การหาฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์โดยใช้คอมพิวเตอร์

FINDING THE BASES AND DIMENSION OF VECTOR SPACES BY COMPUTER

ปถมาพร กล้าหาญ
ผจงจิตต์ ยืนวงษ์
รัตนาภรณ์ เต๋จา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2545

FINDING THE BASES AND DIMENSION OF VECTOR SPACES BY COMPUTER

PATHAMAPORN KLAHAN
PAJONGJIT YUENWONG
RATTANAPORN TAJA

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADAMIC YEAR 2002

หัวข้อปัญหาพิเศษ การหาฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์โดยใช้คอมพิวเตอร์

FINDING THE BASES AND DIMENSION OF VECTOR SPACES BY COMPUTER

ชื่อนักศึกษา นางสาวปฐมาพร กล้าหาญ 42050027

นางสาวผจงจิตต์ ยืนวงษ์ 42050031

นางสาวรัตนาภรณ์ เต๋จา 42050039

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ผศ.สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ปีการศึกษา 2545

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการ	อ.ใจปอง วงษ์สวัสดิ์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.สุนทร สุชาติเวชภูมิ	

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ การหาฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์โดยใช้คอมพิวเตอร์

ชื่อนักศึกษา นางสาวปถมาพร กล้าหาญ 42050027

นางสาวผจงจิตต์ ยืนวงษ์ 42050031

นางสาวรัตนาภรณ์ เต๋จา 42050039

ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2545

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการหาค่าผลลัพธ์ประเภทหนึ่งของปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งทางคณิตผู้จัดทำได้นำความรู้ทางคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์ โดยในการจัดทำโปรแกรมนี้ได้ใช้โปรแกรม Visual Basic6.0 และ Mathematica

ทั้งนี้ทางคณะผู้จัดทำได้แบ่งการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์ออกเป็น การหาค่าฐานและมิติของปริภูมิสดมภ์ และการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิแถว นอกจากนี้ยังมีการหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์ และการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์

Special Project Title	Finding the Basis and dimension of vector by Computer
Student	Miss.Patamaporn Klahan 42050027
	Miss.Pajongjit Yuenwong 42050031
	Miss.Rattanaporn Taja 42050039
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2002
Special Project Advisor	Associate Professor Pongpran Ratanathanawan
	Assistant Professor Sunthorn Suchatvejapoom

ABTRACT

This project is created for find a result of Vector space. We used computer to find the basis and dimension of Vector space, by Vicsual Basic6.0 and Mathematica

In case, We used this program for find the basis and dimension of Veator space are divide into find the basis and Dimension of Column vector, find the basis and dimension of Row vector. Beside that, we can find the matrix's Rank and find the basis and dimension Homogenous's Solution space.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่องการหาฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์โดยใช้คอมพิวเตอร์ฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ผู้ซึ่งให้คำปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งยังเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาฉบับนี้ได้เป็นอย่างดี

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ อีกทั้งเป็นกำลังใจตลอดการทำงานจนสำเร็จลุล่วงได้อย่างดีเยี่ยม รวมทั้งเพื่อนๆ พี่ๆ ทุกคนที่มีส่วนร่วมคอยให้ความช่วยเหลือต่างๆ ในการจัดทำปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2545

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

บทที่1

บทนำ

1.1 ความสำคัญ/ที่มาของปัญหา

ในปัจจุบันพบว่า ในการศึกษาไม่ว่าจะเป็นสาขาใดก็ตาม วิชาคณิตศาสตร์จะต้องเข้ามามีบทบาทในสาขาวิชานั้น ๆ หรือแขนงวิชาต่างๆด้วยกันทั้งสิ้น หรือเรียกได้ว่าคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานของทุกสาขาวิชานั่นเอง สำหรับการทำความเข้าใจเกี่ยวกับ วิชาคณิตศาสตร์นั้นจะมีปัญหามาก โดยเฉพาะหัวข้อเรื่อง ฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์ ในบางครั้งในการศึกษาเรื่องนี้ เป็นการศึกษาโดยใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูงและยากที่จะเข้าใจ

เพื่อเป็นการกระตุ้นให้นักศึกษามีความสนใจและเข้าใจในหัวข้อนี้ คณะผู้จัดทำเล็งเห็นว่าปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีบทบาทสำคัญกับทุกสาขาวิชา ซึ่งรวมทั้งวิชาคณิตศาสตร์ด้วย จากประโยชน์ในข้อนี้ จึงได้นำคอมพิวเตอร์มาปรับปรุงกับเรื่องฐานและมิติ โดยจัดทำเป็นโปรแกรมหาค่าฐานและมิติเพื่ออำนวยความสะดวกแก่ผู้ที่ต้องการศึกษา ซึ่งจะรวมทั้งการทำความเข้าใจและเพิ่มให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อเป็นการตรวจสอบคำตอบของผู้ใช้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในเรื่องการช่วยหาฐานและมิติ ของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถว และปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าแรงค์ของเมทริกซ์

2. เป็นการศึกษาซอฟต์แวร์แมทเติมเมติกา เพื่อช่วยในการหาฐานและมิติ ของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าแรงค์ของเมทริกซ์

3. นำความรู้ที่ได้ในการเรียนโปรแกรม Visual Basic มาประยุกต์ใช้กับซอฟต์แวร์แมทเติมเมติกา เพื่อช่วยหาฐานและมิติ ของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถว และปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าแรงค์ของเมทริกซ์ได้อย่าง เหมาะสม

1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

สร้างโปรแกรมช่วยหาฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถว และปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ และแสดงผลของฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ ค่าแรงค์ของเมทริกซ์

1.4 ขอบเขตของปัญหา

1. ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการหาฐานและมิติของ ปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าแรงค์ของเมทริกซ์

2. ค้นหาและจัดทำโปรแกรมเพื่อแก้โจทย์ปัญหาการหาฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์

3. นำซอฟต์แวร์แมททิเมติกา มาประยุกต์ใช้กับโปรแกรม Visual Basic ที่เคยเรียนมาเพื่อช่วยหาค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1. ศึกษาทฤษฎีการหาฐานและมิติ (Basis and dimension) ของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าแรงค์ของเมทริกซ์

2. ศึกษาซอฟต็แวร์แมทเติมเมติกาเพื่อช่วยหาฐานและมิติ(Basis and dimension) ของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์และ หาค่าแรงค์ของเมทริกซ์

3. ทำการเขียนโปรแกรม

4. ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่จัดทำขึ้นเพื่อให้มีความถูกต้องเหมาะสม

5. จัดทำคู่มือและเอกสารประกอบปัญหาพิเศษ

1.6 ข้อตกลงเบื้องต้น

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นจะมีการเรียกใช้ซอฟต์แวร์แมทเติมเมติกา ดังนั้น คอมพิวเตอร์ที่จะทำการติดตั้งโปรแกรมนี้จึงควรมีซอฟต์แวร์แมทเติมเมติกาอยู่เสียก่อนและต้องศึกษาการป้อนค่าต่าง ๆ ให้ถูกต้องซึ่งสามารถศึกษาได้ในส่วนของภาคผนวก

บทที่ 2

ฐานและมิติ

2.1 ฐานและมิติ

2.1.1 ปริภูมิ n มิติ แบบยุคลิด

นิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว n สิ่งที่เป็นอันดับ (ordered-n-tuple) หมาย ถึง ลำดับของจำนวนจริง n จำนวน $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

เซตของ n สิ่งที่เป็นอับดับทั้งหมด เรียกว่า ปริภูมิ n มิติ และ เขียนแทนด้วย R^n

เมื่อ n = 2 หรือ 3 มักจะใช้พจน์ของคู่อันดับ (ordered pair) หรือสิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ (ordered pair) เมื่อ n = 1 แล้ว n สิ่งที่เป็นอันดับก็จะประกอบด้วยจำนวนจริงอย่างเดียว มักจะ แทนด้วย R มากกว่าแทนด้วย R^1

เรามักจะพบสัญญลักษณ์ (a_1, a_2, a_3) แทนจุด หรือเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เพราะฉะนั้น $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$อาจจะแทนจุดหรือเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติก็ได้เช่น (-2,4,0,1,6) อาจจะแทนจุดใน R^5 หรือเวกเตอร์ใน R^5 ก็ได้

นิยาม เวกเตอร์ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และเวกเตอร์ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ใน R^n เรียกว่า เท่ากันถ้า $u_1 = v_1, u_1 = u_2, \ldots, u_n = v_n$ และผลบวก u + v นิยามด้วย

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

และถ้า k เป็นสเกลาร์ใดๆ การคูณด้วยสเกลาร์ ku นิยามด้วย

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

การดำเนินการของการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ ในบทนิยามนี้ จะเรียกว่า การดำเนินการมาตรฐานบน R^n

เรานิยามเวกเตอร์ศูนย์ใน R^n ด้วย $\theta = (0,0,\ldots,0)$

ถ้า $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน R^nแล้วเวกเตอร์ผกผัน (หรือตัวผกผันการบวก) ของ u แทนด้วย –u และนิยามด้วย $-u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

ผลต่างของเวกเตอร์ใน R^n นิยามด้วย $v - u = v + (-u)$ หรือในพจน์ของส่วนประกอบ

$$
\begin{aligned}
v - u &= v + (-u) \\
&= (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n) \\
&= (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท ถ้า $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ a ,b เป็นสเกลาร์แล้ว

(1) $u + v = v + u$

(2) $u + (v+w) = (u+v) + w$

(3) $u + \theta = \theta + u = u$

(4) $u = (-u) = \theta, u - u = \theta$

(5) $a(bu) = (ab)u$

(6) $a(u + v) = au + bu$

(7) $(a + b)u = au + bu$

(8) $1u = u$

นิยาม ถ้า $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน R^n แล้ว ผลคูณภายในแบบยุคลิด (Euclidean inner product) u.v นิยามด้วย

$$u.v = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n)$$

ทฤษฎีบท ถ้า u,v และ w เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ k เป็นสเกลาร์ใดๆแล้ว

(1) $u.v = v.u$

(2) $(u + v).w = u.w + v.w$

(3) $(ku).v = k(u.v)$

(4) $v.v \geq 0, v.v = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v = \theta$

นิยาม ค่าประจำแบบยุคลิด (Euclidean norm) หรือความยาวแบบยุคลิด (Euclidean length) ของเวกเตอร์

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ใน R^n นิยามด้วย

$$||u|| = (u.u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

เช่นเดียวกันระยะทางแบบยุคลิด (Euclidean distance) ระหว่างจุด

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ใน R^n นิยามด้วย

$$d(u,v) = ||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_2)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

ปริภูมิ R^n ที่มีการดำเนินการการบวก การคูณด้วยสเกลาร์และผลคูณภายใน ดังกล่าวนี้ เรา จะนิยามว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์ n มิติ แบบยุคลิด

2.1.2 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)

นิยาม ปริภูมิเวกเตอร์ค่าจริง คือ เซต V ซึ่งไม่เป็นเซตว่างและมีสมาชิกที่มีการดำเนินการ 2 อย่างคือ การดำเนินการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ (จำนวนจริง) กล่าวคือ ถ้า u ,v เป็นสมาชิกใน V และ k เป็นสเกลาร์แล้วเรียก u + v ว่าเป็นผลบวกของ u และ v เป็นสมาชิกใน V และเรียก ku ว่าเป็นผลคูณของ u และ k

ถ้าสัจพจน์ต่อไปนี้สอดคล้องกับทุกสมาชิก u,v,w ใน V และทุกสเกลาาร์ a และ bแล้ว เราเรียก V ว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์ และเรียกสมาชิก V ในว่าเป็นเวกเตอร์

(1) ถ้า u และ v เป็นสมาชิกใน V แล้ว u+v เป็นสมาชิกอยู่ใน V ด้วย

(2) $u + v = v + u$

(3) $u + (v + w) = (u + v) + w$

(4) มีสมาชิก θ ใน V ที่ทำ $\theta + u = u + \theta = u$ ให้สำหรับทุกๆ u ใน V

(5) สำหรับแต่ละ u ใน V สมาชิก –u ใน V เรียกว่านิเสธของ u ที่ทำให้

$u + (-u) = (-u) + u = \theta$

(6) ถ้า a เป็นสเกลาร์ใดๆ และ u เป็นสมาชิกใดใน V แล้ว au เป็นสมาชิกใน V

(7) $a(u + v) = au + av$

(8) $(a + b)u = au + av$

(9) $a(bu) = (ab)u$

(10) $1u = u$

เวกเตอร์ θ ในสัจพจน์ (4) เรียกว่า เวกเตอร์ศูนย์ สำหรับ V

ทฤษฎีบท กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หนึ่ง u เป็นเวกเตอร์ใน V และ k เป็นสเกลา แล้ว

(1) $0u = \theta$

(2) $k\theta = \theta$

(3) $(-1)u = -u$

(4) ถ้า $ku = \theta$ แล้ว $k = 0$ หรือ $u = \theta$

2.1.3 **ปริภูมิย่อย** (subspace)

นิยาม ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ W เป็นเซตย่อยของ V และจะเรียก W ว่าเป็นปริภูมิย่อยของ V ถ้า W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ภายใต้การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์นิยามได้บน V

ทฤษฎีบท ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์และ W เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ V แล้ว W จะเป็นปริภูมิย่อยของ V ได้ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า u และ v เป็นเวกเตอร์ใน W แล้ว u+v เป็นเวกเตอร์ใน W

(2) ถ้า k เป็นสเกลาร์ใดๆ และ u เป็นเวกเตอร์ใดๆใน W แล้ว ku เป็นเวกเตอร์ใน

เงื่อนไข (1) และ (2) มักจะกล่าวว่า W มีคุณสมบัติปิดสำหรับการบวกและคุณสมบัติปิดสำหรับการคูณด้วยสเกลาร์

นิยาม เวกเตอร์ w จะถูกเรียกว่า เป็นผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ถ้า w แสดงได้ในรูปแบบ $w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k$ เมื่อเป็น $a_1, a_2, \ldots, a_k$ สเกลาร์

นิยาม ถ้า $v_1, v_2, \ldots, v_k$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V และถ้าทุกๆเวกเตอร์ใน V แสดงได้ในผลรวมเชิงเส้นของ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ แล้วเราจะกล่าวว่าเวกเตอร์เหล่านี้แผ่ทั่ว V (span V)

โดยทั่วไป เซตของเวกเตอร์ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ที่กำหนดให้ในปริภูมิเวกเตอร์ V อาจจะแผ่ทั่ว V หรือไม่ก็ได้ถ้ามันแผ่ทั่ว V แล้วทุกๆ เวกเตอร์ใน V จะแสดงได้ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ และถ้าเรารวมกลุ่มของเวกเตอร์ที่อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ เหล่านี้เข้าไว้ด้วยกันเป็นปริภูมิย่อยของ V เราเรียกว่า

" ปริภูมิเชิงเส้นที่ถูกแผ่ทั่วโดย{ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ } " หรือ เรียกว่า

" ปริภูมิที่ถูกแผ่ทั่วโดย { $v_1, v_2, \ldots, v_k$ } "

