้ในลักษณะที่ใกล้เคียงกับการสอนจริงในห้องเรียนมากที่สุด โดยที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะนำเสนอเนื้อหาที่ละหน้าจอภาพ โดยเนื้อหาความรู้ในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะได้รับการถ่ายทอดในลักษณะที่แตกต่างกันออกไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับธรรมชาติและโครงสร้างของเนื้อหา โดยมีเป้าหมายสำคัญก็คือ การได้มาซึ่งคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สามารถดึงดูดความสนใจของผู้เรียนและกระตุ้นผู้เรียนให้เกิดความต้องการที่จะเรียนรู้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นตัวอย่างที่ดีของสื่อการศึกษาในลักษณะตัวต่อตัวซึ่งผู้เรียนเกิดการเรียนรู้จากการมีปฏิสัมพันธ์หรือการโต้ตอบพร้อมทั้งการได้รับผลป้อนกลับอย่างสม่ำเสมอกับเนื้อหาและกิจกรรมต่างๆ ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่เกี่ยวเนื่องกับการเรียน นอกจากนี้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนยังเป็นสื่อที่สามารถตอบสนองความแตกต่างระหว่างผู้เรียนได้เป็นอย่างดีรวมทั้งสามารถที่จะประเมินและตรวจสอบความเข้าใจของผู้เรียนได้ตลอดเวลา ดังนั้นผู้สอนจะสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปช่วยการสอนของตนได้อย่างมีประสิทธิภาพ เพราะมีงานวิจัยหลายชิ้นที่สนับสนุนว่า ผู้เรียนที่ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการเรียนจะใช้เวลาเพียงสองในสามของผู้เรียนที่เรียนด้วยวิธีที่สอนตามปกติ ในขณะเดียวกันผู้เรียนสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ในการเรียนด้วยตนเองโดยปราศจากข้อจำกัดทางด้านเวลาและสถานที่ในการศึกษา โดยเฉพาะผู้เรียนที่เรียนอ่อนสามารถใช้ประโยชน์จากคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการเรียนเพิ่มเติมนอกเวลาได้

เนื่องจากในขณะนี้ มีการผลิตสื่อการศึกษาทางคอมพิวเตอร์ซึ่งใช้มัลติมีเดียในการนำเสนอเนื้อหาออกเป็นจำนวนมากซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของมัลติมีเดียซีดี-รอม จนทำให้เกิดความสับสนว่า สื่อเหล่านั้นเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนหรือไม่อย่างไร สิ่งสำคัญก็คือ การเข้าใจว่าสื่อการศึกษาทางคอมพิวเตอร์ทั้งหมดไม่ใช่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเนื่องจากหากพิจารณาอย่างละเอียดแล้ว มีการสื่อสารทางคอมพิวเตอร์อยู่จำนวนมากที่จัดว่าเป็นแค่สื่อที่ใช้ในการนำเสนอ (Presentation Media) เนื่องจากสื่อการศึกษาเหล่านั้นต่างขาดคุณลักษณะสำคัญ 4 ประการของ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สมบูรณ์ ซึ่งก็ได้แก่ สารสนเทศ,ความแตกต่างระหว่างบุคคล,การโต้ตอบ, ผลป้อนกลับโดยทันที

2.1.2 **คุณลักษณะสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**(CAI)

คุณลักษณะที่เป็นองค์ประกอบสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน 4 ประการ ได้แก่

2.1.2.1 **สารสนเทศ** (Information)

สารสนเทศ (Information) ในที่นี้หมายถึง เนื้อหาสาระที่ได้รับการเรียบเรียงแล้วเป็นอย่างดีซึ่งทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้หรือได้รับทักษะอย่างหนึ่งอย่างใดตามที่ผู้สร้างได้กำหนดวัตถุประสงค์ไว้ โดยการนำเสนอเนื้อหานี้อาจเป็นการนำเสนอในรูปแบบต่างๆ ซึ่งอาจจะเป็นลักษณะทางตรงหรือทางอ้อมก็ได้ โดยลักษณะทางตรงก็ได้แก่การนำเสนอเนื้อหาในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์ ส่วนลักษณะทางอ้อมก็ได้แก่ การนำเสนอเนื้อหาในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกม สารสนเทศเป็นคุณลักษณะสำคัญประการหนึ่งของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ช่วยแยกความแตกต่างระหว่างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกม ออกจากซอฟต์แวร์เกมซึ่งมุ่งเน้นแต่ความบันเทิงและความเพลิดเพลินของผู้ใช้โดยไม่คำนึงถึงการให้ความรู้หรือทักษะแก่ผู้เรียนแต่อย่างใดเช่น ซอฟต์แวร์เกมสตรีทไฟท์เตอร์ เป็นต้น

2.1.2.2 **ความแตกต่างระหว่างบุคคล** (Individualization)

การตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคลคือลักษณะสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน บุคคลแต่ละบุคคลมีความแตกต่างกันทางการเรียนรู้ซึ่งเกิดจากบุคคลิกภาพ สติปัญญา ความสนใจ พื้นฐานความรู้ที่แตกต่างกันออกไป (Individualization) คอมพิวเตอร์ช่วยสอนซึ่งเป็นสื่อการเรียนการสอนรายบุคคลประเภทหนึ่งจึงต้องได้รับการออกแบบให้มีลักษณะที่ตอบสนองต่อความแตกต่างส่วนบุคคลให้มากที่สุด กล่าวคือคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะต้องมีความยืดหยุ่นมากพอที่ผู้เรียนจะมีอิสระในการควบคุมการเรียนของตน รวมทั้งการเลือกรูปแบบการเรียนที่เหมาะสมกับตนได้ การควบคุมการเรียนของตนนี้ก็มีอยู่หลายลักษณะด้วยกัน ลักษณะสำคัญได้แก่

<u>การควบคุมเนื้อหา</u> การเลือกที่เรียนส่วนใด ข้ามส่วนใด ออกจากบทเรียนเมื่อใดหรือย้อนกลับมาเรียนในส่วนที่ยังไม่ได้ศึกษา เช่น มีเมนูหรือรายการที่แยกเนื้อหาตามหัวข้ออย่างชัดเจนหรือปุ่มควบคุมต่างๆ ในการสืบไปในบทเรียน

<u>การควบคุมลำดับของการเรียน</u> การเลือกที่จะเรียนส่วนใด ก่อนหลังหรือการสร้างลำดับการเรียนด้วยตนเอง เช่น ในลักษณะการเรียนเนื้อหาแบบโยงใยหรือสื่อหลายมิติ (Hypermedia) ซึ่งกำลังเป็นที่นิยมกันอยู่ในปัจจุบัน ซึ่งผู้เรียนสามารถที่กดเลือกข้อมูลที่ต้องการเรียนตามความสนใจ ความถนัดหรือตามพื้นฐานความรู้ของตนได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การควบคุมการฝึกปฏิบัติหรือการทดสอบ ความต้องการที่จะฝึกปฏิบัติหรือทำแบบทดสอบหรือไม่ หากทำจะทำมากน้อยเพียงใด เช่น การใช้ปุ่มควบคุมต่างๆ จัดหาไว้ทุกหน้าที่จำเป็น เช่น ปุ่มเลิกทำ ปุ่มกลับไปหน้าเดิม เป็นต้น

นอกจากนี้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สมบูรณ์แบบอาจจะต้องมีการนำระบบผู้เชี่ยวชาญหรือระบบปัญญาประดิษฐ์มาประยุกต์ใช้ เพื่อที่จะสามารถตอบสนองต่อความแตกต่างของผู้เรียนได้อย่างมีประ-สิทธิภาพมากขึ้น

2.1.2.3 **การโต้ตอบ** (Interaction)

การโต้ตอบ (Interaction) ในที่นี้คือ การมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างผู้เรียนกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนการเรียนการสอนรูปแบบที่ดีที่สุดก็คือการเรียนการสอนในลักษณะที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มี
ปฏิสัมพันธ์กับผู้สอนได้มากที่สุดนอกจากนี้การที่มนุษย์สามารถเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้นหาใช่เกิดขึ้นเพียงจากการสังเกตเท่านั้น หากจะต้องมีการโต้ตอบหรือปฏิสัมพันธ์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการได้มี
ปฏิสัมพันธ์กับผู้สอน ดังนั้นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ได้รับการออกแบบมาอย่างดีจะต้องเอื้ออำนวยให้เกิดการตอบโต้ระหว่างผู้เรียนกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอย่างต่อเนื่องและตลอดทั้งบทเรียนการอนุญาติให้ผู้เรียนเพียงแค่การคลิกเปลี่ยนหน้าจอไปเรื่อยๆ ทีละหน้าไม่ถือว่าเป็นปฏิสัมพันธ์ที่เพียงพอสำหรับการเรียนรู้

อย่างไรก็ดีซอฟต์แวร์มากมายที่โฆษณาตนเองว่าเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแต่เมื่อเปิดใช้กันจริงๆ แล้ว ไม่น่าจะเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้เลย ทั้งนี้ก็เพราะการที่ผู้สร้างไม่ได้นำคุณลักษณะที่สำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในส่วนของปฏิสัมพันธ์นี้ไปประยุกค์ใช้ในการออกแบบซอฟต์แวร์ทางการศึกษาที่ได้รับการออกแบบให้ผู้ใช้กดเมาส์เพื่อพลิกหน้าไปเรื่อยๆ นั้นไม่ถือว่าเป็นการปฏิสัมพันธ์โต้ตอบระหว่างผู้เรียนและผู้สอนที่มีความหมาย (Meaningful) การที่จะทำให้เกิดปฏิสัมพันธ์โต้ตอบระหว่างผู้เรียนและผู้สอน ผู้สร้างซอฟต์แวร์จำเป็นต้องใช้เวลาในส่วนของการสร้างความคิดวิเคราะห์และสร้างสรรค์เพื่อให้ได้มาซึ่งกิจกรรมการเรียน (Activity) หรืองาน (task) ที่ก่อให้เกิดปฏิสัมพันธ์ซึ่งมีความเกี่ยวเนื่องกับบทเรียนและเอื้ออำนวยให้เกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.1.2.4 **การให้ผลป้อนกลับโดยทันที** (Immediate Feedback)

ลักษณะที่ขาดไม่ได้อีกประการหนึ่งของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนก็คือ การให้ผลป้อนกลับโดยทันที ตามแนวคิดของสกินเนอร์ (Skinner) แล้ว ผลป้อนกลับหรือการให้คำตอบนี้ถือเป็นการเสริมแรงอย่างหนึ่ง การให้ผลป้อนกลับแก่ผู้เรียนในทันทีหมายรวมไปถึงการที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สมบูรณ์จะต้องมีการทดสอบหรือประเมินความเข้าใจของผู้เรียนในเนื้อหาหรือทักษะต่างๆ ตาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้ด้วย ซึ่งการให้ผลป้อนกลับแก่ผู้เรียนเป็นวิธีที่อนุญาตให้ผู้เรียนสามารถตรวจสอบการเรียนของตนได้ ทั้งนี้มีงานวิจัยหลายชิ้นซึ่งสนับสนุนว่าการให้ผลป้อนกลับแก่ผู้เรียนจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนได้เป็นอย่างดี ความสามารถในการให้ผลป้อนกลับโดยทันทีของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้เองที่ถือได้ว่าเป็นจุดเด่นหรือข้อได้เปรียบประการสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเทียบกับสื่อประเภทอื่นๆไม่ว่าจะเป็นสื่อสิ่งพิมพ์หรือสื่อโสตทัศนวัสดุแล้ว เนื่องจากสื่ออื่นๆ นั้นไม่สามารถที่จะประเมินผลการเรียนของผู้เรียนพร้อมกลับการให้ผลป้อนกลับโดยฉับพลันเช่นเดียวกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ลักษณะของการให้ผลป้อนกลับนี้เป็นสิ่งที่ทำให้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนแตกต่างไปจากมัลติมีเดียซีดีรอมส่วนใหญ่ซึ่งได้มีการรวบรวมและนำเสนอเนื้อหาเกี่ยวกับเรื่องราวของสิ่งต่างๆ หรือเหตุการณ์สำคัญต่างๆ ฯลฯ แต่มัลติมีเดียซีดีรอมไม่ได้มีการประเมินความเข้าใจของผู้ใช้ แต่อย่างใดไม่ว่าจะอยู่ในรูปแบบทดสอบแบบฝึกหัดหรือการตรวจสอบความเข้าใจในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งซึ่งทำให้มัลติมีเดียซีดีรอมเหล่านั้นถูกจัดว่าเป็นสื่อสำหรับการนำเสนอ (Presentation Media) ไม่ใช่คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.1.3 **ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสามารถแบ่งได้เป็น 5 ประเภทด้วยกัน คือ ประเภทติวเตอร์ ประเภทแบบฝึกหัด ประเภทเกม ประเภทการจำลองและประเภทแบบทดสอบ

2.1.3.1 **คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์** คือบทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งนำเสนอเนื้อหาแก่ผู้เรียน ไม่ว่าจะเป็นเนื้อหาใหม่หรือการทบทวนเนื้อหาเดิมก็ตาม ส่วนใหญ่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์จะมีแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัด เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนอยู่ด้วยอย่างไรก็ตาม ผู้เรียนมีอิสระพอที่จะเลือกตัดสินใจว่าจะทำแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัดหรือไม่อย่างไรหรือจะเลือกเรียนเนื้อหาส่วนไหน เรียงลำดับในรูปแบบใด เพราะการเรียนโดยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นผู้เรียนจะสามารถควบคุม การเรียนของตนได้ตามความต้องการของตนเอง

2.1.3.2 **คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด** คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งมุ่งเน้นให้ผู้ใช้ทำแบบฝึกหัดจนสามารถเข้าใจเนื้อหา ในบทเรียนนั้นๆ ได้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัดเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่ได้รับความนิยมมากโดยเฉพาะในระดับอุดมศึกษา ทั้งนี้เนื่องจากเป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนที่เรียนอ่อน หรือเรียนไม่ทันคนอื่นๆ ได้มีโอกาสทำความเข้าใจบทเรียนสำคัญๆได้โดยที่ครูผู้สอนไม่ต้องเสียเวลาในชั้นเรียนอธิบายเนื้อหาเดิมซ้ำแล้วซ้ำอีก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.3.3 **คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทการจำลอง** คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่การนำเสนอบทเรียนในรูปแบบของการจำลองแบบ (simulation) โดยการจำลองสถานการณ์ที่เหมือนจริงขึ้นและบังคับให้ผู้เรียนต้องตัดสินใจแก้ปัญหา (problem-solving) ในตัวบทเรียน จะมีคำแนะนำเพื่อช่วยในการตัดสินใจของผู้เรียนและแสดงผลลัพธ์ในการตัดสินใจนั้นๆ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทการจำลอง คือ การลดค่าใช้จ่ายและการลดอันตรายอันเกิดขึ้นได้จากการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นในสถานการณ์จริง

2.1.3.4 **คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกม** คือบทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ทำให้ผู้ใช้มีความสนุกสนาน เพลิดเพลิน จนลืมไปว่ากำลังเรียนอยู่ เกมคอมพิวเตอร์ทางการศึกษาเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่สำคัญประเภทหนึ่ง เนื่องจากเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่กระตุ้นให้เกิดความสนใจ ในการเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้นิยมใช้กับเด็กตั้งแต่ระดับประถมศึกษา ไปจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นอกจากนี้ยังสามารถนำมาใช้กับผู้เรียนในระดับอุดมศึกษา เพื่อเป็นการปูทางให้ผู้เรียนเกิดความรู้สึกที่ดีกับการเรียนทางคอมพิวเตอร์ได้อีกด้วย

2.1.3.5 **คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ** คือ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสร้างแบบทดสอบ การจัดการการสอบ การตรวจให้คะแนน การคำนวณผลสอบ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบคือ การที่ผู้เรียนได้รับผลป้อนกลับโดยทันที ซึ่งเป็นข้อจำกัดของการทดสอบที่ใช้กันอยู่ทั่วๆไป นอกจากนี้การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณผลทดสอบก็ยังมีความแม่นยำและรวดเร็วอีก

อย่างไรก็ตาม การแบ่งประเภทคอมพิวเตอร์ช่วยสอนออกเป็นประเภทต่างๆ 5 ประเภทนี้เป็นการแบ่งตามลักษณะเฉพาะตัวที่โดดเด่นของแต่ละประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน อย่างไรก็ตามไม่ได้หมายความว่าคอมพิวเตอร์ช่วยสอนทุกโปรแกรมที่ได้รับการพัฒนาออกมานั้นจะต้องเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทใดประเภทหนึ่งเสมอไปคอมพิวเตอร์ช่วยสอนหลายโปรแกรมด้วยกันที่เริ่มด้วยลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์และตามด้วยการนำลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทฝึกปฏิบัติเข้ามาใช้ นอกจากนี้ยังมีการนำลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมมาผสมผสานเพื่อทำการฝึกปฏิบัตินั้นมีความสนุกสนานเพลิดเพลินอีกด้วย ดังนั้นการแบ่งประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนออกเป็นประเภทต่างๆ 5 ประเภทนี้จึงเป็นเหมือนแนวคิดพื้นฐานสำหรับผู้ที่ต้องการจะพัฒนาและออกแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอย่างมีประสิทธิภาพได้ยึดถือเป็นเกณฑ์ในการแบ่งเท่านั้น ไม่ได้มุ่งหวังให้เป็นเกณฑ์ตายตัวแต่อย่างใด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.4 **ประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**

2.1.4.1 คอมพิวเตอร์เตอร์ช่วยสอนเกิดจากความพยายามในการที่จะช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนอ่อนสามารถใช้เวลานอกเวลาเรียนในการฝึกฝนทักษะและเพิ่มเติมความรู้เพื่อที่จะปรับปรุงการเรียนของตนให้ทันผู้เรียนอื่นได้ ดังนั้นผู้สอนจึงสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ช่วยในการสอนเสริมหรือสอนทบทวนการสอนปรกติในชั้นเรียนได้ โดยที่ผู้สอนไม่จำเป็นต้องเวลาในสอนซ้ำกับผู้เรียนที่ตามไม่ทันหรือจัดการสอนเพิ่มเติม

2.1.4.2 ผู้เรียนก็สามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ในการเรียนด้วยตนเองในเวลาและสถานที่ซึ่งผู้เรียนสะดวก เช่น แทนที่จะต้องเดินทางมายังชั้นเรียนตามปรกติ ผู้เรียนก็สามารถเรียนด้วยตนเองจากที่บ้านได้ นอกจากนั้นยังสามารถเรียนในเวลาใดก็ได้ที่ต้องการ เป็นต้น

2.1.4.3 ข้อได้เปรียบที่สำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนก็คือคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ได้รับการออกแบบมาอย่างดีถูกต้องตามหลักของการออกแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นสามารถที่จะจูงใจผู้เรียนให้เกิดความกระตือรือร้นที่จะเรียนและสนุกสนานไปกับการเรียนตามแนวคิดของการเรียนรู้ในปัจจุบันที่ว่า “Learning Is Fun” ซึ่งหมายถึง การเรียนรู้เป็นเรื่องสนุก

2.1.5 **คุณค่าทางการศึกษาของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนไม่ใช่สื่อการศึกษาใหม่แต่อย่างใด ในสหรัฐอเมริกานั้นเป็นเวลากว่า 3 ทศวรรษแล้วที่ได้มีความพยายามในการนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเข้ามาช่วยในการเรียนการสอน สำหรับประเทศไทยก็เริ่มมีการใช้มาประมาณ 10 กว่าปีได้แล้ว สาเหตุที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้รับความนิยมเรื่อยมาและมีแนวโน้มที่จะเป็นสื่อการศึกษาที่สำคัญต่อไปในอนาคตก็เนื่องจากการที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีคุณค่าทางการศึกษา อีกนัยหนึ่งก็คือ การที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสามารถเข้ามาช่วยการแก้ทางการศึกษาได้นั้นเอง ปัญหาที่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนสามารถเข้ามาช่วยแก้ได้เป็นอย่างดี ได้แก่

2.1.5.1 **ปัญหาการสอนแบบตัวต่อตัว**

ในปัจจุบันด้วยอัตราส่วนของครูต่อนักเรียนที่สูงมาก การสอนแบบตัวต่อตัวในชั้นเรียนปกติเป็นสิ่งที่เป็นไปไม่ได้เลยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงเปรียบเสมือนทางเลือกใหม่ที่เปิดโกาสให้ผู้เรียนได้มีปฏิสัมพันธ์หรือมีการโต้ตอบกับผู้สอนได้มากและผู้สอนก็สามารถตอบสนองความต้องการของการผู้เรียนได้ทันที

2.1.5.2 **ปัญหาเรื่องภูมิหลังที่แตกต่างกันของผู้เรียน**

ผู้เรียนแต่ละคนย่อมที่จะมีพื้นฐานความรู้ซึ่งแตกต่างกันออกไปคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถศึกษาตามความรู้ความสามารถของตน โดยการเลือกลักษณะและรูปแบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเรียนที่เหมาะสมกับตนได้ เช่น ความเร็วช้าของการเรียน เนื้อหาและลำดับของการเรียน เป็นต้น

2.1.5.3 **ปัญหาการขาดแคลนเวลา**

ผู้สอนมักจะประสบกับปัญหาการมีเวลาไม่เพียงพอในการทำงาน ดังนั้นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงเป็นทางเลือกอีกทางที่น่าสนใจเนื่องจากมีงานวิจัยหลายชิ้นพบว่าเมื่อเปรียบเทียบการสอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับการสอนด้วยวิธีปกติแล้ว การสอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเข้าช่วยนั้น จะใช้เวลาเพียง 2 ใน 3 เท่าของการสอนด้วยวิธีปกติเท่านั้น

2.1.5.4 **ปัญหาการขาดแคลนผู้เชี่ยวชาญ**

สถานศึกษาที่อยู่ห่างไกลจากชุมชนมักจะประสบปัญหาการขาดแคลนครูผู้สอนดังนั้น คอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงเป็นทางออกให้ผู้เรียนได้มีโอกาสศึกษาจากคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้ นอกจากนี้สำหรับสถานศึกษาที่ขาดแคลนผู้เชี่ยวชาญเฉพาะด้านนั้น ก็ยังสามารถที่จะนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ช่วยสอนได้ โดยในขณะเดียวกันผู้เชี่ยวชาญเองแทนที่จะต้องเดินทางไปสอนหรือเผยแพร่ความรู้ยังสถานศึกษาต่าง ๆ ก็สามารถถ่ายทอดความรู้ลงในคอมพิวเตอร์ช่วยสอนและเผยแพร่ให้แก่ผู้เรียนที่ศึกษาอยู่ในสถานศึกษาอื่น ๆ ได้ เพราะคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นรูปแบบการสอนที่พร้อมจะทำงานอย่างต่อเนื่องและตลอดเวลา

2.1.6 **ข้อพึงระวังของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน**

แม้จะดูเหมือนว่าคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเต็มไปด้วยประโยชน์มากมาย แต่การนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้อาจเป็นในลักษณะของดาบสองคมได้เช่นกัน กล่าวคือ หากไม่ได้มีการวางแผนให้รอบคอบก่อนนำไปใช้นั้นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนก่อให้เกิดโทษได้ ตัวอย่างเช่น การเพียงแต่กำหนดให้ผู้เรียนไปใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยที่ไม่ได้มีการเตรียมพร้อมใดๆ แก่ผู้เรียนเสียก่อน (เช่น การจัดหาความรู้พื้นฐานที่จำเป็นก่อนการใช้โปรแกรม เป็นต้น) อาจส่งให้เกิดผลลบต่อการเรียนของผู้เรียนแทนการเรียนรู้ได้ ในกรณีนี้ผู้สอนจึงจำเป็นต้องมีการเตรียมวางแผนการนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้อย่างเหมาะสมด้วย นอกจากการวางแผนในการนำไปใช้แล้ว การผลิตคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (หรือการเลือกสรรคอมพิวเตอร์ช่วยสอน) ที่ได้มาตราฐานไว้ใช้งานเป็นสิ่งสำคัญมาก เพราะคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ไม่ได้รับการออกแบบอย่างเหมาะสมตามหลักทางจิตวิทยาและทฤษฎีการเรียนรู้ เช่น คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่มีกิจกรรมที่ให้ผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์กับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนน้อยเกินไป หรือการที่กิจกรรมที่มีไม่สร้างสรรค์ ไม่เอื้ออำนวยให้เกิดการเรียนรู้ในผู้เรียน หรือการที่โครงสร้างของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไม่ยืดหยุ่นพอสำหรับผู้เรียนในการควบคุมการเรียนของตนเองได้จะสามารถทำให้ผู้เรียนรู้สึกเบื่อหน่าย และไม่ต้องการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นๆ อีกต่อไปและทำให้เกิดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนในแง่ลบแทน ยิ่งไปกว่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผู้สนใจสร้างควรที่จะคำนึงไว้ด้วยว่าการผลิตคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ได้มาตราฐานนั้นต้องใช้เวลานานพอสมควรจากงานวิจัยพบว่าคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ออกแบบให้ผู้เรียนใช้เวลาในการเรียนประมาณ 1คาบนั้นจะต้องใช้เวลาในการผลิตประมาณ 60 – 100 ชั่วโมงเลยทีเดียว นอกจากเวลาในการผลิตแล้วค่าใช้จ่ายในการผลิตสื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนับว่าสูงเมื่อเปรียบเทียบกับสื่อประเภทอื่นๆ เช่น สื่อสิ่งพิมพ์หรือ สื่อโสตทัศนวัสดุต่างๆ ดังนั้นผู้สนใจในการสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงต้องใช้เวลาคิดพิจารณาในช่วงของการออกแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนให้มากทั้งนี้เพื่อให้ได้มาซึ่งงานที่คุ้มค่ากับเวลาและค่าใช้จ่ายที่ใช้ไป

2.2 ความคลาดเคลื่อน

ความคลาดเคลื่อนจากการใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขแก้ปัญหาต่างๆ เกิดขึ้นได้จากสาเหตุหลายชนิด ซึ่งจะได้กล่าวถึงสาเหตุของความคลาดเคลื่อนแต่ละชนิดทีละชนิด รวมถึงบางชนิดที่เกิดก่อนที่จะใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเข้าแก้ปัญหาด้วย

2.2.1 ความผิดพลาดหรือเผลอเรอ

ความผิดพลาดจากตัวผู้แก้ปัญหาเอง เช่น ใส่เครื่องหมายเชิงคณิตศาสตร์ผิด ลอกข้อมูลผิด เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ผิด วัดปริมาณต่างๆ (ความยาว ปริมาตร อุณหภูมิ ความดัน ฯลฯ)

ความผิดพลาดหรือเผลอเรอจะแก้ไขได้โดยตรวจสอบอย่างละเอียดและรอบคอบหลายๆ ครั้งจนแน่ใจว่าไม่มีความผิดพลาดหลงเหลืออยู่อีก

หลายครั้งเมื่อได้ผลเฉลยที่ไม่เป็นไปตามที่คาดหมายไว้ หรือไม่เป็นไปตามทฤษฎีหรือการทดลอง และไม่สามารถหาสาเหตุของความคลาดเคลื่อนชนิดอื่นได้ ความคลาดเคลื่อนนี้มักจะเป็นความคลาดเคลื่อนจากความผิดพลาดหรือเผลอเรอ เมื่อตรวจสอบอย่างละเอียดและรอบคอบอีกครั้งมักจะพบที่ผิดพลาดเสมอ

ตัวอย่างความผิดพลาดหรือเผลอเรอ เช่น

- เขียนรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์จาก $y' = e^x \cosh y$ เป็น $y' = e^x \cos y$
- ลอกข้อมูลจากจำนวน 121.23 หรือ 12.123
- เขียนประโยคคอมพิวเตอร์จาก SQRT(B*B - 4.0*A*C) เป็น SQRT(B*B -4.0*A)*C
- ความผิดพลาดหรือเผลอเรอนี้จะรวมถึงความผิดพลาดของข้อมูล เช่น ค่าคงที่ต่างๆ ในรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากการทดลอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2 **ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย**

