สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

โปรแกรมช่วยสอนทฤษฎีกราฟ

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN GRAPH THEORY

T036132

ณพร แสงนพรัตน์
พุทธชาด ตามรักษา
ภูมิพรรณ อารีย์ศรแดง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2542

เลขหมู่..........
เลขทะเบียน 36132
วัน, เดือน, ปี 11 ก.ค. 2543

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN GRAPH THEORY

NAPORN SANGNOPPARAT

PUTHACHAD TAMRUKSA

POOMPAN AREESONDANG

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 1999

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนทฤษฎีกราฟ
	COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN GRAPH THEORY
ชื่อนักศึกษา	นายณพร แสงนพรัตน์ 39054107
	นางสาวพุทธชาด ตามรักษา 39054130
	นายภูมิพรรณ อารีย์ศรแดง 39054132
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล
	อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2542

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ	
กรรมการ	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก	เทอดขวัญ

(อาจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนทฤษฎีกราฟ	
ชื่อนักศึกษา	นายณพร แสงนพรัตน์	39054107
	นางสาวพุทธชาด ตามรักษา	39054132
	นายภูมิพรรณ อารีย์ศรแดง	39054130
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2542	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล	
	อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก	

บทคัดย่อ

ทฤษฎีกราฟเป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับระบบที่มีลักษณะจำกัด ซึ่งเป็นวิชาที่สำคัญในยุคซึ่งคอมพิวเตอร์มีบทบาทกับชีวิตมนุษย์มากเช่นปัจจุบัน เนื่องจากโดยพื้นฐานแล้วคอมพิวเตอร์เป็นโครงสร้างที่มีลักษณะจำกัด การทำความเข้าใจและการตีความของคอมพิวเตอร์ทำได้ในขอบเขตของระบบคณิตศาสตร์จำกัด

ปัญหาพิเศษหัวข้อเรื่องโปรแกรมช่วยสอนทฤษฎีกราฟนี้ จะช่วยเสริมสร้างความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องทฤษฎีกราฟ โดยโครงสร้างของโปรแกรมประกอบด้วย ส่วนที่เป็นเนื้อหาวิชา ส่วนของตัวอย่างโจทย์ซึ่งได้อธิบายวิธีทำอย่างละเอียด แบบฝึกหัด ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณซึ่งเกี่ยวข้องโดยตรงกับเนื้อหา และส่วนของบททดสอบเพื่อให้ผู้เรียนประเมินความรู้ของตนเอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	Computer Assisted Instruction in Graph Theory
Student	Mr. Naporn Sangnopparat 39054107
	Miss Puthachad Tamruksa 39054130
	Mr. Phoompan Areesondang 39054132
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic year	1999
Special Project Advisor	Associate Professor Pagkinee Chitsakul
	Lecturer Thurdkwan Changpoek

ABSTRACT

Graph Theory is the subject that concerned about system with limited form. Undoubtedly so useful at this presentmoment that seem like computer going to involve with everyone. That's because of basely computer's structure is work under the system with limited form. To interpret the meaning by computer can do under Mathematic's system with limited form.

This special project, Computer Assisted Instruction in Graph Theory, would increase the knowledge of Graph Theory. The structure of the program could be divided as, theorematic contents for teaching and studying, sample questions and answer, exercises, sample of calculate programme for Graph Theory and self-tests to evaluate user's understanding

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่องโปรแกรมช่วยสอนทฤษฎีกราฟนี้ สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล และ อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่ช่วยแนะแนวทางในการพัฒนาโปรแกรม เอื้อเฟื้อเอกสารอ้างอิง รวมทั้งอุปกรณ์ต่าง ๆ ในการทำปัญหาพิเศษ และช่วยในการตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่าน ที่ได้ประสาทวิชา ความรู้ทั้งในภาคทฤษฎี ภาคปฏิบัติแก่ผู้จัดทำ จนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้ สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2543

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญ / ที่มาของปัญหาพิเศษ

ทฤษฎีกราฟในวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตสามารถนำไปประยุกต์ในการแก้ปัญหาต่างๆ ทั้งนี้เพื่อความเข้าใจในเนื้อหาตลอดจนวิธีการประยุกต์ในการแก้ปัญหาเรื่องทฤษฎีกราฟโดยใช้คำอธิบายและตัวอย่างของแบบฝึกหัดในรูปของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ทางคณะผู้จัดทำจึงได้ทำการศึกษาและพัฒนาสื่อการสอนในเนื้อหาเรื่องทฤษฎีกราฟโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นสื่อที่ได้เข้ามามีบทบาททางด้านการศึกษาอย่างแพร่หลาย เพื่อช่วยพัฒนาสื่อการสอนที่มีคุณภาพสำหรับผู้ต้องการศึกษาทฤษฎีกราฟด้วยตนเอง และช่วยเสริมสร้างความเข้าใจในเนื้อหาได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อช่วยในการศึกษาเนื้อหาเรื่องทฤษฎีกราฟสำหรับ นักเรียน นักศึกษา และบุคคลทั่วไปที่ต้องการศึกษาเรื่องนี้ด้วยตนเอง

1.2.2 เพื่อให้สามารถศึกษาวิธีการประยุกต์ ตลอดจนวิธีการแก้ปัญหาเรื่องทฤษฎีกราฟด้วยตนเอง

1.2.3 เพื่อใช้เป็นสื่อการสอนเนื้อหาเรื่องทฤษฎีกราฟที่สามารถใช้งานได้ง่ายและเข้าใจง่าย

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

สื่อการสอนนี้จะช่วยเสริมสร้างความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องทฤษฎีกราฟ และใช้ช่วยในการแก้ไขปัญหาเรื่องทฤษฎีกราฟได้ง่ายและสะดวกยิ่งขึ้น อีกทั้งตัวสื่อการสอนที่พัฒนาบน Authorware 5 ซึ่งใช้งานได้ง่าย เข้าใจง่าย และไม่ซับซ้อน ช่วยให้บุคคลที่สนใจสามารถศึกษาเรื่องทฤษฎีกราฟได้ด้วยตนเอง

1.4 ทฤษฎีและแนวความคิดที่ใช้ในการศึกษา

ปัญหาพิเศษหัวข้อเรื่องโปรแกรมช่วยสอนนี้จะครอบคลุมเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ ซึ่งจะกล่าวถึงเนื้อหากราฟโดยแยกเป็นบทๆแต่ละบทแยกตามหัวข้อเรื่อง ซึ่งประกอบด้วย

ความรู้เบื้องต้น

กราฟแบบต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีกราฟ

กราฟบนระนาบ

วงจรฮามิลโทเนียน

การลงสีกราฟ

ปัญหาทางเดินสั้นที่สุด

กราฟต้นไม้

ปัญหาการไหลของข่ายงาน

โดยโปรแกรมพัฒนาขึ้นบน Authorware 5 แต่ละบทจะประกอบด้วย นิยาม ทฤษฎีบท และเนื้อหาอื่นๆที่ใช้ในการอธิบาย ส่วนของตัวอย่างที่อธิบายการแก้ปัญหาอย่างละเอียด แบบฝึกหัดพร้อมเฉลย ซึ่งจะช่วยอธิบายขยายความของเนื้อหาตลอดจนทฤษฎีบทและข้อพิสูจน์ ตัวอย่างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับเนื้อหาของบทนั้นๆ และในบทสุดท้ายเป็นแบบทดสอบเพื่อเป็นการประเมินผลความรู้ของผู้เรียน

1.5 ขอบเขตปัญหาพิเศษ

จัดทำสื่อการสอนเรื่องกราฟโดยจะเน้นเนื้อหาเรื่องทฤษฎีกราฟในวิชาดิสครีต

1.6 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาเนื้อหาเรื่องทฤษฎีกราฟ

1.5.2 ทำการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้เป็นสื่อการสอน

1.5.3 ทำการทดสอบและแก้ไขข้อผิดพลาดในโปรแกรมให้มีวามถูกต้องและสมบูรณ์

1.5.4 รวบรวมข้อมูลและมาจัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

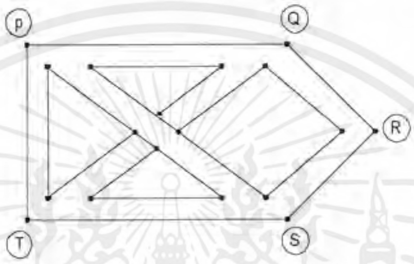
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

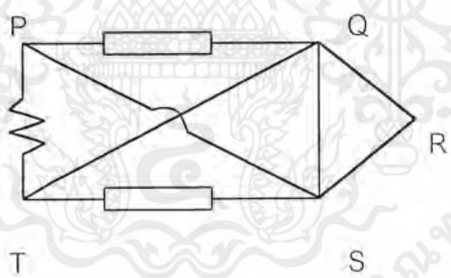
2.1 ความรู้เบื้องต้น

กราฟคืออะไร ?

เราจะเริ่มจากการพิจารณาที่รูป 2.1 และ 2.2 ซึ่งคือ ภาพแสดงส่วนของถนนและส่วนของวงจรอิเล็กทรอนิกส์



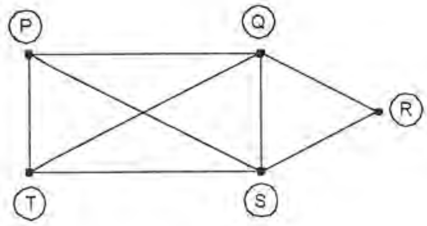
รูปที่ 2.1



รูปที่ 2.2

ทั้งสองรูปสามารถนำมาเขียนเป็นแผนภาพ ของจุดและเส้นได้ดัง รูปที่ 2.3 จุด P, Q, R, S และ T จะถูกเรียกว่า จุดยอด (vertices or node) ส่วนเส้นจะถูกเรียกว่า ด้าน, เส้น (edges) และทั้งแผนภาพ จะถูกเรียกรวมว่ากราฟ (graph) สังเกตว่าจุดตัดของเส้น PS และ QT ไม่ได้เป็นจุดยอด ซึ่งไม่เหมือนกันกับการตัดกันของถนนหรือการเชื่อมกันของสายไฟ ดีกรี (degree) ของ จุดยอด คือจำนวนของเส้น ซึ่งจุดยอด นั้นเป็นจุดสิ้นสุด (end–point) เช่น จุดยอด Q มีดีกรีเป็น 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

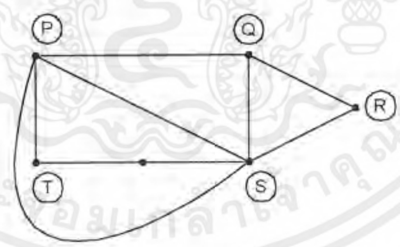


รูปที่ 2.3

กราฟใน รูปที่ 2.3 สามารถใช้ในเหตุการณ์อื่นก็ได้ เช่น ถ้า P, G, R, S และ T แทนทีมฟุตบอลแล้ว มีเส้นแทนการแข่งขันระหว่างทีมที่เป็นจุด end point ของจุดยอดนั้น ดังนั้น รูปที่ 2.3 ทีม P ต้องเล่นกับทีม Q, S และ T แต่ไม่ต้องเล่นกับ R ดังนั้น ดีกรี ของจุดยอด ก็คือจำนวนครั้งของแต่ละทีมที่ต้องแข่ง

เราสามารถเขียนกราฟให้อยู่ในรูปอื่นที่มีความหมายเหมือนกันได้ เช่น รูปที่ 2.4 เราทำให้จุดตัดของ PS และ QT หายไป โดยการเขียนเส้น PS ให้อยู่นอกสี่เหลี่ยม PQST กราฟที่ได้จะยังคงมีความหมายเดิม หรือในทำนองเดียวกันกับวงจรอิเล็กทรอนิกส์และทีมฟุตบอล แต่เราลืมนึกถึงระยะทางที่เปลี่ยนไปของถนนและสายไฟ

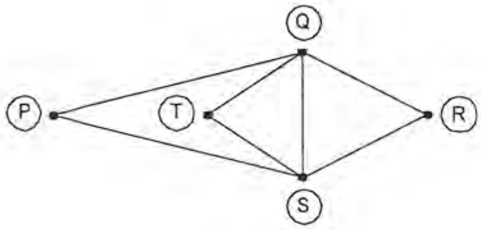
ดังนั้นกราฟคือการแทนด้วยเซตของจุด และเส้นที่เชื่อมจุด แต่ไม่เกี่ยวกับระยะทางของเส้นที่เชื่อมจุดในกราฟ ดังนั้นรูปที่ 2.3 และ 2.4 มีลักษณะเหมือนกัน



รูปที่ 2.4

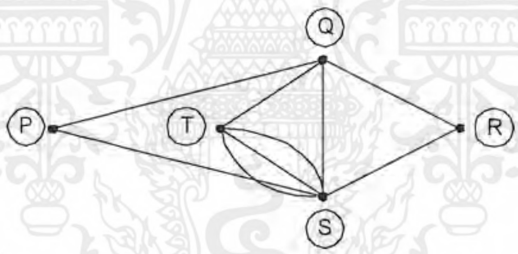
สำหรับ 2 กราฟใดๆจะเหมือนกันถ้าจุด 2 จุดใดๆ ที่ถูกเชื่อมด้วยเส้นในกราฟแรกสอดคล้องกับจุดใดๆ ที่เชื่อมกันด้วยเส้นในอีกกราฟ อีกกราฟที่มีลักษณะเหมือนกับกราฟใน รูปที่ 2.3 และ 2.4 ก็คือ รูปที่ 2.5 จากแนวคิดที่บอกไว้ในตอนต้นเกี่ยวกับที่ว่างและระยะทาง ดังนั้นเรากล่าวได้ว่ามันก็ยังคือลักษณะที่ติดต่อกันของถนนและสายไฟ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

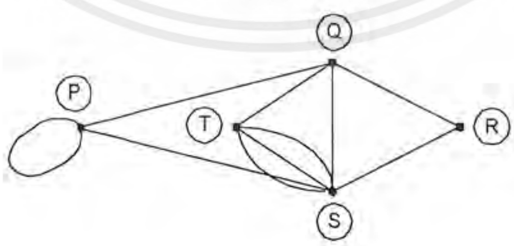


รูปที่ 2.5

จากกราฟที่ผ่านมา แต่ละคู่ของจุดจะเชื่อมด้วยเส้นเพียง 1 เส้น สมมติ รูปที่ 2.5 คือถนนที่เชื่อม Q กับ S และ S กับ T ซึ่งมีการจราจรติดขัด เหตุการณ์จำลองสถานการณ์นี้จะสะดวกสบายขึ้นถ้าทำการเพิ่มถนนที่จุดนั้น และผลที่ได้ก็คือ รูปที่ 2.6 เส้นที่เชื่อมระหว่าง Q กับ S หรือ S กับ T เรียกว่า การเชื่อม 2 จุดด้วยหลายเส้น (Multiple edges) ถ้าเราต้องการจะให้ลานจอดรถอยู่ที่จุด P ดังนั้นจะมีเส้นทางจาก P ไปยัง P เรียกว่าลูป (loop) ดูที่รูป 2.7 ส่วนกราฟที่ไม่มีลูป หรือMultiple edges เช่นรูปที่ 2.5 จะเรียกว่าเป็น กราฟอย่างง่าย (simple graphs)



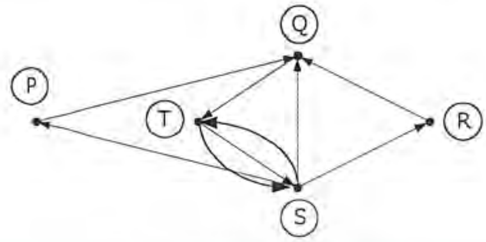
รูปที่ 2.6



รูปที่ 2.7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการศึกษาเกี่ยวกับกราฟมีทิศทาง (directed graph หรือ digraphs) เกิดจากการทำถนนให้เป็นวันเวย์ เช่น รูปที่ 2.8 ทิศทางของถนนไปตามหัวลูกศรซึ่งเราจะกล่าวถึงอีกทีภายหลัง



รูปที่ 2.8

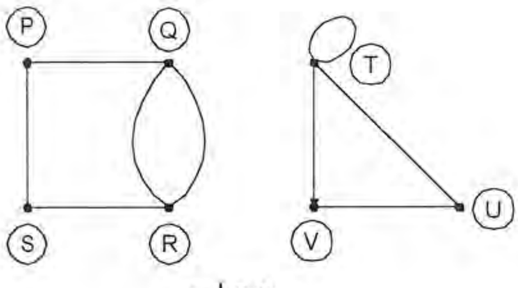
เรื่องส่วนใหญ่ในทฤษฎีกราฟจะเกี่ยวข้องกับ เส้นทางเดิน (walks) ซึ่ง ทางเดิน ก็คือ "ทางเดินทางจุดยอดหนึ่งไปยังที่อื่น" และประกอบด้วยลำดับของเส้น เช่น รูปที่ 2.5 P→ Q → R คือ ทางเดินที่มีความยาว (length) เป็น 2และ P→ S → Q → T → S → R คือ ทางเดินที่มี ความยาว เป็น 5 ทางเดิน ที่ไม่มีจุดยอดซ้ำเราจะเรียกว่า ทางเดิน (path) เช่น P→ T→ S → R เป็น path ทางเดินจาก Q → S → T → Q จะถูกเรียกว่าเป็น วงจร (cycles)

ส่วนใหญ่ในการพูดถึงกราฟที่มีทางเดินที่ผ่านทุกเส้นหรือทุกจุดยอดเพียงครั้งเดียวจะเรียกว่าเป็น กราฟออยเลอร์ (Eulerian graph) และ กราฟฮามิลโทเนียน (Hamiltonian graph) เช่น รูปที่ 2.3 – 2.5 เป็น Hamitonian เมื่อทางเดินคือ P→ Q→ R → S → T→ P แต่ไม่เป็น Eulerian เนื่องจาก walk ผ่านแต่ละเส้นเพียงครั้งเดียว (เช่น P→Q→R→S→T→P→S→Q→T) มีจุดสิ้นสุดต่างจากจุดเริ่มต้น

บางกราฟมีมากกว่าหรือเท่ากับ 2 ส่วน เช่น พิจารณากราฟซึ่งจุดยอดแทนสถานีรถไฟใต้ดินของ london และ new york ซึ่งมีเส้นเชื่อมต่อกันของแต่ละเมือง จะเห็นว่าเป็นไปไม่ได้ที่จะเดินทางจาก Trafalgar Square ไปยัง Grand Central Station โดยใช้เส้นในกราฟ ถ้าเราสามารถจำกัดพื้นที่ที่เราสนใจไปยัง London Underground เท่านั้น คือ 2 จุดใดๆถูกเชื่อมกันด้วย path ที่จะเป็นกราฟต่อเนื่อง (connected graph)

ในกราฟหนึ่งถ้ามีมากกว่า 1 ชิ้นจะเป็นกราฟไม่ต่อเนื่อง (disconnected graph) ดูรูป 2.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 2.9

รูป 2.10

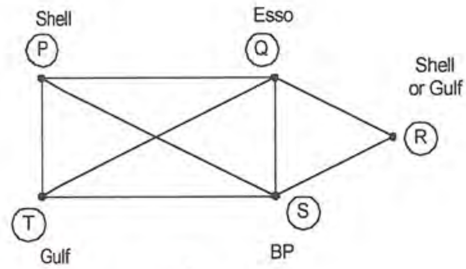
บางครั้งเราสนใจแต่ connected graph ซึ่งแต่ละคู่ของจุดมี 1 path ที่เชื่อมกันเราเรียกกราฟนั้นว่าเป็นกราฟต้นไม้ (tree) หรือ tree ก็คือ connected graph ที่ไม่มี cycles ดูรูปที่ 2.10

ตอนแรกเราให้รูปที่ 2.3 สามารถเขียนได้ใหม่เป็น รูปที่ 2.4 และ 2.5 นั่นคือเราทำการหลีกเลี่ยงไม่ให้เกิดการตัดกันของเส้นกราฟ ที่สามารถเขียนขึ้นใหม่ไม่ให้เกิดการตัดกันของเส้น เราเรียกว่ากราฟระนาบ (planar graph)

Planar graphs เป็นสิ่งสำคัญในการแก้ปัญหา colouring

ใน " แผนที่ถนน " สมมติให้ Shell , Esso , BP และ Gulf เป็นที่ตั้งอู่ 5 อู่ ตามเหตุผลทางเศรษฐศาสตร์จะต้องไม่มีบริษัทใดตั้ง 2 อู่ไว้ติดกันบนมุมที่ติดกัน แล้ว สามารถสร้าง Shell ที่ P ได้ สามารถสร้าง Esso ที่ G ได้ ดังนั้น BP สามารถสร้างที่ S ได้ และ Gulf สามารถสร้างที่ T ได้ จากนั้นสร้าง Shell หรือ Gulf ที่ R ได้ (ดูรูปที่ 2.11) อย่างไรก็ตาม ถ้า Gulf ถอนตัวออกไป แล้ว 3 บริษัทที่เหลือก็ไม่สามารถสร้างอู่ตามเงื่อนไขได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

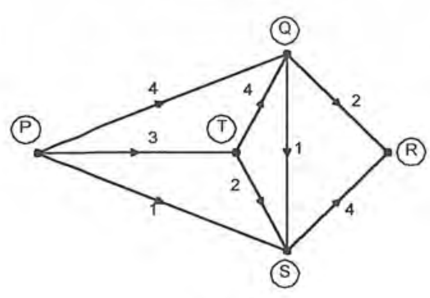


รูปที่ 2.11

รูปที่ 2.12

เราจะกล่าวถึงการแก้ปัญหานี้ในบทต่อไปคือ เมื่อเราพยายามที่จะระบายสีจุดยอดของ simple graph โดยให้ที่จุดยอดที่ถูกเชื่อมด้วยเส้นๆ เดียวกันต้องมีสีต่างกัน ถ้ากราฟนั้นเป็น planar เราใช้สีเพียง 4 สี ก็ทำได้เสมอ นั่นคือ four-colour Theorem ซึ่งเป็นที่รู้จักกันมาก อีกแนวคิดของทฤษฎีบทจะมองว่าเราสามารถระบายสีประเทศในแผนที่ด้วยสีเพียง 4 สีด้วยเงื่อนไขที่ส่าสองประเทศติดกันห้ามเป็นสีเดียวกัน (ดูรูปที่ 2.12)

ในบทท้ายๆเราจะกล่าวถึงการแก้ปัญหา การไหลของข่ายงาน (network flow) และ การขนส่ง (transportation) สมมติให้ transportation network เป็นไปดังรูป 2.13 P คือโรงงาน และ Q คือตลาด และเส้นของกราฟคือเส้นทางในการส่ง แต่ละทางจะมีความจุ (capacity) ซึ่งถูกกำกับไว้ด้วยตัวเลขบนเส้นแทนค่าที่มากที่สุดที่สามารถส่งได้บนแต่ละเส้นทาง ปัญหาก็คือเราสามารถส่งของจากโรงงานไปยังตลาดได้มากเท่าไร



รูปที่ 2.13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 กราฟ

นิยาม 2.1 simple graph (or indirect graph) คือคู่อันดับ $G=(V,E)$ โดย

1. V เป็น finite set ซึ่งสมาชิกคือจุดยอด
2. E เป็น irreflexive , symmetric relation บน V

เรียก $G=(V,E)$ ว่า *กราฟ*

คู่อันดับใน E เรียกว่า เส้นของกราฟ (edge)

การที่ E เป็น irreflexive หมายความว่าไม่มีลูป : ไม่มีหัวลูกศรออกแล้วเข้าในตัวเอง

การที่ E เป็น symmetric หมายความว่า $(u,v)\in E$ ก็ต่อเมื่อ $(v,u)\in E$

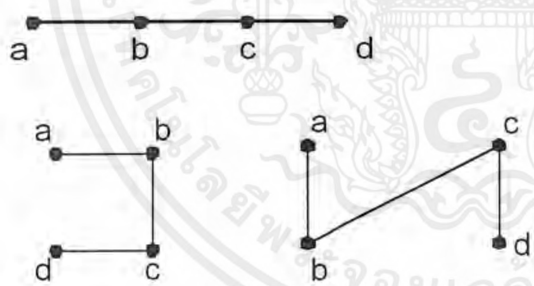
ถ้า $e=(u,v)\in E$ จะกล่าวว่า e เป็นเส้นเชื่อมระหว่าง u และ v (หรือจะกล่าวว่า e เป็นเส้นเชื่อมระหว่าง v และ u)

และจะกล่าวว่า u ประชิด (adjacent) กับ v

และ e ตกกระทบ (incident) กับ u หรือ e เป็น incident กับ v

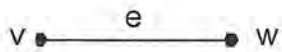
เนื่องจาก E เป็น symmetric ดังนั้น e เป็น inordered pair $\{u,v\}:(u,v)$ หรือ (v,u)

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณากราฟ $G=(V,E)$ เมื่อ $V=\{a,b,c,d\}$ และ $E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\}\}$



นิยาม 2.2 ให้ v และ w เป็นจุดยอดของกราฟ ถ้า v และ w เชื่อมกันด้วยเส้น e แล้ว v และ w จะเรียกว่าเป็น adjacent ยิ่งกว่านั้น v และ w จะถูกเรียกว่า incident กับ e และ e ถูกเรียกว่า incident กับ v และ w

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



v และ w เป็น adjacent

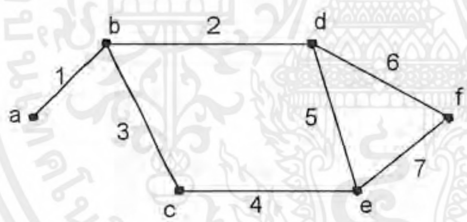
v และ w เป็น incident กับ e

e เป็น incident กับ v และ w

นิยาม 2.3 ให้ G เป็นกราฟที่ไม่มีลูป และมี n จุดยอด คือ 1, 2 , ..., n adjacency metric M(G) คือเมตริกซ์ขนาด mxn ที่มีสมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j เป็นเลขของเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอด i และ j

นิยาม 2.4 ให้ G เป็นกราฟที่ไม่มีลูป และมี n จุดยอด คือ 1, 2, ..., n และมี m เส้น คือ 1, 2, ..., m แล้ว incident metric I(G) คือเมตริกซ์ขนาด nxm ซึ่งมีสมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j เป็น 1 ถ้า จุดยอดที่ i เป็นเส้นที่ incident กับ j และเป็น 0 ถ้าไม่เป็นตามนั้น

ตัวอย่าง 2.2 กำหนด กราฟ G



$$= \{a,b,c,d,e,f\}$$

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$= \{\{a,b\},\{b,d\},\{b,c\},\{c,e\},\{d,e\},\{d,f\},\{e,f\}\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

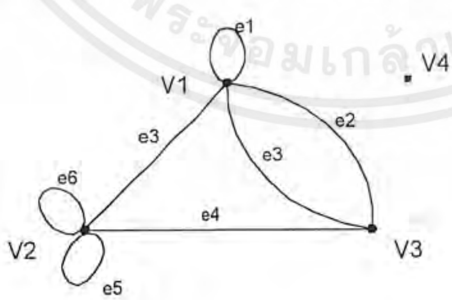
เมตริกซ์ซึ่งแถวเป็นเซตของจุดยอด และหลักเป็นเซตของเส้นเรียก เมตริกซ์ตกกระทบ (incidence matrix)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

เมตริกซ์ซึ่งแถวและหลักเป็นเซตของจุดยอด เรียก เมตริกซ์ประชิด (adjacency matrix)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

mulligraph ประกอบด้วยจุดยอด และเส้นโดยมี multiple edge และลูป

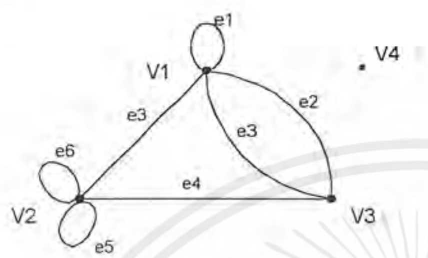


จุดยอดที่ไม่มีเส้นที่ incident เรียก จุดยอดนั้นว่าเป็น isolate (isolate vertex) คือ v_4 ในรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.5 ดีกรีของจุดยอดในกราฟ คือจำนวนของเส้นที่ incident กับจุดยอดนั้น จะนับเป็น 2 เท่าของจำนวนลูป ดีกรีของจุดยอด คือจำนวนของทิศทางที่แตกต่างกัน ที่สามารถออกจากจุดยอดไปในเส้นหนึ่งๆ

ตัวอย่าง 2.3



จุดยอด v_1 มี ดีกรี 5 จุดยอด v_2 มี ดีกรี 6

จุดยอด v_3 มี ดีกรี 3 จุดยอด v_4 มี ดีกรี 0 (isolated vertex)

ทฤษฎี 2.1 ในกราฟใดๆ ผลรวมของดีกรีของจุดยอด จะเป็น 2 เท่าของจำนวนเส้น

ทฤษฎี 2.2 ในกราฟใดๆ จำนวนดีกรีรวมของจุดยอดที่มีดีกรีคี่ จะมีเป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ x เป็นผลรวมของดีกรี ของจุดยอดที่มีดีกรีคู่

y เป็นผลรวมของดีกรี ของจุดยอดที่มีดีกรีคี่

ถ้า E เป็นจำนวนของเส้นแล้ว

$$x + y = 2E$$

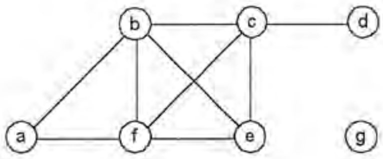
x เป็นคู่ , $2E$ เป็นคู่ ดังนั้น y เป็นคู่ด้วย

จุดยอดที่มีดีกรี 0 เรียกว่า isolated

จุดยอดที่มีดีกรี 1 เรียกว่า pendent

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.4 พิจารณากราฟ



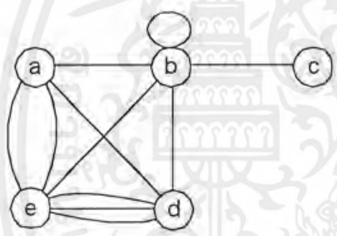
$\deg(a) = 2$

$\deg(b) = \deg(c) = \deg(f) = 4$

$\deg(d) = 1 \Rightarrow$ pendent

$\deg(e) = 3$

$\deg(g) = 0 \Rightarrow$ isolated



$\deg(a) = 4$

$\deg(b) = \deg(e) = 6$

$\deg(c) = 1 \Rightarrow$ pendent

$\deg(d) = 5$

ตัวอย่าง 2.5 มีกี่ด้านในกราฟที่มี 10 จุดยอด และ ณ แต่ละจุดยอดมีดีกรี 6

ผลรวมดีกรีของจุดยอด คือ $6 \times 10 = 60$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอด เป็น 2 เท่าของจำนวนเส้น

ดังนั้น $2e = 60 \Rightarrow e = 30$

นั่นคือ มี 30 ด้าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

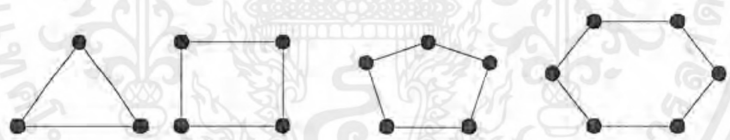
2.2.1 กราฟพิเศษ (Some Special Graphs)

นิยาม 2.6 กราฟจะเรียกว่ากราฟสมบูรณ์ (complete graph) ถ้าเป็น simple graph (ไม่มี ลูป) ที่มีหนึ่งด้านที่เชื่อมคู่ จุดยอดที่แตกต่างกันและจะแทนด้วย K_n เมื่อ n = 1, 2, 3, 4, 5, 6. แสดงดังรูป

K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

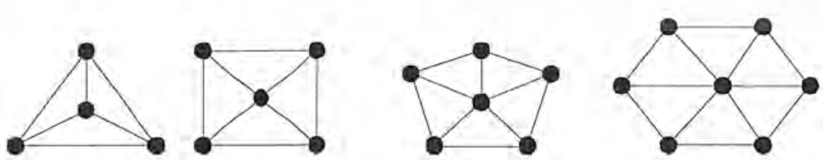
เราสามารถตรวจได้ว่า K_n จะมีจำนวนเส้นรวม $= \dfrac{n(n-1)}{2}$

นิยาม 2.7 กราฟจะเรียกว่ากราฟวงกลม (cycle) สำหรับ $n \geq 3$ ถ้าสำหรับ n จุดยอด $v_1, v_2, \ldots, v_n$ แล้วด้านคือ $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ และจะแทนด้วย C_n เมื่อ $n = 3,4,5,6$ แสดงดังรูป



C_3 C_4 C_5 C_6

นิยาม 2.8 กราฟจะเรียกว่ากราฟวงล้อ (wheel) เมื่อเติมจุดยอดไปที่ cycle C_n เมื่อ $n \geq 3$ แล้วเชื่อมจุดยอดใน C_n และจะแทนด้วย W_n เมื่อ $n = 3,4,5,6$ แสดงดังรูป



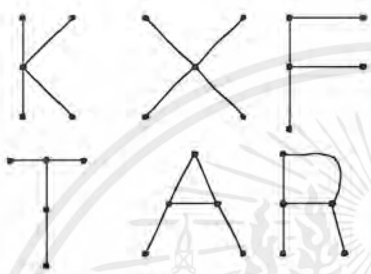
W_3 W_4 W_5 W_6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

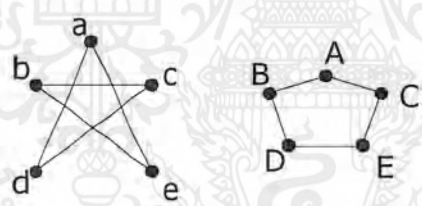
2.2.2 การถอดแบบกันของกราฟ (Isomorphism of Graphs)

นิยาม 2.9 simple graph $G_1 = (V_1, E_1)$ และ $G_2 = (V_2, E_2)$ เป็น isomorphic ถ้าฟังก์ชัน f จาก V_1 ไปยัง V_2 มีคุณสมบัติ 1-1 และ onto (นั่นคือ a และ b adjacent ใน G_1 ก็ต่อเมื่อ $f(a)$ และ $f(b)$ adjacent ใน G_2 สำหรับทุกค่าของ a และ b ใน V_1) เรียกฟังก์ชัน f ว่า isomorphism

ตัวอย่าง 2.6 กราฟที่ isomorphic



ตัวอย่าง 2.7 จงแสดงว่ากราฟทั้งสอง isomorphic



V_1 : $\{a, b, c, d, e\}$ V_2: $\{A, B, C, D, E\}$

ต้องการหา $f: V_1 \to V_2$

V_1	a	b	c	d	e
$V_2 = f(V_1)$					

เลือก a และ A โดย $A = f(a)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

V_1	a	b	c	d	e
$V_2 = f(V_1)$	A				

จากจุด a มีด้านไปยังจุด d และจุด e

จากจุด A มีด้านไปยังจุด B และจุด C

เลือก $B = f(d)$ และ $C = f(e)$

V_1	a	b	c	d	e
$V_2 = f(V_1)$	A			B	C

จากจุด e มีด้านไปยังจุด b

จากจุด C มีด้านไปยังจุด E

เลือก $E = f(b)$

จากจุด d มีด้านไปยังจุด c

จากจุด B มีด้านไปยังจุด D

เลือก $D = f(c)$

V_1	a	b	c	d	e
$V_2 = f(V_1)$	A	E	D	B	C

ด้านที่สมนัยกันคือ

$\{a,d\}$ $\{A,B\}$

$\{a,e\}$ $\{A,C\}$

$\{b,c\}$ $\{E,D\}$

$\{b,e\}$ $\{E,C\}$

$\{c,d\}$ $\{D,B\}$

simple graph สองกราฟเป็น isomorphic ก็ต่อเมื่อ adjacent matrix ของกราฟหนึ่งเหมือนกับ adjacent matrix ของกราฟอีกกราฟหนึ่ง สำหรับบาง ordering ของจุดยอด และเส้นเชื่อม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

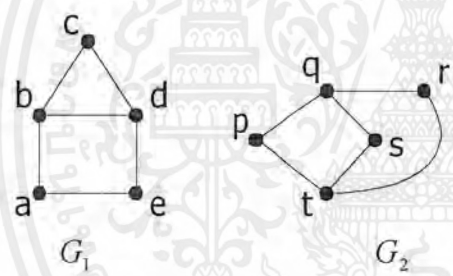
สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

simple graph สองกราฟเป็น isomorphic ก็ต่อเมื่อ incident matrix ของกราฟหนึ่งเหมือนกับ incident matrix ของกราฟอีกกราฟหนึ่ง สำหรับบาง ordering ของจุดยอด และเส้น

ถ้า G_1 และ G_2 เป็น isomorphic แล้ว G_1 และ G_2 มีจำนวนของด้านเท่ากันและมีจำนวนของจุดยอดเท่ากันในการแสดงว่ากราฟสองกราฟ G_1 และ G_2 ไม่เป็น isomorphic จะต้องหาคุณสมบัติของ G_1 ที่ G_2 ไม่มี ซึ่งถ้า G_2 มีแล้วจะทำให้ G_1 และ G_2 เป็น isomorphic ซึ่งเรียกคุณสมบัตินี้ว่า invariant

ถ้า $G_1 = (V_1, E_1)$ และ $G_2 = (V_2, E_2)$ และถ้า $|V_1| = |V_2| = n$ แล้วมี $n!$ ของ bijection ที่เป็นไปได้ระหว่าง V_1 และ V_2 ดังนั้นในการแสดงว่า G_1 และ G_2 ไม่เป็น isomorphic ต้องแสดงว่า ทุก $n!$ ของ bijection ไม่เป็นจริงที่จะ map เส้นของ G_1 ไปยังเส้นของ G_2

ตัวอย่าง 2.8 พิจารณากราฟ G_1 และ G_2



จะพบว่า G_1 และ G_2 มี 5 จุดยอด และ 6 เส้นเท่ากัน

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

มี 120 bijection จาก $\{a, b, c, d, e\}$ onto $\{p, g, r, s, t\}$ ซึ่งยุ่งยากมากในการพิจารณา

พิจารณา G_1 มี cycle b, c, d, b ซึ่งมีด้าน 3 ด้าน แต่ใน G_2 ไม่มี cycle ที่มีด้าน 3 ด้าน ดังนั้น G_1 และ G_2 ไม่เป็นt isomorphic

ตัวอย่างของ isomorphic invariant เมื่อ m, n, k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

1. การมีจุดยอด n จุด
2. การมีด้าน m ด้าน
3. การมีจุดยอดจุดหนึ่งที่มีดีกรี n

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

36132

4. การมีจุดยอด m จุดที่มีดีกรี n
5. การมี cycle 1 ชุดที่ยาว k
6. การมี cycle m ชุดที่ยาว k
7. การเป็นกราฟต่อเนื่อง (connected)
8. การมีวงจรออยเลอร์ (Euler circuit)
9. การมีวงจรฮามิลโทเนียน (Hamilton cycle)
10. การเป็นกราฟต้นไม้ (Tree)

ตัวอย่าง 2.9

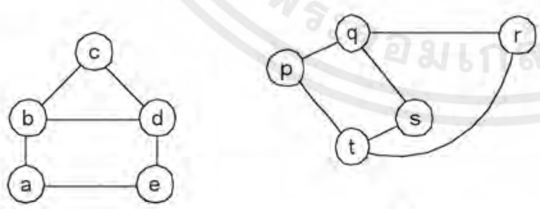
G_1 G_2

กราฟ G_1 มี 4 จุดยอด กราฟ G_2 มี 3 จุดยอด

"มี 4 จุดยอด" เป็น invariant

G_1 และ G_2 ไม่เป็น isomorphic

ตัวอย่าง 2.10



G1 G2

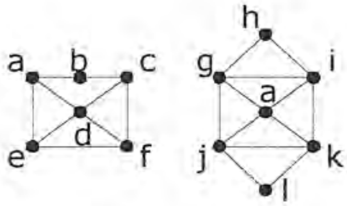
กราฟ G_1 มี 7 ด้าน กราฟ G_2 มี 6 ด้าน

"มี 7 ด้าน" เป็น invariant

G_1 และ G_2 ไม่ isomorphic กัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.11



G_1 G_2

กราฟ G_1 มีจุดยอดที่มีดีกรี 3 กราฟ G_2 ไม่มีจุดยอดที่มีดีกรี 3
"มีจุดยอดที่มีดีกรี 3" เป็น invariant G_1 และ G_2 ไม่เป็น isomorphic

2.2.3 กราฟนับได้กำกับจุดยอด (Counting Labeled Graphs)

เมื่อทำการนับ labeled graphs เราแบ่งแยกระหว่าง labeled graphs ซึ่งไม่ isomorphic แต่ไม่อยู่ระหว่าง isomorphic graph บางครั้งเราอาจกล่าวได้ว่า graph เหล่านั้นถือว่าเป็น isomorphism นี่คือ 8 ตัวอย่างของ non-isomorphic labeled simple graphs ที่มี 3 จุดยอด

ปัญหาของการกำหนดจำนวนของ labeled simple graphs ที่มี n จุดยอดนั้นง่ายมาก จากขั้นตอนที่ 3 ของ handshaking lemma จะมี $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ เส้นที่เป็นไปได้และแต่ละอันต้องมีอยู่หรือต้องไม่มี (มีทางเลือกสองทางที่เป็นไปได้) ดังนั้น จำนวนที่ต้องการคือ $2^{n(n-1)/2}$ ตารางด้านล่างนี้แสดงให้เห็นจำนวนของ labeled simple graphs ที่มี n จุดยอด, สำหรับ $n \le 8$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
Labeled graphs	1	2	8	64	1024	32768	2097152	268435456

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.4 กราฟนับได้ไม่กำกับจุดยอด (Counting Unlabeled graphs)

เมื่อทำการนับ unlabeled graphs เราแยกได้เพียง graph ที่ไม่ isomorphic นี่คือ 4 ตัวอย่างของ non-isomorphic unlabeled simple graphs ที่มี 3 จุดยอด

สามารถกำหนดได้โดยทันทีว่า จำนวนของ simple graphs ที่มีจุดยอดมากสุดที่ 6 และไม่ว่าจะให้จำนวนของเส้น หรือ degree – sequence เท่าไรก็ตาม

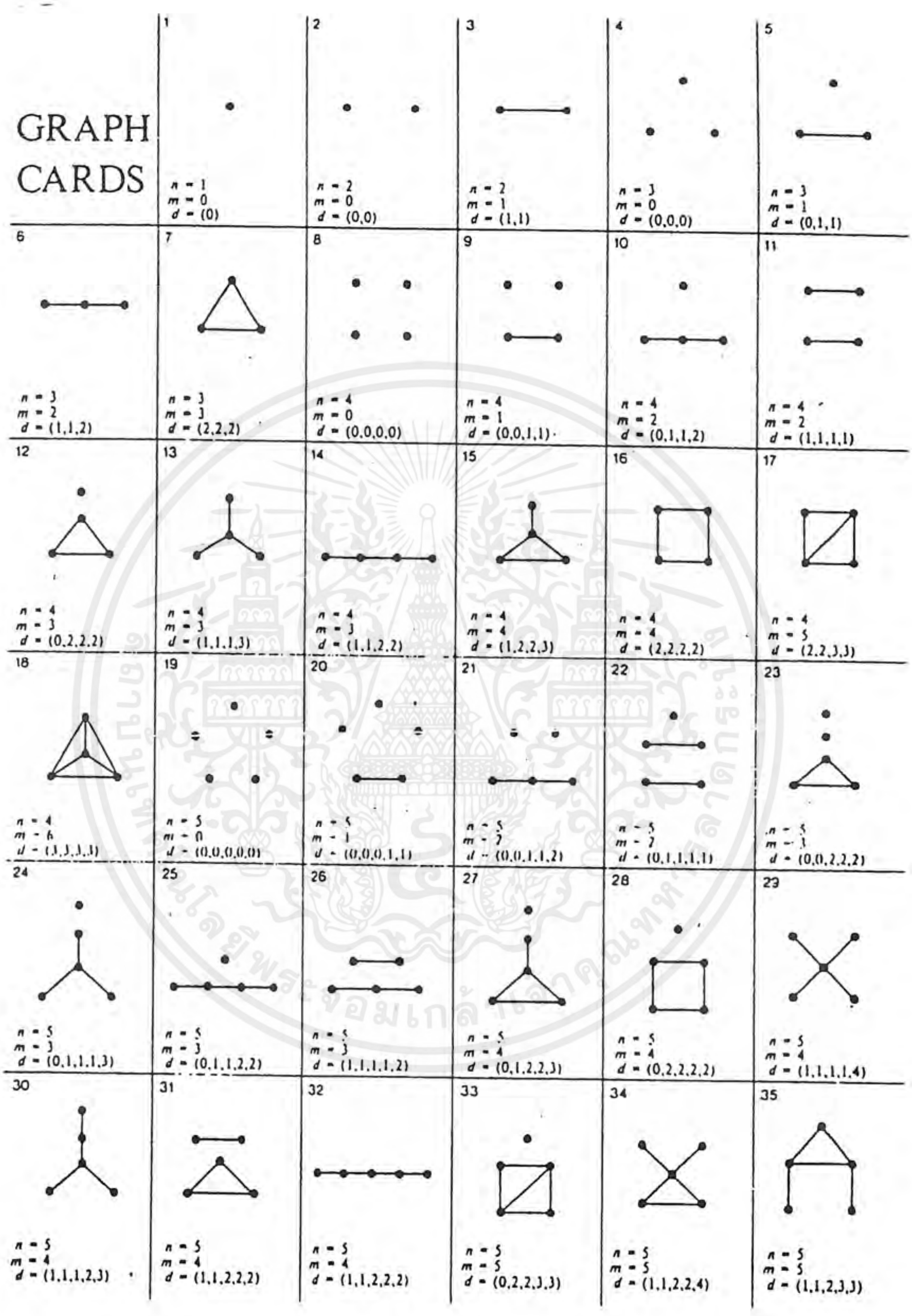
สำหรับจำนวนจุดยอดที่มากๆการเขียน graph ที่เป็นไปได้ทั้งหมดอาจไม่เหมาะสม และจำเป็นต้องหาวิธีการใหม่ในการนับจำนวน graph นั้น ในปี 1935 George P'olya ได้ค้นพบสูตรในการคำนวณของ unlabeled graph ที่ให้จำนวนของจุดยอด และเส้นมาเท่าไรก็ได้ P'olya Method ประยุกต์ใช้ได้กับการนับจำนวนgraphได้หลายแบบและสูตรยังรวมไปถึงการหาจำนวนของ connected graphs หรือ regular graph ที่มีจำนวนจุดยอดใดๆ ตารางได้แสดงจำนวนของ unlabeled simple graph ที่มี n จุดยอดที่ $n \le 8$

โดยทั่วไปปัญหาในการนับ unlabeled graph ยากกว่าการแก้ปัญหาของ labeled graph มาก ในความเป็นจริงยังมี unlabeled graph บางชนิดที่สามารถแก้ปัญหาได้แล้ว ในขณะที่ปัญหาของ labeled graph ยังคงแก้ไม่ได้

2.2.5 ตารางแสดงกราฟอย่างง่าย (The Graph Cards)

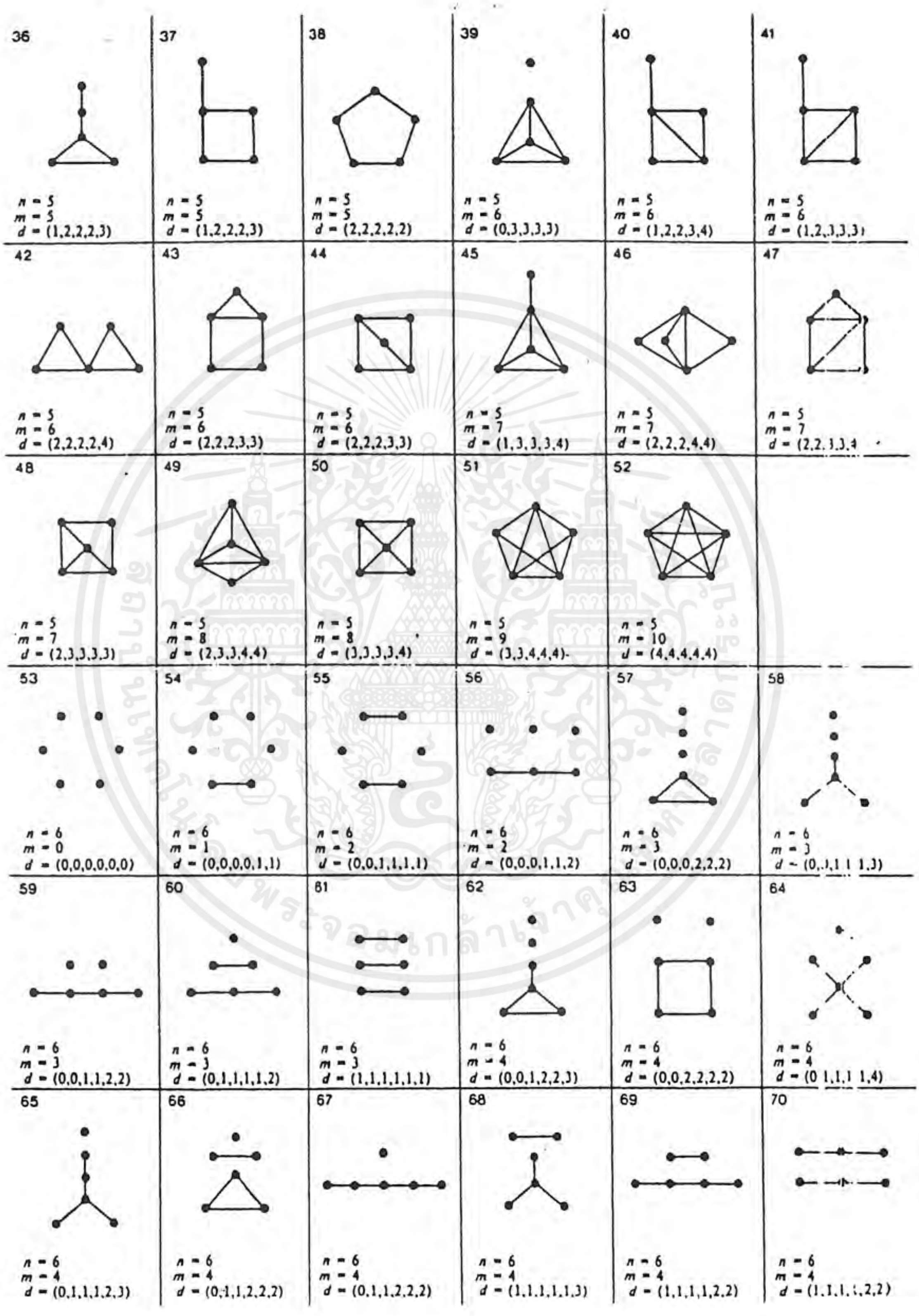
เราจะเสนอ 208 แบบของ unlabeled simple graph ที่มีจุดยอดมากสุด 6 แต่ละ card ประกอบด้วยจำนวนของกราฟ, รูปกราฟ, จำนวนจุดยอด n, จำนวนของเส้น m และ degree-sequence ของกราฟ นำเสนอโดยเรียงจากมากไปน้อย อันดับแรกเรียงตามจำนวนของเส้น (เมื่อมีจุดยอดเท่ากัน) และเรียงตาม degree – sequence (เมื่อมีจำนวนจุดยอด และเส้นเท่ากัน)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



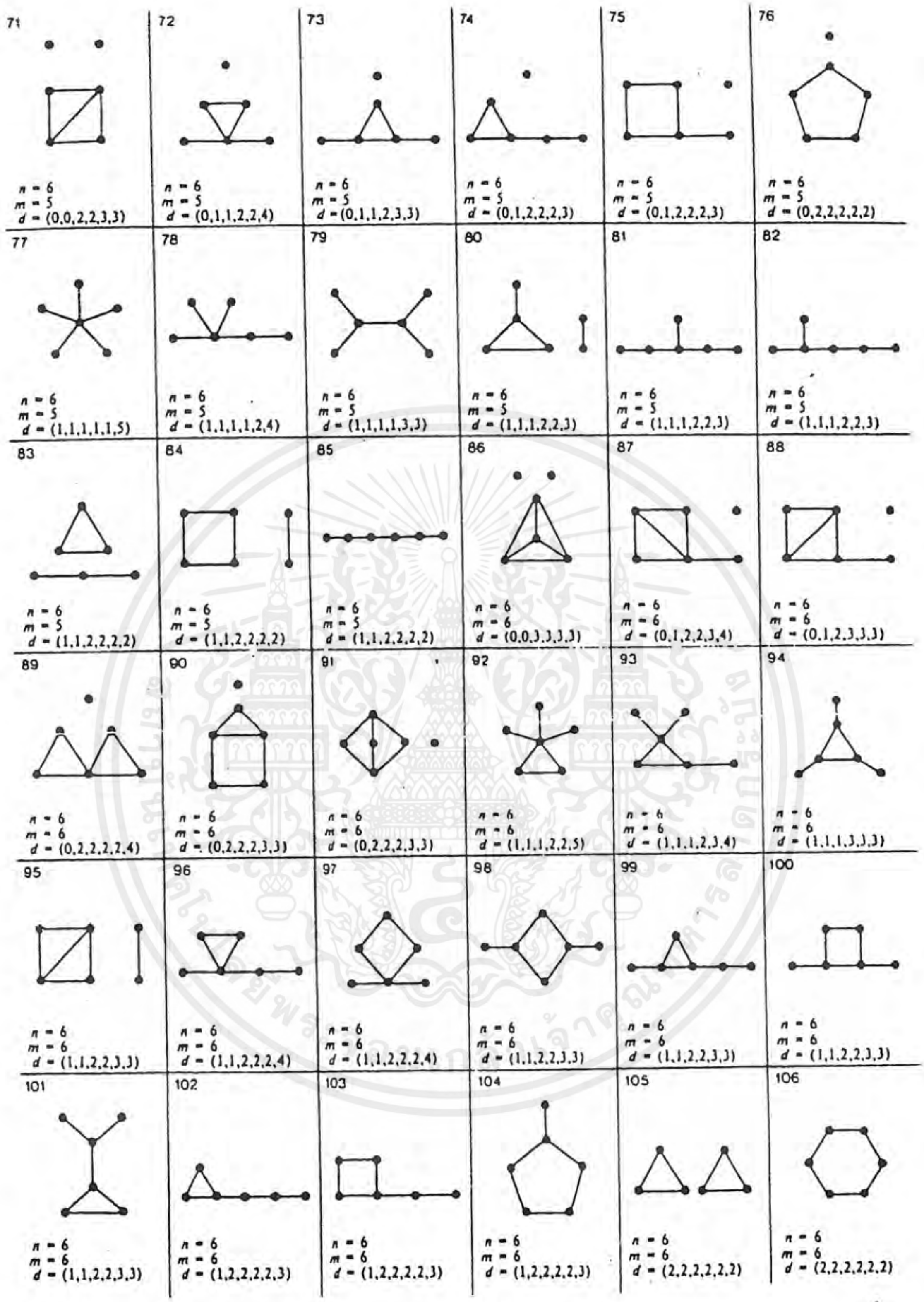
ตารางที่ 2.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