ปริภูมิเชิงเส้น W ถูกแผ่ทั่วโดยเซตของเวกเตอร์ S = $v_1, v_2, \ldots, v_k$} จะแทนด้วย Span (S) หรือ Span { $v_1, v_2, \ldots, v_k$ }

ทฤษฎีบท ถ้า $v_1, v_2, \ldots, v_k$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V แล้ว

(1) เซต W ของผลรวมเชิงเส้นทั้งหมดของ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

(2) W เป็นปริภูมิย่อยที่เล็กที่สุดของ V ที่ประกอบด้วย $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ซึ่งปริภูมิย่อย อื่นๆของ V ที่ประกอบด้วย $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ต้องมี W อยู่ด้วย

2.1.4 **เซตอิสระเชิงเส้นและเซตไม่อิสระเชิงเส้น** (linear Independente Set and linear Dependente Set)

นิยาม ถ้า S = { $v_1, v_2, \ldots, v_k$ }เป็นเซตของเวกเตอร์ แล้วสมการ $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0$ มีผลเฉลยเพียงชุดเดียวคือ $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$ จะเรียก S ว่าเป็นเซตอิสระเชิงเส้น แต่ถ้ามีผลเฉลยอื่นๆ อีกหลายชุด จะเรียก S ว่าเป็นไม่อิสระเชิงเส้น

เราสามารถแสดงถึงผลเฉลยที่มีคุณค่าโดยไม่ต้องแก้ระบบสมการโดยการแสดงว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีตัวกำหนดเป็นศูนย์ และเป็นเมทริกซ์หาตัวผกผันไม่ได้

คำว่า "ไม่อิสระเชิงเส้น" หมายถึง เวกเตอร์ขึ้นอยู่กับอีกเวกเตอร์อื่นๆ เพื่อให้เห็นชัดขึ้น สมมุติว่า S = { $v_1, v_2, \ldots, v_k$ } เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น แล้วสมการ

$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0$ มีผลเฉลยมากกว่าผลเฉยชุดที่มีค่า

$k_1 = 0, k_2 0, \ldots, k_n = 0$ เช่น สมมติ $k_1 \neq 0$ ว่าเราจะได้

$v_1 = (-k_2 / k_1) v_n + \ldots + (-k_n / k_1) v_n$

กล่าวคือ v_1 อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่นๆที่เหลือ คือ $v_2, \ldots, k_n$

ทฤษฎีบท กำหนดให้ S = { $v_1, v_2, \ldots, v_k$ } เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ R^n ถ้า $k > n$ แล้ว S ไม่อิสระเชิงเส้น

2.1.5 **ฐาน และมิติ** (Basis and dimension)

นิยาม ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ใดๆ และ $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ เป็นเซตจำกัดของเวกเตอร์ใน V แล้วจะเรียก S ว่าเป็นฐานสำหรับ V ถ้า

(1) S เป็นอิสระเชิงเส้น

(2) S แผ่ทั่ว V

ทฤษฎีบท ถ้า $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ เป็นฐานหนึ่งสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วทุกๆ เซตที่มีเวกเตอร์มากกว่า n ตัวจะไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท ฐาน 2 ชุดใดๆ สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด มีจำนวนเวกเตอร์เท่ากัน

นิยาม มิติของปริภูมิเวกเตอร์ V ที่มีมิติจำกัด นิยามด้วยจำนวนของเวกเตอร์ในฐานสำหรับ V และเรานิยามปริภูมิเวกเตอร์ศูนย์ว่า มีมิติศูนย์

ตัวอย่าง มิติของปริภูมิเวกเตอร์ R^n เขียนแทนด้วย $\dim R^n = n$
มิติของปริภูมิเวกเตอร์ P_n ของฟังก์ชันพหุนาม $= n$ เขียนแทนด้วย $\dim P_n = n$ เช่น $\dim R^3 = 3$, $\dim R^2 = 2$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท

(1) ถ้า $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ n เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นในปริภูมิ Vที่มีมิติ n แล้ว S เป็นฐานสำหรับ V

(2) ถ้า $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ n เวกเตอร์ที่แผ่ทั่วปริภูมิV ที่มีมิติ n แล้ว S เป็นฐานสำหรับ V

(3) ถ้า $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ เป็นเซตที่เป็นอิสระเชิงเส้น ในปริภูมิ V ที่มีมิติ n และ $r < n$ แล้ว S สามารถขยายฐานสำหรับ V ให้กว้างขึ้นกล่าวคือ มีเวกเตอร์ $v_{r+1}, \ldots, v_n$ ที่ทำให้ $\{ v_1, v_2, \ldots v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n \}$ เป็นฐานสำหรับ V

2.1.6 ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ (Row space and Column space) **ของเมทริกซ์ , ค่าลำดับชั้น** (Rank)

นิยาม พิจารณาเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์ $r_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$

$r_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$

$\vdots$

$r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$

มาจากแถวของ A เรียกว่า เวกเตอร์แถวของ A และเวกเตอร์

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \; c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \; c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

จากสดมภ์ของ A เรียกว่า เวกเตอร์สดมภ์ของ A

ปริภูมิย่อยของ R^n ที่ถูกแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์แถวเรียกว่า ปริภูมิแถว ของ A และ

ปริภูมิย่อยของ R^m ที่ถูกแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์สดมภ์เรียกว่า ปริภูมิสดมภ์ ของ A

ทฤษฎีบท การดำเนินการแบบแถวเชิงธาตุมูลไม่เปลี่ยนปริภูมิแถวของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท เวกเตอร์แถวที่ไม่เป็นศูนย์ในรูปแบบลดรูปเป็นขั้นทางแถวของเมทริกซ์ A สร้างฐานสำหรับปริภูมิของ A

สำหรับการหาฐานของปริภูมิที่ถูกแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์สดมภ์ของเมทริกซ์ A กระทำได้โดยหาฐานสำหรับปริภูมิแถวของ A^t

ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมทริกซ์ใดๆ แล้วปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของ A มีมิติแเดียวกัน

นิยาม มิติของปริภูมิแถว และปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ A เรียกว่า ค่าลำดับชั้น (rank) ของ A

ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้วข้อความต่อไปนี้จะสมมูลกัน

(1) A หาตัวผกผันได้

(2) $Ax = 0$,ผลเฉลยสำคัญน้อยเท่านั้น

(3) A สมมูลทางแถวกับ I

(4) $Ax = b$ เป็นระบบไม่ขัดแย้ง สำหรับทุกๆ เมทริกซ์ B ขนาด $n \times 1$

(5) $Det(A) \neq 0$

(6) A มีลำดับชั้นเท่ากับ n

(7) เวกเตอร์แถวของ A เป็นอิสระเชิงเส้น

(8) เวกเตอร์สดมภ์ของ A เป็นอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท ระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ เป็นระบบไม่ขัดแย้งก็ต่อเมื่อ b อยู่ในปริภูมิสดมภ์ของ A

2.2 VISUAL BASIC

ประวัติของภาษาเบสิกโดยย่อ

ภาษาเบสิกถูกคิดค้นขึ้นมาในปี ค.ศ.1963 โดย john kemeny และ thomas kurtrz แห่งสถาบัน Dartmouth College โดยมีจุดมุ่งหมายที่จะออกแบบภาษาเบสิกขึ้นมาเพื่อใช้สอนหลักการเขียนโปรแกรม โดยเน้นที่ความชัดเจนรวดเร็วและประสิทธิภาพในการเรียนรู้ พวกเขาสามารถสร้างภาษาเบสิกได้เป็นผลสำเร็จ โดยยกเลิกการใช้ภาษาควบคุมงาน(Job Control Language) และหันมาใช้ภาษาสำหรับสร้างโปรแกรมอื่น ๆ โดยใช้ขั้นตอนการคอมไพล์และเชื่องโยง เช่น ภาษาฟอร์แทรนและภาษาแอสแซมบลี จึงทำให้ภาษาเบสิกเป็นภาษาที่ง่ายต่อการใช้งานภาษาแรกที่เน้นให้ผู้ใช้สนใจขั้นตอนการทำงานในส่วนของฮาร์ดแวร์ ภาษาเบสิกในเวอร์ชันแรกๆ มีคุณสมบัติต่าง ๆ หลายประการอันเป็นที่รู้จักกันทั่วไป อาทิเช่น ในแต่ละบรรทัดของโปรแกรมจะถูกขึ้นต้นด้วยหมายเลขบรรทัด ไม่มีการย่อหน้าในแต่ละกลุ่มคำสั่ง

คุณลักษณะของภาษาเบสิกดังที่กล่าวข้างต้นนั้น ก่อให้เกิดความยุ่งยากในการทำความเข้าใจขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม ซึ่งถูกเรียกว่าสปาเก็ตตี้โค้ด(spaghetti code) ที่เรียกเช่นนี้ก็เพราะว่าความต่อเนื่องของโปรแกรมจะถูกเชื่อมโยงกลับไปกลับมาคล้ายกับเส้นสปาเก็ตตี้บนจานถึงแม้จะเป็นโปรแกรมที่สั้น ๆ แต่ทำให้คุณลำบากในการทำความเข้าใจได้โดยง่าย จึงนับว่าเป็นความบังเอิญอย่างยิ่งที่ภาษาเบสิกยังเป็นที่ยอมรับจนถึงทุกวันนี้

ในปัจจุบันภาษาเบสิกถูกมองว่าเป็นภาษาเด็กเล่น ซึ่งไม่เหมาะสมกับงานโปรแกรมในปัจจุบันแต่อย่างไรก็ดีภาษาเบสิกก็ยังคงถูกพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง จากภาษาที่ช้าไม่มีโครงสร้างและแปลโปรแกรมทีละคำสั่ง กลายเป็นภาษาที่รวดเร็วมีโครงสร้างแน่นอน และแปลโปรแกรมภาษาชั้นสูงทำให้มีความเหมาะสมในการสร้างแอปพลิเคชั่นต่าง ๆ ได้หลากหลายขึ้น เป็นผลให้Hewlett Packard Company, Microsoft Coorporation และอีกหลายบริษัทได้ผลิตเวอร์ชั่นต่าง ๆ ของภาษาเบสิกออกมาโดยมีการพัฒนารายละเอียดการใช้งานให้มีความก้าวหน้ายิ่งขึ้น

การพัฒนาของภาษาเบสิก

ความก้าวหน้าของภาษาเบสิกนั้นถูกพัฒนาควบคู่ไปกับการปฏิบัติทางคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล โดยในระหว่างคริสต์ทศวรรษที่ 1970 ไมโครซอฟต์ริเริ่มที่จะพัฒนาภาษาเบสิกเป็นตัวแปลภาษาพื้นฐานในไมโครโปรเซสเซอร์ของคอมพิวเตอร์ ต่อมาบริษัท Ratio Shack TRS80 ได้แนะนำภาษาเบสิก (และหลักการจัดการส่วนบุคคล) ให้แก่สาธารณชนได้รู้จักไมโครซอพต์เบสิกเวอร์ชั่นแรกยังคงถูกใช้จนมาถึงทุกวันนี้ โดยไม่ได้มีการดัดแปลงอะไรมากมาย โดยอยู่ในรูปของ GW-BASIC ซึ่งเป็นตัวแปลภาษาที่อยู่ในระบบปฏิบัติการ MS-DOS เวอร์ชั่นล่าสุด

ถึงแม้ว่า GW-BASIC จะเป็นภาษาที่สามารถทำการคำนวณ และทำงานพื้นฐานง่าย ๆได้อย่างรวดเร็ว แต่อย่างไรก็ดี มันยังมีลักษณะรายละเอียดบางอย่างที่ดูคล้ายกับภาษาเด็กเล่นอยู่ดี ซึ่งนักพัฒนาซอฟต์แวร์ที่ไม่สนใจจุดนี้จะนิยมเลือกใช้ภาษา GW-BASIC ในการผลิตวอฟต์แวร์ออกสู่ท้องตลาดจึงทำให้ยูทิลิตี้บน MS-DOS ไม่ถูกเขียนขึ้นมาขายในรูปแบตซ์ไฟล์ เนื่องจากโปรแกรมจะทำงานช้าเกินไปต้องมีโปรแกรมต้นแบบให้กับผู้ใช้ และยังเป็นการไม่จำเป็นเนื่องจากยังมีวิธีอื่น ๆ อีกหลายวิธีที่จะสร้างโปรแกรมเช่นนั้นขึ้นมา

ในปี ค.ศ1982 การเกิดขึ้นของ Microsotf QuickBasic ทำให้เกิดการปฏิวัติ ภาษาเบสิกขึ้นมา และจะมีการจดลิขสิทธิ์ให้เป็นภาษาที่ใช้พัฒนาบน MS-DOS ภาษา QuickBasic เป็นภาษาที่มีประสิทธิภาพในการตอบโต้กับผู้ใช้ และมีควารวดเร็วในการแปลชุดคำสั่งของโปรแกรม ซึ่งเป็นลักษณะเดิมของ GW-BASIC และมีการยกเลิกการใช้หมายเลขบรรทัดและเพิ่มลักษณะของโปรแกรมที่ทันสมัยเข้าไป อาทิเช่น มีโปรแกรมย่อย มีการกำหนดผู้ใช้ และชนิดของโครงสร้างข้อมูลมีกราฟิกที่ทันสมัยและจัดการเรื่องเสียงได้จนทำให้โปรแกรมเมอร์ภาษา QuickBasic มีความรู้สึกว่ากำลังใช้ภาษาที่ทันสมัยว่า ภาษาซี ปาสคาล และฟอร์แทน ภาษา QuickBasic ยังมีข้อดีอื่น ๆ อีก เช่น สามารถเลือกที่จะรับได้ทั้งแบบทีละคำสั่ง หรือแบบแปลที่ละชุดคำสั่งได้โดยตัวมันเอง ซึ่งเป็นโปรแกรมที่เหมาะสมกับสภาพการตลาดในปัจจุบัน (ในปัจจุบันไมโครก็ได้นำเอา QuickBasic ซึ่งเป็นเวอร์ชันที่รันแบบทีละคำสั่งของ QuickBasic มาเป็นส่วนหนึ่งของ MS-DOS)

Visual Basic

ในปัจจุบัน การปฏิบัติของไมโครวอฟต์วินโดวส์ ส่งผลดีทำให้เกิดความเป็นมาตรฐานในการจัดการสภาวะแวดล้อมของระบบในการดึงเอาความสามารถที่มีอยู่ในตัวไมโครโปรเซสเซอร์แบบล่าสุดของบริษัท intel แต่สำหรับผู้ใช้งานแล้วล่ะก็ วินโดวส์ให้เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลมีความเป็นส่วนตัวและใช้งานง่ายมากขึ้น ในขณะเดียวกันนักเขียนโปรแกรมก็ต้องเรียนรู้หลักการเขียนโปรแกรมใหม่เข้ามา เพื่อจะสามารถพัฒนาโปรแกรมที่สามารถใช้งานบนวินโดวส์ได้และ Visual Basic ซึ่งเกิดจากการพัฒนาครั้งยิ่งใหญ่ของภาษาเบสิกก็เป็นภาษาที่ทำให้การเรียนรู้ที่จะสร้างแอปพลิเคชั่นบนวินโดวส์กลายเป็นเรื่องง่าย