ความคลาดเคลื่อนจาการตัดปลายเกิดจากการเปลี่ยนรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ไปเป็นรูปแบบเชิงตัวเลข ซึ่งเป็นการกระทำทางเลขคณิตที่เป็นจำนวนจำกัด เช่นการเปลี่ยนรูปการอินทิเกรตไปเป็นการบวกจำนวน N ครั้ง เมื่อ

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

หรือการเปลี่ยนอนุกรมอนันต์เป็นอนุกรมจำกัดจำนวน M+1 พจน์นั่นคือ

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cong \sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!}$$

ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายนี้ไม่อาจจะทำให้หมดไปได้ แต่อาจจะทำให้เล็กลงหรือให้อยู่ในขนาดที่ควบคุมได้ เช่น การเพิ่มจำนวนพจน์จากตัวอย่างข้างต้นให้มากขึ้น นั่นคือเลือก N หรือ M ที่มีขนาดใหญ่พอ

2.2.3 **ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ**

ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเกิดจากการดำเนินการทางเลขคณิตแล้วเกิดจำนวนหลักของตัวเลขหรือจำนวนทศนิยมของตัวเลขมีมากเกินกว่าที่จะบันทึกลงในสิ่งที่จะบันทึกได้ เช่น เครื่องคิดเลขที่มีเลขได้ไม่เกินแปดหลัก ดังนั้น ส่วนที่เกินจะถูกตัดออกไป แต่การตัดส่วนที่เกินออกไปอาจมีวิธีการต่าง ๆ เช่น การปัดจำนวนทศนิยมแบบหนึ่งจะกระทำดังนี้ ถ้าทศนิยมตัวแรกที่จะปัดเป็นเลขที่มีค่ามากกว่า 5 จะเพิ่มค่าเลขตัวก่อนตัวที่ปัดอีกหนึ่ง ถ้าทศนิยมตัวแรกที่จะปัดเป็นเลข 5 จะเพิ่มตัวเลขตัวก่อนตัวที่จะปัดอีกหนึ่งเมื่อตัวเลขตัวที่จะปัดตัวที่สองเป็นเลขคู่ ดังนั้นจะปัด 3.1415317 เป็น 3.141532 และจะปัด 0.712453543 เป็น 0.712454 และจะปัด 4.050137574 เป็น 4.050137

ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษนี้ไม่สามารถที่จะทำให้หมดไปได้ และอาจจะไม่สามารถทำให้เล็กลงได้เลย เว้นเสียแต่จะเปลี่ยนสิ่งที่บันทึกตัวเลขใหม่ เช่น ในคอมพิวเตอร์อาจจะเปลี่ยนจากการใช้ความเที่ยงตรงชั้นเดียวไปเป็นความเที่ยงตรงสองชั้นหรือหลายชั้น

2.2.4 **ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์**

ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์เกิดจากการสร้างรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ไม่เป็นไปตามความเป็นจริงของปัญหาที่เกิดขึ้น ทั้งนี้ไม่ได้หมายถึงการสร้างรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ผิด แต่จะหมายถึงการที่ไม่สามารถสร้างรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เป็นไปตามความเป็นจริงได้ทั้งนี้เนื่องจากในทางทฤษฎีของคณิตศาสตร์จะต้องมีการตั้งสมมุติฐานต่าง ๆ ซึ่งอาจจะเป็นไปไม่ได้ในความเป็นจริง หรือในบางครั้งจะต้องตัดข้อแม้บางอย่างในความเป็นจริงออก เพื่อให้ได้รูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปแบบเชิงเส้น เพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎี หรือวิธี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้ปัญหาที่มีอยู่ และเพื่อสะดวกและง่ายต่อการแก้ปัญหา ทั้งนี้เนื่องจากรูปแบบไม่เชิงเส้น มักจะยากต่อการแก้ปัญหา

ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ไม่สามารถจะทำให้หมด หรือ เล็กลงได้เลยเว้นเสียแต่จะต้องเปลี่ยนรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ใหม่

จากสาเหตุของความคลาดเคลื่อนทั้ง 4 ชนิดที่ได้กล่าวมาแล้วจะเห็นได้ว่าอาจจะแบ่งสาเหตุความคลาดเคลื่อนได้อย่างกว้าง ๆ สองแบบคือ สาเหตุของความคลาดเคลื่อนแบบที่สามารถจัดหรือทำให้เล็กลงได้ และสาเหตุของความคลาดเคลื่อนแบบที่ไม่สามารถขจัดหรือไม่สามารถทำให้เล็กลงได้ แบบหลังนี้จะเรียกว่าความคลาดเคลื่อนฝังติด

2.3 ขั้นตอนการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

ขั้นตอนการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข แบ่งเป็นขั้นตอนต่าง ๆ ได้ดังนี้

1. กำหนดปัญหา และการจำลองแบบเชิงคณิตศาสตร์ คือการกำหนดขอบเขตของปัญหา พร้อมการแปลงปัญหาจากปรากฏการณ์ทางธรรมชาติให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้แทนปรากฏการณ์ให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริง

2. การหาผลเฉลย เมื่อได้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้ว ต้องหาผลเฉลย อาจใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้ทฤษฎีและคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ แปลงปัญหาเป็นสมการคณิตศาสตร์อย่างง่าย เพื่อช่วยให้หาผลเฉลยได้ หากวิธีการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ไม่สามารถหาคำตอบได้ ก็ต้องใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

3. สรุปรูปแบบการคำนวณ จากวิธีการหาผลเฉลยที่เลือก ต้องมีการจัดรูปแบบและลำดับการคำนวณ กำหนดเงื่อนไขการตัดสินใจต่าง ๆ อย่างมีระบบและขั้นตอนที่แน่นอน

4. เขียนขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลย เพื่ออธิบายรายละเอียดของขั้นตอนการคำนวณและการตัดสินใจต่าง ๆ ที่จำเป็นในการหาผลเฉลย ให้ชัดเจนและครบถ้วน

5. เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จากวิธีการหาผลเฉลยรวมถึงการกำหนดรูปแบบของข้อมูลการนำเข้า และรูปแบบผลลัพธ์ที่ต้องการเขียนโปรแกรมเพื่อสั่งให้คอมพิวเตอร์ทำงานตามต้องการ

6. ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม และประเมินค่าผลลัพธ์เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละวิธี วิเคราะห์ข้อดีข้อเสีย และศึกษาถึงความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้ในแต่ละวิธี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 การหารากของสมการไม่เชิงเส้น

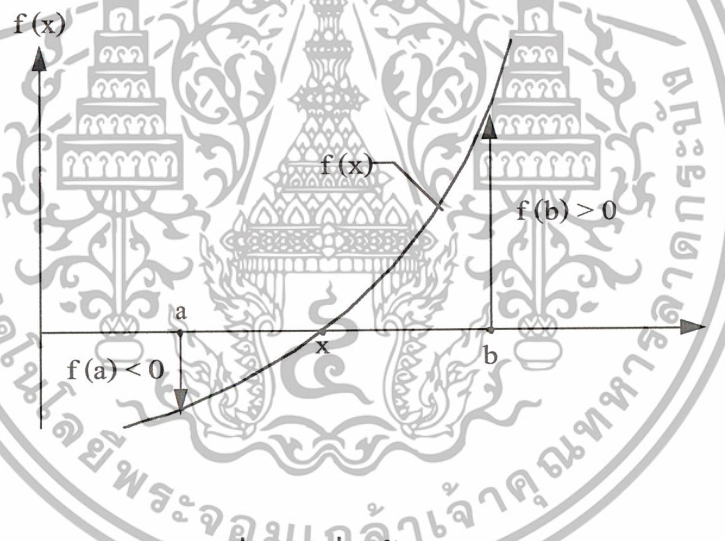
2.4.1 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (bisection method)

สมมติ f (x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นค่าลบที่ x = a เป็นค่าบวกที่ x = b ดังนั้น จะมีอย่างน้อยหนึ่งรากในช่วง (a , b) โดยการแบ่งครึ่งช่วง [a , b] ที่ x = (a+b) / 2 แล้ว f (x) จะเป็นไปได้ 3 กรณีคือ

1. f (x) = 0 ซึ่งหมายความว่า x เป็นรากของสมการ
2. f (x) < 0 ซึ่งหมายความว่า รากอยู่ในช่วง (x , b)
3. f (x) > 0 ซึ่งหมายความว่า รากอยู่ในช่วง (a , x)

ถ้าเป็นไปตามกรณีแรกก็จะได้คำตอบเลย แต่ถ้าเป็นไปตามกรณี 2 หรือ 3 ต้องแบ่งครึ่งช่วงในลักษณะเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้รากอยู่ในช่วงที่มีขนาดเล็กลงเรื่อย ๆ

การหารากของสมการโดยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง ใช้หลักความจริงที่ว่า f (a) และ f (b) มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน



รูปที่ 2.1 ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงเพื่อใช้หารากของสมการ f (x) = 0

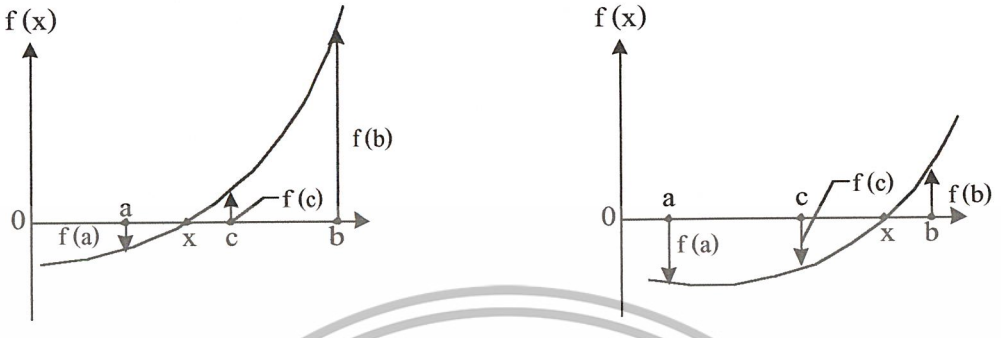
รูป 2.1 นี้แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน f (x) จากการที่มีค่าเป็นลบที่ x = a ซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายของราก x ไปเป็นค่าบวกที่ x = b ทางด้านขวาของราก x นั่นคือ เราสามารถกล่าวโดยสรุปได้ว่าหากราก x นั้นอยู่ระหว่าง a และ b ที่กำหนดให้แล้วค่าฟังก์ชัน f (a) . f (b) < 0

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าเฉลี่ย c จากค่า a และ b ที่กำหนดให้

$$c = \frac{a+b}{2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้วจึงคำนวณฟังก์ชันดังกล่าวที่ตำแหน่ง c นี้ ค่า f (c) ที่คำนวณได้จะเป็นไปได้ 2 กรณี คือ มีค่าเป็นบวก (กรณี ก) และเป็นลบ (กรณี ข) ดังแสดงในรูป 2.2



กรณี (ก) กรณี (ข)

รูปที่ 2.2 **ความเป็นไปได้ของ** f (c) **ที่จะมีค่าเป็นบวกหรือลบนั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งของ** a **และ** b

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณผลคูณระหว่าง f (c) และ f (b)

หาก f (c) . f (b) > 0 หมายถึง ผลที่เกิดขึ้นเป็นกรณี ในรูป 2.2 (ก) ดังนั้นรากจะอยู่ในช่วง $a < x < c$

หาก f (c) . f (b) < 0 หมายถึง ผลที่เกิดขึ้นเป็นกรณี ในรูป2.2 (ข) ดังนั้นรากจะอยู่ในช่วง

$c < x < b$

ขั้นตอนที่ 3 ปรับค่า a หรือ b ใหม่เพื่อบีบช่วงดังกล่าวให้แคบลง

หากผลที่เกิดขึ้นเป็นกรณี (ก) ให้ปรับค่า b ใหม่ให้เท่ากับ c

หากผลที่เกิดขึ้นเป็นกรณี (ข) ให้ปรับค่า a ใหม่ให้เท่ากับ c

ขั้นตอนที่ 4 ตรวจสอบว่าผลลัพธ์นั้นได้ลู่เข้าถึงเกณฑ์ (convergence criterian) ที่กำหนดไว้แล้วหรือไม่ $f(c) = 0, c < \varepsilon$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง [0 , 1] โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง ต้องการความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.1

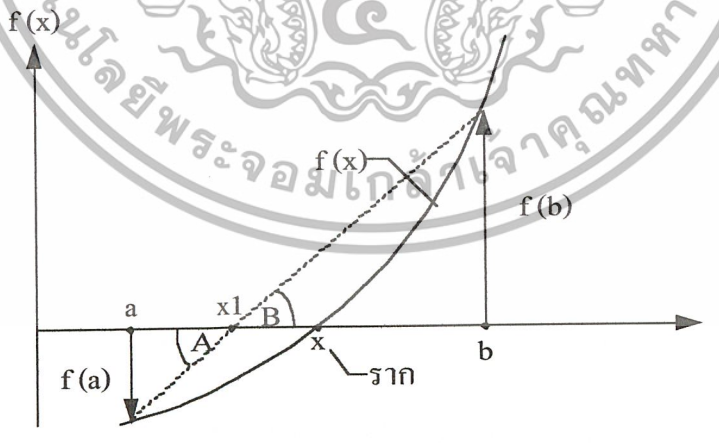
<u>วิธีทำ</u> f(0) = -1 และ f(1) = 2 แล้วเลือก a = 0 , b = 1 คำนวณค่าดังตาราง

a	b	x	f(x)
0	1	0.5	-0.59375
0.5	1	0.75	0.13574
0.5	0.75	0.625	-0.22168
0.625	0.75	0.6875	-0.04880

ดังนั้นรากของสมการอยู่ในช่วง (0.625 , 0.75) ซึ่งคือ 0.6875

2.4.2 **ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่** (false – position)

การหารากของสมการโดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ นั้นมีหลักการในทำนองเดียวกันกับระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง แต่โดยทั่วไปจะให้ประสิทธิภาพที่สูงกว่าในการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ต้องการ เนื่องจากใช้ค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง a และ b เข้ามาร่วมในการคำนวณด้วยและ f (a) . f (b) < 0



รูปที่ 2.3 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ สำหรับการหารากของสมการ f (x) = 0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หลักการของระเบียบวิธีการนี้ ก็คือ การหาค่าฟังก์ชัน f (a) และ f (b) ที่ตำแหน่ง a และ b แล้วเชื่อมค่าของฟังก์ชันทั้งสองนี้เข้าด้วยกันด้วยเส้นประดังแสดงในรูปที่ 2.3 เส้นประนี้ตัดผ่านแกน x ที่ตำแหน่ง x1 ซึ่งจะมีข้อผิดพลาดไปจากค่าของราก x ที่แท้จริง ความผิดพลาดไปจากตำแหน่งที่ถูกต้องดังกล่าว ทำให้วิธีการนี้ถูกเรียกว่าวิธีการวางตัวผิดที่ จากรูปที่ 2.3 ให้ความสัมพันธ์ที่ว่า

$$A = B \quad \text{(มุมตรงข้าม)}$$

$$\tan A = \tan B$$

$$\frac{f(b)}{b - x1} = \frac{f(a)}{a - x1} \qquad (1)$$

$$af(b) - x1f(b) = bf(a) - x1f(a)$$

$$x1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \qquad (2)$$

หลักการขั้นตอนในการคำนวณเริ่มจากการกำหนดค่า a และ b จากนั้นจึงคำนวณหาค่า x1 จากสมการ (2) แล้วจึงปรับค่า a หรือ b ใหม่ให้เหมาะสมในทำนองเดียวกันกับระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง ขั้นตอนมีดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จากค่า a และ b ที่กำหนดให้ทำการหาค่า f (a) และ f (b) จากนั้นจึงทำการคำนวณหา x1 โดยใช้สมการ (2) ค่า x1 ที่ได้จะนำไปคำนวณหาค่า f (x1) ซึ่งจะมีค่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชันที่พิจารณาอยู่นั้น รวมทั้งค่า a และ b ที่กำหนดให้ ดังแสดงในรูปที่ 2.4

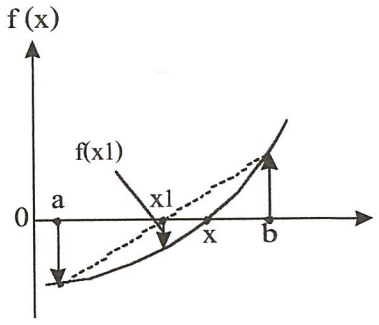
ขั้นตอนที่ 2 คำนวณผลคูณระหว่าง f (x1) และ f (b)

หาก f (x1) . f (b) < 0 หมายถึง ผลที่เกิดขึ้นเป็นกรณี ในรูป2.4 (ก) ดังนั้นรากจะอยู่ในช่วง x1 < x < b

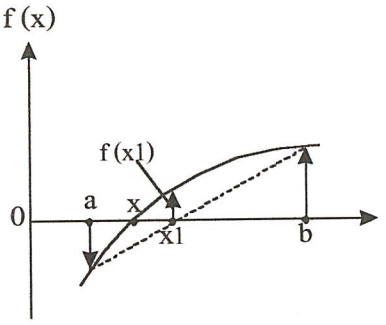
หาก f (x1) . f (b) > 0 หมายถึง ผลที่เกิดขึ้นเป็นกรณี ในรูป2.4 (ข) ดังนั้นรากจะอยู่ในช่วง a < x < x1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง



กรณี (ก) : f (x1) < 0



กรณี (ข) : f (x1) > 0

รูปที่ 2.4 **ความเป็นไปได้ของ f (x1) ที่อาจมีค่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชันและตำแหน่งของ a และ b ที่กำหนดให้**

ขั้นตอนที่ 3 ปรับค่า a หรือ b ใหม่เพื่อบีบช่วงดังกล่าวให้แคบลง

หากผลที่เกิดขึ้นเป็นกรณี ในรูป2.4 (ก) ให้ปรับค่า a ใหม่ให้เท่ากับ x1

หากผลที่เกิดขึ้นเป็นกรณี ในรูป2.4 (ข) ให้ปรับค่า b ใหม่ให้เท่ากับ x1

ขั้นตอนที่ 4 ตรวจสอบว่าผลลัพธ์ได้ลู่เข้าถึงเกณฑ์ที่กำหนดไว้แล้วหรือไม่

$$|f(x1)| < \varepsilon$$

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $x^3 - 2x - 5 = 0$ โดยระเบียบการวางตัวผิดที่ ต้องการความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.001

วิธีทำ $f(x) = 3x^2 - 2$ แล้ว $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

ดังนั้นช่วงที่รากจะมีคือ $\left(-\infty, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, +\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

47363

จากตารางจะได้ว่าสมการมีรากในช่วง (2 , 3)

x	f(x)
-2	-9
$-\sqrt{2/3}$	-2.93
0	-5
$\sqrt{2/3}$	-6.09
2	-1
3	16

เลือก a = 0 และ b = 3 โดย f(a) = -1 และ f(b) = 16

$$\overline{x}_1 = \frac{2(16)-3(-1)}{16+1} = 2.059$$

$f(\overline{x}) = -0.386$ และมีเครื่องหมายเหมือนกัน f(a) แล้วเลือก $a = \overline{x}_1$ a = 2.059 และ b = 3 โดย f(a) = -0.386 และ f(b) = 16

$$\overline{x}_2 = \frac{2.059(16)-3(-0.3866)}{16+0.386} = 2.0812$$

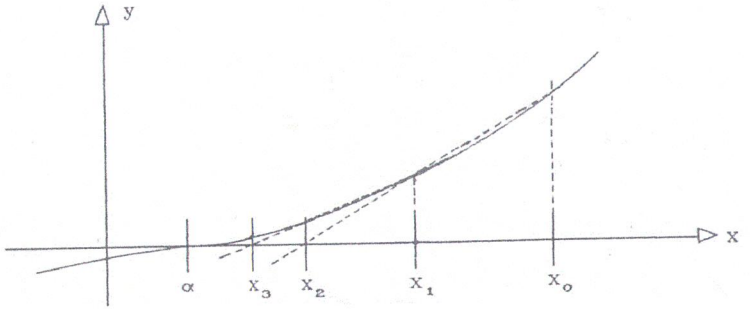
เนื่องจาก $|\overline{x}_k - a| > 0.001$ และ $|\overline{x}_k - b| > 0.001$ ต้องทำซ้ำจนกว่า $|\overline{x}_k - a| < 0.001$ หรือ $|\overline{x}_k - b| < 0.001$ แล้ว $\overline{x}_k$ คือรากของสมการตามต้องการ

2.4.3 **ระเบียบวิธีเซแคนต์** (secant method)

ระเบียบวิธีนี้คล้ายกับระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ จะมีข้อแตกต่างคือ ระเบียบวิธีเซแคนต์ ไม่บังคับเงื่อนไขว่าค่าฟังก์ชันที่จุดปลายของช่วงต้องมีเครื่องหมายต่างกัน

สมมติค่าประมาณเริ่มต้นของราก α เป็น x_0 และ x_1 ประมาณกราฟของ $y = f(x)$ ด้วยเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(x_0, f(x_0))$ และจุด $B(x_1, f(x_1))$ และให้ค่าประมาณตัวต่อไปของรากคือ x_2 เป็นค่าพิกัดที่หนึ่งของจุดที่เส้นตรงนี้ตัดกับแกน x ดังรูป 2.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.5 ระเบียบวิธีเซแคนต์

ดังนั้น $x_2 = \dfrac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

ประมาณค่า x_3 จาก x_2 และ x_1 โดย

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

ในรูปทั่วไป $$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

หรือ $$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหารากของสมการ $x^6 - x - 1 = 0$ โดยระเบียบวิธีเซแคนต์ในช่วง [1 , 2] ต้องการความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.001

<u>วิธีทำ</u> $x_0 = 2$ และ $x_1 = 1$ โดย $f(x_0) = 61$ และ $f(x_1) = -1$

$$x_2 = \frac{2(-1) - 1(61)}{-1 - 61} = 1.016$$

$f(x_2) = f(1.016) = -0.916$

$$x_3 = \frac{1(-0.916) - 1.016(-1)}{-0.916 - (-1)} = 1.19$$

$f(x_3) = 0.65$

เนื่องจาก $|x_k - x_{k-1}| > 0.001$ ดังนั้นต้องทำซ้ำจนกว่า $|x_k - x_{k-1}| < 0.001$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4.4 ระเบียบวิธีของนิวตัน

จากสูตร

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

$$= x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \qquad (5)$$

เนื่องจาก $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ คือความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ และ $(x_k, f(x_k))$ และทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยได้ว่า

$$f(c)' = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad \text{เมื่อ } x_{k-1} < c < x_k$$

ดังนั้นจาก (5) ได้ว่า $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(c)}$$

เนื่องจาก $x_{k-1} < c < x_k$ และถ้า $x_{k-1} \to x_k$ แล้ว $f'(c) \to f'(x_k)$

ดังนั้น $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

หรือพิจารณาจาก สมการเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่ $(x_0, f(x_0))$ คือ

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

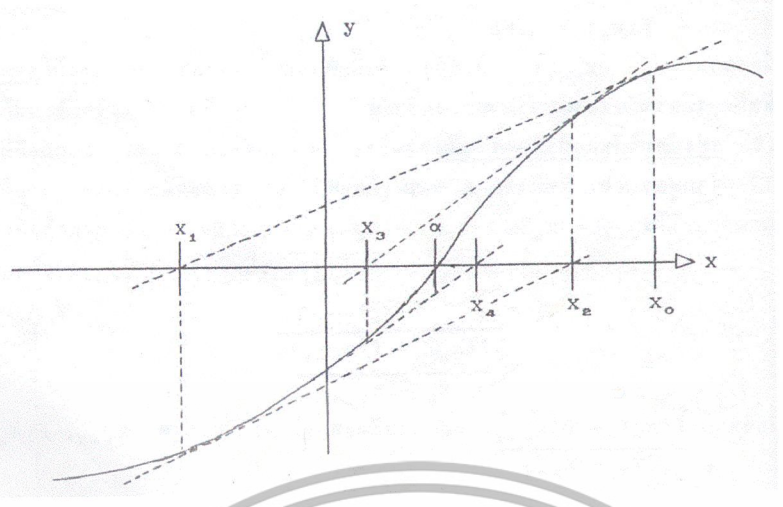
และให้จุด $(x_1, 0)$ อยู่บนเส้นสัมผัสนี้แล้ว

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

หรือ $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

นั่นคือการหารากของสมการโดยระเบียบวิธีของนิวตันนี้ เลือกค่า x_0 แล้วลากเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่ $(x_0, f(x_0))$ ให้ไปตัดแกน x ที่ $(x_1, 0)$ แล้วจึงเลือกค่า x_1 เพื่อหา x_2 ในทำนองเดียวกันจะวนทำซ้ำไปเรื่อย ๆ ดังรูปที่ 2.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.6 ระเบียบวิธีของนิวตัน

ขั้นตอนระเบียบวิธีของนิวตัน

หาผลเฉลย f(x) = 0 เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น x

<u>ข้อมูลเข้า</u> ค่าประมาณเริ่มต้น x

ค่าขอบเขตของความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ε

จำนวนครั้งสูงสุดของการทำซ้ำ N

<u>ข้อมูลออก</u> ค่าประมาณของผลเฉลย Z หรือข้อความแสดงความไม่สำเร็จ

<u>ขั้นตอน</u>

1. ให้ $i = 1$
2. ขณะที่ $i \le N$ ทำซ้ำ 3 ถึง 6
3. ให้ $z = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$
4. ถ้า $|z - x| < \varepsilon$

   แล้วแสดงผล Z และหยุด
5. ให้ $i = i + 1$
6. ให้ x = Z
7. แสดงผล “ไม่ได้ผลหลังการทำซ้ำ N ครั้ง” และหยุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหารากของสมการ $\sin(x) = x^2$ โดยระเบียบวิธีนิวตัน ต้องการความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.001

<u>วิธีทำ</u> จากตารางพบว่ารากของสมการอยู่ในช่วง [0.75 , 1]

x	$\sin(x) - x^2$
0	0.25
0	0.18
0.5	0.23
0.75	0.12
1.0	-0.16

โดยการใช้ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ ประมาณ x_0 โดย

$$x_0 = \frac{1}{-0.16-0.12}\begin{vmatrix} 0.75 & 0.12 \\ 1 & -0.16 \end{vmatrix} = 0.857$$

$f(x_0) = f(0.857) = 0.0215$

และ $f'(x) = \cos(x) - 2x$

ได้ว่า $f'(x_0) = f'(0.857) = -1.0593$

โดยระเบียบวิธีนิวตัน ได้ว่า

$$x_0 = 0.857 + \frac{0.0215}{1.0593} = 0.8773$$

$f(x_1) = f(0.8773) = -0.0007$

$f'(x_1) = f'(0.8773) = -1.1154$

ดังนั้น $$x_2 = 0.8773 - \frac{0.0007}{1.1154} = 0.8767$$

เนื่องจาก $f(x_2) = 0.0000$ ดังนั้นรากของสมการนี้คือ 0.877

2.5 การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนาม

การประมาณค่าในช่วง (Interpolation) คือวิธีการในการหาค่า และประมาณค่าของฟังก์ชัน ซึ่งกราฟผ่านเซตของจุดที่กำหนด จุดที่กำหนดนี้อาจได้มาจากการทดลองวัดค่าต่าง ๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ของปัญหาทางกายภาพ หรือมาจากฟังก์ชันที่ทราบค่าแล้ว การประมาณค่าของฟังก์ชันอาจทำได้โดย การแทนฟังก์ชันด้วยพหุนามรูปแบบต่าง ๆ

2.5.1 **การประมาณค่าแบบลากรองจ์** (The Lagrange interpolating polynomial)

กำหนดจำนวนคู่ลำดับ n+1 จำนวน (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... , (x_n, y_n) ซึ่งสมนัยกับจุดบนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ต้องการหาพหุนาม $p_n(x)$ ซึ่งประมาณค่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยที่พหุนามมีดีกรีสูงสุด n บนช่วง I ซึ่งประกอบด้วย x_0 , x_1 , x_2 , ... , x_n แล้วรูปแบบของพหุนามคือ