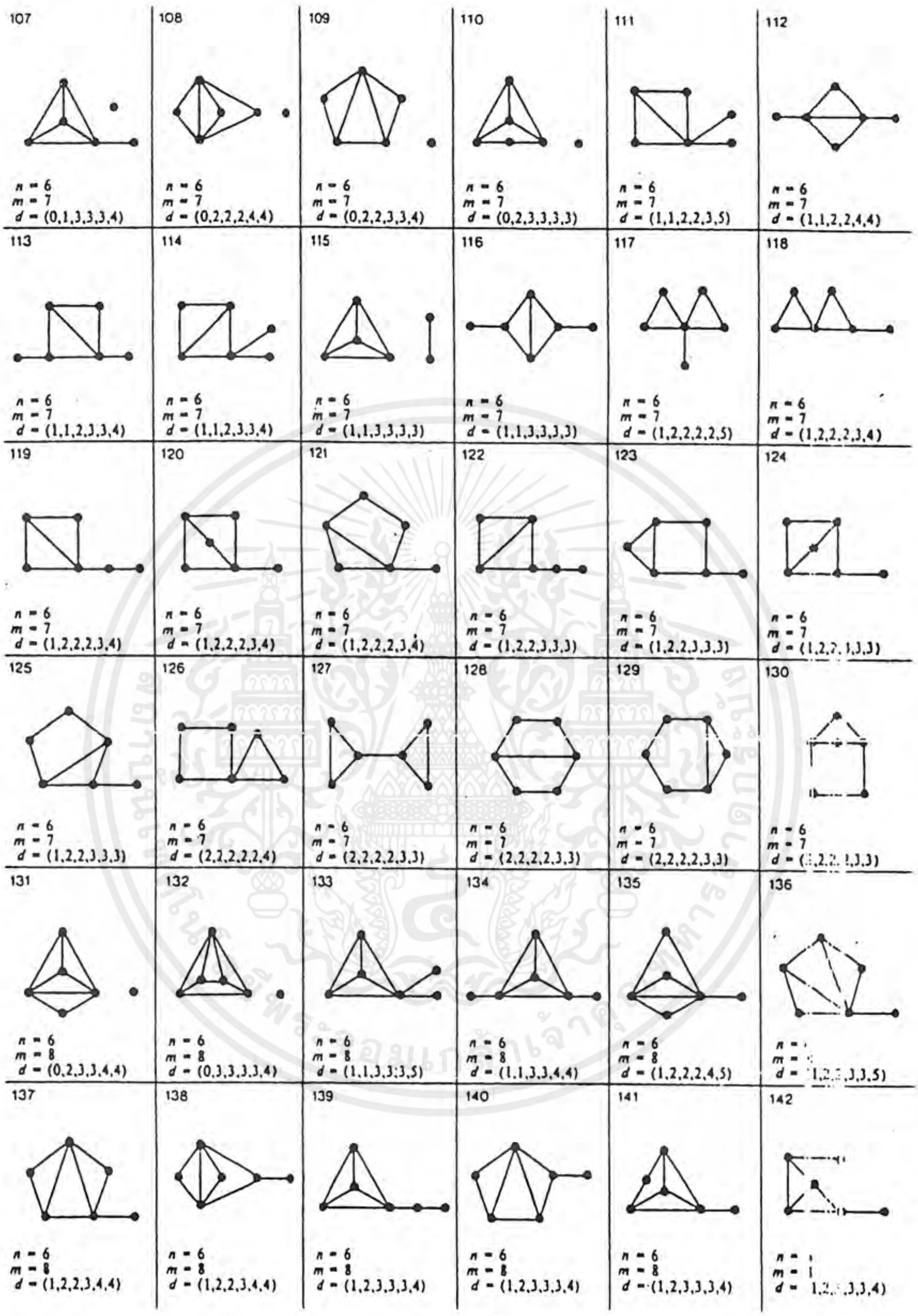
ตารางที่ 2.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



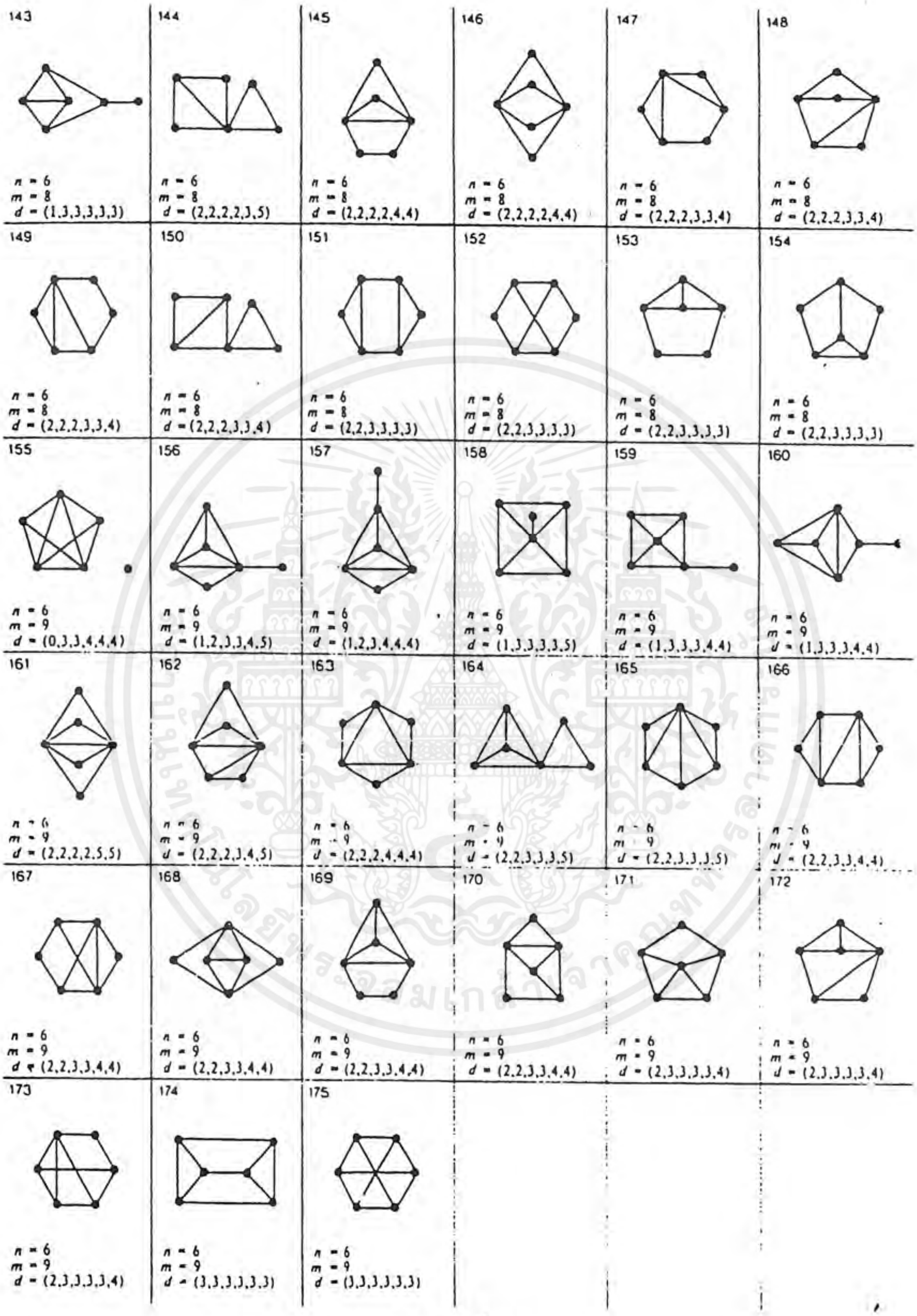
ตารางที่ 2.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



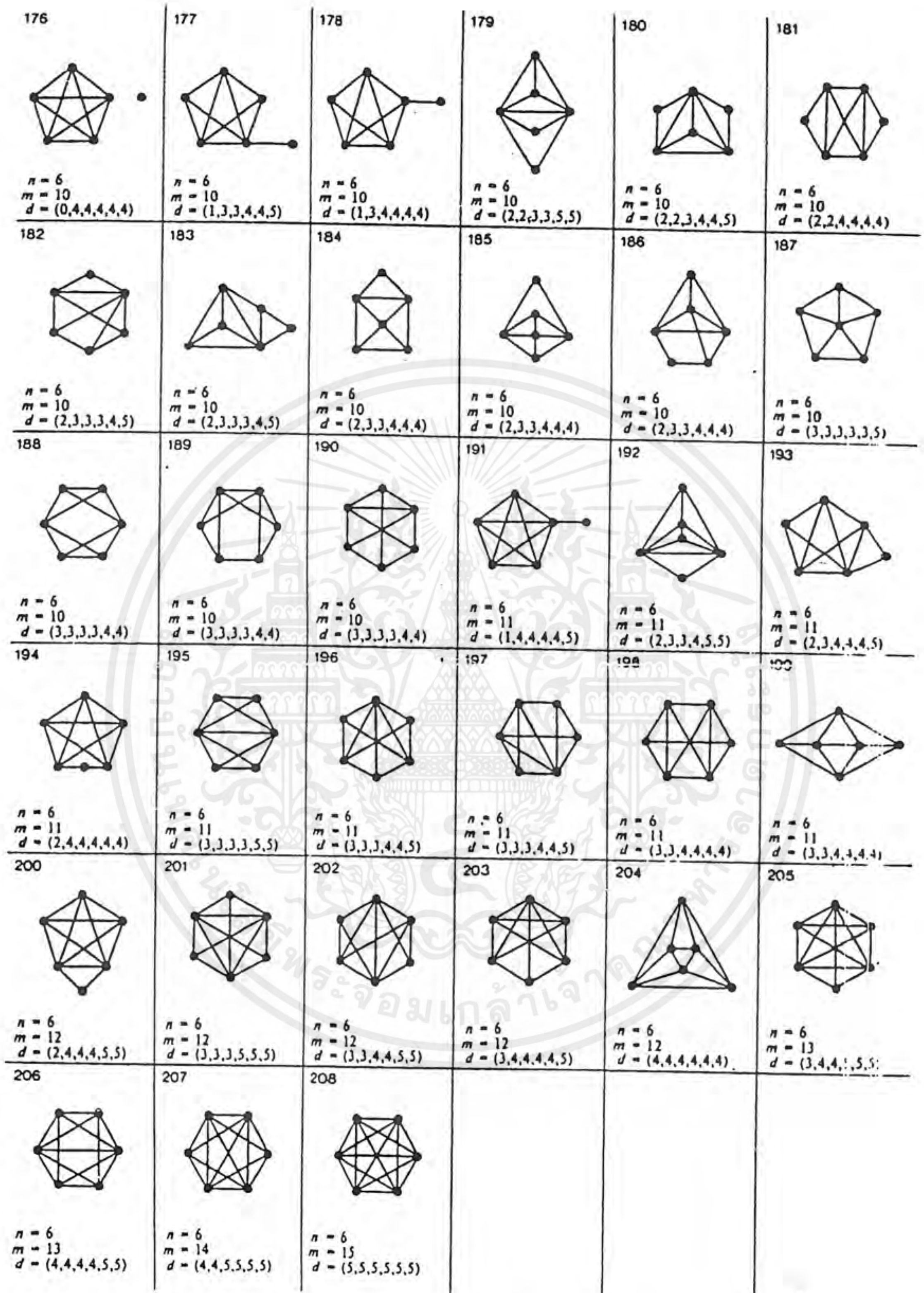
ตารางที่ 2.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ตารางที่ 2.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



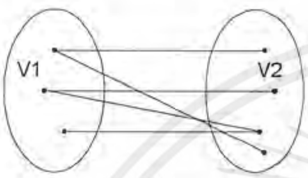
ตารางที่ 2.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

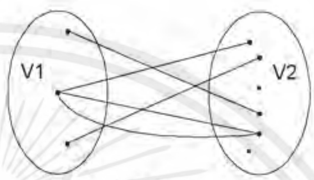
2.2.6 กราฟไบพาร์ไทท์ (Bipartite Graphs)

นิยาม 2.10 กราฟ G ของเซตของจุด V เรียกว่า bipartite ถ้าสามารถที่จะจัด V ให้อยู่ในรูป union ของสอง nonempty disjoint subsets V_1 และ V_2 ซึ่งแต่ละด้านของ G เชื่อมระหว่างแต่ละ จุดใน V_1 กับแต่ละจุดใน V_2

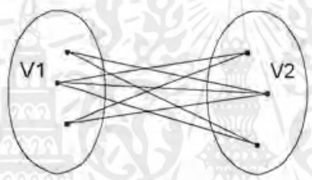
bipartite graph ต้องไม่มี ลูป เพราะจุดปลายทั้งสองข้างของทุกๆด้าน ต้องอยู่ในเซตของ จุดที่แตกต่างกัน



(a)



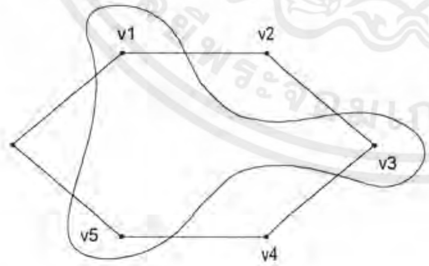
(b)



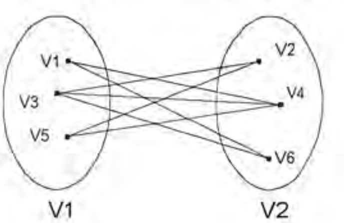
(c)

isolated vertices อาจอยู่ใน V_1 หรือ V_2 ก็ได้

ตัวอย่าง 2.12 พิจารณา C_6



เซตของจุดคือ $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ สามารถแบ่งเป็นสองเซต คือ V_1 และ V_2 โดย

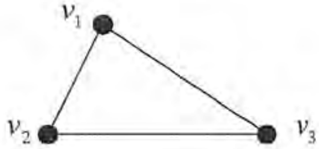


$V_1 = (v_1, v_3, v_5) \quad V_2 = (v_2, v_4, v_6)$

ทุกด้านของ C_6 เชื่อมกับจุดใน V_1 และจุดใน V_2 ดังนั้น C_6 เป็น bipartite

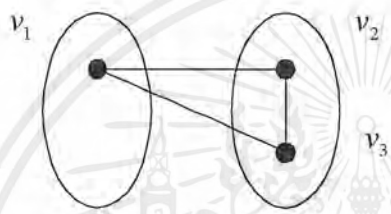
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.13 พิจารณา K_3



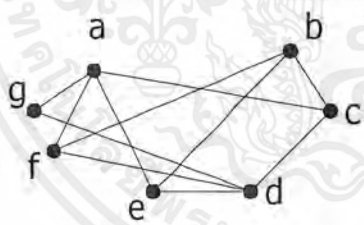
เซตของจุดคือ $\{v_1, v_2, v_3$ สามารถแบ่งเป็นสองเซต คือ V_1 และ V_2 โดย

$$V_1 = (v_1)$$
$$V_2 = (v_2, v_3)$$

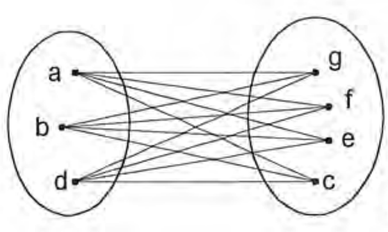


v_2 และ v_3 เป็นสมาชิกใน V_2 และมีด้านจาก v_2 และ v_3 ดังนั้น K_3 ไม่เป็น bipartite ด้านต้องเชื่อมจุดที่อยู่ต่างเซตกัน

ตัวอย่าง 2.14 พิจารณากราฟ G



$= \{a, b, c, d, e, f, g\}$

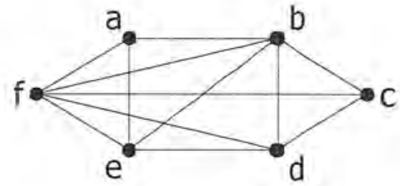


$_1 = \{a, b, d\}$ $_2 = \{g, f, e, c\}$

กราฟ G เป็น bipartite

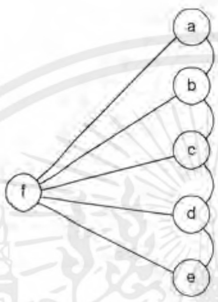
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.15 พิจารณากราฟ H



$= \{a,b,c,d,e,f\}$

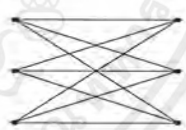
กราฟ H ไม่เป็น bipartite



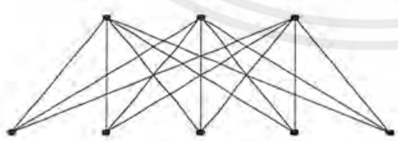
นิยาม 2.11 กราฟไบพาร์ไทท์สมบูรณ์ (complete bipartite graph) $K_{m,n}$ คือกราฟซึ่งจุด $V = V_1 \cup V_2$ เมื่อ V_1 มีสมาชิก m ตัว , V_2 มีสมาชิก n ตัว , $V_1 \cap V_2 = \phi$ และแต่ละจุดใน V_1 เชื่อมกับแต่ละจุดใน V_2 เพียงหนึ่งด้านเท่านั้น

$K_{1,5}$

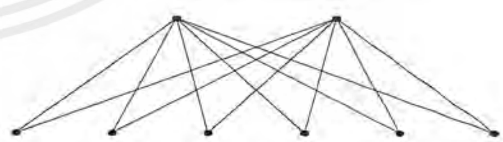
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$



$K_{2,5}$

(m,n) เรียกว่า อันดับของ complete bipartite graph

สองcomplete bipartite graphs ที่มี order (m,n) เดียวกันจะเป็น isomorphic นั่นคือ $K_{m,n}$ isomorphic กับ $K_{n,m}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

complete และ complete bipartite มีแนวความคิดที่แตกต่างกัน

complete ไม่มี ลูป 1 ด้านเชื่อมคู่จุดที่แตกต่างกัน แยก V_1, V_2 ไม่ได้

complete bipartite ไม่มี ลูป $V = V_1 \cup V_2$ และ $V_1 \cap V_2 = \phi$ 1 ด้านเชื่อมคู่จุดระหว่าง V_1 และ V_2

complete bipartite ไม่ใช่ bipartite กราฟที่เป็น complete graph ด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.7 ทางเดินและเส้นทางเดิน (Walks and Paths)

นิยาม 2.12 ให้ G เป็นกราฟ walk จากจุด u ไปจุด v ของ G คือ ลำดับใดๆของ จุดและเส้น

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

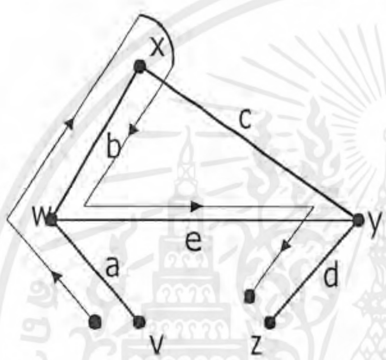
ซึ่ง $v_0 = u$, $v_n = v$ และแต่ละด้าน e_i invarent กับจุด v_{i-1} และ v_i

ถ้า $u = v$ แล้ว walk จะเรียกว่า closed กรณีอื่นๆเรียกว่า open

length ของ walk คือจำนวนของด้าน n

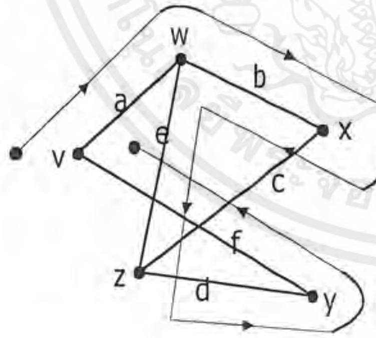
มี walk ของ single vertex v แต่เป็น trivial walk จาก v ไป v ซึ่ง length เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 2.16 sequence $v, a, w, b, x, b, w, b, w, e, y, d, z$ เป็น walk จาก v ไป z



Open

sequence $v, a, w, b, x, b, w, e, z, d, y, f, v$ เป็น walk จาก v ไป v



Close

walk จาก u ไป v คือ a way of traveling จาก u ไป v ตามด้านของกราฟ แต่ walk ไม่จำเป็นต้องเป็นทางเดินที่มีประสิทธิภาพที่จะไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.13 path ในกราฟ G คือ walk ซึ่งไม่มีจุด หรือเส้นใดซ้ำ ยกเว้นจุดแรกและสุดท้ายในกรณี closed walk

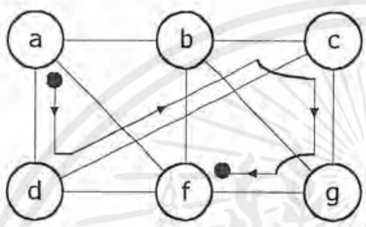
close path เรียกว่า cycle

ในการหา path จะหาได้จาก walk โดยการตัดจุดและเส้นที่ซ้ำออก

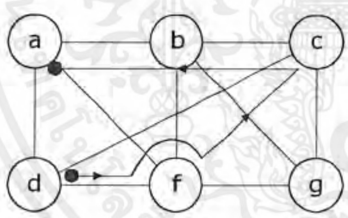
ทุกๆ open walk จาก u to v ใน graph G contain path จาก u to v

ในหนังสือบางเล่มใช้ path แทน walk และใช้ simple path แทน path

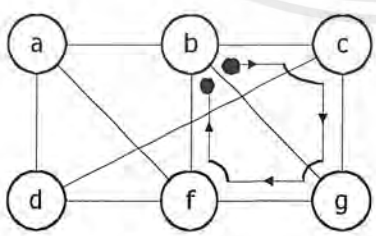
ตัวอย่าง 2.17 กำหนด simple graph



a, d, c, f, e เป็น path ที่มี length 4 เนื่องจากมี $\{a,d\}, \{d,c\}, \{c,f\}, \{f,e\}$ เป็นด้านของ graph

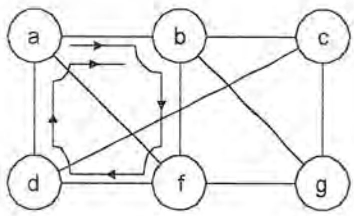


d, e, c, a ไม่เป็น path เนื่องจาก $\{e,c\}$ ไม่เป็นด้านของ graph



b, c, f, e, b เป็น circuit ที่มี length 4 เนื่องจาก $\{b,c\}, \{c,f\}, \{f,e\}, \{e,b\}$ เป็นด้านของ graph และเริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดเดียวกัน b

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



a,b,e,d,a,b มี length 5 ไม่เป็น path เพราะ มีด้าน $\{a,b\}$ ซ้ำสองหน

2.2.8 **กราฟต่อเนื่อง** (Connected graph)

นิยาม 2.14 กราฟ G จะเรียกว่า connected ถ้าทุกๆคู่อันดับของจุด u,v ใน G มี path จาก u ไป v ใน G

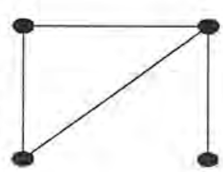
กราฟจะกล่าวว่า connected ถ้ามี path ระหว่างทุกคู่ของจุดในกราฟ

ตัวอย่าง 2.18 กราฟต่อไปนี้ connect

กราฟต่อไปนี้ ไม่connected

นิยาม 2.15 ให้ G เป็นกราฟของเซตของจุด V และเซตของเส้น $E : G = (V,E)$ และให้ H เป็นกราฟของเซตของจุด W และเซตของเส้น $F : H = (W,F)$ แล้ว H เป็น กราฟย่อย (subgraph) ของ G ถ้า $W \subseteq V, F \subseteq E$ และด้าน $e \in F$ incident กับจุด $V \in W$ ในกราฟ H ก็ต่อเมื่อ $e \in E$ incident กับ $V \in G$

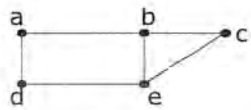
เป็น subgraph ของ



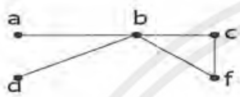
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.16 union ของสอง simple graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ และ $G_2 = (V_2, E_2)$ เป็น simple graph ซึ่งจุดคือ เซตของ $V_1 \cup V_2$ และเส้น คือเซต $E_1 \cup E_2$ union ของ G_1 และ G_2 แทนด้วย $G_1 \cup G_2$

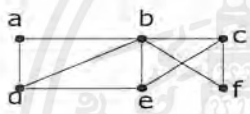
ตัวอย่าง 2.19 กำหนด G_1 และ G_2



G_1



G_2



$G_1 \cup G_2$

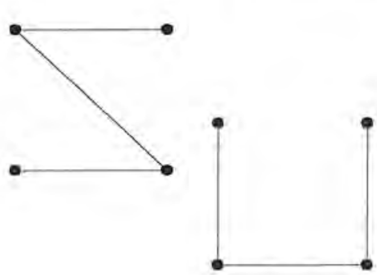
connected graph ใดๆที่มี n จุดจะมีอย่างน้อย $n-1$ ด้าน

1 จุด 0 เส้น

2 จุด 1 เส้น

3 จุด 2 เส้น

มี 3 ด้านได้ไหม……ได้ แต่ < 2 ไม่ connected



4 จุด 3 เส้น

น้อยกว่านี้ไม่ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎี 2.3 ถ้า G เป็น bipartite graph แล้วแต่ละ cycle ของ G จะมี length เป็นคู่

ทฤษฎี 2.4 ให้ G เป็นกราฟที่มีจุกยอด n จุด ถ้า G มีส่วนประกอบ k ส่วนแล้ว จำนวน m ของเส้นของ G จะเป็นไปตามความสัมพันธ์ $n-k \le m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$

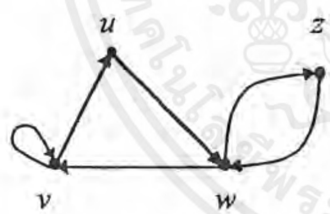
บทแทรก simple กราฟที่มี n จุดที่มีเส้นมากกว่า $(n-1)(n-2)/2$ จะเป็น connect กราฟ

2.2.9 กราฟแสดงทิศทาง (Digraph)

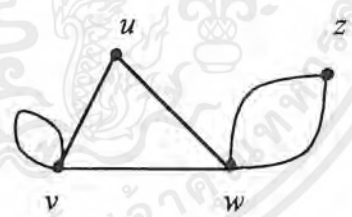
นิยาม 2.17 didraph D ประกอบไปด้วยเซตของ elements เรียกว่าจุดและคู่ลำดับของกลุ่ม elements เรียกว่า arcs เซตของจุดจะเรียกว่า Vertex-Set ของ D หรือ $V(D)$ และคู่ลำดับของ arcs จะเรียกว่า arc-list ของ D หรือ $A(D)$ ถ้า v และ w เป็นจุดของ D แล้ว arc ของ vw จะกล่าวว่าเป็น dtrected from v to w หรือ join v to w

นิยาม 2.18 ให้ D เป็น digraph แล้ว Underlying graph ของ D ก็คือกราฟที่เปลี่ยน arc ของ D เป็น เส้น

ในการสร้าง underlying graph เราเพียงแต่นำลูกศรออกจาก arcs เช่น

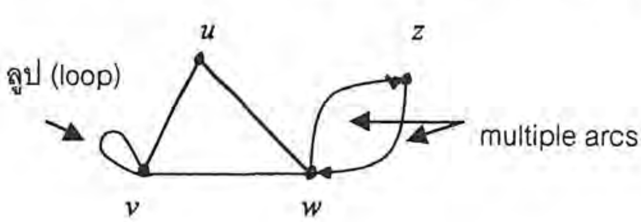


digraph D



underlying graph D

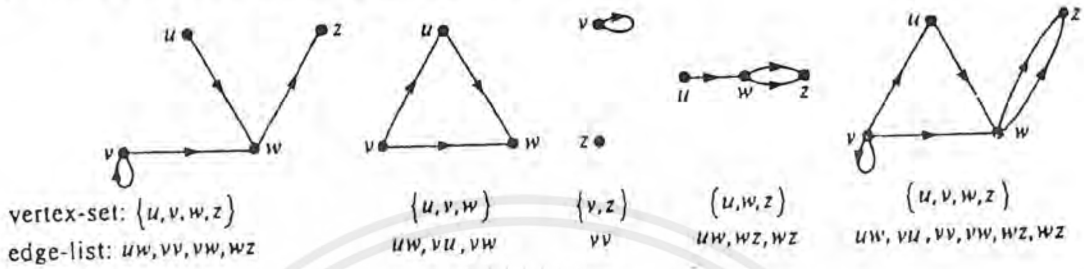
นิยาม 2.19 สำหรับ 2 arcs หรือมากกว่านั้นที่เชื่อมจุดคู่เดียวกัน และมี direction ที่เหมือนกัน เราจะเรียกว่าเป็น multiple arcs และสำหรับ arc ที่เชื่อมจุดเพียงจุดเดียว เราจะเรียกว่าเป็นลูป digraph ใดที่ไม่มีลูป หรือ multiple arcs จะเรียกว่าเป็น simple digraph



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

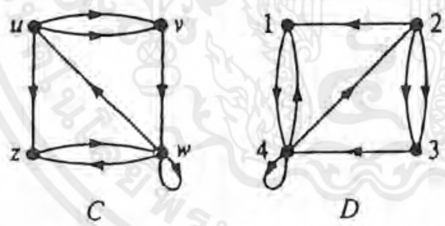
นิยาม 2.20 ให้ D เป็น digraph ที่มี vertex-set $V(D)$ และ arc-list $A(D)$ แล้ว subdigraph ของ D ก็คือ digraph ที่จุดทั้งหมดอยู่ใน $V(D)$ และ arcs ทั้งหมดอยู่ใน $A(D)$

ตัวอย่าง 2.20 ถ้า D เป็น digraph ซึ่งมี $V(D) = \{u, v, w, z\}$ และ $A(D)$ ก็คือ (uw, vu, vw, wz, wz) แล้ว Subgraph ของ D อาจเป็น



นิยาม 2.21 2 Digraph C และ D เป็น isomorphic ถ้า D การ relabeling vertices ของ C นั่นคือ ถ้าความสัมพันธ์ one-to-one ระหว่างจุดของ C และ D ซึ่งจำนวนของ arcs ที่ joining แต่ละคู่ของจุดใดๆ เท่ากับจำนวนของ arcs ที่ joining คู่ของจุดมีตรงกัน (ในทิศเดียวกัน) ใน D

ตัวอย่าง 2.21



เป็น isomorphic จะเห็นได้โดยการพิจารณาความสัมพันธ์ one-to-one

$C: u$	v	w	z
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$D: 2$	3	4	1

2 arcs ของ uv ใน C สัมพันธ์กับ 2 arcs ของ 23 ใน D

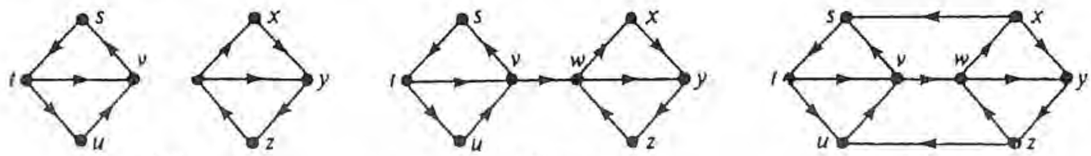
arc wz ใน C สัมพันธ์กับ arc 41 ใน D

ลูปที่ w ใน C สัมพันธ์กับลูปที่ 4 ใน D

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.22 digraph D เป็น connected ถ้า underlying ของ D เป็น connected และ D เป็น disconnected ถ้านอกเหนือจากนี้ซึ่งมันจะเป็น strongly connected ถ้ามี path ใน D จากจุดใดๆ ไปยัง จุดอื่น

ตัวอย่าง 2.22 ดูความแตกต่างระหว่าง digraph ต่างๆ



(a) (b) (c)

Digraph (a) เป็น disconnected : underlying ของมันเป็น disconnected

Digraph (b) เป็น connected แต่ไม่เป็น strongly connected : ไม่มี path จาก w ไป v

Digraph (c) เป็น strongly connected

นิยาม 2.23 กราฟ G เป็น orientable ถ้ามันเป็น underlying graph ของ strongly connected นั่นคือ ถ้ามันเป็น "direct" adges ของ G แล้วผลลัพธ์ของมันจะเป็น strongly connected

จากข้างต้นเราจะเห็นได้ว่า ถ้ากราฟมี "bridge" มันจะไม่สามารถเป็น orientable ได้

นิยาม 2.24 เส้นใน connected กราฟจะเป็น Bridge ถ้าเรานำเส้นนั้นออกแล้วทำให้กราฟนั้นเป็น disconnected

ทฤษฎี 2.5 connected graph G จะเป็น orientable ก็ต่อเมื่อ G ไม่มี bridge

นิยาม 2.25 edge – connectivity ของ $\lambda(G)$ ของ connected กราฟ G คือ ค่าที่น้อยที่สุดของเส้น ซึ่งไม่รวม disconnects ของ G เมื่อ $\lambda(G) \geq k$, กราฟ G จะถูกเรียกว่า k – edge – connected

นิยาม 2.26 cutset ของ connected กราฟ G คือเซต S ของเส้น ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

a. ไม่รวมเส้นทั้งหมดใน S ที่ *disconnects* ของ G

b. ไม่รวมบางเส้น (แต่ไม่ใช่ทั้งหมด) ใน S ที่ connect ของ G

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.27 connectivity (หรือ vertex – connectivity) $k(G)$ ของ connected กราฟ G (นอกเหนือจาก complete graph) คือค่าที่น้อยที่สุดของจุด ซึ่งไม่รวมส่วนที่ disconnects ของ G เมื่อ $k(G) \geq k$, กราฟนั้นจะเรียกว่าเป็น k-connected (หรือ k-vertex-connected)

นิยาม 2.28 connectivity K (K_n) ของ complete graph K_n คือ n-1 เมื่อ n-1 $\geq$ k, จะเรียก K_n ว่าเป็น k-connected

นิยาม 2.29 vertex - cutset ของ connected graph G คือ set S ของจุดที่มีคุณสมบัติดังนี้

a. ไม่รวมทุกจุดใน s ที่เป็น disconnects ของ G
b. ไม่รวมบางจุด (แต่ไม่ใช่ทั้งหมด) ใน S ที่ไม่ใช่ disconnects ของ G

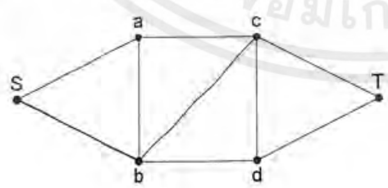
ทฤษฎี 2.6 สำหรับ connected graph G ใดๆ

$$K(G) <= \lambda(G) <= \delta(G)$$

เมื่อ $\delta(G)$ คือดีกรีที่น้อยที่สุดของจุดใน G

นิยาม 2.30 ให้ G เป็น connected graph และ ให้ s และ t เป็นจุดของ G st-path เป็นpath ที่เชื่อมระหว่าง s และ t สำหรับ st-path ที่มีเส้นทางเชื่อม 2 เส้นทางขึ้นไป จะเรียกว่าเป็น edge – disjoint ถ้ามันไม่มีเส้นที่ใช้ร่วมกัน และจะเรียกว่าเป็น vertex – disjoint ถ้ามันไม่มีจุดที่ใช้ร่วมกัน (ของ path s และ t)

ตัวอย่าง 2.23



path st sact และ sbdt เป็นทั้ง edges – disjoint และ vertex – disjoint

path st sact และ sbct ไม่เป็นทั้ง edges – disjoint และ vertex – disjoint

(เพราะเส้น ct ใช้ร่วมกัน)

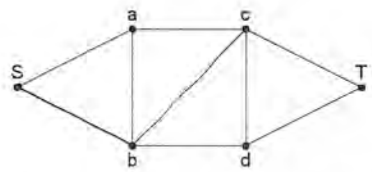
path st sact และ sbcdt เป็น edges – disjoint แต่ไม่เป็น vertex – disjoint

(เพราะมีจุดc ใช้ร่วมกัน)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.31 ให้ G connected graph และให้ s และ t เป็นจุดของ G เราเรียกเส้นใดๆ ว่าเป็น separate s from t ถ้าตัดเส้นนั้นออกไปแล้วทำให้ไม่มีเส้นเชื่อมระหว่าง s กับ t และเรียกจุดใดๆ ว่าเป็น separate s from t ถ้าตัดจุดนั้นออกไปแล้วทำให้ไม่มีเส้นเชื่อมระหว่าง s กับ t

ตัวอย่าง 2.24



เส้น ac, bc และ bd separate s from t ซึ่งเหมือนกับ sa, ac, bc, bd, dt

จุด b และ c separate s from t ซึ่งเหมือนกับจุด a, b และ d

ทฤษฎี 2.7 (MENGER'S THEOREM FOR GRAPHS (EDGE - FORM))

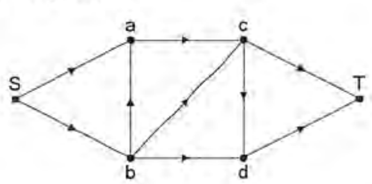
ให้ G เป็น connected graph และให้ s และ t เป็นจุดของ G แล้วค่ามากของ edge-disjoint st-paths จะเท่ากับค่าน้อยสุดของ separating s from t

บทแทรก (CORLLARY OF MENGER'S THEOREM GRAPHS (EDGE - FORM))

Connected graph G จะเป็น k edge – connected ก็ต่อเมื่อ 2 จุดใดๆ ของเป็น connected by at least k edge-disjoint paths

นิยาม 2.32 ให้ D เป็น connected digraph และให้ s และ t เป็นจุดของ D และ st-path เป็นเส้นระหว่าง s ไป t สำหรับ st-paht ที่มีเส้นทางเชื่อม 2 เส้นทางขึ้นไป จะเรียกว่าเป็นarc-disjoint ถ้ามันไม่มี arc ที่ใช้ร่วมกัน และเรียกว่าเป็น vertex-disjoint ถ้ามันไม่มีจุดที่ใช้ร่วมกัน (บนเส้นทางจาก s ไป t)

ตัวอย่าง 2.25 Digraph



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

path sact และ sbdt เป็นทั้ง arc-disjoint และ vertex-disjoint

path sact และ sbct ไม่เป็นทั้ง arc-disjoint และ vertex-disjoint

path sact และ sbcdt เป็น arc-disjoint แต่ไม่เป็น vertex-disjoint

ทฤษฎี 2.8 (MENGER'S THEOREM FOR FIGRAPHS (ARC-FORM))

ให้ D เป็น connected digraph และให้ s และ t เป็นจุดของ D แล้วค่ามากสุดของ arc-disjoint st-path จะมีค่าเท่ากับค่าที่น้อยที่สุดของ arcs separating s from t

ทฤษฎี 2.9 (MENGER'S THEOREM FOR GRAPHS (VERTEX-FORM))

ให้ G เป็น connected graph และให้ s และ t เป็น non-adjacent vertices ของ แล้วค่ามากสุดของ vertex-disjoint st-path จะมีค่าเท่ากับค่าน้อยสุดของ vertices separating s form t

บทแทรก (COROLLARY OF MENGER'S THEOREM FOR GRAPH (VERTEX-FORM))

Connected graph G เป็น k-connected ก็ต่อเมื่อ 2 จุดใดๆ ของ G เป็น connected by at least k vertex-disjoint paths

ทฤษฎี 2.10 (MENGER'S THEOREM FOR DIGRAPHS (VERTEX-FORM))

ให้ D เป็น connected digraph และให้ s และ t เป็น nonadjacent vertices ของ แล้ว ค่ามากที่สุดของ vertex-disjoin st-path มีค่าเท่ากับค่าน้อยที่สุดของ separating s form t

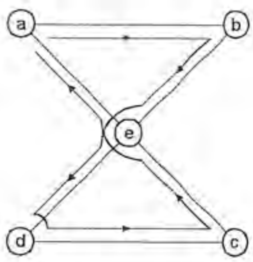
2.2.10 วงจรออยเลอร์และทางเดินออยเลอร์ (Euler circuit และ Euler path)

นิยาม 2.33 Euler circuit ในกราฟ G คือ closed walk ใน G ซึ่งแต่ละด้านของ G ปรากฏเพียงครั้งเดียวเท่านั้น

นิยาม 2.34 Euler path ใน G คือ path ที่ประกอบด้วยทุกๆ ด้านของ G ที่ไม่มีด้านใดซ้ำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

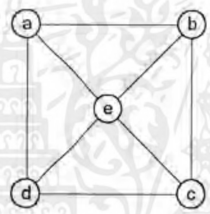
ตัวอย่าง 2.26

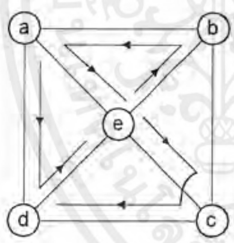


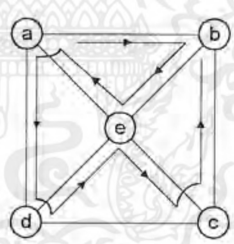
a, b, e, d, c, e, a

ไม่มีด้านใดซ้ำ มีจุดยอดซ้ำได้ ไม่มีด้านเหลือ ผ่านทุกด้านของกราฟ เริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดเดียวกัน กราฟรูปนี้เป็น Euler circuit หรือจะเป็น

a, e, c, d, e, b, a





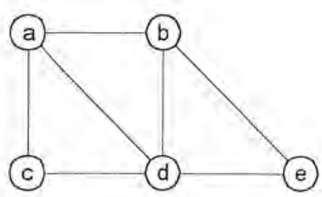


a, d, e, b, a, e, c, d　　　　a, b, e, a, d, e, c, b

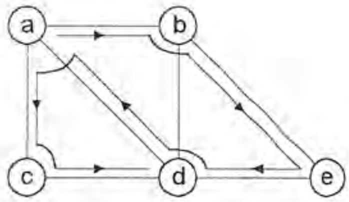
เหลือ bc　　　　　　　　　เหลือ dc

มีด้านของกราฟเหลือ จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดไม่ใช่จุดเดียวกัน

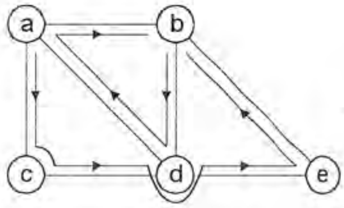
กราฟรูปนี้ไม่เป็น Euler circuit



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



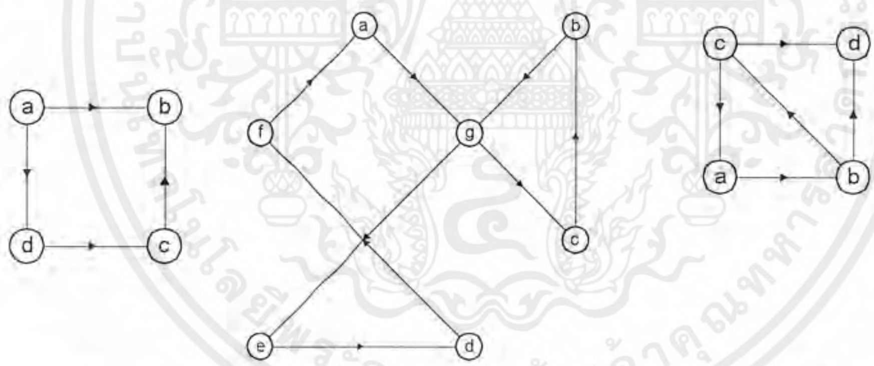
a, b, e, d, a, c, d, b



a, c, d, e, b, d, a, b

จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดไม่ใช่จุดเดียวกัน ไม่มีด้านซ้ำ ไม่มีด้านเหลือ
กราฟรูปนี้ไม่เป็น Euler circuit แต่มี Euler path

ตัวอย่าง 2.27 กราฟใดต่อไปนี้เป็น Euler circuit กราฟใดไม่เป็น และกราฟที่เป็น มี Euler path หรือไม่



H1 H2 H3

H1 : a, d, c, b เริ่มต้นและใช้จุดสิ้นสุดต่างกัน ไม่ใช่ Euler circuit

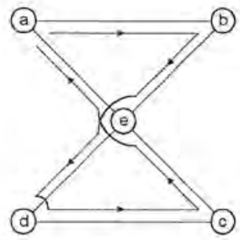
H2 : a, g, c, b, e, d, f, a

เริ่มต้นและสิ้นสุดจุดเดียวกัน ไม่มีด้นซ้ำ ไม่มีด้านเหลือ จึงเป็น Euler circuit

H3 : c, a, b, c, d, b เริ่มต้นและใช้จุดสิ้นสุดต่างกัน ไม่ใช่ Euler circuit

H3 มี Euler path : c, a, b, c, d, b

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

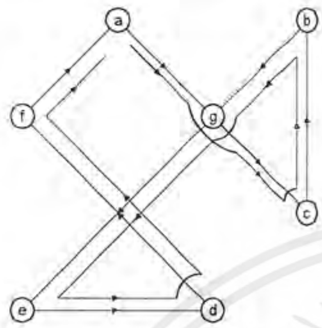


Euler circuit

a, b, e, d, c, e, a

deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) =

deg(e) = 4



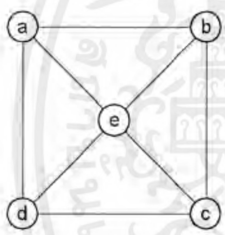
Euler circuit

a, g, c, b, g, e, d, f, a

deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) =

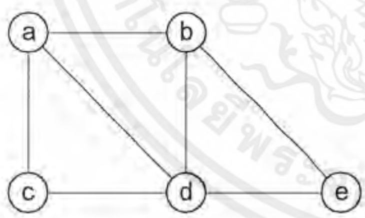
deg(e) = deg(f) = 2 deg(g) = 4

ทุกจุดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่



deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) = 3

deg(e) = 4



deg(a) = deg(c) = 2

deg(b) = deg(d) = deg(e) = 3

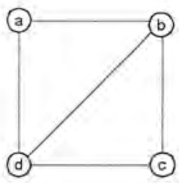
บางจุดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ บางจุดมีดีกรีเป็นจำนวนคี่ ไม่เป็น Euler circuit

ทฤษฎี 2.11 ให้ G เป็น connected graph แล้ว G เป็น Euler circuit ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ จุด มีดีกรีเป็นจำนวนคู่

ทฤษฎี 2.12 connected graph ที่มีจุดอย่างน้อยที่สุด 2 จุดมี Eulerian path ก็ต่อเมื่อ มี 0 หรือ 2 จุดเท่านั้นที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ และ path จะมีจุดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่เป็นจุดปลาย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

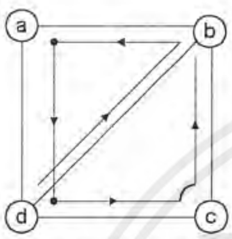
ตัวอย่าง 2.28



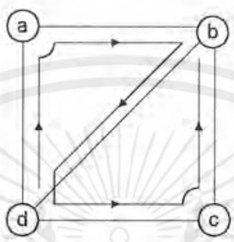
$\deg(a) = \deg(c) = 2$

$\deg(b) = \deg(d) = 3$

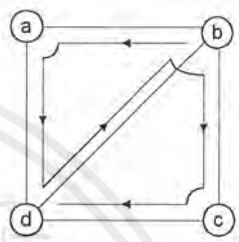
มีดีกรีที่เป็นจำนวนคี่อยู่ 2 จุดดังนั้นมี Eulerian path โดยมีจุดที่มีดีกรีคี่เป็น endpoint



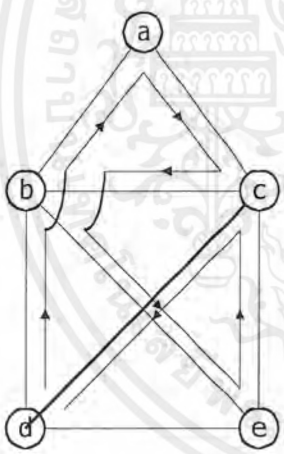
d, b, a, d, c, b



d, a, b, d, c, b



b, a, d, b, c, d

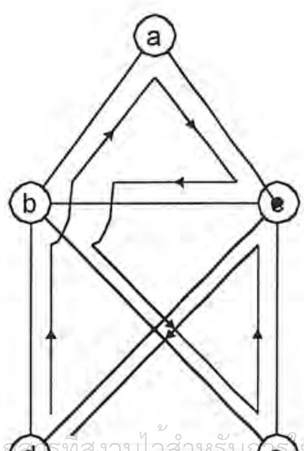


$\deg(a) = 2$

$\deg(b) = \deg(c) = 4$

$\deg(d) = \deg(e) = 3$

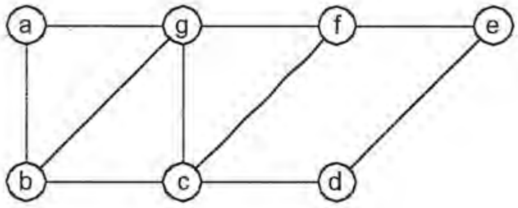
มีดีกรีที่เป็นคี่อยู่ 2 จุดยอด มี Eulerian



path d, b, a, c, b, e, c, d, e

หรือ d, e, c, a, b, c, d, b, e

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

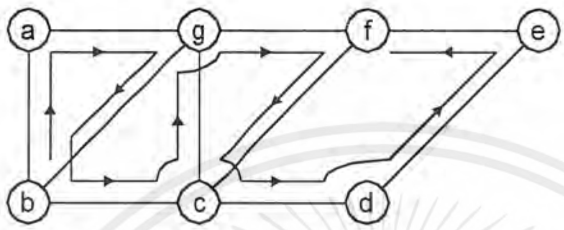


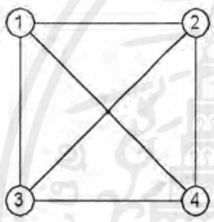
deg(a) = deg(e) = deg(d) = 2

deg(b) = deg(f) = 3

deg(c) = deg(g) = 4

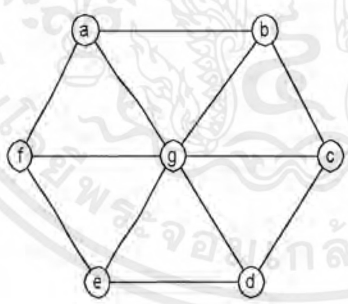
มีดีกรีที่มีจำนวนคู่อยู่ 2 จุดยอด มี Euler path b, a, g, b, c, g, f, c, d, e, f





deg(1) = deg(2) = deg(3) = deg(4) = 3

มีดีกรีที่เป็นจำนวนคี่เกิน 2 จุดยอด ไม่มี Eulerian path



deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) = deg(e) = deg(f) = 3

deg(g) = 6

มีดีกรีที่เป็นจำนวนคี่เกิน 2 ไม่มี Eulerian path

บทแทรก Connected graph จะเป็น Eulerian ก็ต่อเมื่อเซตของเส้นสามารถแยกออกไปได้เป็น disjoint cycles (Split up into disjoint cycles)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทแทรก Connected graph เป็น semi-Eulerian ก็ต่อเมื่อมี2 จุดยอด ที่แน่นอนของดีกรีคี่

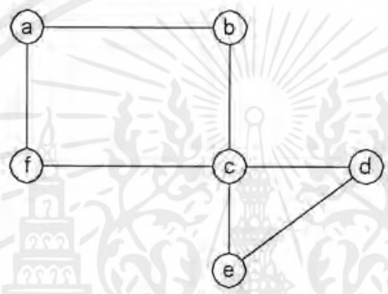
ทฤษฎี 2.13 ให้ G เป็น Eulerian graph แล้วสิ่งที่ตามมาเป็นจริงเสมอและทำให้เกิด Eulerian trail ของ G

i) ลบเส้นที่ผ่าน และถ้า isolate vertices result ใดๆ ก็ลบมันด้วย

ii) ในแต่ละขั้นใช้ bridge อย่างเดียว ถ้าไม่มี alternative

ในการหา Euler circuit มีวิธีการดังนี้

พิจารณากราฟ G ดังรูป



แต่ละจุดยอดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ทั้งหมด มี Eulur circuit

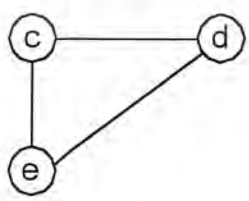
ในการหา Euler circuit

กำหนด Simple circuit ซึ่งเริ่มต้น ณ จุดยอดใดๆ ของ G เลือกจุดยอด a

หา Path ในรูปแบบ เริ่มต้นที่ a จบที่ a {a, x},...,{y, a} ให้เป็น circuit ที่ยาวที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

จาก a เลือก

{a, f}, {f, c}, {c, b} และ {b, a} จะได้ circuit a, f, c, b, a แล้วลบ circuit a, f, c, b, a ออกจากกราฟ จะได้ subgraph ดังนี้



ซึ่งทุกจุดยอดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ทั้งหมด

ทำซ้ำ เลือกจุดยอดหา path ในรูปแบบเริ่มต้นและจบที่จุดยอดที่เลือก ให้เป็น circuit ที่ยาวที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลือก c จาก c เลือก

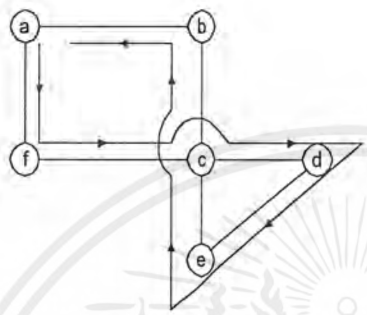
{c, d}, {d, e}, {e, c} จะได้ circuit c, d, e, c

เพิ่ม circuit ของ subgraph เข้าไปใน circuit แรก

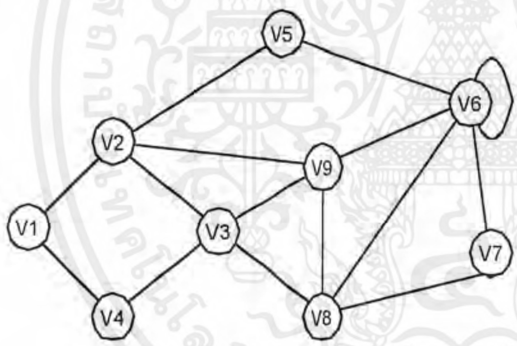
จาก a, f, c, b, a

และ c, d, e, c

จะได้ a, f, c, d, e, c, b, a



ตัวอย่าง 2.29 จงหา ของกราฟ Euler circuit ดังรูป



$deg(v_1) = 2$ $deg(v_4) = 2$ $deg(v_7) = 2$

$deg(v_2) = 4$ $deg(v_5) = 2$ $deg(v_8) = 4$

$deg(v_3) = 4$ $deg(v_6) = 6$ $deg(v_9) = 4$

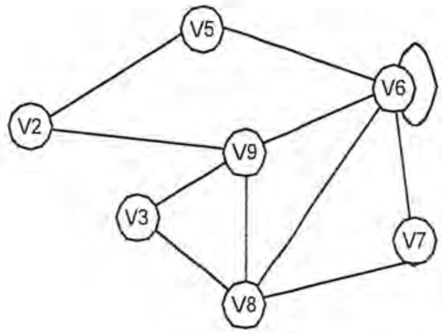
ทุกจุดยอดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ ดังนั้นมี Euler circuit