ภาษาเบสิกมีการเปลี่ยนแปลงไปมากในช่วง 2 ทศวรรษที่ผ่านมา ในขณะที่ภาษา Visual Basic สำหรับ Window เวอร์ชั่นภาษาไทย 5 ได้ถูกสร้างขึ้นมาโดยมีโปรแกรมประยุกต์บน Window เป็นพัน ๆ โปรแกรมที่ถูกสร้างขึ้นมาโดยใช้ภาษา Visual Basic นี้และยังมีอีกหลายโปรแกรมที่กำลังจะถูกพัฒนาโดยภาษา Visual Basic 5 ซึ่งเป็นเวอร์ชันที่ทันสมัยมาก

คุณสมบัติและข้อดีของ Visual Basic for Window

Visual Basic for Window มีคุณสมบัติที่ดีหลายประการ เป็นในฝันสำหรับการพัฒนาโปรแกรมต่าง ๆ บนวินโวส์ คุณสมบัติซึ่งช่วยในการเขียนโปรแกรมง่ายขึ้นประกอบไปด้วยเครื่องมือ (Tools) หลากหลายอันจะช่วยในการเขียนโปรแกรมแบบซับซ้อนบนวินโดวส์ให้สำเร็จได้โดยง่ายและรวดเร็ว

Visual Basic for Window ยังคงไว้ด้วยข้อดีต่าง ๆ ของ Microsoft QuickBasic และยังเพิ่งเติมคุณสมบัติอันหลากหลายที่จะสนับสนุนให้ตัวมันเองเป็นโปรแกรมพื้นฐานสำหรับการพัฒนาโปรแกรมบน Microsoft Window อีกด้วย ตัวอย่างเช่น กราฟิกเอาต์พุตที่สามารถถูกส่งออกไปยัง ส่วนต่าง ๆ ของ วินโดวส์ หรือแม้กระทั่งไปยังเครื่องพิมพ์ คุณสามารถเลือกสีสำหรับทำงานกราฟิกได้มากกว่า 16 ล้านเฉดสี(โดย วินโดวส์จะจัดการแสดงผลกราฟิกนั้นตามที่คุณต้องการหรือมันจะลดลงมาได้เท่าที่ฮาร์ดแวร์ของเครื่องนั้น ๆ จะสนับสนุนในการแสดงผลได้) โดยที่คุณไม่ต้องกังวลในส่วนนี้ว่ามีกระบวนในการจัดการอย่างไร ไม่ว่าในตอนนี้หรือต่อไปในอนาคต

ข้อดีเหนือ QuickBasic อีกอย่างก็คือการจัดการตัวแปรใน Visual Basic มีกฎเกณฑ์ซึ่งง่ายในการเข้าใจและจดจำ เพราะว่ามันถูกพัฒนาให้ง่าย และมีประสิทธิภาพ โดยที่โปรแกรมของ Visual Basic จะประกอบไปด้วย ไฟล์ 2 แบบ คือ Form และ Module ยกเว้นเมื่อ declare globally ที่ตัวแปรอื่น และค่าคงที่ในโปรแกรมย่อย และฟังก์ชันนั้นจะเป็น local สำหรับกระบวนการที่เกิดขึ้น (บทต่างๆ ตรงนี้คุณจะเข้าใจเองเมื่อคุณมีประสบการณ์ในการใช้งาน Visual Basic สักพัก) ข้อดีอีกอย่างหนึ่งของ Visual Basic สำหรับผู้ที่จะมาเป็นนักโปรแกรมผู้ยิ่งใหญ่ก็คือ ถ้าคุณมีความคุ้นเคยอยู่กับ QuickBasicอยู่แล้วก็ยิ่งจะง่ายต่อการใช้งาน Visual Basicและจะยิ่งดีขึ้นถ้าคุณมีความรู้เล็กๆ น้อย ๆ สำหรับการเขียนโปรแกรม Visual Basic ได้อย่างแท้จริง และ Visual Basicจะกลายเป็นเครื่องที่ดีที่สุดที่จะช่วยให้คุณสามารถเขียนโปรแกรมบนวินโดวส์ได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิ และถึงแม้คุณจะมีความเชี่ยวชาญในการใช้ภาษา C พัฒนาโปรแกรมบนวินโวส์ก็ตาม คุณก็จะชอบการเรียนใช้งาน กระบวนการ interface-development ที่ Visual Basic มีให้

ภาษาเบสิกได้พัฒนามาให้เป็นภาษาสำหรับการพัฒนาโปรแกรมแบบตอบโต้ (interaction) ดังตัวอย่างเช่น เป็นการง่ายที่จะใช้ GW-Basic รันคำสั่งเพียง 2-3 คำสั่งเพื่อดูว่ามันทำงานอย่างไรมากกว่าที่จะเปิดตำราดูเอกสารมากมาย หลักการพัฒนางานแบบโต้ตอบนี้ ได้ถูกนำมาใช้ในการสร้างระบบงาน User interface สำหรับโปรแกรมของคุณบนวินโดวส์ โดยใช้Visual Basic

คงจะไม่สามารถเปรียบเทียบได้ว่าการออกแบบโปรแกรมด้วย Visual Basic นั้นจะดีกว่าอย่างไร จนกว่าคุณจะลืมว่า interface design progress ของโปรแกรมเก่าๆ ที่คุณเขียนมานาน

แล้วนั้นมีกระบวนการทำงานแต่ละส่วนอย่างไร เมื่อนั้นคุณจะพบว่าการใช้โปรแกรมแบบโต้ตอบของ Visual Basic นั้นดีกว่า และง่ายกว่าอย่างไร

Dynamic Link Libraries ของ Windows

ข้อดีอีกข้อของ Visual Basic ก็คือความสามารถในการเพิ่มขยายของตัวมันเอง ถึงแม้ Visual Basic for Windows จะทำงานได้อย่างรวดเร็วเพียงใดก็ตาม แต่มีบางที่นั้น Optimized code ของภาษา C นั้น จะสามารถทำงานได้เร็วกว่า ถ้าคุณมี C Computer คุณก็จะสามารถสร้าง Dynamic Link Libraries ใช้ได้เอง

ประโยชน์ของ DLL เหล่านี้ จะเกิดขึ้นกับคุณ เพราะมันเป็นส่วนเพิ่มประสิทธิภาพที่ระบบปฏิบัติการ Windows มีให้คุณอยู่แล้ว Microsoft Windows Software Development Kit (SDK) ได้อธิบายฟังก์ชันต่างๆ เหล่านี้ไว้ถึงกระบวนการทำงาน และยังให้รูปแบบในการเรียกใช้ฟังก์ชันเหล่านี้มาใช้งานจากภาษา C อีกด้วย นอกจากนี้ Visual Basic ในรุ่น Professional ยังได้รวม Special Help ซึ่งได้บรรจุการเรียกใช้ Standard DLLs ของ windows ไว้ให้ด้วยแล้ว และเมื่อคุณลองใช้ Visual Basic เรียกเอาฟังก์ชันเหล่านั้นมาใช้งาน คุณก็จะเข้าใจว่า Visual Basic นั้นช่วยให้คุณประหยัดเวลาในการพัฒนาโปรแกรมเพียงใด

2.3 Mathematica V.3

2.3.1 Running Mathematica

1. Notebook Interface

การ run MATHEMATICA ด้วย Notebook interface

ดับเบิ้ลคลิก ที่ไอคอน Mathematica	การแสดงในรูปแบบกราฟฟิกสำหรับการเริ่มต้น Mathematica
mathematica	คำสั่งระบบปฏิบัติการเพื่อสั่งเริ่มต้น Mathematica
การจบข้อความด้วย SHIFE-RETURN	การป้อน input สำหรับ Mathematica
เลือก Quit เมนู	การออกจาก Mathematica

ถ้าเราใช้คอมพิวเตอร์โดยผ่านทาง Graphical interface เราต้องดับเบิ้ลคลิกที่ไอคอน Mathematica เพื่อการเริ่มต้น Mathematica แต่ถ้าเราใช้คอมพิวเตอร์โดนผ่านทางระบบปฏิบัติการโดยพื้นฐานเป็นข้อความ (textually baed O.S.) เราต้องพิมพ์คำสั่ง Mathematica เพื่อการเริ่มต้น ของ Mathematica

เมื่อ Mathematica เริ่มทำงาน จะแสดงหน้าจอว่างเพื่อให้เราทำการป้อน input ลงไป แล้วกดปุ่ม Shift และ return (หมายถึง ปุ่ม enter) โดยจะกดปุ่ม Shift ค้างเอาไว้แล้วกดปุ่ม return จากนั้น Mathematica จะทำการประมวลผล input และแสดงผลลัพธ์มาให้

เราเพียงพิมพ์ 3 + 6 = แล้วกดปุ่ม shift – return จากนั้น Mathematica ทำการประมวลผล input แล้วผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงหลังข้อความ Out [1] = c]และจะเพิ่มข้อความ In[1] := ขึ้นมา

```
In[1]  :=  3 + 6
Out[1]  =  9
```

ถ้าต้องการออกจาก Mathematica ทำได้โดยการเลือก Quit จากเมนู notebook interface

2. Text-based Interface

การ run Mathematica ด้วย Text – based interface

Math	คำสั่งระบบปฏิบัติการเพื่อสั่งเริ่มต้น Mathematica
การจบข้อความด้วย SHIFE-RETURN	การป้อน input สำหรับ Mathematica ที่ใช้ในทุกระบบ
การจบข้อความด้วย RETURN	รูปแบบอย่างง่ายของการป้อน input ที่ใช้ได้ในทุกระบบ
เลือก Quit เมนู	การออกจาก Mathematica

เพื่อการเริ่มต้น Mathematica เราจะต้องพิมพ์คำสั่ง math ที่ O.S. prompt ในบางระบบอาจจะเริ่มต้น Mathematica ด้วยการดับเบิ้ลคลิกที่ไอคอน Mathematica kernel

เมื่อ Mathematica เริ่มต้นการทำงานมันจะพิมพ์ In[1] := ขึ้นมาเพื่อเป็นการบอกว่าพร้อมสำหรับการป้อน input แล้ว และเมื่อทำการป้อน input เสร็จในบางระบบจะกดปุ่ม Shift-return บางระบบจะกดปุ่ม return (หรือ enter) เพียงปุ่มเดียว หลังจากนั้น Mathematica จะทำการประมวลผล input และแสดงผลลัพธ์หลังข้อความ Out[1] =

สำหรับการออกจาก Mathematica นั้นทำได้โดยการกด Control –D หรือพิมพ์ Quit[ ] ที่ input prompt

2.3.2 รูปแบบคำสั่งที่ใช้ใน Mathematica

1. **การสร้างเมทริกซ์ A ขนาด m x n โดยมีรูปแบบดังนี้**

In[1]:=MatrixForm[A={{a_{11},a_{12},…,a_{1n}},{a_{21},a_{22},…a_{2n}},…,{a_{m1},a_{m2},…a_{mn}}}]

Out[1]//MatrixForm $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & a_{mn} \end{bmatrix}$

โดยที่ a_{ij} เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง In[1]:=MatrixForm[A={{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]

Out[1]//MatrixForm $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

2. **การหาค่าผลเฉลยของสมการ มีรูปแบบคำสั่ง ดังนี้**

solve[{lhS $_1$==rhS $_1$,lhS $_2$==rhS $_2$,…},{x,y,…}]

โดยที่ lhS $_1$,…,lhS $_n$ เป็นสมการ

rhS $_1$,…,rhS $_n$ เป็นค่าคงที่

เป็นการหาค่าของเซตคำตอบ x,y,… ดังตัวอย่าง เช่น

ตังอย่าง In[1]:=Solve[{x+y==5,x-y==3},{x,y}]

Out[1] ={{x→ 4 , y→ 1}}

3. **การหา** Reduce Row Echelon Matrices **มีรูปแบบคำสั่ง ดังนี้**

RowReduce[m] โดยที่ m เป็นเมทริกซ์หรือ list ก็ได้

ตัวอย่าง $x + y + 2z = 9$

$2x + 4y - 3z = 1$

$3x + 6y - 5z = 0$

รูปแบบที่ 1 In[1]:=MatrixForm[RowReduce[{{1,1,2,9},{2,4,-3,1},{3,6,-5,0}}]]

$$\text{Out[1]//MatrixForm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

โดยที่แต่ละ list ประกอบด้วยสัมประสิทธ์ของตัวแปรโดยตัวสุดท้ายจะเป็นค่าคงตัวทางขวามือของสมการ

จำนวนสมาชิกในแต่ละ list จะเท่ากับจำนวนตัวแปรบวก 1 และจำนวน list จะ

เท่ากับ จำนวนสมการ

รูปแบบที่ 2 In[1] : = MatrixForm [A = {{ 1,1,2,9 },{ 2,4,-3,1 },{ 3,6,-5,0}}]

MatrixForm [RowReduce [A]]

Out[1]//MatrixForm $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Out[2]//MatrixForm $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. การหาผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์ (homogeneous)

รูปแบบสมการเอกพันธ์

$$Ax = 0$$

โดยที่ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงขนาด $m \times n$

x เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงขนาด $n \times 1$

ตัวอย่าง

$2x + y - z = 0$

$x - y + z = 0$

$x + 2y - z = 0$

โดยนำไปเขียนคำสั่งได้ ดังนี้

```
In[1] : = Solve [ { 2x+y-z == 0, x-y+z ==0, x+2y-z == 0 },{ x,y,z }]
Out[1]:= { x→0,y→0,z→0 }
```

5. Liear Independect Relation and Homogeneous System

กำหนด $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ R^n จะตรวจสอบว่าอิสระเชิงเส้น (Linear Independece) หรือไม่ โดยนำ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ มาเขียนให้อยู่ในรูปสมการ

$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0$

โดยที่ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นค่าคงตัวใดๆ เมื่อ

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \text{ โดยที่ } 1 \leq i \leq n$$

แล้วเขียนให้อยู่ในรูประบบสมการเอกพันธ์

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2n}k_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \ldots + a_{mn}k_n &= 0 \end{aligned}$$

In[1] := Solve [{ $a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n = 0$ },{ $a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2n}k_n = 0$ },…,{ $a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \ldots + a_{mn}k_n = 0$ },{ $k_1, k_1, \ldots, k_m$ }]

Out[1] = {{ $k_1 \rightarrow w_1, k_2 \rightarrow w_2, \ldots, k_m \rightarrow w_m$ }

ถ้า $w_1 = 0, w_2 = 0, \ldots, w_n = 0$

จะสรุปได้ว่า S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

6. การหาค่าตัวกำหนด (Determinants)

มีรูปแบบคำสั่ง ดังนี้

```
In[1]   := Det [A]
Out[1]  = w
```

โดยที่ A คือเมทริกซ์ที่สร้างจากคำสั่งในข้อ 1

w คือค่าตัวกำหนด

ตัวอย่าง

In[1] := Matrixform [A = {{ 1,2,3 },{ 4,5,6 },{ 7,8,9 }}]

$$\text{Out[1] // MatrixForm} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