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n x^n$$

สมมติพหุนามที่ให้ค่าประมาณมีรูปแบบ

$$p_n(x) = y_0 b_0(x) + y_1 b_1(x) + y_2 b_2(x) + \ldots\ldots\ldots + y_n b_n(x) \qquad (1)$$

เมื่อแต่ละ $b_k(x)$ คือพหุนามดีกรี n โดยที่ (1) เป็นพหุนามที่ให้ค่าประมาณ ณ แต่ละ (x_1, y_1) แล้ว

$$p_n(x_i) = y_i \qquad (i = 0, n) \qquad (2)$$

โดยการแทน (1) ใน (2) แล้ว

$$\begin{aligned} &y_0 b_0(x_0) + y_1 b_1(x_0) + y_2 b_2(x_0) + \ldots\ldots\ldots + y_n b_n(x_0) = y_0 \\ &y_0 b_0(x_1) + y_1 b_1(x_1) + y_2 b_2(x_1) + \ldots\ldots\ldots + y_n b_n(x_1) = y_1 \qquad (3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_0 b_0(x_n) + y_1 b_1(x_n) + y_2 b_2(x_n) + \ldots\ldots\ldots + y_n b_n(x_n) = y_n \end{aligned}$$

ซึ่ง (3) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$b_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 \; ; \; k = j \\ 0 \; ; \; k \neq j \end{cases} \qquad (4)$$

เนื่องจาก $b_k(x)$; $k = 0, n$ คือพหุนามดีกรี n โดย

$$b_k(x) = K_k (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots\ldots(x - x_n)$$

ค่าคงที่ K_k หาได้จากการแทน $x = x_k$ ใน $b_k(x)$ แล้ว

$$b_k(x_k) = K_k (x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots\ldots(x_k - x_n)$$

จาก (4) $b_k(x_k) = 1$ ดังนั้น

$$K_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

นั่นคือ

$$b_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อแทน k = 0 , 1 , 2 ,.....,n

โดยการแทน $b_k(x)$ ใน (1) ได้ว่า

$$p_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} \qquad (5)$$

เรียก (5) ว่าการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ เขียนในรูปพหุนามได้ดังนี้

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

และถ้าให้

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

นั่นคือ

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

ขั้นตอนการประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนามแบบลากรองจ์

หาค่าประมาณภายในช่วง เมื่อกำหนดจุดบนตาราง x_0 , x_1 , x_2 , ... , x_n พร้อมค่าฟังก์ชันมาให้

<u>ข้อมูลเข้า</u> จุดบนตาราง x_0 , x_1 , x_2 , ... , x_n

ค่าฟังก์ชัน $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_n)$

ค่า x_i ที่ต้องการประมาณค่า

<u>ข้อมูลออก</u> ค่าประมาณภายในช่วง $p = f(x_i)$

<u>ขั้นตอน</u> 1. ให้ p = 0.0

2. สำหรับ j = 1 ถึง n ทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เริ่ม ให้ s = 1.0

สำหรับ k = 1 ถึง n ทำ

เริ่ม ถ้า j ไม่เท่ากับ k

แล้ว $s = s.\dfrac{(x_i - x_k)}{(x_j - x_k)}$

จบ $p = p + s.f(x_j)$

จบ

3. แสดงผล p และหยุด

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาพหุนามที่ผ่านจุด (0 , 3) , (1 , 2) , (2 , 7) และ (4 ,59) พร้อมหาค่า $p_3(3)$

<u>วิธีทำ</u> $p_3(3) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$

$$= -\left(x^3 - 7x^2 + 14x - 8\right)/8$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}$$

$$= \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)/3$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}$$

$$= -\left(x^3 - 5x^2 + 4x\right)/4$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

$$= \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)/24$$

แล้ว

$$p_3(x) = x^3 - 2x + 3$$

$$p_3(3) = 24$$

2.5.2 การประมาณค่าในช่วงแบบนิวตัน (Newton Interpolating polynomial)

จากสูตรการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นของนิวตัน

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $f[x_1 - x_0] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

เรียกว่าผลหารผลต่างสืบเนื่องอันดับหนึ่ง (first divided difference) ดังนั้นก่อนที่กล่าวถึงการประมาณค่าในช่วงแบบนิวตันจะกล่าวถึง ผลหารผลต่างสืบเนื่องก่อน

ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน f (x) แบบเชิงเส้นในช่วง [a , b] อัตราส่วน $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ มีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุด x_0 , x_1 ในช่วง [a , b] อัตราส่วนนี้เรียกว่า ผลหารผลต่างอันดับที่หนึ่งของ f (x) ที่มีอาร์กิวเมนต์ x_0 , x_1 เขียนแทนด้วย $f[x_0 , x_1]$

นั่นคือ

$$\Delta f_0 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

เนื่องจาก $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$

ดังนั้น $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$

ในทำนองเดียวกัน $\Delta f_1 = f[x_2, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f[x_1, x_2]$

และต่อๆ ไป นั่นคือ ผลหารผลต่างมีความสมมาตรในอาร์กิวเมนต์

ผลหารผลต่างอันดับที่สองของ f (x) ที่มีอาร์กิวเมนต์ x_0 , x_1 , x_2 คือ

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{x_2 - x_1} = \Delta^2 f_0$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

และ $f[x_3, x_2, x_1] = \dfrac{f[x_3, x_2] - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1} = \dfrac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{x_3 - x_1} = \Delta^2 f_1$

รูปทั่วไปของผลหารผลต่างอันดับที่ n ของ f (x) ที่มีอาร์กิวเมนต์ x_0 , x_1 , x_2 ,……., x_n

$$\Delta^n f_0 = \frac{\Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{f[x_1, x_2, \ldots., x_n] - f[x_0, x_1, \ldots., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)}$$
$$= + ... + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{i=o, i \neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}$$

กำหนดค่าของฟังก์ชันที่จุด x_0 , x_1 , x_2 ,....., x_n เป็น $f(x_0)$, $f(x_1)$,...., $f(x_n)$ โดยที่ x_0 , x_1 , x_2 ,....., x_n ไม่จำเป็นต้องมีช่วงห่างเท่ากัน สามารถสร้างตารางผลหารผลต่างสืบเนื่องได้ดังตารางที่ 2.1

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

จากผลหารผลต่างอันดับต่าง ๆ

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x] \quad (6)$$

$$f[x_0, x] = f[x_1, x_0] + (x - x_1) f[x_1, x_0, x] \quad (7)$$

$$f[x_1, x_0, x] = f[x_2, x_1, x_0] + (x - x_2) f[x_2, x_1, x_0, x] \quad (8)$$

.....

โดยการแทน (7) ใน (6) ได้ว่า

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_1, x_0, x] \quad (9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้วแทน (8) ใน (9) ได้ว่า

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_2, x_1, x_0, x]$$

โดยการทำซ้ำแบบนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]$$

$$+ .... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0, x]$$

แล้วพหุนามการประมาณค่าในช่วงของนิวตัน คือ

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]$$

$$+ .... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0]$$

$$= f(x_0) + (x - x_0)\Delta f(x_0) + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 f(x_0)$$

$$+ .... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})\Delta^n f(x_0)$$

ขั้นตอนการประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนามแบบนิวตัน

หาค่าประมาณภายในช่วง เมื่อกำหนดจุดบนตาราง $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ พร้อมค่าฟังก์ชันมาให้

<u>ข้อมูลเข้า</u> จุดบนตาราง $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$

ค่าฟังก์ชัน $f_0, f_1, f_2, ..., f_n$

ค่า x^+ ที่ต้องการประมาณ

<u>ข้อมูลออก</u> ค่าประมาณภายในช่วง $p = p(x^+)$

<u>ขั้นตอน</u>

1. สำหรับ i = 0 ถึง n ทำ

   $d_i = f_i$

2. สำหรับ k = 1 ถึง n ทำ

   เริ่ม สำหรับ i = n ถึง k ทำ

   จบ $d_i = (d_i - d_{i-1}) / (x_i - x_{i-k})$

3. $p = d_x$

4. สำหรับ i = x ถึง 0 ทีละ –1 ทำ

   $p = d_i + p \cdot (x^+ - x_i)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. แสดงผล p และหยุด

ตัวอย่าง จงหาพหุนามที่ผ่านจุด (0 , 3) , (1 , 2) , (2 , 7) และ (4 ,59) พร้อมหาค่า $p_3(3)$

วิธีทำ จากจุดที่กำหนดสร้างตารางผลหารผลต่างสืบเนื่อง

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	3			
		-1		
1	2		3	
		5		1
2	7		7	
		26		
4	59			

$$p_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta f(x_0) + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 f(x_0)$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3 f(x_0)$$
$$= 3 + (x - 0)(-1) + (x - 0)(x - 1)(3) + (x - 0)(x - 1)(x - 2)(1)$$
$$= x^3 - 2x + 3$$

$$p_3(3) = 24$$

2.6 การหาค่าอินทิเกรตและค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข

จาก ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส (Fundamental theorem of calculus)

อินทิกรัลจำกัดเขต $I(f) = \int_a^b f(x)dx$

นั้นนิยามเป็นลิมิตของผลรวมรีมันต์ (Riemann's sum) และสามารถพิสูจน์ได้ว่า F(x) เป็นปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของ f (x) ซึ่งอินทิกรัลมากมายสามารถหาค่าได้โดยใช้สูตรนี้ แต่ยังมีอินทิแกรน f (x) อีกมากมายที่ไม่มีปฏิยานุพันธ์ในรูปของ ฟังก์ชันธาตุมูล (elementary function)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เช่น

$$\int_0^1 \exp(-x^2)dx,\ \int_0^{\pi} x^{\pi}\sin(\sqrt{x})dx,\ \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^4}\,dx$$

จึงมีการศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อใช้ในการคำนวณค่าอินทิกรัลจำกัดเขต โดยจะกล่าวถึง กฎสี่เหลี่ยมคางหมู และกฎของรอมเบิร์ก

2.6.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidel rule)

ในการประมาณค่า $\int_a^b f(x)dx$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูนี้เป็นวิธีที่ง่ายที่สุด โดยการแทนพื้นที่ใต้เส้นโค้งด้วยรูปสี่เหลี่ยมคางหมู วิธีนี้แบ่งช่วง [a , b] ออกเป็น n ช่วงและความของแต่ละช่วงคือ (b-a) / n



รูปที่ 2.7 **การแทนพื้นที่ใต้เส้นโค้งด้วยรูปสี่เหลี่ยมคางหมู**

จุดปลายของช่วงใด ๆ $[n_{k-1}, n_k]$ คือ $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ และ $(x_k, f(x_k))$ โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดปลายทั้งสองจะได้รูปสี่เหลี่ยมคางหมูคือ

$$\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right] \qquad (1)$$

เนื่องจาก $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad (2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการแทน (1) ใน (2) ได้

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[(f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2))+....+(f(x_{k-1})+f(x_k))+$$

$$....+(f(x_{n-1})+f(x_n))]$$

$$=\frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+....+2f(x_k)+....+f(x_n)]$$

$$=h\left[\frac{1}{2}f_0+f_1+f_2+....+f_k+....+f_{n-1}+\frac{1}{2}f_n\right] \qquad (3)$$

เมื่อ h = (b - a) / n และ $f_k = f(x_k)$ เรียก (3) ว่ากฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ขั้นตอนกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ประมาณค่า $I = \int_a^b f(x)dx$

ข้อมูลเข้า จุดปลาย a , b

จำนวนช่อง N

ค่าสูงสุดของจำนวนช่อง M

ค่าขอบเขตความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ε

ข้อมูลออก ค่าประมาณของ I ด้วย T

ขั้นตอน 1. ให้ U = 0.0

2. ขณะที่ N < M ทำซ้ำ 3 ถึง 7

3. ให้ h = (b - a) / N

4. ให้ s = (f (a) + f (b)) / 2

x = a

5. สำหรับ i = 1,....,n-1 ทำ 5.1 และ 5.2

5.1 x = x + h

5.2 s = s + f (x)

6. ให้ T = h * s

7. ถ้า $|T-U|<\varepsilon$

แล้วแสดงผล T , ε , N และหยุด

มิฉะนั้น N = 2 * N

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. ให้ U =T

9. แสดงผล “ไม่ได้ผลหลังการแบ่งช่อง M ช่อง” และหยุด

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ เมื่อ n = 10

<u>วิธีทำ</u> $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{10} = \frac{\pi}{20}$ แล้วหาค่า x_k และ f_k แสดงดังตาราง

k	x_k	$f(x_k) = f_k$
0	0	0
1	$\pi/20$	0.1564
2	$\pi/10$	0.3090
3	$3\pi/20$	0.4540
4	$\pi/5$	0.5878
5	$\pi/4$	0.7071
6	$3\pi/10$	0.8090
7	$7\pi/10$	0.8910
8	$2\pi/5$	0.9511
9	$9\pi/20$	0.9877
10	$\pi/2$	1.0000

โดยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู จาก (3)

$$T_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = h\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + ... + f_9 + \frac{1}{2}f_{10}\right]$$

$$= \frac{\pi}{20}\left(\frac{0}{2} + 0.1654 + 0.3090 + ... + 0.9877 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0.9981$$

2.6.2 ระเบียบวิธีของรอมเบิร์ก (Romberg method)

จากสูตรความคลาดเคลื่อนของ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\int_a^b f(x)dx - T_n(f) = \frac{-f''(Z_n)(b-a)^3}{12n^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$\int_a^b f(x)dx - T_m(f) = \frac{-f''(Z_m)(b-a)^3}{12m^2}$$

$m^2x(31) - n^2x(30)$ ได้ว่า

$$\left(m^2 - n^2\right)\int_a^b f(x)dx - \left[m^2T_m(f) - n^2T_n(f)\right]$$

$$= \frac{\left[f''(Z_n) - f''(Z_m)\right](b-a)^3}{12}$$

โดยที่ $f''(Z_n)$ และ $f''(Z_m)$ เกือบจะมีค่าเท่ากัน

ดังนั้นค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)dx$ แทนที่จะเป็น $T_m(f)$ หรือ $T_n(f)$ จะประมาณด้วย

$$\frac{m^2T_m(f) - n^2T_n(f)}{m^2 - n^2}$$

และค่า m ที่นิยมคือ m = 2n ทั้งนี้เพราะ $T_{2n}(f)$ สามารถคำนวณจาก $T_n(f)$ โดยการแทน n ด้วย 2n

และ $$\frac{4n^2T_{2n}(f) - n^2T_n(f)}{3n^2} = \frac{1}{3}\left[4T_{2n}(f) - T_n(f)\right]$$

ดังนั้น $$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{3}\left[4T_{2n}(f) - T_n(f)\right]$$

ค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)dx$ คือ $\frac{m^4S_m(f) - n^4S_n(f)}{m^4 - n^4}$

เลือก m = 2n

แล้ว $$\frac{16n^4S_{2n}(f) - n^4S_n(f)}{15n^4} = \frac{1}{15}\left[16S_{2n}(f) - S_n(f)\right]$$

ดังนั้น $$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{15}\left[4^2S_{2n}(f) - S_n(f)\right]$$

สูตรของรอมเบิร์ก คือ

$$T^0{}_n = T_n(f)$$

$$T_{2n}{}^k = \frac{4^kT_{2n}{}^{k-1} - T_n{}^{k-1}}{4^k - 1}; k > 0$$

$$h = \frac{b-a}{n}, n' = 2n, h' = \frac{b-a}{n'} = \frac{h}{2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

$$T_n(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + ... + 2f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

ดังนั้น

$$T_{2n}{}^{0} = \frac{h'}{2}[f(a) + 2f(a+h') + 2f(a+2h') + ... + 2f(a+(n'-1)h') + f(b)]$$

$$= \frac{h'}{2}[f(a) + 2f(a+2h') + ... + 2f(a+(n'-2)h') + f(b)]$$

$$+ \frac{h'}{2}[2f(a+h') + 2f(a+3h') + ... + 2f(a+(n'-1)h')]$$

$$= \frac{T_n{}^{0}}{2} + h'[f(a+h') + f(a+3h') + ... + f[a+(n'-1)h']]$$

ขั้นตอน ระเบียบวิธีการรอมเบิร์ก

ประมาณค่า $I = \int_a^b f(x)dx$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าศูนย์

<u>ข้อมูลเข้า</u> จุดปลาย a , b

จำนวนช่อง n

<u>ข้อมูลออก</u> ค่าประมาณของ I ด้วย $R_{n,n}$

<u>ขั้นตอน</u> 1. ให้ h = b − a

$R_{1,1}$ = h(f(a)+f(b))/2

2. แสดงผล $R_{1,1}$

3. สำหรับ i = 2 ,..., x ทำขั้นตอน 4 ถึง 8

4. ให้ $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2(i-2)} f(a+(k-0.5)h)\right]$

5. สำหรับ j = 2 ,..., i

ให้ $R_{2,j} = 4^{j-1}\frac{R_{2,j-1} - R_{i,j-1}}{4^{j-1}-1}$

6. แสดงผล $R_{2,j}$ เมื่อ j = 1 , 2 , ... , i

7. ให้ h = h/2

8. สำหรับ j = 1 , 2 , ... , i

ให้ $R_{1,j} = R_{2,j}$

9. หยุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงประมาณค่า $\int_0^{\pi} \sin x dx$

<u>วิธีทำ</u> $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2$

ระเบียบวิธีรอมเบิร์ก

$$T_1^0 = T_1(f) = \frac{b-a}{2*1}[f(a)-f(b)]$$
$$= \frac{\pi-0}{2}(\sin 0 + \sin\pi) = 0$$

$$T_2^0 = \frac{T_1^0}{2} + \frac{\pi-0}{2*1}[f(a+h')]$$
$$= \frac{T_1^0}{2} + \frac{\pi}{2}\left[f(\frac{\pi}{2})\right]$$
$$= \frac{T_1^0}{2} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 1.5708$$

$$T_2^1 = \frac{4^1 T_2^0 - T_1^0}{4^1-1} = \frac{4*1.5708}{3} - 0 = 2.09439$$

$$T_4^0 = \frac{T_2^0}{2} + \frac{\pi-0}{2*2}[f(a+h') + f(a+3h')]$$
$$= \frac{T_2^0}{2} + \frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) = 1.89612$$

$$T_4^1 = \frac{4^1 T_4^0 - T_2^0}{4^1-1} = \frac{4*1.89612 - 105708}{3} = 2.00456$$

$$T_4^2 = \frac{4^1 T_4^1 - T_2^1}{4^2-1} = \frac{16*2.00456 - 2.09439}{15} = 1.99857$$

T_1^0

T_2^0 T_2^1

T_4^0 T_4^1 T_4^2

T_8^0 T_8^1 T_8^2 T_8^3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตาราง แสดงการประมาณค่า

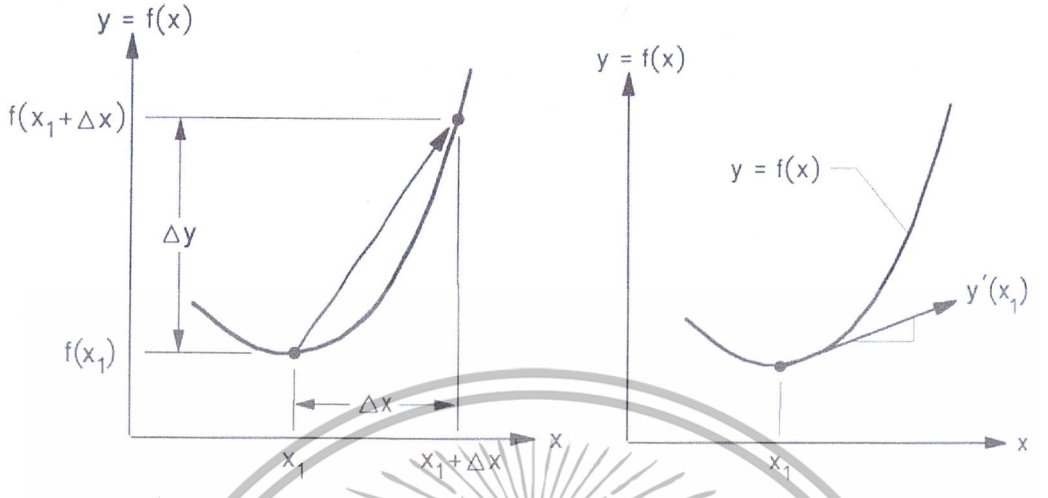
N	$T_n(f)$
1	0.00000
2	1.57080
4	1.89612
8	1.97423
16	1.99357
32	1.99839
64	1.99960
128	1.99990
256	1.99997
512	1.99999
1024	2.00000

N	$S_n(f)$
2	2.09439
4	2.00456
8	2.00027
16	2.00002
32	2.00000

N	$T^0{}_n$	$T^1{}_n$	$T^2{}_n$	$T^3{}_n$	$T^4{}_n$
1	0.00000				
2	1.57080	2.09439			
4	1.89612	2.00456	1.99857		
8	1.97423	2.00027	1.99998	2.00001	
16	1.99357	2.00002	2.00000	2.00000	2.00000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6.3 การหาค่าอนุพันธ์ (Finite differentiation)



(ก) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณ (ข) ค่าอนุพันธ์แท้จริง

รูปที่ 2.8 ความหมายของค่าอนุพันธ์โดยประมาณและค่าอนุพันธ์แท้จริง

รูปที่ 2.8 (ก) แสดงลักษณะของตัวแปรตาม y ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามตัวแปรต้น x ค่าอนุพันธ์โดยประมาณคือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \qquad (1)$$

เมื่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต้น Δx ลู่เข้าสู่ศูนย์ เราจะได้ค่าอนุพันธ์ที่แท้จริงที่จุด x_1 นั้น

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

ค่า $\frac{dy}{dx}$ นี้มีความหมายของค่าความชันที่จุด x_1 นั่นเอง ซึ่งโดยทั่วไปใช้สัญลักษณ์เป็น y'

หรือ $f'(x)$ ดังแสดงในรูป 2.8 (ข)

ในวิชาแคลคูลัสนั้น หากกำหนดฟังก์ชัน f(x) มาให้เราสามารถหาค่าอนุพันธ์โดยใช้สูตรต่าง ๆ อาทิเช่น ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามดังนี้

$$y=f(x)=x^n \qquad (2)$$

เราสามารถหาค่าอนุพันธ์แม่นตรงได้โดยตรง คือ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=nx^{n-1} \qquad (3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เป็นต้น แต่ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปแล้ว ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้นั้นไม่อยู่ในรูปแบบที่ง่ายต่อการหาค่าอนุพันธ์ดังเช่นในตัวอย่างที่ยกขึ้นมานี้ ดังนั้นโดยปรกติ เราจะทำการหาค่าอนุพันธ์โดยประมาณ ซึ่งสามารถทำได้โดยสะดวก เราจะเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \dots \qquad (4)$$

โดย h แทนช่วงระหว่างตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} เราสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ที่ตำแหน่ง x_i ได้จากอนุกรมเทย์เลอร์นี้ ดังนี้

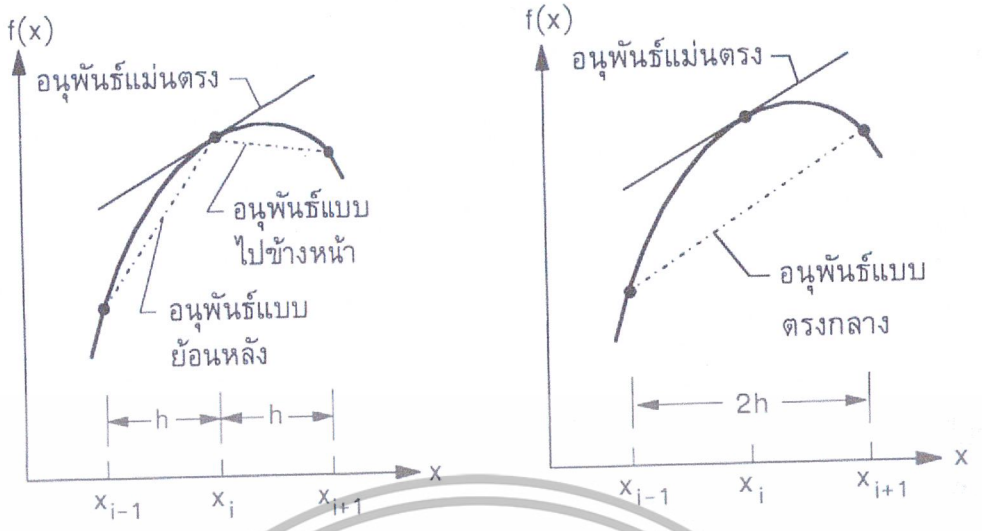
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x_i) + \dots \qquad (5)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \qquad (6)$$

โดย $O(h)$ แสดงถึงค่าความผิดพลาดอันดับ h (error of order h) ที่เกิดขึ้น สมการ (6) นี้บางครั้งเรียกว่าเป็นสมการผลต่างจากการแบ่งย่อยไปข้างหน้าอันดับที่หนึ่ง (first forward divided-difference) ที่เรียกว่าเป็นผลต่างแบบไปข้างหน้าก็เพราะว่าเราใช้ข้อมูลของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ลักษณะของค่าอนุพันธ์โดยประมาณที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แม่นตรงได้แสดงในรูปที่ 2.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบไปข้างหน้าและแบบย้อนหลัง (ข) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบตรงกลาง

รูปที่ 2.9 **การเปรียบเทียบระหว่างค่าอนุพันธ์แม่นตรงกับค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบต่างๆ**

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (4) เราสมการเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์อีกครั้ง แต่หาค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i-1} ดังนี้

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \ldots \qquad (7)$$

ซึ่งนำไปสู่ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ได้ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \ldots \qquad (8)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \qquad (9)$$

สมการ (9) นี้ สามารถนำไปใช้คำนวณค่าอนุพันธ์โดยประมาณได้ เป็นสมการผลต่างจากการแบ่งย่อยย้อนหลังอันดับที่หนึ่ง (first backward divided-difference) ลักษณะของค่าอนุพันธ์ที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แบบไปข้างหน้าและค่าอนุพันธ์แม่นตรงได้แสดงในรูปที่ 2.9 (ก)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หากเราเอาสมการ (7) ไปลบออกจากสมการ (4) เราจะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^3}{3!}f'''(x_i) + \ldots \qquad (10)$$

ซึ่งเราสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ได้คือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{3!}f'''(x_i) + \ldots \qquad (11)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O^2(h) \qquad (12)$$

สมการ (12) นี้ เรียกว่าสมการผลต่างการแบ่งย่อยแบบตรงกลาง (Central divided-difference) ที่ให้ค่าความผิดพลาดอันดับ h^2 ซึ่งต่างจากค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในสมการของ 2 แบบที่แล้วซึ่งอยู่ในอันดับ h ลักษณะของค่าอนุพันธ์ที่เกิดขึ้นจากสมการผลต่างการแบ่งย่อยแบบตรงกลางนี้ได้เปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แม่นตรงดังแสดงในรูปที่ 2.9 (ข)

ในการหาค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไป เช่น ค่าอนุพันธ์อันดับสอง เราสามารถทำได้เช่นกัน โดยเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์ที่ใช้คำนวณฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i+2} จากค่าต่างๆ ที่ x_i ดังนี้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + (2h)f'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x_i) + \ldots \qquad (13)$$

หากเราเอา 2 คูณเข้ากับสมการ (4) แล้วลบออกจากสมการ (13) นี้ จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \ldots \qquad (14)$$

ซึ่งก่อให้เกิดสมการค่าอนุพันธ์อันดับสองนี้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \qquad (15)$$

สมการ (6) นี้ เรียกว่าเป็นสมการผลต่างจากการแบ่งย่อยแบบไปข้างหน้าอันดับที่สอง (second forward divided-difference) สมการค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไปสามารถประดิษฐ์ได้โดยวิธีการในทำนองเดียวกัน รวมทั้งค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ เนื่องจากการแบ่งย่อยแบบย้อนหลังและแบบกลาง ค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ เนื่องจากการแบ่งย่อยแบบไปข้างหน้า แบบย้อนหลัง และแบบตรงกลาง ได้สรุปในตาราง 1 , 2 และ 3 ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตาราง 1 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยแบบไปข้างหน้าด้วยความผิดพลาด $O(h)$

$$f'(x_i)=[f(x_{i+1})-f(x_i)]/h$$
$$f''(x_i)=[f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})-f(x_i)]/h^2$$
$$f'''(x_i)=[f(x_{i+3})-3f(x_{i+2})+3f(x_{i+1})-f(x_i)]/h^3$$
$$f''''(x_i)=[f(x_{i+4})-4f(x_{i+3})+6f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+f(x_i)]/h^4$$