เลือก v_1 จาก v_1 เลือก path

$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}$

จะได้ circuit v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 แล้วตัด circuit นี้ออกจากกราฟ

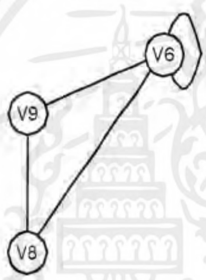
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เลือก v_2 จาก v_2 เลือก path

$\{v_2, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\}, \{v_7, v_8\}, \{v_8, v_3\}, \{v_3, v_9\}, \{v_9, v_2\}$

จะได้ circuit $v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_2$ แล้วตัด circuit นี้ออกจากกราฟ



เลือก v_9 จาก v_9 เลือก path

$\{v_9, v_6\}, \{v_6, v_6\}, \{v_6, v_8\}, \{v_8, v_9\}$

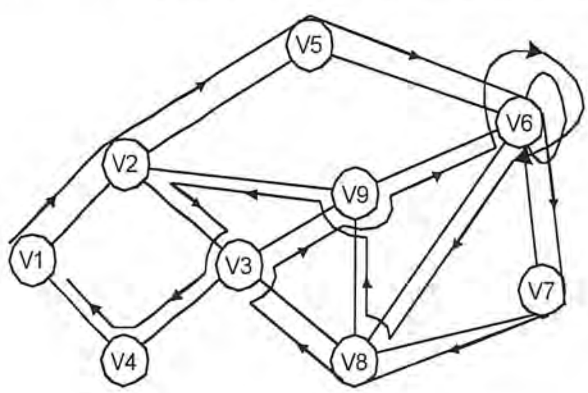
ได้ circuit v_9, v_6, v_6, v_8, v_9

จะได้ v_1, v_2, v_3, v_4, v_1

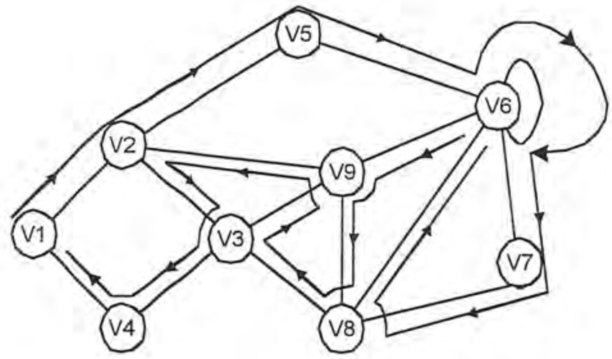
และ $v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_2$

และ $v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_2$

ดังนั้น Euler circuit $v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_2, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_2$

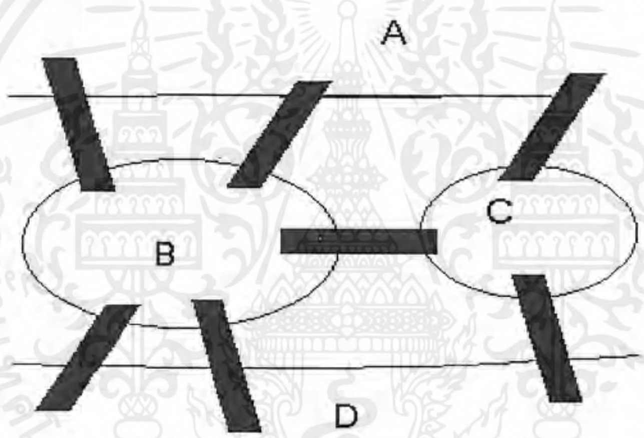


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ตัวอย่าง 2.30 ปัญหาสะพานโคนิกสเบอร์ก (Konigsberg Bridge Problem)

เกาะสองเกาะอยู่กลางแม่น้ำพรีเกลในเมืองโคนิกสเบอร์ เชื่อมด้วยสะพานติดต่อถึงกัน และเชื่อมกับฝั่งแม่น้ำ ดังรูป



ปัญหาคือ เริ่มที่จุดยอดใดๆ A, B, C หรือ D เดินข้ามสะพานทุกสะพาน และแต่ละสะพานเดินผ่านได้ครั้งเดียว แล้วกลับมาที่เดิม

ทางเดินในปัญหานี้คือ Euler circuit นั่นเอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

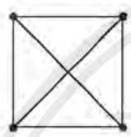
2.3 กราฟบนระนาบ (Planarity)

นิยาม 2.35 กราฟ G เรียกว่าอยู่บนระนาบเดียวกันได้ (planar) ถ้าสามารถเขียนกราฟบนระนาบได้โดยไม่มีด้านใดตัดกัน

เมื่อเขียนกราฟบนระนาบไม่ให้มีด้านตัดกัน กราฟจะแบ่งระนาบออกเป็นบริเวณที่มีขอบเขตเป็นด้านของกราฟ เรียกบริเวณนี้ว่า หน้า (faces)

การเขียนกราฟบนระนาบที่มีด้านตัดกัน ไม่ได้หมายความว่า กราฟนั้นไม่อยู่บนระนาบเดียวกันได้ เช่น

กราฟ K_4



จะพบว่ามีด้านตัดกัน

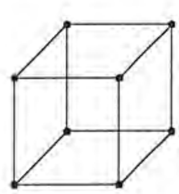
สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

หรือ

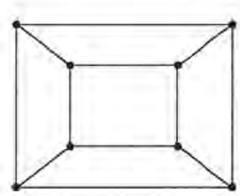
จะพบว่าไม่มีด้านตัดกัน

กราฟ K_4 สามารถเขียนในรูปที่มีด้านตัดกัน หรือด้านไม่ตัดกัน เนื่องจากกราฟ K_4 สามารถเขียนในรูปแบบก้านไม่ตัดกันได้ ดังนั้น K_4 อยู่บนระนาบเดียวกันได้

ตัวอย่าง 2.31 กราฟ ดังรูป

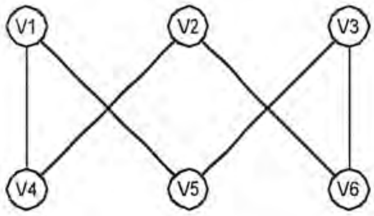


เป็น planar เพราะสามารถเขียนในรูปที่ด้านไม่ตัดกันได้

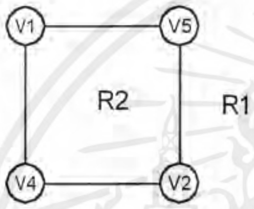


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.32 $K_{3,3}$ ดังรูปเป็น planar หรือไม่

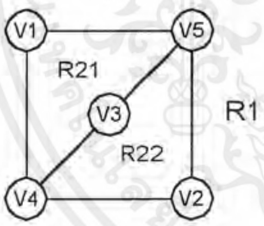


จะพบว่า v_1 และ v_2 เชื่อมกับ v_3 และ v_4 ทั้งคู่ซึ่ง 4 ด้านนี้จะเป็น closed curve ซึ่งแบ่งระนาบเป็นสองบริเวณ R_1 และ R_2



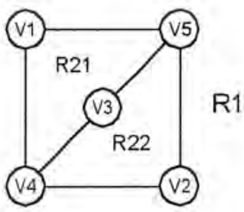
v_3 เชื่อมกับ v_4 และ v_5 ดังนั้น v_3 อยู่ใน R_1 หรือ R_2 ก็ได้

ถ้า v_3 อยู่ใน R_2 จะได้



ด้าน v_3 และ v_4 กับ v_3 และ v_5 แบ่งเป็น R_2 ออกเป็น 2 ส่วน R_{21} , R_{22}

v_6 เชื่อมกับ v_1 และ v_2



ถ้าใส่ v_6 ใน R_{21} เมื่อเขียนด้าน v_2 และ v_6 จะตัดกับด้านอื่น

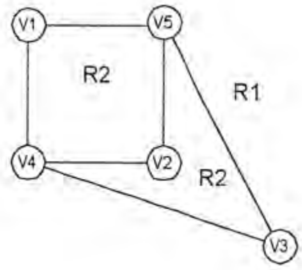
ถ้าใส่ v_6 ใน R_{22} เมื่อเขียนด้าน v_1 และ v_6 จะตัดกับด้านอื่น

ดังนั้น $K_{3,3}$ ไม่เป็น planar graph

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า v_3 อยู่ใน R_1 จะมี R_3 เกิดขึ้นเมื่อลาก $\{v_3, v_5\}$ และ $\{v_3, v_4\}$

v_6 มีด้านไป v_1, v_2, v_3



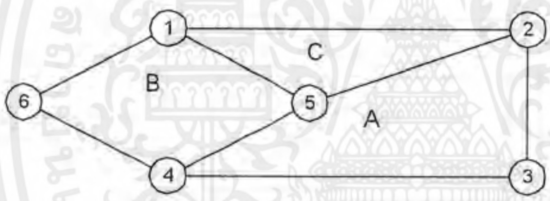
ถ้ามี v_6 อยู่ใน R_2 แล้ว $\{v_3, v_6\}$ ตัดด้านอื่น

ถ้ามี v_6 อยู่ใน R_3 แล้ว $\{v_1, v_6\}$ ตัดด้านอื่น

ถ้ามี v_6 อยู่ใน R_1 แล้ว $\{v_2, v_6\}$ ตัดด้านอื่น

ดังนั้น $K_{3,3}$ ไม่เป็น planar graph

ตัวอย่าง 2.33 พิจารณากราฟ



ไม่มีด้านใดตัดกันเลย มี 6 จุดยอด และ 8 เส้น

หน้า A ถูกล้อมรอบด้วย circuit 5, 2, 3, 4, 5

หน้า B ถูกล้อมรอบด้วย circuit 1, 5, 4, 6, 1

หน้า C ถูกล้อมรอบด้วย circuit 1, 2, 5, 1

หน้า D ถูกล้อมรอบด้วย circuit 1, 2, 3, 4, 5, 1

มีหน้าภายใน 3 หน้า มีหน้าภายนอก 1 หน้า รวม 4 หน้า

ให้ $p = 6$ จุดยอด

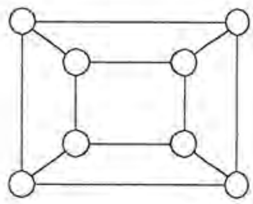
$q = 8$ เส้น

$r = 4$ หน้า

ซึ่ง $6 - 8 + 4 = 2$ มาจาก $p - q + r = 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.34



มี p = 8 จุดยอด

มี q = 12 เส้น

มี r = 6 หน้า

$p - q + r = 8 - 12 + 6 = 2$

ทฤษฎี 2.14 ทฤษฎีของออยเลอร์ (Euler's Theorem)

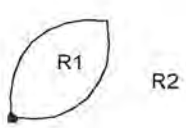
ให้ G เป็น connected planar graph ซึ่งมี p จุดยอด และ g เส้นที่อยู่บนระนาบในรูปแบบที่มี r หน้า แล้ว

$p - q + r = 2$

ตัวอย่าง 2.35

กราฟซึ่งมี 1 ด้าน อาจมี 2 จุดยอด หรือ 1 จุดยอด

ถ้า 2 จุดยอด 1 ด้าน ไม่มีการแบ่งระนาบเป็นส่วน ดังนั้นมี 1 หน้า



ถ้า 1 จุดยอด 1 ด้าน มีลูปมีการระนาบเป็น 2 ส่วน ดังนั้นมี 2 หน้า

p = 2 จุดยอด, q = 1 เส้น, r = 1 หน้า

$p - q + r = 2 - 1 + 1 = 2$

p = 1 จุดยอด, q = 1 เส้น, r = 2 หน้า

$p - q + r = 1 - 1 + 2 = 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟซึ่งมีด้าน 2 ด้าน อาจมี 3 จุดยอด หรือ 2 จุดยอด

ถ้า 3 จุดยอด 2 ด้าน ต่อกัน ไม่มีการแบ่งระนาบเป็นส่วน มี 1 หน้า

$p = 3$ จุดยอด, $q = 2$ เส้น, $r = 1$ หน้า

$$p - q + r = 3 - 2 + 1 = 2$$

ถ้า 2 จุดยอด 2 ด้าน มี circuit มีการแบ่งระนาบเป็น 2 ส่วน มี 2 หน้า

$p = 2$ จุดยอด, $q = 2$ เส้น, $r = 2$ หน้า

$$p - q + r = 2 - 2 + 2 = 2$$

กราฟซึ่งมี 3 ด้าน อาจมีจุดยอด 4, 3 หรือ 2

ถ้า 4 จุดยอด 3 ด้าน ต่อกัน ไม่มีการแบ่งระนาบเป็นส่วน มี 1 หน้า

$p = 4$ จุดยอด, $q = 3$ เส้น, $r = 1$ หน้า

$$p - q + r = 4 - 3 + 1 = 2$$

ถ้า 3 ด้าน 3 จุดยอด แบ่งระนาบเป็น 2 ส่วน มี 2 หน้า

$p = 3$ จุดยอด, $q = 3$ เส้น, $r = 2$ หน้า

$$p - q + r = 3 - 3 + 2 = 2$$

ถ้า 3 ด้าน 2 จุดยอด แบ่งระนาบเป็น 3 ส่วน มี 3 หน้า

$p = 2$ จุดยอด, $q = 3$ เส้น, $r = 3$ หน้า

$$p - q + r = 2 - 3 + 3 = 2$$

จะพิจารณากรณีมี circuit และไม่มี circuit

กรณีไม่มี circuit

กราฟจะมีหน้าเดียว : $r = 1$

จำนวนจุดยอดทั้งหมด p' : $p = p'$

จำนวนเส้นต้องน้อยกว่าจุดยอดอยู่ 1 : $p' - 1$

$$q = p' - 1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้ว $p - q + r = p' - (p' - 1) + 1 = 2$

กรณีมี circuit

กราฟจะมีจำนวนหน้า $r \geq 2$

ให้ e เป็นด้านของกราฟบน circuit ด้าน e ต้องอยู่บนขอบของสองหน้าของกราฟ ถ้านำ e ออกจากกราฟ สองหน้าของกราฟจะรวมเป็นหน้าเดียว จะได้กราฟซึ่ง

จำนวนจุดยอดคือ $p' = p$

จำนวน เส้นคือ $q' = q - 1$

จำนวนหน้าคือ $r' = r - 1$

จาก inductive hypothesis

$$p' - q' + r' = 2$$

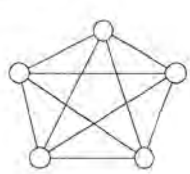
ดังนั้น $p - q + r = p' - (q' + 1) + (r' - 1)$

$$= p' - q' + r' = 2$$

3 ด้าน	3 ด้าน	3 ด้าน
1 หน้า	2 หน้า	3 หน้า
simple	simple	ไม่ใช่ simple
q=3, r=1	q=3, r=2	q=3, r=3
3r=3, 2q=6	3r=6, 2q=6	3r=9, 2q=6
3r < 2q	3r = 2q	3r > 2q

ทฤษฎี 2.15 ให้ G เป็น planar simple graph ซึ่งมี p จุดยอด และ q เส้นอยู่บนระนาบซึ่งมี r หน้า สมมติ $q > 1$ แล้ว $3r \le 2q$

ตัวอย่าง 2.36



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มี 5 จุดยอด 10 เส้น

จาก Euler's theorem $p - q + r = 2$

$5 - 10 + r = 2$ แล้ว $r = 7$

ถ้าเป็น planar simple graph : $3r <= 2q$

$3*7 <= 2*10$ ไม่เป็นจริง ดังนั้นกราฟไม่สามารถอยู่บนระนาบเดียวกันได้

ตัวอย่าง 2.37 สมมติ มี connected planar simple graph ที่มี 20 จุดยอด แต่ละจุดยอดมีดีกรี 3 กราฟนี้จะมีทั้งหมดกี่หน้า

วิธีทำ กราฟมี 20 จุดยอด : $v = 20$

แต่ละจุดยอดมีดีกรี 3

ผลรวมของดีกรีของจุดยอด $= 3*20 = 60$

ผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอด เป็น 2 เท่าของจำนวนด้าน

$2e = 60 \rightarrow e = 30$

จาก Euler's formula : $p - q + r = 2$

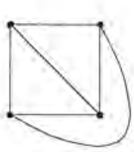
$20 - 30 + r = 2$

$r = 2 + 30 - 20 = 12$

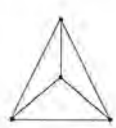
ดังนั้นกราฟนี้มีทั้งหมด 12 หน้า

connected planar simple graph จะแบ่งระนาบออกเป็นบริเวณต่างๆ เรียกว่า หน้า จะมีหน้าเกิดขึ้นได้ต้องมีอย่างน้อย 3 ด้าน (เป็น simple graph ไม่มี multiple edges และไม่มีลูป)

3 จุดยอด, 3 ด้าน, 2 หน้า



4 จุดยอด
6 ด้าน 4 หน้า



4 จุดยอด
6 ด้าน 4 หน้า

4 จุดยอด
6 ด้าน 4 หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ด้าน	หน้า	2*ด้าน	3 *หน้า	
3	2	6	6	
6	4	12	12	$\rightarrow$ 2*ด้าน $\geq$ 3*หน้า
4	2	8	6	

ทฤษฎี 2.16 ให้ G เป็น planar simple graph ที่มี p จุดยอด และ q เส้นอยู่บนระนาบที่มี r หน้า เมื่อ $q > 1$ แล้ว $2q \geq 3r$

บทแทรก ถ้า G เป็น connected planar simple graph ที่มี q ด้านและ p จุดยอด เมื่อ $p \geq 3$ แล้ว $q <= 3p - 6$

พิสูจน์ จาก $2q \geq 3r$

จะได้ $(2/3)q \geq r$

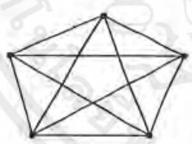
จาก $p - q + r = 2$; Euler Theorem

หรือ $r = q - p + 2$

จะได้ $q - p + 2 \leq (2/3)q$

$q/3 \leq p - 2$ หรือ $q \leq 3P - 6$

ตัวอย่าง 2.38



พิจารณา กราฟ K_5 มี 5 จุดยอด 10 ด้าน

$q = 10, p = 5$

$3p - 6 = 3*5 - 6 = 9$

แล้ว $q < = 3p - 6$

ดังนั้น K_5 ไม่เป็น planar graph

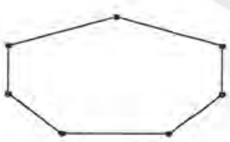
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทแทรก connected planar simple graph ที่มี q ด้าน และ p จุดยอด ซึ่ง $p \geq 3$ และไม่มี circuit ที่มี length 3 แล้ว $q <= 2p - 4$

พิสูจน์ ไม่มีลูป ไม่มี multiple edges และไม่มี simple circuit ที่มี length 3 ดังนั้น circuit จะมีอย่างน้อย 4 ด้าน นั่นคือ

$$2q \geq 4r$$

ไม่มี simple circuit ที่มี length 3

	จุดยอด	ด้าน	หน้า	2*ด้าน	4*หน้า
	4	4	2	8	8
	5	5	2	10	8
	6	6	2	12	8
	6	7	3	14	12
	7	7	2	14	8

2*ด้าน $\geq$ 4*หน้า

$2q \geq 4r$

จาก $2q \geq 4r$

จะได้ $r \leq q/2$

จาก $r = q - p + 2$

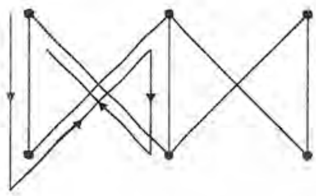
จะได้ $q - p + 2 \leq q/2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$q/2 \le p - 2$$

หรือ $$q \le 2p - 4$$

ตัวอย่าง 2.39 พิจารณารูป $K_{3,3}$



ไม่มี circuit ที่มี length 3

มี 6 จุดยอด และ 9 ด้าน

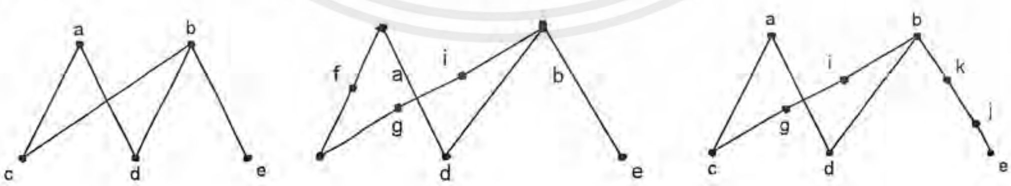
$q = 9, p = 6$

$2p - 4 = 2*6 - 4 = 8$

แล้ว $q \le 2p - 4$ ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $K_{3,3}$ เป็น nonplanar graph

จะพบว่า $K_{3,3}$ และ K_3 ไม่เป็น planar
ดังนั้น กราฟจะไม่เป็น planar ถ้ามี $K_{3,3}$ หรือ K_3 เป็น subgraph
ถ้ากราฟเป็น planar แล้ว โดยการตัดด้าน {u, v} ใดๆ ของกราฟออกหนึ่งด้าน แล้วเติมจุดยอดใหม่ w ลงไป แล้วจะมีด้าน {u, w} และ {w, v} เกิดขึ้น การกระทำนี้เรียกว่า elementary subdivision
กราฟ $G_1 = (V_1, E_1)$ และ $G_2 = (V_2, E_2)$ เรียกว่า คล้ายแบบ (homeomorphic) ถ้าสามารถลดรูปไปสู่กราฟรูปเดียวกันโดยลำดับของ elementary subdivision



G_2 และ G_3 homeomorphic กัน จาก G_1

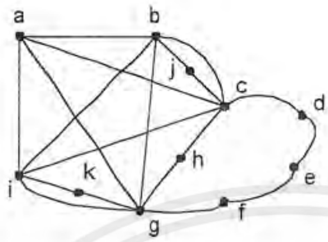
บทแทรก ให้ G เป็น connected planar simple graph แล้ว G จะมีอย่างน้อย 1 จุดยอด ที่มีเป็นดีกรี 5 หรือน้อยกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎี 2.17 (KURATOWSKI'S THEOREM)

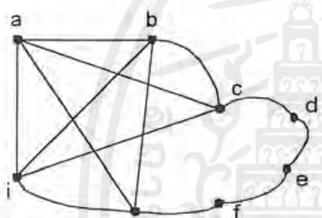
กราฟ G เป็นกราฟที่ทำให้อยู่บนระนาบเดียวกันได้ ก็ต่อเมื่อ G ไม่มี subgraph ที่คล้ายแบบ (homeomorphic) กับ K_5 หรือ $K_{3,3}$

ตัวอย่าง 2.40 กราฟดังรูปเป็น planar หรือไม่



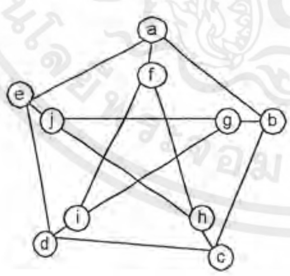
G

โดยการตัดด้านที่ incident กับ h, j, k จะได้ H ซึ่ง homemorphic กับ K_5

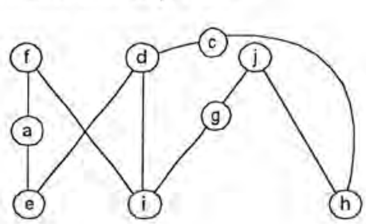


เนื่องจากโดย sequence of elementary subdivision เติม d, e, f ที่ K_5 ได้ H ดังนั้น G เป็น nonplanar

ตัวอย่าง 2.41 กราฟดังรูปเป็น planar graph หรือไม่



ตัด b และสามด้านที่มี b เป็นจุดปลาย



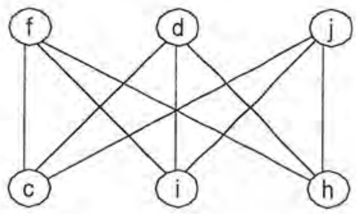
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลบ {d, h} เติม {d, c} และ {c, h}

ลบ {f, e} เติม {f, a} และ {a, e}

ลบ {i, j} เติม {i, g} และ {g, j}

ใน $K_{3,3}$ จะได้ H



ดังนั้น G ไม่อยู่บนกราฟเดียวกันได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

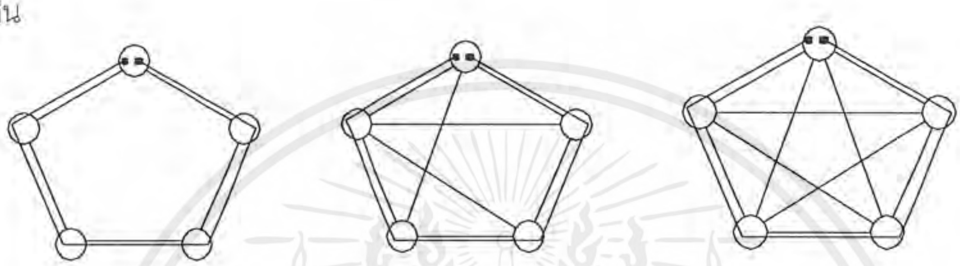
2.4 วงจรฮามิลโทเนียน (Hamiltonian Circuit)

Hamiltonian circuit คือ cycle ในกราฟซึ่งผ่านทุกจุดยอดเพียงครั้งเดียวเท่านั้น (ยกเว้นจุดเริ่มต้นและสิ้นสุดอาจซ้ำกันได้)

หรือ path $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ในกราฟ G = (V, E) เรียกว่า Hamilton path ถ้า V = { $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$} และ $x_i \neq x_j$ เมื่อ $0 \leq i < j \leq n$

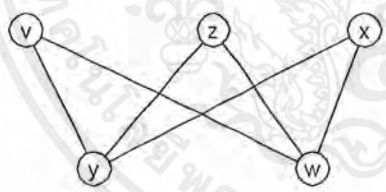
circuit $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ เมื่อ n > 1 ในกราฟ G = (V, E) เรียกว่า Hamilton circuit ถ้า $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ เป็น Hamilton path

เช่น

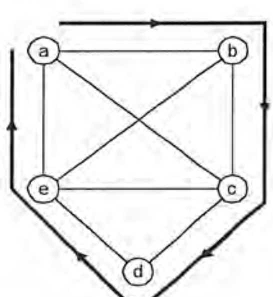


วงจรออยเลอร์ จะผ่านด้านทุกด้าน โดยผ่านแต่ละด้านเพียงครั้งเดียว
วงจรฮามิลโทเนียน จะผ่านจุดยอดทุกจุด โดยผ่านแต่ละจุดเพียงครั้งเดียว

ตัวอย่าง 2.42 กราฟที่กำหนดมี Hamiltonian cycle หรือไม่

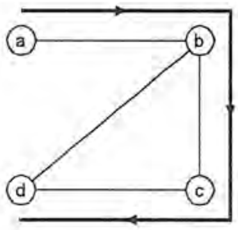


เริ่มจาก v มีสองทิศทางที่จะไป คือ ไป y หรือ w ถ้าเลือก v → y → z → w จาก w ถ้าเลือก v เป็น cycle แต่เหลือ x จาก w ถ้าเลือกไป x ไม่สามารถเลือกทิศทางกลับไป v โดยที่ไม่ใช้จุดยอดซ้ำ ดังนั้น กราฟที่กำหนดไม่เป็น hamiltonian cycle แต่มี hamilton path v, y, z, w, x หรือ y, w, x, y, z

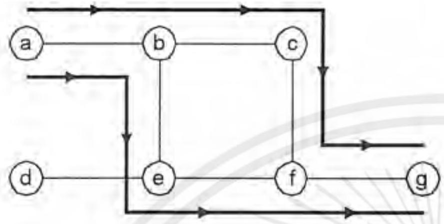


Hamiltonian circuit คือ a, b, c, d, e, a

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



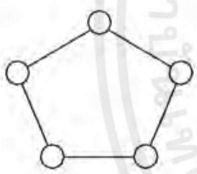
เลือก path a, b, c, d ไม่มีจุดยอดซ้ำ ใช้ทุกจุดยอดเป็น Hamilton path แต่ไม่สามารถกลับไป a โดยไม่ใช้ {a, b} คือ b ซ้ำ ดังนั้นไม่เป็น Hamiltonian circuit



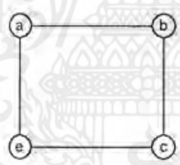
path a, b, c, f, g มี d และ e เหลือ path a, b, e, f, g มี c และ d เหลือ ไม่มี Hamiltonian path และ Hamiltonian cycle

จากตัวอย่าง กราฟที่มีจุดยอดที่มีดีกรี 1 ไม่มี Hamilton circuit แต่อาจมี Hamilton path พิจารณา graph ต่อไปนี้

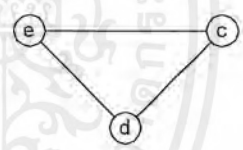
C5



C4



C3



ทุกกราฟเป็น Hamiltonian circuit และแต่ละจุดยอดมีดีกรี 2 ดังนั้น C_2 เป็น Hamitlon circuit เมื่อ $n \geq 3$

ทฤษฎี 2.18 ถ้า G เป็นกราฟที่มี n จุดยอด เมื่อ $n \geq 3$ แล้ว

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

สำหรับแต่ละคู่ของจุดยอด v และ w ที่ไม่เป็น dajacent กัน แล้ว G เป็นHamiltonian

บทแทรก ถ้า G เป็นกราฟที่มี n จุดยอด เมื่อ $n \geq 3$ และถ้า

$$\deg(v) \geq n/2$$

สำหรับทุกจุดยอด v แล้ว G เป็น Hamiltonian

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.36 connected digraph D จะเป็น Hamiltonian ถ้า D (directed) cycle ที่ รวมทุกจุดยอดของ D แล้ว cycle นั้นคือ Hamiltonian cycle ของ D

ทฤษฎี 2.19 ให้ D เป็น simple digraph ที่มี n จุดยอด ถ้า

$$\text{outdeg } v + \text{indeg } w \geq n$$

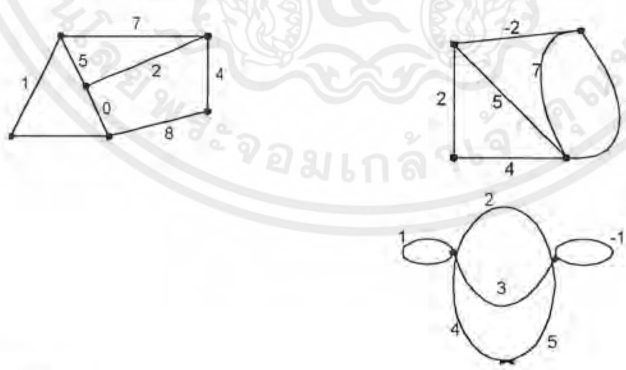
สำหรับทุกคู่จุดยอด v และ w ซึ่ง v ไม่เป็น adjacent ไปยัง w แล้ว D เป็น Hamiltonian

การพิจารณาว่ากราฟใดเป็นวงจรอามิลโทเนียนหรือไม่นี้ค่อนข้างยาก การศึกษาเรื่องนี้มาจาก the traveling salesman problem คือการเดินทางไปทุกอำเภอในจังหวัด โดยเดินผ่านแต่ละอำเภอเพียงครั้งเดียว

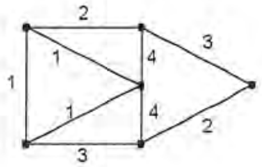
ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้ เนื่องจากแต่ละอำเภอเชื่อมด้วยถนนที่มีความยาวต่างๆ กัน ปัญหานี้ก็คือ การหาเส้นทางที่มีความยาวน้อยที่สุด เพื่อที่จะลดค่าใช้จ่ายในการเดินทางนั่นเอง

นิยาม 2.37 weighted graph คือกราฟ G ซึ่งมี real-valued function W ที่เรียกว่า weight function กำหนดเซตของด้าน

ตัวอย่าง 2.43 ต่อไปนี้คือตัวอย่าง weight graph จำนวนบนด้านแต่ละด้านคือ

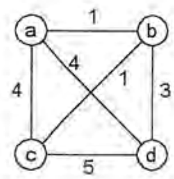


weighted function

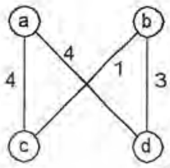


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.44 กำหนด weighted graph based on the complete graph K_4



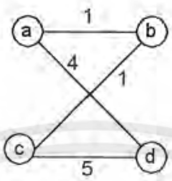
มี Hamilton cycle 3



a, c, b, d, a

$4 + 1 + 3 + 4 = 12$

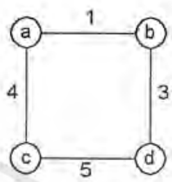
(a)



a, b, c, d, a

$1 + 1 + 5 + 4 = 11$

(b)



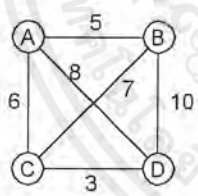
a, b, d, c, a

$1 + 3 + 5 + 4 = 13$

(d)

ถ้า a, b, c, d เป็นอำเภอและตัวเลขบนแต่ละด้านแทนระยะทางระหว่างแต่ละอำเภอ แล้วควรจะเลือกเดินทางตาม Hamilton (b)

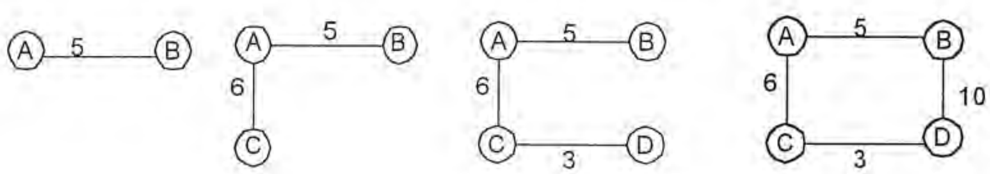
ตัวอย่าง 2.45 กำหนด



จะเลือก Hamilton cycle อย่างไรจึงจะได้ผลรวมของ weighted function น้อยที่สุด

วิธีทำ

เลือก B เป็นจุดเริ่มต้น แล้วให้ B เป็น B' เพื่อแสดงว่าใช้ B ไปแล้ว ที่จุดเริ่มต้นให้ w = 0 จาก B มีด้าน 3 ด้าน เลือกด้านที่มี weighted น้อยที่สุด คือ 5 ดังนั้นจาก B ต้องไป A



path B, A $\qquad W = 0 + 5 = 5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากจุด A ให้ A เป็น A'

จาก A มี 3 ด้าน เนื่องจากใช้ B ไปแล้ว จึงเหลือ 2 ด้าน เลือกด้านที่ weight น้อยที่สุด คือ 6 ดังนั้นจาก A ต้องไป C

Path B, A, C

W = 5 + 6 = 11

จากจุด C ให้ C เป็น C'

จาก C มี 3 ด้าน แต่เนื่องจากใช้ A และ B ไปแล้ว จึงเหลือทางเลือกเดียว คือจาก C ไป D weight คือ 3

Path B, A, C, D

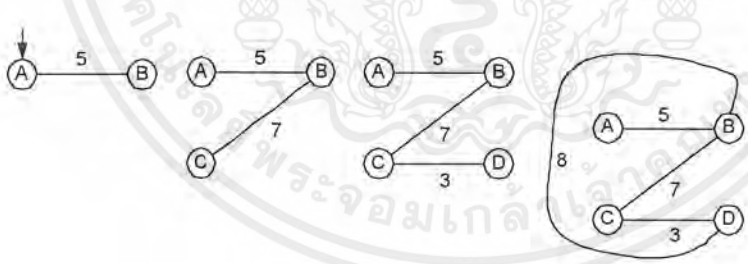
W = 11 + 3 = 14

จาก D มี 3 ด้าน แต่เนื่องจากใช้ A, B, C ใช้ไปแล้ว ดูว่าตัวใดเป็นตัวเริ่มต้น เลือกตัวนั้น ดังนั้นจาก D ต้องไป B

Path B, A, C, D, B

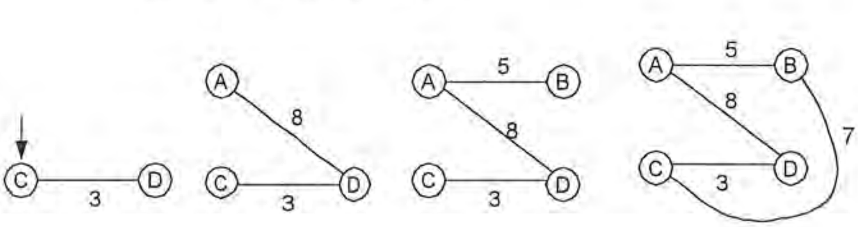
W = 14 + 10 = 24

ได้ Hamilton cycle ได้ผลรวม weighted function แต่ไม่รู้ว่าน้อยที่สุดหรือไม่ ต้องทำซ้ำในทำนองเดียวกันโดยการเลือก A, C และ D เป็นจุดเริ่มต้น



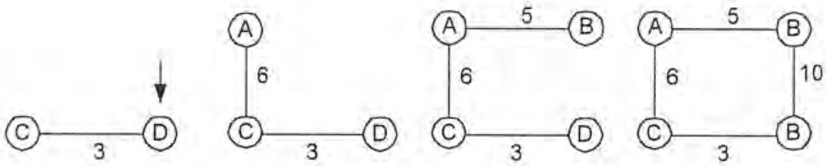
path A, B, C, D, A

W = 5 + 7 + 3 + 8 = 23



path C, D, A, B, C W = 3 + 8 + 5 + 7 = 23

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



path D, C, A, B, D

W = 3 + 6 + 5 + 10 = 24

จะพบว่า path ที่เริ่มจาก A และ C คือ path เดียวกัน และW = 23 ในขณะที่ path ที่เริ่มจาก B และ D คือ path เดียวกัน และ W = 24

ดังนั้น Hamiltonian cycle คือ A, B, C, D, A หรือ C, D, A, B, C และ weighted ที่น้อยที่สุดคือ 23

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 การลงสีกราฟและการลงสีด้าน (Graph Coloring and Edge Coloring)

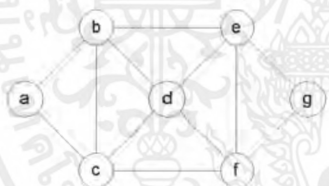
2.5.1 Graph Coloring

กำหนดกราฟ G ที่มี n จุด ต้องการระบายสีจุดของกราฟโดยให้จุดที่ประชิดกันมีสีต่างกัน จะเกิดปัญหาว่าจะใช้จำนวนสีน้อยมารสุดกี่สีจึงจะเพียงพอ จำนวนสีน้อยสุดนี้เรียกว่า chromatic number

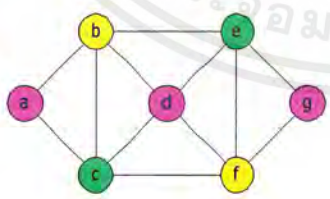
นิยาม 2.38 ให้ G เป็นกราฟที่ไม่มีลูป จะกล่าวว่า G เป็น k-colourable ถ้าสามารถระบายสีแต่ละจุดของ G ด้วยสีใดสีหนึ่งในจำนวน k สีที่กำหนดให้ โดยมีเงื่อนไขว่าจุดสองจุดที่ประชิดกันต้องมีสีต่างกัน

นิยาม 2.39 ถ้า G เป็น k colourable แต่ไม่เป็น k-1 colourable แล้ว จะกล่าวว่า G เป็น k-chromatic และเรียก k ว่า chromatic number และจะใช้สัญลักษณ์ X(G) แทน chromatic number ของ G

ตัวอย่าง 2.46 จงหา chromatic numbers ของกราฟดังรูป



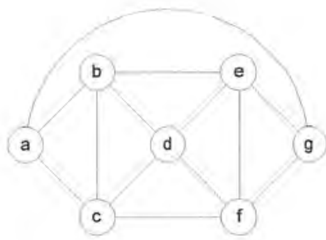
วิธีทำ X(G) = 3 และสามารถระบายสีได้ดังนี้

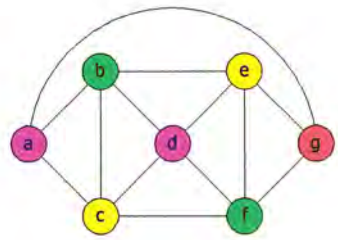


ตัวอย่าง 2.47 จงหา chromatic numbers ของกราฟดังรูป เมื่อมีด้าน ag

วิธีทำ X(G) = 4 และสามารถระบายสีได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้





ทฤษฎี 2.20 (BROOKS' THEOREM)

ให้ G เป็น connected simple graph ซึ่งค่าที่มากสุดของดีกรีของจุดยอดเป็น d ถ้า G ไม่เป็น cycle ที่มีจุดยอดเป็นจำนวนคู่ และG ไม่เป็น complete graph แล้ว

$$X(G) \leq d$$

ทฤษฎี 2.21 ทุก simple graph เป็น 6 - colourable

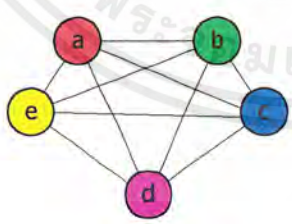
ทฤษฎี 2.22 ทุก simple planar graph เป็น 5-colourable

ทฤษฎี 2.23 (Appel and Haken, 1976)

ทุก simple planar graph เป็น 4-colourable

ตัวอย่าง 2.48 จงหา chromatic number ของ K_5

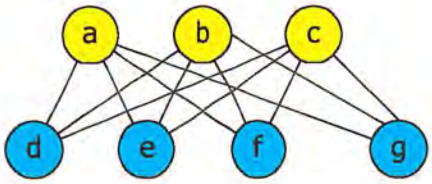
วิธีทำ $X(K_5) = 5$ และสามารถระบายสีได้ดังนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.49 จงหา chromatic number ของ $K_{3,4}$

วิธีทำ $X(K_{3,4}) = 2$ และสามารถระบายสีได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2.50 จงหา chromatic number ของ C_6 และ C_5

วิธีทำ $X(C_6) = 2$, $X(C_5) = 3$ และสามารถระบายสีได้ดังนี้

จากตัวอย่าง	จุดยอดที่มีดีกรีสูงสุด	chromatic no.	p+1
2.46	4	3	5
2.47	4	4	5
2.48	4	5	5
2.49	4	2	5
2.50	2	2	3

chromatic no. $\leq p + 1$

ทฤษฎี 2.24 ให้ G เป็นกราฟที่ไม่มีลูป และดีกรีของจุดยอดที่มากที่สุดใน G เท่ากับ p แล้ว G จะเป็น p+1 - colourable

ทฤษฎี 2.25 ถ้า G เป็นกราฟที่ไม่มีลูป และดีกรีของจุดยอดที่มากที่สุดใน G เท่ากับ p แล้ว chromatic no. ของ G $X(G) \leq p + 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

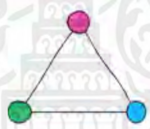
chromatic no. สำหรับ K_n

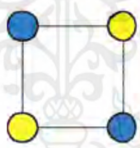
เนื่องจาก K_n คือ simple graph ที่มีด้านหนึ่งด้านเชื่อมคู่จุดยอดที่แตกต่างกัน ดังนั้น เมื่อกำหนดสีให้จุดยอดที่ 1 แล้ว อีก n-1 ที่เหลือ ต้องการสีที่แตกต่างกัน n-1 สี นั่นคือ chromatic no. K_n คือ $X(K_n) = n$

chromatic no. สำหรับ $K_{m,n}$

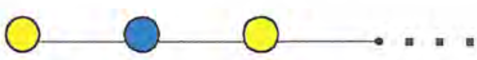
$K_{m,n}$ คือกราฟซึ่งจุดยอด $V = V_1 \cup V_2$ เมื่อ V_1 มีสมาชิก m ตัว, V_2 มีสมาชิก n ตัวและ $V_1 \cap V_2 \neq \Phi$ แต่ละจุดยอดใน V_1 เชื่อมกับแต่ละจุดยอดใน V_2 เพียงหนึ่งด้านเท่านั้น ดังนั้นกำหนดสีที่ 1 ให้กับทุกจุดยอดใน 1 V_1 ซึ่งมี m จุด และกำหนดสีที่ 2 ให้กับทุกจุดยอดใน V_2 ซึ่งมี n จุด เมื่อลากด้านจะพบว่าจุดปลายของแต่ละด้านมีสีต่างกันเสมอ นั่นคือ chromatic no สำหรับ $K_{m,n}$ $X(K_{m,n}) = 2$

chromatic no. สำหรับ C_n

ถ้า n = 3  $X(C_n) = 3$

ถ้า n = 4  $X(C_n) = 2$

ในการกำหนดสีสำหรับ C_n นี้ ให้เลือกจุดยอด 1 จุด กำหนดสีที่ 1 ลงไปที่จุดที่ 1 นี้ แล้วเดินตามกราฟในทิศทวนเข็นนาฬิกาใส่สีที่ 2 ลงไปที่จุดที่ 2 นี้ แล้วเดินต่อไปโดยใส่สีที่ 1 ลงไปที่จุดที่ 3 แล้วใส่สีที่ 2 ลงไปที่จุดที่ 4 ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ



ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะพบว่าใช้สีเพียง 2 สีก็พอแล้ว แต่ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะพบว่า จุดยอดที่ n จะมีสีเดียวกับจุดยอดที่ 1 ดังนั้นในกรณี n เป็นเลขคี่จุดยอดที่ nต้องใส่สีที่ 3 จึงต้องใช้ 3 สี

นั่นคือ chromatic no. สำหรับ $K_{m,n}$ คือ

$X(C_n) = 2$ ถ้า n เป็นจำนวนเลขคี่

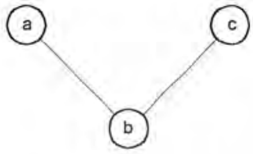
และ $X(C_n) = 2$ ถ้า n เป็นจำนวนเลขคู่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.1.1 **โครมาทิกโพลิโนเมียน** (Chromatic Polynomial)

นิยาม 2.40 ให้ G simple graph และให้ $P_G(k)$ แทนจำนวนวิธีของการระบายสีจุดของ G ด้วยk สี โดยที่จุดที่ประชิดกันต้องมีสีต่างกันและจะเรียก P_G ว่า chromatic polynomial ของG

ตัวอย่าง 2.51 ให้ G เป็นกราฟกังรูป



ถ้ามีสีทั้งหมด k สี

จุด b สามารถระบายสีได้ k สี

จุด a และจุด c สมารถระบายสีได้ k-1 สี

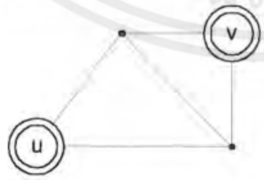
ดังนั้น $P_G(k) = k(k-1)(k-1)$

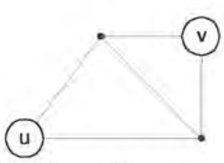
เป็นจำนวนวิธีของการระบายสีจุดยอดของ G ด้วยสี kสี

ทฤษฎี 2.26 ให้ G เป็น simple graph และให้ u และ v เป็นจุดยอดที่ไม่ประชิดกันใน G ให้ G_1 เป็นกราฟที่ได้จาก G โดยการลากเส้นระหว่างจุด u และ v และให้ G_2 เป็น simple graph ที่ได้จาก G โดยให้จุด u และ v ซ้อนกัน (ถ้ามี multiple edge เกิดขึ้นให้รวมเป็นเส้นเดียว) แล้วจะได้ว่า

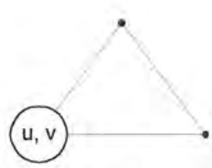
$$P_G(k) = P_{G1}(k) + P_{G2}(k)$$

ตัวอย่าง 2.52 กำหนดกราฟ G ดังรูป จะได้ $P_G(k) = k(l-1)(k-2)^2$





G1



G2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$P_{G1}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$

$P_{G2}(k) = k(k-1)(k-2)$

$P_G(k) = PG1(k) + PG2(k) = k(k-1)(k-2)(k-3+1)$

พิสูจน์

เนื่องจาก u และ v เป็นจุดที่ไม่ประชิดกัน จึงสามารถระบายสีที่จุด u และ v ด้วยสีต่างกันหรือสีเดียวกันได้ ดังนั้นการพิสูจน์จะต้องพิจารณา 2 กรณี คือ

กรณี 1 ถ้า u และ v มีสีต่างกัน เมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม u และ v ใน G แล้ว จำนวนวิธีระบายสีของจุดใน G ยังคงเดิม นั่นคือ จำนวนวิธีของการระบายสีจุดยอดของ G จะเท่ากับ P_{G1}

กรณี 2 ถ้า u และ v มีสีเหมือนกัน เมื่อให้ u และ v ซ้อนกันแล้ว จำนวนวิธีระบายสีของจุดยอดใน G ยังคงเดิม นั่นคือ จำนวนวิธีของการระบายสีจุดยอดของ G จะเท่ากับ $P_{G2}(k)$

โดยการรวมกรณีทั้งสอง จะได้จำนวนวิธีของการระบายสีจุยอดของ G คือ

$$P_G(k) = P_{G1}(k) + P_{G2}(k)$$

สามารถนำความรู้เรื่อง chromatic number และ chromatic polynomial มาใช้ในการจัดตารางการทำงาน เช่น การจัดตารางสอน

ในการจัดเวลาให้กับวิชาต่างๆ จะพบว่ามีบางวิชาที่ไม่สามารถจัดเวลาเดียวกันได้ เพราะอาจมีนักศึกษาที่ต้องการเรียนทั้งสองวิชา หรือสองวิชานั้นมีผู้สอนคนเดียวกัน ปัญหาก็คือ จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะจัดตารางสอนโดยมีเงื่อนไขดังกล่าว

ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้ จะสร้างกราฟโดยใช้จุดแทนวิชาต่างๆ และลากเส้นเชื่อมระหว่างคู่ของจุดที่แทนวิชาที่ไม่สามารถจัดให้ในเวลาเดียวกันได้ เพื่อที่จะได้ระบายสีที่จุดคู่นี้ด้วยสีที่ต่างกัน ซึ่งแสดงว่าต้องจัดวิชาทั้งสองในเวลาต่างกัน

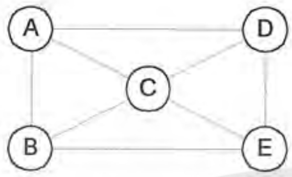
แล้วปัญหาการจัดเวลาให้กับวิชาต่างๆ ตามเงื่อนไขข้างต้นจะเปลี่ยนเห็นปัญหาการระบายสีจุดของกราฟโดยให้จุดที่ประชิดกันมีสีต่างกัน

ตัวอย่าง 2.53 มีคาบเวลา 4 คาบ ในวันจันทร์-พุธ-ศุกร์ คาบที่ 1 เวลา 8.00-9.00, คาบที่ 2 เวลา 9.00-10.00, คาบที่ 3 เวลา 10.00-11.00, คาบที่ 4 เวลา 11.00-12.00 ต้องการจัดเวลาให้กับวิชา A, B, C, D, E กำหนดให้วิชา 2 วิชาที่ไม่สามารถจัดในเวลาเดียวกันได้มีดังต่อไปนี้ A และ B, A และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

C, A และ D, B และ E, B และ C, C และ D, C และ E, D และ E จงหาว่าจัดตารางสอนตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นได้หรือไม่ และถ้าได้ จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดตารางสอนนี้

วิธีทำ เปลี่ยนปัญหาให้อยู่ในรูปกราฟ โดยให้จุดยอดแทนวิชา ด้านแทนวิชา / วิชาที่จัดในเวลาเดียวกันไม่ได้



C เป็นจุยอดที่มีดีกรีสูงสุด คือ p = 4 จะได้ p + 1 = 5 ดังนั้น chromatic no. $\leq$ 5

กำหนดสีที่ 1 ให้ A จาก A มีด้าน 3 ด้าน ไป B, C, D ดังนั้นกำหนดสีที่ 2 ให้ B จาก B มีด้าน 3 ด้าน A,C, E แต่ A กำหนดสีแล้ว จึงพิจารณา ที่ C และ E เนื่องจาก C มีด้านต่อกับ A ดังนั้น C ต้องมีสีแตกต่างจาก A กำหนดสีที่ 3 ให้ C แต่จาก E ไม่มีด้านต่อกับ A ดังนั้น E มีสีเดียวกับ A ขณะสีใช้ไปแล้ว 3 สี

ขณะนี้ใช้ไปแล้ว 3 สี สีที่ 1 ที่ A และ E

สีที่ 2 ที่ B และ D

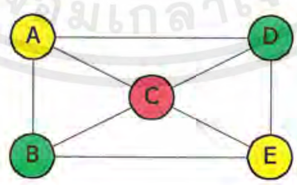
สีที่ 3 ที่ C

ขาดเพียงจุด D ที่ยังไม่กำหนดสี จาก D มีด้านไป A, C, E ดังนั้น D ต้องมีสีต่างจากที่ A, C, E และ D ไม่มีด้านไป B ดังนั้น สีที่ D มีสีเดียวกับสีที่ B ได้ ดังนั้นใช้เพียง 3 สี ในการระบายสีจุดยอดตามความสัมพันธ์ที่โจทย์กำหนด คือ

สีที่ 1 ที่ A และ E

สีที่ 2 ที่ B และ D

สีที่ 3 ที่ C



ดังรูป chromatic number คือ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้เวลาที่แตกต่างกันจะแทนด้วยสีต่างกัน จากโจทย์กำหนด 4 คาบเวลา ในขณะที่ X(G) = 3 จึงสามารถจัดตารางสอนได้ (ถ้าโจทย์กำหนดเวลาน้อยกว่า X(G) จะไม่สามารถจัดตารางสอนได้) แบบหนึ่งของตารางสอน คือ

คาบ 1 วิชา A และ E

คาบ 2 วิชา B และ D

คาบ 3 วิชา C

จำนวนวิธีของการจัดตารางสอนจะเท่ากับ $P_G(k)$ จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะได้

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k^2-5k+7)$$

ถ้า k = 3 จะได้ว่า

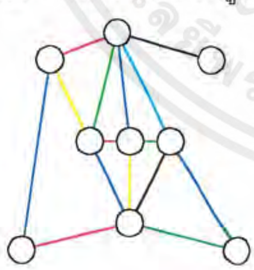
$$P_G(k) = 3(2)(1)(9-15+7) = 6$$

2.5.2 Edge Coloring

นิยาม 2.41 กราฟ G เป็น k-edge-colourable ถ้าสามารถระบายสีเส้นของ G ด้วย k สี โดยที่เส้นที่ประชิดกันมีสีต่างกัน

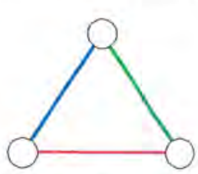
นิยาม 2.42 ถ้ากราฟ G เป็น k-edge-colourable แต่ไม่เป็น k-1 edge-colourable แล้วจะกล่าวว่า chromatic index ของ G มีค่าเท่ากับ k เขียนแทนด้วย $X_e(G) = k$

ตัวอย่าง 2.54 กำหนดกราฟดังรูป เป็นกราฟที่ $X_e(G) = 5$



ดีกรีของจุดยอดที่มีค่ามากที่สุด คือ 5

ตัวอย่าง 2.55 กำหนดกราฟดังรูป $X_e(G) = 3$



จุดยอดที่มีดีกรีมากที่สุดคือ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าดีกรีของจุดยอดที่มากที่สุดใน G คือ p แล้ว