In[2] := Det[A]

Out[2] = 0

หรือ In[1] := Matrixform [A = {{ 1,2,3 },{ 4,5,6 },{ 7,8,9 }}] ;Det[A]

Out[1] = 0

7. การตรวจสอบการแผ่ทั่วของเวกเตอร์แนวตั้ง

มีขั้นตอนและรูปแบบคำสั่งดังตัวอย่างนี้

ตัวอย่าง จงแสดงว่าเซต $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ แผ่ทั่ว R^3

วิธีทำ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $w \in R^3$

$$w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{โดย } x,y,z \in R$$

สามารถแสดงได้ในรูปผลบวกเชิงเส้น ดังนี้

$$k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

เราจะได้ระบบสมการ ดังนี้

$$\begin{bmatrix}k_1+k_3+3k_4\\2k_1+4k_2+2k_3+2k_4\\3k_1+4k_2+k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

เราจะได้ระบบสมการ 3 สมการมี 4 ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ k_1,k_2,k_3 และ k_4 ซึ่งต้องหาค่า ถ้าเราเลือก k_1,k_2 และ k_3 เป็นตัวแปรพื้นฐานและ k_4 เป็นตัวแปรอิสระ เราจะหาค่า k_1,k_2 และ k_3 ให้อยู่ในรูปของ k_4 โดยใช้แมททิมาติกาโดยมีรูปแบบคำสั่ง ดังนี้

In[1] := Solve[{ $k_1+k_3+3k_4$ == x,$2k_1+4k_2+2k_3+2k_4$== y,
$3k_1+4k_2+k_4$ == z },{ k_1,k_2,k_3 }]

Out[1] = {{ $k_1\rightarrow\frac{1}{3}\left(-5k_4+2x-y+z\right),k_2\rightarrow\frac{1}{4}\left(4k_4-2x+y\right),$
$k_3\rightarrow\frac{1}{3}\left(-4k_4+x+y-z\right)$}}

ซึ่งระบบสมการนี้เป็นระบบไม่ขัดแย้ง มีผลเฉลย คือ

$$k_1=\frac{1}{3}\left(-5k_4+2x-y+z\right)$$

$$k_2=\frac{1}{4}\left(4k_4-2x+y\right)$$

$$k_3 = \frac{1}{3}\left(-4k_4 + x + y - z\right)$$

7. การตรวจสอบการอิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์แนวตั้ง

ตัวอย่าง จงแสดงว่า เซต S = $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

เป็นอิสระเชิงเส้น ใน R^3

วิธีทำ เราต้องหาค่า k_1, k_2 และ k_3 ที่ทำให้ $k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$

สามารถแสดงในรูปผลรวมเชิงเส้น ดังนี้

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ระบบสมการเอกพันธ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_3 \\ 2k_1 + 4k_2 + 2k_3 \\ 3k_1 + 4k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ใช้แมททิเมติกาหาค่า k_1, k_2 และ k_3 โดยมีรูปแบบคำสั่งดังนี้

```
In[1]  := Solve[{ k1 + k3 == 0,2k1 + 4k2 +2k3 == 0,
                3k1 + 4k2 == 0 },{ k1,k2,k3 }]
Out[1] = {{ k1 → 0,k2 → 0, k3 → 0}}
```

ซึ่งระบบสมการนี้เป็นระบบไม่ขัดแย้งมีผลเฉลย คือ

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = 0$$

$$k_3 = 0$$

8. **การตรวจสอบฐาน** (Bases)

จะต้องตรวจสอบการแผ่ทั่วและอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง จงแสดงว่าเวกเตอร์ $S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \right\}$

เป็นฐานสำหรับ R^3

วิธีทำ ตรวจสอบการแผ่ทั่ว (ทำตามขั้นตอนข้อ 9) เราจะได้ระบบสมการ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_3 \\ 2k_1 + 5k_2 + 2k_3 \\ 3k_1 + 2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

แล้วใช้แมททิเมติกาหาค่าตัวแปร k_1, k_2 และ k_3 โดยมีรูปคำสั่งดังนี้

```
In[1]   := Solve[{ k1 + k3 == x,2k1 + 4k2 +2k3 == y,3k1 + 4k2 == z },
           { k1,k2,k3 }]
```

Out[1] := $\{\{ k_1 \to \frac{1}{15}(4x - 2y + 5z), k_2 \to \frac{1}{5}(2x + y), k_3 \to \frac{1}{15}(11x + 2y - 5z) \}\}$

เซต S แผ่ทั่วใน R^3 ซึ่ง k_1, k_2 และ k_3 จะขึ้นอยู่กับ x,y และ z

ตรวจสอบการอิสระเชิงเส้น (ทำตามขั้นตอนข้อ 10) เราจได้ระบบสมการเอกพันธ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_3 \\ 2k_1 + 5k_2 + 2k_3 \\ 3k_1 + 2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แล้วใช้แมททิเมติกาหาค่าตัวแปร k_1, k_2 และ k_3 โดยมีรูปคำสั่งดังนี้

```
In[1]  := Solve[{ k1 + k3 == 0,2k1 + 5k2 +2k3 == 0,
              3k1 + 2k2 == 0 },{ k1,k2,k3 }]
Out[1] = {{ k1 → 0,k2 → 0, k3 → 0}}
```

ซึ่งค่า $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

ดังนั้น S เป็นฐานสำหรับ R^3

11. **การหาฐานของปริภูมิผลเฉลยเชิงเส้นของสมการเอกพันธ์**

ตัวอย่าง พิจารณาระบบสมการเอกพันธ์ $Ax = 0$

$$x_1 + 3x_2 - x_5 + x_6 = 0$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 0$$

เราจะได้รูปแบบลดทอนลดรูปเป็นขั้นทางแถว (Row Reduced Echelon Form) ของเมทริกซ์แต่งเติม

$$(A|0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

เราจะหาฐาน ของปริภูมิผลเฉลยของ $Ax = 0$ โดยมีรูปแบบคำสั่งดังนี้

```
In{2}:= B = RowReduce[(A|0)]//MatrixForm
```

$$\text{Out//MatrixForm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{11}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{8}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

จากระบบสมการ มีผลเฉลยคือ

$$x_1 = \frac{6}{7}x_4 - \frac{11}{7}x_5 - \frac{4}{7}x_6$$

$$x_2 = -\frac{2}{7}x_4 + \frac{6}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6$$

$$x_3 = -\frac{5}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 + \frac{8}{7}x_6$$

ผลเฉลยเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7}x_4 - \frac{11}{7}x_5 - \frac{4}{7}x_6 \\ -\frac{2}{7}x_4 + \frac{6}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6 \\ -\frac{5}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 + \frac{8}{7}x_6 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_4\begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix} -\frac{11}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6\begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{8}{7} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1,\ldots,x_6 \in R$

ถ้าให้ $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{8}{7} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่าทุกค่าคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นจะอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ v_1, v_2 และ v_3

$\therefore$ เซต $\{v_1, v_2, v_3\}$ แผ่ทั่วในปริภูมิผลเฉลยข้างต้น

$\therefore$ เซต $\{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

$\therefore$ เซต $\{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นฐานของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น

12 การหาฐานของปริภูมิแถวของเมทริกซ์

มีรูปแบบคำสั่งดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ โดยเราจะใช้ Row Reduce Echelon Form

```
In[1]:= MatrixForm[A={{3,1,0,0,2},{1,1,0,0,2},{5,2,0,3,7}}]
In[2]:= MatrixForm[RowReduce[A]]
```

Out[2]// MatrixForm = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

จาก out put ที่ได้เราจะได้ของปริภูมิแถวของ A คือเวกเตอร์แถวที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น เซต {(1,0,0,1,1),(0,1,0,-1,1)} เป็นฐานของปริภูมิแถว

13 การหาฐานของปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์

มีรูปแบบคำสั่งดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ โดยเราจะใช้ Row Reduce Echelon Form

```
In[1]:= MatrixForm[A={{3,1,0,0,2},{1,1,0,0,2},{5,2,0,3,7}}]
In[2]:= Transpose[A]
In[3]:= RowReduce[Transpose[A]]
```

Out[3]={{ 1,0, $\frac{3}{2}$ },{ 0,1, $\frac{1}{2}$ },{ 0,0,0 },{ 0,0,0 },{ 0,0,0 }}

จาก out put ที่ได้เราจะได้ของปริภูมิแถวของ A^t คือเวกเตอร์แถวที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น เซต {(1,0, $\frac{3}{2}$),(0,1, $\frac{1}{2}$) } เป็นฐานของปริภูมิแถวของ A^t

หรือสมมูลกับฐานของปริภูมิสดมภ์ A คือ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$

14. การหาค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์(Rank of Matrix)

ตัวอย่าง หา rank ของเมทริกซ์ A โดยการทำ column reduced echelon form

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

โดยมีรูปแบบคำสั่งดังนี้

```
In[1]:= ColumnRank[A_]:=Length[Transpose[A]]-Length[NullSpace[A]]
In[2]:= Rank[A_]:= ColumnRank[A]
In[3]:= MatrixForm[A={{3,1,0,2,4},{1,1,0,0,2},{5,2,0,3,7}}];Rank[A]
Out[3]:=2
```

ซึ่งจะได้ rank=2

และเราสามารถหาฐานของปริภูมิแถวได้

ตัวอย่าง หา rank ของเมทริกซ์ A โดยทำการ row reduced echelon form โดยมีรูปแบบคำสั่งดังนี้

```
In[1]:= RowRank[A_]:=Length[A]-Length[NullSpace[Transpose [A]]]
In[2]:= Rank[A_]:= RowRank[A]
In[3]:= MatrixForm[A={{3,1,0,2,4},{1,1,0,0,2},{5,2,0,3,7}}];Rank[A]
Out[3]:=2
```

และเราสามารถหาฐานของปริภูมิแถวได้ โดยใช้คำสั่งนี้

```
In[1]:= RowRank[A_]:=Length[A] - Length[NullSpace[Transpose [A]]]
In[2]:= Rank[A_]:= RowRank[A]
In[3]:= RowSpace[A_]:=Take[RowReduce[A],Rank[A]]
In[4]:=MatrixForm[A={{3,1,0,2,4},{1,1,0,0,2},{5,2,0,3,7}}];RowSpace[A]
Out[4]:={{1,0,0,1,1},{0,1,0,-1,1}}
```

ซึ่งจะได้เซต {(1,0,0,1,1),(0,1,0,-1,1)} เป็นฐานของปริภูมิแถวของ A

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

3.1 ระบบงาน

3.1.1 ส่วนนำเข้าข้อมูล

ข้อมูลที่นำเข้าคือ สมการต่าง ๆ และเมทริกซ์ ซึ่งเมทริกซ์ที่ป้อนเข้าต้องอยู่ในรูปแบบที่กำหนดให้ สามารถศึกษาในภาคผนวก

3.1.2 ส่วนวิเคราะห์และการประมวลผล

จากส่วนนำข้อมูล นำข้อมูลมาหาฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ หาฐานและมิติของปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ และหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์ ได้ผลเฉลยคือเซตของฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ และค่าแรงค์ของเมทริกซ์

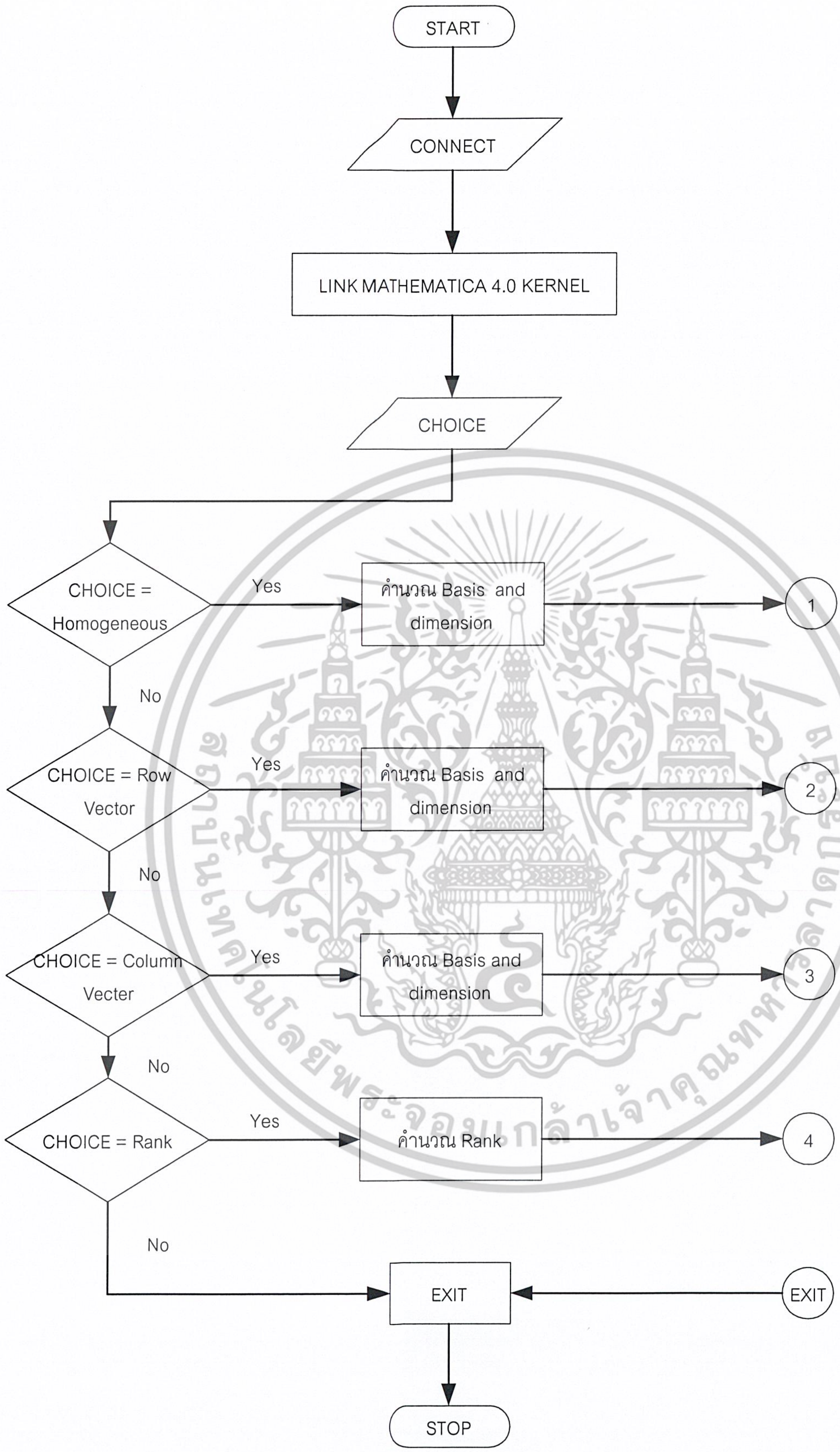
3.1.3 ส่วนแสดงผล

นำค่าฐานและมิติที่ได้มาแสดงผลทางจอภาพ โดยจะมีฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยเชิงเส้นเอกพันธ์ ฐานและมิติของปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ และค่าแรงค์ของเมทริทซ์