ตาราง 2 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยแบบย้อนหลังด้วยความผิดพลาด $O(h)$

$$f'(x_i)=[f(x_i)-f(x_{i-1})]/h$$
$$f''(x_i)=[f(x_i)-2f(x_{i-1})-f(x_{i-2})]/h^2$$
$$f'''(x_i)=[f(x_i)-3f(x_{i-1})+3f(x_{i-2})-f(x_{i-3})]/h^3$$
$$f''''(x_i)=[f(x_i)-4f(x_{i-1})+6f(x_{i-2})-4f(x_{i-3})+f(x_{i-4})]/h^4$$

ตาราง 3 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยแบบตรงกลางด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$

$$f'(x_i)=[f(x_{i+1})-f(x_i)]/2h$$
$$f''(x_i)=[f(x_{i+1})-2f(x_i)-f(x_{i-1})]/h^2$$
$$f'''(x_i)=[f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+2f(x_{i-1})-f(x_{i-2})]/2h^3$$
$$f''''(x_i)=[f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+6f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})]/h^4$$

ค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ ในตาราง 1 , 2 นี้ต่างประกอบด้วยค่าความผิดพลาด เช่น ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดนการใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยแบบไปข้างหน้าดังแสดงในสมการ (6) และในตาราง 1 มีค่าความผิดพลาด $O(h)$ เราสามารถเพิ่มความเที่ยงตรงของค่าอนุพันธ์ที่ได้โดยเริ่มจากสมการ (5)

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}-\frac{h}{2}f''(x_i)+O(h) \qquad (16)$$

แล้วแทนค่าอนุพันธ์อันดับสองจากสมการ (15) ลงในสมการนี้แล้วจัดพจน์ จะได้

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}+O(h^2) \qquad (17)$$

สมการของค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ใหม่นี้มีความเที่ยงตรงสูงขึ้น เนื่องจากมีความผิดพลาดอันดับ h^2 กระบวนการที่ประกอบด้วยขั้นตอนในลักษณะเช่นนี้สามารถนำไปประดิษฐ์ค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ เพื่อให้มีค่าความเที่ยงตรงที่สูงขึ้นได้ ทั้งในแบบของการแบ่งย่อยไปข้างหน้า แบบย้อนหลัง และแบบตรงกลาง ดังแสดงในตาราง 4 , 5 และ 6 ตามลำดับ

ตาราง 4 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยแบบไปข้างหน้าด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$

$$f'(x_i)=[-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)]/2h$$
$$f''(x_i)=[-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)]/h^2$$
$$f'''(x_i)=[-3f(x_{i+4})+14f(x_{i+3})-24f(x_{i+2})+18f(x_{i+1})-5f(x_i)]/2h^3$$
$$f''''(x_i)=[-2f(x_{i+5})+11f(x_{i+4})-24f(x_{i+3})+26f(x_{i+2})-14f(x_{i+1})+3f(x_i)]/h^4$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตาราง 5 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยแบบย้อนหลังด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$

$$f'(x_i) = [3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})]/2h$$
$$f''(x_i) = [2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})]/h^2$$
$$f'''(x_i) = [5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})]/2h^3$$
$$f''''(x_i) = [3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) + 2f(x_{i-5})]/h^4$$

ตาราง 6 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยแบบตรงกลางด้วยความผิดพลาด $O(h^4)$

$$f'(x_i) = [-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})]/12h$$
$$f''(x_i) = [-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})]/12h^2$$
$$f'''(x_i) = [-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})]/8h^3$$
$$f''''(x_i) = [-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})]$$
$$/6h^4$$

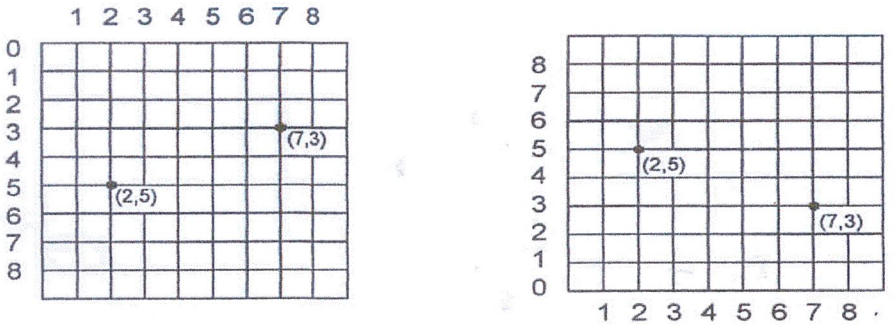
2.7 การสร้างภาพกราฟิกเบื้องต้น

กราฟิกที่คอมพิวเตอร์สร้างขึ้นนั้นจะสร้างขึ้นได้โดยใช้ภาพกราฟิกเบื้องต้นต่าง ๆ ซึ่งได้แก่ จุด (point) ,เส้นตรง (straight line) ,เส้นโค้ง (curves) ,และภาพรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ (geometric figures) เช่น วงกลม ,วงรี ,รูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น นอกจากนี้ยังต้องประกอบด้วยคำสั่งที่เกี่ยวกับการจัดการหน้าจอ เช่น การลบหน้าจอ , การวางภาพที่กำหนดไว้ในตำแหน่งที่ต้องการบนจอภาพ เป็นต้น

2.7.1 การสร้างจุด

ภาพบนจอภาพแบบแรสเตอร์สแกนเกิดจากจุดสว่างหลายๆจุด ซึ่งจะกำหนดตำแหน่งได้โดยกำหนดจุดในเฟรมบัฟเฟอร์ที่สอดคล้องกับจุดจริงบนจอภาพ ทั้งจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์จะใช้ระบบพิกัดจุด 2 มิติในการอ้างถึงจุดต่างๆโดยมีจุดกำเนิดหรือจุด(0,0) อยู่ที่มุมบนซ้ายของจอภาพดังรูปที่ 2.10 (ก) ซึ่งต่างจากระบบพิกัดที่มักใช้ในการเขียนกราฟ กล่าวคือ จุดกำเนิดอยู่ที่มุมล่างซ้าย และในรูปที่ 2.10 (ข) การอ้างถึงพิกเซลใดพิกเซลหนึ่งจะใช้คู่ลำดับ (x,y) โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

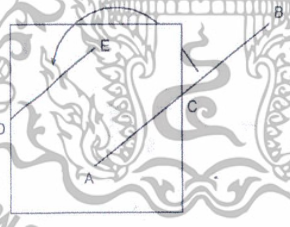
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก) (ข)

รูปที่ 2.10 ระบบพิกัดของจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์เทียบกับระบบพิกัดที่ใช้ในการเขียนกราฟ

ค่าของจุดพิกัด x และ y จะต้องมีค่าไม่เกินค่าขอบเขตของจอภาพที่ใช้ ถ้ามีการกำหนดค่าเกินขอบเขตจะต้องมีการจัดการอย่างใดอย่างหนึ่งเพื่อกันเหตุการณ์เช่นนี้ ตัวอย่างเช่น ให้จุดที่มีค่าอยู่เกินขอบเขตไม่ว่าจะเป็นขอบเขตบน ล่าง ซ้าย หรือขวา ถูกเปลี่ยนค่าให้เป็นค่าที่ขอบเขต นั่นคือภาพที่มีพิกัดเกินขอบเขตจะถูกตัดไปเลย (clipping) อีกวิธีหนึ่งเป็นการให้ค่าที่เกินขอบเขตไป เริ่มจากจุดเริ่มต้นอีกที ซึ่งเรียกว่า ผลวนรอบ (wrap around effect)



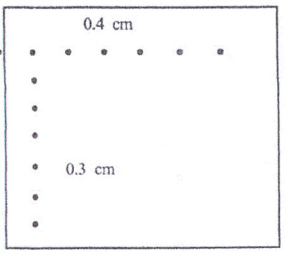
รูปที่ 2.11 ปรากฏการณ์วนรอบ

2.7.2 อัตราส่วนแอสเป็กต์

ถ้าใช้คำสั่งสร้างพิกเซลขึ้นมา 8 พิกเซลลงบนจอภาพทั้งในแนวดิ่งและแนวนอน แล้วลองวัดความยาวของพิกเซลที่ติดต่อกันทั้ง 8 พิกเซลจะพบว่าความยาวในแนวนอนและในแนวดิ่งมีค่าต่างกัน แม้ว่าจะมีจำนวนพิกเซลเท่ากัน อัตราส่วนระหว่างความยาวในแนวนอนกับความยาวในแนวดิ่งนี้เรียกว่า อัตราส่วนแอสเป็กต์ (aspect ratio) ค่านี้เกิดจากการที่ระยะห่างระหว่างพิกเซลในแนวดิ่งของจอภาพนั่นเอง ซึ่งต่อมาในปัจจุบันมีการปรับปรุงให้ระยะห่างระหว่างพิกเซลนี้มีขนาดเท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทั้งในแนวนอนและแนวดิ่งจึงทำให้อัตราส่วนแอสเป็กต์มีค่าเป็น 1



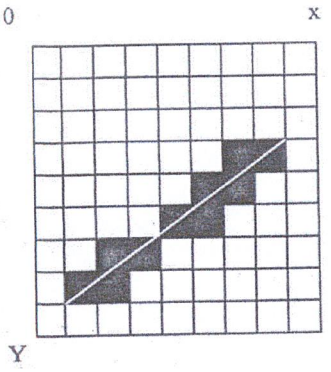
รูปที่ 2.12 **อัตราส่วนแอสเป็กต์ซึ่งมีค่าเป็น** 1.33

อัตราส่วนนี้มีผลต่อความถูกต้องของภาพที่วาดบนจอภาพ ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความกว้างเท่ากับ 80 พิกเซล สำหรับจอภาพซึ่งมีอัตราส่วนแอสเป็กต์เป็น 4/3ความยาวจริงในแนวนอนบนจอภาพจะเท่ากับ 0.4*10 = 4 เซนติเมตร (8 พิกเซล = 0.4 เซนติเมตร) และถ้าลากเส้นในแนวดิ่งโดยใช้จำนวนพิกเซลเท่าเดิมคือ 80 พิกเซล ความยาวจริงของเส้นบนจอภาพจะสั้นกว่าเส้นที่อยู่ในแนวนอน นั่นคือจะยาวเพียง 0.3*10 = 3 เซนติเมตร ทำให้ภาพที่ได้ไม่ใช่สี่เหลี่ยมจัตุรัสตามที่ต้องการ การแก้ไขทำได้โดยใช้จำนวนพิกเซลที่มากกว่า 80 พิกเซล ซึ่งจะทำให้ความยาวจริงของเส้นในแนวดิ่งบนจอภาพเท่ากับ 4 เซนติเมตรด้วย จำนวนพิกเซลที่ต้องการคือ 80*4/3 ซึ่งมีค่าประมาณ 107 พิกเซล หมายความว่าในการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนจอภาพที่มีอัตราส่วนแอสเป็กต์เป็น 4/3 ต้องใช้พิกเซล 80 พิกเซลสำหรับการวาดเส้นในแนวนอนและใช้พิกเซล 107 พิกเซลสำหรับการวาดในแนวดิ่ง จึงจะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ต้องการ

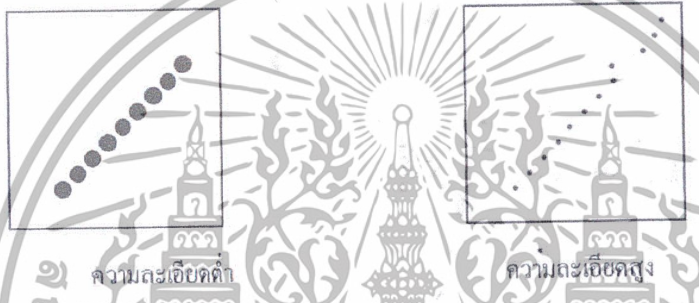
2.7.3 การวาดเส้นตรง

เส้นตรงก็คือพิกเซลที่จัดเรียงเป็นลำดับติดๆกันในแนวตรง สำหรับจอภาพแบบแรสเตอร์สแกน การลากเส้นตรงในแนวเฉียงเราจำเป็นต้องเลือกพิกเซลที่ใกล้กับแนวเส้นที่สุดเพื่อให้ได้เส้นตรงที่ดีที่สุด รูปที่ 2.13 แสดงเส้นที่ลากบนจอภาพแบบแรสเตอร์สแกน ความถูกต้องและคุณภาพของเส้นที่แสดงบนจอภาพจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของจอภาพถ้าเป็นจอภาพที่มีความละเอียดสูงเช่น 1024ด1024จุด จะสามารถวาดเส้นได้ตรงและต่อเนื่องมากกว่าจอภาพที่มีความละเอียดต่ำ เส้นที่ปรากฏบนจอภาพที่มีความละเอียดต่ำจะมีช่องว่างระหว่างพิกเซลให้เห็นทำให้เส้นไม่ต่อเนื่องรูปที่ 2.14 จะแสดงภาพเส้นตรงที่ปรากฏบนจอภาพที่มีความละเอียดต่างกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.13 พิกเซลที่ใช้สำหรับประกอบเป็นเส้นตรง AB



รูปที่ 2.14 เปรียบเทียบภาพเส้นตรงที่ได้จากจอภาพที่มีความละเอียดต่างกัน

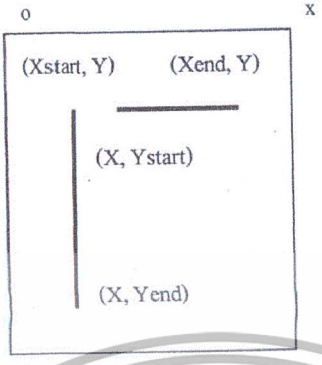
ในระบบกราฟิกที่มีความสามารถสูง การวาดเส้นตรงทำได้โดยทางฮาร์ดแวร์ซึ่งทำให้สามารถวาดเส้นได้อย่างรวดเร็วมาก ส่วนระบบกราฟิกที่มีความสามารถต่ำ ก็จะวาดเส้นโดยใช้ซอฟแวร์ซึ่งวาดได้ช้ากว่ามาก ในการวาดเส้นเรามักต้องเป็นคนกำหนดจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเอง แล้วระบบกราฟิกจะวาดเส้นเชื่อมจุดที่เรากำหนดไว้ ในตอนต่อไปนี้เราจะมากล่าวถึงวิธีต่างๆที่ใช้ในการวาดเส้นตรงเชื่อมจุด 2 จุดอย่างคร่าวๆ

เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่ง

เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่งเป็นเส้นที่วาดได้ง่ายที่สุด ถ้าค่าของ x ที่จุดเริ่มต้นน้อยกว่าค่าของ x ที่จุดสิ้นสุด การวาดเส้นแนวนอนทำได้โดยให้ค่าทางแกน y คงที่ แล้วเพิ่มค่าทางแกน x ขึ้นทีละ 1 พิกเซล ดังแสดงในรูปที่ 2.15 เป็นภาพเส้นแนวนอนซึ่งลากจากจุด (Xstart , Y) ไปยัง (Xend , Y) และ xstart <= Xend แต่ถ้า Xstart > Xend เราก็จะทำกลับกัน กล่าวคือ ให้ค่า y คงที่ แล้วลดค่าทางแกน x ลงทีละ 1 พิกเซล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนเส้นแนวดิ่งก็สามารถวาดได้โดยให้ค่าทางแกน x คงที่ แล้วเพิ่มค่าทางแกน y ขึ้นทีละ 1 พิกเซล ถ้าลากเส้นจากจุด y ซึ่งมีค่าน้อยไปยัง y ที่มีค่ามากกว่า แต่ถ้าต้องการลากเส้นจากจุด y ลงทีละ 1 พิกเซลในขณะที่ค่าทางแกน x คงที่



รูปที่ 2.15 **เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่ง**

เส้นทแยงมุม

การวาดเส้นทแยงมุมซึ่งมีความลาดชันเป็น +1 เราสามารถทำได้โดยการเพิ่มค่าทางแกน x และ y ขึ้นทีละ 1 พิกเซลจากจุดเริ่มต้นซึ่งมีพิกัดน้อยกว่าของจุดสิ้นสุด หรือการลดค่าทางแกน x และ y ลงทีละ 1 พิกเซล ในกรณีกลับกัน สำหรับเส้นทแยงมุมที่มีความลาดชันเป็น –1 สามารถทำได้โดยการเพิ่มค่าทางแกน x และลดค่าทางแกน y ลงทีละ 1 พิกเซลพร้อมๆกัน

เส้นตรงที่มีความลาดชันใด ๆ

การวาดเส้นตรงที่มีความลาดชันเท่าไรก็ได้นั้น มีปัญหาในการสร้างหลายอย่าง เช่น จอภาพแบบแรสเตอร์สแกนสามารถแสดงจุดได้เฉพาะตรงที่เป็นตำแหน่งพิกเซลเท่านั้น ทำให้เส้นตรงที่ไม่ใช่เส้นแนวนอนหรือเส้นแนวดิ่งมีลักษณะเป็นขั้นบันได (staircase effect) กึ่งเส้นตรงเหล่านี้จะแทนเส้นตรงจริงๆได้โดยประมาณเท่านั้น เพราะว่าพิกเซลที่มีอาจไม่อยู่ในตำแหน่งที่ตรงกับจุดบนส่วนของเส้นตรงที่จะสร้างจริงๆ ดังนั้นเราจึงต้องเลือกจุดพิกเซลที่ใกล้กับจุดจริงๆมากที่สุด ปัญหาอีกประการหนึ่งก็คือ การหาพิกเซลที่ใกล้ หรือดีที่สุดนั้นสามารถทำได้หลายวิธี การเลือกวิธีใดในการสร้างเส้นประมาณนี้ขึ้นกับความเร็วในการสร้างเส้นและภาพเส้นที่วาดได้ดูเป็นเส้นตรงมากแค่ไหน เพื่อให้เข้าใจเกณฑ์ในการเลือกวิธีสร้างเส้นตรง ในตอนนี้จะกล่าวถึงวิธีต่างๆที่ใช้ในการสร้างเส้นตรง

1. **วิธีสร้างโดยใช้สมการเส้นตรง** วิธีนี้จะใช้ได้กับสมการเส้นตรง $Y = mX + b$

โดยที่ m คือ ความลาดชัน b คือ ค่าของจุดที่เส้นตรงตัดแกน Y (จุดที่ค่า X เป็นศูนย์)

วิธีการวาดเริ่มจากเราต้องหาค่าของ m และ b ก่อน จากนั้นเราจะวาดเส้นได้โดยการเพิ่มค่าของX ขึ้นทีละหนึ่งหน่วยจากจุดเริ่มต้น (Xstart , Ystart) จนถึงจุดสิ้นสุด (Xend , Yend) และทุกๆขั้นของการเพิ่มค่า X เราก็จะทำการคำนวณหาค่าของ Y จากสมการ ก็จะได้จุดพิกัด (X ,Y) ค่าของ Y ที่ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการคำนวณมักจะเป็นค่าจำนวนจริงเพราะฉะนั้นจึงต้องมีการปรับให้ค่าจำนวนจริงนี้เป็นค่าจำนวนเต็มก่อน เพื่อใช้เป็นค่าพิกัดได้

วิธีนี้มีปัญหา 2 ประการ คือ ประการแรก ใช้เวลาในการวาดเส้นมาก และประการที่สอง คือเส้นซึ่งมีความลาดชันมากกว่า 1 จะวาดได้ไม่ดีเนื่องจากมีช่วงว่างระหว่างเส้นมากเพราะเป็นช่วงที่ค่า X จากจุดเริ่มไปยังจุดสิ้นสุด ซึ่งใช้ในการคำนวณมีจำนวนน้อยเกินไป

2. **วิธี Simple DDA** (simple digital differential analyzer) เป็นวิธีที่ง่ายต่อการเขียนโปรแกรม และสามารถให้เส้นที่ค่อนข้างดี

สมมติว่าเราต้องการจะสร้างเส้นตรงซึ่งลากจากจุดพิกัด (Xstart , Ystart) ไปยังจุดพิกัด (Xend , Yend) ซึ่งมีความลาดชัน m ดังนี้

$$m = \frac{(Yend - Ystart)}{(Xend - Xstart)}$$

พิกัด (X1,Y1) และ (X2,Y2) ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ติดกันและอยู่บนเส้นตรงนี้ อาจนำมาใช้ในการคำนวณหาค่าความลาดชัน m ได้ดังนี้

$$m = \frac{(Y2 - Y1)}{(X2 - X1)}$$

สำหรับค่าสมบูรณ์ของ m น้อยกว่า 1 และ Xstart < Xend เราสร้างเส้นโดยการเพิ่มค่าของ X ตัวก่อน ขึ้น 1 หน่วยจนถึง Xend และคำนวณหาค่าของ Y (ถ้าในกรณีที่ Xstart > Xend ให้สลับค่าจุดปลายทั้งสอง) ดังนั้นสำหรับจุดที่ตามมา

$X2 = X1 + 1$

หรือ $X2 - X1 = 1$

แทนค่า $X2 - X1 = 1$ ลงในสมการ $m = \frac{(Y2 - Y1)}{(X2 - X1)}$ จะได้

$Y2 = Y1 + m$

จากสมการ $Y2 = Y1 + m$ เราสามารถหาค่า Y ตัวต่อมาได้จากค่า Y ตัวก่อน วิธีการหาค่าจุดต่อมาจากค่าของจุดเดิมเช่นนี้เป็นเทคนิคที่ทำให้สามารถวาดเส้นได้เร็วขึ้นถ้าค่าสมบูรณ์ของ m มากกว่า 1 และ Ystart < Yend เราจะสร้างเส้นได้โดยเพิ่มค่าของ Y จนถึง Yend และคำนวณหาค่าของ X (ถ้าในกรณีที่ Ystart > Yend ให้สลับค่าจุดปลายทั้งสอง) ดังนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Y2 = Y1 + 1$$

หรือ $Y2 - Y1 = 1$

แทนค่า $Y2 - Y1 = 1$ ลงในสมการ $m = \frac{(Y2 - Y1)}{(X2 - X1)}$ จะได้

$$X2 = X1 + 1/m$$

จากสมการแสดงให้เห็นว่าเราสามารถหาค่า X ตัวต่อมาได้จากค่า X ตัวเก่า จากสมการคำนวณค่า X หรือ Y ข้างต้น ค่าที่ได้จะเป็นค่าจำนวนจริง ดังนั้นก่อนที่จะนำไปใช้ในการกำหนดจุดพิกเซลจะต้องแปลงให้เป็นจำนวนเต็มก่อน

3. **วิธี** Integer DDA เนื่องจากวิธี Simple DDA มีการคำนวณที่ใช้เวลามาก คือ การบวกเลขทศนิยม ดังนั้นจึงมีการพัฒนาวิธีที่ใช้เวลาน้อยกว่า โดยใช้การคำนวณที่เป็นจำนวนเต็มอย่างเดียวเท่านั้น ซึ่งเรียกว่าเป็นวิธี Integer DDA

หลักการเบื้องต้นของวิธีนี้ก็คือ แทนค่าความลาดชันซึ่งเป็นจำนวนจริงด้วยจำนวนเต็มแทนที่จะต้องมีการคำนวณเลขทศนิยม

วิธีนี้แบ่งออกเป็น 4 กรณีขึ้นอยู่กับค่าของความลาดชันของเส้น แต่ละกรณีก็จะมีกฎเกณฑ์ของตัวมันเอง ซึ่งจะได้อธิบายแต่ละกรณีไป สำหรับค่า error ที่ใช้ในการอธิบายจะหมายถึง ระยะทางระหว่างจุดที่พล็อตเพื่อสร้างเส้นกับจุดสิ้นสุดของเส้นที่ควรจะเป็นจริงๆ และจุดสิ้นสุดจะต้องอยู่ในลำดับที่เหมาะสมของแต่ละกรณี

- กรณีที่ 1 ค่าความลาดชันระหว่าง 0 ถึง 1 โดยที่ delta_x และ delta_y เป็นค่าบวก :

ถ้าค่าของ error เป็นลบ ให้พล็อตจุดต่อไปทางขวาของจุดเดิมที่เพิ่งจะพล็อตมา โดยเลื่อนไปหนึ่งหน่วย แล้วบวกค่า delta_y เข้ากับค่า error แต่ถ้าค่าของ error เป็นบวก ให้ทำการพล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยและไปทางขวาอีกหนึ่งหน่วยจากจุดเดิม แล้วบวกค่า error ด้วยค่าของ delta_y ลบ delta_x

- กรณีที่ 2 ค่าความลาดชันมากกว่า 1 โดยที่ delta_x และ delta_y เป็นบวก :

ถ้าค่าของ error เป็นลบ ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วย และไปทางขวาอีกหนึ่งหน่วยจากจุดเดิม แล้วบวกค่า error ด้วยค่าของ delta_y ลบ delta_x แต่ถ้าค่าของ error เป็นบวก ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยจากจุดเดิมที่เพิ่งจะพล็อตมา แล้วลบค่า delta_x ออกจากค่า error

- กรณีที่ 3 ค่าความลาดชันระหว่าง –1 ถึง 0 โดยที่ delta_x และ delta_y เป็นลบ :

ถ้าค่าของ error เป็นลบ ให้พล็อตจุดต่อไปทางซ้ายของจุดเดิมที่เพิ่งจะพล็อตมา โดยเลื่อนไปหนึ่งหน่วย แล้วบวกค่า delta_y เข้ากับค่า error แต่ถ้าค่าของ error เป็นบวก ให้พล็อตจุดต่อไปที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยและไปทางซ้ายอีกหนึ่งหน่วยจากจุดเดิม แล้วบวกค่า error ด้วยค่าของ delta_x + delta_y

- กรณีที่ 4 ค่าความลาดชันน้อยกว่า –1 โดยที่ delta_x เป็นลบและ delta_y เป็นบวก : ถ้าค่าของ error เป็นลบ ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยและไปทางซ้ายอีกหนึ่งหน่วยจากจุดเดิม แล้วบวกค่า error ด้วยค่าของ delta_x + delta_y แต่ถ้าค่าของ error เป็นบวก ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยจากจุดเดิมที่เพิ่งจะพล็อตมา แล้วบวกค่า delta_x เข้าจากค่า error

ค่า error ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเส้นจะมีค่าเป็น 0 และจะมีค่าเป็น 0 ทุกครั้งที่ตำแหน่งจุดที่ คำนวณได้ อยู่บนเส้นที่ควรจะเป็นจริงและแต่ละกรณีข้างต้นจะมีค่าของ error ต่างกัน

รูปที่ 2.13 แสดงภาพของเส้นตรงที่ควรจะเป็นเทียบกับเส้นที่เกิดจากการสร้างโดยใช้วิธี Integer DDA เป็นเส้นที่ลากระหว่างจุด (2,2) ไปยังจุด (6,7) ในรูปแสดงการคำนวณจุดที่จะต้องพล็อตต่อไปจากจุดตั้งต้นจนถึงจุดสิ้นสุดด้วย จะเห็นว่าวิธีนี้ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่าความลาดชัน (ซึ่งจะต้องการหาร) แต่ก็สามารถสร้างเส้นตรงได้เช่นกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่3
การออกแบบระบบและหลักการที่เกี่ยวข้อง

3.1 การออกแบบระบบ

1. ออกแบบระบบงานและส่วนประกอบต่าง ๆ ที่จำเป็นสำหรับระบบ
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานในการเขียนโปรแกรมด้วยภาษาวิชวล เบสิก
3. ทำการพัฒนาระบบ
4. ทำการทดสอบและแก้ไขโปรแกรมให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น
5. ประเมินความสมบูรณ์ของระบบและปัญหาที่เกิดขึ้น