$X_e(G) \geq p$

ทฤษฎี 2.27 (VIZING'S THEOREM)

ถ้า G กราฟที่ไม่มีลูป และดีกรีของจุดที่มากที่สุดเท่ากับ p แล้ว

$p \leq X_e(G) \leq p+1$

ทฤษฎี 2.28 (VIZING'S THEOREM – EXTENDED VERSION)

ถ้า G เป็นกราฟที่มี degree สูงสุดเป็น n และจำนวนด้านที่มากสุดที่เชื่อมระหว่าง 2 จุดยอด เป็น h

$d \leq X_e(G) \leq d + h$

ตัวอย่าง 2.56 ถ้า G เป็นกราฟดังรูป แล้ว d = 6 และ h = 3 จะได้ขอบเขตเป็น $6 \leq X_e(G) \leq 9$ ซึ่งความจริง $X_e(G) = 8$

ทฤษฎี 2.29 (Shamon's Theorem)

ถ้า G เป็นกราฟที่มี degree สูงสุดเป็น d แล้ว

$d \leq X_e(G) \leq 3d/2$

ตัวอย่าง 2.57 ให้ G เป็นกราฟด้านบน แล้ว d = 6 ดังนั้น $6 \leq X_e(G) \leq 9$

ถ้า d เป็นเลขคี่แล้ว 3d/2 ไม่เป็นจำนวนเต็ม ในกรณีนี้เราจะใช้ 3d/2 – 1/2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎี 2.30 สำหรับ complete graph K_n

$X(K_n) = n-1$ ถ้า n เป็นเลขคู่

$X(K_n) = n$ ถ้า n เป็นเลขคี่

ทฤษฎี 2.31 ถ้า G เป็น bipartite graph ที่มีดีกรีของจุดที่มากที่สุดเท่ากับ p แล้ว X(G) = p

ทฤษฎี 2.32 $X_e(K_{m,n}) = \max(m, n)$

ตัวอย่าง 2.58 โรงเรียนแห่งหนึ่งมีครู 7 คน นักเรียน 10 ห้อง โรงเรียนแห่งนี้มีการเรียนการสอน 5 วันต่อสัปดาห์ กำหนดให้ครูแต่ละคน x_i ; $1 \le i \le 7$ สอนนักเรียนแต่ละห้อง y_j ; $1 \le j \le 10$ เป็นเวลา P_{ij} คาบ ดังแสดงใน metric

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} \end{array} \\ P_0 = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

รวม 19 19 19 18 17 18 18 18 17 17 = 180

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีจัดตารางการเรียนการสอน

1. หาจำนวนคาบที่มากที่สุดในการสอนของครู จะได้คำตอบคือ 26 คาบ

   หาจำนวนคาบที่มากที่สุดในการเรียนของนักเรียน จะได้คำตอบคือ 19 คาบ

2. เพื่อให้การจัดตารางเวลาง่ายขึ้น จะแบ่งเวลา 26 คาบใน 5 วัน ออกเป็นจำนวนคาบเฉลี่ยในใน 1 วัน

   ดังนั้นครูคนที่สอน 26 คาบ จะสอนโดยเฉลี่ยวันละไม่เกิน 6 คาบ และนักเรียนที่เรียน 19 คาบ จะเรียนโดยเฉลี่ยไม่เกินวันละไม่เกิน 6 คาบ

   เวลารวมที่ครูแต่ละคนสอน ซึ่งเท่ากับเวลารวมที่นักเรียนแต่ละห้องเรียน คือ 180 คาบ เวลารวมเฉลี่ย คือ 36 คาบ

   กำหนดจำนวนคาบที่ครูแต่ละคนจะต้องสอน และนักเรียนที่จะต้องเรียนใน 1 วัน คือ การกระจายเมทริกซ์ P_0 5 เมทริกซ์ย่อย P_1, P_2, P_3, P_4 และ P_5 โดย

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = P_0$$

		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวมเวลาที่ครูแต่ละคนสอน	
	X_1	3	2	1	4	3	1	2	4	3	3	26	
	X_2	2	4	5	2	3	3	3	0	2	1	25	วัน
	X_3	4	3	3	4	0	2	2	3	2	3	26	
P_o =	X_4	0	2	3	2	4	3	2	4	2	4	26	
	X_5	6	1	0	3	3	4	3	1	3	2	26	
	X_6	3	4	3	1	2	0	3	2	3	4	25	
	X_7	1	3	4	2	2	5	3	4	2	0	26	
รวมเวลาที่นักเรียนแต่ละห้องเรียน		19	19	19	18	17	18	18	18	17	17	$\boxed{180}$	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
		X_1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	5
		X_2	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	5
วันจันทร์		X_3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	6
P_1	=	X_4	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	5
		X_5	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	5
		X_6	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	5
		X_7	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	5
รวม			4	4	4	3	3	4	3	4	3	4	36

			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
		X_1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	5
		X_2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	5
วันอังคาร		X_3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	5
P_2	=	X_4	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	6
		X_5	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	5
		X_6	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	5
		X_7	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	5
รวม			4	4	4	4	4	3	3	3	4	3	36

			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
		X_1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	5
		X_2	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	5
วันพุธ		X_3	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	5
P_3	=	X_4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	5
		X_5	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	5
		X_6	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	5
		X_7	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	6
รวม			4	4	3	3	4	3	4	4	4	3	36

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
	X_1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	6
	X_2	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	5
วันพฤหัสบดี	X_3	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	5
P_4 =	X_4	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	5
	X_5	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	5
	X_6	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	5
	X_7	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	5
รวม		3	4	4	4	3	4	4	4	3	3	36

		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
	X_1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	5
	X_2	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	5
วันศุกร์	X_3	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	5
P_5 =	X_4	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	5
	X_5	2	0	0	0	1	1	0	0	1	1	6
	X_6	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	5
	X_7	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	5
รวม		4	3	4	4	3	4	4	3	3	4	36

เมื่อพิจารณาจากเมทริกซ์ P_i จะพบว่า ในแต่ละเมทริกซ์จะมีครูสอนมากที่สุด 6 คาบใน 1 วัน และนักเรียนเรียนมากที่สุด 4 คาบใน 1 วัน

ถ้าเขียนกราฟโดยจุดยอดแทนครูแต่ละคน และจุดยอดแทนนักเรียนแต่ละห้อง จะได้ bipatite graph โดย $V = V_1 \cup V_2$ เมื่อ $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$ และ $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{10}\}$ โดย $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ และด้านแทนการเข้าสอนแต่ละคาบของครูในแต่ละห้องเรียน

ครูสอนมากที่สุด 6 คาบ ดังนั้นดีกรีสูงสุดของจุดยอด คือ 6 จะได้ว่า $X_e(G_i) = 6$

นั่นคือ ต้องใช้อย่างน้อย 6 สีที่แตกต่างกัน ระบายเส้นของ G_i โดยเส้นประชิดกันมีสีต่างกัน

จะได้ แบบหนึ่งของตารางการเรียนการสอนในแต่ละวันดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
	X_1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	5
	X_2	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	5
วันจันทร์	X_3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	6
P_1 =	X_4	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	5
	X_5	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	5
	X_6	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	5
	X_7	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	5
	รวม	4	4	4	3	3	4	3	4	3	4	36

	ครู / คาบ	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
	1	Y_1	Y_3	Y_6	Y_7	Y_9	Y_{10}	Y_8
	2	Y_3	Y_2	Y_1	Y_5	Y_4	Y_8	Y_6
วันจันทร์	3	Y_6	Y_5	Y_4	Y_3	Y_7	Y_1	Y_2
	4	Y_{10}	Y_9	Y_2	Y_6	Y_1	Y_4	Y_5
	5	Y_8	Y_7	Y_{10}	Y_9	-	Y_2	Y_3
	6	-	-	Y_8	-	Y_{10}	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันอังคาร $P_2 =$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
X_1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	5
X_2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	5
X_3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	5
X_4	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	6
X_5	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	5
X_6	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	5
X_7	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	5
รวม	4	4	4	4	4	3	3	3	4	3	36

วันอังคาร

คาบ \ ครู	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1	Y_4	Y_1	Y_8	Y_2	Y_6	Y_5	Y_9
2	Y_2	Y_3	Y_4	Y_7	Y_5	Y_{10}	Y_1
3	Y_5	Y_2	Y_3	Y_4	Y_7	Y_9	Y_6
4	Y_7	Y_6	Y_9	Y_5	Y_1	Y_2	Y_4
5	Y_9	Y_{10}	Y_1	Y_8	-	-	Y_3
6	-	-	-	Y_{10}	Y_8	Y_3	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันพุธ

P_3 =

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
X_1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	5
X_2	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	5
X_3	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	5
X_4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	5
X_5	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	5
X_6	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	5
X_7	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	6
รวม	4	4	3	3	4	3	4	4	4	3	36

วันพุธ

คาบ \ ครู	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1	Y_4	Y_3	Y_7	Y_9	Y_5	Y_{10}	Y_2
2	Y_5	Y_6	Y_{10}	Y_8	Y_1	Y_2	Y_9
3	Y_8	Y_4	Y_2	Y_{10}	Y_9	Y_7	Y_6
4	Y_1	Y_7	Y_3	Y_2	Y_4	Y_5	Y_8
5	Y_9	Y_1	Y_8	Y_5	Y_6	-	Y_7
6	-	-	-	-	-	Y_1	Y_3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	รวม
	X_1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	6
	X_2	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	5
วันพฤหัสบดี	X_3	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	5
$P_4 =$	X_4	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	5
	X_5	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	5
	X_6	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	5
	X_7	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	5
รวม		3	4	4	4	3	4	4	4	3	3	36

	ครู / คาบ	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
วันพฤหัสบดี	1	Y_{10}	Y_6	Y_7	Y_8	Y_1	Y_9	Y_4
	2	Y_4	Y_9	Y_1	Y_3	Y_7	Y_8	Y_2
	3	Y_2	Y_5	Y_3	Y_{10}	Y_4	Y_1	Y_6
	4	Y_5	Y_2	Y_4	Y_6	-	Y_3	Y_7
	5	Y_9	Y_3	Y_{10}	Y_5	Y_2	Y_7	Y_8
	6	Y_8	-	-	-	Y_6	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$
\text{วันศุกร์} \quad P_5 = \begin{array}{c|cccccccccc|c}
 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 & Y_7 & Y_8 & Y_9 & Y_{10} & \text{รวม} \\
\hline
X_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\
X_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
X_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
X_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\
X_5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
X_6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\
X_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
\text{รวม} & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 36
\end{array}
$$

วันศุกร์

คาบ \ ครู	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1	Y_4	Y_7	Y_9	Y_8	Y_1	Y_3	Y_5
2	Y_{10}	Y_5	Y_6	Y_3	Y_1	Y_9	Y_7
3	Y_8	Y_2	Y_4	Y_{10}	Y_6	Y_7	Y_3
4	Y_1	Y_4	Y_2	Y_6	Y_5	Y_{10}	Y_8
5	Y_7	Y_3	Y_1	Y_4	Y_9	Y_2	Y_6
6	-	-	-	-	Y_{10}	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางการเรียนการสอนในแต่ละวันที่ได้นี้ สามารถกลับวันกันได้ หรือจะสลับคาบเวลาในแต่ละวันกันก็ได้

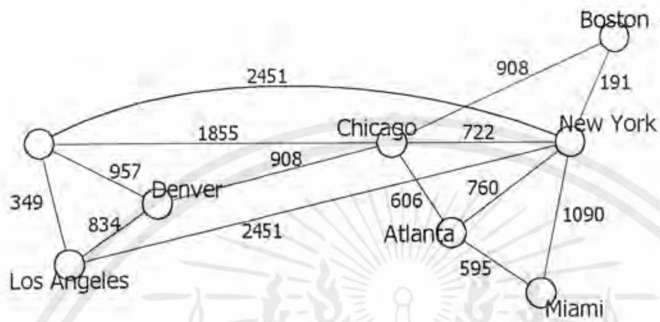
นำตารางการเรียนการสอนในแต่ละวันมารวมกัน จะได้ตารางการเรียนการสอนที่เป็นตารางเวลาในแต่ละสัปดาห์ ตามเงื่อนไขที่กำหนด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

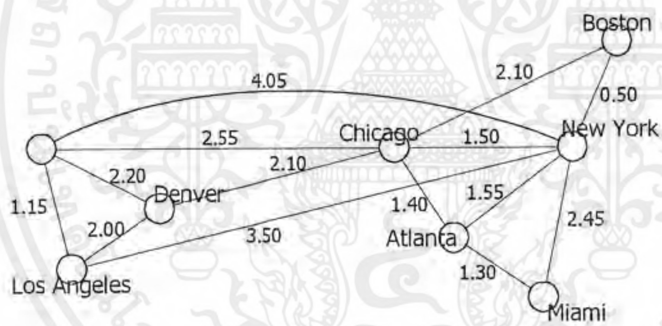
2.6 ปัญหาทางเดินที่สั้นที่สุด (Shortest Path Problem)

พิจารณากราฟโมเดลต่อไปนี้เมื่อจุดยอดแทนเมือง และด้านแทนสายการบินที่บินระหว่างเมือง weighted no. ที่อยู่บนแต่ละด้านแทนระยะทาง , เวลาที่ใช้ในการเดินทาง , และค่าโดยสาร

ระยะทาง



เวลาที่ใช้ในการเดินทาง



ค่าโดยสาร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

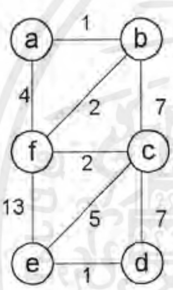
ปัญหาในขณะนี้ก็คือ อยู่ที่ Boston ต้องการเดินทางไป Los Angeles

1. ถ้าต้องการให้การเดินทางทางอากาศมีระยะทางสั้นที่สุด จะเลือกเส้นทางใด
2. ถ้าต้องการให้เวลาในการเดินทางทางอากาศน้อยที่สุดจะเลือกเส้นทางใด (ไม่นับเวลาการเปลี่ยนเครื่อง)
3. เส้นทางใดเป็นเส้นทางที่เสียค่าโดยสารน้อยที่สุด

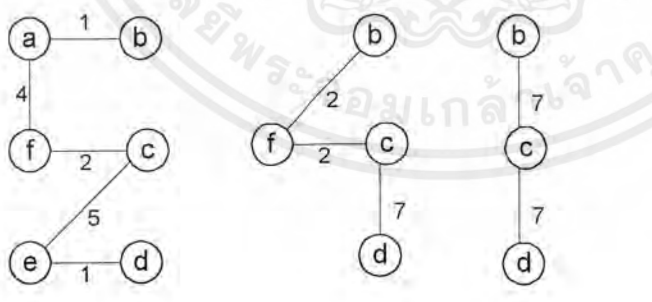
ปัญหาเหล่านี้คือ Shorted Path Problems ซึ่งมีหลายวิธีในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างสองจุดยอดใน weighted graph ในที่นี้เราจะกล่าวถึงวิธีของ Dijkstar และวิธีของ Hedetmiemi

ขั้นตอนวิธีหาทางเดินที่สั้นที่สุดของดิสตรา (Dijkstar's algorithm)

ตัวอย่าง 2.59 ให้ G เป็นกราฟดังรูป



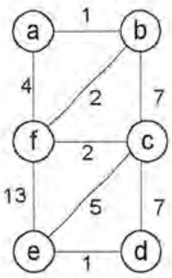
ถ้ากำหนดจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุด เช่นเริ่มจาก b ไปจบที่ d shorted path จะเป็นอย่างไร บาง path จาก b ไป d และผลรวมของ weighted no.

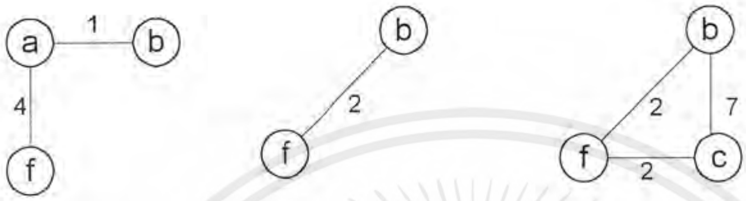


1+4+2+5+1 =13 2+2+7=11 7+7=14

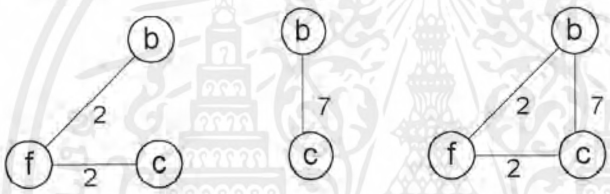
มี path อื่นที่ให้ผลรวมของ weighted no. น้อยกว่านี้ไหม ? วิธีการเป็นอย่างไร ?

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้





$b \rightarrow f = 2$ ค่าน้อยกว่าจาก $b \rightarrow a \rightarrow f = 5$



$b \rightarrow f \rightarrow c = 4$ ค่าน้อยกว่า $b \rightarrow c = 7$

ต้องการหาค่าผลรวม weighted no ในแต่ละ path โดยดูทุกๆ path ที่เป็นไปได้แล้วนำมาเปรียบเทียบกัน path ใดที่มีค่าน้อยที่สุดเลือก path นั้น

จาก b มี path ba=1 , bf=2 , bc=7

จาก a ไป f จะได้ baf $\Rightarrow$ 1+4=5

5>2 ดังนั้นตัดเส้นทาง baf ทิ้ง

เหลือ bf และ bc

จาก f มี path fc=2 ,fe=13

bfc = 2+2=4 , bfe = 2+13=15

4<7ดังนั้นตัดเส้นทาง bc ทิ้ง

จาก c ไป e และ d จะได้ $ce \rightarrow 5, cd \rightarrow 7$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

bfce = 4+5 = 9

9<15 ดังนั้นตัด bfe ทิ้ง

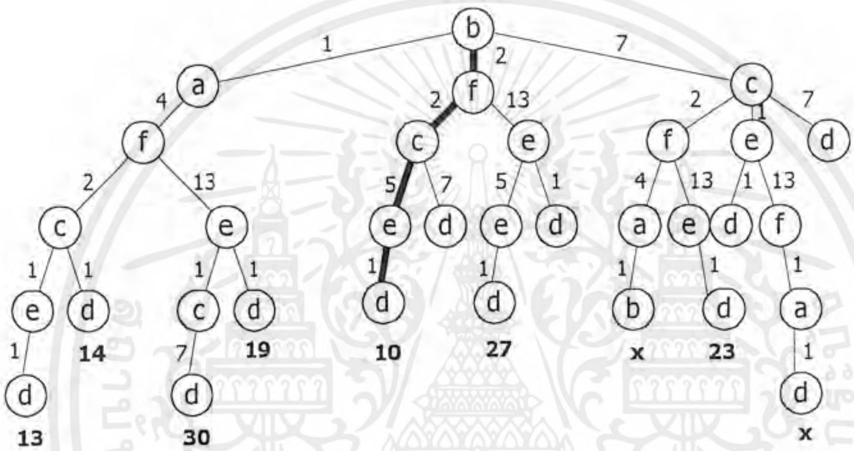
เหลือ bfce = 9

bfcd = 4+7=11

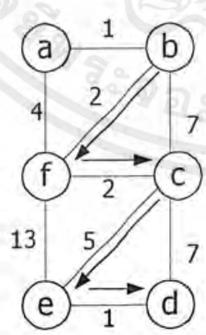
จาก e มี path ed=1 แล้ว bfced = 9+1 = 10

10 < 11 ตัด bfcd ทิ้ง

shortest path คือ bfced มีค่า 10



shorted path คือ b,f,c,e,d มีค่า 10



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		Lable Value						Note
		a	B	C	D	e	f	
1	b	1	-	7	∞	∞	2	$L_1(a) = 1$ b, a
								$L_1(f) = 1$ b, f
								$L_1(c) = 1$ b, c
2	a	-	-	∞	∞	∞	4	$L_2(f) = L_1(a)+w(a, f) = 5$
								$L_2(f) > L_1(f)$ ตัด b, a
								$\Rightarrow L_2(f) = 2$ b, f
								$L_2(c) = 7$ b, c
3	f	-	-	2	∞	13	-	$L_3(c) = L_2(f)+w(f, c) = 4$
								$L_3(e) = L_2(f)+w(f, e) = 15$
								$L_3(c) < L_2(c)$ ตัด b, c
								$\Rightarrow L_3(c) = 4$ b, f, c
								$L_3(e) = 15$ b, f, e
4	c	-	-	-	7	5	-	$L_4(d) = L_3(c)+w(c, d) = 11$
								$L_4(e) = L_3(c)+w(c, e) = 9$
								$L_4(e) < L_3(e)$ ตัด b, f, e
								$\Rightarrow L_4(e) = 9$ b, f, c, e
								$L_3(d) = 11$ b, f, c, d

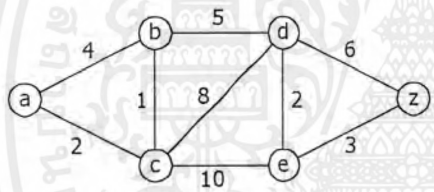
ถึง d แล้ว แต่ที่จุดอื่นๆ มีค่า L น้อยกว่าที่ d จึงต้องพิจารณาต่อ เฉพาะที่จุดยอด L น้อยกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		Lable Value						Note
		a	B	c	D	e	f	
5	e	-	-	-	1	-	-	$L_5(d) = L_4(e)+w(e, d) =$ 10
								$L_5(d) < L_4(d)$ ตัด b, f, c, d
								$\Longrightarrow L_5(e) = 10$ b, f, c, e, d

ได้ shortest path คือ b, f, c, e, d = 10

ตัวอย่าง 2.60 จงหา shotrtest path จาก a ถึง z



		Lable Value						Note
		a	b	C	d	e	z	
1	a	-	4	2	∞	∞	∞	$L_1(b) = 4$ a, b
								$L_1(c) = 2$ a, c
2	c	-	1	-	8	10	∞	$L_2(b) = L_1(c)+1 = 3$ a, c, b
								$L_1(b) > L_2(b)$ ตัด a, b
								$L_2(d) = L_1(c)+8 = 10$ a, c, d
								$L_2(e) = L_1(c)+10 = 12$ a, c, e
3	b	-	-	-	5	∞	∞	$L_3(d) = L_2(b)+5 = 8$ a, c, b, d
								$L_3(d) < L_2(d)$ ตัด a, c, d
4	d	-	-	-	-	2	6	$L_4(e) = L_3(d)+2 = 10$ a, c, b, d, e

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

								$L_4(e) < L_2(e)$ ตัด a, c, e
								$L_4(z) = L_3(d)+6 = 14$ a, c, b, d, z
5	e	-	-	-	-	-	3	$L_5(z) = L_4(e)+3 = 13$ a, c, b, d, e, z
								$L_5(z) < L_4(z)$ ตัด a, c, b, e, z

ได้ shortest path คือ a, c, b, e, z = 13

ขั้นตอนวิธีหาทางเดินที่สั้นที่สุดของฮีเดทนีมี (Hedetniemi's Algorithm)

จาก connected weighted graph ซึ่งจุดยอดคือ $v_1,\dots,v_n$ จะสร้าง $n \times n$ adjacent matrix $A = \left[a_{ij}\right]$ โดย

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i = j \\ x & \text{ถ้า } i \neq j \text{ และมีด้านที่มี weight x ระหว่าง i และ j} \\ \infty & \text{ถ้า เป็นกรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

ในการเขียน program computer ∞ จะใช้เป็นบางจำนวนที่มีค่ามากๆเท่าที่จะเป็นไปได้

กำหนด connected graph ดังนี้

adjacent matrix คือ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 30 & \infty & 30 & \infty & \infty & \infty & \infty & 40 \\ 30 & 0 & 25 & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 25 & 0 & 50 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 30 & 40 & 50 & 0 & 30 & 20 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 30 & 0 & \infty & 25 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 20 & \infty & 0 & 20 & \infty & 20 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 25 & 20 & 0 & 25 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 25 & 0 & 20 \\ 40 & \infty & \infty & \infty & \infty & 20 & \infty & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

operation บน เมทริกซ์ที่เรียกว่า Hedetniemie matrix sum แทนด้วย $\dashv\vdash$ นิยามดังนี้

นิยาม 2.43 ให้ A เป็น m x n เมทริกซ์และ B เป็น n x p เมทริกซ์ แล้ว Hedetniemie matrix sumคือ matrix C ขนาด m x p ซึ่ง C = A $\dashv\vdash$ B เมื่อสมาชิกตัวที่ (i,j) คือ

$$C_{ij} = \min\{a_{ij} + b_{1j}, a_{i2} + b_{2j}, \ldots, a_{in} + b_{nj}\}$$

ตัวอย่าง 2.61 จงหา Hedetniemie matrix sum A $\dashv\vdash$ B ของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $A \dashv\vdash B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \dashv\vdash \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

0+0 , 1+5 , 2+3	0+3 , 1+0 , 2+1	0+4 , 1+4 , 2+0
2+0 , 0+5 , 3+3	2+3 , 0+0 , 3+1	2+4 , 0+4 , 3+0
5+0 , 6+5 , 0+3	5+3 , 6+0 , 0+1	5+4 , 6+4 , 0+0

$$= \left| \begin{matrix} \min\{0,6,5\} & \min\{3,1,3\} & \min\{4,5,2\} \\ \min\{2,5,6\} & \min\{5,0,4\} & \min\{6,4,3\} \\ \min\{5,11,3\} & \min\{8,6,1\} & \min\{9,10,0\} \end{matrix} \right|$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.62 จงหา A $\dashv\vdash$ B ถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & 4 \\ \infty & 4 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & 4 \\ \infty & 4 & 0 \end{bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีทำ $A \dashv\vdash B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & 4 \\ \infty & 4 & 0 \end{bmatrix} \dashv\vdash \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & 4 \\ \infty & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ให้ $A^2_{\dashv\vdash} = A \dashv\vdash A$

$A^3_{\dashv\vdash} = A^2 \dashv\vdash A$

และต่อๆไป

ตัวอย่าง 2.63

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 30 & \infty & 30 & \infty & \infty & \infty & \infty & 40 \\ 30 & 0 & 25 & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 25 & 0 & 50 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 30 & 40 & 50 & 0 & 30 & 20 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 30 & 0 & \infty & 25 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 20 & \infty & 0 & 20 & \infty & 20 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 25 & 20 & 0 & 25 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 25 & 0 & 20 \\ 40 & \infty & \infty & \infty & \infty & 20 & \infty & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2_{\dashv\vdash} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 55 & 30 & 60 & 50 & \infty & 60 & 40 \\ 30 & 0 & 25 & 40 & 70 & 60 & \infty & \infty & 70 \\ 55 & 25 & 0 & 50 & 80 & 70 & \infty & \infty & \infty \\ 30 & 40 & 50 & 0 & 30 & 20 & 40 & \infty & 40 \\ 60 & 70 & 80 & 30 & 0 & 45 & 25 & 50 & \infty \\ 50 & 60 & 70 & 20 & 45 & 0 & 20 & 40 & 20 \\ \infty & \infty & \infty & 40 & 25 & 20 & 0 & 25 & 40 \\ 60 & \infty & \infty & \infty & 50 & 40 & 25 & 0 & 20 \\ 40 & 70 & \infty & 40 & \infty & 20 & 40 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A^{3}_{\dashv\vdash} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 55 & 30 & 60 & 50 & 70 & 60 & 40 \\ 30 & 0 & 25 & 40 & 70 & 60 & 80 & 90 & 70 \\ 55 & 25 & 0 & 50 & 80 & 70 & 90 & \infty & 90 \\ 30 & 40 & 50 & 0 & 30 & 20 & 40 & 60 & 40 \\ 60 & 70 & 80 & 30 & 0 & 45 & 25 & 50 & 65 \\ 50 & 60 & 70 & 20 & 45 & 0 & 20 & 40 & 20 \\ 70 & 80 & 90 & 40 & 25 & 20 & 0 & 25 & 40 \\ 60 & 90 & \infty & 60 & 50 & 40 & 25 & 0 & 20 \\ 40 & 70 & 90 & 40 & 65 & 20 & 40 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{4}_{\dashv\vdash} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 55 & 30 & 60 & 50 & 70 & 60 & 40 \\ 30 & 0 & 25 & 40 & 70 & 60 & 80 & 90 & 70 \\ 55 & 25 & 0 & 50 & 80 & 70 & 90 & 110 & 90 \\ 30 & 40 & 50 & 0 & 30 & 20 & 40 & 60 & 40 \\ 60 & 70 & 80 & 30 & 0 & 45 & 25 & 50 & 65 \\ 50 & 60 & 70 & 20 & 45 & 0 & 20 & 40 & 20 \\ 70 & 80 & 90 & 40 & 25 & 20 & 0 & 25 & 40 \\ 60 & 90 & 110 & 60 & 50 & 40 & 25 & 0 & 20 \\ 40 & 70 & 90 & 40 & 65 & 20 & 40 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{5}_{\dashv\vdash} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 55 & 30 & 60 & 50 & 70 & 60 & 40 \\ 30 & 0 & 25 & 40 & 70 & 60 & 80 & 90 & 70 \\ 55 & 25 & 0 & 50 & 80 & 70 & 90 & 110 & 90 \\ 30 & 40 & 50 & 0 & 30 & 20 & 40 & 60 & 40 \\ 60 & 70 & 80 & 30 & 0 & 45 & 25 & 50 & 65 \\ 50 & 60 & 70 & 20 & 45 & 0 & 20 & 40 & 20 \\ 70 & 80 & 90 & 40 & 25 & 20 & 0 & 25 & 40 \\ 60 & 90 & 110 & 60 & 50 & 40 & 25 & 0 & 20 \\ 40 & 70 & 90 & 40 & 65 & 20 & 40 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

จะพบว่า $A^{4}_{\dashv\vdash} = A^{5}$ ดังนั้น

$$A^{4}_{\dashv\vdash} = A^{5}_{\dashv\vdash} = A^{6}_{\dashv\vdash} = A^{7}_{\dashv\vdash} = A^{8}_{\dashv\vdash}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A^{2}_{\dashv\vdash} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 55 & 30 & 60 & 50 & \infty & 60 & 40 \\ 30 & 0 & 25 & 40 & 70 & 60 & \infty & \infty & 70 \\ 55 & 25 & 0 & 50 & 80 & 70 & \infty & \infty & \infty \\ 30 & 40 & 50 & 0 & 30 & 20 & 40 & \infty & 40 \\ 60 & 70 & 80 & 30 & 0 & 45 & 25 & 50 & \infty \\ 50 & 60 & 70 & 20 & 45 & 0 & 20 & 40 & 20 \\ \infty & \infty & \infty & 40 & 25 & 20 & 0 & 25 & 40 \\ 60 & \infty & \infty & \infty & 50 & 40 & 25 & 0 & 20 \\ 40 & 70 & \infty & 40 & \infty & 20 & 40 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{13}^{(2)} = \min\{0+\infty, 30+25, \infty+0, 30+50, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, 40+\infty\} = 55$

จะพบว่า 55 เป็นผลบวกของ 30 และ 25

โดย 30 เป็นความยาวของ path ระหว่าง v_1 และ v_2 และ 2530 เป็นความยาวของ path ระหว่าง v_2 และ v_3 แล้ว $a_{13}^{(2)}$ จะแทนความยาวของระยะทางที่สั้นที่สุดจาก v_1 ไป v_3

ดังนั้น $A^{2}_{\dashv\vdash}$ จะแทนความยาวของ shortest path ซึ่งมีด้าน 2 ด้านหรือน้อยกว่า ระหว่างจุดยอด 2 จุดใดๆ

ในทำนองเดียวกัน $A^{3}_{\dashv\vdash}$ จะแทนความยาวของ shortest path ซึ่งมีด้าน 3 ด้านหรือน้อยกว่า เนื่องจาก connected , weighted graph ที่มี n จุดยอดมีได้อย่างมาก n-1 ด้าน ใน path ที่สั้นที่สุดระหว่าง สองจุดยอด

ทฤษฎี 2.33 ใน connected , weighted graph ที่มีจุดยอด n จุด สมาชิกที่ (i,j) ของ Hedetniemi matrix $A^{n-1}_{\dashv\vdash}$ คือความยาวของระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดยอด v_i และ v_j

จากตัวอย่าง จะพบว่า หลังจาก 4 iteration แล้ว เมทริกซ์ที่ได้เหมือนเดิม

ทฤษฎี 2.34 สำหรับ connected, weighted graphที่มี n จุดยอดถ้า Hedetniemi matrix $A^{k}_{\dashv\vdash} \neq A^{k-1}_{\dashv\vdash}$ แต่ $A^{k}_{\dashv\vdash} = A^{k+1}_{\dashv\vdash}$ แล้ว $A^{k}_{\dashv\vdash}$ แทนเซตความยาวของ path ที่สั้นที่สุดซึ่งประกอบด้วยด้านไม่มากกว่า k ด้าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง2.64 ต้องการหา path ที่สั้นที่สุดจาก v_1 ไป v_7 (จากเมทริกซ์จะพบว่าความยาวคือ 70) จะพบว่า

$$a_{17}^{(4)} = a_{1k}^{(3)} + a_{k7}$$

สำหรับบาง $a_{1k}^{(3)}$ คือ row vector

$$(0,30,55,30,60,50,70,60,40)$$

และสมาชิก a_{k7} คือ column vector

$$(\infty,\infty,\infty,\infty,25,20,0,25,\infty)^T$$

จะพบว่า 70 มาจาก 50+20 ซึ่งเป็นผลบวกของสมาชิก เมื่อ k = 6
ดังนั้น shortest path จะจบลงด้วยด้านที่มีความยาว 20 จาก v_6 ไป v_7 (กับ path ที่มีสามด้านหรือน้อยกว่าจาก v_1 ถึง v_6)
นอกจากนี้จะพบว่า 70+0 = 70 ซึ่งเป็นผลบวกของสมาชิกเมื่อ k = 7 ถ้าเลือก 70 + 0 แล้วก็จะต้องกลับไปทำขั้นตอนข้างต้นอีกครั้ง ดังนั้นจะไม่เลือกกรณีที่บวก 0
ต่อไปจะหาด้านก่อนที่จะมาถึง v_6 โดยที่ $a_{16}^{(4)} = 50$ สมาชิก a_{k6} คือ column vector

0 30 55 30 60 50 70 60 40

$$(\infty,\infty,\infty,20,\infty,0,20,\infty,20)^T$$

จะพบว่า 50 มาจาก 30+20ซึ่งเป็นผลบวกของสมาชิกเมื่อ k = 4
ดังนั้น shortest path จะจบลงด้วยด้านที่มีความยาว 20 จาก v_4 ถึง v_6 (กับ path ที่มี 3 ด้านหรือน้อยกว่าจาก v_1 ถึง v_4)
ต่อไปจะหาด้านก่อนที่จะถึง v_4 โดยที่ $a_{14}^{(4)} = 30$ สมาชิก a_{k4} คือ column vector

0 30 55 30 60 50 70 60 40

$$(30,40,50,0,30,20,\infty,\infty,\infty)^T$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะพบว่า 30 มาจาก 0+30 หรือ 30+0 ซึ่งเป็นสมาชิกเมื่อ k = 1 และ k = 4
ดังนั้น shortest path จะจบลงด้วยด้านที่มีความยาว 30 จาก v_4 ถึง v_1 (ไม่เลือกกรณีบวก 0)
แล้ว shortest path จาก v_1 ถึง v_7 คือ v_1, v_4, v_6, v_7 คือด้านซึ่งแต่ละด้านมีความยาว 30,20,20 รวมเป็น 70

Hedetniemi's method จะให้ผลเฉลยจาก original adjacency matrix จะได้ matrix สุดท้ายซึ่งเป็นผลเฉลยเมื่อมีการคำนวณไม่เกิน n-1 ครั้งเมื่อ n เป็นจำนวนจุดยอดทั้งหมด

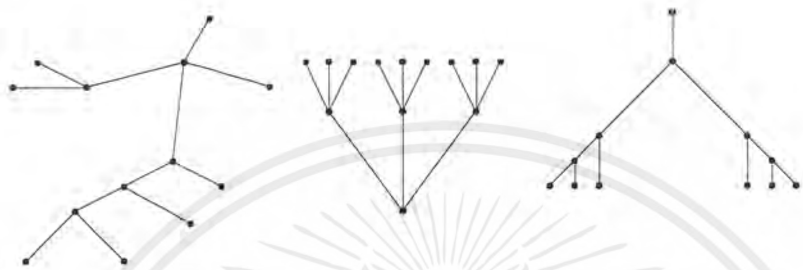
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7 กราฟต้นไม้ (Tree)

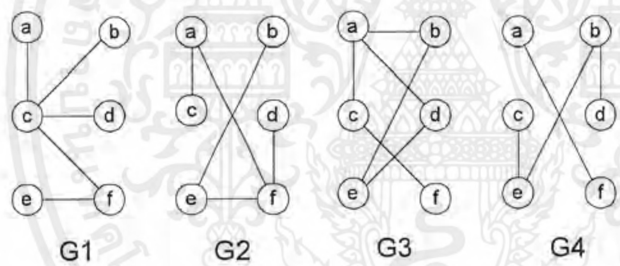
นิยาม 2.44 Tree คือ กราฟต่อเนื่องที่ไม่ระบุทิศทาง ที่ไม่มี simple circuit

Tree ไม่มี simple circuit ดังนั้นไม่มี multiple edges หรือลูป ต้องเป็น simple graph

ตัวอย่าง 2.65



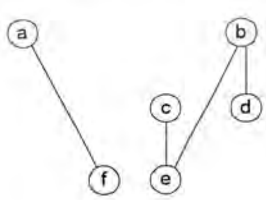
ตัวอย่าง 2.66 จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้เป็น tree หรือไม่



G_1 และ G_2 เป็น tree เนื่องจากเป็น connected graph ไม่มี simple circuit

G_3 ไม่เป็น tree เพราะ e, b, a, d, c เป็น simple circuit ในกราฟ

G_4 ไม่เป็น trees เพราะกราฟไม่ connected



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใน tree ที่มีจุดยอดมากกว่า 1 จุด จะต้องมีอย่างน้อย 2 จุดยอดที่มีดีกรี 1

จุด	2	3	4	4	5	5	5
ด้าน	1	2	3	3	4	4	4

ใน connected graph ที่ n จุดยอด จะเป็น tree ก็ต่อเมื่อ มีด้าน n-1 ด้าน

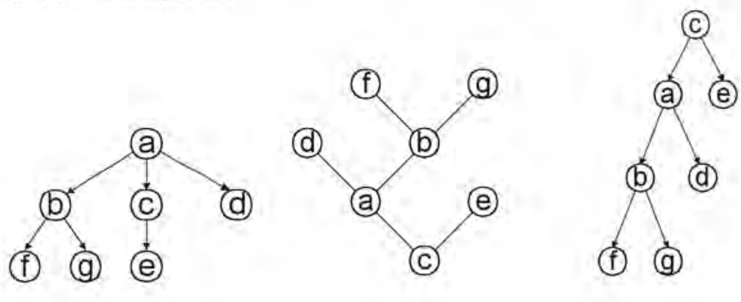
Simple graph จะเป็น tree ก็ต่อเมื่อ มีเพียง1 path เชื่อมระหว่างคู่ของจุดยอด

จุดยอดหนึ่งของ tree จะเรียกว่า ราก (root) เมื่อจาก root จะมีเพียง 1 path ไป ณ แต่ละจุดยอด และจะกำหนดทิศทางออกจาก root

tree และ root จะให้ directed graph เรียกว่า rooted tree

ตัวอย่าง 2.67 rooted tree

สามารถเปลี่ยน tree ที่ไม่มี root ให้เป็น tree ที่มี root ได้ โดยการเลือกจุดยอดใดๆ เป็น root และ root ที่แตกต่างกันจะได้ rooted tree ที่แตกต่างกัน ดังตัวอย่าง



a เป็น root c เป็น root

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

path ใน rooted tree มีทิศทางเดียวจากรากไปยังจุดใดๆ หัวลูกศรจะใส่หรือไม่ใส่ก็ได้

ให้ T เป็น rooted tree

ถ้า v เป็นจุดยอดใน T ที่ไม่ใช่ root แล้ว จุดยอดที่เป็นบิดามารดาของ (parent) ของ v คือ จุดยอด u ซึ่งมีด้านที่มีทิศจาก u ไป v

เมื่อ u เป็น parent ของ v เรียก v ว่าเป็น จุดยอดที่เป็นลูก (child) ของ u จุดยอดซึ่งมี parent เดียวกันเรียกว่า จุดยอดที่เป็นพี่น้องกัน (siblings)

จุดยอดที่เป็นบรรพบุรุษ (ancestors) ของจุดยอด v ใ ดๆ ที่ไม่ใช่ root คือจุดยอดที่อยู่ใน path จาก root มาถึงจุยอด v นั้น โดยไม่รวมจุดยอด v นั้นๆ (นั่นคือ parent, parent ของ parent และต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงราก)

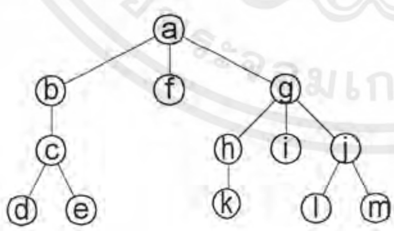
จุดยอดที่เป็นสิ่งที่รองลงมา (descendants) ของจุดยอด v คือ จุดยอดใดๆ ที่มี v เป็น ancestor

จุดยอดของ tree เรียก กิ่ง (leaf) ถ้าไม่มี children

จุดยอดใดๆ ที่มี children เรียกว่า จุดยอดภายใน (internal vertices)

ถ้า a เป็นจุดยอดใน tree แล้ว ต้นไม้ย่อย (subtree) ที่มี a เป็นรากคือ subgraph ของ tree ที่ประกอบไปด้วย a และ descendant ของ a และทุกด้านที่ incident กับทุกจุดยอดที่ descendants

ตัวอย่าง 2.68 จาก rooted tree T ที่มี a เป็น root ดังรูป จงหา parent ของ c, children ของ g, siblings ของ h, ancestors ทั้งหมดจอง c, descendants ทั้งหมดของ b, internal vertices ทั้งหมด และ leaves ทั้งหมด พร้อมหา subtree root ที่ g



parent ของ c คือ b

children ของ g คือ h, i, j

siblings ของ h คือ I, j

ancestors ของ e คือ c, b, a

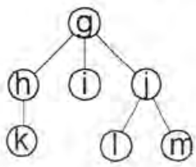
descendants ของ b คือ c, d, a

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

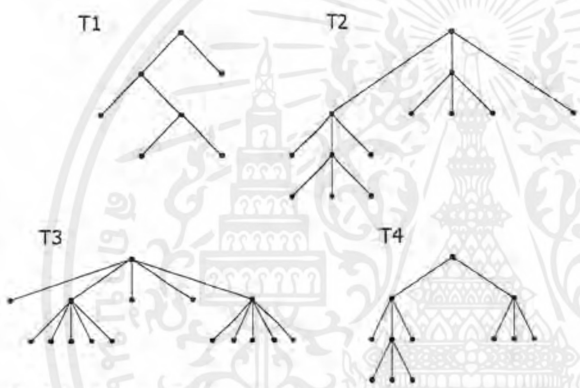
internal vertices คือ a, b, c, g, h, j

leaves คือ d, e, f, k ,i, l, m

subtree rooted ที่ g แสดงดังรูป



ตัวอย่าง 2.69



T_1 เป็น ต้นไม้ทวิภาคเต็มรูป (full binary tree) เพราะ ทุก internal vertex มี 2 children

T_2 เป็น full 3-ary tree (ทุก internal vertex มี 3 children)

T_3 เป็น full 5-ary tree (ทุก internal vertex มี 5 children)

T_4 ไม่เป็น full m-ary tree (บาง internal vertex มี 2 children บาง internal vertex มี 3 children)

order rooted tree คือ rooted tree ซึ่ง children ซึ่งแต่ละ internal vertex มีอันดับ (order) โดย children ของแต่ละ internal vertex มีอันดับจากซ้ายไปขวา

ใน order binary tree ถ้า internal vertex มีสอง children

เรียก first child ว่า left child

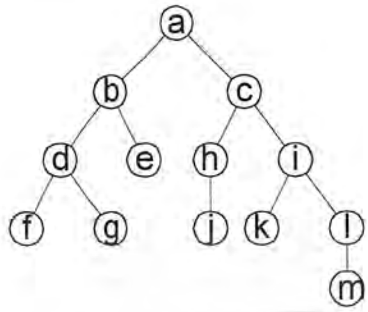
เรียก second child ว่า right child

rooted tree ที่ left child เรียกว่า left subtree

rooted tree ที่ right child เรียกว่า right subtree

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.70 จงหา left และ right children ของ d ใน binary tree T ดังรูป และหา left และ right subtree ที่ c

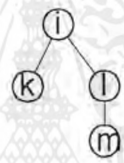


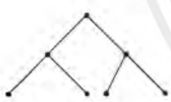
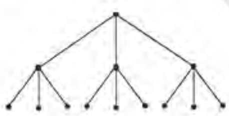
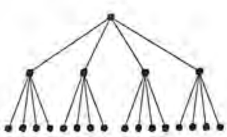
วิธีทำ left children ของ d คือ f

right children ของ d คือ g

left subtree ที่ c

right subtree ที่ c



	m-ary	จุดยอด n	internal vertex i	m*i + 1
	2	7	3	2*7+1=7
	3	13	4	3*4+1=13
	4	21	5	4*5+1=21

n = m*i + 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

full m-ary tree ที่มี I internal vertices มีจำนวนจุดยอด n จะได้ว่า n = m*i + 1

m-ary	n	i	leaves:l	[(m-1)n + 1]/m
2	7	3	4	[(2-1)7 +1]/2 = 4
3	13	4	9	[(3-1)13 + 1]/3 = 9
4	21	5	16	[(4-1)21 + 1]/4 = 16
			n = l +I	l = [(m - 1)n + 1]/m

ทฤษฎี 2.35 full m-ary tree ซึ่ง

1. มี n จุดยอด จะมี interna.l vertex i = (n-1)/m

   และ leaves l = [(m-1)n + 1]/ m

2. มี i internal vertex จะมีจุดยอด n = mi + 1

   และ leaves l = (m-1)l + 1

3. มี l leaves จะมีจะยอด n = mi + 1

   และ internal leaves i = (l-1)/(m-1)

พิสูจน์

1. จาก n = l + i → l = n - i

   จาก n = mi + 1 → l = (n - 1)/m

   ดังนั้น l = n – (n - 1)/m

   = (mn – n - 1)/m

   = [(m -1)n - 1]/m

2. จาก n = l + i → l = n - i

   จาก n = mi + 1

   ดังนั้น l = mi + 1 - l

   = (m - 1)l + 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. จาก $n = l + i$ $\rightarrow$ $i = n - l$

จาก $n = mi + 1$ $\rightarrow$ $l = (n - 1)/m$

$$i = mi + 1 - l$$

$$(1 - m)i = (1 - l)$$

ดังนั้น $$i = (1 - l)/(1 - m) = (l - 1)/(m - 1)$$

$$n = l + (n - 1)/m$$

$$mn = ml + n - 1$$

$$(m - 1)n = ml - 1$$

ดังนั้น $$n = (ml - 1)/(m - 1)$$

ตัวอย่าง 2.71 สมมติมีคนเริ่มส่งจดหมายลูกโซ่ ให้แต่ละคนที่ได้รับจดหมายส่งต่อไปยังคน 4 คน บางคนส่งจดหมายต่อ บางคนไม่ส่ง จะมีกี่คนได้รับจดหมายมากกว่า 1 ฉบับ และถ้าจดหมายลูกโซ่นี้จบเมื่อ 100 คนอ่าน แต่ไม่ได้ส่งออกไป จะมีกี่คนที่ส่งจดหมายออกไป

วิธีทำ จดหมายลูกโซ่นี้ 1 คนส่งต่อไป 4 คน

ดังนั้นจะใช้ 4-ary tree แล้ว $m = 4$

i internal vertices คือคนที่ส่งจดหมายออกไป

l leaves คือคนที่ได้รับจดหมายแต่ไม่ส่งต่อ

เนื่องจากคน 100 คนอ่าน แต่ไม่ได้ส่งต่อ ดังนั้น $l = 100$

จากสูตร : $n = (ml - 1)/(m - 1) = (4*100 - 1)/(4 - 1) = 133$

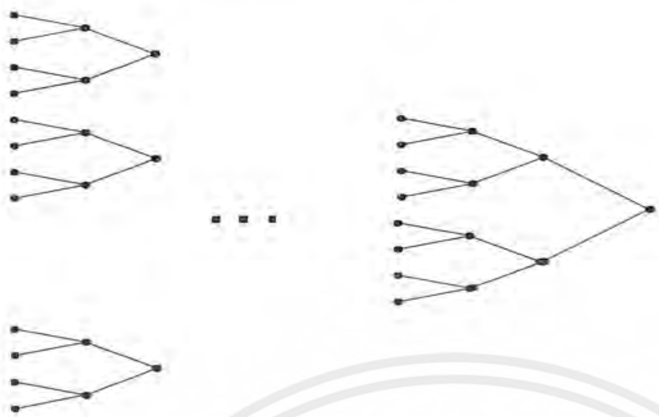
จำนวนคนที่ได้รับจดหมายรวมคนส่ง คือ 133

คนที่ส่งจดหมายออกไปคือ 133 – 100 = 33

ตัวอย่าง 2.72 ในการแข่งขันแบบกำจัดคู่ต่อสู้ทีละคน ถ้ามีผู้เข้าแข่งขัน 60 คน จะมีเกมที่ต้องเล่นทั้งหมดที่เกม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีทำ การแข่งขันแบบกำจัดคู่ต่อสู้ที่ละคนนี้สามารถเขียนเป็นต้นไม้ทวินามเต็มรูป



คน	60	30	15	8	4	2	1
รอบ	1	2	3	4	5	6	

รอบที่ 1 มีผู้เข้าแข่งขัน 60 คน ผู้ชนะจะผ่านเข้าไปเล่นรอบต่อๆ ไป ในที่สุดจะได้ผู้ชนะผ่านชนะเลิศคนเดียวที่ราก ถ้าจำนวนผู้เข้าแข่งขันไม่เป็นเลขยกกำลังของสอง ผู้เข้าแข่งขันบางคนจะได้รับการผ่านเข้าไปเล่นในรอบต่อไป เช่นในรอบที่ 3 มีผู้เข้าแข่งขัน 15 คน 14 คน จะต้องแข่งขันกัน และมี 1 ใน 15 คน จะได้ผ่านเข้าไปเล่นในรอบต่อไป

จากโจทย์ เขียนเป็น binary ดังนั้น $m = 2$

เริ่มแข่งมีคน 60 คน ดังนั้น $l = 60$

จำนวนเกมที่แข่งคือ i internal vertex

จากสูตร $i = (l - 1)/(m - 1)$

$= (60 - 1)/(2 - 1)$

ดังนั้นมีเกมที่ต้องเล่นทั้งหมด 59 เกม

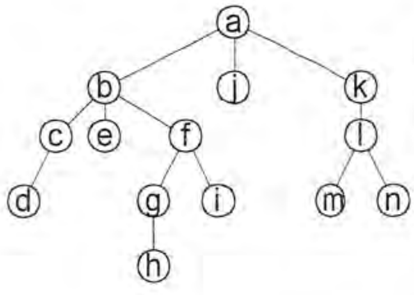
level ของจุดยอด v ใน rooted tree คือ length ของทางเดินหนึ่งทางเดินจาก root ไปยังจุดยอด v นั้น

level ของ root กำหนดเป็นศูนย์

height ของ rooted tree คือค่าสูงสุดของ level ของจุดยอด หรือ height ของ rooted tree คือทางเดินที่ยาวที่สุดจาก root ไปยังจุยอดใดๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.73 จงหา level ของแต่ละจุดยอดและ height

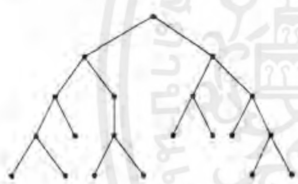


level 0	a
level 1	b, j, k
level 2	c, e, f, l
level 3	d, f, i, m, n
level 4	h

largest level ของจุดยอดใดๆ คือ 4 ดังนั้น tree มี height 4

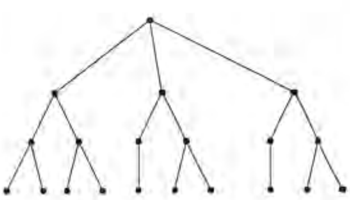
rooted m-ary tree ที่มี height h เรียกว่า balanced ถ้า leaves ทั้งหมดอยู่ที่ level h หรือ h - 1

ตัวอย่าง 2.74 จงพิจารณาว่า rooted tree ต่อไปนี้ balanced หรือไม่



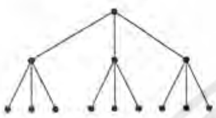
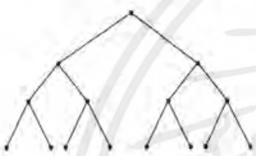
เป็น balanced tree เพราะว่าทุก leaves อยู่ที่ level 3 และ 4

ไม่เป็น balanced tree เนื่องจากมี leaves อยู่ที่ level 2, 3 และ 4



เป็น balanced tree เนื่องจากทุก leaves อยู่ที่ level 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	m-ary	l	h	m^h
	2	2	1	$2^1 = 2$
	3	3	1	$3^1 = 3$
	2	4	2	$2^2 = 4$
	3	9	2	$3^2 = 9$
	2	8	3	$2^3 = 8$

มีอย่างมาก m^h leaves ใน m-ary tree ใดๆ ที่มี height h

$$l \leq m^h$$

ถ้า m-ary tree ที่มี height h มี l leaves แล้ว $h \geq [\log_m l]$

จาก $l \leq m^h$

โดยการใส่ logarithm ฐาน m จะได้

$$\log_m l \leq h$$

เมื่อ h เป็นจำนวนเต็มบวก

$$l = 8,\ m = 2$$

$$\log_2 8 = 3 = h$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7.1 ขั้นตอนวิธีการท่องไปในกราฟต้นไม้ (Traversal algorithm)

มีสามวิธีที่จะท่องไปใน ordered rooted tree คือ preorder, inorder และ postorder

การท่องไปใน tree แบบ preorder

1. เริ่ม root แล้ว
2. ท่องไปใน subtree ที่หนึ่งแบบ preorder แล้วไปที่ subtree ที่สองแบบ preorder และต่อๆ ไป