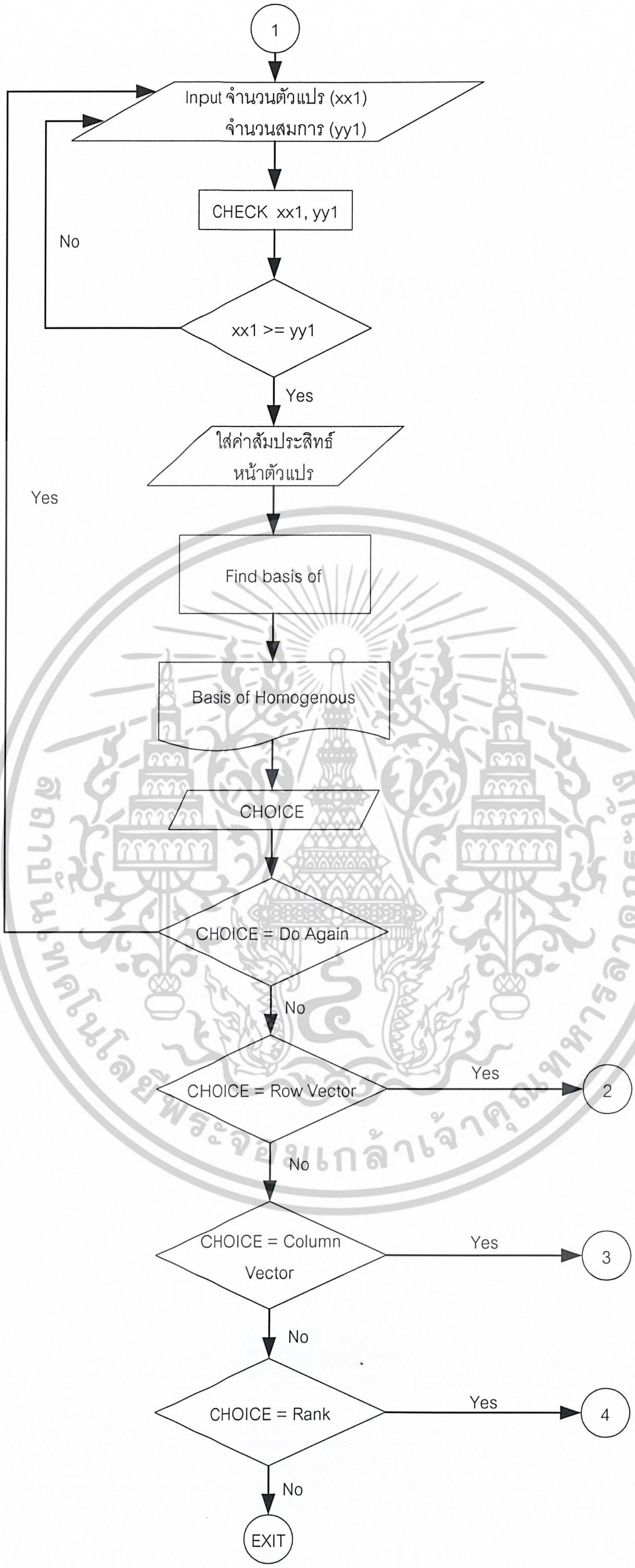
3.2 ขั้นตอนการทำงาน

1. นํฆ้าข้อมูล โดยข้อมูลที่นำเข้าจะเป็น ระบบสมการต่าง ๆ และ เมทริกซ์ ซึ่งเมทริกซ์ที่ป้อนต้องอยู่ในรูปแบบที่กำหนดให้ สามารถศึกษาในภาคผนวก
2. นำเข้าข้อมูล โดยข้อมูลที่นำเข้าคือ สมการต่าง ๆ และเมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบที่กำหนดให้แล้ว
3. ทำการหาฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ และค่าแรงค์ของเมทริกซ์
4. นำผลที่ได้ของการหาฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ ฐานและมิติของปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ และหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์มาแสดงผลทางจอภาพ

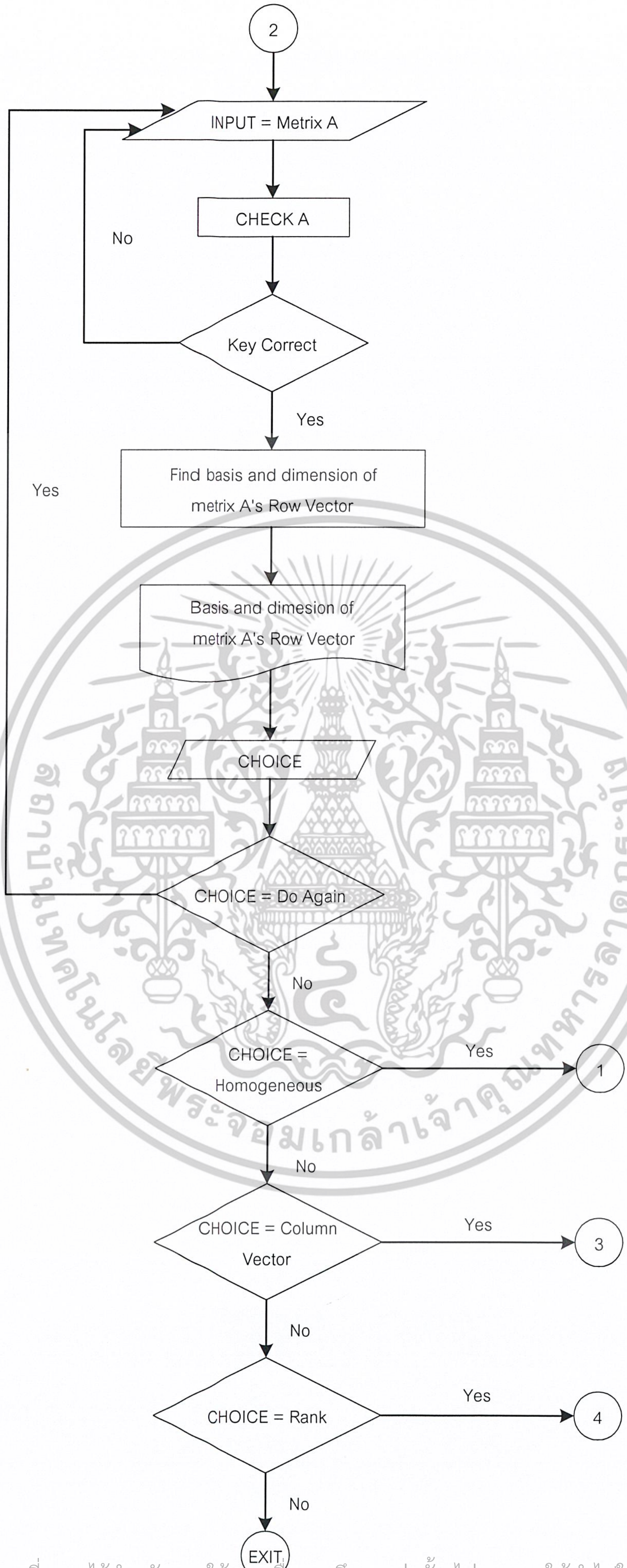
แสดงดังรูป Flow Chart ดังนี้



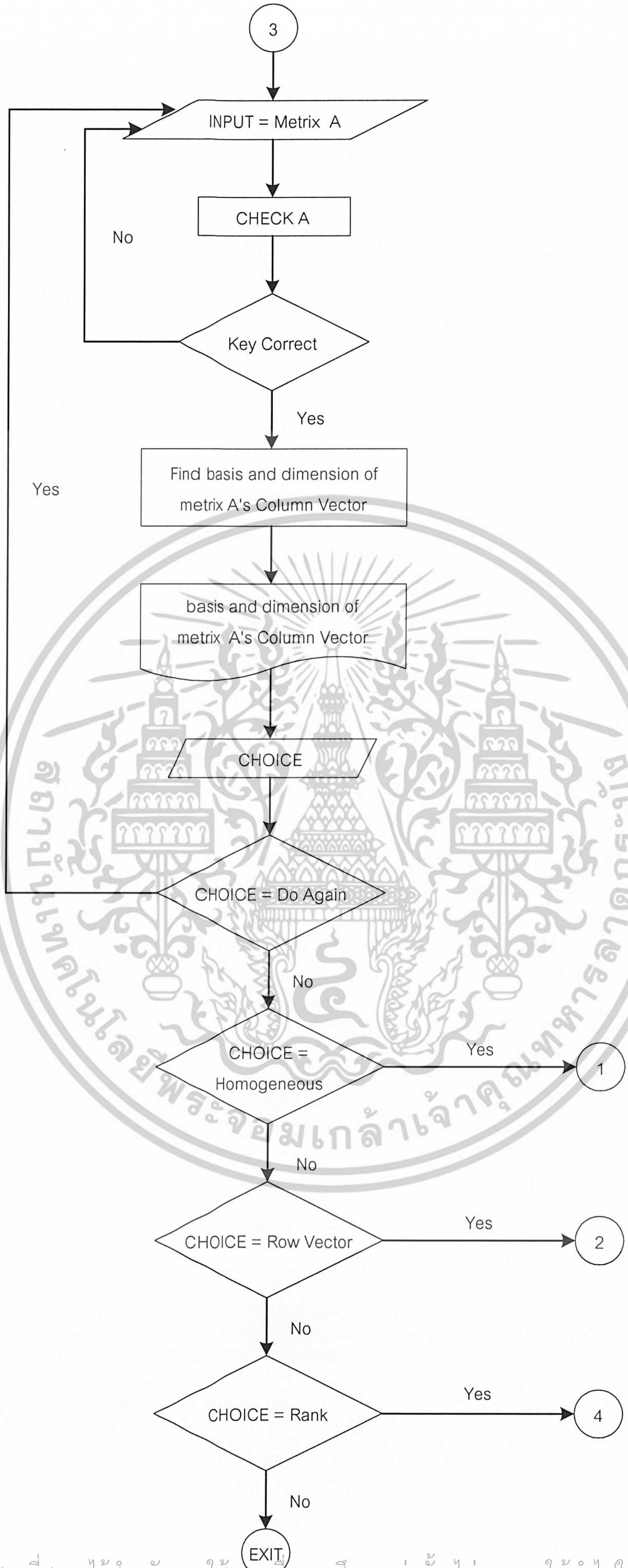
รูปที่ 3.1 Flow Chart แสดงหน้าจอหลัก



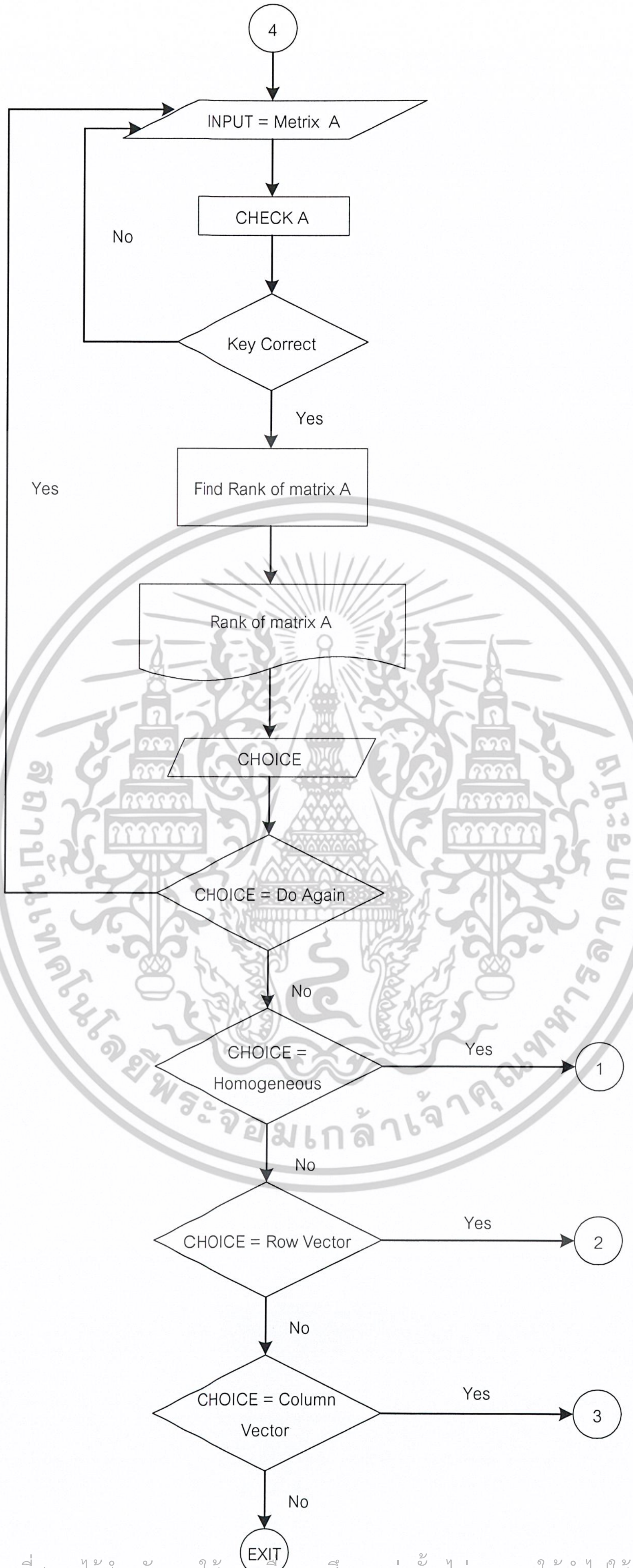
รูปที่ 3.2 Flow Chart แสดงการหา Basis and dimension ของ Homogenous's solution space



รูปที่ 3.3 Flow Chart แสดงการหา Basis and dimension ของ Row Vector



รูปที่ 3.4 Flow Chart แสดงการหา Basis and dimension ของ Column Vector



รูปที่ 3.4 Flow Chart แสดงการหา Rank

บทที่ 4

การอภิปรายผล

คุณสมบัติและความสามารถของโปรแกรม

1. โปรแกรมไม่สามารถหาฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ได้โดยตรง แต่โปรแกรมจะช่วยหาแค่ Reduced Row Echelon form เท่านั้น จากนั้นผู้ใช้จะต้องทำต่อด้วยมือโดยมีวิธีในภาคผนวก ซึ่งจะได้ค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ได้อย่างถูกต้อง

2. โปรแกรมสามารถหาของฐานและมิติของปริภูมิแถวของเมทริกซ์ ได้ซึ่งมีค่าที่ถูกต้อง

3. โปรแกรมสามารถหาของฐานและมิติของปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ ได้ซึ่งมีค่าที่ถูกต้อง