3.2 ระบบงาน

การทำงานของระบบนั้นแบ่งออกเป็น 3 ส่วน โดยมีการทำงานเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ส่วนข้อมูลเข้า (Input) เป็นการป้อนค่าฟังก์ชันที่ต้องการหาค่า
   - การหารากสมการไม่เชิงเส้น
   - การประมาณค่าในช่วง
   - การอินทิเกรตและการอนุพันธ์
2. ส่วนการวิเคราะห์และประมวลผล (Analysis and process) นำฟังก์ชันที่ป้อนเข้ามาทำการคำนวณเพื่อหาค่าและเขียนกราฟให้ได้ค่าตามที่ต้องการ
3. ส่วนข้อมูลออก (Output) เป็นการนำข้อมูลที่ได้จากการประมวลผลมาแสดงผลที่หน้าจอภาพ

3.3 แผนงานและการพัฒนาระบบ

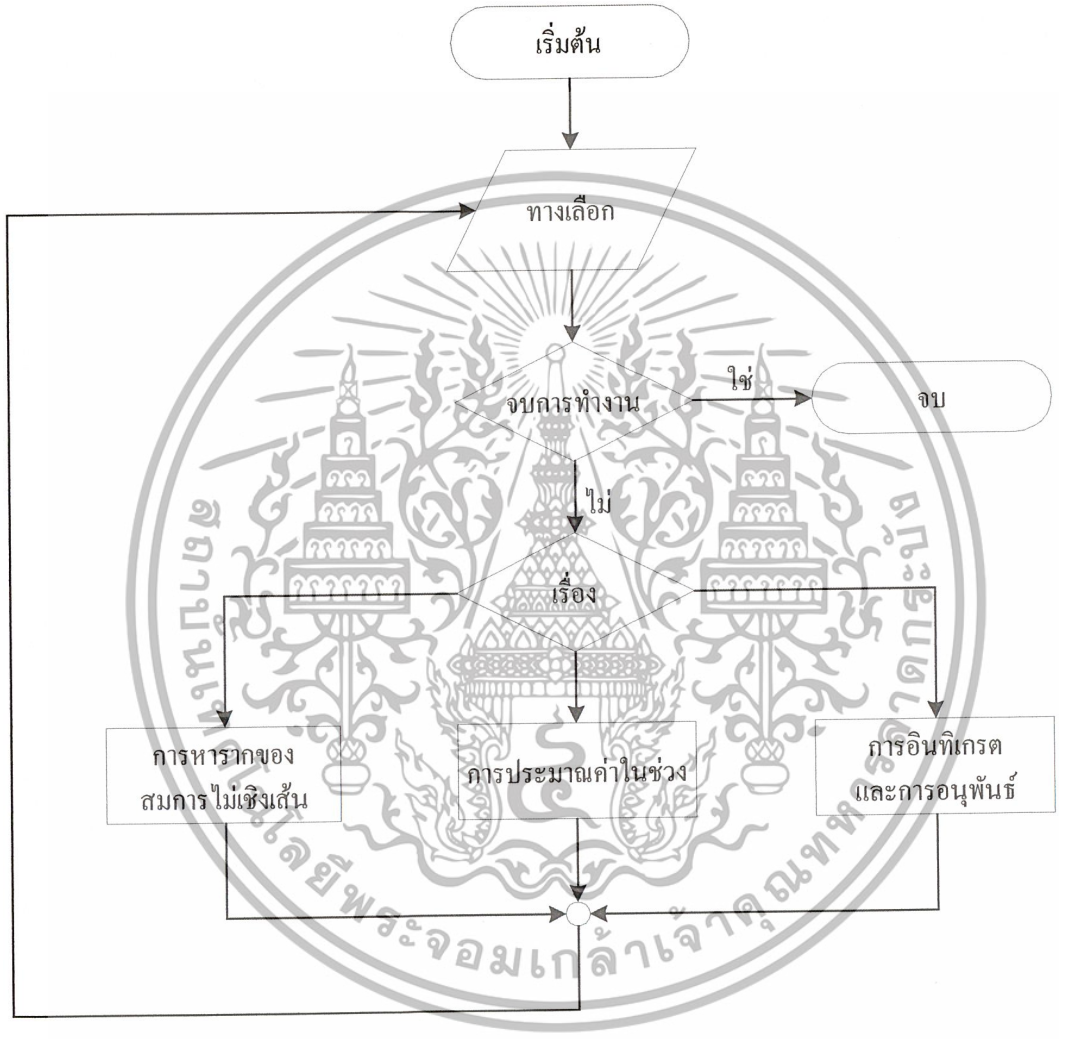
1. ออกแบบผังงาน (Flow chat) ของระบบงาน
2. ศึกษาการเขียนโปรแกรมด้วยภาษาวิชวลเบสิกเพื่อใช้ในการเขียนกราฟฟิกทางคอมพิวเตอร์ ทำการศึกษาคณิตศาสตร์ ในหัวเรื่อง
   - การหารากของสมการไม่เชิงเส้น
   - การประมาณค่าในช่วง
   - การอินทิเกรตและการอนุพันธ์

   เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณเพื่อที่จะนำมาเขียนกราฟ
3. กำหนดข้อมูลเข้า (Input) ข้อมูลออก (Output) ของระบบงาน
4. ออกแบบหน้าจอการทำงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. นำความรู้เรื่องการเขียนกราฟมาเขียนเป็นโปรแกรมแสดงกราฟ
6. ออกแบบทดสอบระบบงานที่ออกแบบไว้และทำการแก้ไขข้อมูล ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น
7. จัดทำเอกสารประกอบการใช้งาน

3.4 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

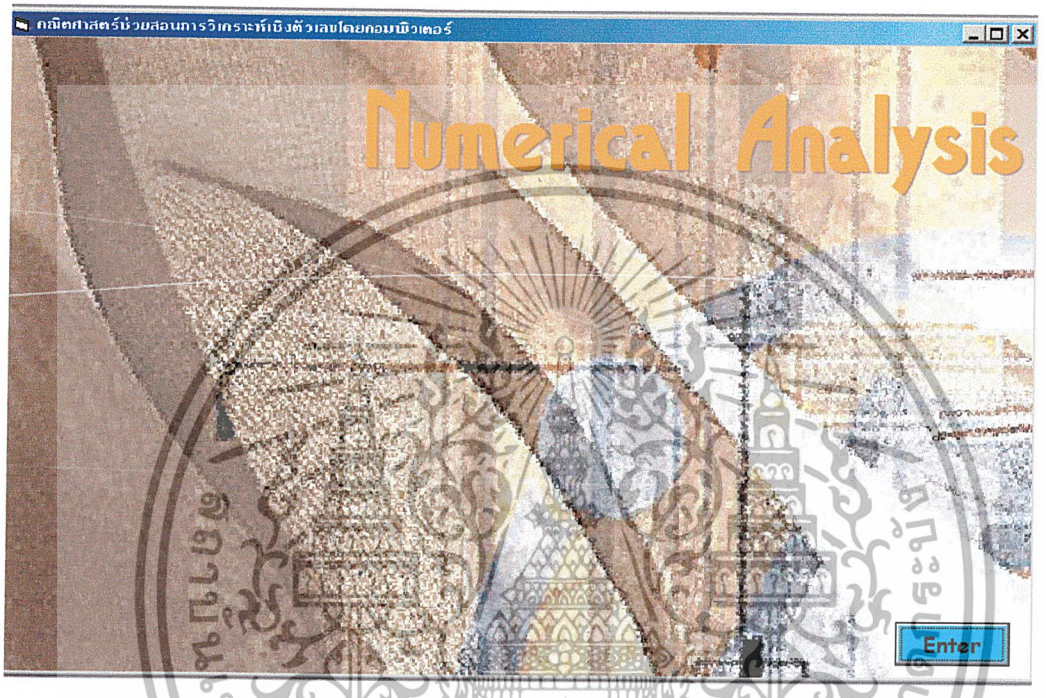


รูปที่ 3.1 ขั้นตอนการทำงานของระบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
ผลการทดลอง

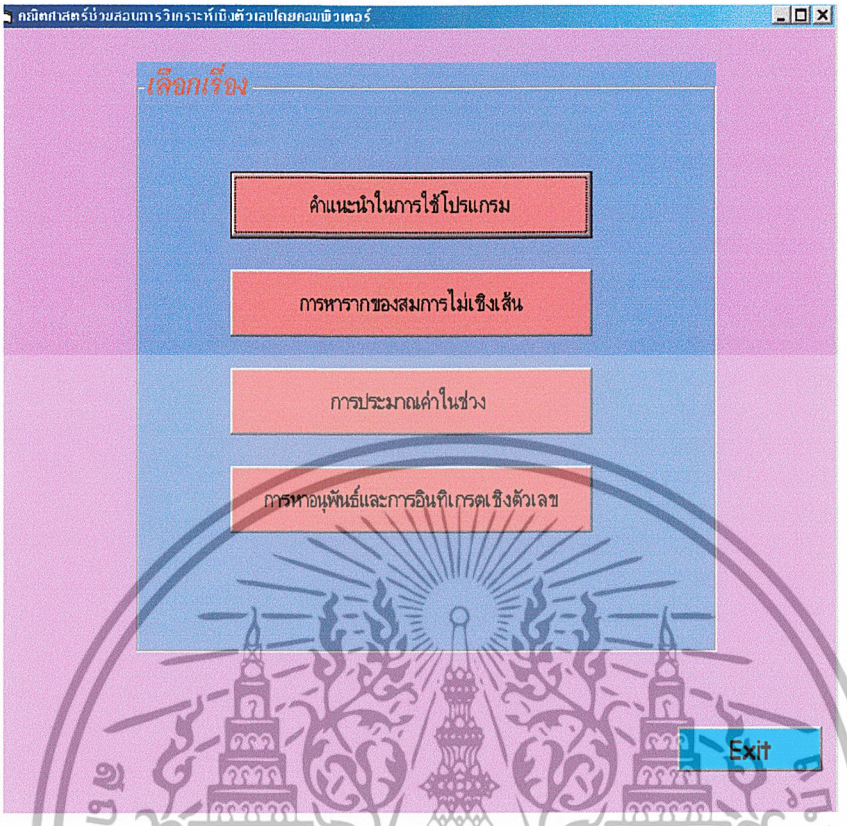
4.1 การทดลองและผลการทดลอง



รูป 4.1 **แสดงหน้าจอแรกของโปรแกรม**

- เมื่อคลิกปุ่ม enter จะเข้าสู่โปรแกรมช่วยสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลข และแสดงหน้าจอเลือกเรื่อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 แสดงการเลือกเรื่องคำแนะนำในการใช้โปรแกรม

รูปที่ 4.2 แสดงภาพเมื่อคลิกปุ่ม enter จากหน้าจอแรก ประกอบด้วย

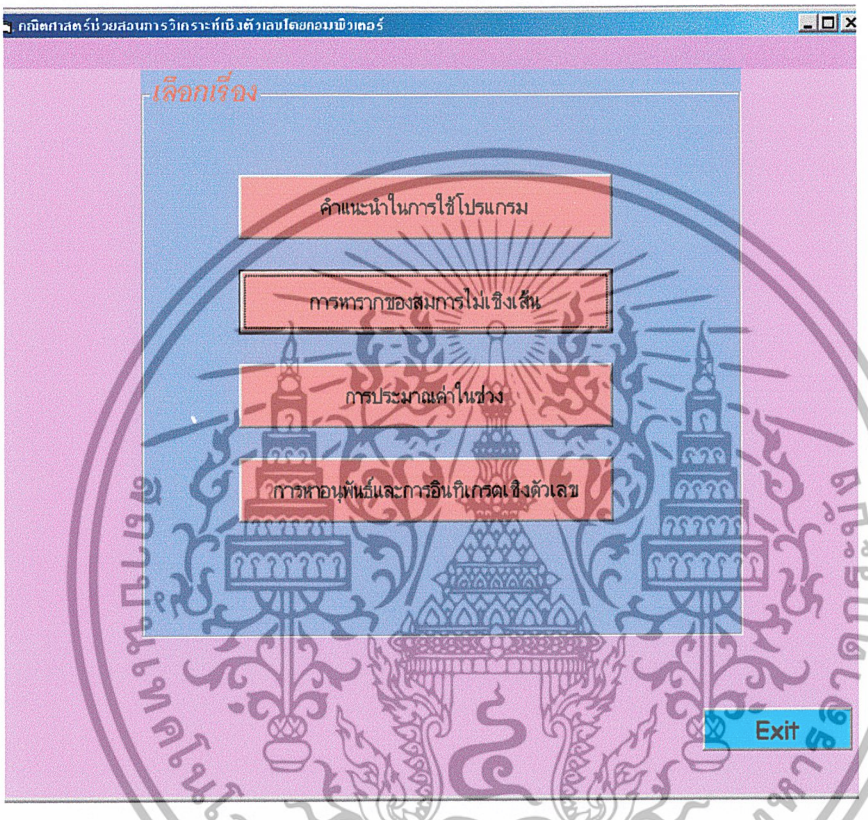
1. ชื่อเรื่อง ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อศึกษาตามชื่อเรื่องนั้น ถ้าคลิกที่คำแนะนำในการใช้โปรแกรมก็จะแสดงหน้าจอคำแนะนำ
2. ปุ่ม exit เมื่อคลิกจะทำการออกจากโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.1 การทดลองที่1

ต้องการป้อนค่าฟังก์ชันแบบพหุนาม โดยฟังก์ชัน $f(x)=x^3+2x^2-1=0$ เข้ามาเพื่อให้โปรแกรมทำการหารากของสมการที่อยู่ในช่วง (-10 , 10) ให้ค่าคลาดเคลื่อนมีค่า 0.01 และแสดงกราฟ ซึ่งมีวิธีการทำงานดังนี้

1. ทำการเลือกเรื่อง โดยคลิกไปที่ปุ่มการหารากของสมการไม่เชิงเส้น

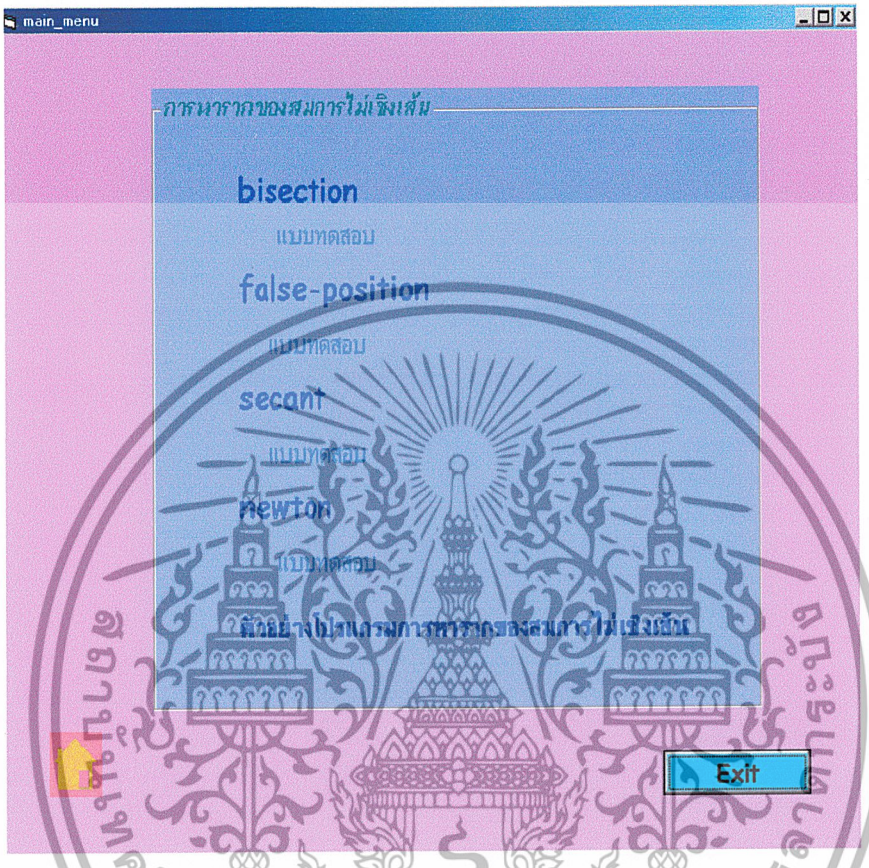


รูปที่ 4.3 แสดงการเลือกเรื่องการหารากของสมการไม่เชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ถ้าต้องการอ่านคำอธิบายของเรื่องการหารากของสมการไม่เชิงเส้นโดยวิธี Bisection ให้คลิกที่คำว่า Bisection

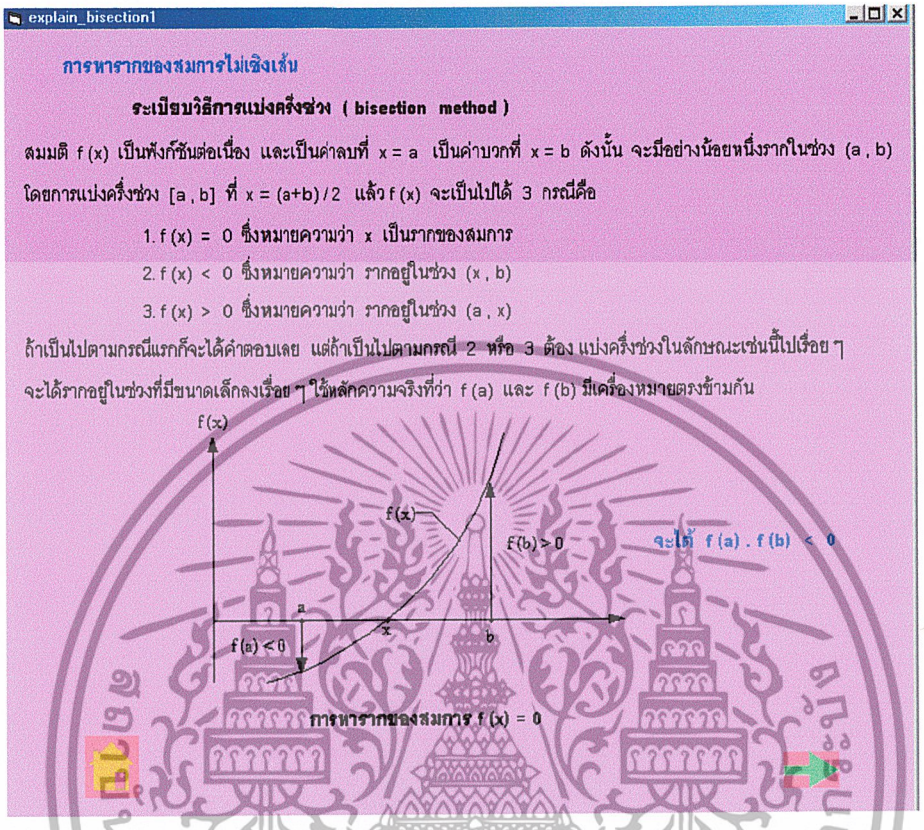
3. ถ้าคลิกที่รูปบ้านจะกลับไปที่หน้าเลือกเรื่อง



รูปที่ 4.4 แสดงวิธีการหารากของสมการไม่เชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. ทำการศึกษาเนื้อหา เมื่อคลิกที่ลูกศรจะทำการแสดงเนื้อหาหน้าต่อไป

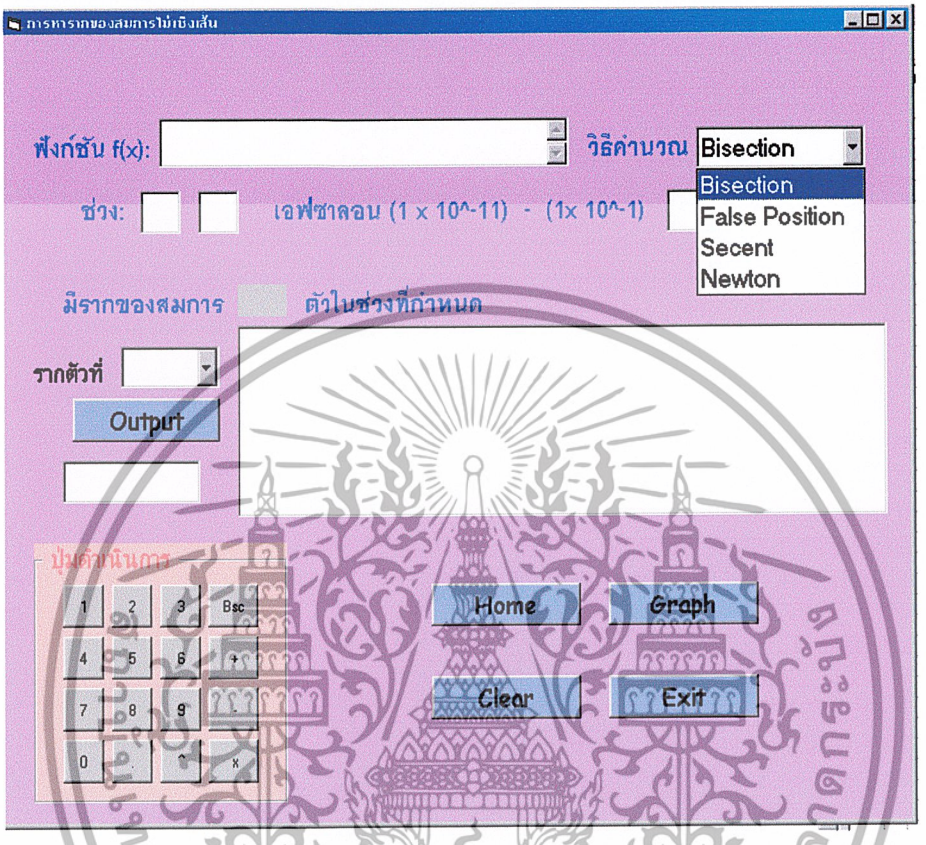


รูปที่ 4.5 แสดงเนื้อหาเรื่อง Bisection

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. จาก form main_menu เรื่องการหารากของสมการไม่เชิงเส้น ถ้าต้องการดูตัวอย่างให้คลิกที่คำว่า ตัวอย่างโปรแกรมการหารากของสมการไม่เชิงเส้น

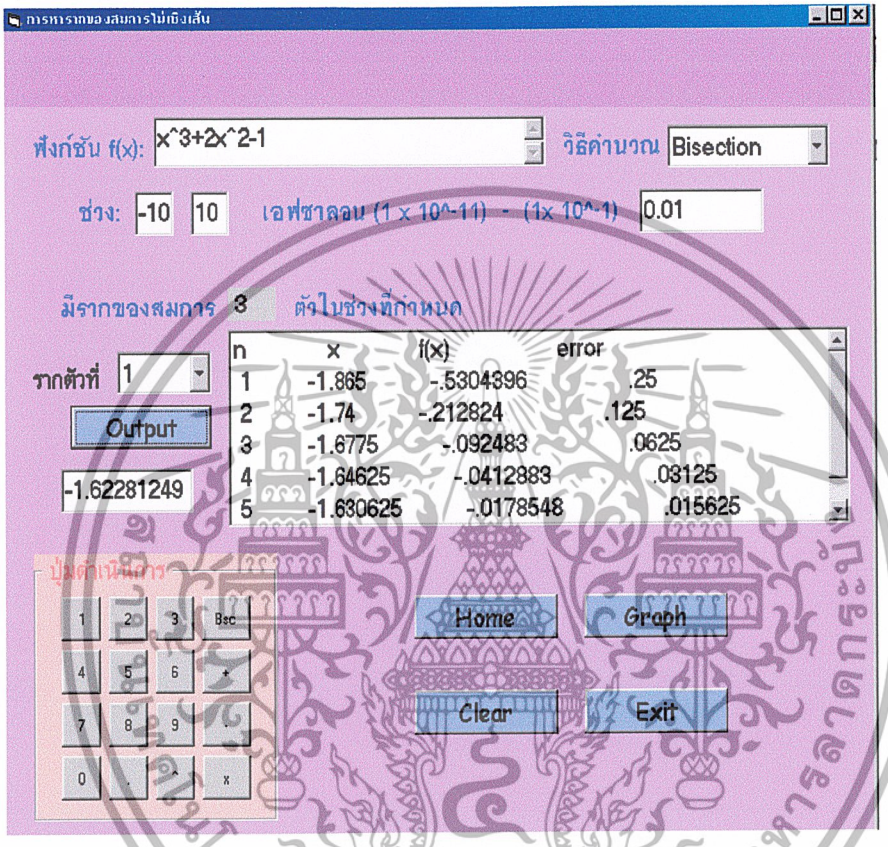
6. ทำการเลือกวิธีคำนวณ โดยมีทั้งหมด 4 วิธี



รูปที่ 4.6 แสดงการเลือกวิธีคำนวณในหน้าตัวอย่างของการหาราก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

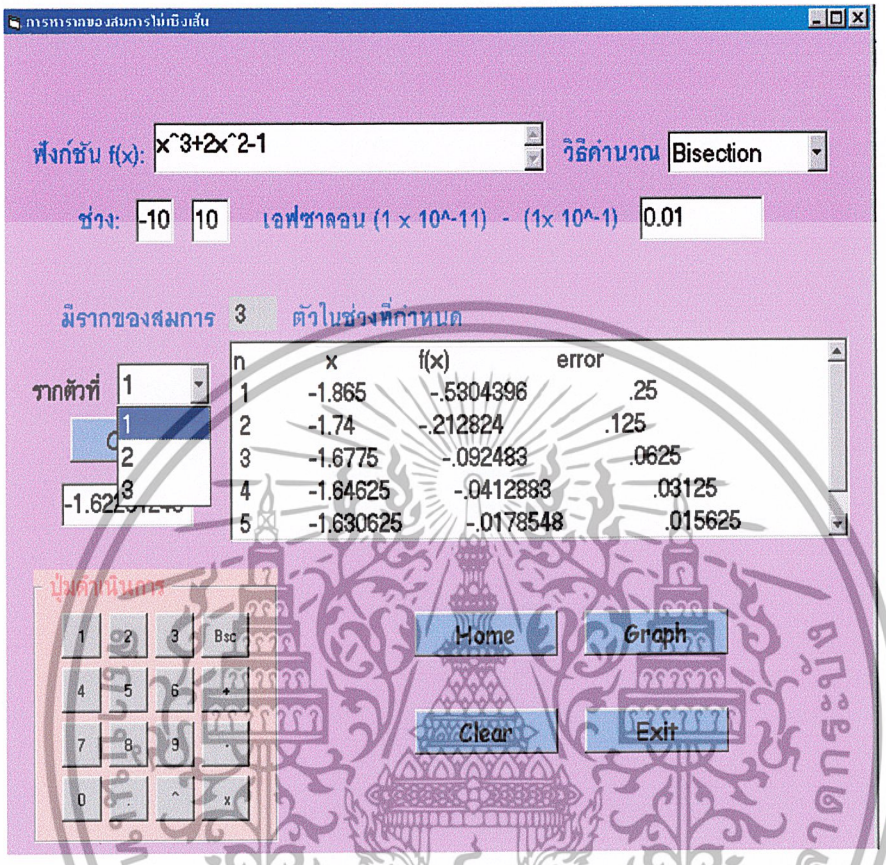
7. ทำการป้อนฟังก์ชัน $f(x)=x^3+2x^2-1=0$ โดยทำการพิมพ์ x^3+2x^2-1
8. กำหนดช่วงที่ต้องการหาราก คือ (-10 , 10) ความคลาดเคลื่อน 0.01
9. จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Output เพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล



รูปที่ 4.7 แสดงการหารากของสมการไม่เชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

10. เลือกค่ารากที่ต้องการ รากจะแสดงที่ด้านล่างของปุ่ม Output
11. ถ้าต้องการป้อนค่าฟังก์ชันใหม่ ให้คลิกที่ปุ่ม Clear จะทำการเคลียร์หน้าจอทั้งหมด