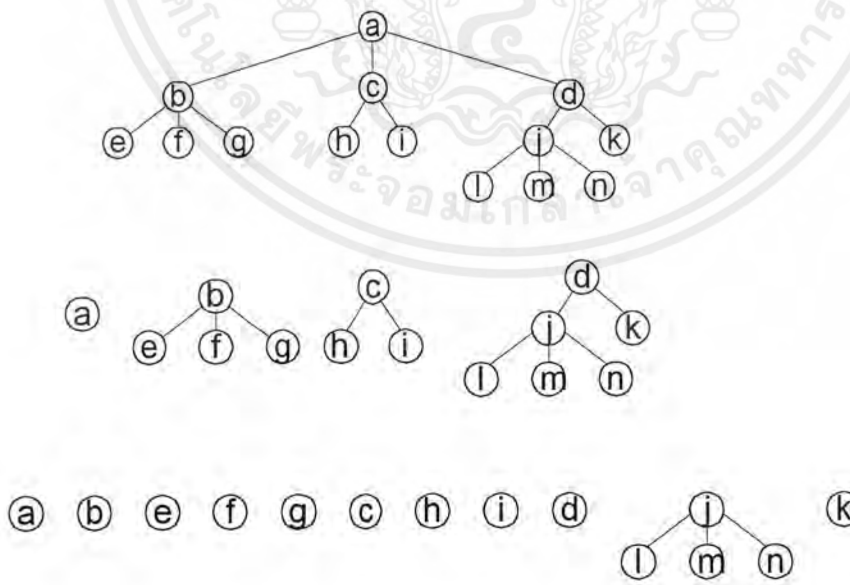
การท่องไปใน tree แบบ inorder

1. ท่องไปใน left subtree แบบ inorder แล้ว
2. ไปที่ root แล้ว
3. ท่องไปใน right subtree (และ subtree ใดๆ ที่เหลือ) แบบ inorder

การท่องไปใน tree แบบ post order

1. ท่องไปในอันดับของแต่ละ subtree แบบ post order แล้ว
2. ไปที่ root

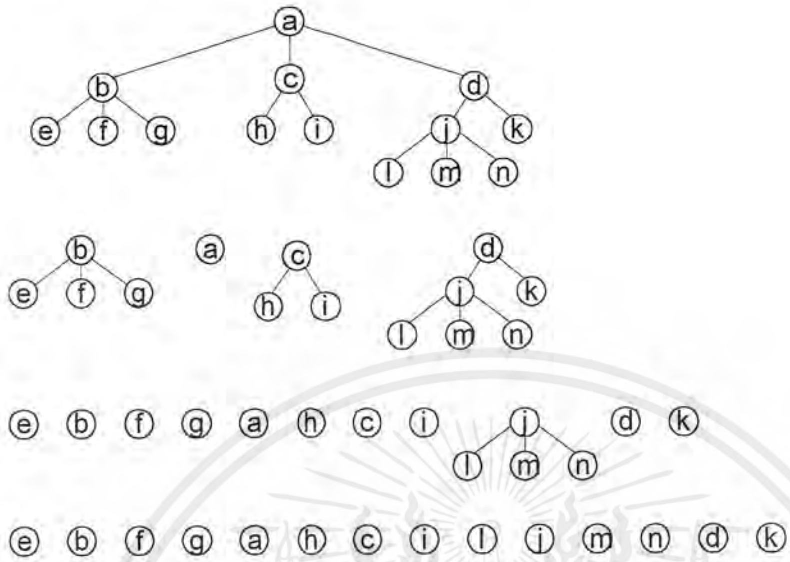
การท่องไปใน tree แบบ preorder



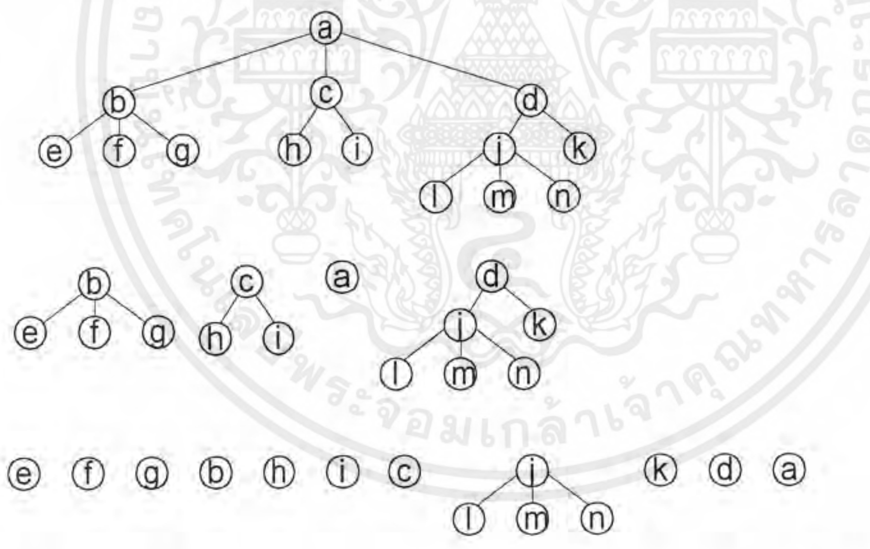
a b e f g c h i d j l m n k

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การท่องไปใน tree แบบ inorder

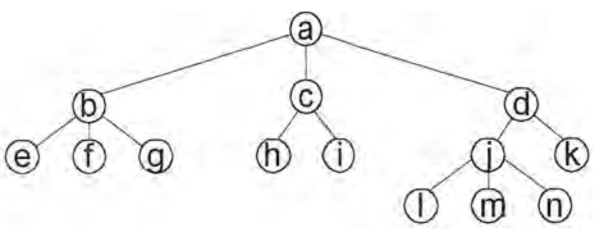


การท่องไปใน tree แบบ postorder

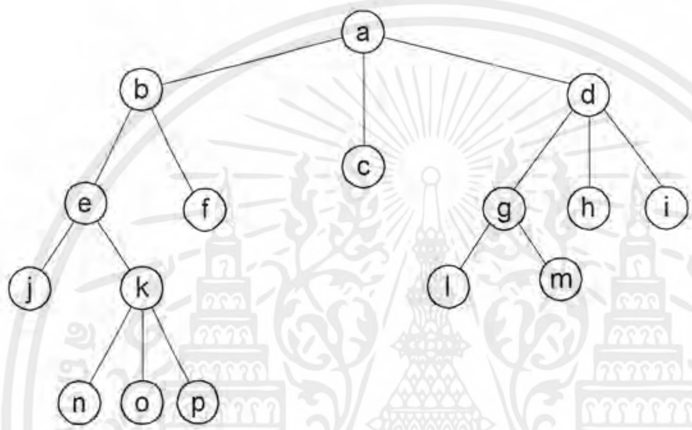


ในการอธิบายการท่องไปใน tree อย่างง่ายๆ คือ เขียนทางเดินรอบ tree เริ่มที่ root และไปในทิศ counterclockwise โดยไปที่รอบๆ แต่ละ leaf ครั้งหนึ่งและผ่านแต่ละ internal vertex หนึ่งครั้งหรือมากกว่า สำหรับแต่ละวิธีที่ท่องไปใน tree การท่องไปใน tree แบบ inorder จะพบ internal vertex เมื่อผ่านไปครั้งที่สอง การท่องไปใน tree แบบ postorder จะพบแต่ละ internal vertex ครั้งสุดท้าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ตัวอย่าง 2.75 จงหาการท่องไปใน tree ที่กำหนดทั้งสามแบบ



preorder a, b, e, j, k, n, o, p, f, c, d, g, l, m, h, i

inorder j, e, k, n, o, p, b, f, a, c, l, g, m, d, h, i

postorder j, n, o, p, k, e, f , b, c, l, m, g, h, i, d, a

2.7.2 Application of Writing Arithmetic Expressions

สามารถใช้ ordered rooted tree แทนนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ โดย internal vertices แทนเครื่องหมาย (operation), leaves แทนตัวแปร (variable) หรือตัวเลข (number) แต่ละ เครื่องหมายจะเรียง (operate) จากซ้ายไปขวาใน subtree ในอันดับต่างๆ

นิพจน์ทางคณิตศาสตร์นี้จะเขียนอยู่ในรูปแบบ infix form คือ ตัวดำเนินการ (operator) อยู่ระหว่างตัวถูกดำเนินการ (operand) เช่น A, B เป็นตัวถูกดำเนินการ และ + เป็นตัวดำเนินการ (operator) แล้ว arithmetic expression A+B อยู่ในรูปแบบ infix form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กฎเกณฑ์เกี่ยวกับการคำนวณค่าของเครื่องคอมพิวเตอร์

1. ลำดับการทำการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์ เรียงตามลำดับก่อน หลังดังนี้

   ( ) วงเล็บเล็ก

   $\uparrow$ ยกกำลัง

   *, / คูณ หาร

   +, - บวก ลบ

2. ลำดับการทำงานที่เท่ากันจะทำการคำนวณจากซ้ายไปขวา

   $A+B-C \equiv (A+B)-C$

   $A*B*C \equiv (A*B)*C$

   $A*B/C \equiv (A*B)/C$

   $A/B*C \equiv (A/B)*C$

3. ในกรณีที่เครื่องหมายยกกำลังซ้อนจะคำนวณจากขวาไปซ้าย

   $A\uparrow B\uparrow C \equiv A\uparrow (B\uparrow C) \equiv A^{B^C}$

ตัวอย่าง 2.76 จงเขียน rooted tree แทนนิพจน์ต่อไปนี้

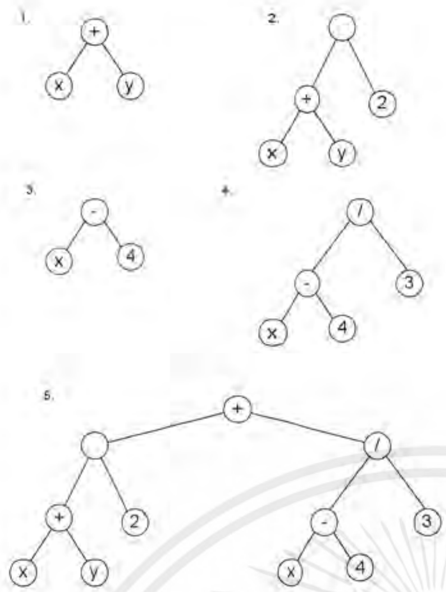
$((x+y)\uparrow 2)+((x-4)/3)$

วิธีทำ ในการเขียน binary tree แทนนิพจน์จะเริ่มจากล่างขึ้นบน ขั้นที่1 สร้าง subtree ของ x+y ซึ่งเป็น subtree ใน subtree $(x+y)\uparrow 2$

ต่อมาสร้าง subtree ของ x-4 ซึ่งเป็น subtree ใน subtree (x-4)/3

สุดท้ายรวม subtree $(x+y)\uparrow 2$ และ (x-4)/3 ใน ordered rooted tree

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



binary tree แทนนิพจน์

$((x+y)\uparrow 2)+((x-4)/3)$

การท่องไปใน tree แบบ inorder นั้น เส้นทางที่เกิดขึ้นอาจซ้ำกันได้ ถึงแม้ tree จะมีรูปแบบต่างกัน prefix form ได้มาจากการเดินไปใน tree แบบ preorder นิพจน์ที่เขียนแบบ prefix form จะเรียกว่า polish notation

postfix form จะหาได้โดยการเดินไปใน tree แบบ postorder นิพจน์ที่เขียนแบบ postfix form เรียกว่า reverse polish notation

จาก reverse polish notation นี้ เมื่อพิจารณาจากซ้าย ไปขวาจะเป็นทิศในการหาค่าของนิพจน์ การคำนวณค่านี้จะใช้กลไกที่เรียกว่า stack เป็นตัวช่วย

โดยปกติ เมื่อป้อนนิพจน์ infix เข้าเครื่องคอมพิวเตอร์ compiler จะไม่สามารถสร้างรหัสหรือชุดของคำสั่งจากนิพจน์ที่ป้อนเข้าไปนี้ได้ compiler จะต้องมีการแปลงนิพจน์จาก infix เป็น postfix ก่อน แล้วจึงแปลเป็นชุดคำสั่งภาษาเครื่องอีกต่อหนึ่งเพื่อการคำนวณต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบการคำนวณเพื่อแปลงนิพจน์ infix เป็น postfix

1. ถ้า input เป็นตัวถูกดำเนินการ (operand) ให้นำไปไว้ที่ output (postfix string)
2. ถ้า input เป็นตัวดำเนินการ (operator) ให้
   2.1 นำตัวดำเนินการเข้าสู่ operator stack (opstk) ถ้า stack ตัวนั้นว่างเปล่า
   2.2 ถ้า operator stack ไม่ว่างเปล่า ซึ่งแสดงว่ามีตัวดำเนินการอยู่ใน stack นั้น ให้เปรียบเทียบลำดับของตัวดำเนินการที่อยู่ใน stack ดังนี้

เครื่องหมาย	ลำดับเมื่ออยู่ที่ input	ลำดับเมื่ออยู่ที่ stack
↑	3	4
*, /	2	2
+, -	1	1
(	4	0

ถ้าลำดับของตัวดำเนินการที่เป็น input น้อยกว่าหรือเท่ากับลำดับของตัวดำเนินการ ที่อยู่ส่วนบนสุดของ stack ให้นำตัวดำเนินการตัวที่อยู่ส่วนบนสุดของ stack ไปไว้ที่ output

จากนั้นก็เปรียบเทียบแบบเดิมอีก ระหว่าง input ตัวนั้นกับตัวดำเนินการที่อยู่ส่วนบนสุดของ stack (ซึ่งเป็นตัวดำเนินการตัวใหม่) โดยใช้หลักการเดิมนี้ ทำเช่นนี้จนกระทั่ง

2.2.1 ลำดับของตัวดำเนินการที่เป็น input มีค่ามากกว่าลำดับของตัวดำเนินการที่อยู่บนสุดของ stack หรือ

2.2.2 ทำจนกระทั่ง stack ว่างเปล่า หรือ

2.2.3 ทำจนกว่าจะพบเครื่องหมายวงเล็บเปิด

แต่ถ้าลำดับของตัวดำเนินการที่เป็น input มากกว่าลำดับของตัวดำเนินการที่อยู่ส่วนบนสุดของ stack นำตัวดำเนินการตัวนั้นใส่เข้าไปใน stack

3. ถ้า input เป็นเครื่องหมายวงเล็บเปิด "(" ให้วาง (push) "(" ลงสู่ stack แต่ถ้า input เป็นเครื่องหมายวงเล็บปิด ")" ก็ให้ดึง (pop) stack จนกว่าจะพบเครื่องหมาวงเล็บเปิดแล้วทิ้งเครื่องหมายวงเล็บเปิดและปิด ส่วนตัวดำเนินการที่ดึงออกมา ก็ให้ไปต่อไว้ที่ output ตามลำดับที่ออกมา
4. ถ้า input หมดแล้วให้ดึง stack นำตัวดำเนินการออกมาไว้ที่ output ทั้งหมด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.77 จงแปลง A+B เป็น postfix

วิธีทำ input	postfix string	opstk
A	blank	blank
+	A	blank
B	A	+
	AB	+
	AB+	

Postfix คือ AB+

ตัวอย่าง 2.78 จงแปลง A+B-C เป็น postfix

วิธีทำ input	postfix string	opstk
A	blank	blank
+	A	blank
B	A	+
-	AB	+
C	AB+	-
	AB+C	-
	AB+C-	

Postfix คือ AB+C-

ตัวอย่าง 2.79 จงแปลง (A + B) * (C - D) เป็น postfix

วิธีทำ input	postfix string	opstk
(	blank	blank
A	blank	(
+	A	(
B	A	(+
)	AB	(+
*	AB+	blank
(	AB+	*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

C	AB+	* (
-	AB+C	* (
D	AB+C	* (-
)	AB+CD	* (-
	AB+CD-	*
	AB+CD-*	blank

Postfix คือ AB+CD-*

การหาผลลัพธ์จากนิพจน์ postfix

จากนิพจน์ infix เมื่อผ่าน compiler จะถูกเปลี่ยนเป็นนิพจน์ postfix และจากนิพจน์ postfix ต้องการหาค่าทางคณิตศาสตร์ มีวิธีการดังนี้

1. ถ้าเป็นตัวถูกดำเนินการ (operand) ให้ push สู่ stack
2. ถ้าเป็นตัวดำเนินการ (operator) ให้ pop ค่า 2 ค่าจาก stack แล้วทำการคำนวณโดยใช้ ตัวดำเนินการตัวนั้น ในกรณีนี้ให้ใช้ค่าแรกที่ได้จากการ stack เป็นตัวถูกดำเนินการกับตัวที่ 2

ตัวอย่าง 2.80 จงหาค่าของ postfix expression

7 2 3 * - 4 ↑ 9 3 / +

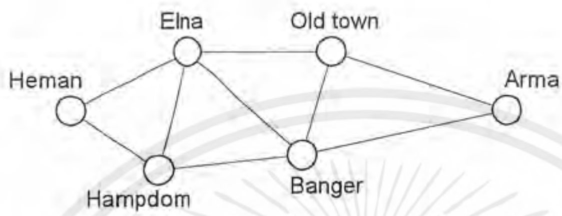
input	operand 1	operand 2	value	operand stack
7				7
2				7, 2
3				7, 2, 3
*	2	3	6	7, 6
-	7	6	1	1
4	7	6	1	1, 4
↑	1	4	1	1
9	1	4	1	1, 9
3	1	4	1	1, 9, 3
/	9	3	3	1, 3
+	1	3	4	<u>4</u>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

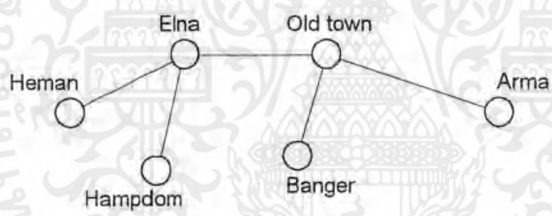
2.7.3 ต้นไม้ที่กระจายไปทั่วกราฟ (Spanning Tree)

นิยาม 2.45 ให้ G เป็น simple graph แล้ว spanning tree ของ G คือ subgraph ของ G ซึ่งทุกๆ จุดของ G เป็นจุดยอดของ T

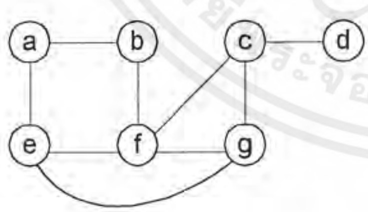
เช่น ถนนที่เชื่อมเมืองต่างๆ แสดงได้ด้วยกราฟ



จากกราฟสามารถหา subgraph ซึ่งเป็น tree T ซึ่งจุดยอดทุกจุดของ G เป็นจุดยอดทุกจุดของ T

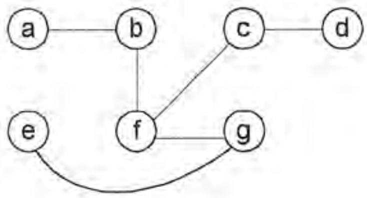


ตัวอย่าง 2.81 จงหา spanning tree ของ simple graph ดังรูป

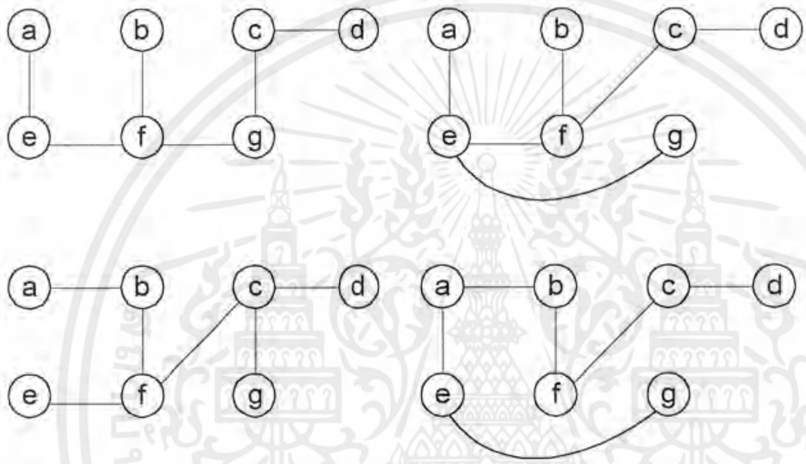


ตัดด้าน {a, e}, {e, f} และ {c, g} จะได้ tree

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



subgraph ของ G ที่เป็น tree ที่ได้นี้ไม่ได้มีรูปแบบเดียว อาจมีรูปแบบอื่นๆ ได้อีกดังนี้

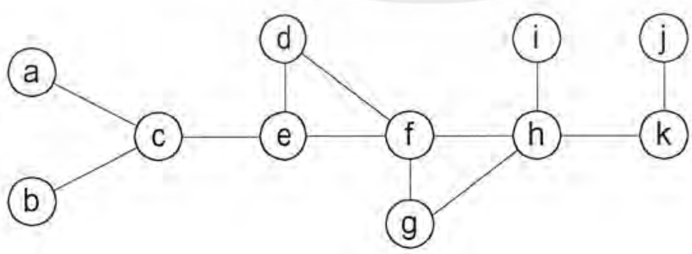


การสร้าง spanning tree

depth first search : การค้นหาลงลึกก่อน

พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

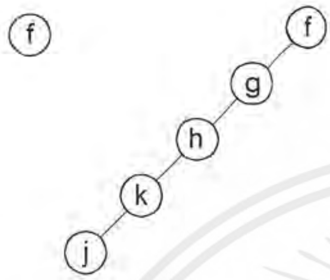
ตัวอย่าง 2.82 จงหา spanning tree ของกราฟ G



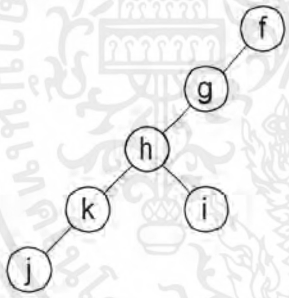
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีทำ เริ่มที่จุดยอดจุดใดๆ ก็ได้ในกราฟเลือกเป็น root ในตัวอย่างนี้เลือก f เป็น root แล้วจาก f ดูว่ามีด้านในที่จุดยอดใดบ้างเลือกมา 1 จุด ให้ทำเช่นนี้โดยเติมจุดยอดเข้าไปในเส้นทางนั้นให้ยาวมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้โดยจุดยอดไม่ซ้ำกัน จะจบขั้นตอนนี้เมื่อไม่มีด้านจากจุดยอดสุดท้ายนั้นไม่เกิดลูป

เลือกเส้นทาง f, g, h, k, j



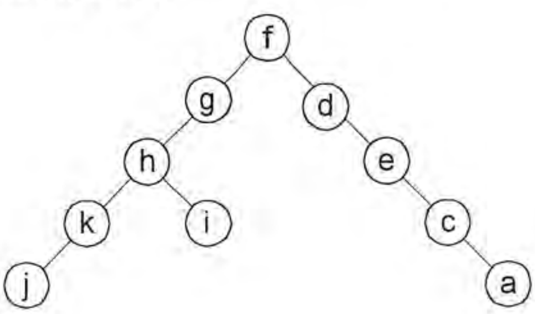
ขั้นตอนต่อไปย้อนกลับไปที่ k ดูว่ามีด้านไปที่จุดยอดใดบ้างโดยที่จุดยอดนั้นยังไม่อยู่ในเส้นทางเดิน ถ้าไม่มีย้อนกลับไปที่ h พิจารณาเหมือนที่ k เนื่องจากที่ h มีด้านไป i ดังนั้นเติมด้าน {h, i} และจุดยอด i ในเส้นทาง



แล้วย้อนกลับไปที่ g จาก g มีด้านไป f และ h ซึ่งทั้ง f และ h อยู่ในเส้นทางเดินแล้ว ดังนั้นจะกลับไปที่ f

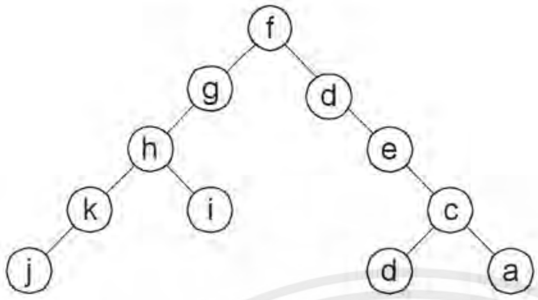
จาก f พิจารณาแบบขั้นตอนแรก คือดูว่าจาก f มีด้านไปจุดยอดใดบ้าง ที่ยังไม่อยู่ในเส้นทางให้ยาวมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้โดยจุดยอดไม่ซ้ำ และไม่เกิดลูป

เลือกเส้นทาง f, d, e, c, a



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

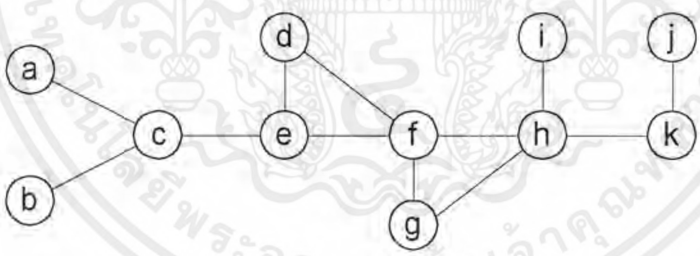
แล้วย้อนกลับไปที่ c ดูว่ามีด้านไปที่ใดบ้างที่ยุดยอดยังไม่อยู่ในเส้นทางเดิน จาก c มีด้านไป b ดังนั้นเติม {c, b} และจุดยอด b ในเส้นทางเดิน



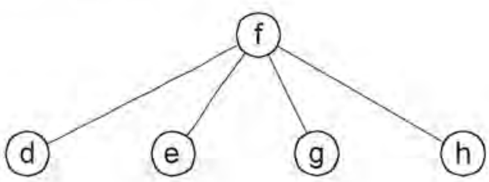
แล้วย้อนกลับไปที่ c, e และ f พิจารณาแบบเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว ปรากฎว่าไม่มีเส้นทางเดินไปจุดยอดใดๆ โดยที่จุดนั้นยังไม่อยู่ในเส้นทางเดิน

นอกจากการค้นหาลึกลงก่อนแล้วยังมีวิธีการค้นหาไปทางกว้างก่อน (breadth first search) พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.83 จงหา spanning tree ของกราฟ G



วิธีทำ เริ่มที่จุดยอดใดๆ ก็ได้ในกราฟเลือกเป็น root ในตัวอย่างนี้เลือก f เป็น root แล้วจาก f ดูว่ามีด้านไปที่จุดยอดใดบ้าง เติมทุกด้านและทุกจุดยอดต่อจาก f มีด้าน {f, d}, {f, e}, {f, g} และ {f, h} ทั้ง d, e, g และ h จะเป็น level 1 ของ tree



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

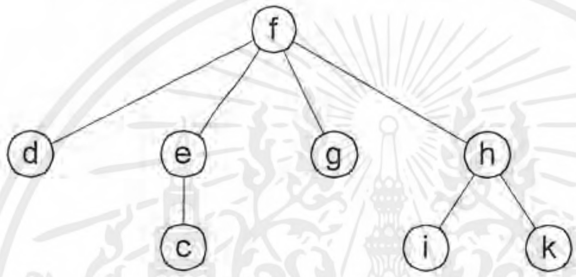
ขั้นตอนต่อไปเติมด้านที่ adjacent กับจุดยอดใน level 1 ทั้งหมด โดยอีกจุดยอดของด้านที่เติมต้องไม่อยู่ในเส้นทางที่เดินไปแล้ว

จาก d มีด้านไป e และ f แต่ทั้ง e และ f อยู่ใน tree แล้ว ที่จุด d นี้จบแล้ว

จาก e มีด้านไป c, d, f, g โดย d, f และ g อยู่ใน tree แล้วดังนั้นเติม {e, c} และจุดยอด c ใน tree

จาก g มีด้านไป f และ h แต่ทั้ง f และ h อยู่ใน tree แล้ว ที่จุด g นี้จบ

จาก h มีด้านไป i และ k โดยทั้ง i และ k ยังไม่อยู่ใน tree จึงเติม {h, i} และจุดยอด i และเติม {h, k} และจุดยอด k ใน tree แล้ว c, i, k เป็น level ที่ 2 ของ tree



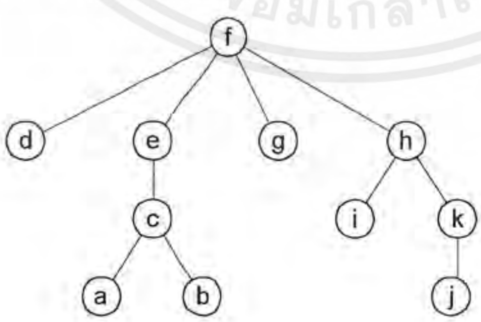
จากจุดยอดทั้งหมดใน level 2 พิจารณาเช่นเดียวกับจุดยอดทั้งหมดใน level 1

จาก c มีด้านไป a และ b โดยทั้ง a และ b ยังไม่อยู่ใน tree จึงเติม {c, a} และจุดยอด a และเติม {c, b} และจุดยอด b

จาก i มีด้านไป h แต่อยู่ใน tree แล้ว ที่จุด i นี้จบแล้ว

จาก k มีด้านไป j โดยที่ j ยังไม่อยู่ใน tree จึงเติม {k, j} และจุดยอด j ใน tree

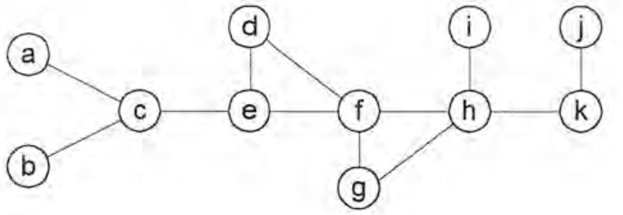
แล้ว a, b, c เป็น level ที่ 3 ของ tree



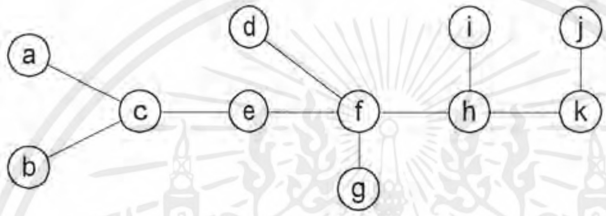
จากจุดยอดทั้งหมดใน level ที่ 3 พิจารณาเช่นเดียวกับจุดยอดทั้งหมดใน level ที่ 2 และที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

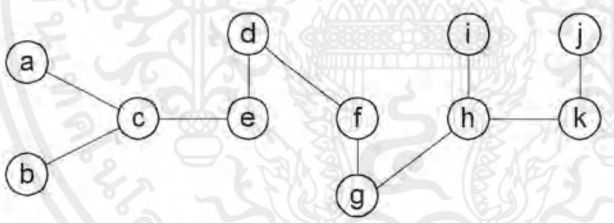
เนื่องจากทุกจุดยอดอยู่ใน tree แล้วก็จบ



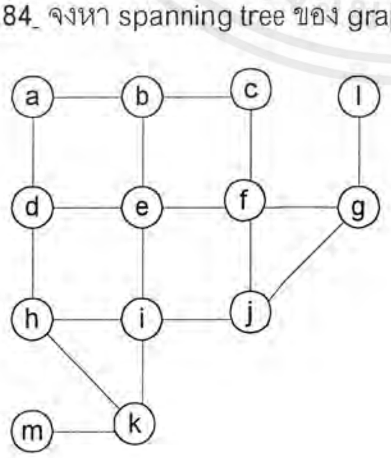
depth first search



breadth first search

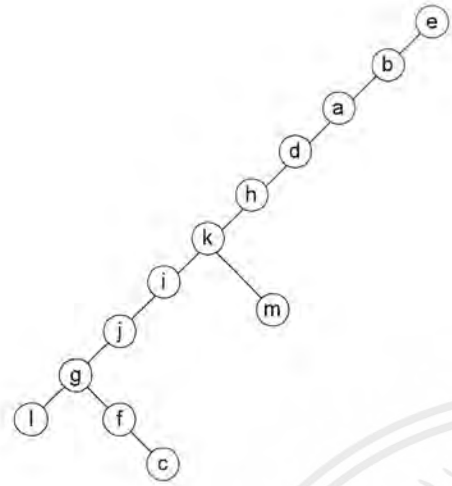


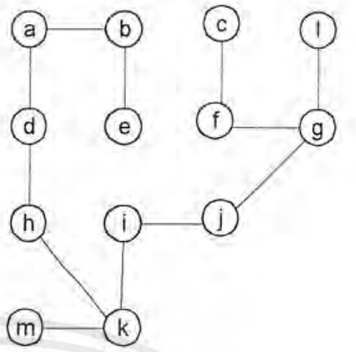
ตัวอย่าง 2.84_ จงหา spanning tree ของ graph G



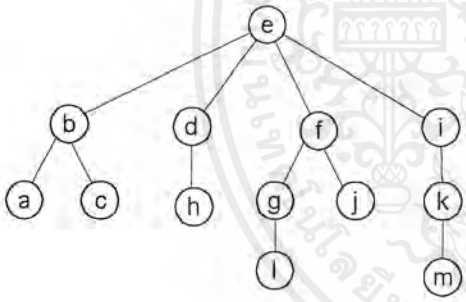
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

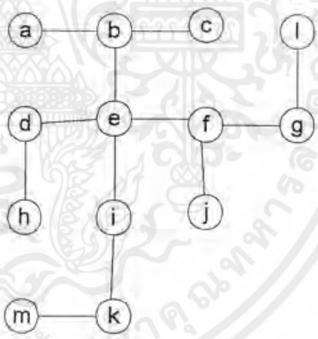
depth first search





breadth first search



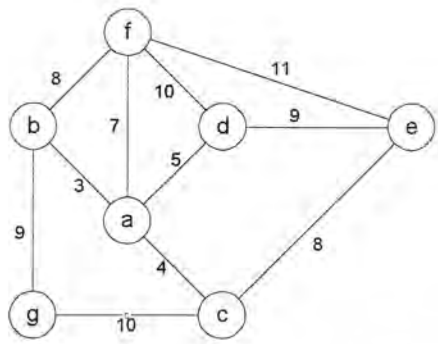


2.7.4 ต้นไม้ที่กระจายไปทั่วมีน้ำหนักต่ำสุด (Minimal spanning tree)

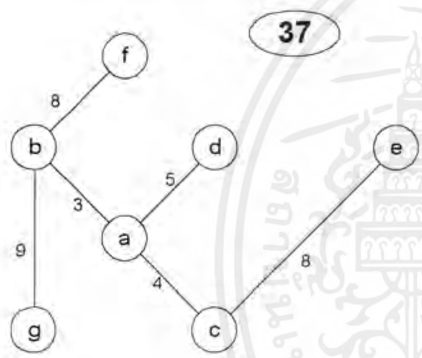
นิยาม 2.46 ให้ G เป็น connected weighted graph ซึ่งมี weight function w บนแต่ละด้านของกราฟแล้ว minimal spanning tree ของ G คือ spanning tree T ของ G ซึ่งผลบวกของ weight function ของ T มีค่าต่ำสุด

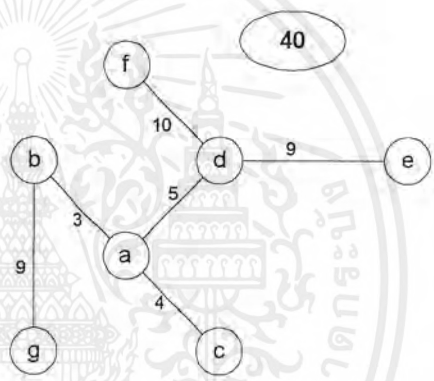
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

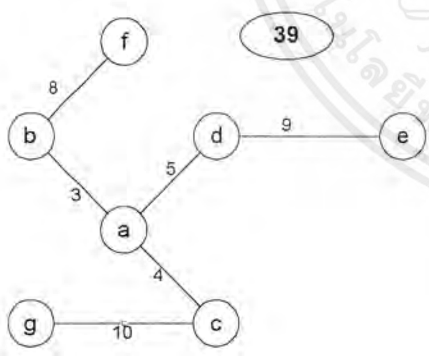
พิจารณากราฟ



จะได้ spanning tree ดังนี้







มีรูปแบบอื่นอีกหรือไม่ที่ให้ผลรวมของ weighted function น้อยกว่านี้

Pirm' s algorithm

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากกราฟได้ weighted function

{a, b}	≡	3
{a, c}	≡	4
{a, d}	≡	5
{a, f}	≡	7
{b, f}	≡	8
{b, g}	≡	9
{c, e}	≡	8
{c, g}	≡	10
{d, e}	≡	9
{d, f}	≡	10
{f, e}	≡	11

1. เลือก initial edge เป็นด้านที่มี minimum weighted function

   {a, b} ≡ 3

2. จากจุดยอด a และ b ดูว่ามีด้านใดบ้างและ weighted function เท่าใด

{a, c}	≡	4
{a, d}	≡	5
{a, f}	≡	7
{b, f}	≡	8
{b, g}	≡	9

   เลือกดูว่าด้านใดมี weighted function ต่ำสุด เลือกด้านนั้น

   {a, c} ≡ 4

   แล้วตัดด้านที่เลือกออกไปด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. จากจุดยอด a, b และ c ดูว่ามีด้านใดบ้างและ weighted function เท่าไร โดยที่จุดยอดอีกจุดของด้านต้องไม่ใช่ a, b และ c

   ถ้ามีด้าน 2 ด้าน หรือมากกว่า $\{v_i, v_j\}$ ที่มี weighted function ต่ำสุดเท่ากัน เลือกด้านที่มี j ค่าต่ำสุด

   {a, d} ≡ 5

   {a, f} ≡ 7

   {b, f} ≡ 8

   {b, g} ≡ 9

   {c, e} ≡ 8

   {c, g} ≡ 10

   เลือก {a, d} ≡ 5 และตัดด้านนี้ออกไป

4. จากจุดยอด a, b, c, d จะได้

   {a, f} ≡ 7

   {b, f} ≡ 8

   {b, g} ≡ 9

   {c, e} ≡ 8

   {c, g} ≡ 10

   {d, e} ≡ 9

   {d, f} ≡ 10

   {f, e} ≡ 11

   เลือก {a, f} ≡ 7 และตัดด้านนี้ออดไปพร้อมตัดด้านอื่นๆ ที่จุดยอดคือ a หรือ b หรือ c หรือ d หรือ f (ตัดด้านที่จุดยอดทั้งสองข้างของด้านถูกเลือกไปแล้ว)

5. จากจุดยอด a, b, c, d, f จะได้

   {b, g} ≡ 9

   {c, e} ≡ 8

   {c, g} ≡ 10

   {d, e} ≡ 9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

{f, e} ≡ 11

เลือก {c, e} ≡ 8 และตัดด้านนี้ออก

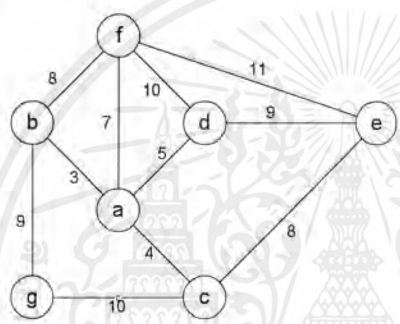
6. จากจุดยอด a, b, c, d, f, e จะได้

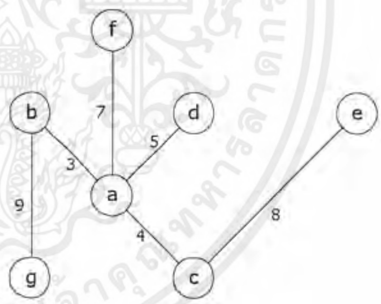
{b, g} ≡ 9

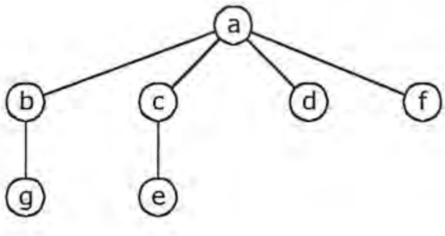
{c, g} ≡ 10

เลือก {b, g} ≡ 9

minimal spanning tree คือ {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, f}, {c, e}, {b, g} และผลรวมของ weighted function คือ 36







เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8 การไหลของข่ายงาน (Network Flows)

ในบทนี้จะกล่าวถึงตัวแบบข่ายงาน (network model) ที่ใช้กราฟมีทิศทาง(directed graph) มาช่วย ส่วนใหญ่สนใจปัญหาการไหล หรือ โฟล(flow) ที่มีค่ามากที่สุดผ่านข่ายงาน ซึ่งข่ายงานอาจเป็นข่ายงานการขนส่งที่มีผลผลิตไหลผ่าน หรือข่ายงานการจราจรที่มีรถไหลผ่าน หรืออื่นๆอีกแล้วแต่กรณี ปัญหาคือหาการไหลที่มีผลรวมการไหลในข่ายงานมากที่สุด ปัญหานี้พบในทั้งทฤษฎีกราฟ และการวิจัยดำเนินงาน (operation research) ตัวแบบข่ายงานสามารถช่วยในการแก้ปัญหาได้หลายด้าน อาทิเช่น ระบบการขนส่ง การจัดสรรทรัพยากร การวางแผนงานการผลิตทางอุตสาหกรรม เป็นต้น

นิยาม 2.47 directed graph G ซึ่งเป็นกราฟต่อเนื่อง และไม่มีลูป เรียกว่า network ก็ต่อเมื่อ

1. มี 2 จุดยอดที่แตกต่างกัน S และ T ของ G ที่เรียกว่า source และ sink ของ G ตามลำดับ และ
2. มี nonnegative real valued function k นิยามบนด้านของ G

ฟังก์ชัน k เรียกว่า capacity function ของ G

ถ้า e เป็นด้านใด ๆ ของ G ค่า k(e) เรียกว่า capacity ของ e

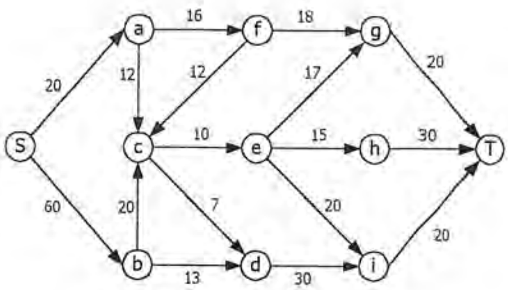
นิยาม 2.48 ให้ G เป็นกราฟซึ่งมีจุดยอด 2 จุด ที่ไม่ใช่จุดเดียวกัน จุดยอดหนึ่งเรียกว่า source ของ flow และอีกจุดยอดเรียกว่า sink ของ flow และที่ทุดจุยอดอื่นนั้นจำนวน flow ที่เข้าสู่จุดยอดนั้น จะเท่ากับจำนวน flow ที่ออกจากจุดยอดนั้น flow จะถูกกำหนดด้วย weignted no. หรือ capacity บนด้าน

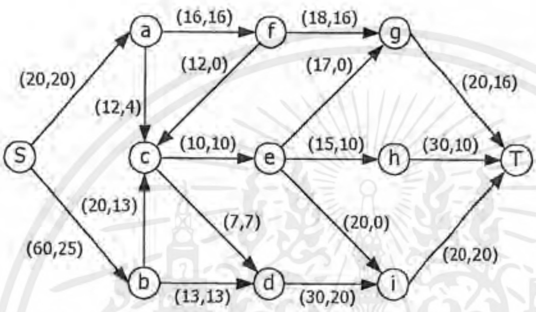
ในการเขียนกราฟจะ label บนด้านด้วย 2 จำนวน โดยค่าแรกจะเป็น capacity ของ edge และค่าที่สองจะเป็นปริมาณของ flow ที่ผ่านด้านนั้น โดย

1. จำนวนของ flow ที่ผ่านไปตามด้านใด ๆ ต้องไม่เกิน capacity ของด้านนั้น
2. ยกเว้น source S และ sink T จำนวนของ flow ที่เข้าสู่จุดยอดใด ๆ v ต้องเท่ากับจำนวน flow ที่ออกจากจุดยอดนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.85





(capacity, flow)

source คือ S, sink คือ T

จุดยอดอื่น ๆ นอกจาก S และ T เรียกว่า intermediate vertices

ให้ (G, k) เป็น transport network โดย G เป็น directed graph และ k เป็น capacity function ที่นิยามบนด้านของ G

ถ้า G = (V(G), E(G)) เป็น directed graph ซึ่งเซตของจุดยอดคือ V(G) และเซตของด้านคือ E(G) แล้วสำหรับจุดยอดใด ๆ v ซึ่ง $v \in V(G)$

แล้ว A(v) เรียกว่า after v คือ เซตของจุยอดที่มีด้านจาก v ไปยังจุด y ใด ๆ ใน V

หรือ $A(v) = \{y \in V(G) \mid (v, y) \in E(G)\}$

และ B(v) เรียกว่า before v คือ ดซตของจุดยอดที่มีด้านจากจุด y ใด ๆ เข้าไปยัง v

$B(v) = \{y \in V(G) \mid (y, v) \in E(G)\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.86 จากตัวอย่าง 2.85

A(c) = {e, d}

B(c) = {a, b, f}

A(e) = {g, h, i}

B(e) = {c}

A(S) = ϕ

B(T) = ϕ

พิจารณาในแต่ละด้าน

- จะพบว่า flow น้อยกว่า หรือ เท่ากับ capacity เสมอ
- ที่ c flow ที่เข้าสู่ c คือ 4, 13, 0

  flow ที่ออกจาก c คือ 10, 7

  ผลรวม flow ที่เข้าสู่จุดยอดใด ๆ เท่ากับผลรวม flow ที่ออกจากจุดยอดนั้น
- ไม่มี flow เข้าสู่ source และไม่มี flow ออกจาก sink

  ผลรวมของ flow ที่ออกจาก source 20 + 26 = 46

  เท่ากับผลรวมของ flow ที่เข้าสู่ sink 16 + 10 + 20 = 46

นิยาม 2.49 ให้ (G, k) เป็น transport network ซึ่ง source คือ S และ sink คือ T สมมติมี capacity function k นิยามบนด้านของ G

flow ใน G คือ nonnegative real value function F ที่นิยามบนด้านของ G

1) $0 \le F(e) \le k(e)$ สำหรับแต่ละด้าน e ∈ E(e) หรือ ปริมาณของ flow ตามด้านแต่ละด้านจะต้องมีค่าไม่เกิน capacity ของแต่และด้าน
2) ถ้า x เป็นจุดยอดใด ๆ ใน G ซึ่งไม่ใช่ source และ sink แล้ว ผลรวมของทุกค่า F(x, y) ซึ่ง y ∈ A(x) ต้องเท่ากับผลรวมของทุกค่า F(z, x) ซึ่ง z ∈ B(x)

หรือ $$\sum_{y \in A(x)} F(x,y) = \sum_{z \in B(x)} F(z,x)$$

สำหรับทุก x ∈ V(G) – {S, T} และ

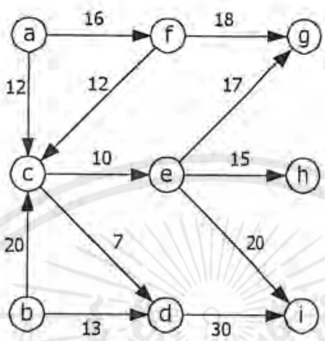
3) F(e) = 0 สำหรับด้าน e ใด ๆ ที่เข้าสู่ source S หรือออกจาก sink T หรือ flow จะออกจาก source S ไปยัง sink T และไม่ flow ในทิศย้อนกลับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง2.87 ต้องการส่งน้ำมันจากดรงกลั่น a และ b ไปยังสถานีขายปลายทาง g, h, I ในระหว่างการขนส่งจะผ่านสถานีขาย 4 แห่ง c, d, e, f

ในแต่ละสัปดาห์ น้ำมัน 20000 และ 60000 บาเรลจะถูกผลิตออกมาจากโรงกลั่น a และ b ในขณะที่สถานีขายน้ำมัน g, h, I ต้องการน้ำมัน 20000, 30000 และ 20000 บาเรล ตามลำดับ

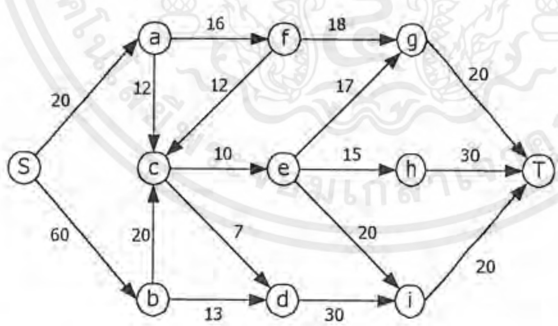
เส้นทางและปริมาณการส่งน้ำมันจากโรงกลั่นไปยังสถานีขายในหน่วยพันบาเรล แสดงดังนี้



จะพบว่ามี multiple source คือ a และ b

และมี multiple sink คือ g, h และ i

สามารถจะสมมติเป็น single source และ single sink โดยการเติม 2 จุดยอดเข้าไป ให้เป็น S และ T แทน total supply และ total demand



โดยด้าน (S, x) แทนปริมาณน้ำมันที่ x สามารถ supply ได้ในแต่ละสัปดาห์ เช่น (S, a) label 20 เพราะโรงกลั่น a ผลิตน้ำมันได้ 20000 บาเรล/สัปดาห์ และด้าน (x, T) แทนปริมาณน้ำมันที่สถานีขาย x ต้องการในแต่ละสัปดาห์ เช่น (h, T) label 30 เนื่องจากสถานีขาย h ต้องการน้ำมัน 30000 บาเรล/สัปดาห์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาคือจะจัดส่งน้ำมันอย่างไร

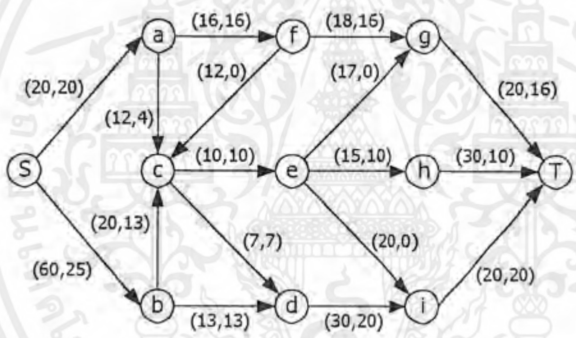
วิธีหนึ่งในการจัดส่งน้ำมันคือ

1. จาก a ส่ง 16000 บาเรล ไปที่ f และ 4000 บาเรล ไปที่ c
2. อาจส่ง 20000 บาเรล จาก b ไป c

   แต่เนื่องจาก A(c) = {d, e} และ capacity บนด้าน (c, e) คือ 10, ด้าน (c, d) คือ 7

   ดังนั้น จาก c จะส่งน้ำมันออกไปได้สูงสุด 17000 บาเรล เนื่องจากไม่มีคลังน้ำมันที่ c และ c สามารถรับน้ำมันได้สูงสุดไม่เกิน 17000 บาเรล

   โดยที่ c ถูกเลือกให้รับน้ำมันมาแล้ว 4000 บาเรล จาก a ดังนั้น c จะรับน้ำมันได้อย่างมาก 13000 บาเรล จาก b นั่นคือเลือกส่งน้ำมัน 13000 บาเรล จาก b ไป c
3. อาจจะเลือกส่ง 13000 บาเรล จาก b ไป d
4. ดังนั้นน้ำมันเพียง 13000 + 13000 = 26000 ถูกส่งจาก S ไป b
5. จะเลือกในทำนองเดียวกันนี้ และจะได้ diagram ดังรูป



จะพบว่าจากการเลือก flow ตามรูปนี้ สถานีขาย I จะได้รับน้ำมันตามต้องการ แต่ g และ h ได้น้อยกว่าความต้องการ

a ส่ง	16000 ไป f		
	4000 ไป c	g ได้รับ	16000
b ส่ง	13000 ไป c	h ได้รับ	10000
	<u>4000</u> ไป d	i ได้รับ	<u>16000</u>
รวม	46000	รวม	46000

ถึงแม้ a และ b ผลิตน้ำมันรวมกันได้ 80000 บาเรลแต่ความต้องการรวมทั้งหมดคือ 70000 บาเรล

ตามรูปแสดงว่าวิธีนี้ ไม่ใช่วิธีดีที่สุดในการวางแผนการส่งน้ำมันเพียงแต่เป็นวิธีหนึ่งที่จะใช้ในการจัดส่งน้ำมัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาในขณะนี้คือ จะหาวิธีการจัดส่งที่ดีที่สุดได้อย่างไร

จาก network ที่ได้จะพบว่าบางด้าน capacity = flow จะเรียกด้านที่มีลักษณะแบบนี้ว่า saturated กรณีอื่น ๆ เรียกว่า unsaturated

สำหรับด้านที่เป็น unsaturated จะนิยาม slack : s ของด้าน c ใด ๆ โดย

$$s(c) = k(c) - F(c)$$

ทฤษฎีบท 2.36 ให้ S และ T เป็น source และ sink ของ network (G, k) ให้ F เป็น flow ใน G แล้ว flow ออกจาก $S = F(S, V(G)) = F(V(G), T) =$ flow เข้าสู่ T

นิยาม 2.50 ให้ F เป็น flow นิยามบน transport network (G, k) ให้ $a_1, a_2, \dots, a_m$ แทนจุดยอดทั้งหมดที่มีด้านเชื่อมมาจาก source S และ ให้ $b_1, b_2, \dots, b_t$ แทนจุดยอดทั้งหมดที่มีด้านเชื่อมเข้าสู่ sink T ดังนั้น

$$A(S) = \{ a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

และ $$B(S) = \{ b_1, b_2, \dots, b_t\}$$

แล้ว ปริมาณ |F| ซึ่งนิยามโดย

$$\begin{aligned} |F| &= F(S, a_1) + F(S, a_2) + \dots + F(S, a_m) \\ &= F(S, V(G)) \\ &= F(S, b_1) + F(S, b_2) + \dots + F(S, b_t) \\ &= F(V(G), T) \end{aligned}$$

เรียกว่า value ของ flow F

นิยาม 2.51 flow F ใน network (G, k) จะเรียกว่า maximal flow ถ้า $|F| \geq |F'|$ สำหรับทุก ๆ flow F' ใน(G, k)

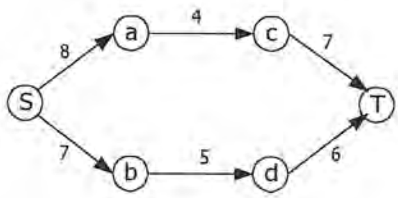
นั่นคือ flow f เรียกว่า maximal ถ้า value ของ F มีค่ามากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้สำหรับ flow ใด ๆ

โดยทั่วไปแล้ว เราไม่สามาจะหา unique maximal flow ได้ถึงแม้จะมี unique maximal value of a flow เนื่องจากในแต่ละ network อาจมีหลาย flow ที่มีค่า maximal value เดียวกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การไหลมากที่สุดและคัตต่ำสุด (Maximum flows and minimal cuts)

ตัวอย่าง2.88 พิจารณา transport network ดังรูป



ให้ T_1 เป็น total capacity ของด้านจาก source

แล้ว $T_1 = k(S, a) + k(S, b)$

$= 8 + 7 = 15$

ให้ T_2 เป็น total capacity ของด้านเข้าสู่ sink

แล้ว $T_2 = k(c, T) + k(d, T)$

$= 7 + 6 = 13$

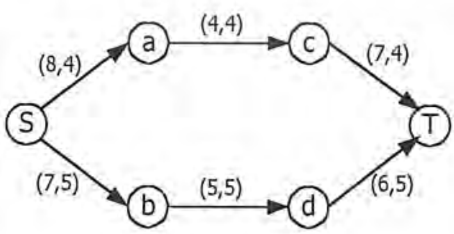
flow ใด ๆ ใน network นี้ จะต้องมีค่าไม่เกินค่าน้อยกว่าของสองค่านี้ นั่นคือ $|F| \leq 13$ สำหรับ flow ใด ๆ