4. โปรแกรมสามารถหาแรงค์ของเมทริกซ์ ได้ซึ่งมีค่าที่ถูกต้อง

ข้อจำกัดของโปรแกรม

1. โปรแกรมจะทำงานได้อย่างถูกต้องก็ต่อเมื่อผู้ใช้ป้อนเมทริกซ์เข้าไปในตัวโปรแกรมได้อย่างถูกต้องตามรูปแบบของการป้อนใน Software Mathematica ซึ่งสามารถศึกษาการป้อนได้ในส่วนของภาคผนวกและปุ่ม Help ในโปรแกรม

2. สำหรับการฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยเชิงเส้นเอกพันธ์ จะหาค่าได้เมื่อสมการเป็นสมการเอกพันธ์ (Ax = 0) และมีจำนวนตัวแปรไม่เกิน 10 ตัวและจำนวนสมการไม่เกิน 10 สมการ

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

ผลที่ได้จากการศึกษาและจัดทำโปรแกรมการหาฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ การหาฐานและมิติของปริภูมิแถว การหาฐานและมิติของปริภูมิสดมภ์ การหาแรงค์ของเมทริกซ์ โดยใช้โปรแกรม Visual Basic และมีการติดต่อกับ Software Mathematica เพื่อใช้ในการหาค่า ซึ่งได้แบ่งประเภทของปริภูมิเวกเตอร์ไว้ดังนี้ การหาค่าฐานและมิติของปรภูมิผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์โปรแกรมไม่สามารถหาฐานและมิติได้โดยตรง โปรแกรมจะหาได้แค่ Reduced Row Echelon form เท่านั้นจากนั้นจะต้องทำต่อด้วยมือซึ่งอธิบายไว้ในภาคผนวกแล้ว การหาฐานและมิติของปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ โปรแกรมสามารถหาค่าฐานและมิติได้อย่างถูกต้องและแสดงค่าฐานและมิติด้วย และการหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์โปรแกรมสามารถหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์ได้อย่างถูกต้องเช่นกันและแสดงค่าแรงค์ที่ได้ การป้อนเมทริกซ์นั้นจะต้องป้อนให้ถูกต้องตามรูปแบบที่กำหนดไว้ในภาคผนวก จึงจะได้ผลที่ถูกต้องตามต้องการ โดยรูปแบบการป้อนเมทริกซ์สามารถใช้ได้ทั้งในการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิแถวและปริภูมิสดมภ์และการหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์ใดๆ

ข้อเสนอแนะ

1. ผู้จัดทำมีความเห็นว่าน่าจะได้ศึกษาและเขียนโปรแกรมการหาฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ เพื่อได้ค่าฐานและมิติได้โดยตรงโดยไม่ต้องทำต่อด้วยมือและไม่ต้องจำกัดจำนวนตัวแปรและจำนวนสมการคือไม่ว่าระบบสมการจะมีจำนวนตัวแปรและจำนวนสมการเท่าก็สามารถหาได้
2. ผู้จัดทำมีความเห็นว่าในการหาค่าของฐานและมิติของปรภูมิแถวของเมทริกซ์และปริภูมิสดมภ์ของเมทริกซ์ และหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์ในการป้อนค่าของเมทริกซ์หน้าจะทำให้ผู้ใช้มีความสะดวกมากขึ้นโดยทำเป็นรูปแบบของเมทริกซ์

บรรณานุกรม

กิตติ ภัคดีวัฒนะกุล และ จำลอง ครูอุตสาหะ. 2542. Visual Basic 6 **ฉบับโปรแกรมเมอร์**. พิมพ์ ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ : หจก.ไทยเจริญ การพิมพ์.

ธง รุญเจริญ. 2523. **พีชคณิตเชิงเส้น**. สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์ กรุงเทพ.

ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ .**พีชคณิตเชิงเส้น** .โครงการตำราสถาบันเทคโนโลยีพระเจ้าเกล้าเจ้า-คุณทหารลาดกระบัง .

มานัส บุญยัง และ สมพร สูตินันท์โอภาส . 2531. **เมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น** 1. มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ไมตรี โพธิ์สุข . 2527. **พีชคณิตเชิงเส้น** .โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยา-ศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระเจ้าเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง .

สัจจะ จรัสรุ่งรวีวร. 2544. **คู่มือการเขียนโปรแกรมและใช้งาน**Visual Basic 6.0. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : บริษัท ด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด.

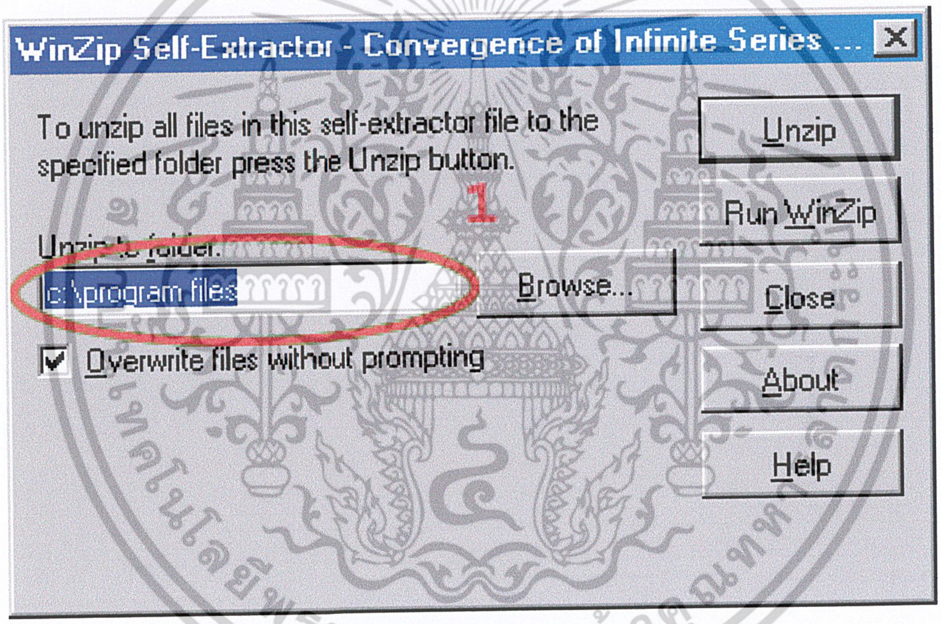
Fred Szabo , Linear Algebra An Introduction Using Mathemation. 2000. Cuncordia Vniversity montreal , Quebec , Cauada .

ภาคผนวก

ขั้นตอนการติดตั้งและวิธีใช้โปรแกรม

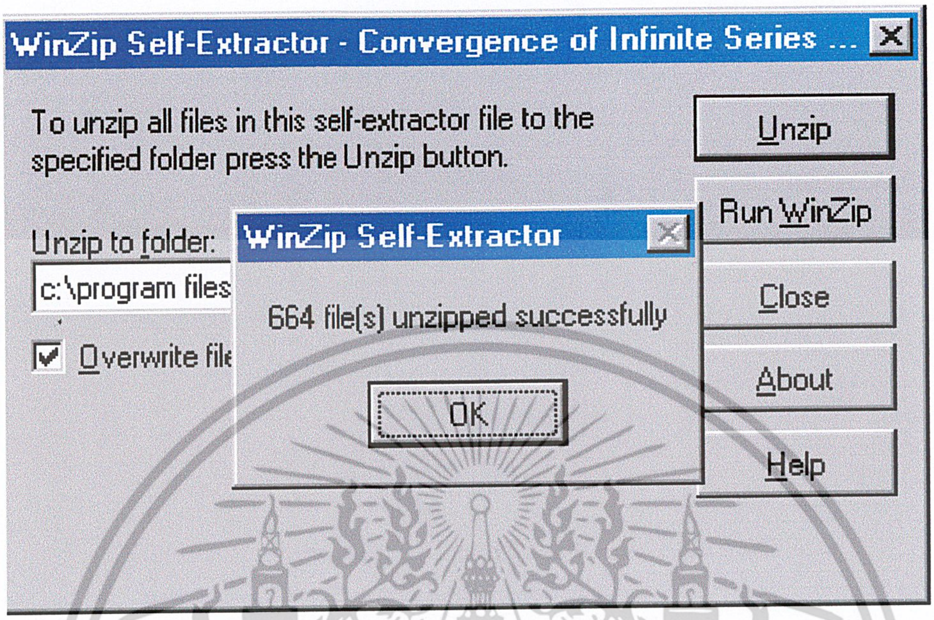
ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรม

1. ดับเบิ้ลคลิกไฟล์ Finding the Basis and Dimension of Vector Space by Computer.exeเพื่อติดตั้งตัวโปรแกรมจะได้ดังภาพ
2. ในหมายเลข 1 ใช้สำหรับระบุเลือก directory ที่ต้องการจะติดตั้งโปรแกรม จากนั้นเลือกปุ่ม Unzip



รูปที่ ผ. 1 แสดงวิธีการติดตั้ง

3. คลิก OK เพื่อเสร็จสิ้นการติดตั้งโปรแกรม

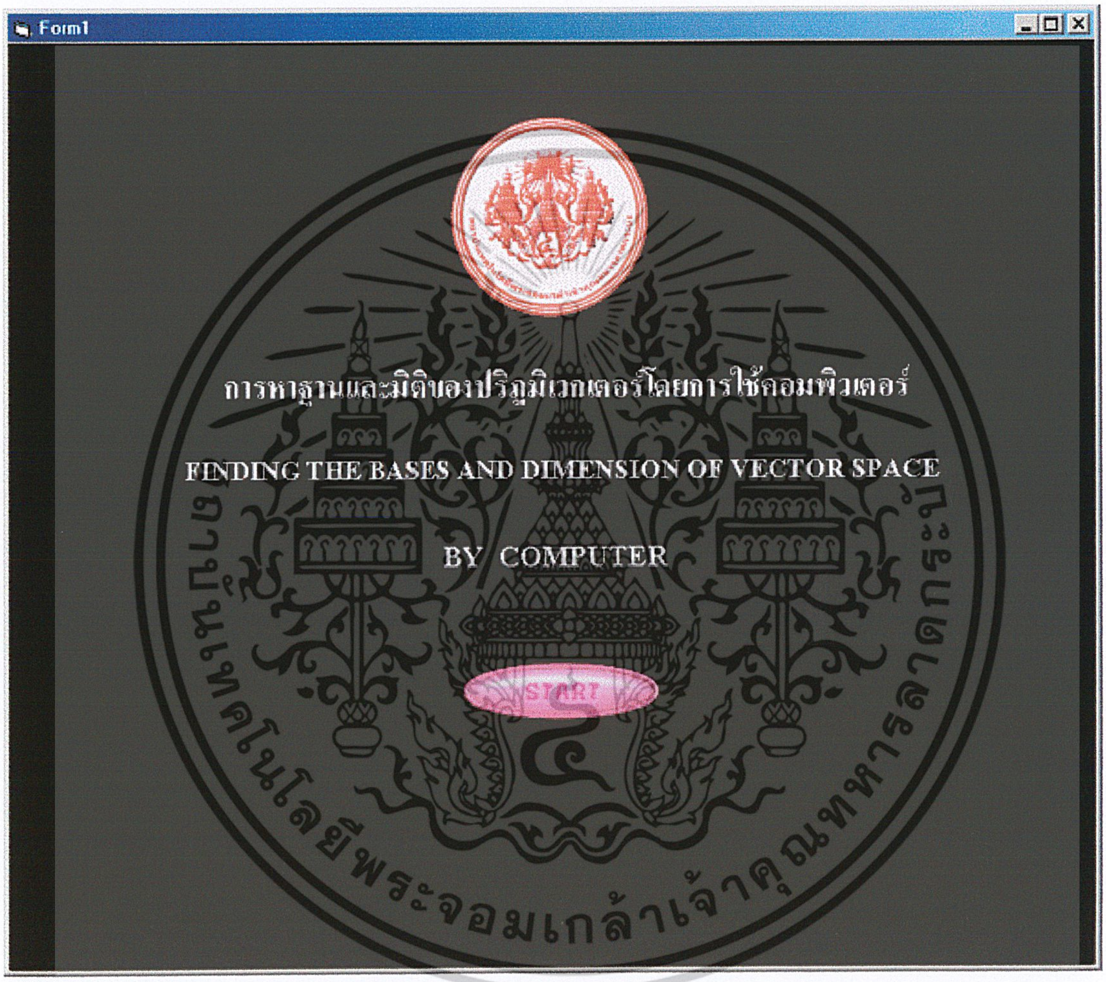


รูปที่ ผ. 2 แสดงการติดตั้งเรียบร้อย

วิธีใช้โปรแกรม

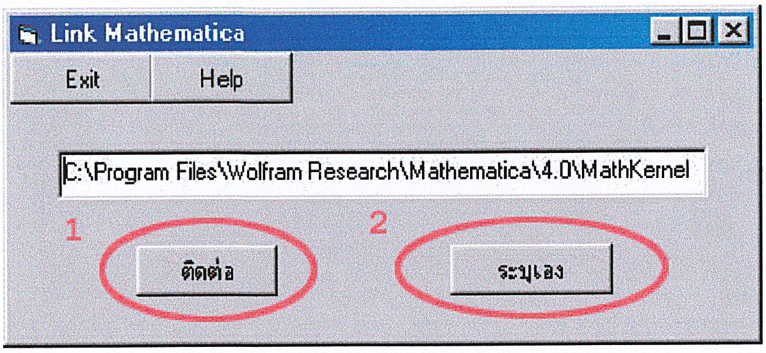
1. เมื่อเรียกใช้โปรแกรมหน้าจอจะแสดงภาพดังรูป

2. คลิก Enter เพื่อเข้าสู่การใช้งานโปรแกรมการหาฐานและมิติของปริภูมิเวกเตอร์โดยการใช้คอมพิวเตอร์