รูปที่ 4.8 แสดงการเลือกรากของสมการไม่เชิงเส้น

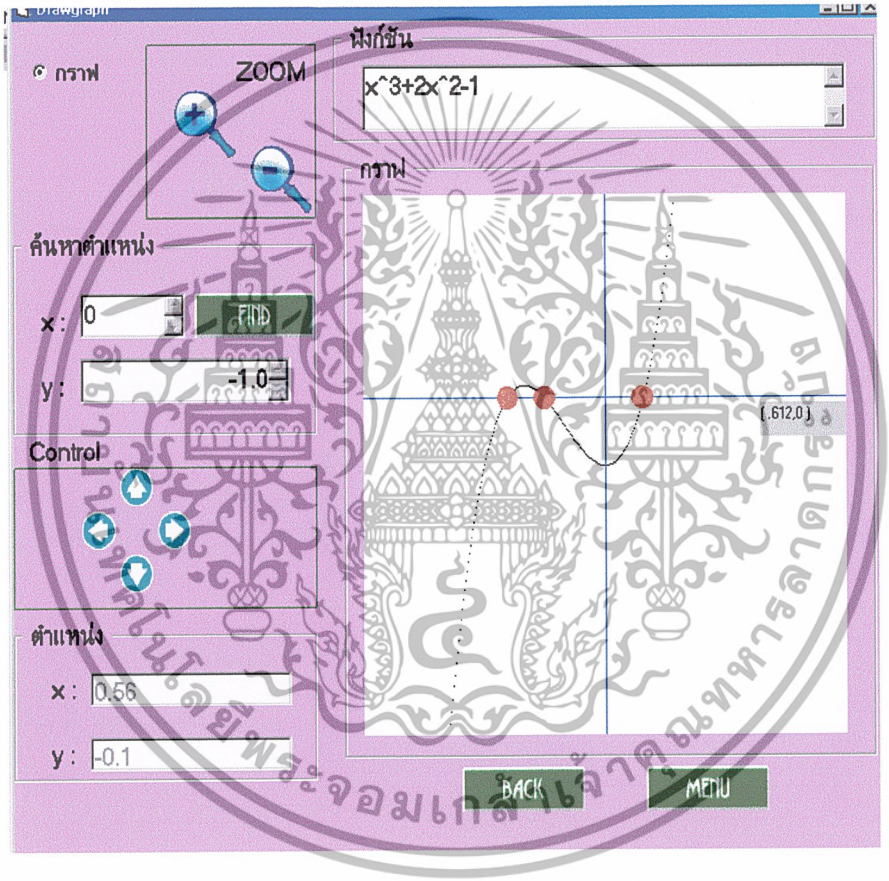
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

12. เมื่อคลิกที่ปุ่ม Graph จะแสดงกราฟอย่างคร่าว ๆ ถ้าต้องการดูกราฟอย่างละเอียดให้คลิกที่ปุ่มกราฟ จากนั้น ใส่ค่า x = 0 แล้วกดปุ่ม Find

13. ถ้าต้องการขยายกราฟให้คลิกที่ แว่นขยาย+ ถ้าต้องการย่อกราฟคลิกที่แว่นขยาย -

14. ถ้าต้องการค้นหาตำแหน่งให้ใส่ค่า x แล้วคลิกที่ปุ่ม Find จากนั้นโปรแกรมจะทำการแสดงค่า y

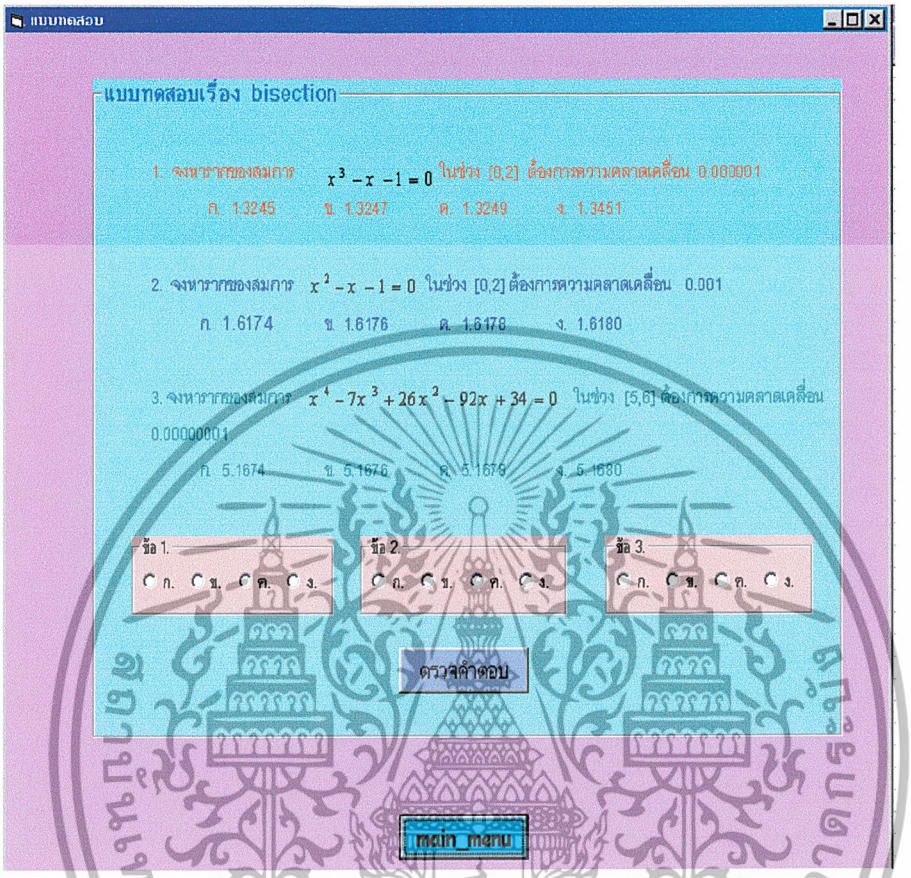
15. ถ้าต้องการเลื่อนกราฟ ให้คลิกที่ปุ่มลูกศรตามต้องการ



รูปที่ 4.9 **แสดงการวาดกราฟ** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

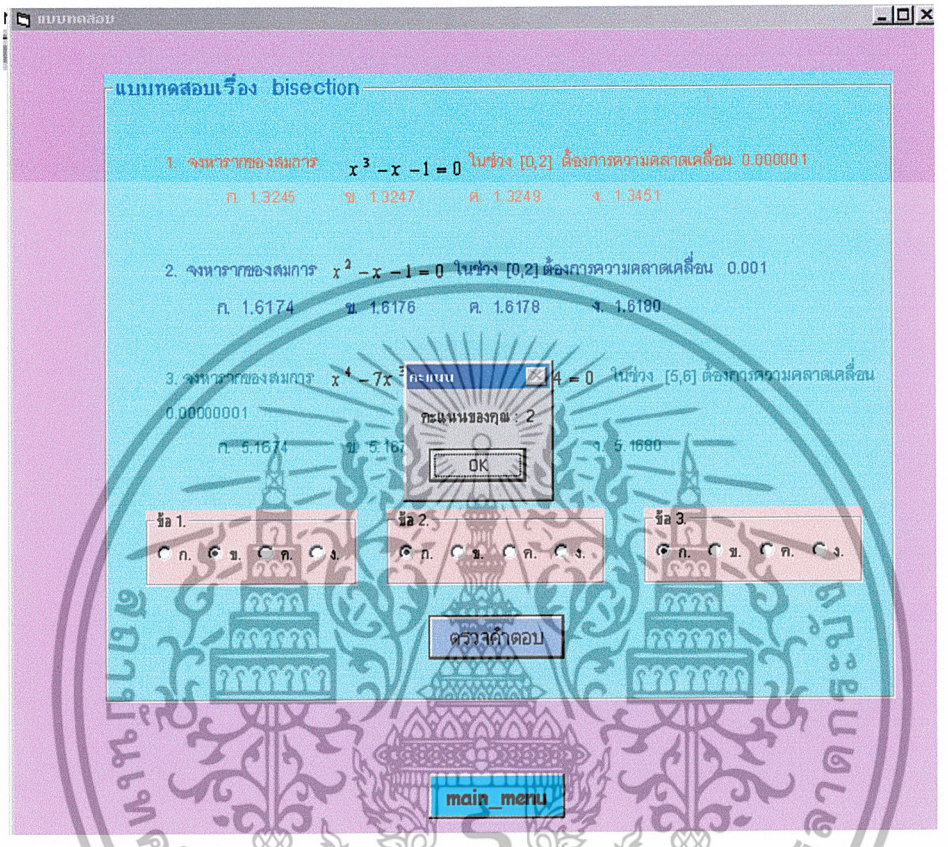
16. จาก form main_menu เรื่องการหารากของสมการไม่เชิงเส้น ถ้าต้องการทำแบบทดสอบเรื่อง Bisection ให้คลิกที่คำว่าแบบทดสอบด้านล่าง Bisection



รูปที่ 4.10 แสดงแบบทดสอบเรื่อง Bisection

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

13. เมื่อคลิกเลือกคำตอบครบ 3 ข้อ ถ้าต้องการตรวจคำตอบ ให้คลิกที่ตรวจคำตอบ โปรแกรมจะทำการประมวลผลและแสดงคะแนนดังรูปที่ 4.11 ถ้าต้องการทำแบบทดสอบใหม่ให้คลิกที่ปุ่ม OK



รูปที่ 4.11 แสดงการตรวจคำตอบของแบบทดสอบ Bisection

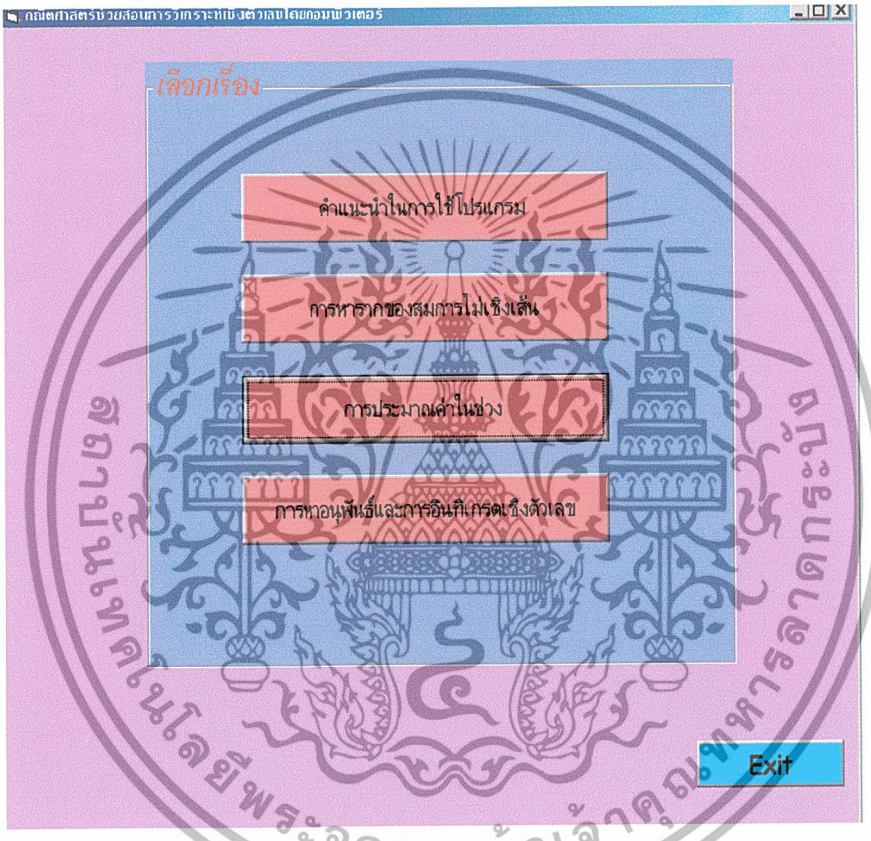
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.2 การทดลองที่ 2

ต้องการประมาณค่าในช่วงพหุนาม โดยกำหนดจุดที่พหุนามผ่าน คือ (0,3) (1,2) (2,7) (4,59) และกำหนดค่าที่ต้องการประมาณ คือ 3 เข้ามาเพื่อให้โปรแกรมทำการประมาณค่าซึ่งมีวิธีการทำงานดังนี้

<u>วิธีลากรองจ์</u>

1. ทำการเลือกเรื่อง โดยคลิกไปที่ปุ่มการประมาณค่าในช่วง

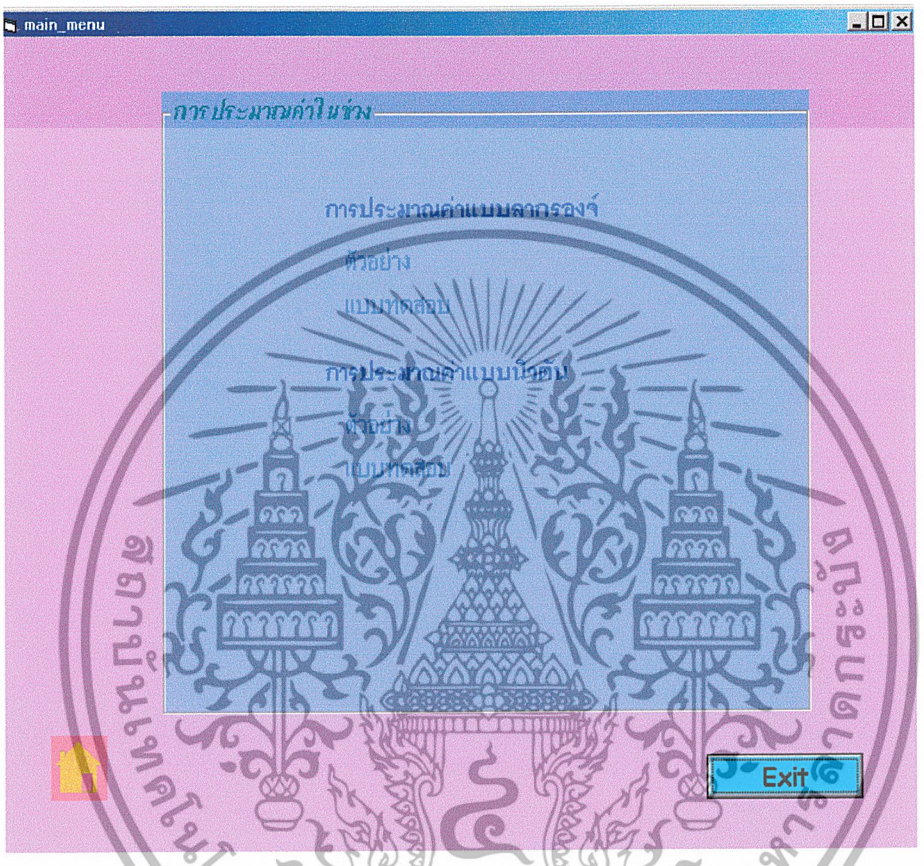


รูปที่ 4.12 แสดงการเลือกเรื่องการประมาณค่าในช่วง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ถ้าต้องการอ่านเนื้อหาให้คลิก ที่คำว่า การประมาณค่าแบบลากรองจ์

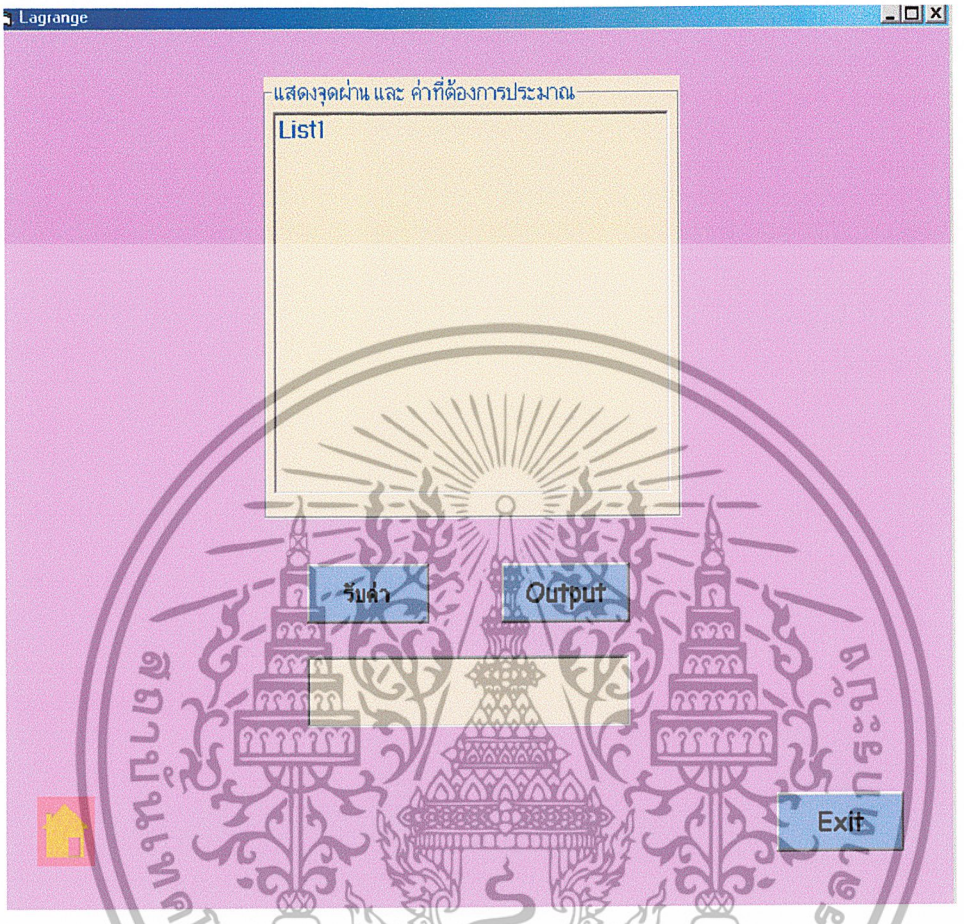
3. ถ้าต้องการดูตัวอย่างของลากรองจ์ ให้คลิกที่คำว่า ตัวอย่าง ใต้การประมาณค่าแบบลากรองจ์



รูปที่ 4.13 แสดงวิธีเรื่องการประมาณค่าในช่วง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

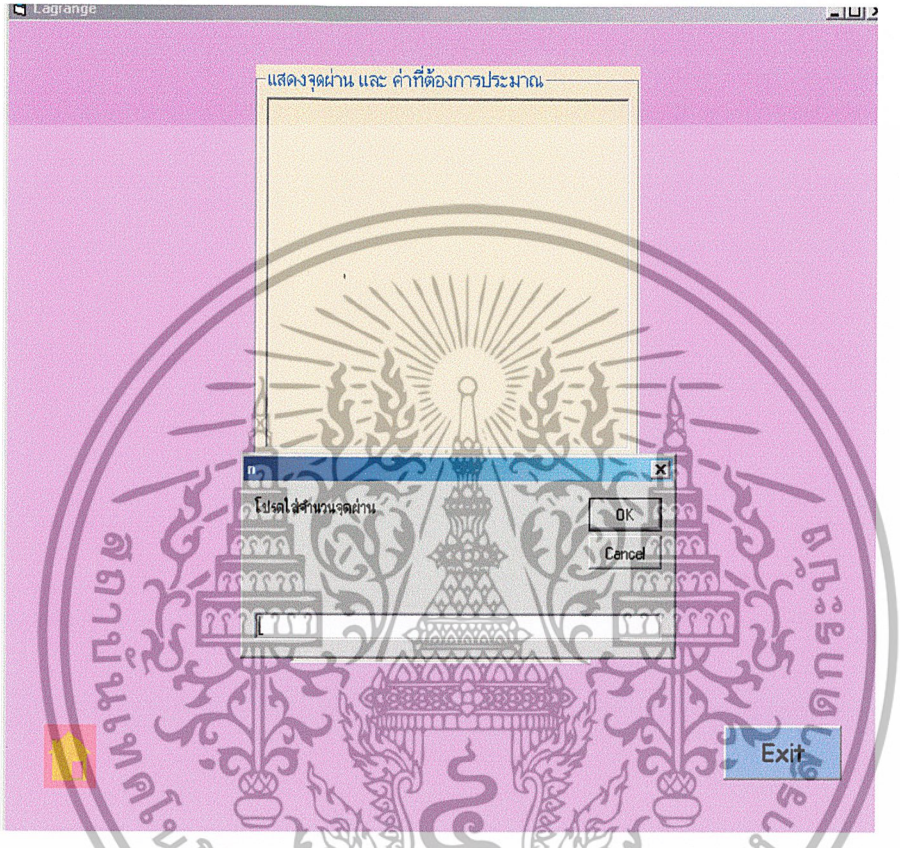
4. เมื่อคลิกตัวอย่างลากรองจ์ จะแสดงหน้าจอดังรูป ที่ 4.14



รูปที่ 4.14 แสดงหน้าจอตัวอย่างลากรองจ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. คลิก ที่ปุ่ม รับค่า หน้าจอจะแสดงดังรูป 4.15
6. ป้อนค่าตามที่ถาม แล้วคลิก OK หรือ กด Enter
7. ถ้าต้องการป้อนค่าใหม่ ให้คลิกที่ปุ่ม รับค่า



รูปที่ 4.15 แสดงการรับค่าของตัวอย่างลากรองจ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. เมื่อป้อนค่าเรียบร้อยแล้ว คลิกที่ปุ่ม Output เพื่อแสดงผลยังช่องด้านล่าง

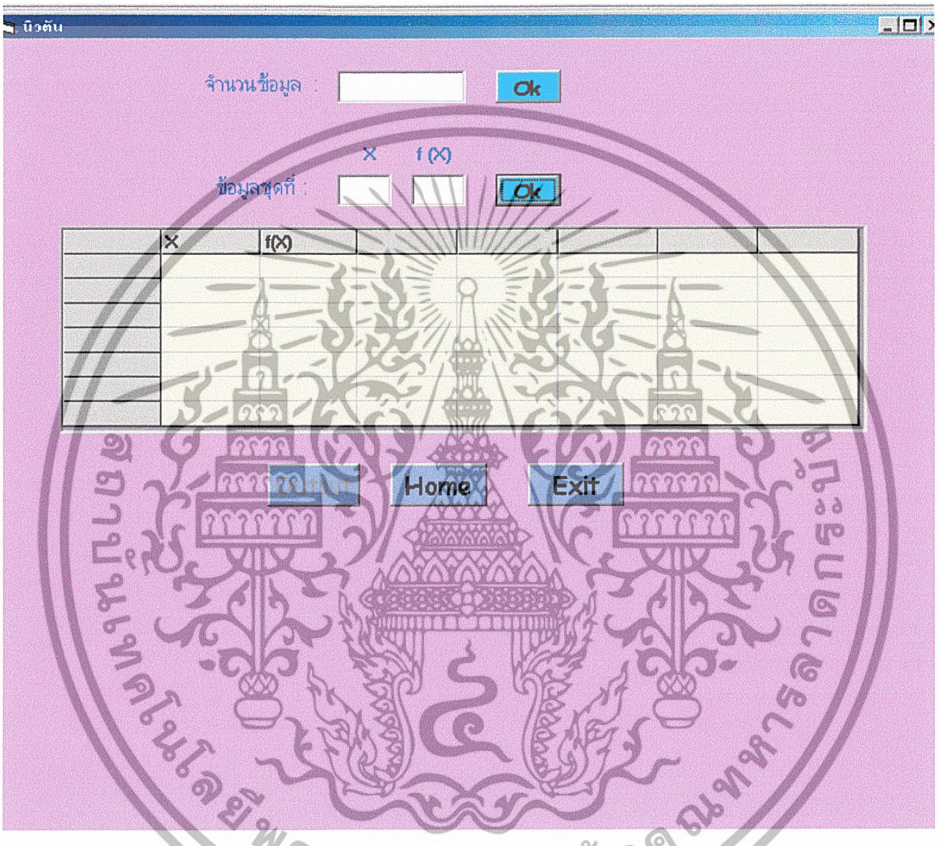


รูปที่ 4.16 แสดงคำตอบของตัวอย่างลากรองจ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีนิวตัน

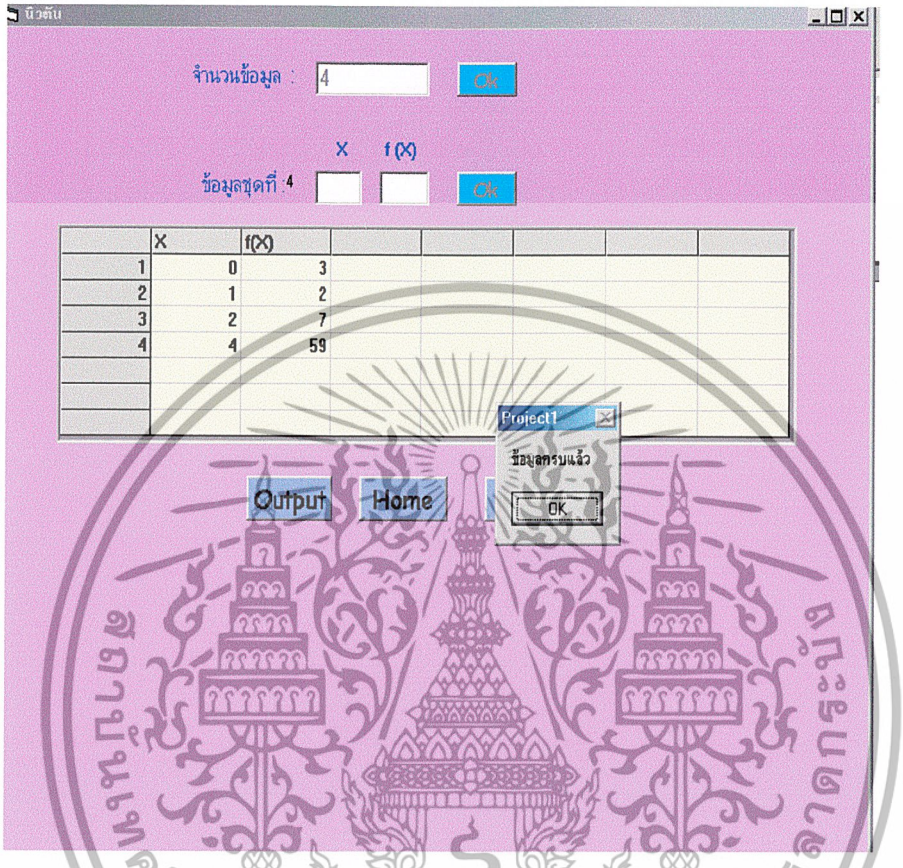
1. ทำการเลือกเรื่อง โดยคลิกไปที่ปุ่มการประมาณค่าในช่วงเช่นเดียวกับวิธีของลากรองจ์
2. ถ้าต้องการดูตัวอย่าง คลิกที่คำว่าตัวอย่างด้านล่าง การประมาณค่าแบบนิวตัน
3. เมื่อคลิกตัวอย่างของนิวตัน จะแสดงดังรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 แสดงตัวอย่างการประมาณค่าในช่วงวิธี นิวตัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

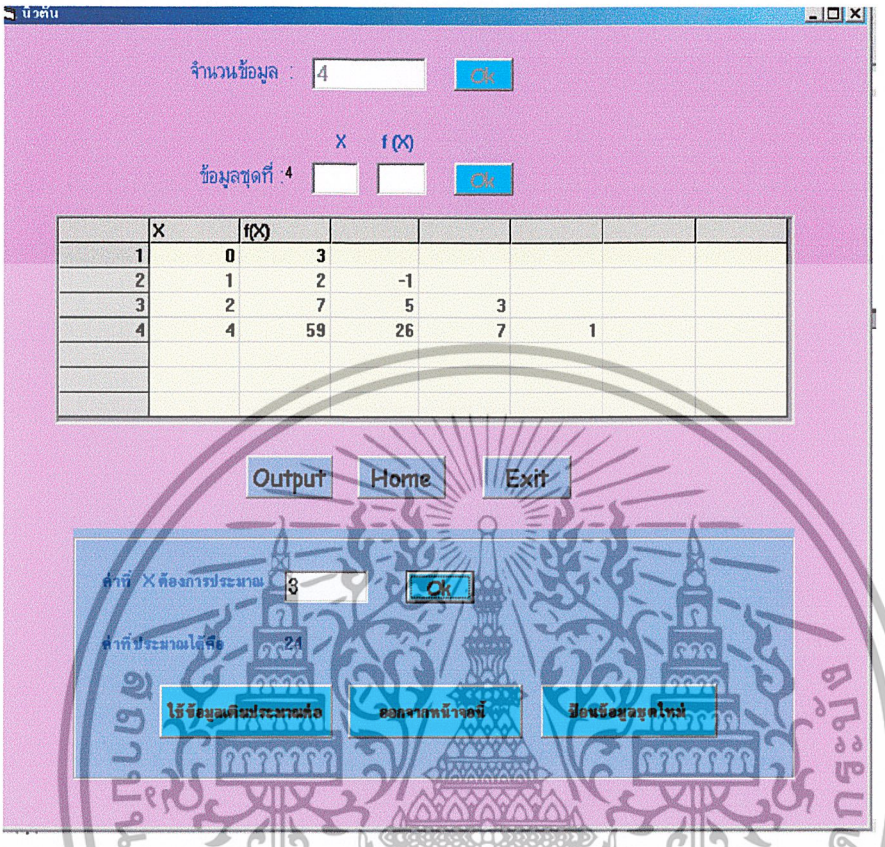
4. ป้อนค่าจำนวนข้อมูล คลิกปุ่ม Ok
5. ป้อนค่าข้อมูล เมื่อป้อนข้อมูลครบ จะมีข้อความขึ้นเตือน ให้คลิก Ok