พิจารณาด้าน (a, c) และ (b, d) ถ้าตัดด้าน 2 ด้านนี้ออกจาก network แล้วไม่มี path ที่ flow ออกจาก source S จะไปถึง sink T ได้ ดังนั้น capacity ของด้านทั้งสองนี้จะเป็นตัวกำหนดค่า flow

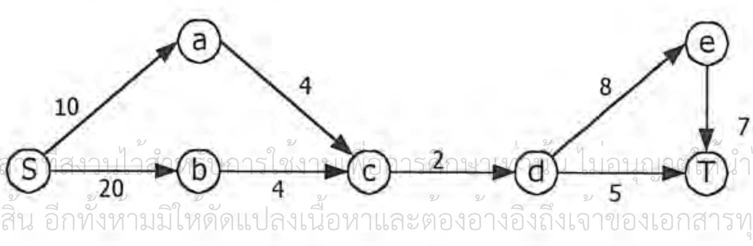
นั่นคือ $|F| \leq k(a, c) + k(b, d) = 5 + 4 = 9$

ถ้าหา flow ที่มี value 9 ได้ จะเป็น maximal flow

จาก network ที่กำหนดจะหา maximal flow ได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2.89 กำหนด transport network ดังรูป



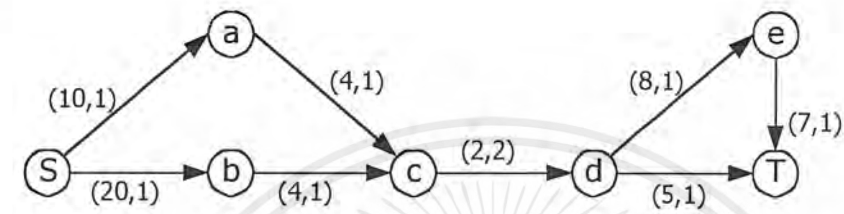
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

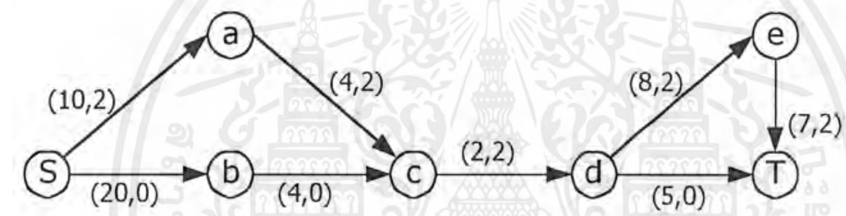
$T_1 = k(S, a) + k(S, b) = 10 + 20 = 30$

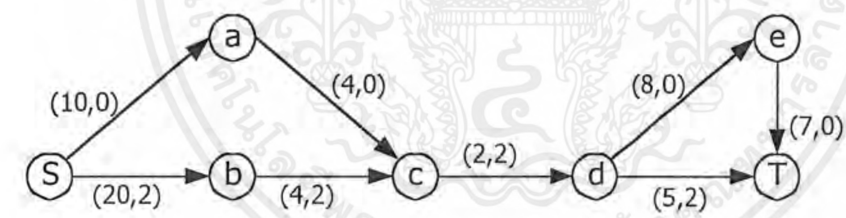
$T_2 = k(e, T) + k(d, T) = 7 + 5 = 12$

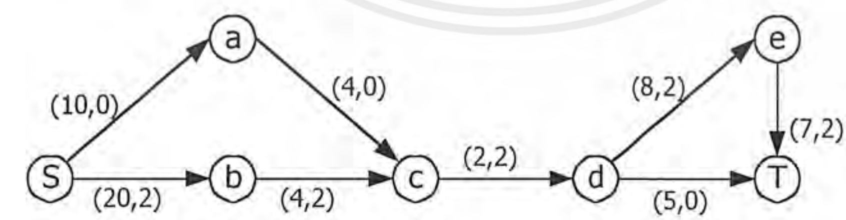
$\Longrightarrow |F| \leq 12$

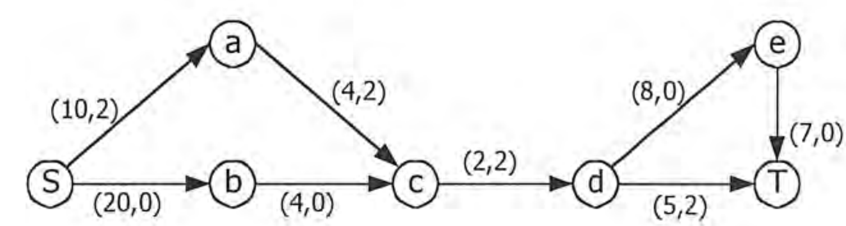
พิจารณาด้าน (c, d) จะพบว่า k(c, d) = 2 และถ้าตัดด้านนี้แล้วไม่มี flow จาก source S ไปยัง sink T จะได้ maximal flow ดังนี้







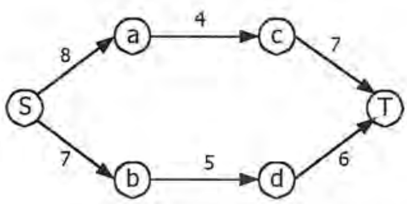




เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.52 สมมติ (G, k) เป็น transport network ซึ่งมี source S และ sink T สมมติ X เป็นเซต ของจุดยอดซึ่ง $S \in X$ แต่ $T \notin X$ ให้ $\overline{X}$ แทน complement ของ X ใน V(G) แล้วเซต $(X, \overline{X})$ ของทุกด้านจากจุดยอดใน X ไปยังจุดยอดใน $\overline{X}$ เรียกว่า S-T cut

ตัวอย่าง 2.90



$X_1 = \{S\}$ $\qquad \overline{X}_1 = \{a, b, c, d, T\}$

$X_2 = \{S, a, b\}$ $\qquad \overline{X}_2 = \{c, d, T\}$

$X_3 = \{S, a, b, c, d\}$ $\qquad \overline{X}_3 = \{T\}$

หา S-T cut ได้โดย

$(X_1, \overline{X}_1) = \{(S, a), (S, b)\}$

$(X_2, \overline{X}_2) = \{(a, c), (b, d)\}$

$(X_3, \overline{X}_3) = \{(c, T), (d, T)\}$

นิยาม 2.53 ถ้า C เป็นเซตใด ๆ ของด้านใน transport network (G, k) แล้ว capacity ของ C คือ ผลรวมของ capacity ของด้านของ C ดังนั้น capacity k(C) นิยามโดย

$$k(C) = \sum_{e \in C} k(e)$$

กรณีเฉพาะที่จะสนใจคือ capacity ของ S-T cut $(X, \overline{X})$ แทนด้วย $k(X, \overline{X})$ หมายถึง ผลรวมของ capacity ของด้านจาก X ไป $\overline{X}$

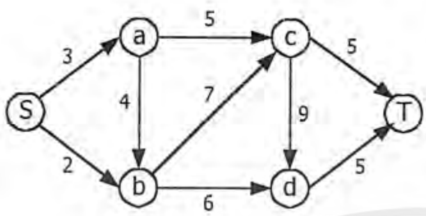
ข้อระวัง คือ $(X, \overline{X})$ ต้องเป็นด้านจาก X ไปยัง $\overline{X}$ ถ้ามีด้านจาก $\overline{X}$ ไปยัง X จะไม่นำไปคำนวณ $k(X, \overline{X})$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่สำคัญ คือ cut ซึ่งมี capacity ต่ำสุดเรียกว่า critical cut ดังนั้น จะเรียก S-T cut $(X, \overline{X})$ ว่า minimal ถ้าไม่มี cut S-T cut $(Y, \overline{Y})$ ซึ่ง

$$k(Y, \overline{Y}) < (X, \overline{X})$$

ตัวอย่าง 2.91 พิจารณา transport network ดังรูป



S-T cut ที่เป็นไปได้มีดังนี้

	X	$\overline{X}$	$(X, \overline{X})$
1.	{S}	{a,b,c,d,T}	{(S,a),(S,b)}
2.	{S,a}	{b,c,d,T}	{(S,b),(a,b),(a,d)}
3.	{S,b}	{a,c,d,T}	{(Sa),(b,d)}
4.	{S,c}	{a,b,d,T}	{(S,a),(S,b),(c,b),(c,T)}
5.	{S,d}	{a,b,c,T}	{(S,a),(S,b),(d,c),(d,T)}
6.	{S,a,b}	{c,d,T}	{(a,d),(b,d)}
7.	{S,a,c}	{b,d,T}	{(S,b),(a,b),(a,d),(c,b),(c,T)}
8.	{S,a,d}	{b,c,T}	{(S,b),(a,b),(d,c),(d,T)}
9.	{S,b,c}	{a,d,T}	{(S,a),(b,d),(c,T)}
10.	{S,b,d}	{a,c,T}	{(S,a)(d,c),(d,T)}
11.	{S,c,d}	{a,b,T}	{(S,b),(S,c),(c,b),(c,T),(d,T)}
12.	{S,a,b,c}	{d,T}	{(a,d),(b,d),(c,T)}
13.	{S,a,b,d}	{c,T}	{(d,c),(d,T)}
14.	{S,a,c,d}	{b,T}	{(S,b),(a,b),(c,b),(c,T),(d,T)}
15.	{S,b,c,d}	{a,T}	{(S,a),(c,T),(d,T)}
16.	{S,a,b,c,d}	{T}	{(c,T),(d,T)}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในแต่ละกรณี capacity ของ (X, $\overline{X}$) มีค่าดังนี้

1. 3+2 = 5
2. 2+4+5 = 11
3. 3+7 = 10
4. 3+2+6+5 = 16
5. 3+2+9+5 = 19
6. 5+7 = 12
7. 2+4+5+6+5 = 22
8. 2+4+9+5 = 20
9. 3+7+5 = 15
10. 3+9+5 = 17
11. 3+2+6+5+5 = 21
12. 5+7+5 = 17
13. 9+5 = 14
14. 2+4+5+6+5 = 22
15. 3+5+5 = 13
16. 5+5 = 10

จาก transport network นอกจาก source และ sink แล้วมีจุด 4 จุดยอด ดังนั้นจะมี S-T cut ได้ 2^4 แบบที่ต่างกัน

ทฤษฎีบท 2.37 ถ้า F เป็น flow ใน transport network (G, k) และถ้า (X, $\overline{X}$) เป็น S-T cut ใด ๆ แล้ว

1. $|F| = F(X, \overline{X}) - F(\overline{X}, X)$

   และสิ่งที่ตามมาคือ

2. $|F| \leq k(X, \overline{X})$

เรียก $F(X, \overline{X}) - F(\overline{X}, X)$ ว่า net flow ที่ผ่าน cut (X, $\overline{X}$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าของ flow สามารถคำนวณได้หลายวิธีที่แตกต่างกัน

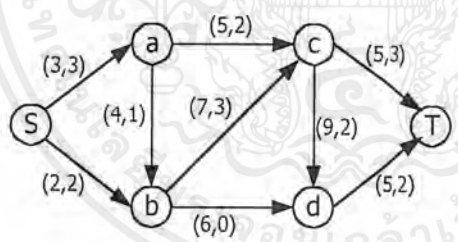
1. $|F|$ = total flow ที่ออก source S
2. $|F|$ = total flow ที่เข้าสู่ sink T
3. $|F|$ = net flow ที่ผ่าน cut S-T ใด ๆ

บทแทรก ให้ F เป็น flow และ $(X, \overline{X})$ เป็น S-T cut ซึ่ง $|F| = k(X, \overline{X})$ แล้ว F เป็น maximal flow และ $(X, \overline{X})$ เป็น minimal cut

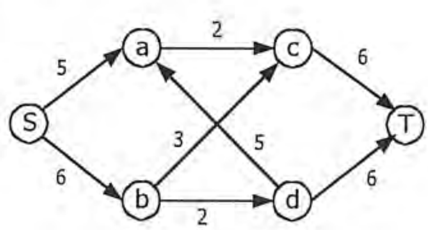
บทแทรก ให้ F เป็น flow ใน network และ $(X, \overline{X})$ เป็น S-T cut แล้วค่าของ F จะเท่ากับ capacity ของ $(X, \overline{X})$ ก็ต่อเมื่อ

1. $F(e) = k(e)$ สำหรับแต่ละด้าน $e \in (X, \overline{X})$
   นั่นคือ $F(X, \overline{X}) = k(X, \overline{X})$
2. $F(e') = 0$ สำหรับแต่ละด้าน $e \in (X, \overline{X})$
   หรือ $F(X, \overline{X}) = 0$

จากตัวอย่าง 2.91 จาก S-T cut ที่ได้ จะพบว่า minimal cut คือ 5 ดังนั้น $|F| = 5$
จะได้แบบหนึ่งของ flow ดังนี้



ตัวอย่าง 2.92 พิจารณา network ดังรูป



$X = \{S, a, b\}$

$\overline{X} = \{c, d, T\}$

$(X, \overline{X}) = \{(a, c), (b, c), (b, d)\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

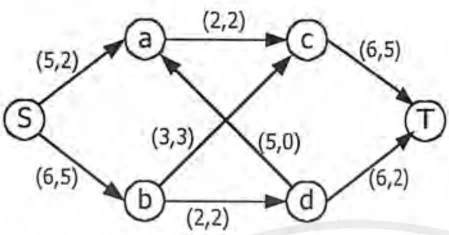
capacity ของ $(X, \bar{X}) = 2 + 2 + 3 = 7$

$T_1 = k(S, a) + k(S, b) = 5 + 6 = 11$

$T_2 = k(c, T) + k(d, t) = 12$

$7 < 11$

จะได้แบบหนึ่งของ flow ดังนี้



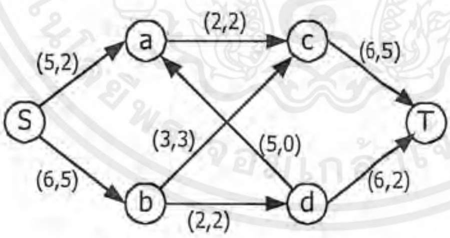
The max flow – main cut theorem

ค่าของ maximal flow คือ capacity ของ minimal

ถ้ามี flow F ซึ่งมีค่าเท่ากับ capacity ของบาง cut $(X, \bar{X})$ แล้ว F เป็น maximal flow และ $(X, \bar{X})$ เป็น minimal cut

ถ้า $|F| = k(X, \bar{X})$ แล้วด้านใน $(X, \bar{X})$ ต้องเป็น saturated และด้านใน $(\bar{X}, X)$ ต้องมี zero flow

ตัวอย่าง 2.93



$X = \{S, a, b\}$

$\bar{X} = \{c, d, T\}$

$(X, \bar{X}) = \{(a, c), (b, c), (b, d)\}$

ซึ่ง $|F| = k(X, \bar{X}) = 2 + 2 + 3 = 7$

$(X, \bar{X}) = \{(d, a)\}$ ซึ่ง flow = 0

ด้านใน $(X, \bar{X})$ ต้องมี zero flow

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

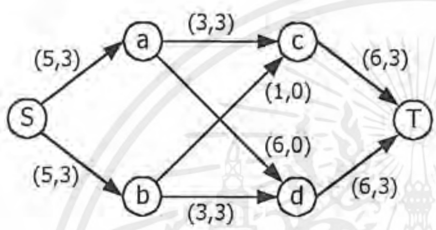
ทฤษฎีบท 2.38 The max flow – min cut theorem

ใน transport network ใด ๆ ค่าของ maximal flow ใด ๆ เท่ากับ capacity ของ minimal cut

จากทฤษฎีนี้เป็นการยืนยันว่า

1. มี minimal cut $(X, \overline{X})$
2. มี maximal flow F และ
3. การเท่ากันของ |F| และ $k(X, \overline{X})$ สำหรับ maximal flow F ใด ๆ และ minimal cut $(X, \overline{X})$ ใด ๆ

ตัวอย่าง 2.94 พิจารณา network ซึ่งมี capacities และ flow ดังรูป



$|F| = 6$

ต้องการเพิ่ม flow ตามด้าน (S, a), (a, d) และ (d, T) หรือ

ต้องการเพิ่ม flow ใน path S-a-d-T ด้วยปริมาณที่แน่นอน t

จะต้องพิจารณาว่า t มีค่ามากที่สุดได้เท่าไร

เนื่องจาก flow มีค่าสูงสุดไม่เกิน capacity

ดังนั้น flow ของ (S, a) จะเพิ่มขึ้นได้ไม่เกิน

$$k(S, a) - F(S, a) = 5 - 3 = 2$$

ในทำนองเดียวกัน flow จาก a ไป d และจาก d ไป t เพิ่มขึ้นได้ไม่เกิน

$$k(a, d) - F(a, d) = 6 - 0 = 6$$

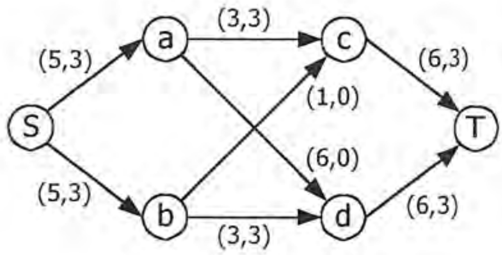
และ $\quad k(d, T) - F(d, T) = 6 - 3 = 3 \quad$ ตามลำดับ

เนื่องจาก ต้องการเพิ่ม flow บนด้านทั้ง 3 นี้ด้วยปริมาณ t เดียวกัน ดังนั้นค่าที่มากที่สุดของ t จะต้องเท่ากับค่าที่น้อยที่สุดของค่าทั้ง 3 ดังนั้น

$$t = \min \{2, 3, 6\} = 2$$

ดังนั้นจะเพิ่ม flow ในแต่ละด้านของ path S-a-d-T อีกด้านละ 2 จะได้ flow F_1 ดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



|F| = 8

$|F| = 6, |F_1| = 8$

ดังนั้น F ไม่ใช่ maxmimal flow

แล้ว F_1 เป็น maximal flow หรือไม่ ?

จะตอบคำถามนี้โดยการเพิ่ม flow ตาม unsaturated edges

พิจารณา path s - b - c - t แต่ละด้านตาม path นี้

unsaturated

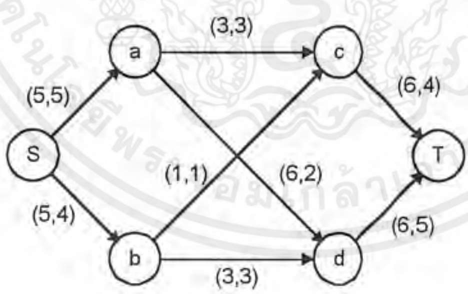
slack ของ (s , b),(b , c) และ (c ,t) ตามลำดับ คือ

k(s , b) – F(s , b) = 5 – 3 = 2

k(b , c) – F(b , c) = 1 – 0 = 1

k(c , t) – F(c , t) = 6 – 3 = 3

จะเพิ่ม flow ตาม path s – b – c – t ด้วยค่า min {2,1,3} = 1 จะได้ flow F_2 ดังรูป



$|F_2| = 9$

ไม่สามารถเพิ่ม flow ได้อีก ดังนั้น F_2 เป็น maximal flow

วิธีการตามตัวอย่างนี้คือ greedy method สำหรับการเพิ่ม value ของ flow F

1. เลือก simple directed path P ใดๆโดย $P = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ จาก source S ไปยัง sink T ซึ่งแต่ละด้าน e_i เป็น unsaturated
2. คำนวณ slack ของแต่ละด้าน e_i ใน P และให้ t เป็นค่าต่ำสุดของค่า slack เหล่านี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. เพิ่มค่าของ flow ในแต่ละด้าน e_i ใน path P ด้วยค่า t ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆสำหรับทุก unsaturated path

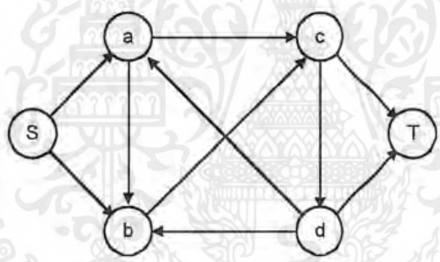
สุดท้ายจะได้ maximal flow เมื่อพิจารณาครบทุก unsaturated path หรือเมื่อทุก path เป็น saturated path แล้ว

การวางทิศทางของ network

ให้ G เป็น network ชุดหนึ่ง มี source S, sink T และ capacity k พิจารราทางเดินชุดหนึ่ง P จาก S ไป T โดย

$P = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ เมื่อ $v_0 = S$ และ $v_n = T$ เนื่องจาก G เป็น directed graph ถ้ามีด้าน e ในทางเดิน p ซึ่งมีทิศจาก v_{i-1} ไป v_i จะเรียกด้าน e ว่าได้วางทิศในทางที่ควรเป็น (เมื่อเทียบกับ P) ถ้าด้าน e ในทางเดิน P ออกจาก v_i ไป v_{i-1} เรียก e ว่าวางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น (เมื่อเทียบกับ P)

ตัวอย่าง 2.95



P = (S , a , b , d , c , T)

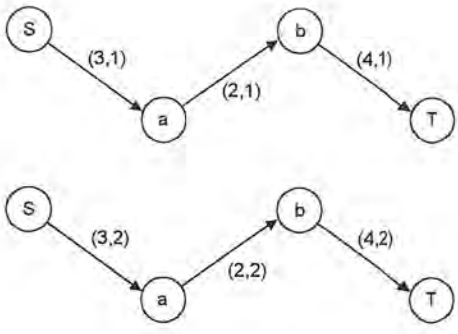
(S , a) , (a , b) , (c , T) เป็นด้านที่วางทิศในทางที่ควรเป็น

(d , b) , (c , d) เป็นด้านที่วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น

ถ้าสามารถหาทางเดิน P ชุดหนึ่งจาก source S ไปยัง sink T ที่ทุกด้านในทางดิน P ได้วางทิศในทางที่ควรเป็นแล้ว และ flow ในแต่ละด้านมีค่าน้อยกว่า capacity ของด้าน จึงเป็นไปได้ที่จะเพิ่มค่าของ flow

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

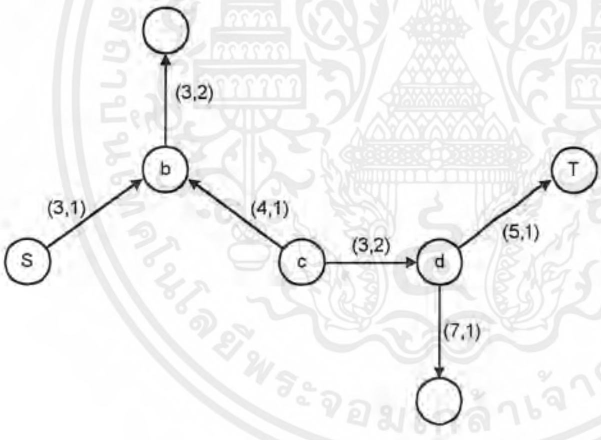
ตัวอย่าง 2.96



ด้านทุกด้านได้วางทิศในทางที่ควรเป็น ค่าของ flow ใน network นี้สามารถเพิ่มขึ้นได้อีก 1 หน่วย

เป็นไปได้ที่จะเพิ่มค่า flow ในทางเดินชุดหนึ่งจาก source ไปยัง sink โดยมีด้านที่วางทิศในทางที่ควรเป็นและมีด้านที่วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น

ตัวอย่าง 2.97



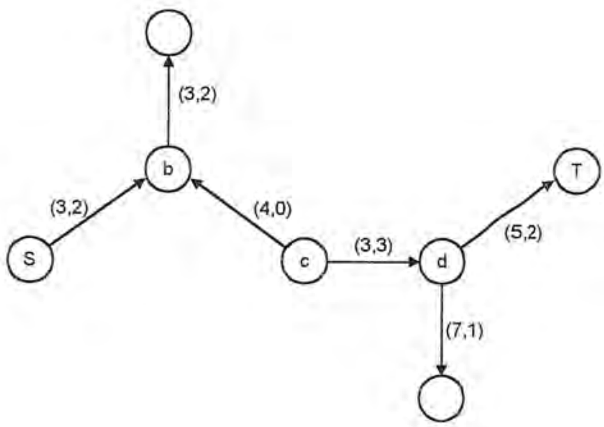
P = (S , b , c , d , T)

(S , b) , (c , d) และ (d , T) วางทิศในทางที่ควรเป็น

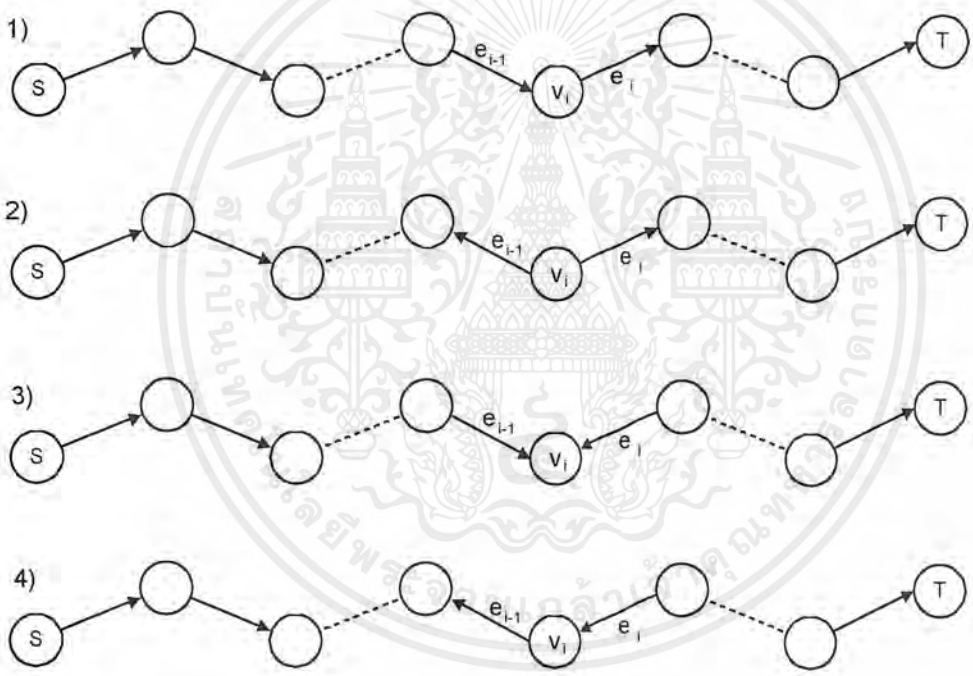
(c , b) วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น

ถ้าลด flow 1 หน่วย ในด้าน (c , b) นี้ แล้วเพิ่ม flow ขึ้นอีก 1 หน่วยในด้าน (S , b) , (c , d) และ (d , T) จะทำให้ได้ค่า flow ที่มากกว่าเดิม 1 หน่วย จาก S ไป T โดยไม่กระทบ flow อื่น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ให้ P เป็นทางเดินจาก source S ไป sink T และ v_i เป็นจุดยอดใดๆใน P ที่ไม่ใช่ S และ T แล้ว กรณีที่เป็นไปได้ สำหรับการวางทิศของด้าน e_{i-1} และ e_i ที่ตกกระทบจุดยอด v_i มี 4 แบบดังนี้



แบบ 1) ด้าน e_{i-1} และ e_i วางทิศในทางที่ควรเป็นแล้ว สามารถเพิ่มค่า flow ในด้าน e_{i-1} อีก 4 flow เข้าไปยัง v_i แล้วยังคงมี flow ออกจาก v_i ผ่านด้าน e_i เพิ่มขึ้นอีก 4

แบบ 2) เมื่อเพิ่ม flow ในด้าน e_i อีก 4 ต้องลด flow ในด้าน e_{i-1} ลง 4 เพื่อให้ flow เข้าไปยัง v_i เท่ากับ flow ออกจาก v_i

แบบ 3) เมื่อเพิ่ม flow ในด้าน e_{i-1} อีก 4 ต้องลด flow ในด้าน e_i ลง 4 เพื่อให้ flow เข้าไปยัง v_i เท่ากับ flow ออกจาก v_i

แบบ 4) ถ้าเพิ่ม flow ในด้านอื่นๆในทางเดินอีก 4 ต้องลดค่า flow ลง 4 ในด้าน e_{i-1} และ e_i

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทั้ง 4 แบบ เพิ่มค่า flow ในทางเดินจาก S ไป T ได้ก็ต่อเมื่อ ค่า flow เดิมในด้านน้อยกว่าความจุของด้าน

ทฤษฎีบท 2.39 ให้ P เป็นทางเดินจาก source S ไป sink T ใน network G และเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. สำหรับแต่ละด้าน (i , j) ที่วางทิศในทางที่ควรเป็นใน P $F_{ij} < k_{ij}$

ข. สำหรับแต่ละด้าน (i , j) ที่วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็นใน P $F_{ij} > 0$

ให้ $\Delta = \min \{ k_{ij} - F_{ij}$ สำหรับด้าน (i , j) ที่วางทิศในทางที่ควรเป็นใน P ,
F_{ij} สำหรับด้าน (i , j) ที่วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็นใน P }

ให้ F^* เป็น flow ซึ่ง

F_{ij} สำหรับด้าน (i , j)ที่ไม่อยู่ใน P

$F^*_{ij} =$ $F_{ij} + \Delta$ ถ้าด้าน (i , j) วางทิศในทางที่ควรเป็นใน P
$F_{ij} - \Delta$ ถ้าด้าน (i , j) วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็นใน P

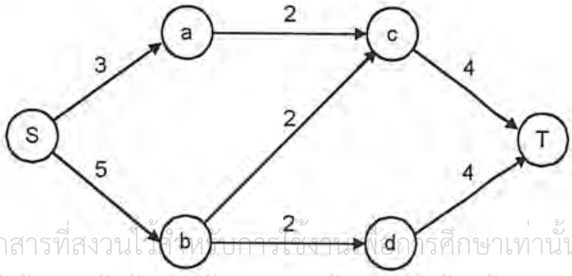
แล้ว F^* เป็น flow ที่มีค่ามากกว่าค่า flow F อยู่ Δ หน่วย
ถ้าไม่สามารถหาทางเดินที่มีคุณสมบัติดังกล่าวนี้ได้ แสดงว่า flow ที่ได้มีค่าสูงสุดแล้ว

เค้าโครงวิธีการหา flow มีดังนี้

1. เริ่มต้นด้วยการกำหนด flow ขึ้นชุดหนึ่ง เช่น flow ที่แต่ละด้านมีค่าเป็นศูนย์
2. หาทางเดินชุดหนึ่งที่เป็นไปตามเงื่อนไขในทฤษฎี ถ้าหาทางเดินไม่ได้ จบ แสดงว่า flow นั้นมีค่าสูงสุดแล้ว ถ้าหาทางเดินจาก source ไป sink ได้ให้ไปทำขั้น 3
3. เพิ่ม flow ในทางเดินอีก Δ หน่วย โดย Δ นิยามในทฤษฎีแล้ว แล้วกลับไปทำขั้น 2

ในระหว่างการหาทางเดินนั้น ควรหาปริมาณ $k_{ij} - F_{ij}$ และ F_{ij} (สำหรับด้านที่วางทิศในทางที่ควรเป็น และด้านที่วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น) ไปพร้อมๆกัน

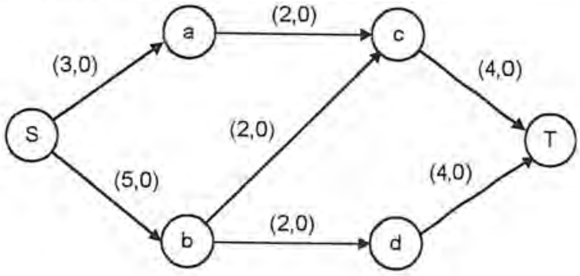
ตัวอย่าง 2.98 จงหา maximal flow ของ network ดังรูป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดอันดับของจุดยอดใน network เป็น S , a , c , b , d , T

และให้ label จุดยอด S ด้วย (, ∞)



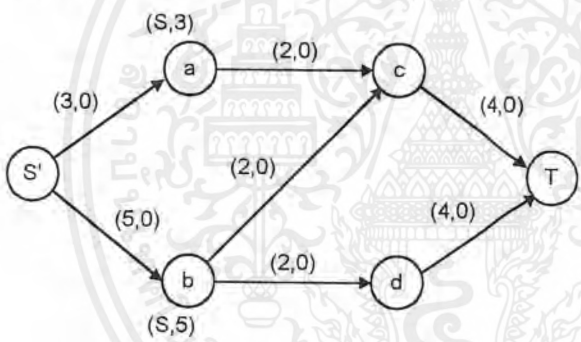
S เป็นจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุด และยังไม่ถูกตรวจสอบ

ตรวจสอบด้าน (S , a) และ (S , b)

สำหรับด้าน (S , a) พบว่า $F_{sa} = 0 < C_{ab} = 3$ จึง label จุดยอด a ด้วย (S , 3)

เนื่องจาก $3 = \min\{\infty, (3-0)\}$

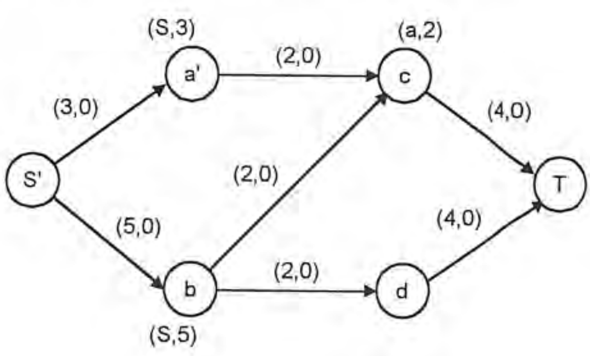
ในทำนองเดียวกันสำหรับ (S , b) label b ด้วย (S , 5) ให้ S เป็น S' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : a

ตรวจสอบด้าน (a , c) และให้ label จุด c ด้วย (a , 2) ให้ a เป็น a' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

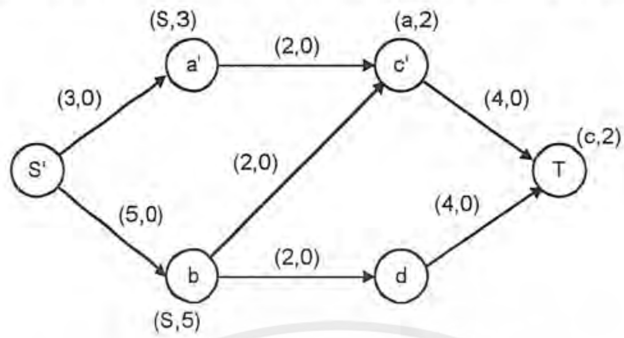


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

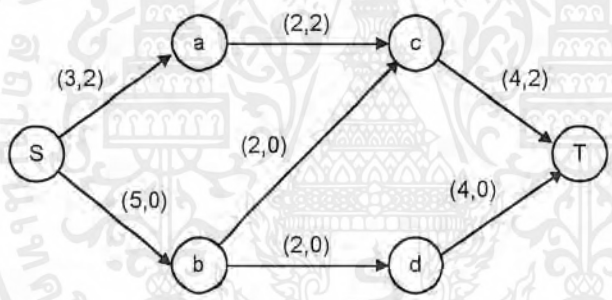
พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : c

ตรวจสอบด้าน (c , T) และให้ label จุด T ด้วย (c , 2) ให้ c เป็น c' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

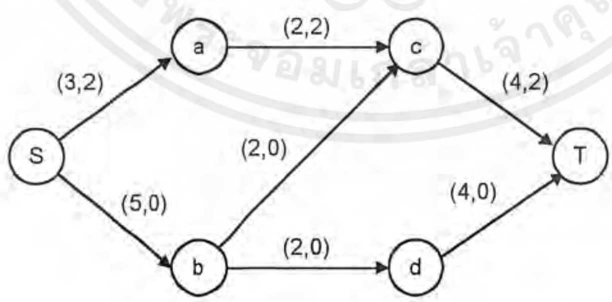


จุดยอด T ถูก label แล้ว ได้ทางเดิน P : S , a , c , T

เนื่องจากทุกด้านใน P วางทิศในทางที่ควรเป็น สามารถเพิ่มค่า flow ในแต่ละด้านของ P อีก $\Delta = 2$ โดย 2 นี้มาจาก label ที่จุดยอด T แล้วลบ label ทุกค่าจากจุดยอด



กลับไปทำใหม่ให้ label จุดยอด S ด้วย (, ∞)



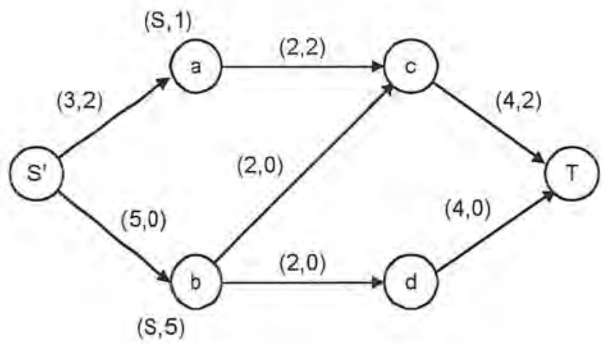
S เป็นจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุดและยังไม่ถูกตรวจสอบ ตรวจสอบด้าน (S , a) และ (S , b)

Label a ด้วย $\min\{\infty, 3-2\} \Rightarrow (S,1)$

Label b ด้วย $\min\{\infty, 5-0\} \Rightarrow (S,5)$

ให้ S เป็น S' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



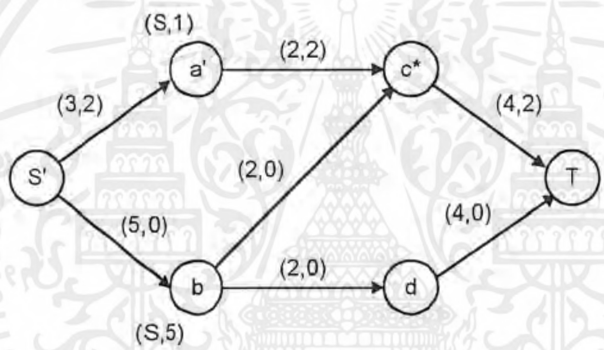
จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : a

ตรวจสอบด้าน (a , c)

จาก min{1,(2-2)} = 0 เนื่องจาก $F_{ac} = C_{ac} = 2$ จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

ให้ a เป็น a' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



จุดยอด T ยังไม่ถูก label

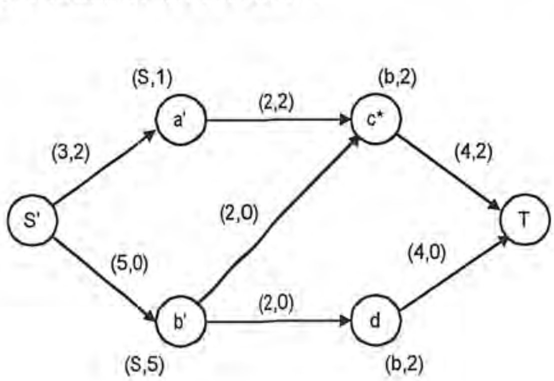
พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : b

ตรวจสอบด้าน (b , c) และ (b , d)

label จุด c ด้วย min{5,(2-0)} คือ (b , 2)

label จุด d ด้วย min{5,(2-0)} คือ (b , 2)

ให้ b เป็น b' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

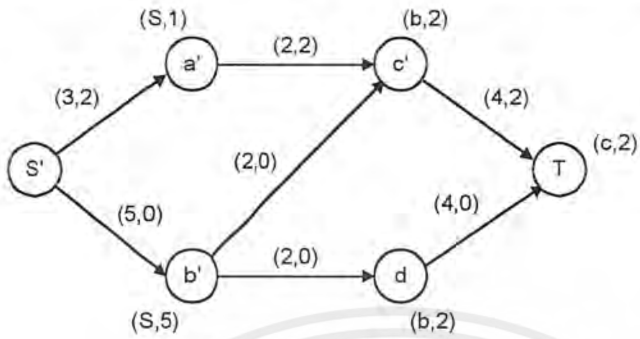


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

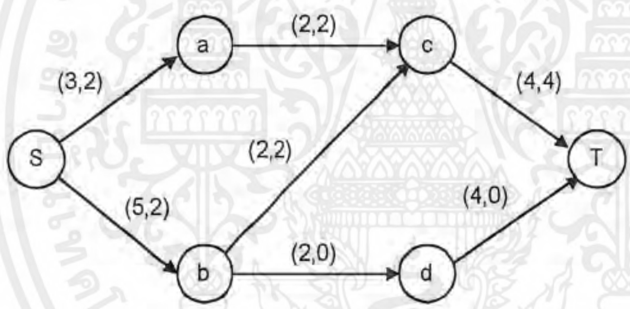
พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : c

ตรวจสอบด้าน (c , T) และให้ label จุด T ด้วย (c , 2) ให้ c เป็น c' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

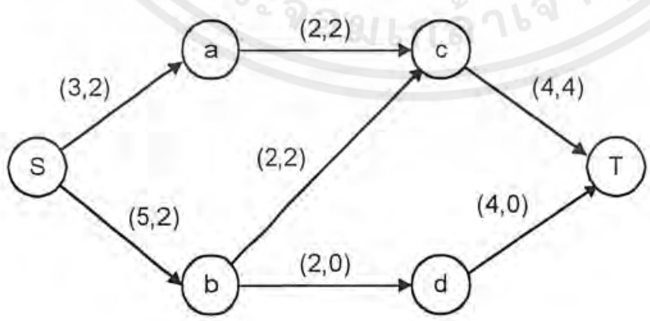


จุดยอด T ถูก label แล้วได้ทางเดิน P : S , b , c , T

เนื่องจากทุกด้านใน P วางทิศในทางที่ควรเป็น สามารถเพิ่มค่า flow ในแต่ละด้านของ P อีก $\Delta = 2$ โดย 2 นี้มาจาก label ที่จุดยอด T แล้วลบ label ทุกค่าจากจุดยอด



กลับไปทำใหม่ให้ label จุดยอด S ด้วย (, ∞)



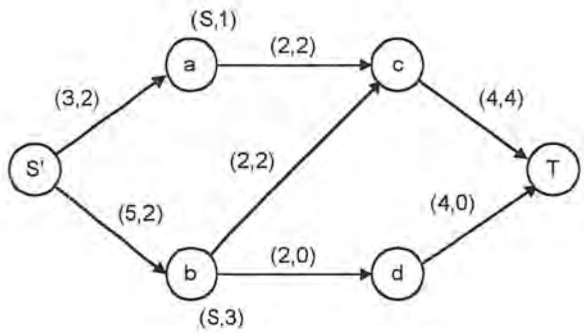
S เป็นจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุดและยังไม่ถูกตรวจสอบ ตรวจสอบด้าน (S , a) และ (S , b)

Label a ด้วย $\min\{\infty, 3-2\} \Rightarrow (S,1)$

Label b ด้วย $\min\{\infty, 5-2\} \Rightarrow (S,3)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ S เป็น S' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



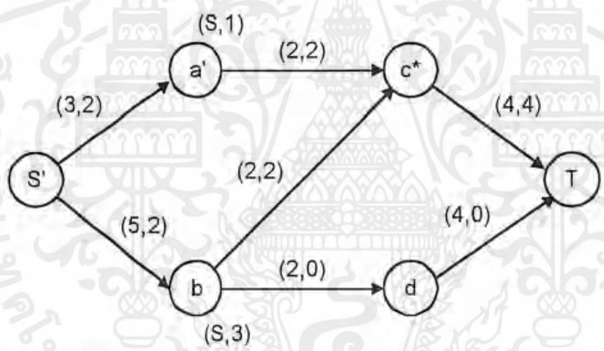
จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : a

ตรวจสอบด้าน (a , c)

จาก min{1,(2-2)} = 0 เนื่องจาก $F_{ac} = C_{ac} = 2$ จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

ให้ a เป็น a' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : b

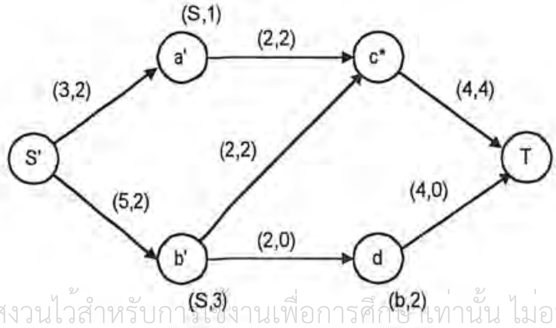
ตรวจสอบด้าน (b , c) และ (b , d)

label จุด c ด้วย min{3,(2-2)} = 0

เนื่องจาก $F_{bc} = C_{bc} = 2$ จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

label จุด d ด้วย min{3,(2-0)} คือ (b , 2)

ให้ b เป็น b' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

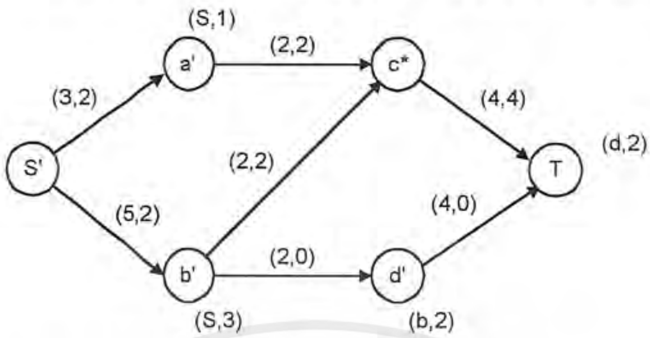


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษา เท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

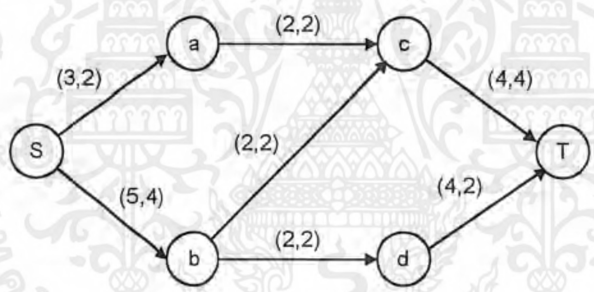
พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : d

ตรวจสอบด้าน (d , T) และให้ label จุด T ด้วย (d , 2) ให้ d เป็น d' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

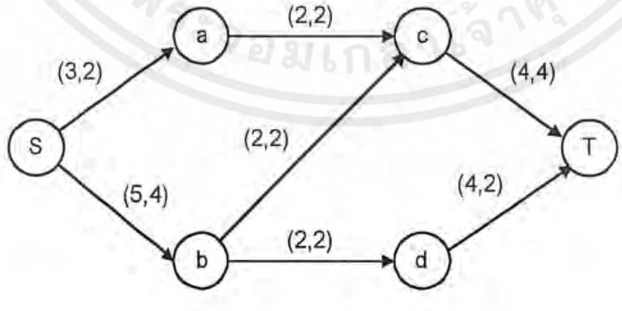


จุดยอด T ถูก label แล้วได้ทางเดิน P : S , b , d , T

เนื่องจากทุกด้านใน P วางทิศในทางที่ควรเป็น สามารถเพิ่มค่า flow ในแต่ละด้านของ P อีก $\Delta = 2$ โดย 2 นี้มาจาก label ที่จุดยอด T แล้วลบ label ทุกค่าจากจุดยอด



กลับไปทำใหม่ให้ label จุดยอด S ด้วย (, ∞)



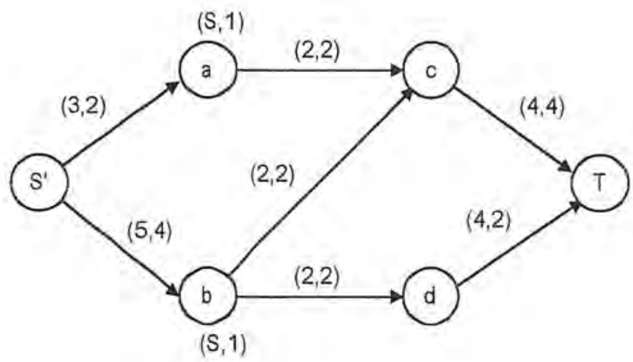
S เป็นจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุดและยังไม่ถูกตรวจสอบ ตรวจสอบด้าน (S , a) และ (S , b)

Label a ด้วย $\min\{\infty, 3-2\} \Rightarrow (S,1)$

Label b ด้วย $\min\{\infty, 5-4\} \Rightarrow (S,1)$

ให้ S เป็น S' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : a

ตรวจสอบด้าน (a , c)

จาก min{1,(2-2)} = 0 เนื่องจาก $F_{ac} = C_{ac} = 2$ จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

ให้ a เป็น a' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมา ที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : b

ตรวจสอบด้าน (b , c) และ (b , d)

จาก min{1,(2-2)} = 0

เนื่องจาก $F_{bc} = C_{bc} = 2$ จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

จาก min{1,(2-2)} = 0

เนื่องจาก $F_{bd} = C_{bd} = 2$ จะไม่ label ค่าที่ d และให้ d เป็น d^*

ให้ b เป็น b' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : T

ซึ่งเป็นจุดสุดท้าย จบ flowคือ 4+2 = 6

ขั้นตอนการหา maximal flow ชุดหนึ่งใน network

ให้ G เป็น network ที่มี source S , sink T และความจุ C ความจุของแต่ละด้านมีค่าเป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

เรียงอันดับจุดยอดของ G ดังนี้ $S = v_0, v_1, v_2, ..., v_n = T$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. [ตั้งต้นค่า flow] ให้ $F_{ij}=0$ สำหรับแต่ละด้าน (v_i, v_j)
2. [label จุดยอด S] label จุดยอด S ด้วย (, ∞)
3. [label จุดยอด T หรือยัง] ถ้าจุดยอด T ได้รับการ label แล้วให้ไปขั้นที่ 6
4. [Next labeled vertex] เลือกจุดยอด v_i ที่ได้รับการ label แต่ยังไม่ได้รับการตรวจสอบ ที่มี subscript i น้อยที่สุด ถ้าหาไม่ได้ จบ แสดงว่า flow นั้นมีค่าสูงสุดแล้ว ถ้าหาได้ให้ $v = v_i$
5. [label จุดยอดที่อยู่ประชิด] ถ้า (∞, Δ) เป็น label ของจุดยอด v ตรวจดูแต่ละด้านที่อยู่ในรูป (v , w) และ (w , v) เมื่อ w ยังไม่ได้รับการ label โดย w อาจเป็น $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ และดำเนินการดังนี้

สำหรับด้านในรูปแบบ (v , w)

ถ้า $F_{vw} < C_{vw}$ ให้ label จุดยอด w ด้วย $(v, \min\{\Delta, (C_{vw} - F_{vw})\})$

ถ้า $F_{vw} = C_{vw}$ ไม่ต้อง label จุดยอด w

สำหรับด้านในรูปแบบ (w , v)

ถ้า $F_{wv} > 0$ ให้ label จุดยอด w ด้วย $(v, \min\{\Delta, F_{wv}\})$

ถ้า $F_{wv} = 0$ ไม่ต้อง label จุดยอด w

กลับไปขั้นที่ 3

6. [ปรับค่า flow] สมมติ label ของ sink T คือ (r, Δ) ให้ $W_0 = T, W_1 = r$ ถ้า label ของ w_i คือ (r', Δ') ก็ให้ $w_{i+1} = r'$ ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนกระทั่ง $w_k = S$ สำหรับบาง k ที่เป็นจำนวนเต็ม

   ขณะนี้จะได้ทางเดิน $P : S = w_k, w_{k-1}, \ldots, w_1, w_0 = T$ เป็นทางเดินชุดหนึ่งจาก S ไป T ปรับค่า flow บนด้านใน P ดังนี้

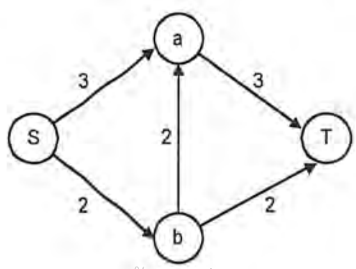
   ถ้าด้าน e ใน P วางทิศในทางที่ควรเป็น ให้เพิ่มค่า flow ในด้าน e นั้นอีก Δ

   ถ้าด้าน e ใน P วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น ให้ลดค่า flow ในด้าน e นั้นลง Δ

   แล้วลบ label จากทุกจุดยอดใน network G

   กลับไปขั้นที่ 2

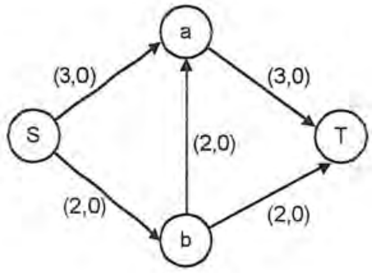
ตัวอย่าง 2.99 จงหา maximal flow ของ network ดังรูป



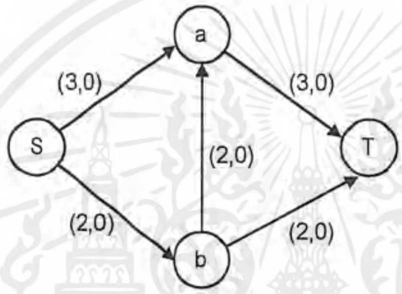
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

List อันดับของจุดยอด S , a , b , T

1. $F_{ij} = 0$

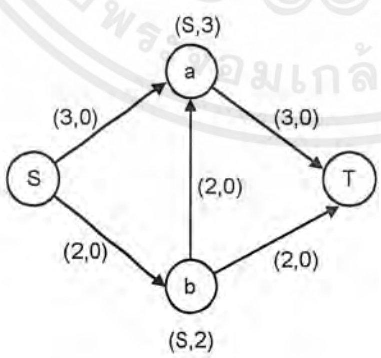


2. label S ด้วย (, ∞)



3. จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label
4. เลือกจุดยอดที่ได้รับการ label แต่ยังไม่ได้ตรวจสอบที่มีอันดับต่ำสุดใน list คือ S
5. $(S,a) \Rightarrow \min\{\infty,(3-0)\} = 3 \Rightarrow$ ที่ a label (S,3)

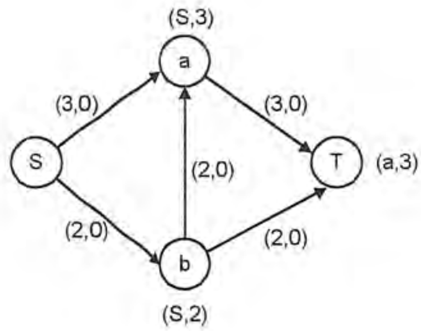
   $(S,b) \Rightarrow \min\{\infty,(2-0)\} = 2 \Rightarrow$ ที่ b label (S,2)



ไปที่ 3

3. จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label
4. เลือก a
5. $(a,T) \Rightarrow \min\{3,(3-0)\} = 3 \Rightarrow$ ที่ T label (a,3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