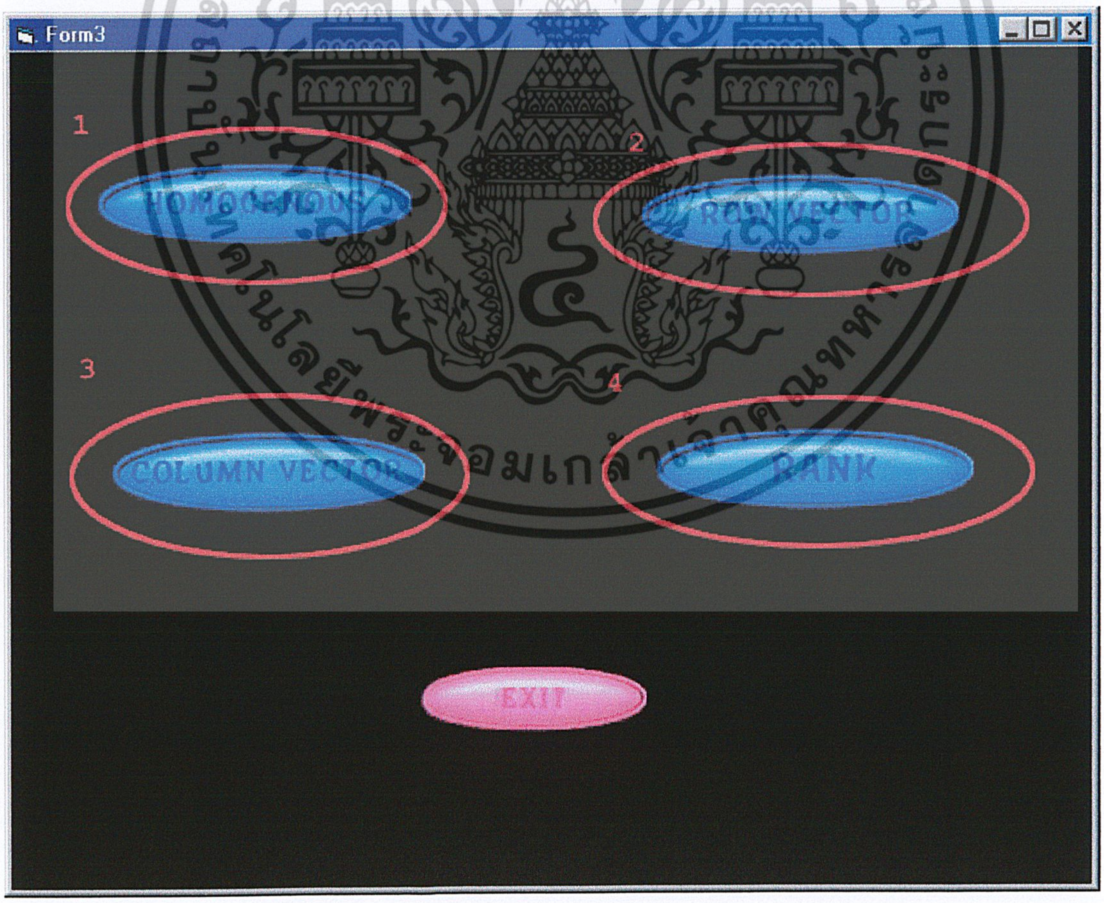
รูปที่ ผ. 3 **หน้าจอแรกของโปรแกรม**

3. วงที่ 1 เป็นการเลือกคิดต่อโปรแกรม Mathematica ตาม directory ที่ได้ระบุไว้อยู่แล้ว วงที่ 2 เป็นการติดต่อโปรแกรม Mathematica โดยสามารถระบุ directory ได้ใหม่ หลังจากที่ได้ทำการติดต่อโปรแกรม Mathematica แล้วโปรแกรมจะขึ้นหน้าจอใหม่เป็นหน้าจอเลือกการทำงานของโปรแกรม



รูปที่ ผ. 4 หน้าจอการติดต่อ Mathematica

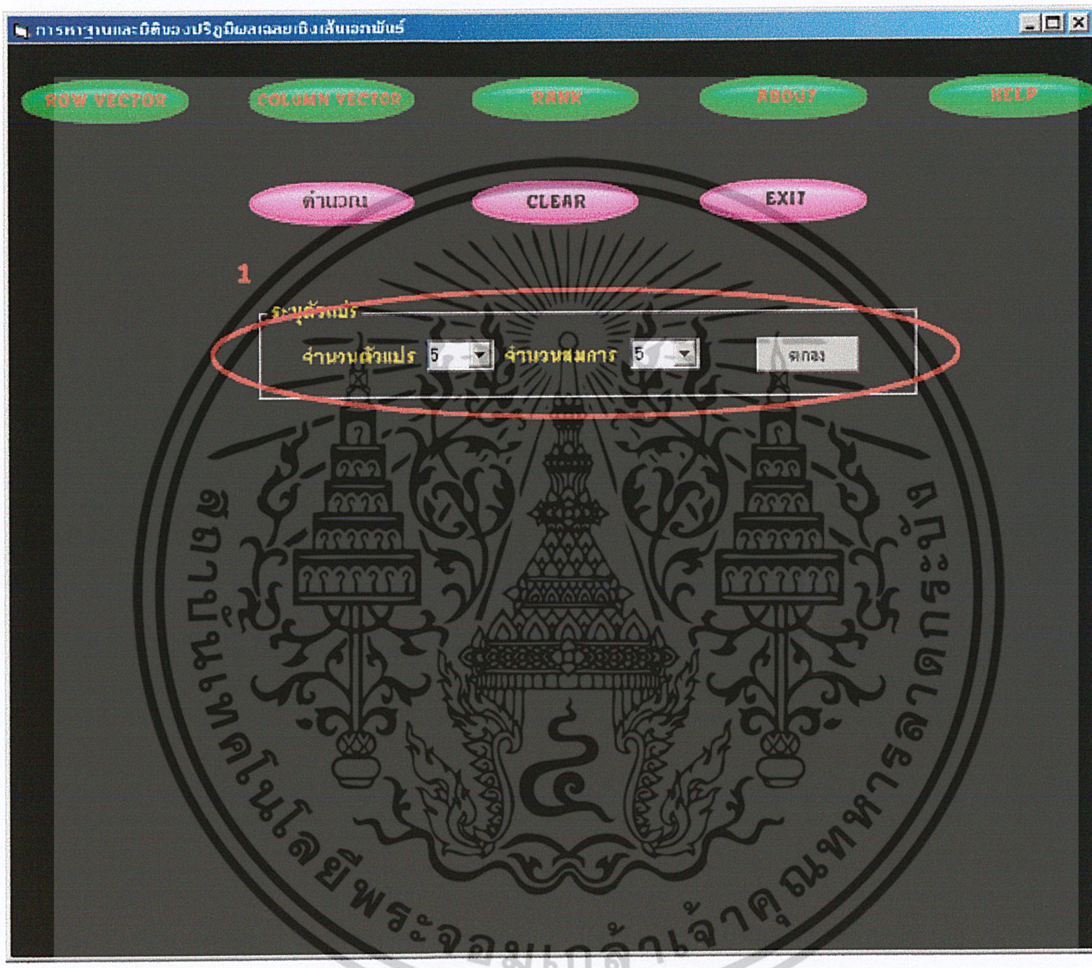
4. หน้าจอแสดงการเลือกการหาค่าฐานและมิติ คลิกวงที่1 จะเป็นการเลือกการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยเชิงเส้นเอกพันธ์ วงที่ 2 จะเป็นการเลือกการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิแถว วงที่ 3 จะเป็นการเลือกการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิสดมภ์ วงที่ 4 จะเป็นการเลือกการหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์



รูปที่ ผ. 5 หน้าจอการเลือกวิธีการหาค่าแบบต่าง ๆ

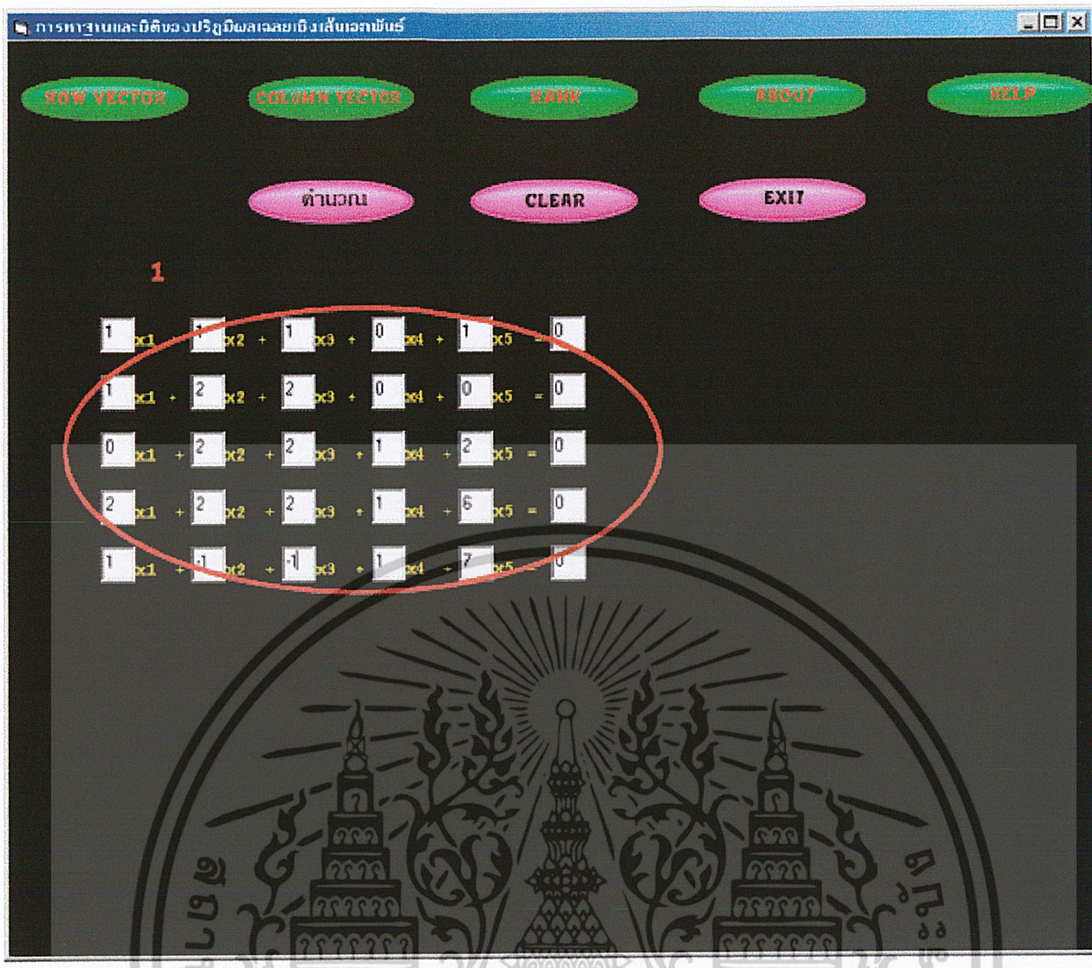
5. หน้าจอการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยเชิงเส้นเอกพันธ์

1. ถ้าเลือกกดกดปุ่ม homogenous จากหน้าจอการเลือกวิธีการหาค่าแบบต่างๆ จะปรากฏหน้าจอให้ระบุจำนวนตัวแปร และจำนวนสมการ แล้วกดปุ่มตกลง แสดงให้เห็นดังรูป



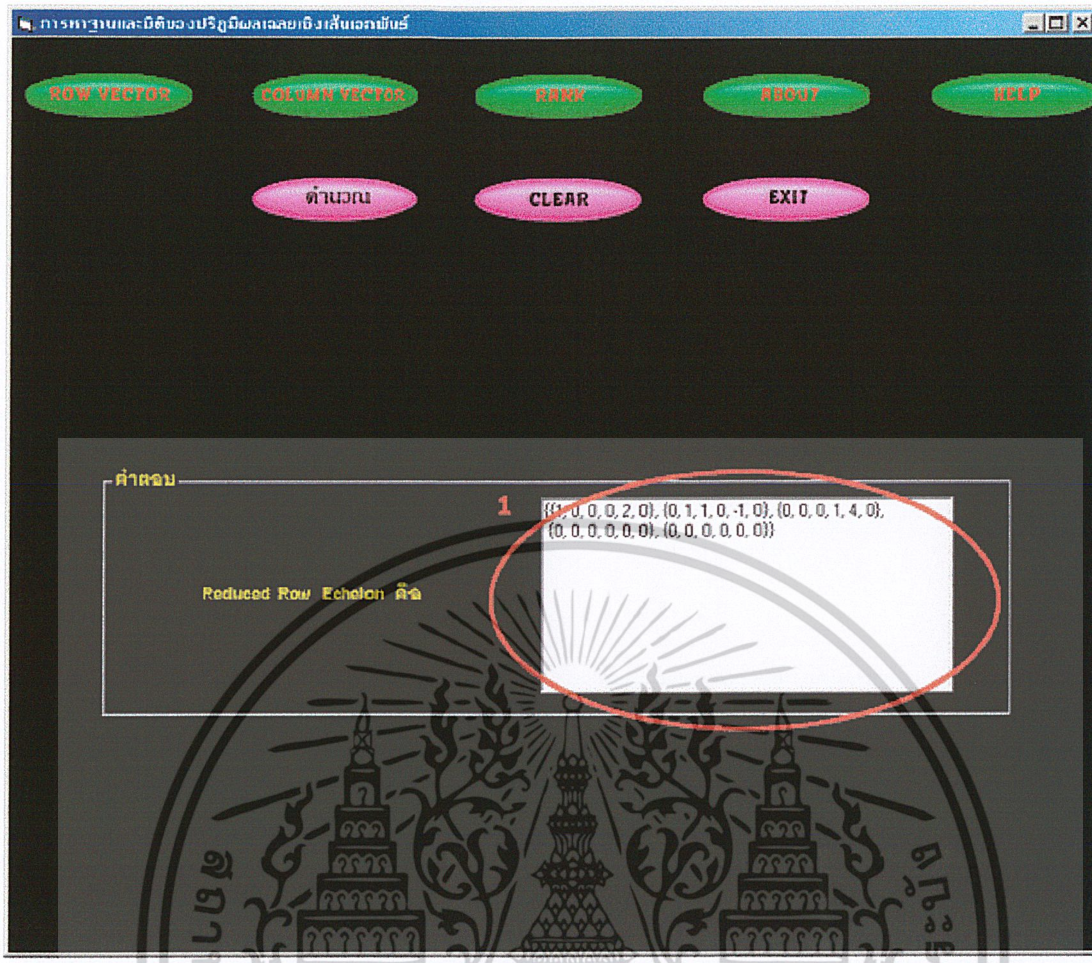
รูปที่ ผ. 6 หน้าจอระบุจำนวนตัวแปร และจำนวนสมการ

2. เมื่อกดปุ่มตกลงจะปรากฏหน้าจอใหม่ ในวงที่ 1 ให้ใส่ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าศูนย์ทางขวาของสมการ จากนั้นกดปุ่มคำนวณ แสดงให้เห็นดังรูป



รูปที่ ผ.7 **หน้าจอใส่ค่าสัมประสิทธิ์หน้าสมการ**

4. เมื่อกดปุ่มคำนวณจะได้คำตอบในวงที่ 1 ซึ่งคือค่า Reduced Row Echelon form แสดงให้เห็นดังรูป



รูปที่ ผ.8 **หน้าจอแสดงค่า** Reduced Row Echelon form

เนื่องจากโปรแกรมไม่สามารถหาค่าฐานได้โดยตรงเราจะต้องทำต่อด้วยมือเพื่อหาค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยเชิงเส้นเอกพันธ์

เนื่องจาก output ที่ได้คือค่าของ Reduced Row Echelon form ถ้าเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นจะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ระบบสมการผลเฉลยคือ

$$x_1 = -2x_5$$
$$x_2 = -x_3 + x_5$$
$$x_4 = -4x_5$$

เขียนผลเฉลยใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_5 \\ -x_3 + x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ถ้าให้ $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น v_1 และ v_2 จะเป็นฐานของปริภูมิผลเฉลยเชิงเส้นเอกพันธ์ และมี มิติ คือ 2 ถ้าเราทำด้วยมือก็จะได้ค่าฐานและมิติเท่ากันโดยมีวิธีทำดังนี้

ตัวอย่างที่1 จงหาคำตอบและฐานของปริภูมิของผลเฉลยเชิงเส้นเอกพันธ์ข้างล่างนี้

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$
$$2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 7x_5 = 0$$