รูปที่ 4.18 แสดงการป้อนข้อมูลการประมาณค่าในช่วงวิธี นิวตัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. คลิกที่ปุ่ม Output ป้อนค่าที่ต้องการประมาณ แล้วคลิก Ok



รูปที่ 4.19 แสดงคำตอบการประมาณค่าในช่วงวิธี นิวตัน

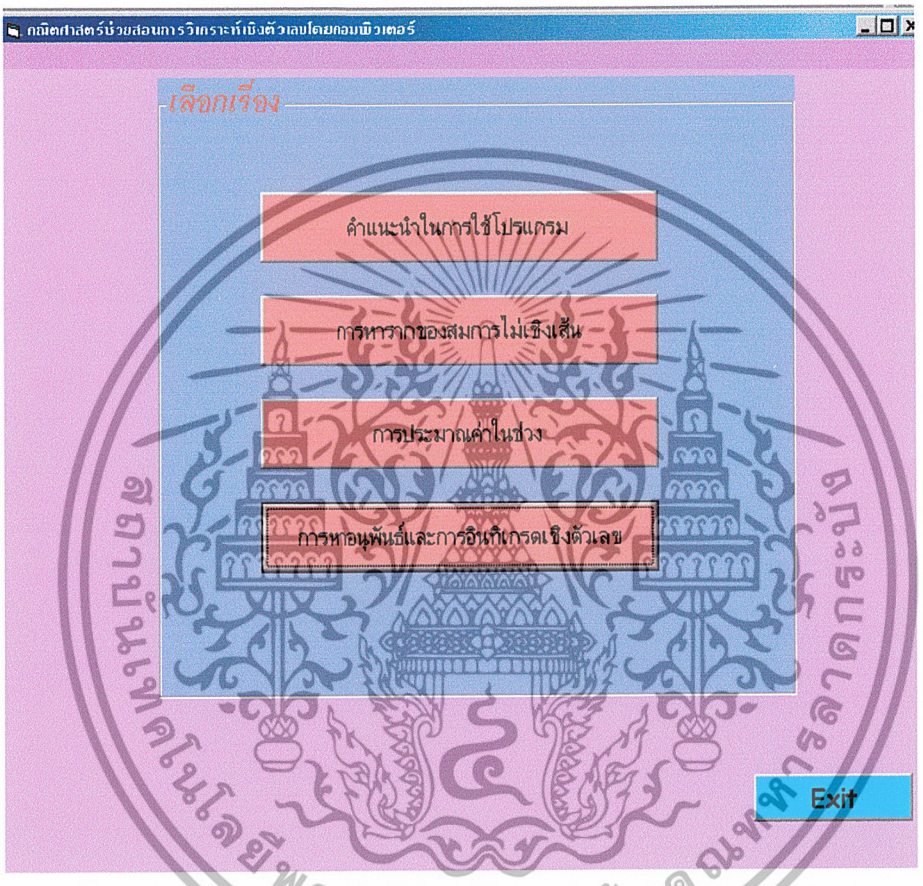
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.3 **การทดลองที่3**

ต้องการหาค่าอินทิเกรต ของฟังก์ชัน $f(x)=x^3+2x^2+x-1$ โดยใช้วิธีของกฎสี่เหลี่ยมคางหมู และวิธีของรอมเบิร์ก ซึ่งมีวิธีการทำงานดังนี้

<u>กฎสี่เหลี่ยมคางหมู</u>

1. ทำการเลือกเรื่อง โดยคลิกไปที่ปุ่มการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข



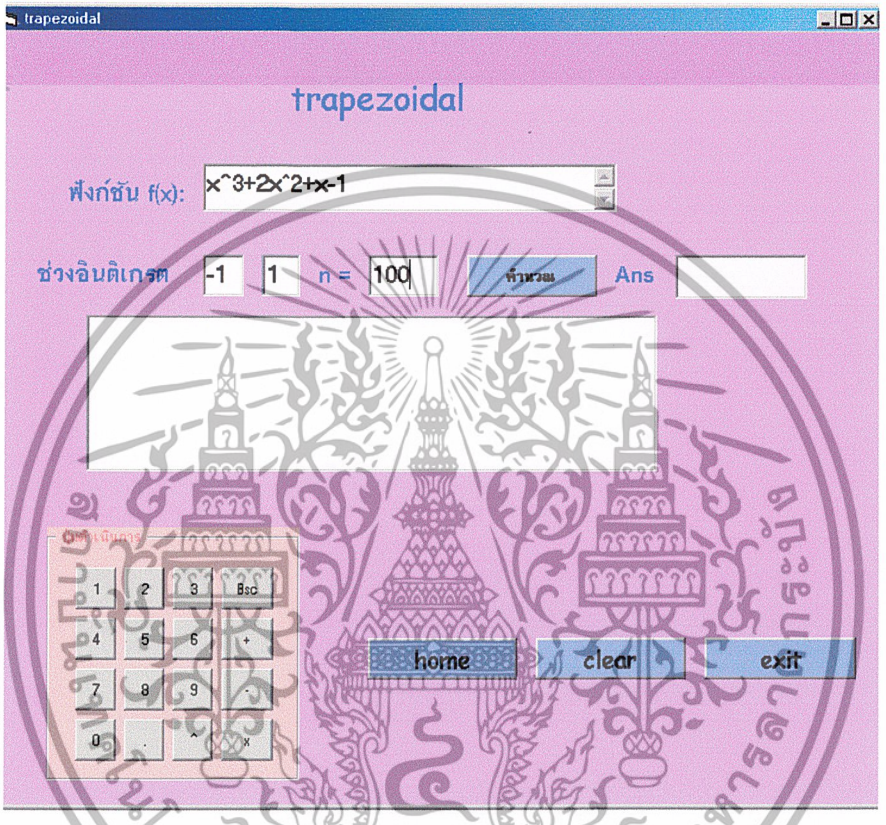
รูปที่ 4.20 แสดงการเลือกเรื่องการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. จาก form main_menu เรื่องการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข ถ้าต้องการดูตัวอย่างของกฎสี่เหลี่ยมคางหมู ให้คลิกที่คำว่าตัวอย่างใต้คำว่ากฎสี่เหลี่ยมคางหมู

3. ทำการป้อนฟังก์ชัน $f(x)=x^3+2x^2+x-1$ โดยพิมพ์ x^3+2x^2+x-1

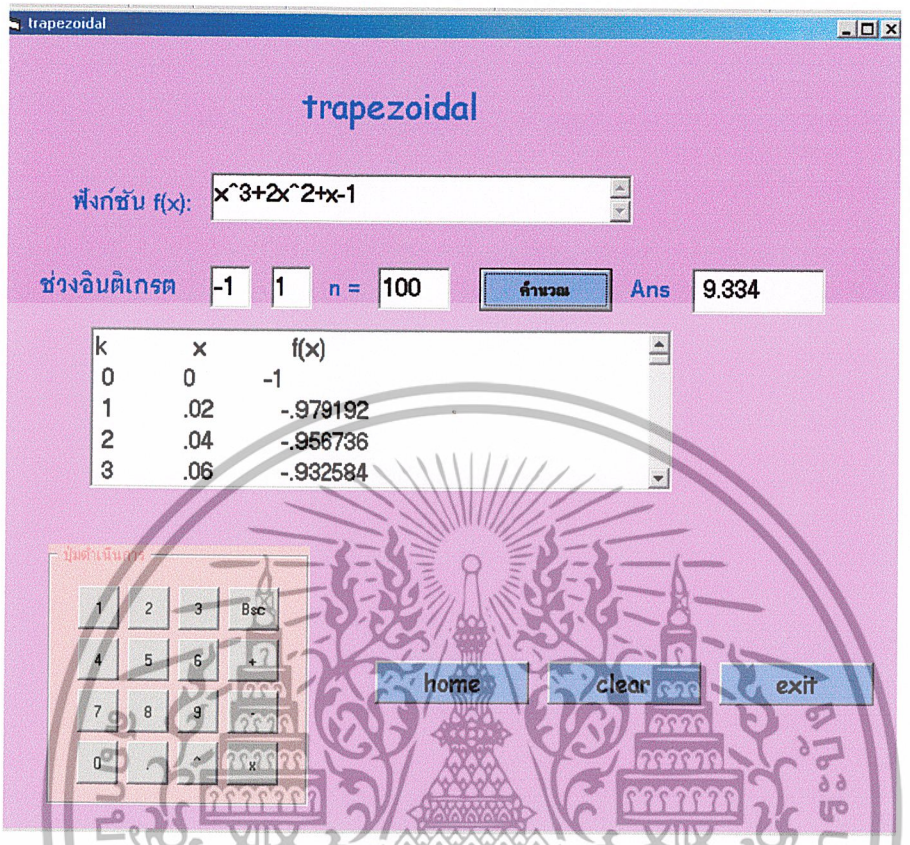
4. ป้อนช่วงที่ต้องการอินทิเกรต คือ (-1 , 1) จำนวน n = 100



รูปที่ 4.21 แสดงการป้อนฟังก์ชันในตัวอย่างเรื่องกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. คลิกที่ปุ่มคำนวณเพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล



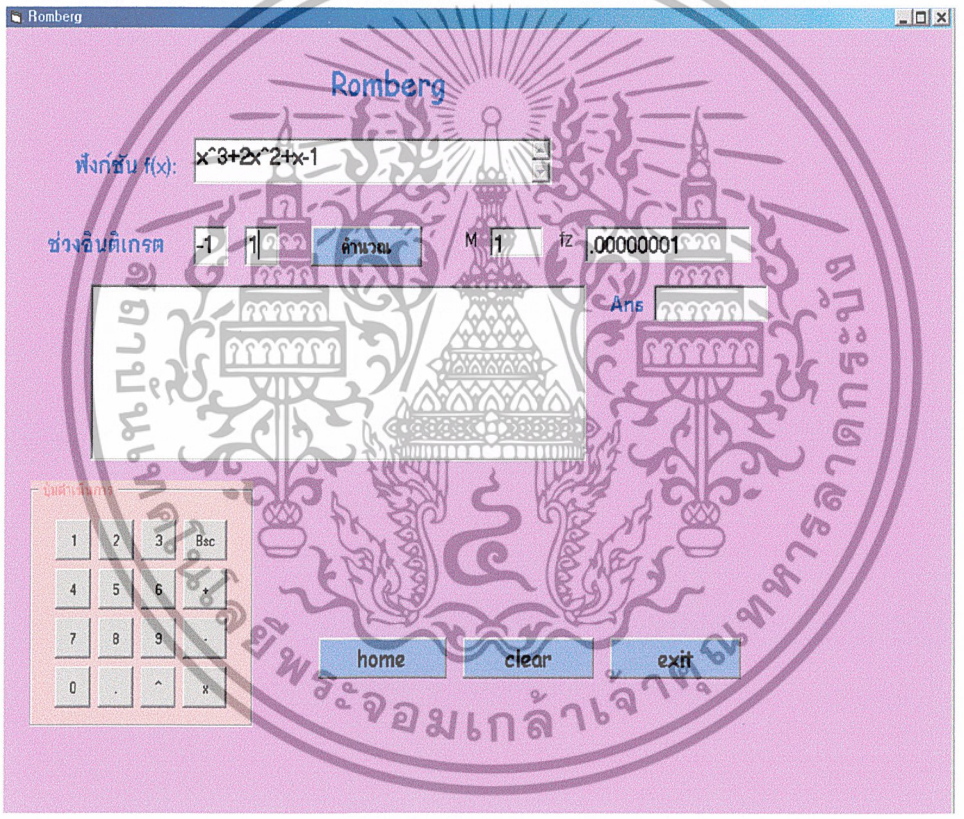
รูปที่ 4.22 แสดงการหาค่าอินทิเกรตโดยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>รอมเบิร์ก</u>

ต้องการหาค่าอินทิเกรต ของฟังก์ชัน $f(x)=x^3+2x^2+x-1$ โดยใช้วิธีของ romberg ซึ่งมีวิธีการทำงานดังนี้

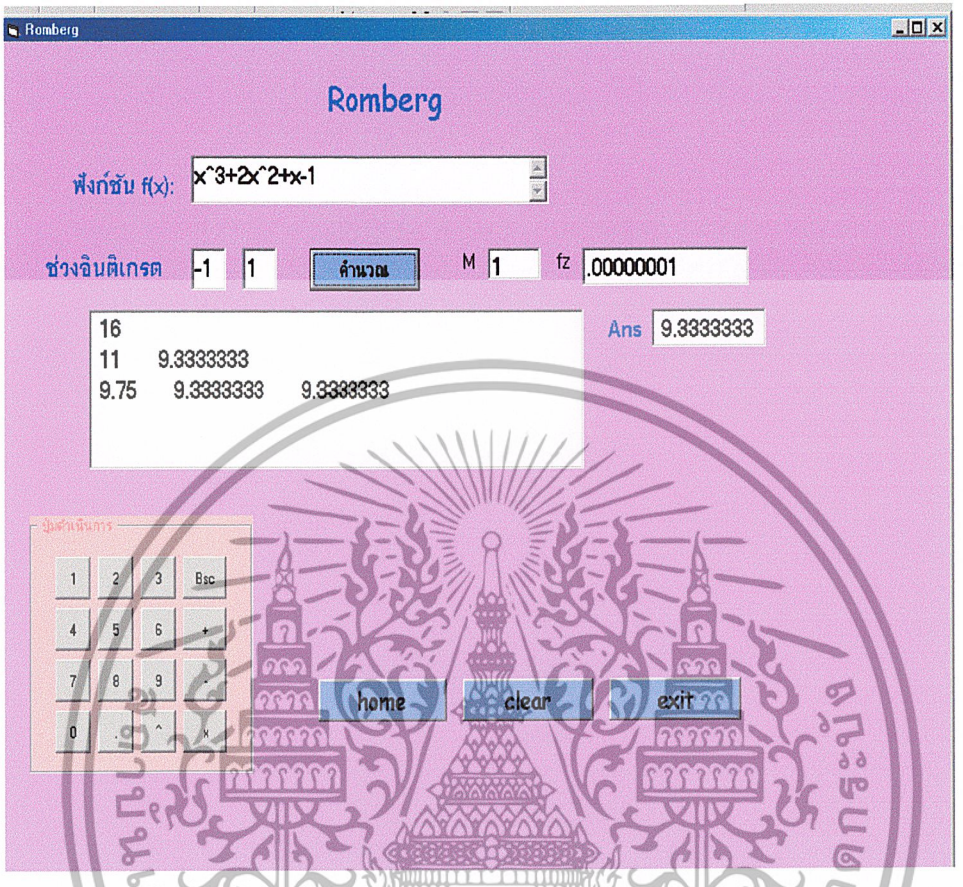
1. ทำการเลือกเรื่อง โดยคลิกไปที่ปุ่มการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตเชิงตัวเลขเช่นเดียวกับวิธีของกฎสี่เหลี่ยมคางหมู
2. ถ้าต้องการดูตัวอย่าง คลิกที่คำว่าตัวอย่างด้านล่าง Romberg
3. ทำการป้อนฟังก์ชัน $f(x)=x^3+2x^2+x-1$ โดยพิมพ์ x^3+2x^2+x-1
4. ป้อนช่วงที่ต้องการอินทิเกรต คือ (-1 , 1)



รูปที่ 4.23 แสดงการป้อนฟังก์ชันในตัวอย่างเรื่อง รอมเบิร์ก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. คลิกที่ปุ่มคำนวณเพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล



รูปที่ 4.24 **แสดงการหาค่าอินทิเกรตโดยวิธี รอมเบิร์ก**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.4 การทดลองที่ 4

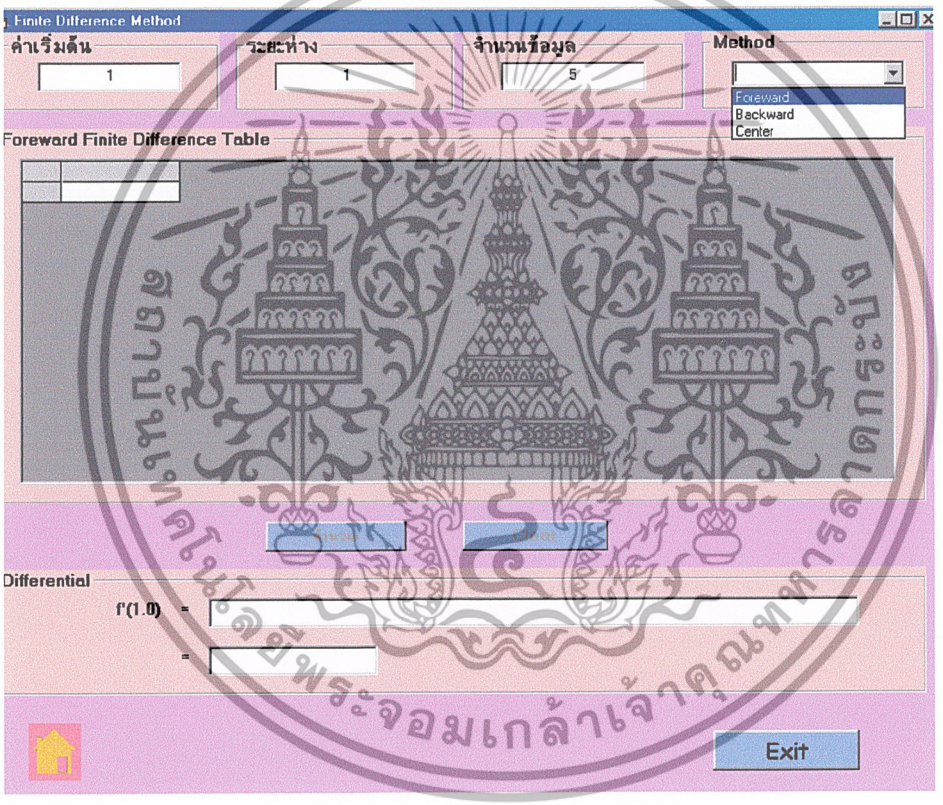
ต้องการหาค่าอนุพันธ์อันดับ1 วิธี Newton โดยกำหนด ข้อมูล

x : 1 2 3 4 5

f(x): 1 4 9 16 25

ที่ x = 1 โดยใช้ ผลต่างสืบเนื่องไปข้างหน้า มีขั้นตอนดังนี้

1. คลิกที่ปุ่ม การหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข
2. หน้า main_menu ให้เลือกคลิกที่ปุ่มคำว่า ตัวอย่าง ด้านล่างคำว่าการหาค่าอนุพันธ์
3. ป้อนค่าใส่ดังรูป และเลือกวิธี

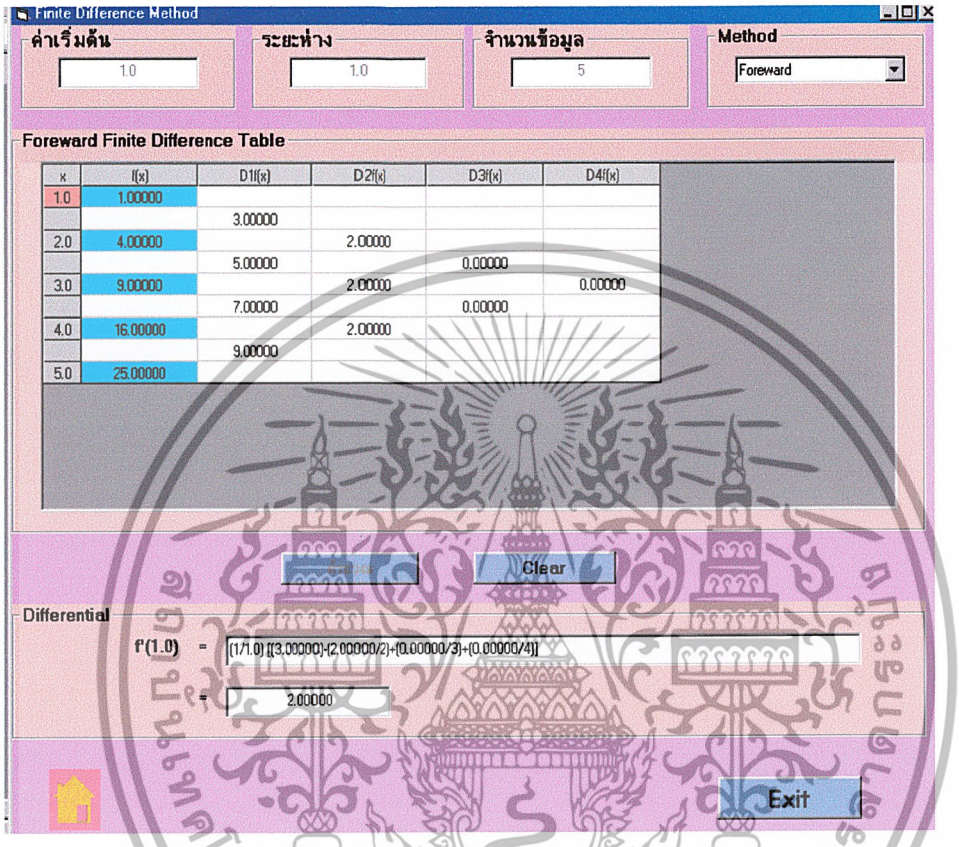


รูปที่ 4.25 แสดงการป้อนข้อมูลเรื่องการหาอนุพันธ์วิธี นิวตัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. ป้อนค่า f(x) ลงในตาราง แล้วคลิกปุ่มคำนวณ โปรแกรมจะทำการหาค่าอนุพันธ์ที่1 ของค่าเริ่มต้น

5. ถ้าต้องการป้อนค่าใหม่ คลิก Clear

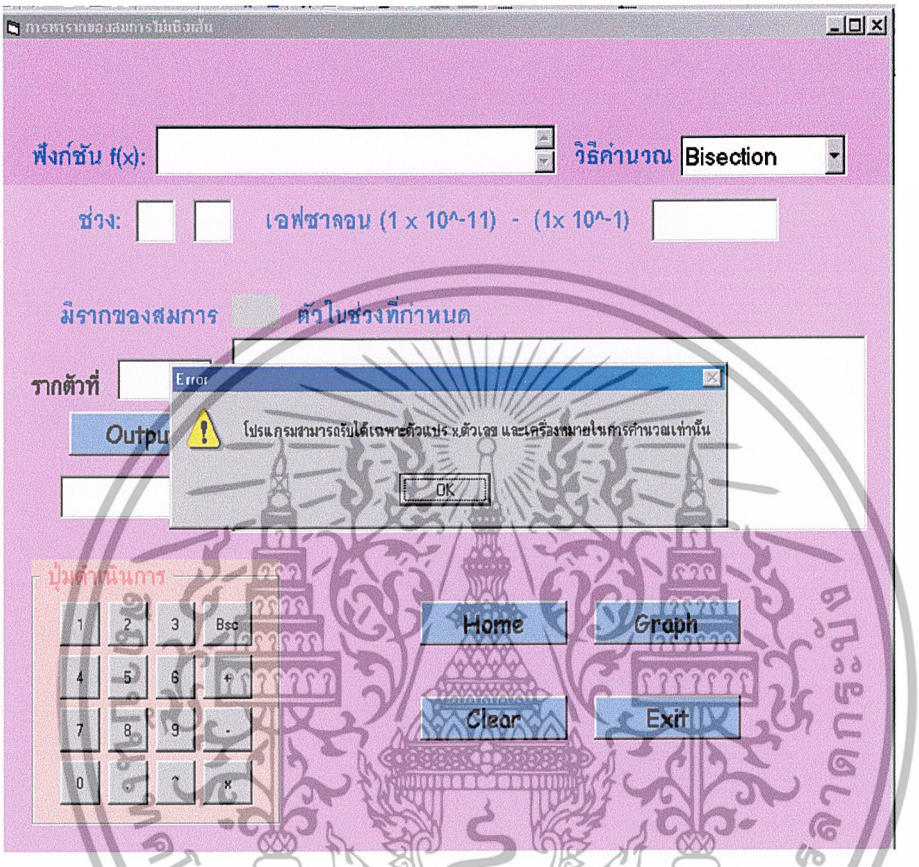


รูปที่ 4.26 แสดงการหาค่าอนุพันธ์วิธี นิวตัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 การแสดงข้อผิดพลาดของโปรแกรม

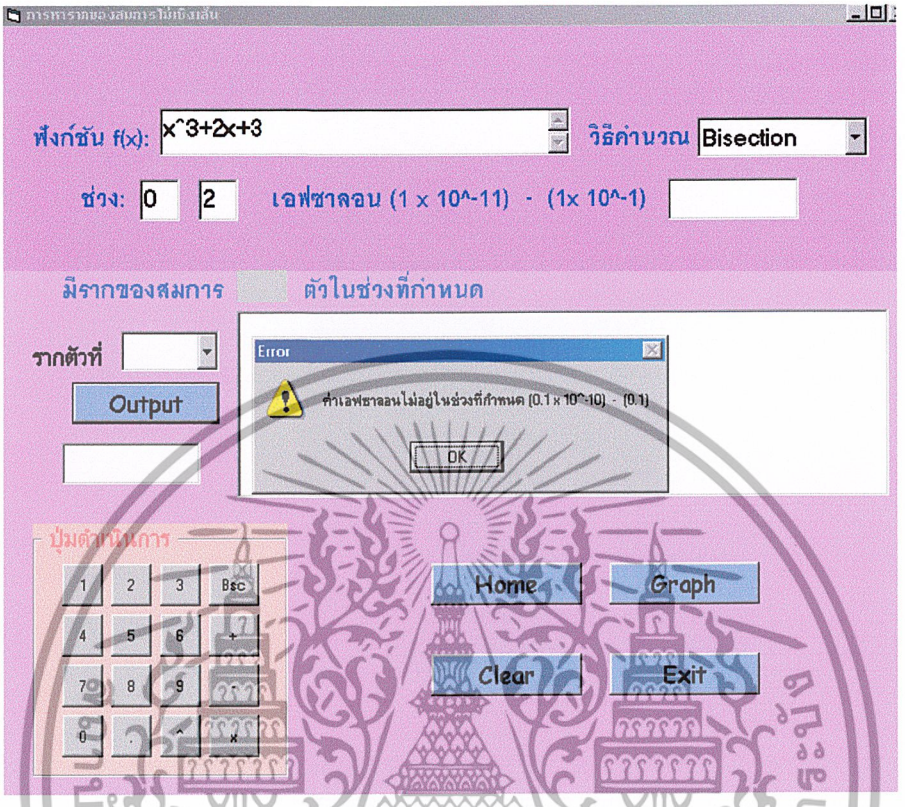
4.2.1 เมื่อป้อนค่าฟังก์ชันเป็นตัวอักษร จะแสดงข้อผิดพลาดดังรูปที่ 4.27



รูปที่ 4.27 แสดงข้อผิดพลาดเมื่อป้อนตัวอักษร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