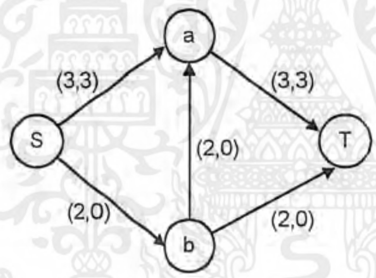
ไปที่ 3

3. จุดยอด T ได้รับการ label แล้ว ไปที่ 6
6. label ที่ T คือ (a,3)

   $w_0 = T, w_1 = a$ label ที่ w_1 คือ (S,3) ดังนั้น $w_2 = S$

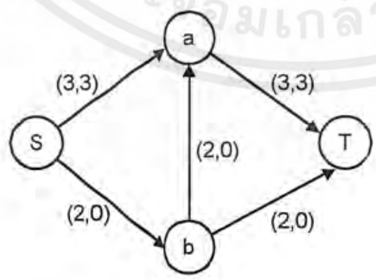
   จะได้ path P : S , a , T ซึ่งวางทิศในทางที่ควรเป็น

   ปรับค่า flow ใน P โดยเพิ่มทุกด้านอีก 3 แล้วลบ label จากทุกจุดยอด



ไปที่ 2

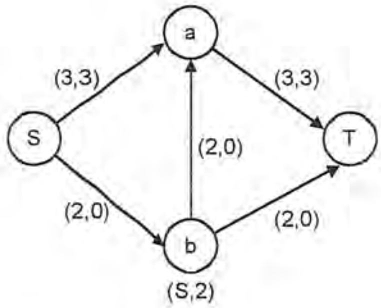
2. label S ด้วย (, ∞)



3. จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label
4. เลือก a
5. $(S,a) \Rightarrow \min\{\infty,(3-3)\} = 0 \Rightarrow$ ที่ a ไม่ label

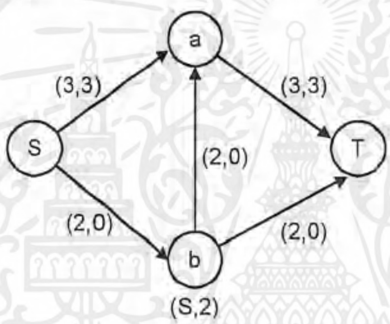
   $(S,b) \Rightarrow \min\{\infty,(2-0)\} = 2 \Rightarrow$ ที่ b label (S,2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ไปที่ 3

3. จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label
4. เลือกจุดยอดที่ได้รับการ label แต่ยังไม่ได้ตรวจสอบที่มีอันดับต่ำสุดใน list คือ b
5. $(b,a) \Rightarrow \min\{2,(2-0)\} = 2 \Rightarrow$ ที่ a label (b,2)



$(b,T) \Rightarrow \min\{2,(2-0)\} = 2 \Rightarrow$ ที่ T label (b,2)

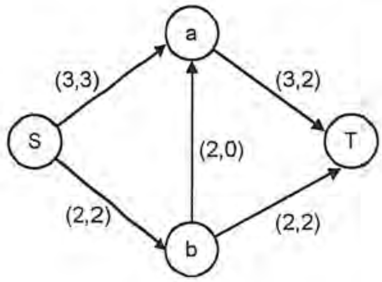
ไปที่ 3

3. จุดยอด T ได้รับการ label แล้ว ไปที่ 6
6. label ที่ T คือ (b , 2)

   $w_0 = T, w_1 = b$ label ที่ w_1 คือ (S,2) ดังนั้น $w_2 = S$

   จะได้ path P : S , b , T ซึ่งวางทิศในทางที่ควรเป็น

   ปรับค่า flow ใน P โดยเพิ่มทุกด้านอีก 2 แล้วลบ label จากทุกจุดยอด



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ไปที่ 2

2. label S ด้วย (, ∞)
3. จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label
4. เลือก S
5. $(S,a) \Rightarrow \min\{\infty,(3-3)\} = 0 \Rightarrow$ ที่ a ไม่ label

   $(S,b) \Rightarrow \min\{\infty,(2-2)\} = 0 \Rightarrow$ ที่ b ไม่ label

   ไปที่ 3

3. จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label
4. จุดยอดที่ยังไม่ได้ เหลือเพียงจุดเดียวคือ T ซึ่ง T เป็น sink ดังนั้น จบ

ค่าของ flow คือ 3+2 = 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9 แบบฝึกหัด

2.9.1 Graph and Connectivity

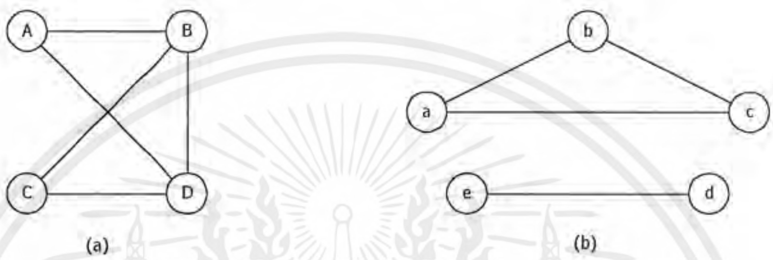
1. จงเขียนแผนภาพของกราฟ $G(V,E)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(a) $= \{A,B,C,D\}$, $E = \{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}\}$

(b) $= \{a,b,c,d,e\}$, $E = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{d,e\}\}$

กราฟใด (ถ้ามี) เป็น connected กราฟ

เฉลย



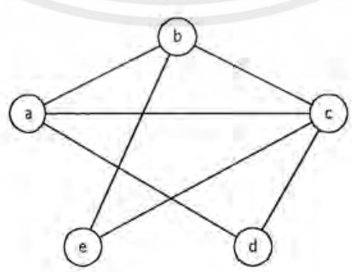
รูปที่ 2.14

เขียนจุดสำหรับจุดยอด v แต่ละจุดใน V และสำหรับ edge $\{x, y\}$ แต่ละ edge ใน E ลากเส้นเชื่อมจุดยอด x และ y ดังแสดงในรูป 2.14 กราฟ (a) เป็น connected กราฟ แต่กราฟ (b) ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง เพราะไม่มี path จากจุดยอด a ไปยังจุดยอด b เป็นต้น

2. พิจารณารูปที่ 2.15

(a) จงอธิบายกราฟ G ในแผนภาพ

(b) จงหาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด สำหรับกราฟนี้



รูปที่ 2.15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เฉลย

(a) กราฟ G ในแผนภาพมีจุดยอด 5 จุด ดังนั้น $V=\{a,b,c,d,e\}$ มีคู่ $\{x,y\}$ เจ็ดคู่ ซึ่งมี edge เชื่อมจุดยอด x และ y ดังนั้น

$E=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\}\}$

(b) ดีกรีของจุดยอดคือ จำนวน edge ซึ่งกระทบกับจุดยอดนั้น เช่น deg(a)=3 เพราะ a กระทบกับ edge 3 edgesคือ $\{a,b\},\{a,c\},\{a,d$ ในทำนองเดียวกันจะได้

$\deg(b)=3, \deg(c)=4, \deg(d)=2, \deg(e)=2$

ผลบวกดีกรีของจุดยอดคือ $3+3+4+2+2=14$ ซึ่งเท่ากับสองเท่าของจำนวน edges ของกราฟ

3. พิจารณากราฟในรูปที่ 2.16 จงหา

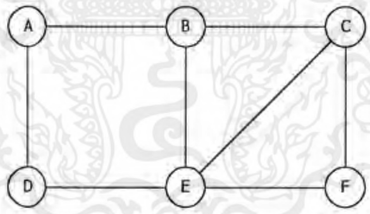
(a) paths จากจุดยอด A ถึง F ทั้งหมด

(b) trails จากจุดยอด A ถึง F ทั้งหมด

(c) ระยะทางระหว่าง A และ F

(d) diameter ของกราฟ

เฉลย



รูปที่ 2.16

(a) path จาก A ถึง F คือ ทางเดินซึ่งไม่มีจุดยอดซ้ำกัน ดังนั้น ย่อมไม่มี edge ซ้ำกัน path ดังกล่าวมี 7 paths คือ

(A,B,C,F) $\quad$ (A,D,E,F)

(A,B,C,E,F) $\quad$ (A,D,E,B,C,F)

(A,B,E,F) $\quad$ (A,D,E,C,F)

(A,B,E,C,F)

(b) trail จาก A ถึง F คือ ทางเดินซึ่งไม่ edge ซ้ำกัน trail จาก A ถึง F มี 9 trails คือ 7 paths ใน (a) พร้อมด้วย (A,D,E,B,C,E,F) และ (A,D,E,C,B,E,F)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

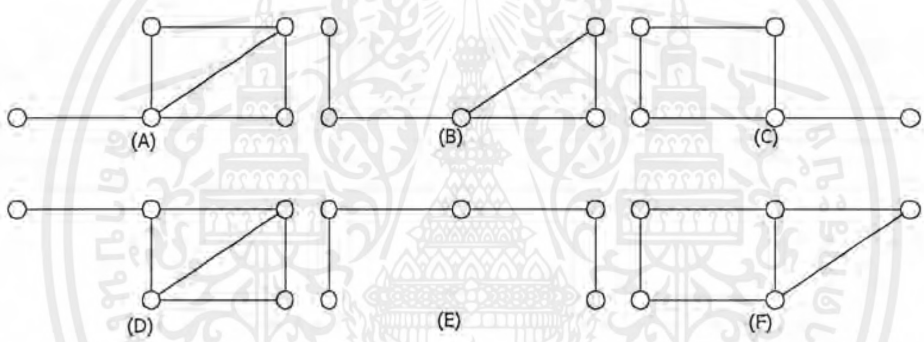
(c) ระยะทางจาก จาก A ถึง F เท่ากับ 3 เพราะมี path เช่น (A, B, C, F) จาก A ถึง F ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 และไม่มี path จาก A ถึง F ที่สั้นกว่านี้

(d) ระยะทางระหว่างจุดยอดสองจุดใดๆไม่เกิน 3 และระยะทางจาก A ถึง F เท่ากับ3 ดังนั้น diameter ของกราฟคือ 3

4. พิจารณากราฟในรูปที่ 2.16 จงหา subgraphs ซึ่งได้จากการลบจุดยอดแต่ละจุด กราฟนี้มีจุดตัดหรือไม่

เฉลย

เมื่อลบจุดยอดจากกราฟ เราจะลบ edge ทุก edge ที่กระทบกับจุดยอดนั้นออกด้วย เมื่อลบจุดยอดแต่ละจุดของกราฟในรูปที่ 2.16 จะได้กราฟหกกราฟในรูปที่ 2.17 กราฟทั้งหกเป็น connected กราฟ แสดงว่าไม่มีจุดยอดใดเป็นจุดตัด



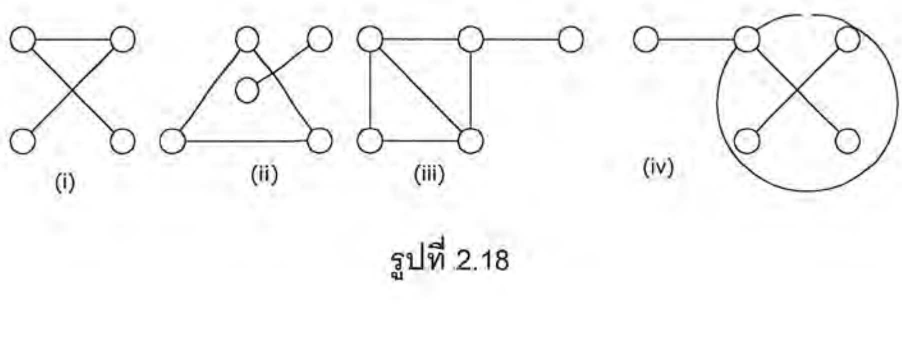
รูปที่ 2.17

5. multigraphs ใดในรูปที่ 2.18

(a) เป็น connected กราฟ

(b) ไม่มี loop

(c) เป็นกราฟ



รูปที่ 2.18

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

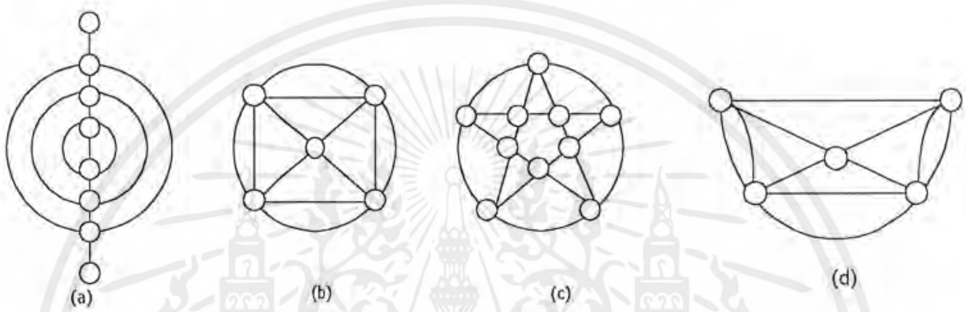
เฉลย

(a) เฉพาะ (1) และ (3) เท่านั้นที่เป็น connected กราฟ

(b) เฉพาะ (4) เท่านั้นที่มี loop นั่นคือมี edge ที่มีจุดปลายเหมือนกัน

(c) เฉพาะ (1) และ (2) เท่านั้นที่เป็น กราฟ (3) เป็น multigraph เพราะมีจุดยอดคู่หนึ่งซึ่งเชื่อมด้วย edges มากกว่า 1 edges ส่วน multigraph (4) ก็เช่นกัน นอกจากนั้นยังมี loop ด้วย

6. multigraphs ใดในรูปที่ 2.19 เดินข้ามได้



รูปที่ 2.19

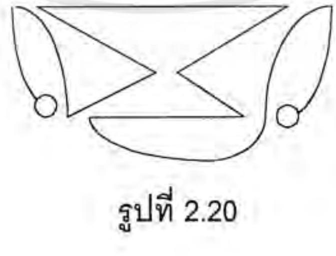
เฉลย

(a) เดินข้ามได้ เพราะมีจุดยอดคู่หกจุดและจุดยอดคี่สองจุด

(b) เดินข้ามไม่ได้เพราะมีจุดยอดคี่สามจุด

(c) เดินข้ามได้เพราะจุดยอดทั้งสิบจุดเป็นจุดยอดคู่

(d) เดินข้ามได้เพราะมีจุดยอดคี่สองจุด path ที่ข้ามได้จะต้องเริ่มที่จุดยอดคี่จุดหนึ่งจุดใด ดูรูปที่ 2.20 เป็นตัวอย่าง



รูปที่ 2.20

7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ว่า จะมี ทางเดินจากจุดยอด u ถึงจุดยอด v ก็ต่อเมื่อมี pathจาก u ถึง v

เฉลย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก path ทุก path เป็นทางเดิน ดังนั้นเราเพียงแต่พิสูจน์ว่า ถ้ามีทางเดิน W จาก u ถึง v แล้วจะมี pathจาก u ถึง v เราจะพิสูจน์โดยใช้ความยาวของ W สมมติให้ความยาวของ W คือหนึ่ง นั่นคือ ให้ $W=(u,v)$ ดังนั้น W จะเป็น path จาก u ถึง v ขั้นต่อไปสมมติให้ความยาวของ $W=n-1$ เช่น สมมติให้

$$W=(u=v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-i}, v_n=v)$$

ถ้าไม่มีจุดยอดใดซ้ำกันแล้ว W จะเป็น pathจาก u ถึง v สมมติว่ามีจุดยอดคู่หนึ่งซ้ำกัน เช่น สมมติว่า $v_i=v_j$ เมื่อ $i<j$ ดังนั้น

$$W'=(v_0, v_1, \ldots, v_j, v_{j-1}, \ldots, v_n)$$

จะเป็นทางเดินจาก $u=v_0$ ถึง $v=v_n$ ซึงมีความยาวน้อยกว่า n โดยการสมมติ แสดงว่าจะต้องมี path จาก u ถึง v

8. จงพิสูจน์ทฤษฎีออยเลอร์ : finite connected กราฟ G เป็น eulerian ก็ต่อเมื่อจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีคู่

เฉลย

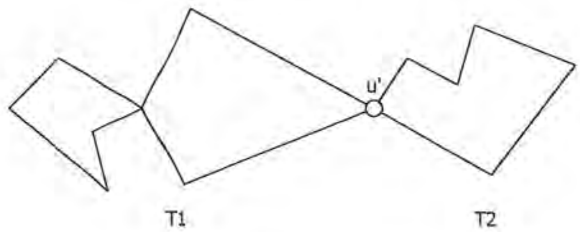
สมมติให้ G เป็น eulerian และ T เป็น closed eulerian trail สำหรับจุดยอด v ใดๆของ G trail T จะเข้าสู่จุดยอด v และออกจากจุดยอด v เป็นจำนวนครั้งที่เท่ากัน โดยไม่ซ้ำ edge ใดเลย ดังนั้น v มีดีกรีคู่

ในทางกลับกัน สมมติว่าจุดยอดแต่ละจุดของ G มีดีกรีคู่ เราจะสร้าง eulerian trail โดยเริ่มต้น trail T_1 ที่ edge e ใดๆ ขยาย T_1 โดยเพิ่ม edge ขึ้นทีละหนึ่ง edge ถ้า T_1 ไม่เป็น closed trail เช่นสมมุติว่า T_1 เริ่มต้นที่ u และสิ้นสุดที่ $v \neq u$ ดังนั้น จำนวน edges ที่กระทบกับ v และปรากฏใน T_1 จะเป็นจำนวนคี่ แสดงว่าเราสามารถขยาย T_1 ออกไปทาง edge อีก edge หนึ่งที่กระทบกับ v เราขยาย T_1 ออกไปเรื่อยๆจนกระทั่ง T_1 วกกลับไปยังจุดเริ่มต้น u นั่นคือ จนกระทั่ง T_1 เป็น close trail ถ้า T_1 ประกอบด้วย edge ทุก edge ของ G แล้ว T_1 จะเป็น eulerian trail ที่ต้องการ

สมมติว่า T_1 รวม edge ทุก edge ของ G พิจารณากราฟ H ที่ได้จากการลบ edgeที่อยู่ใน T_1 ทั้งหมดออกจาก G H อาจจะไม่เป็น connected กราฟ แต่จุดยอดแต่ละจุดของ H จะมีดีกรีคู่ เพราะ T_1 ประกอบด้วยedge เป็นจำนวนคู่ที่กระทบกับจุดยอดใดๆ เนื่องจาก G เป็น connected กราฟจะต้องมี edge e' ของ H ที่มีจุดปลาย u' อยู่ใน T_1 เราสร้าง trail T_2 ใน H โดยเริ่มต้นที่ u' และใช้ e' เนื่องจากจุดยอดทุกจุดใน H มีดีกรีคู่ เราสามารถขยาย T_2 ใน H จนกระทั่ง T_2 วกกลับมายัง u' ดังแสดงใน รูปที่ 2.21 เห็นได้ชัดว่าเราสามารถนำ T_1 และ T_2 มาต่อกัน ซึ่งจะได้ close trail

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใน G ซึ่งยาวขึ้นกว่าเดิม ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆจนกระทั่ง edge ทุก edge ของ G ถูกใช้ทั้งหมด ในที่สุดเราจะได้ close trail ซึ่งประกอบด้วย edge ทุก edge ของ G ดังนั้น G เป็น eulerian



รูปที่ 2.21

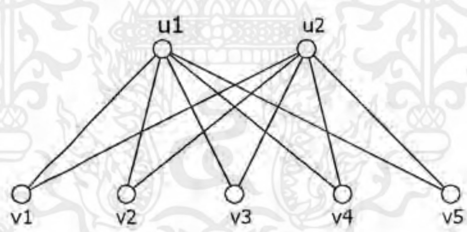
2.9.2 กราฟพิเศษและการแทนด้วยเมทริกซ์

(Special Graphs and Matrix Representations)

9. จงเขียนกราฟ $K_{2,5}$

เฉลย

$K_{2,5}$ มีจุดยอดเจ็ดจุด แบ่งออกเป็นเซต M ซึ่งประกอบด้วยจุดยอด 2 จุด สมมติให้เป็น u_1 และ u_2 และเซต N ประกอบด้วยห้าจุด สมมติให้เป็น v_1, v_2, v_3, v_4 และ v_5 edge ทุก edge เชื่อมระหว่าง u_i และ v_j ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ดังแสดงใน รูปที่ 2.22



รูปที่ 2.22

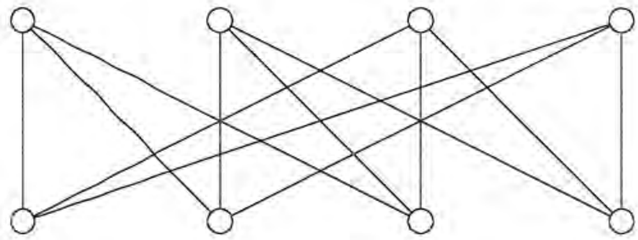
10. connected กราฟใดที่เป็นทั้ง กราฟปกติ และ bipartite กราฟ

เฉลย

bipartite กราฟ $K_{m,m}$ ใดๆเป็นกราฟปกติซึ่งมีดีกรี m เพราะจุดยอดแต่ละจุดจะต้องเชื่อมกับจุด

ยอดอื่น m จุด ดังนั้นจะมีดีกรี m subgraph ของ $K_{m,m}$ จะเป็นกราฟปกติด้วย ถ้า subgraph นั้นเกิดจากการลบ edge m edge ซึ่งไม่มีส่วนร่วมกันออก ตัวอย่างเช่น subgraph ของ $K_{4,4}$ ซึ่งแสดงใน รูปที่ 2.23

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



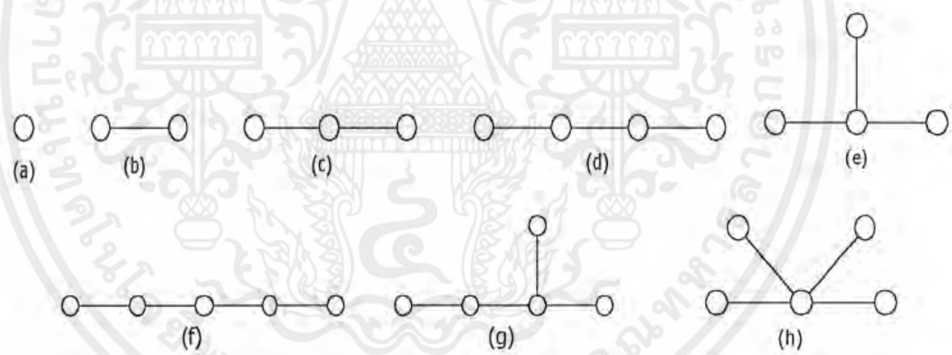
รูปที่ 2.23

เป็นกราฟปกติซึ่งมีดีกรี 3 เราสามารถทำการลบ edge m edge ที่ไม่มีส่วนร่วมกันต่อไปเรื่อยๆ แต่ละครั้งที่ทำจะได้กราฟปกติซึ่งมีดีกรีน้อยลง 1 กราฟเหล่านี้อาจไม่ใช่ connected กราฟ แต่ส่วนประกอบที่เชื่อมโยงจะมีสมบัติตามที่ต้องการ

11. จงเขียนกราฟต้นไม้ทั้งหมดที่มีจุดยอดห้าจุดหรือน้อยกว่า

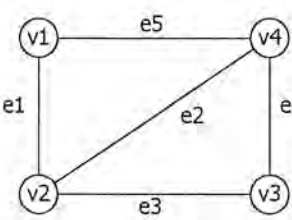
เฉลย

กราฟต้นไม้ดังกล่าวมีทั้งหมดแปดกราฟ ดังแสดงใน รูปที่ 2.24 เรียกกราฟที่มีจุดยอดเดียวและไม่มี edge ว่า trivial tree



รูปที่ 2.24

12. จงหา adjacency matrix $A=(a_{ij})$ และ incidence matrix $M=(m_{ij})$ ของกราฟใน รูปที่ 2.25



รูปที่ 2.25

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เฉลย

adjacency matrix $A=(a_{ij})$ คือเมทริกซ์ซึ่งกำหนดให้ $a_{ij}=1$ ถ้ามี edge $\{v_i,v_j\}$ มิฉะนั้นจะกำหนดให้ $a_{ij}=0$ ดังนั้น

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

incidence matrix $M=(m_{ij})$ คือเมทริกซ์ซึ่งกำหนดให้ $m_{ij}=1$ ถ้าจุดยอด v_i กระทบกับ edge e_j มิฉะนั้นจะกำหนดให้ $m_{ij}=0$ ดังนั้น

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

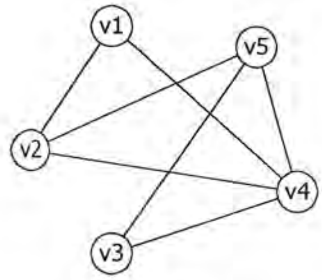
13. จงเขียนกราฟ G ซึ่งมีเมทริกซ์ $A=(a_{ij})$ ต่อไปนี้เป็น adjacency matrix

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

เฉลย

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์จตุรัสอันดับ 5 ดังนั้นกราฟ G มีจุดยอด 5 จุด สมมติว่าคือ $v_1,\ldots,v_5$ เขียน edge จาก v_i ไปยัง v_j ถ้า $a_{ij}=1$ จะได้กราฟดังแสดงใน รูปที่ 2.26

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



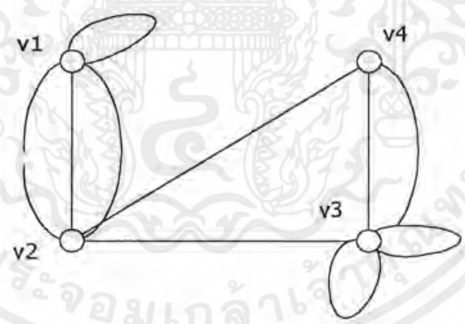
รูปที่ 2.26

14. จงเขียน multigraph G ซึ่งมีเมทริกซ์ $A=(a_{ij})$ ต่อไปนี้เป็น adjacency matrix

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0&0\\3&0&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&0\end{bmatrix}$$

เฉลย

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 4 ดังนั้น G มีจุดยอด 4 จุด เช่นให้ $v_1,\ldots,v_4$ เป็นจุดยอดของ G เขียน edge n edges จาก v_i ไปยัง v_j ถ้า $a_{ij}=n$ จะเห็นว่ามี loop n loops ถ้า $a_{ij}=n$ เราได้ multigraph ดังแสดงใน รูปที่ 2.27



รูปที่ 2.27

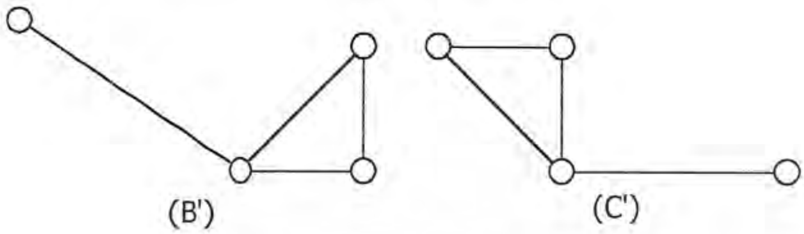
15. จงแสดงว่ากราฟทั้งหกกราฟที่ได้ในข้อ 4 แตกต่างกัน นั่นคือ แสดงว่าไม่มีกราฟคู่ใด isomorphic กันพร้อมกับแสดงว่า กราฟ (b) และ (c) homeomorphic กัน

เฉลย

เราไม่สามารถจับคู่ดีกรีจุดยอดทั้งห้าของกราฟใดๆกับดีกรีจุดยอดทั้งห้าของกราฟอื่นๆยกเว้นกราฟ (b) และ (c) แสดงว่าไม่มีกราฟใดเป็น isomorphic กันยกเว้นกราฟ (b) และ (c)ที่อาจจะเป็นไปได้ แต่เมื่อเราลบจุดยอดที่มีดีกรี 3 ของกราฟ(b) และ (c)จะได้กราฟย่อยซึ่งแตกต่างกัน ดัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

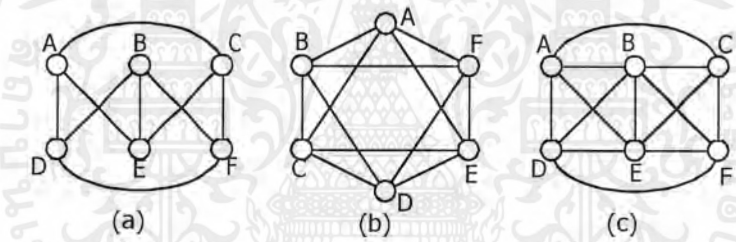
นั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่กราฟ(b) และ (c)จะเป็น isomorphic กัน ดังนั้นจะกล่าวได้ว่ากราฟทั้งหกไม่มีกราฟใดเป็น isomorphic กันเลย อย่างไรก็ดี กราฟ(b)
และ (c) homeomorphic กัน เพราะกราฟทั้งสองได้จากกราฟใน รูปที่ 2.28 โดยการเพิ่มจุดยอดที่เหมาะสม และกราฟทั้งสองในรูป 1.15 เป็น isomorphic กัน



รูปที่ 2.28

2.9.3กราฟระนาบและแผนที่ (Planar Graphs, Maps)

16. จงเขียนตัวแทนเชิงระนาบของแต่ละกราฟใน รูปที่ 2.29 ถ้าเป็นไปได้



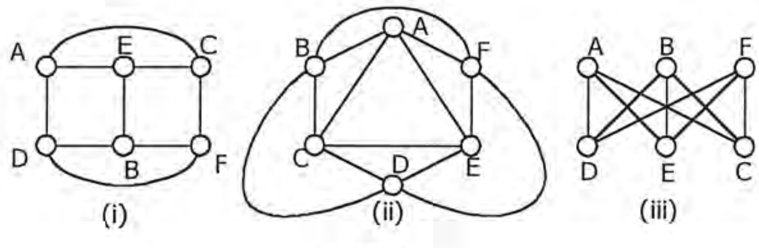
รูปที่ 2.29

เฉลย

(a) เปลี่ยนตำแหน่งของจุดยอด B และ E จะได้ตัวแทนเชิงระนาบของกราฟดังใน รูปที่ 2.30 (1)

(b) กราฟนี้ไม่ใช่กราฟรูปดาว K_5 มีตัวแทนเชิงระนาบดังใน รูปที่ 2.30 (2)

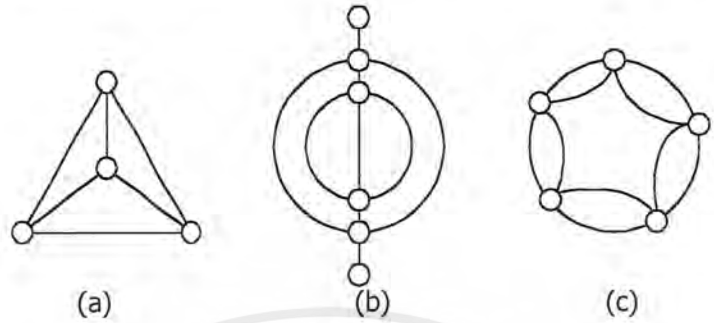
(c) ไม่ใช่กราฟระนาบ มีกราฟ $K_{3,3}$ เป็นกราฟย่อยดังใน รูปที่ 2.30 (3) ซึ่งเปลี่ยนตำแหน่งของ C และ F



รูปที่ 2.30

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

17. ให้ V เป็นจำนวนจุดยอด E เป็นจำนวน edge และ R เป็นจำนวนบริเวณของแผนที่แต่ละแผนที่ ในรูปที่ 2.31 จงหาจำนวน V, E และ R พร้อมทั้งพิสูจน์สูตรของ ออยเลอร์และหาดีกรีของบริเวณข้างนอกของแต่ละรูป



รูปที่ 2.31

เฉลย

(a) $V = 4, E = 6, R = 4$

ดังนั้น $V - E + R = 4 - 6 + 4 = 2$ และ $d = 3$

(b) $V = 6, E = 9, R = 5$

ดังนั้น $V - E + R = 6 - 9 + 5 = 2$ ในที่นี้ $d = 6$ เพราะมี edge 2 edges ถูกนับซ้ำ 2 ครั้ง

(c) $V = 5, E = 10, R = 7$

ดังนั้น $V - E + R = 5 - 10 + 7 = 2$ และ $d = 5$

18. จงหา n ซึ่งเป็นจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้ในการระบายแผนที่แต่ละแผนที่ในรูป 1.18

เฉลย

(a) n = 4

(b) n = 3

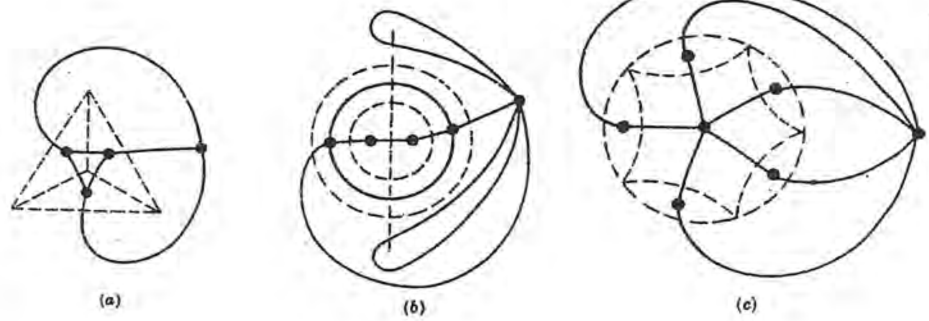
(c) ใช้เพียงสองสีเท่านั้นนั่นคือ n = 2

19. จงเขียนแผนที่ซึ่งคู่กันกับแผนที่ในรูปที่ 2.31

เฉลย

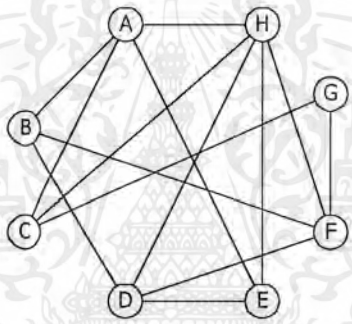
เลือกจุดหนึ่งในแต่ละบริเวณ เชื่อมจุดยอด2 จุด ถ้าบริเวณที่สมนัยกับจุดยอดนั้นๆมี edge ร่วมกัน จะเห็นว่าแผนที่และแผนที่คู่กันมีจำนวน edge เท่ากัน ได้ผลลัพธ์ดังในรูปที่ 2.32 สังเกตว่ามี loop 2 loops ในรูปที่ 2.32 (b) ซึ่งสมนัยกับ edge 2 edge ของแผนที่เดิมที่อยู่ในบริเวณข้างนอก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่2.32

20. จงใช้วิธี Welth-Powell algorithm ระบายกราฟในรูปที่ 2.32 และหา n ซึ่งเป็นจำนวนสีของกราฟ



รูปที่ 2.32

เฉลย

ขั้นแรก เรียงลำดับจุดยอดตามจำนวนดีกรีที่ลดลง จะได้ลำดับ

H, A, D, F, B, C, E, G

แล้วทำตามลำดับดังนี้ ใช้สีแรกระบายจุดยอด H, B และ G (เราไม่สามารถระบายจุดยอด A,D หรือ F ด้วยสีแรกเพราะแต่ละจุดมีขอบเชื่อมกับ H และไม่สามารถระบายจุดยอด C หรือ E ด้วยสีแรก เพราะแต่ละจุดเชื่อมโยงกับ H หรือ B) ทำเช่นเดียวกันนี้กับจุดยอดที่ยังไม่ถูกระบาย โดยใช้สีที่สองระบายจุดยอด A และ D และระบายจุดยอดที่เหลือคือ F, C และ E ด้วยสีที่สาม ดังนั้น จำนวนสี n จะไม่เกินสามสีไม่ว่าจะระบายอย่างไร จุดยอด H,D และ E จะต้องถูกระบายด้วยสีที่แตกต่างกัน เพราะมีขอบเชื่อมโยงซึ่งกันและกัน แสดงว่า n = 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

21. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ว่า : สำหรับกราฟ G ใดๆ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) G ระบายได้ด้วยสีสองสี

(2) G เป็น bipartite graph

(3) ทุก cycle ของ G มีความยาวเป็นจำนวนคู่

เฉลย

(1) เป็นผลให้เกิด (2) : สมมติว่า G เป็นกราฟซึ่งระบายได้ด้วยสีสองสี ให้ M เป็นเซตของจุดยอดที่ถูกระบายด้วยสีแรก และให้ N เป็นเซตของจุดยอดซึ่งถูกระบายด้วยสีที่สอง ดังนั้น M และ N เป็นเซตแบ่งกั้นของจุดยอดของ G ใน bipartite graph เพราะไม่มีจุดยอดใดใน M หรือใน N เป็น adjacent ซึ่งกันและกัน เนื่องจากถูกระบายด้วยสีเดียวกัน

(2) เป็นผลให้เกิด (3) : สมมติให้ G เป็น bipartite graph โดยมี M และ N เป็นเซตแบ่งกั้นของจุดยอดของ G ถ้า cycle หนึ่งเริ่มต้นที่จุดยอด u ใน M cycle นี้จะต้องผ่านจุดยอดของ N แล้วไปยังจุดยอดของ M แล้วไปยังจุดยอดของ N และสลับกันไปเรื่อยๆ ดังนั้นเมื่อ cycle กลับมายังที่ u แสดงว่าความยาวของ cycle จะต้องเป็นจำนวนคู่ กล่าวคือ ทุกๆ cycle ของ G จะต้องมีความยาวเป็นจำนวนคู่

(3) เป็นผลให้เกิด (1) : สุดท้าย สมมติว่าทุกๆ cycle ของ G มีความยาวเป็นจำนวนคู่ เลือกจุดยอดหนึ่งจุดในแต่ละ connected component แล้วระบายด้วยสีที่ 1 เช่นระบายด้วยสีแดง แล้วระบายจุดยอดอื่นๆดังต่อไปนี้ ถ้าจุดยอดใดมีสีแดงเราจะระบายจุดยอดที่ประชิดกับจุดยอดนั้นด้วยสีที่สอง สมมติว่าสีที่สองเป็นสีน้ำเงิน ถ้าจุดยอดใดระบายด้วยสีน้ำเงิน จุดยอดที่ประชิดกันจะถูกระบายด้วยสีแดง เนื่องจาก cycle มีความยาวเป็นจำนวนคู่ แสดงว่าไม่มีจุดยอดที่ติดกันถูกระบายด้วยสีเดียวกัน ดังนั้น G เป็นกราฟซึ่งสามารถระบายได้ด้วยสี 2 สีตามต้องการ

22. ให้ G เป็น finite connected planar graph และมีจุดยอดอย่างน้อย 3 จุด จงแสดงว่าจะต้องมีจุดยอดใน G อย่างน้อย 1 จุดที่มีดีกรี 5 หรือน้อยกว่า

เฉลย

ให้ p เป็นจำนวนจุดยอด และ q เป็นจำนวน edge ของ G สมมติว่า $\deg(u) \geq 6$ สำหรับแต่ละจุดยอด u ของ G แต่เรารู้ว่า 2q เท่ากับผลบวกของดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของ G ดังนั้น $2q \geq 6p$ แสดงว่า

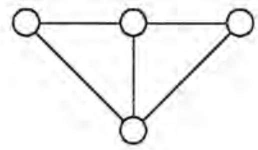
$$q \geq 3p > 3p - 6$$

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท ดังนั้นจุดยอดบางจุดของ G จะต้องมีดีกรีเท่ากับ 5 หรือน้อยกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9.4 กราฟต้นไม้ (Tree)

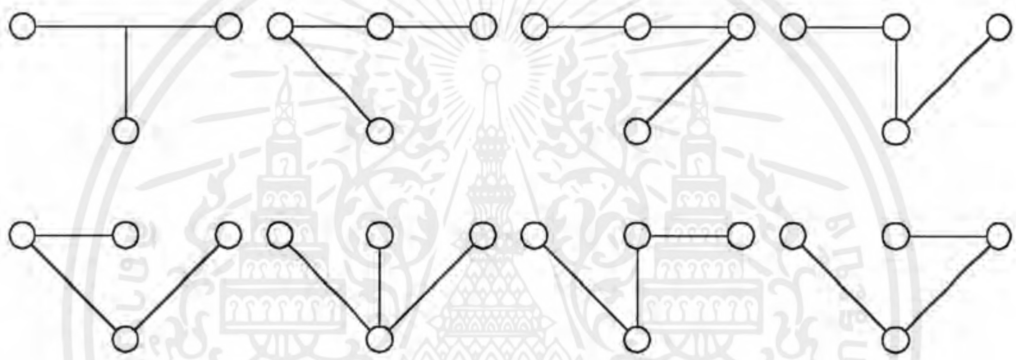
23. จงหา spanning trees ทั้งหมดของกราฟ G ในรูป 2.33



รูปที่ 2.33

เฉลย

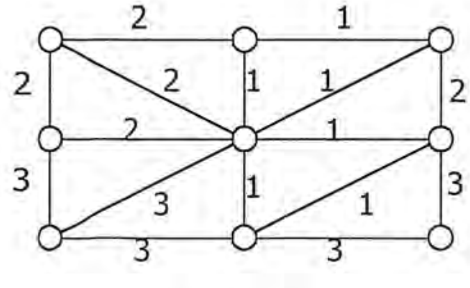
มี spanning tree ทั้งหมด 8 แบบ ดังแสดงในรูป 2.34



รูปที่ 2.34

แต่ละแบบต้องมีขอบ 4-1 = 3 ขอบ เพราะ G มีจุดยอด 4 จุด ดังนั้นแต่ละแบบได้จากการลบขอบ 2 ขอบ ใน 5 ขอบของ G ซึ่งทำได้แตกต่างกัน 10 วิธี ในจำนวนนี้มี 2 แบบซึ่งทำให้เกิด disconnected graph แสดงว่า Spanning tree ของ G มีทั้งหมด 8 แบบดังข้างบนนี้

24. จงหา spanning tree แบบต่ำสุด สำหรับกราฟที่มี labeled edges ในรูป 2.35



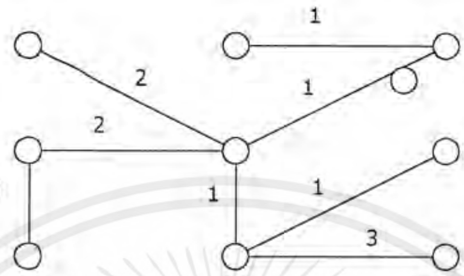
รูปที่ 2.35

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เฉลย

ทำโดยลบ edge ที่มีความยาวมากที่สุดโดยไม่ทำให้กราฟเป็น dicconnected graph ไปเรื่อยๆ หรืออีกวิธีหนึ่ง โดยเริ่มต้นจากจุดยอด 9 จุด แล้วพยายามเพิ่ม edge ที่มีความยาวน้อยที่สุดที่ไม่ทำให้เกิด cycle

ทั้ง 2 วิธีจะได้ spanning tree ดังแสดงในรูป 2.36

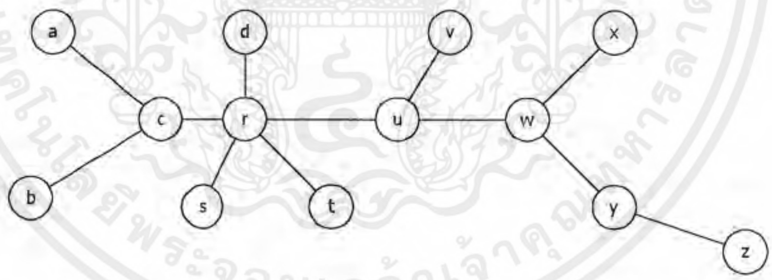


รูปที่ 2.36

25. พิจารณากราฟต้นไม้ในรูป 2.36

(a) จุดยอดใดบ้าง (ถ้ามี) เป็นจุดตัด และ edge ใดบ้าง (ถ้ามี) เป็น bridge

(b) จงหาจุดยอดทั้งหลายที่มีระดับ 3 ถ้าจุดยอดที่เป็นรากได้แก่ 1) u 2) w



รูปที่ 2.36

เฉลย

(a) จุดยอดแต่ละจุดที่มีดีกรีมากกว่า 1 เป็นจุดตัดของกราฟต้นไม้ทั้งสิ้น ดังนั้นจุดยอด c,r,u,w และ y เป็นจุดตัด edge ทุก edge ในกราฟต้นไม้เป็น bridge เพราะการลบ edge ใด edge หนึ่งออก จะทำให้กราฟกลายเป็น disconnected graph

(b) หา path ทั้งหมดที่มีความยาวเท่ากับ 3 นับจากราก เพื่อหาจุดยอดที่มีระดับ 3 ดังนั้น 1) a,b และ z 2) c,d,s และ t

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

26. พิจารณานิพจน์เชิงพีชคณิต $(2x + y)(a - b)^3$

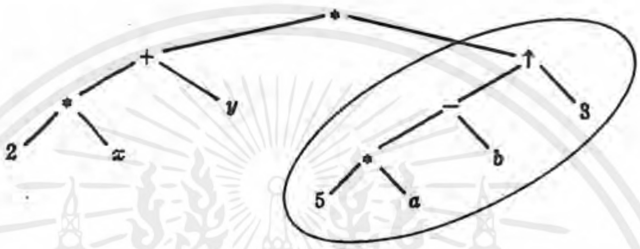
(a) จงเขียนกราฟต้นไม้แบบมีรากและอันดับ

(b) จงหา scope ของการดำเนินการยกกำลัง (ขอบข่ายของจุดยอด v ในกราฟต้นไม้แบบมีราก ต้นไม้ย่อยซึ่งเกิดขึ้นโดย v และจุดยอดซึ่งตามหลัง v โดยมี v เป็นราก)

(c) จงเขียนนิพจน์ใหม่โดยใช้เครื่องหมาย prefix Polish

เฉลย

(a) ใช้ลูกศร (↑) แทนการยกกำลังและใช้ดอกจันทน์ (*) แทนการคูณ จะได้กราฟต้นไม้ในรูป 2.37



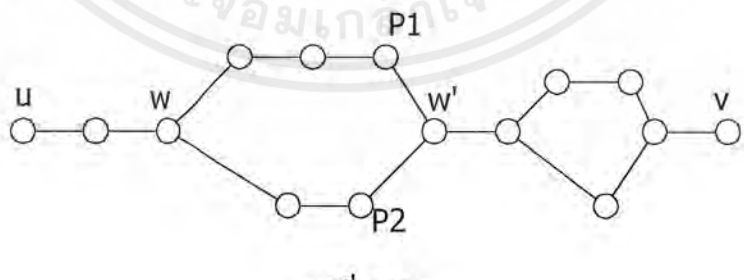
รูปที่ 2.37

(b) ขอบข่ายของ ↑ คือส่วนของกราฟต้นไม้ที่ล้อมวงไว้ ซึ่งสมนัยกับนิพจน์ $(5a - b)^3$

(c) พิเคราะห์ดูกราฟต้นไม้ทั้งหมด จะได้

$* + * \, 2xy \uparrow - * \, 5ab3$

27. สมมติว่ามีสอง paths ที่แตกต่างกัน คือ path P_1 และ P_2 จากจุดยอด u ไปยังจุดยอด v ในกราฟ G จงพิสูจน์ว่า graph G มี cycle



รูปที่ 2.38

เฉลย

ให้ w เป็นจุดยอดบน P_1 และ P_2 ซึ่งจุดยอดถัดไปบน P_1 และ P_2 แตกต่างกัน ให้ w' เป็นจุดยอดแรกที่ตามหลัง w และอยู่บน P_1 และ P_2 (ดูรูป 1.27) ดังนั้นส่วนของ path P_1 และ P_2 ที่อยู่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระหว่าง w' และ w ไม่มีจุดยอดร่วมกันเลย ยกเว้น w' และ w แสดงว่า subpaths ทั้งสองนี้ประกอบกันขึ้นเป็น cycle

2.9.5 กราฟระบุทิศทาง (Directed Graphs)

28. พิจารณากราฟระบุทิศทาง D ในรูป 2.39

(a) จงอธิบาย D อย่างเป็นระบบ

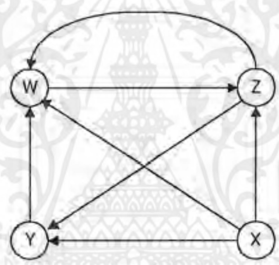
(b) จงหาจำนวน paths จาก X ถึง Z

(c) จงหาจำนวน paths จาก Y ถึง Z

(d) มีต้นทางหรือปลายทางหรือไม่

(e) จงหาเมทริกซ์ M_D ของกราฟระบุทิศทาง D

(f) D เป็น weakly connected หรือไม่ เป็น Unilaterally connected หรือไม่ และเป็น Strongly connected หรือไม่



รูปที่ 2.39

เฉลย

(a) มีจุดยอด 4 จุดคือ X,Y,Z,W และมี arcs 7เส้นคือ
$\langle X,Y\rangle, \langle X,W\rangle, \langle X,Z\rangle, \langle Y,W\rangle, \langle Z,Y\rangle, \langle Z,W\rangle, \langle W,Z\rangle$

(b) มี path จาก X ถึง Z สาม paths คือ (X,Z) , (X,W,Z) และ (X,Y,W,Z)

(C) มี path จาก Y ถึง Z path เดียวคือ (Y,W,Z)

(d) X เป็นต้นทาง เพราะ X ไม่เป็นจุดสุดท้ายของ arc ใดๆ กล่าวคือมีดีกรีเข้าเป็นศูนย์ ไม่มีปลายทางเพราะไม่มีจุดใดที่มีดีกรีออกเป็นศูนย์ นั่นคือจุดยอดแต่จุดเป็นจุดเริ่มต้นของ arc ใด arc หนึ่ง

(d) เมทริกซ์ M_D ของ D คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$M_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ในที่นี้เราระบุแถวและหลักของ M_D ด้วย X,Y,Z,W ตามลำดับ) สมาชิก m_{ij} แทนจำนวน arcs จากจุดยอดที่ I ไปยังจุดยอดที่ j

(f) กราฟระบุทิศทางนี้ไม่เป็น strongly connected เพราะมี X เป็นต้นทาง ดังนั้นจึงไม่มีpath จากจุดยอดอื่นๆไปยัง X แต่ D เป็น Unilaterally connected เพราะpath (X,Y,W,Z) ผ่านจุดยอดทุกๆจุด แสดงว่ามี subpath เชื่อมจุดยอดแต่ละคู่

29. ให้ V = {2,3,4,5,6} ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน V ซึ่งกำหนดโดย xRy ถ้า x น้อยกว่า y และ x เป็นจำนวนเฉพาะกับ y

(a) จงเขียน R ในรูปของเซตคู่อันดับ

(b) จงเขียนแผนภาพของกราฟระบุทิศทางที่สมนัยกับ R

เฉลย

(a) R = {(2,3),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),(5,6)}

(b) เขียน arc จาก x ถึง y ถ้า (x,y) อยู่ใน R ดังแสดงในรูป 2.40

รูปที่ 2.40

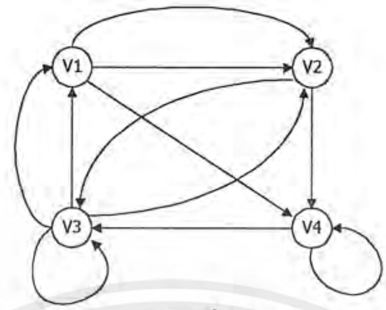
30. จงเขียนกราฟระบุทิศทาง D ที่สมนัยกับเมทริกซ์ M ซึ่งไม่มีสมาชิกใดเป็นลบต่อไปนี้

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

เฉลย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก M เป็นเมทริกซ์ขนาด 4x4 ดังนั้น D มีจุดยอด 4 จุด ให้ v_1, v_2, v_3 และ v_4 เป็นจุดยอดเหล่านั้น สำหรับสมาชิก m_{ij} แต่ละตัว เขียน arc m_{ij} จากจุดยอด v_i ไปยัง v_j จะได้กราฟระบุทิศทางดังรูป 2.41



รูปที่ 2.41

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.10 แบบทดสอบ

1. ให้ $\quad = \{u, v, w, x, y\}$ จงเขียนแผนภาพของกราฟ $G(V, E)$ เมื่อ

   (a) $E = \{\{u,v\},\{u,x\},\{v,w\},\{v,x\},\{v,y\},\{x,y\}\}$

   (b) $E = \{\{u,v\},\{v,w\},\{w,x\},\{w,y\},\{x,y\}\}$

จงหาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด และหา diameter ของแต่ละกราฟ

2. พิจารณากราฟในรูป 2.42 จงหา

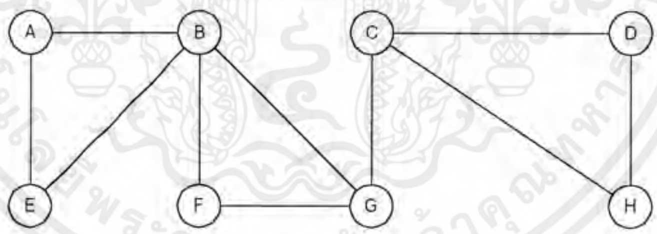
   (a) Paths จากจุดยอด A ถึงจุดยอด H ทั้งหมด

   (b) Diameter ของกราฟ

   (c) ดีกรีของจุดยอดแต่ละจุด

   (d) จุดยอดใดบ้าง (ถ้ามี) เป็นจุดตัด

   (e) เราเรียก edge e ของ connected กราฟว่า bridge ถ้า $G-e$ เป็น disconnected กราฟ เมื่อ $G-e$ หมายถึง subgraph ซึ่งได้จากการลบ edge e ของ G edge ใดบ้าง (ถ้ามี) เป็น bridge



รูปที่ 2.42

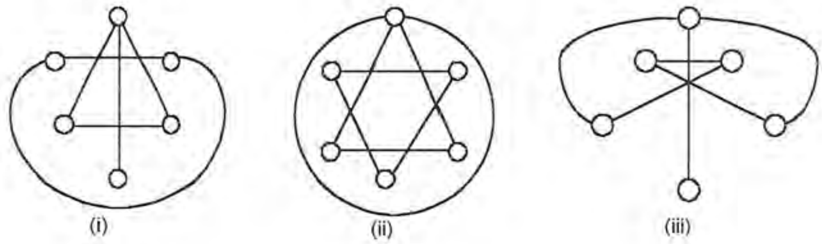
3. multigraph ใดในรูป 2.43

   (a) เป็น connected multigraph

   (b) ไม่มี loop

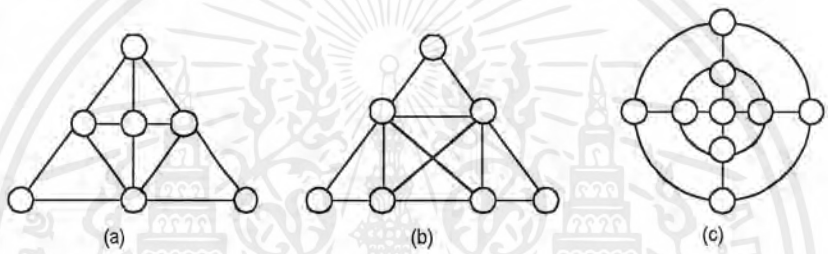
   (c) เป็นกราฟ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.43

4. multigraph ใดในรูป 2.44 เป็น traversable และจงหา traversable trail ถ้า multigraph นั้นเป็น traversable