วิธีทำ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากนั้นทำแถวโอเปอร์เรชั่นให้ได้เมทริกซ์แบบแถวเอคคี่ลอนอย่างต่ำจะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim R_2 - R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim R_4 - 2R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim R_5 - R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim R_3 - 2R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim R_5 + 2R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim R_5 - R_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim R_4 - R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \quad R_1 - R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จากการทำ Reduced Row Echelon จะได้ระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นเหมือนกับระบบสมการเชิงเส้นข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ระบบสมการมีผลเฉลยคือ

$$x_1 = -2x_5$$

$$x_2 = -x_3 + x_5$$

$$x_4 = -4x_5$$

เขียนผลเฉลยใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_5 \\ -x_3 + x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ถ้าให้ $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่าทุกคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นจะอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ v_1 และ v_2

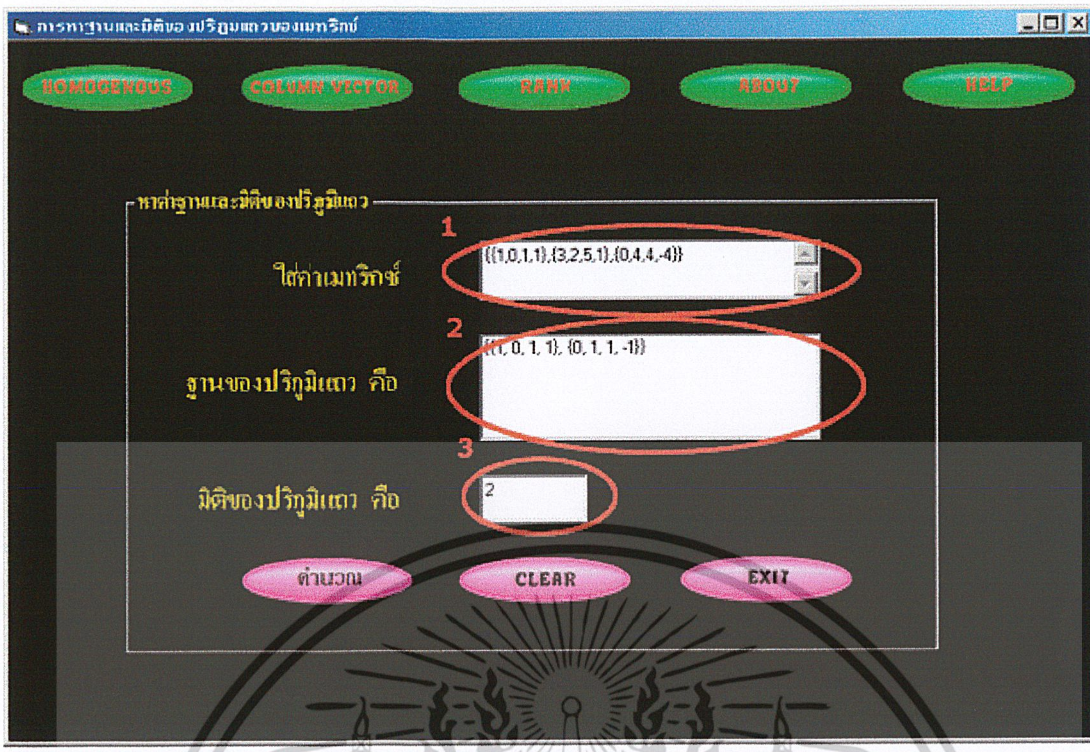
ดังนั้น เซต $\{v_1, v_2\}$ แผ่ทั่วในปริภูมิผลเฉลยข้างต้น

เซต $\{v_1, v_2\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

เซต $\{v_1, v_2\}$ เป็นฐานของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น

6. หน้าจอการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิแถว

1. วงที่ 1 เป็นส่วนที่ให้ใส่ค่าของปริภูมิแถว ที่ต้องการหาฐานของปริภูมิแถว
2. วงที่ 2 แสดงค่าฐานของปริภูมิแถว
3. วงที่ 3 แสดงค่ามิติของปริภูมิแถว
4. ปุ่ม homogenous คลิกเพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์
5. ปุ่ม rank คลิก เพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหา แรงค์ของเมทริกซ์
6. ปุ่ม column vector คลิก เพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมสดมภ์ของเมทริกซ์
7. ปุ่ม about คลิก เพื่อดูรายละเอียดเกี่ยวผู้จัดทำ
8. ปุ่ม help คลิก เพื่อดูวิธีการใช้โปรแกรม
9. ปุ่ม คำนวณ คลิกเพื่อทำการคำนวณ
10. ปุ่ม clear คลิกเพื่อทำการลบค่าในช่องที่ 1 และ 2 เพื่อ หาฐานของเมทริกซ์อื่นๆต่อ
11. ปุ่ม exit คลิก เพื่อต้องออกจากโปรแกรม



รูปที่ ผ.8 **หน้าจอการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิแถวของเมทริกซ์**

จากการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมิแถวโดยการใช้โปรแกรมจะได้ค่าฐานคือ (1 0 1 1) และ (0 1 1 -1) และมีมิติเท่ากัน 2

ถ้าเราทำด้วยมือก็จะได้ค่าฐานและมิติของปริภูมิแถวเท่ากันโดยมีวิธีทำดังนี้

ตัวอย่างที่2 จงหาฐานของปริภูมิแถวของ A เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ทำ Reduced Row Echelon

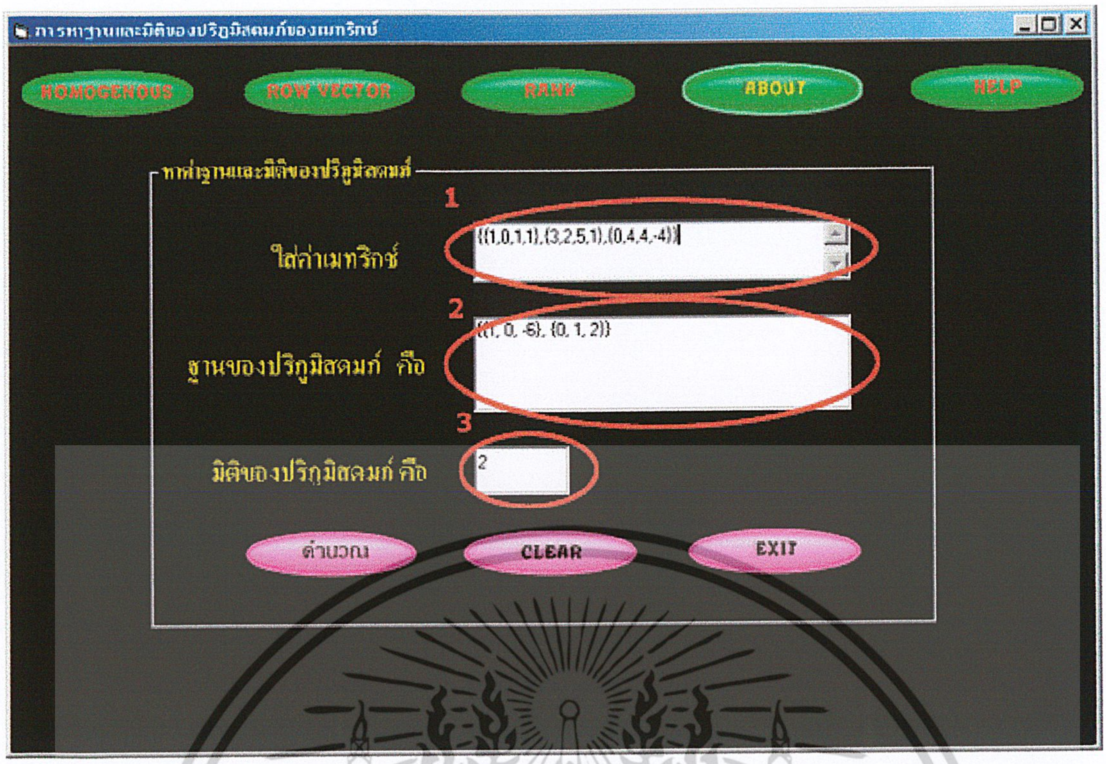
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \quad R_2 - 3R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \quad \frac{1}{2}R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \frac{1}{4}R_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \quad R_3 - R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเวกเตอร์ (1 0 1 1) และ (0 1 1 -1) เป็นฐานของปริภูมิแถวของ A

7. หน้าจอการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิสดมภ์
   1. วงที่ 1 เป็นส่วนที่ให้ใส่ค่าของปริภูมิสดมภ์ ที่ต้องการหาฐานของปริภูมิสดมภ์
   2. วงที่ 2 แสดงค่าฐานของปริภูมิสดมภ์
   3. วงที่ 3 แสดงค่ามิติของปริภูมิสดมภ์เพื่อแสดง
   4. ปุ่ม homogenous คลิกเพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์
   5. ปุ่ม row vector คลิก เพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมแถวของเมทริกซ์
   6. ปุ่ม rank คลิก เพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหา rank ของเมทริกซ์
   7. ปุ่ม about คลิก เพื่อดูรายละเอียดเกี่ยวผู้จัดทำ
   8. ปุ่ม help คลิก เพื่อดูวิธีการใช้โปรแกรม
   9. ปุ่ม คำนวณ คลิกเพื่อทำการคำนวณ
   10. ปุ่ม clear คลิกเพื่อทำการลบค่าในช่องที่ 1 และ 2 เพื่อ หาฐานของเมทริกซ์อื่นๆต่อ
   11. ปุ่ม exit คลิก เพื่อต้องออกจากโปรแกรม



รูปที่ ผ.9 **หน้าจอการหาค่าฐานและมิติของปริภูมิสดมภ์ของเมทริซ์**

จากการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมิแถวโดยการใช้โปรแกรมจะได้ค่า

ฐานคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และมีมิติเท่ากัน 2

ถ้าเราทำด้วยมือก็จะได้ค่าฐานและมิติของปริภูมิแถวเท่ากันโดยมีวิธีทำดังนี้

ตัวอย่างที่3 จงหาฐานของปริภูมิสดมภ์ ของ A

เมื่อ $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$A^t=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

จากนั้นทำ reduced row echelon form จะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim R_3 - R_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim R_4 - R_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim R_4 + R_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim R_3 - R_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{2} R_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

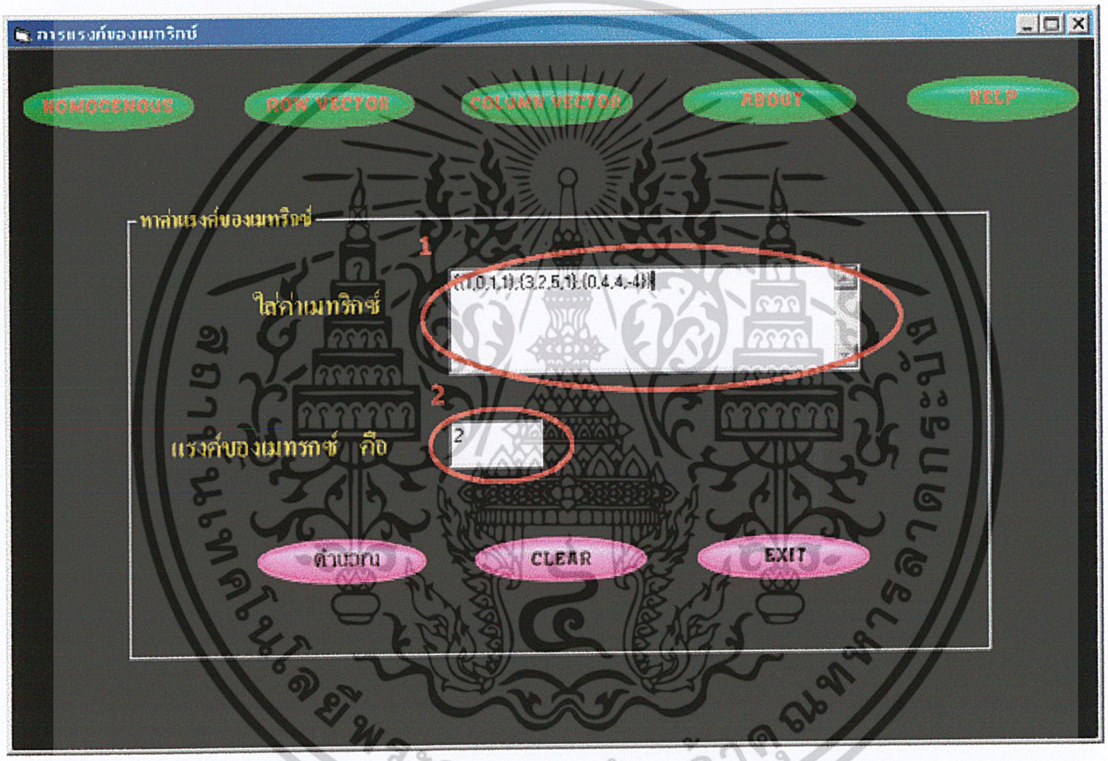
$$\sim R_1 - 3R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ (1,0,-6) และ (0,1,2) เป็นฐานของปริภูมิแถว A^t หรือ เป็นฐานของปริภูมิสดมภ์ A คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

8. หน้าจอการหาค่าแรงค์

1 . วงที่ 1 เป็นส่วนที่ให้ใส่ค่าของเมทริกซ์ที่ต้องการหาค่าแรงค์
2. วงที่ 2 แสดงค่า rank ของเมทริกซ์
3. ปุ่ม homogenous คลิกเพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมิผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์
4. ปุ่ม row vector คลิก เพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมแถวของเมทริกซ์

5. ปุ่ม column vector คลิก เพื่อต้องการไปยังหน้าการคำนวณหาค่าฐานและมิติของปริภูมสดมภ์ของเมทริกซ์
6. ปุ่ม about คลิก เพื่อดูรายละเอียดอดเกี่ยวผู้จัดทำ
7. ปุ่ม help คลิก เพื่อดูวิธีการใช้โปรแกรม
8. ปุ่ม คำนวณ คลิกเพื่อทำการคำนวณ
9. ปุ่ม clear คลิกเพื่อทำการลบค่าในช่องที่ 1 และ 2 เพื่อ หาฐานของเมทริกซ์อื่นๆต่อ
10. ปุ่ม exit คลิก เพื่อต้องออกจากโปรแกรม



รูปที่ ผ.10 **หน้าจอการหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์**

จากการคำนวณหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์โดยการใช้โปรแกรมจะได้ค่า แรงค์ คือ 2 ถ้าเราทำด้วยมือก็จะได้ค่าฐานและมิติของปริภูมิแถวเท่ากันโดยมีวิธีทำดังนี้

ตัวอย่างที่4 จงหาค่าแรงค์ของเมทริกซ์ A

$$\text{เมื่อ } A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยการทำ Reduced Row Echelon จากตัวอย่างที่2 จะได้ reduced row echelon ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าแรงค์ของเมทริกซ์ A เท่ากับ 2