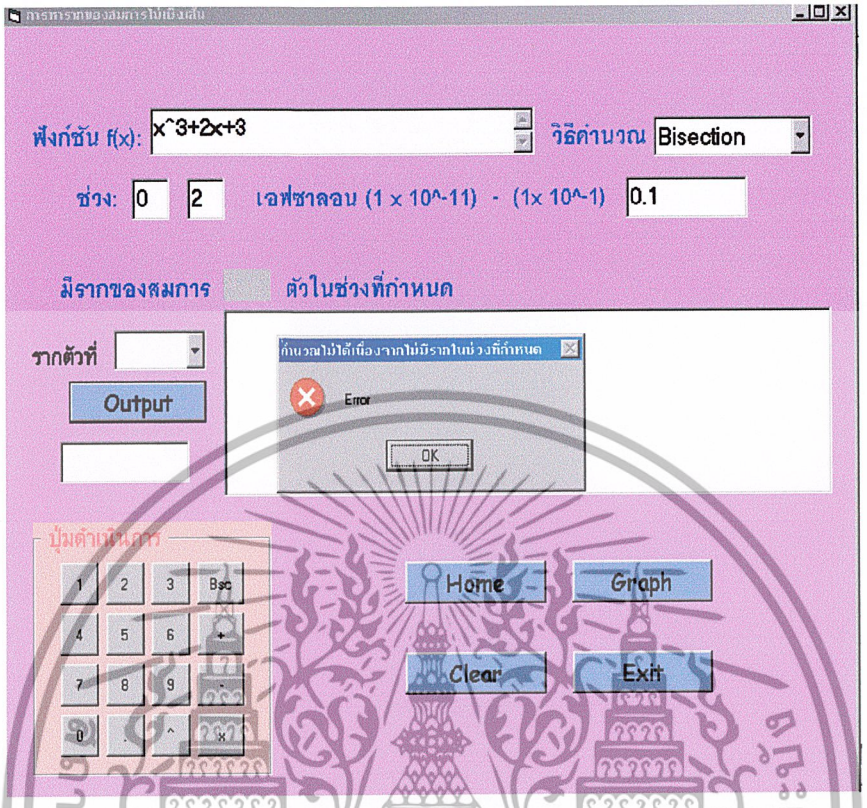
4.2.2 เมื่อไม่ได้ป้อนค่าเอฟซาลอน แล้วกด Output จะแสดงข้อผิดพลาดดังรูปที่ 4.28



รูปที่ 4.28 แสดงข้อผิดพลาดเมื่อไม่ได้ป้อนค่าเอฟซาลอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

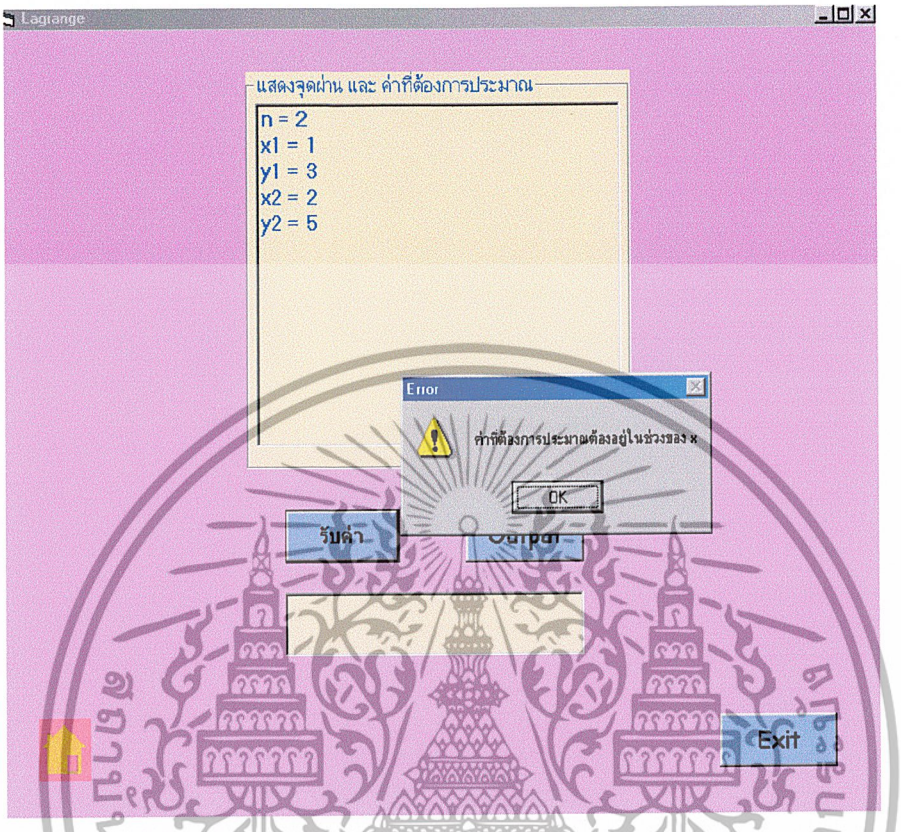
4.2.3 เมื่อค่ารากไม่อยู่ในช่วงที่กำหนด จะแสดงข้อผิดพลาดดังรูปที่ 4.29



รูปที่ 4.29 แสดงข้อผิดพลาดเมื่อค่ารากไม่อยู่ในช่วง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

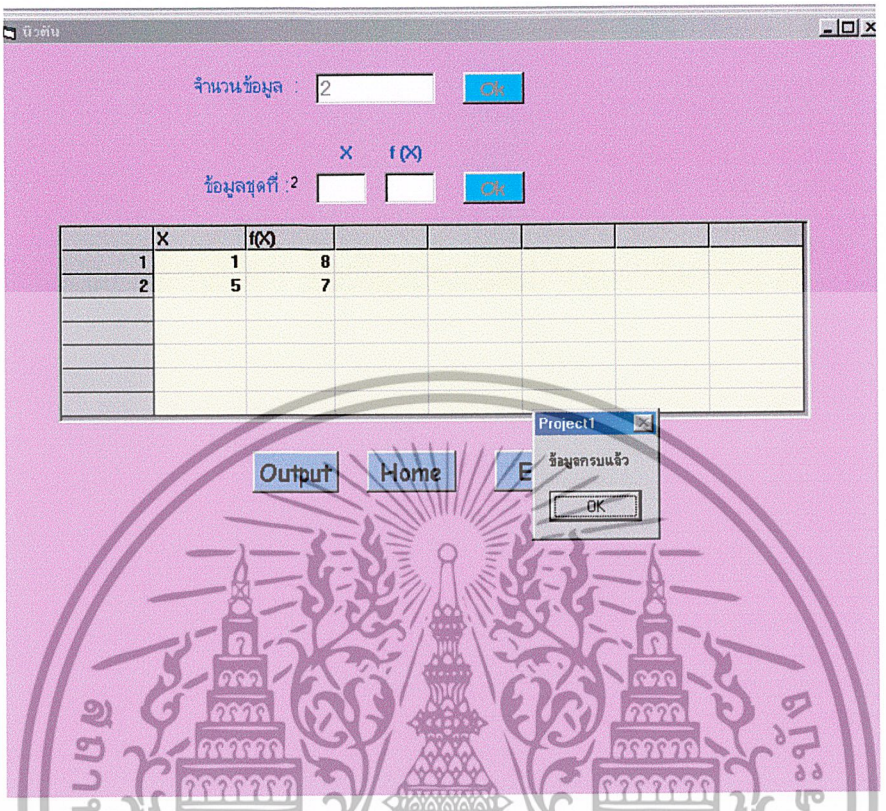
4.2.4 แสดงคำเตือนให้ป้อนค่าที่ต้องการประมาณให้อยู่ในช่วงของ x จะแสดงดังรูปที่ 4.30



รูปที่ 4.30 แสดงคำเตือนให้ป้อนค่าที่ต้องการประมาณให้อยู่ในช่วง x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

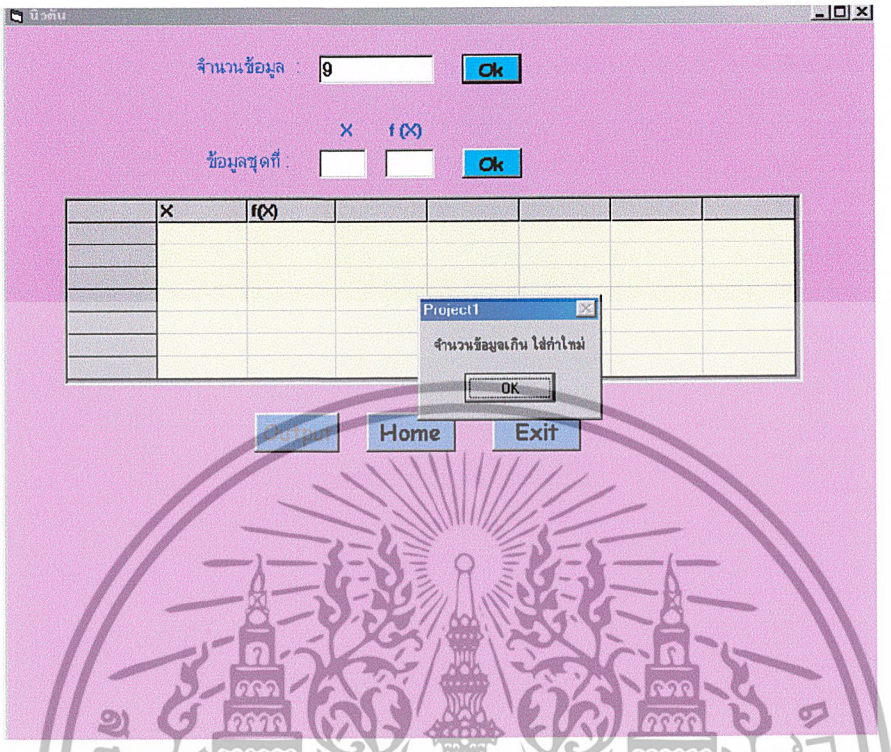
4.2.5 แสดงคำเตือนเมื่อป้อนค่าข้อมูลครบแล้ว จะแสดงข้อผิดพลาดดังรูปที่ 4.31



รูปที่ 4.31 แสดงคำเตือนเมื่อป้อนข้อมูลครบแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

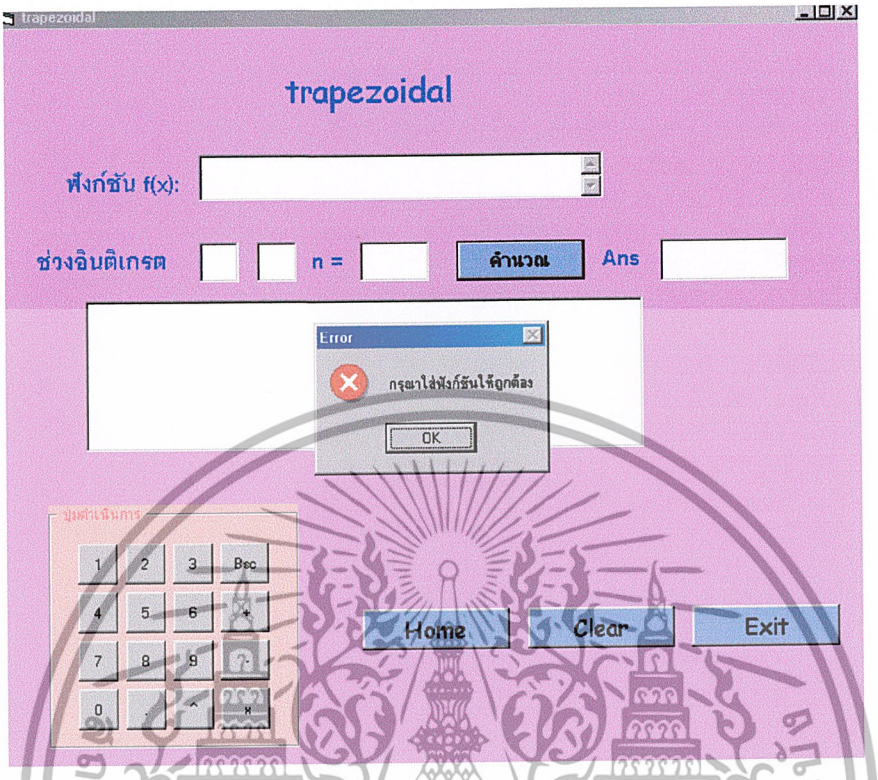
4.2.6 เมื่อป้อนค่าจำนวนข้อมูลเกิน 8 จะแสดงข้อผิดพลาดดังรูปที่ 4.32



รูปที่ 4.32 แสดงข้อผิดพลาดเมื่อป้อนจำนวนข้อมูลเกิน 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

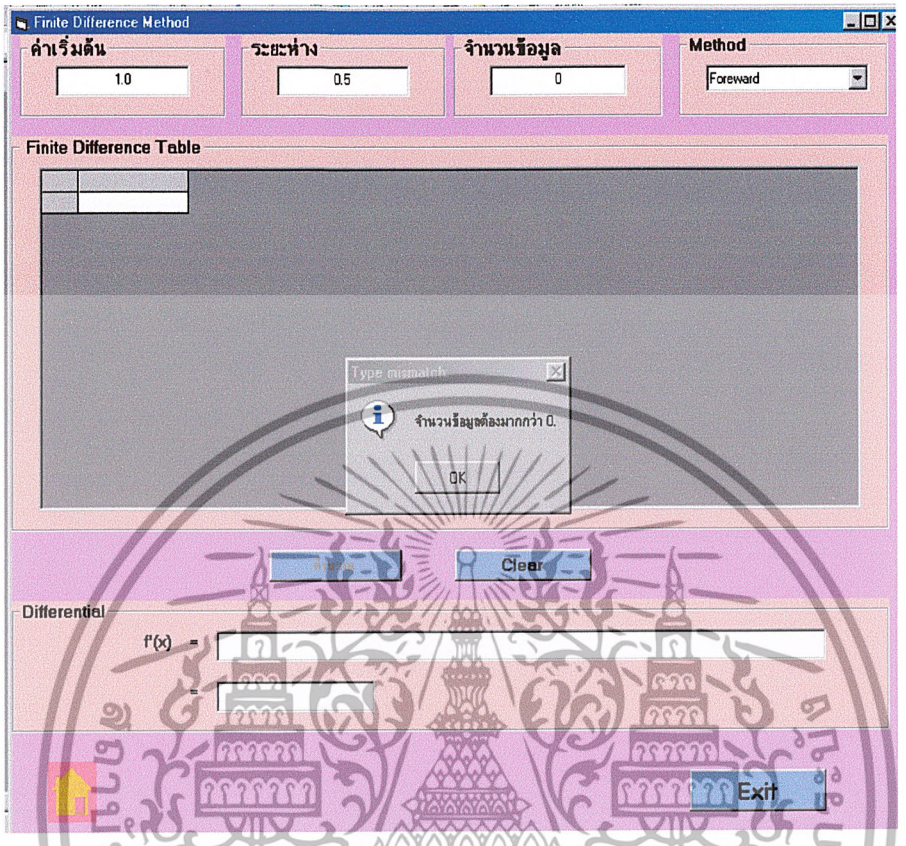
4.2.7 เมื่อยังไม่ได้ป้อนค่าใดๆ แล้วกดปุ่มคำนวณ จะแสดงข้อผิดพลาดดังรูปที่ 4.33



รูปที่ 4.33 แสดงข้อผิดพลาดเมื่อยังไม่ได้ป้อนค่าใดๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

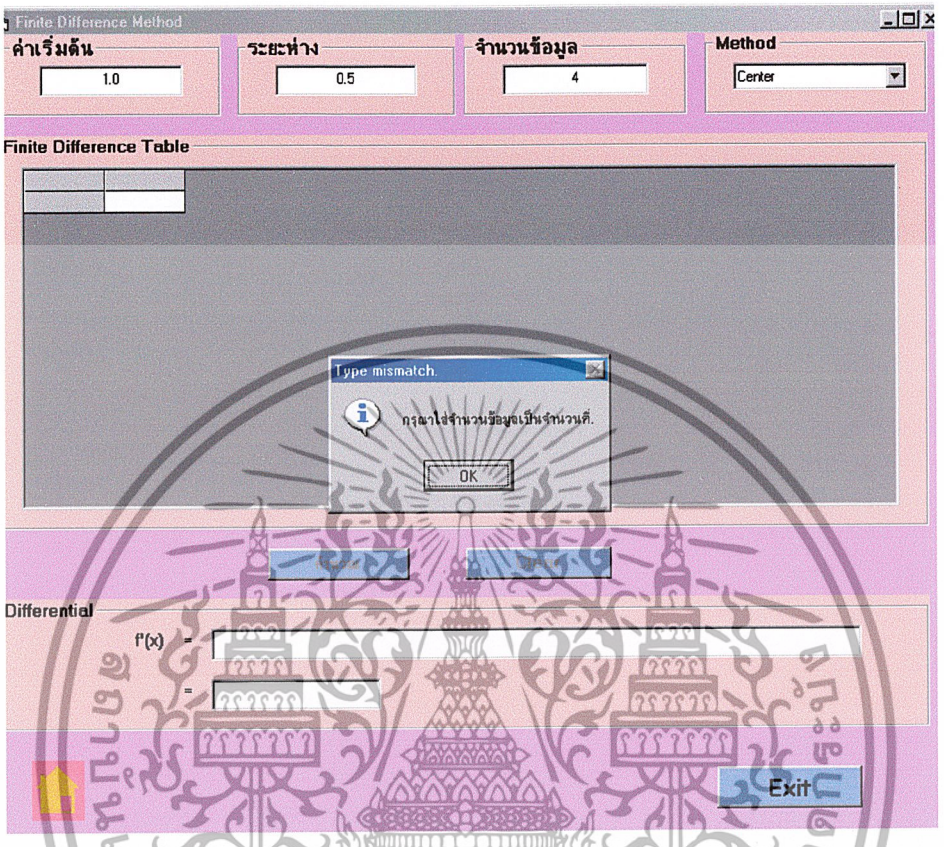
4.2.8 เมื่อป้อนจำนวนข้อมูลเป็น 0 จะแสดงข้อผิดพลาดดังรูปที่ 4.34



รูปที่ 4.34 แสดงข้อผิดพลาดเมื่อป้อนจำนวนข้อมูลเป็น 0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.9 เมื่อป้อนค่าจำนวนข้อมูลเป็นเลขคู่ และเลือกวิธี Center จะแสดงข้อผิดพลาด ดังรูปที่ 4.35



รูปที่ 4.35 แสดงข้อผิดพลาดเมื่อป้อนจำนวนข้อมูลเป็นเลขคู่เมื่อเลือกวิธี Center

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

ปัญหาโครงงานพิเศษฉบับนี้ได้ทำการสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยแบ่งการพัฒนาออกเป็น 3 ส่วน คือ

1. การจัดทำด้านเนื้อหา ตัวอย่าง และแบบทดสอบ

การนำเสนอทางด้านเนื้อหาและตัวอย่างสามารถอธิบายให้เข้าใจ และศึกษาได้ด้วยตัวเองพอสมควร การทำแบบทดสอบท้ายบทสามารถประเมินผลความเข้าใจได้ในระดับหนึ่ง ซึ่งเพียงพอแก่การนำไปประยุกต์ใช้งานที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขได้

2. การพัฒนาโปรแกรม

พัฒนาโปรแกรมโดยใช้ Microsoft Visual Basic เวอร์ชัน 6.0

5.2 สรุปผล

ผลการวิจัยโปรแกรมช่วยสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสามารถสรุปโดยสังเขปได้ดังนี้

5.2.1 สามารถใช้การควบคุมต่าง ๆ ได้ด้วยเมาส์ (Mouse)และคีย์บอร์ด (Keyboard)

5.2.2 โปรแกรมการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีลักษณะดังต่อไปนี้เท่านั้น

5.2.2.1 สามารถรับสมการฟังก์ชันได้หนึ่งตัวแปร และรับจำนวนพจน์ของฟังก์ชันได้ไม่เกิน 100 พจน์

5.2.2.2 สามารถรับฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

5.2.3 เลขชี้กำลังของฟังก์ชันสามารถรับได้เฉพาะจำนวนเต็มบวกเท่านั้น

5.2.4 ในการแสดงผลลัพธ์ของฟังก์ชันสามารถแสดงเป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่ง

5.2.5 สามารถแสดงข้อผิดพลาดในการรับค่าของฟังก์ชัน

5.2.6 โปรแกรมนี้สามารถแสดงผลการวิเคราะห์และแสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ได้

5.3 ข้อจำกัดของโปรแกรม

5.3.1 โปรแกรมนี้ไม่สามารถรับฟังก์ชันที่ป้อนวงเล็บ และฟังก์ชันทางตรีโกณมิติได้

5.3.2 โปรแกรมนี้ไม่สามารถรับฟังก์ชันที่ป้อนเครื่องหมายลบที่ซ้อนกันได้ เช่น –(-3x)

5.3.3 เลขชี้กำลังสูงสุดของฟังก์ชันไม่เกิน 35 เพื่อให้การคำนวณเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพและได้กราฟออกมาอย่างสมบูรณ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.4 ข้อเสนอแนะ

5.4.1 พัฒนาการรับค่าตัวแปรให้รับได้มากกว่า 1 ตัวแปร

5.4.2 พัฒนาให้สามารถรับฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น

5.4.3 พัฒนาให้สามารถในการเพิ่มเติมเนื้อหาส่วนต่าง ๆ เช่น เนื้อหา ตัวอย่าง แบบทดสอบ เพื่อปรับปรุงตัวเนื้อหาให้มีความทันสมัยและความคล่องตัวในการใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

กิตติ ภักดีวัฒนะกุล และจำลอง ครูอุตสาหะ. 2542. **Visual Basic 6 ฉบับโปรแกรมเมอร์**. พิมพ์ครั้งที่ 6. บ. เคทีพี คอมพ์ แอนด์ คอนซัลท์ จำกัด

ฉัททวุฒิ พีชผล และพิชิต สันติกุลานนท์. 2542. **คู่มือเรียน Visual Basic 6**. พิมพ์ครั้งที่ 5. บริษัท โปรวิชั่น จำกัด

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. 2544. **ระเบียบเชิงตัวเลขในงานด้านวิศวกรรม**. พิมพ์ครั้งที่ 3. จุฬาลงกรณ์

ภัคคินี ชิดสกุล. 2535. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข**. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ไมตรี โพธิ์สุข. 2529. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

Menahem Friedman and Abraham Kandel. 1994. "FUNDAMENTAL of COMPUTER NUMERICAL ANALYSIS". CRC Press, Inc.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบฝึกหัดเรื่อง Bisection

1. จงหารากของสมการ $x^3 - x - 1 = 0$ ในช่วง [0,2] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.000001

ก. 1.3245 ข. 1.3247

ค. 1.3249 ง. 1.3451

2. จงหารากของสมการ $x^2 - x - 1 = 0$ ในช่วง [0,2] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.001

ก. 1.6174 ข. 1.6176

ค. 1.6178 ง. 1.6180

3. จงหารากของสมการ $x^4 - 7x^3 + 26x^2 - 92x + 34 = 0$ ในช่วง [5,6] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.00000001

ก. 5.1674 ข. 5.1676

ค. 5.1678 ง. 5.1680

แบบฝึกหัดเรื่อง False-position

1. จงหารากของสมการ $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ ในช่วง [1,3] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.001

ก. 2.6902 ข. 2.6904

ค. 2.6906 ง. 2.6908

2. จงหารากของสมการ $x^4 - 6x^2 - 8x + 12 = 0$ ในช่วง [0,2] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.0000005

ก. 0.9374 ข. 0.9376

ค. 0.9378 ง. 0.9380

3. จงหารากของสมการ $x^3 - 2x - 5 = 0$ ในช่วง [2,3] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.001

ก. 2.0941 ข. 2.0943

ค. 2.0945 ง. 2.0947

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบฝึกหัดเรื่อง secant

1. จงหารากของสมการ $x^6 - x - 1 = 0$ ในช่วง [1,2] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.001

ก. 1.1334 ข. 1.1336

ค. 1.1338 ง. 1.1340

2. จงหารากของสมการ $x^2 - 5x + 2 = 0$ ในช่วง [1,5] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.0001

ก. 4.5611 ข. 4.5613

ค. 4.5615 ง. 4.5617

3. จงหารากของสมการ $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ ในช่วง [-3,-1] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.0005

ก. –2.8789 ข. –2.8791

ค. –2.8793 ง. –2.8795

แบบฝึกหัดเรื่องการหารากของสมการไม่เชิงเส้นวิธี Newton

1. จงหารากของสมการ $x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 76x - 79 = 0$ ในช่วง [-4,-2] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.001

ก. –3.9969 ข. –3.9971

ค. –3.9973 ง. –3.9975

2. จงหารากของสมการ $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ ในช่วง [-3,0] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.0001

ก. –1.2469 ข. –1.2471

ค. –1.2473 ง. –1.2475

3. จงหารากของสมการ $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3 = 0$ ในช่วง [0,1] ต้องการความคลาดเคลื่อน 0.005

ก. 0.7906 ข. 0.7908

ค. 0.7910 ง. 0.7912

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบฝึกหัดเรื่อง Lagrange

1. จงประมาณค่าในช่วงของพหุนามที่ผ่านจุด (1,3) (4,8) (9,85) ที่ค่า x = 8

   ก. 62.73 ข. 63.73

   ค. 64.73 ง. 65.73

2. จงประมาณค่าในช่วงของพหุนามที่ผ่านจุด (13,5) (20,9) ที่ค่า x = 15

   ก. 6.442 ข. 6.342

   ค. 6.242 ง. 6.142

3. จงประมาณค่าในช่วงของพหุนามที่ผ่านจุด (0,5) (1,9) (2,54) (4,87) ที่ค่า x = 3

   ก. 94 ข. 95

   ค. 96 ง. 97

แบบฝึกหัดเรื่องการประมาณค่าในช่วงวิธี Newton

1. จงประมาณค่าในช่วงของพหุนามที่ผ่านจุด (2,3) (4,9) (7,7) ที่ค่า x = 4.5

   ก. 9.00 ข. 9.25

   ค. 9.50 ง. 9.75

2. จงประมาณค่าในช่วงของพหุนามที่ผ่านจุด (15,20) (20,15) ที่ค่า x = 17

   ก. 18.00 ข. 18.25

   ค. 18.50 ง. 18.75

3. จงประมาณค่าในช่วงของพหุนามที่ผ่านจุด (6,56) (8,99) (10,155) ที่ค่า x = 7.25

   ก. 81.625 ข. 81.650

   ค. 81.675 ง. 81.700

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบฝึกหัดเรื่อง Trapezoidal

1. จงหาค่าอินทิกรัลของ $2x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ ในช่วง [0,2] n = 4

ก. 2.60 ข. 2.65

ค. 2.70 ง. 2.75

2. จงหาค่าอินทิกรัลของ $4x^5 - 3x^4 + x^3 - 6x + 2$ ในช่วง [2,8] n = 6

ก. 28604 ข. 28606

ค. 28608 ง. 28610

3. จงหาค่าอินทิกรัลของ $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ ในช่วง [0,2] n = 20

ก. 9.09664 ข. 9.09666

ค. 9.09668 ง. 9.09670

แบบฝึกหัดเรื่อง Romberg

1. จงหาค่าอินทิกรัลของ $5x^4 - 6x^2 + 2x + 10$ ในช่วง [0,10]

ก. 98200 ข. 98202

ค. 98204 ง. 98206

2. จงหาค่าอินทิกรัลของ $3x^5 - 4x^3 - x + 1$ ในช่วง [-3,5]

ก. 126950 ข. 126952

ค. 126954 ง. 12956

3. จงหาค่าอินทิกรัลของ $2x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ ในช่วง [0,2]

ก. 2.6660 ข. 2.6662

ค. 2.6664 ง. 2.6666

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบฝึกหัดเรื่องการหาค่าอนุพันธ์วิธี Newton

1. จงหาค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน บนตารางที่ x = 1.5 โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า

x :	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
f(x):	3.375	7.000	13.625	24.000	38.875	59.000

ก. 4.70 ข. 4.75

ค. 4.80 ง. 4.85

2. จงหาค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน บนตารางที่ x = 0.4 โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหลัง

x :	0.4	0.3	0.2	0.1
f(x):	1.49182	1.34986	1.22140	1.10517

ก. 1.35433 ข. 1.35533

ค. 1.35633 ง. 1.35733

3. จงหาค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน บนตารางที่ x = 1.0 โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง

x :	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
f(x):	2	8	12	9	8

ก. 85 ข. 90

ค. 95 ง. 100

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้