รูปที่ 2.44

5. จงเขียนกราฟต่อไปนี้ (a) K_7 (b) $K_{2,6}$ (c) $K_{3,4}$

6. จงเขียนกราฟต้นไม้ทั้งหมดที่มีจุดยอดเจ็ดจุด

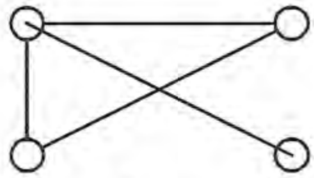
7. จงหา diameter ของ complete bipartite graph

8. จงแสดงว่ากราฟต้นไม้ใดๆเป็น bipartite graph

9. จงเขียน 3-regular graphs สองกราฟ ซึ่งมีจุดยอดแปดจุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

10. จงหา adjacency matrix A และ incidence matrix M สำหรับกราฟในรูป 2.45



รูปที่ 2.45

11. สมมติให้ G เป็น bipartite graph จงแสดงว่าเราสามารถจัดลำดับจุดยอดของ G ซึ่งจะทำให้ adjacency matrix A มีรูปแบบ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

12. จงหา connected graph ทั้งหมดที่มีจุดยอดสี่จุด

13. พิจารณาการกระทำบนกราฟ G ต่อไปนี้ (1) ลบ edge ออกหนึ่ง edge (2) ลบจุดยอดและ edges ทั้งหลายที่กระทบจุดยอดนั้น จงแสดงว่า subgraph ทุกกราฟของ finite graph กราฟ G ได้จากลำดับของการกระทำซึ่งประกอบด้วยการกระทำทั้งสองนี้

14. จงพิสูจน์ว่าสามารถแบ่งกราฟใดๆออกเป็น connected subgraph ที่โตที่สุด และไม่มีส่วนร่วมกันได้ โดยการเลือกความสัมพันธ์ equivalence บนเซตของจุดยอดของ G ที่เหมาะสม

15. จงเขียน multigraph ซึ่งสมนัยกับ adjacency matrix ต่อไปนี้

(a) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

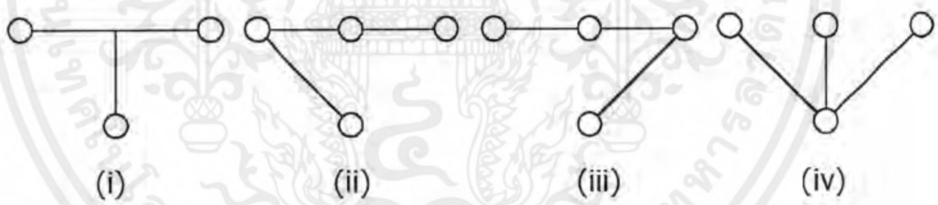
(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

16. จงพิสูจน์ว่ากราฟต้นไม้จำกัด (ซึ่งมี edge อย่างน้อยหนึ่ง) มีจุดยอดอย่างน้อยสองจุดที่มีดีกรี 1

17. สมมติให้ G เป็น connected กราฟ จงพิสูจน์
   (a) ถ้า G บรรจุ cycle C ซึ่งบรรจุ edge e แล้ว $G-e$ ยังคงเป็น connected กราฟ
   (b) ถ้า $e=\{u,v\}$ เป็น edge ซึ่ง $G-e$ ไม่ connected ดังนั้น u และ v จะอยู่ในส่วนประกอบคนละส่วนกันของ $G-e$

18. จงพิสูจน์ว่า connected graph ที่มีจุดยอด n จุด จะต้องมีขอบอย่างน้อย $n-1$ ขอบ

19. กราฟต้นไม้คู่ใดในรูป 2.46 isomorphic กัน



รูปที่ 2.46

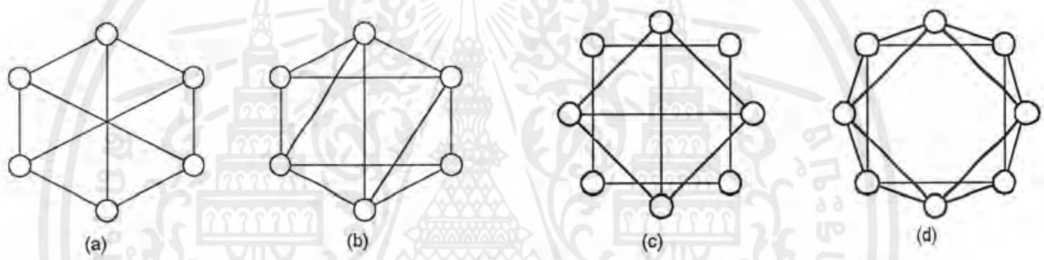
20. สมมติให้ G และ G^* เป็นกราฟซึ่ง homeomorphic กัน จงแสดงว่า G เป็น travesable ก็ต่อเมื่อ G^* เป็น travesable

21. สมมติให้ G และ G^* เป็นกราฟที่ไม่ isomorphic กัน แต่มีเมทริกซ์ B เป็น เมทริกซ์ edge เหมือนกัน จงแสดงว่ากราฟหนึ่งได้จากอีกกราฟหนึ่งโดยเพิ่มจุด isolated

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

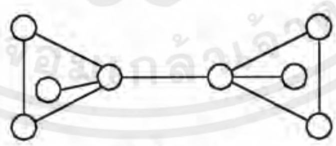
22. สมมติให้ G เป็นกราฟซึ่งไม่มี edge $e=\{v_r, v_s$ สมมติว่าเราเพิ่ม edge e ใน G เพื่อให้ได้กราฟ $H=G+e$ ให้ $C=(c_{ij})$ และ $D=(d_{ij})$ เป็น connected matrices ของ G และ H ตามลำดับ
    (a) สมมติให้ $C_{rs}=1$ นั่นคือมี path จาก v_r ถึง v_s ใน G จงพิสูจน์ว่า $D=C$ และ H บรรจุ cycle ซึ่งรวม edge e อยู่ด้วย
    (b) สมมติให้ $C_{rs}=0$ นั่นคือ v_r ไม่ connected กับ v_s ใน G จงพิสูจน์
        (1) $d_{ij}=1$ ก็ต่อเมื่อ $c_{ij}=1$ หรือ $c_{ir}=c_{sj}=1$
        (2) ถ้า G ไม่มี cycle แล้ว H จะไม่มี cycle ด้วย

23. จงเขียนตัวแทนเชิงระนาบของแต่ละกราฟในรูป 2.47 ถ้าเป็นไปได้ หรือมิฉะนั้นจงแสดงว่า มี subgraph ซึ่ง homeomorphic กับ K_5 หรือ $K_{3,3}$



รูปที่ 2.47

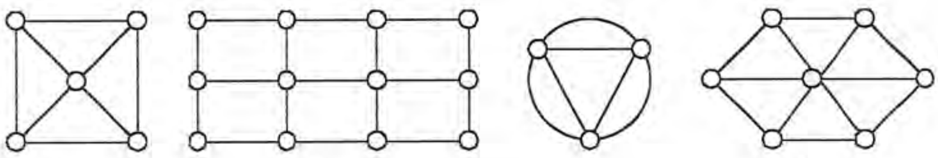
24. สำหรับแผนที่ในรูป 2.48 จงหาดีกรีของแต่ละบริเวณ พร้อมทั้งตรวจสอบว่าผลบวกของดีกรีของทุกบริเวณเป็นสองเท่าของจำนวน edges



รูปที่ 2.48

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

25. จงหา V,E และ R ซึ่งแทนจำนวนจุดยอด จำนวนขอบ และจำนวนบริเวณตามลำดับของแต่ละแผนที่ในรูป 2.49 พร้อมทั้งตรวจสอบสูตรของ ออยเลอร์



(a) (b) (c) (d)

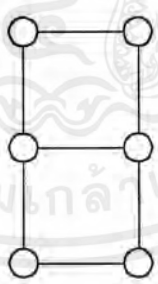
รูปที่ 2.49

26. จงหาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้ในการระบายสีบริเวณของแต่ละแผนที่ ในรูป 2.49

27. เขียนแผนที่ซึ่งคู่กันกับแผนที่ในรูป 2.49

28. ให้ n เป็น ดีกรีที่มากที่สุดของจุดยอดใดๆบนกราฟ G จงพิสูจน์ว่า $x(G) \le n+1$ เมื่อ $x(G)$ เป็นจำนวนสีของกราฟ

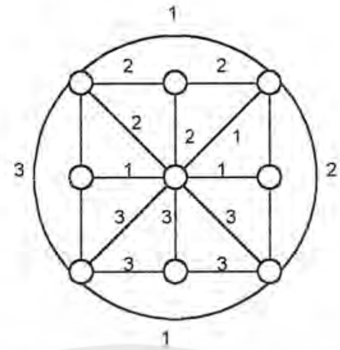
29. จงหาจำนวน spanning tree ของรูป 2.50



รูปที่ 2.50

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

30. จงหา spanning tree ที่ต่ำสุดสำหรับรูป 2.51



รูปที่ 2.51

31. พิจารณานิพจน์เชิงพีชคณิต

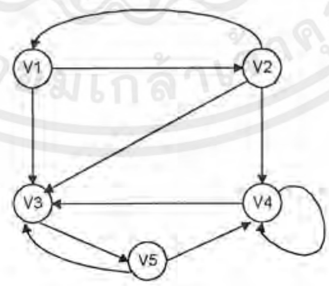
$$\frac{(3x-5z)^4}{a(2b+c^2)}$$

(a) จงเขียนกราฟต้นไม้แบบมีรากและอันดับโดยใช้ลูกศร (↑) แทนการยกกำลัง ใช้ดอกจันทน์ (*) แทนการคูณ และใช้ (/) แทนการหาร

(b) จงเขียนนิพจน์ใหม่โดยใช้ 1) เครื่องหมาย prefix Polish 2)) เครื่องหมาย postfix Polish

(c) จงหา scope ของการดำเนินการคูณ

32. พิจารณากราฟระบุทิศทาง D ในรูป 2.52



รูปที่ 2.52

(a) จงหาดีกรีเข้าและดีกรีออกของจุดยอดแต่ละจุด

(b) จงหาจำนวน paths จาก v_1 ถึง v_4

(c) มีต้นทางหรือปลายทางหรือไม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(d) จงหาเมทริกซ์ M ของ D

(e) จงหาจำนวนทางเดินจาก v_1 ถึง v_3 ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3 หรือน้อยกว่า

(f) D เป็น Unilaterally connected หรือไม่ และเป็น Strongly connected หรือไม่

33. ให้ D เป็นกราฟระบุทิศทางซึ่งมี v_1, v_2, v_3 และ v_4 เป็นจุดยอด และสมนัยกับเมทริกซ์

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) จงเขียนแผนภาพของ D

(b) จงหาจำนวนทางเดินซึ่งมีความยาว 3 จาก v_1 ถึง

1) v_1

2) v_2

3) v_3

4) v_4

(c) เป็น Unilaterally connected หรือไม่และเป็น Strongly connected หรือไม่

34. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน V={ 2,3,4,9,15 } ซึ่งกำหนดโดย

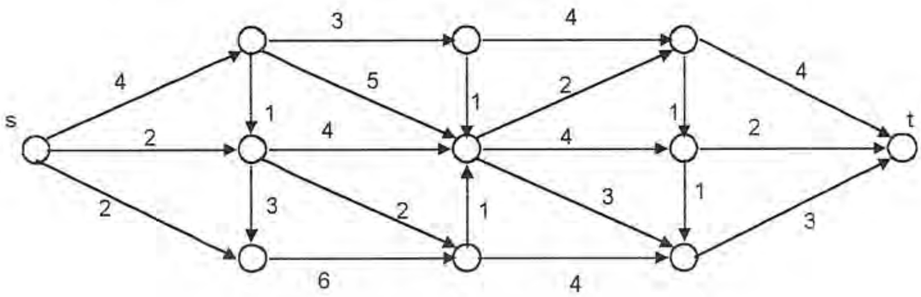
" x น้อยกว่า y และเป็นจำนวนเฉพาะกับ y "

(a) จงเขียนแผนภาพของกราฟระบุทิศทางของ R

(b R เป็น weakly connected หรือไม่ เป็น Unilaterally connected หรือไม่ และเป็น Strongly connected หรือไม่

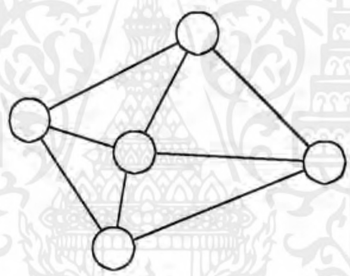
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

35. จงใช้ขั้นตอนวิธี Pruning Algorithm ในการหา path ที่สั้นที่สุดจาก s ถึง t ในรูป 2.53



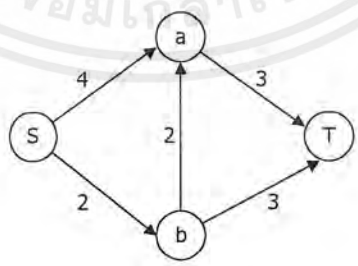
รูปที่ 2.53

36. กำหนด G เป็นกราฟดังรูป 2.54 จงหา $P_G(k)$



รูปที่ 2.54

37. จงหา maximal flow ของ network ดังรูปที่ 2.55



รูปที่ 2.55

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เฉลย แบบทดสอบ

1. (a) diam(G) = 2 (b) diam(G) = 3

2. (a) มีแปด paths คือ

(A,B,G,C,H) (A,B,F,G,C,H) (A,B,G,C,D,H)

(A,B,F,G,C,D,H) (A,E,B,G,C,H) (A,E,B,F,G,C,H)

(A,E,B,G,C,D,H) (A,E,B,F,G,C,D,H)

(b) 4

(c) deg(B) = 4, deg(C)=deg(G)=3 นอกนั้นมีดีกรี 2

(d) B,C,G

(e) {C,G}

3. (a) (3)

(b) (1) และ (3)

(c) (3)

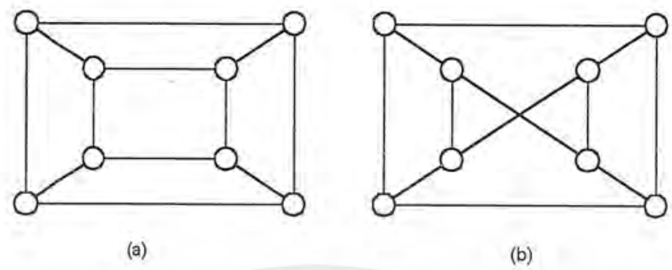
4. (a) และ (b) traversable trail จะต้องเริ่มต้นที่จุดยอดคี่ เพราะ (a) และ (b) มีจุดยอดคี่ 2 จุด

6. กราฟต้นไม้ดังกล่าวมี 10 กราฟ

7. diam$\left(K_{1,1}\right)=1$ นอกนั้นมี diameter 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

9. 3-regular กราฟทั้งสอง ในรูป 2.55 ไม่เป็น isomorphic กันเพราะ (b) มี cycle หนึ่งซึ่งมีความยาว 5 แต่ (a) ไม่มี

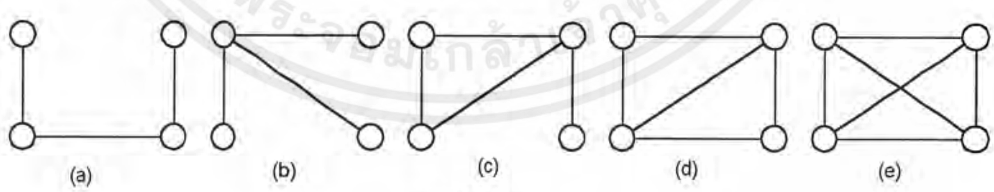


รูปที่ 2.55

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. ให้ M และ N เป็นเซตสองเซตของจุดยอดของ bipartite graph ซึ่งไม่มีส่วนร่วมกัน จัดลำดับของจุดยอดใน M ก่อนแล้วจึงค่อยจัดลำดับใน N

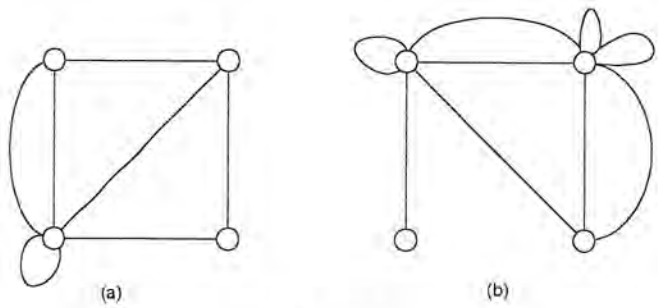
12. มีทั้งหมด 5 กราฟดังแสดงในรูป 2.56



รูปที่ 2.56

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

15.



รูปที่ 2.57

19. รูปที่สองและสาม

23. (a) เท่านั้นที่เป็น nonplanar

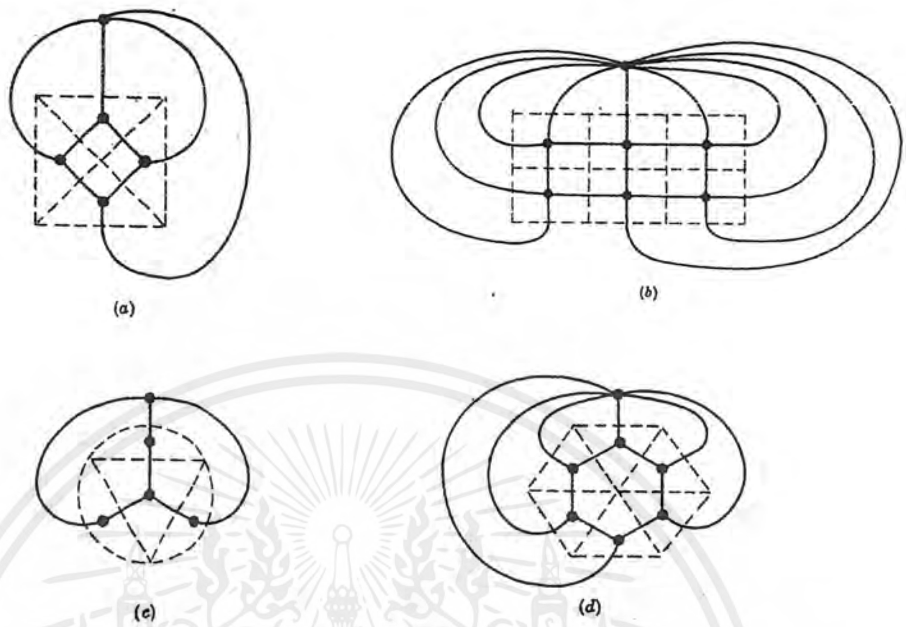
24. ส่วนที่อยู่นอกบริเวณมีดีกรีเท่ากับ 8 ส่วนที่อยู่ภายในบริเวณแต่ละส่วนมีดีกรีเท่ากับ 5

25. (a) V=5 , E=8 , R=5
    (b) V=12, E=17 , R=7
    (c) V=3 , E=6 , R=5
    (d) V=7 , E=12 , R=7

26. (a) 3 , (b) 3 , (c) 2 , (d) 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

27. ดูรูป 2.58

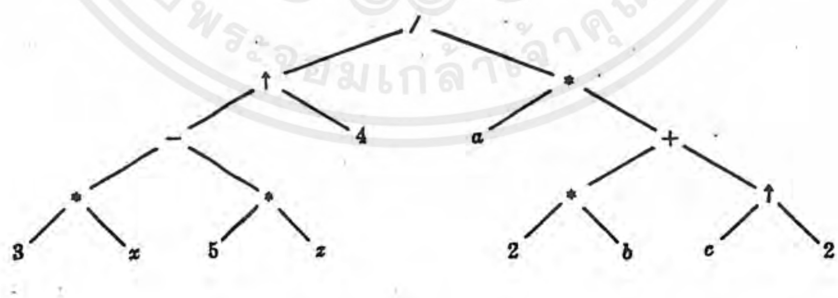


รูปที่ 2.58

28. (a) n = 3 , (b) n=4

30. 15

31. ดูรูป 2.59



รูปที่ 2.59

32. (a) ดีกรีเข้า : 1,1,4,3,1 ดีกรีออก : 2,3,1,2,2

(b) สาม : $(v_1, v_2, v_4), (v_1, v_3, v_5, v_4), (v_1, v_2, v_3, v_5, v_4)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

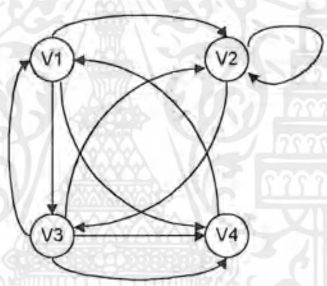
(c) ไม่มี

(d) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(e) 5

(f) เป็น Unilaterally connected แต่ไม่เป็น Strongly connected

33. (a) ดูรูป 2.60

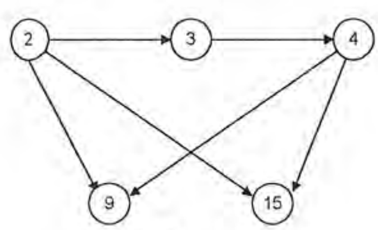


รูปที่ 2.60

(b) 3,5,4,4

(g) เป็น Unilaterally connected และ Strongly connected

34. (a) ดูรูป 2.61

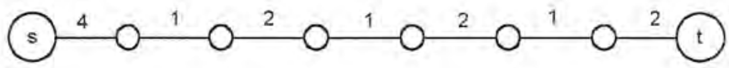


รูปที่ 2.61

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(b) เป็น weakly connected เท่านั้น

35. ดูรูปที่ 2.62



รูปที่ 2.62

36. $k(k-1)(k-2)(k^2-5k+7)$

37. 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
ทฤษฎีและหลักการของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

3.1 ความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน คือ การนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการสอน โดยที่คอมพิวเตอร์จะทำการนำเสนอบทเรียนแทนผู้สอน และผู้เรียนสามารถเรียนได้ด้วยตัวเอง นอกจากนั้นคอมพิวเตอร์ยังมีความสามารถในการตอบสนองต่อข้อมูลที่ผู้เรียนป้อนเข้าไปได้ในทันที การมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับบทเรียน ทำให้มีความน่าสนใจมากขึ้น ผู้เรียนสามารถรับประสบการณ์ผ่านประสาทสัมผัสทั้ง 5 ซึ่งจะช่วยส่งผลต่อการเกิดความรู้ความเข้าใจในบทเรียนที่ศึกษา คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในปัจจุบันจะพบว่ามีการนำสื่อประสม หรือ มัลติมีเดีย (Multimedia) เข้ามาช่วยในการนำเสนอเนื้อหา

3.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นจะอาศัยแนวความคิดจากทฤษฎีการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนอง โดยการออกแบบโปรแกรมจะเริ่มต้นจากการให้สิ่งเร้าแก่ผู้เรียน ประเมินการตอบสนองของผู้เรียน ให้ข้อมูลย้อนกลับ และให้ผู้เรียนเลือกสิ่งเร้าลำดับต่อไป

กระบวนการเรียนการสอนคือ การสื่อสารข้อมูลระหว่างผู้สอนและผู้เรียน เมื่อผู้เรียนรักรู้ข้อมูลแล้วแปลผล ก็แสดงว่ามีการเรียนรู้เกิดขึ้น

3.2.1 การสื่อสารในกระบวนการเรียนการสอน

การสื่อสารในกระบวนการเรียนการสอนมี 2 ลักษณะคือ

1. การสื่อสารทางเดียว หรือ ระบบวงจรเปิด (Open-Loop System) เป็นการสื่อสารไปทางผู้เรียนทางเดียว ผู้เรียนไม่สามารถสื่อสารไปทางผู้สอนได้
2. การสื่อสารสองทาง หรือ ระบบวงจรปิด (Closed-Loop System)เป็นการสื่อสารที่ผู้เรียนและผู้สอนสามารถโต้ตอบกันได้

3.2.2 ลักษณะของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

มีลักษณะเป็นโมเดล (Model) 2 แบบ คือ

1. แบบเชิงเส้น (Linear Programming) ผู้เรียนจะต้องเรียนบทเรียนทีละหน่วยตามลำดับ จะข้ามหน่วยไม่ได้
2. แบบไม่เชิงเส้น (Branching Programming) เป็นบทเรียนที่เชื่อมโยงกันได้ตามความต้องการของผู้เรียน สามารถเลือกเรียนบทใดก่อนก็ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 องค์ประกอบของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ในการที่จะนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการสอนได้นั้น จะต้องประกอบไปด้วยองค์ประกอบต่างๆดังต่อไปนี้

3.3.1 ฮาร์ดแวร์ (Hardware)

ฮาร์ดแวร์ คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นตัวสื่อในการนำเสนอบทเรียนให้แก่ผู้เรียน โดยเครื่องคอมพิวเตอร์นี้จำเป็นจะต้องมีความสามารถเพียงพอในการสนับสนุนการทำงานของซอฟท์แวร์ (Software) ที่ซึ่งจะนำมาสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

3.3.2 ซอฟท์แวร์ (Software)

ซอฟท์แวร์ คือ โปรแกรมปฏิบัติการและโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

3.3.3 คอร์สแวร์ (Courseware)

คอร์สแวร์ คือ บทเรียนที่ต้องการจะนำมาสร้างโปรแกรมช่วยสอนทางคอมพิวเตอร์ ซึ่งจะประกอบไปด้วย

1. เนื้อหา
2. ตัวอย่าง
3. แบบฝึกหัด

3.3.4 พีเพิลแวร์ (Peopleware)

พีเพิลแวร์ คือ บุคคลที่สร้างโปรแกรมช่วยสอนทางคอมพิวเตอร์ และผู้ใช้โปรแกรมช่วยสอนทุกคน

3.4 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) สามารถแบ่งออกได้เป็น 5 ประเภทด้วยกันคือ

3.4.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์ คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งนำเสนอเนื้อหาแก่ผู้เรียน ไม่ว่าจะเป็นปัญหาใหม่ หรือการทบทวนเนื้อหาเดิมก็ตาม ส่วนใหญ่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้จะมีแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัด เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนอยู่ด้วย อย่างไรก็ตาม ผู้เรีนมีอิสระพอที่จะเลือกตัดสินใจว่าจะเลือกทำแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัดหรือไม่ / อย่างไร หรือจะเลือกเรียนเนื้อหาส่วนไหน เรียงลำดับโดยรูปแบบใด เพราะการเรียนโดยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นผู้เรียนจะสามารถควบคุมการเรียนของตนได้ตามความต้องการของตนเอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.2 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งมุ่งเน้นให้ผู้ใช้ทำแบบฝึกหัดจนสามารถเข้าใจเนื้อหาในบทเรียนนั้นๆได้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้เป็นประเภทที่ได้รับความนิยมมาก โดยเฉพาะในระดับอุดมศึกษา ทั้งนี้เนื่องจากเป็นการเปิดโอกาสให้ผู้ที่เรียนอ่อน หรือเรียนไม่ทันคนอื่นๆ ได้มีโอกาสทำความเข้าใจบทเรียนสำคัญๆได้โดยครูผู้สอนไม่ต้องเสียเวลาในชั้นเรียนอธิบายเนื้อหาเดิมซ้ำแล้วซ้ำอีก

3.4.3 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ คือ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสร้างแบบทดสอบ การจัดการการสอน การตรวจให้คะแนน การคำนวณผลสอบ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้คือ การที่ผู้เรียนได้รับผลย้อนกลับโดนทันที (immediate feedback) ซึ่งเป็นข้อจำกัดของการทสอบที่ใช้กันอยู่ทั่วๆไป

3.4.4 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมส์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมส์ คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ทำให้ผู้ใช้มีความสนุกสนานเพลิดเพลินจนลืมไปว่ากำลังเรียนอยู่ เกมส์คอมพิวเตอร์ทางการศึกษาเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่สำคัญประเภทหนึ่ง เนื่องจากเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่กระตุ้นให้เกิดความสนใจในการเรียน คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้นิยมใช้กับเด็กตั้งแต่ระดับประถมศึกษาไปจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นอกจากนี้ยังสามารถนำมาใช้กับผู้เรียนในระดับอุดมศึกษาเพื่อเป็นการปูทางให้ผู้เรียนเกิดความรู้สึกที่ดีกับการเรียนทางคอมพิวเตอร์ได้อีกด้วย

3.4.5 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทสถานการณ์จำลอง

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทสถานการณ์จำลอง คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่มีการนำเสนอบทเรียนในรูปของการจำลองแบบ (simulation) โดยการจำลองสถานการณ์ที่เหมือนจริงขึ้น และบังคับให้ผู้เรียนต้องตัดสินใจแก้ปัญหา ในตัวบทเรียนจะมีคำแนะนำเพื่อช่วยในการตัดสินใจของผู้เรียน และแสดงผลลัพธ์ในการตัดสินใจนั้นๆ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้คือ การลดค่าใช้จ่ายและการลดอันตรายอันอาจเกิดขึ้นได้ จากการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นในสถานการณ์จริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5 ข้อดีและข้อจำกัดของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

3.5.1 ข้อดี

1. คอมพิวเตอร์จะช่วยเพิ่มแรงจูงใจในการเรียนรู้ให้แก่ผู้เรียน เนื่องจากการเรียนด้วยคอมพิวเตอร์นั้นเป็นประสบการณ์ที่แปลกและใหม่

2. การใช้สี ภาพลายเส้นที่แลดูคล้ายเคลื่อนไหว ตลอดจนเสียงดนตรี จะเป็นการเพิ่มความเหมือนจริงและเร้าใจผู้เรียนให้เกิดความอยากเรียนรู้ ทำแบบฝึกหัด หรือทำกิจกรรม

3. ลักษณะของโปรแกรมบทเรียนที่ให้ความเป็นส่วนตัวแก่ผู้เรียน เป็นการช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนช้าสามารถเรียนไปได้ตามความสามารถของตนโดยสะดวกอย่างไม่รีบเร่งโดยไม่ต้องอายผู้อื่น และไม่ต้องอายเครื่องมือเมื่อตอบปัญหาผิด

4. เป็นการช่วยขยายขีดความสามารถของผู้สอนในการควบคุมผู้เรียนได้อย่างใกล้ชิดเนื่องจากสามารถบรรจุข้อมูลได้ง่ายและสะดวกในการนำออกมาใช้

5. ความสามารถของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการบันทึกคะแนนและพฤติกรรมต่างๆของผู้เรียนไว้เพื่อใช้ในการวางแผนบทเรียนในขั้นต่อไป

6. ความสามารถในการเก็บข้อมูลของเครื่อง ทำให้สามารถนำมาใช้ได้ในลักษณะของการศึกษารายบุคคลได้เป็นอย่างดี โดยสามารถกำหนดบทเรียนให้แก่ผู้เรียนแต่ละคนและแสดงผลความก้าวหน้าให้เห็นได้ทันที

3.5.2 ข้อจำกัด

1. ถึงแม้ว่าขณะนี้ราคาเครื่องคอมพิวเตอร์และค่าใช้จ่ายต่างๆเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์จะลดลงมากแล้วก็ตาม แต่การที่จะนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในวงการศึกษาในบางสถานที่นั้นจำเป็นต้องมีการพิจารณากันอย่างรอบคอบเพื่อให้คุ้มกับค่าใช้จ่ายตลอดจนการดูแลรักษาด้วย

2. การออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการเรียนการสอนนั้นนับว่ายังมีน้อยเมื่อเทียบกับการออกแบบโปรแกรมเพื่อใช้ในวงการด้านอื่นๆ ทำให้โปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีจำนวนและขอบเขตจำกัดที่จะนำมาใช้เรียนในวิชาต่างๆ

3. ในขณะที่ยังขาดอุปกรณ์ได้คุณภาพมาตรฐานระดับเดียวกัน เพื่อให้สามารถใช้ได้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ต่างระบบกัน เป็นต้นว่าซอฟท์แวร์ที่ผลิตขึ้นมาใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ระบบของ IBM ไม่สามารถใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ระบบของ Macintosh ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. การที่จะให้ผู้สอนเป็นเป็นผู้ออกแบบโปรแกรมบทเรียนเองนั้น นับว่าเป็นงานที่ต้องอาศัยเวลา สติปัญญา และความสามารถเป็นอย่างยิ่ง ทำให้เป็นการเพิ่มภาระของผู้สอนให้มีมากยิ่งขึ้น

5. เนื่องจากบทเรียนคอมพิวเตอร์เป็นการวางโปรแกรมบทเรียนไว้ล่วงหน้าจึงมีลำดับขั้นตอนในการสอนทุกอย่างตามที่วางไว้ ดังนั้นการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงไม่สามารถช่วยในการพัฒนาความคิดสร้างสรรค์ของผู้เรียนได้

6. ผู้เรียนบางคน โดยเฉพาะอย่างยิ่งผู้เรียนที่เป็นผู้ใหญ่อาจจะไม่ชอบโปรแกรมที่เรียนตามขั้นตอน ทำให้เป็นอุปสรรคในการเรียนรู้ได้

3.6 โปรแกรม Authorware

Authorware เป็นโปรแกรมประเภท Authoring System ที่ใช้สำหรับการสร้างแอปพลิเคชันในระบบมัลติมีเดีย ไม่ว่าจะเป็นการนำเสนอผลงานต่างๆ การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนด้วยคอมพิวเตอร์ (CAI) หรือแม้กระทั่งเกมส์ก็ยังทำได้

ด้วยการออกแบบการทำงานโดยวางไอคอน (Icon) บนโฟลว์ไลน์(Flowline) ตามลำดับการทำงานเหมือนกับการเขียนผังงาน(Flowchart) เพื่อที่จะออกแบบโปรแกรม หรือการวางแผนงานต่างๆ ทำให้แม้แต่ผู้ที่ไม่ได้เป็นโปรแกรมเมอร์ก็สามารถที่จะสร้างงานขึ้นมาได้โดยไม่ต้องกังวลเกี่ยวกับภาษาโปรแกรม

Authorware มีคุณสมบัติต่างๆในการออกแบบแอปพลิเคชัน รวมทั้งการแจกจ่ายไปยังผู้ใช้ได้แก่

- Object Authoring เป็นการออกแบบโปรแกรมด้วยเทคนิค Object Authoring ทำให้ผู้ใช้ที่ไม่คุ้นเคยกับการออกแบบโปรแกรม หรือผู้ที่มีประสบการณ์มาแล้วก็ตามสามารถทุ่มเทความสนใจไปยังรายละเอียดของเนื้อหา และวิธีการโต้ตอบของผู้ใช้โดยไม่ต้องกังวลเกี่ยวกับการเขียนโปรแกรมการใช้สัญลักษณ์หรือไอคอน (icon) แทนคำสั่งทำให้ผู้ใช้สามารถสร้างโปรแกรมที่มีคุณภาพสูงได้อย่างง่ายดาย
- Multimedia Tools ในโปรแกรม Authorware ประกอบด้วยเครื่องมือด้านมัลติมีเดียที่จะทำให้ผู้ใช้สามารถสร้างแอปพลิเคชันที่ประกอบด้วย ข้อความ รูปภาพ เสียง ภาพเคลื่อนไหว และวีดีโอเข้าด้วยกัน ทำให้เป็นแอปพลิเคชันที่มีประสิทธิภาพที่จะใช้ในการสร้างสื่อการเรียนการสอน การนำเสนอ จำลองการทำงานในการนำเสนอสินค้า และการโฆษณา

การออกแบบโปรแกรมให้สามารถใช้ได้หลายระบบทำให้ผู้ใช้ ไม่ว่าจะเป็นบนเครื่องแมคอินทอช หรือภายใต้ระบบวินโดวส์ที่อยู่บนเครื่อง PC มีการทำงานที่เหมือนกัน และสามารถติดต่อไปยังทรัพยากรภายนอกระบบไม่ว่าการใช้ระบบฐานข้อมูล หรือระบบคอมพิวเตอร์เครือข่าย คำสั่งในการทำงานต่างๆไม่ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เป็นในเครื่องแมคอินทอช หรือเวอร์ชันที่ทำงานภายใต้วินโดวส์ไม่ได้มีความแตกต่างกันมากนัก ยกเว้นในส่วนของมัลติมีเดียและการทำงานของโปรแกรมในสภาพแวดล้อมที่ต่างกัน

3.7 วิธีพัฒนาโปรแกรม

ลักษณะการทำงานประกอบด้วยไอคอน ที่จะเรียงบนเส้นโฟลว์ไลน์ เป็นการกำหนดลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

มีปุ่ม Control เพื่อกำหนดรายละเอียดของการทำงาน สามารถกำหนดรายละเอียดของโปรแกรมว่าให้ทำต่อจากที่ค้างไว้ หรือเริ่มต้นใหม่ทุกครั้งที่เรียก รวมทั้งสามารถแสดงไอคอนขณะกำลัง Run โปรแกรมได้

คำสั่ง Start Flag, Stop Flag ช่วยให้การทดสอบโปรแกรมในส่วนต่างๆทำได้ง่าย รวมทั้งสะดวกในการเลือกทดสอบโปรแกรมแต่ละส่วนอีกด้วย

คำสั่ง Package ช่วยในการจัดเตรียมแอปพลิเคชันสำหรับแจกจ่ายให้แก่ผู้ใช้โดยไม่ต้องติดตัว Authorware ไปด้วย จะได้เป็นไฟล์เอ็กซิคิวต์ .EXE ที่ทำให้การแจกจ่ายแอปพลิเคชันเป็นไปอย่างสะดวก

3.8 ลักษณะที่เอื้ออำนวยในการทำงานของโปรแกรม

สามารถทดสอบ และแก้ไขโปรแกรมได้ในเวลาเดียวกัน ความสามารถในการแก้ไขเปลี่ยนแปลงลำดับการทำงานของโปรแกรมได้โดยตรงทำให้ง่ายต่อการพัฒนาและบำรุงรักษาโปรแกรม อีกทั้งโครงสร้างของโปรแกรมสามารถเปลี่ยนแปลงและนำกลับมาใช้ได้อีก

สามารถกำหนดวิธีการโต้ตอบกับผู้ใช้ได้ถึง 11 วิธีได้แก่ การป้อนข้อความผ่านคีย์บอร์ด สร้างปุ่มกดบนจอภาพ กำหนดพื้นที่บนจอภาพที่ตอบสนองเมื่อกดปุ่มเมาส์ ด้วยการเลื่อนภาพไปยังตำแหน่งที่กำหนดเป็นเมนูตรวจเช็คคีย์บอร์ด ด้วยการกำหนดเงื่อนไขการทำงาน กำหนดจำนวนครั้งที่ผิด กำหนดวัตถุบนจอภาพที่ตอบสนองเมื่อกดปุ่มเมาส์ หรือกำหนดเวลาในการทำงาน และการโต้ตอบโดยเหตุการณ์ต่างๆ

3.9 Multimedia Tools

Authorware Professional มีอุปกรณ์เครื่องไม้เครื่องมือในการที่จะสร้างแอปพลิเคชันที่เป็นมัลติมีเดียให้อย่างสมบูรณ์ รวมทั้งมีความสามารถในการเรียกใช้และแก้ไข Media ที่สร้างมาจากโปรแกรมอื่นได้ดี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.9.1 **ข้อความ**

- สามารถใช้ตัวอักษรหลายแบบผสมกันได้รวมทั้งสีและขนาด

- สามารถกำหนดตัวอักษรเป็นเส้นกรอบนอก มีเงา เป็นตัวเอียง และขีดเส้นใต้ได้

- รูปแบบข้อความสามารถให้มีการตัดคำ ตั้งแท็บทั้งข้อความและตัวเลข รวมทั้งกำหนดกรอบได้ด้วย

3.9.2 **กราฟิกส์**

- มีคำสั่งในการวาดรูปวงกลม วงรี สี่เหลี่ยมและลากเส้น รวมทั้งแสดงเส้นตาราง

- คำสั่งลาดเส้นสามารถลากเส้นตั้ง เส้นนอน เส้นเอียง 45 องศา รวมทั้งใส่ลูกศร และสามารถกำหนดความหนาของเส้นได้ถึง 5 ระดับ

- สามารถกำหนด fill pattern ได้ทั้งหมด 36 แบบ

- กำหนดการแสดงผลของภาพได้เป็นชั้น สามารถที่จะรวมภาพเข้าด้วยกันและแก้ไขภาพเป็นกลุ่มได้

- สามารถขอดูภาพก่อน (Preview) ที่จะนำเข้ามาใช้ได้

- ไฟล์กราฟิกส์ที่จะนำมาใช้ สามารถใช้ได้หลายฟอร์แมตทั้งที่เป็นของ Photoshop , BMP , TIF , GIFF , JPEG , PIC , PNT , WMF , EPS , MBP , DIB , RLE , PCX , PICT เป็นต้น

3.9.3 **เสียง**

สามารถนำไฟล์เสียงมาเล่นได้ โดยใช้ Sound Icon หรือใช้ Multimedia Function

- ควบคุมการเล่นซ้ำ เริ่ม และหยุดได้

- สามารถเล่นไฟล์ PCM ของแมคอินทอช โดยผ่านโปรแกรม SoundWave หรือ Microsoft's Multimedia Extentions

3.9.4 Movie

สามารถเล่น Movie File ได้จากไฟล์หลายรูปแบบ ไม่ว่าจะเป็น Quick time (.mov) , Video for Windows (.avi),Mpeg (.mpg) เป็นต้น โดยสามารถควบคุมจำนวนเฟรม , ความเร็ว และจำนวนรอบของการเล่น Movie file ได้

3.9.5 Animation

- กำหนดทิศทางในการเคลื่อนของออบเจ็กต์ได้หลายแบบ เช่น Direct to point , Direct to line , Direct to grid , Path to end , Path to point

- กำหนดทิศทาง เวลา และความเร็วได้

- กำหนดชั้นในการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ในกรณีที่มีวัตถุมากกว่า 1 วัตถุเคลื่อนที่มาอยู่ในตำแหน่งที่ซ้อนกัน (สามารถมี Animation ได้มากกว่า 1 Animation ในจอเดียว)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.9.6 Video

ต้องมีเครื่องเล่นวีดีโอที่สามารถควบคุมจากคอมพิวเตอร์ได้

- สามารถเล่นได้ทั้ง Still และ Motion Video ได้
- แสดงผลวีดีโอเต็มจอได้
- สามารถเปลี่ยนขนาดและย้ายวินโดว์ได้
- ควบคุมการเล่นและหยุดภาพได้
- เลือกเฟรมได้
- ปรับความเร็วในการเล่นได้
- ควบคุมสัญญาณออดิโอได้สองแชลแนลแยกจากช่องสัญญาณวีดีโ อ
- ผู้ใช้สามารถส่งสัญญาณวีดีโอไปยังจอโทรทัศน์ได้ แต่จำเป็นต้องมีการ์ดวีดีโอที่ทำงานภายใต้วินโดวส์ได้

3.9.7 Effects

- ควบคุมการเล่นวีดีโอ เสียง และ Animation ได้ทั้งแบบ Concurrent, Perpetual และ Wait until done
- สามารถใช้สีได้เป็น 4 บิต หรือ 8 บิต หรือ true color ได้
- แสดงผลข้อความ และกราฟิกส์ได้เป็น Opaque, Transparent, Inverse, Matted และ Erase ได้
- มี Special Effects และ Transition สำหรับแสดงผล (Display) หรือลบ (Erase) กราฟิกส์ได้หลายแบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
การสร้างและพัฒนาโปรแกรม

4.1 รูปแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

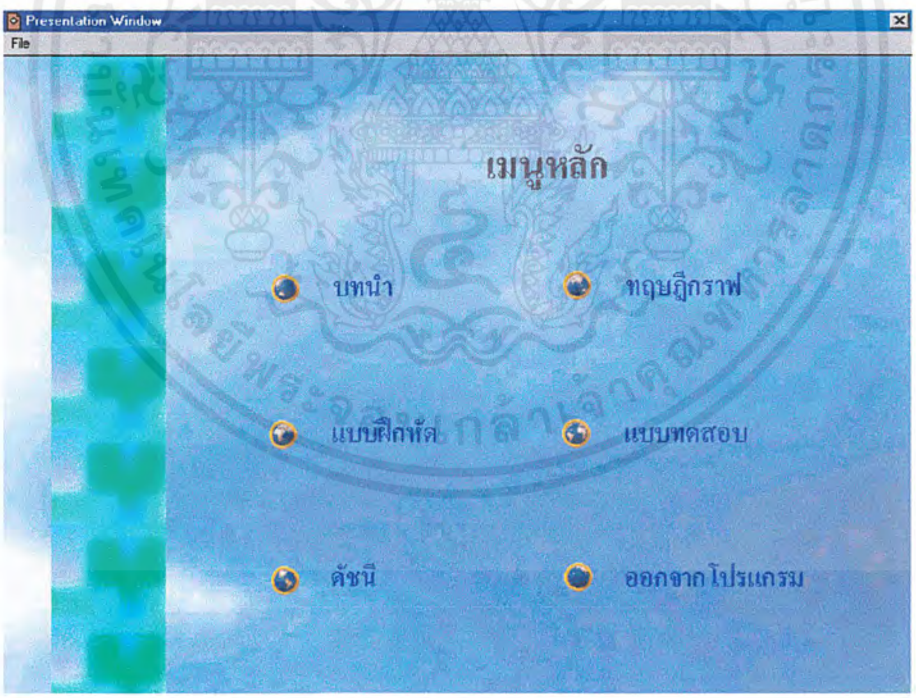
จากรูปแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน ที่กล่าวไว้ในบทที่ 3 จะเห็นว่ามีรูปแบบให้เราสามารถเลือกนำมาใช้ได้อย่างมากมาย ส่วนในโปรแกรมนี้ได้ใช้รูปแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบติวเตอร์

4.2 โครงสร้างของโปรแกรม

โปรแกรมช่วยสอนทฤษฎีกราฟประกอบด้วยโครงสร้างหลักต่างๆ ดังต่อไปนี้

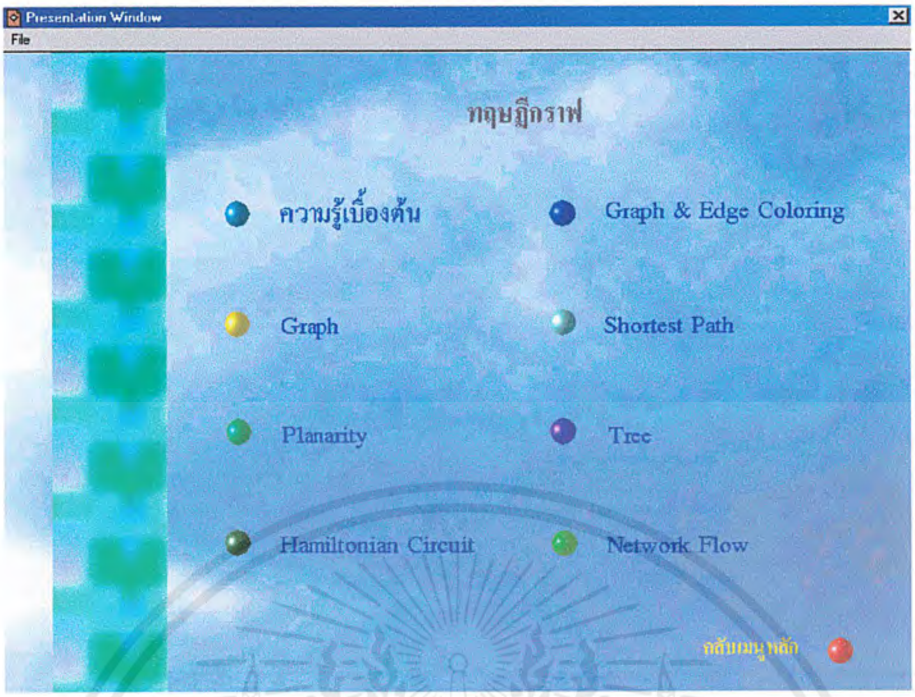
4.2.1 **ส่วนหน้าจอเมนู**

สำหรับหน้าจอนี้จะสามารถให้ผู้เรียนใช้เมาส์คลิกเลือกเรียนในเนื้อหาเรื่องที่ตนสนใจได้ หน้าจอนี้แสดงไว้ดังรูป



รูปที่ 4.1 เมนูหลัก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 เมนูทฤษฎีกราฟ

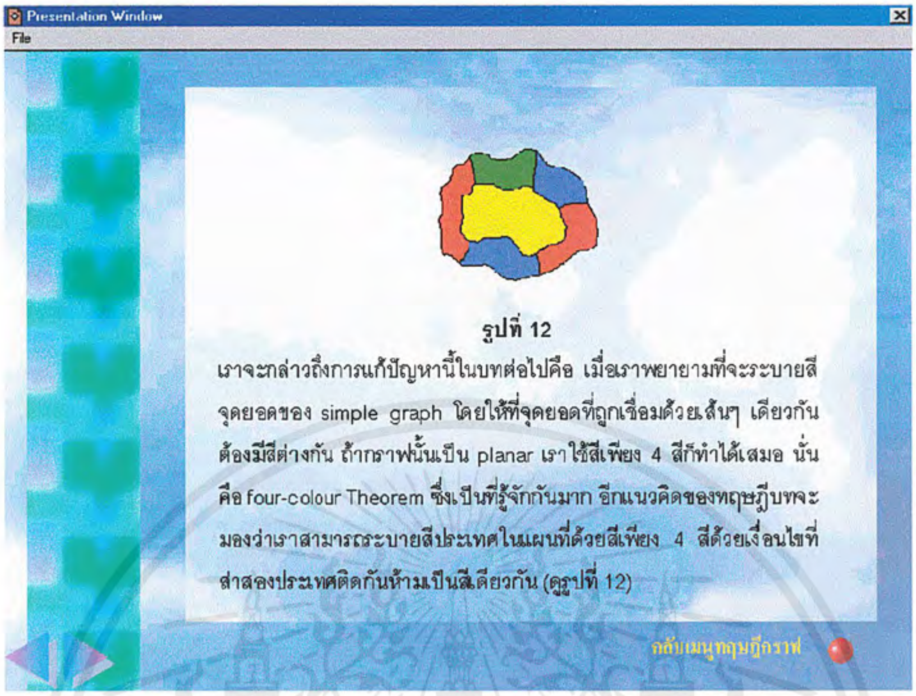
4.2.2 **ส่วนหน้าจอแสดงข้อมูล**

สำหรับส่วนนี้เป็นการแสดงข้อมูลออกทางหน้าจอ ซึ่งข้อมูลนี้แบ่งย่อยได้เป็น

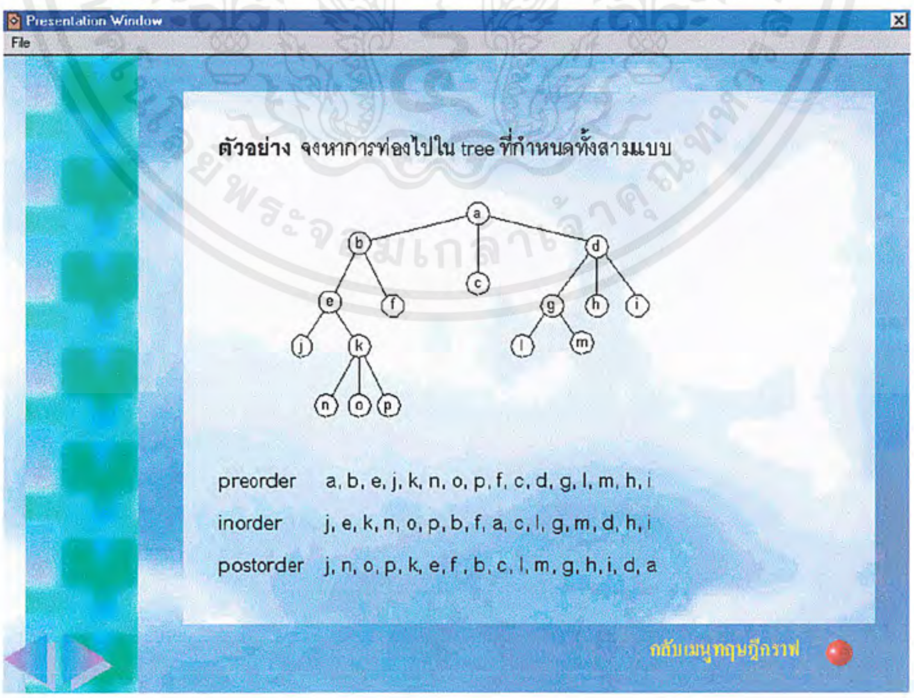
4.2.2.1 ข้อมูลที่เป็นเนื้อหา และตัวอย่าง

ข้อมูลประเภทนี้จะแสดงเนื้อหาแยกบทเรียนในแต่ละบท โดยจะแสดงทีละหน้าจอจนจบบทเรียนนั้นๆ ซึ่งเนื้อหาในแต่ละบทจะประกอบไปด้วย นิยาม ทฤษฎีบท รูปภาพประกอบ และบางบทจะแสดงตัวอย่างโปรแกรมคำนวณที่เกี่ยวกับเนื้อหาในบทนั้นๆ ซึ่งแสดงไว้ดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

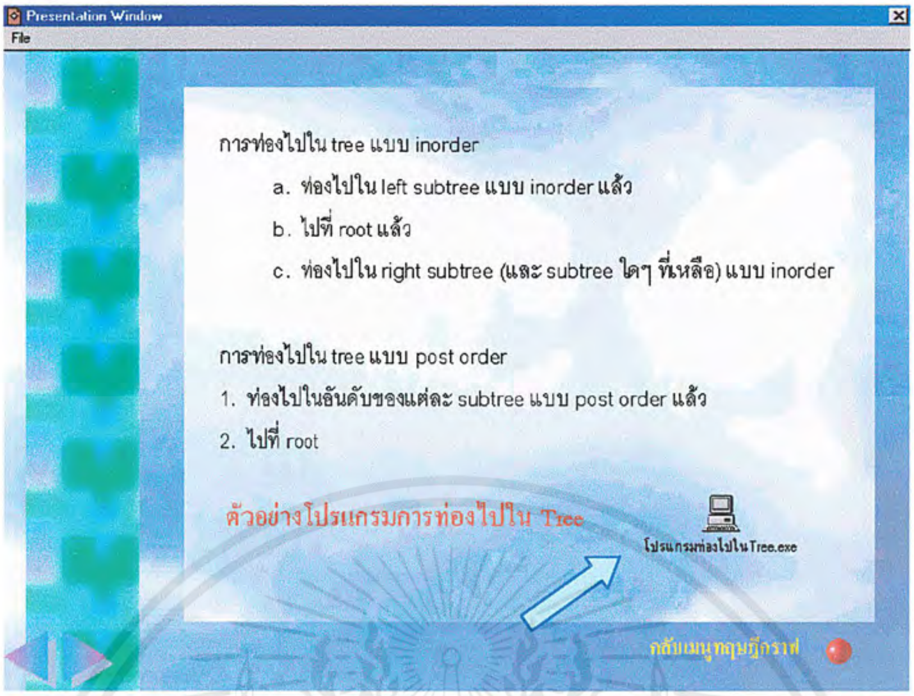


รูปที่ 4.2 เนื้อหา



รูปที่ 4.2 ตัวอย่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

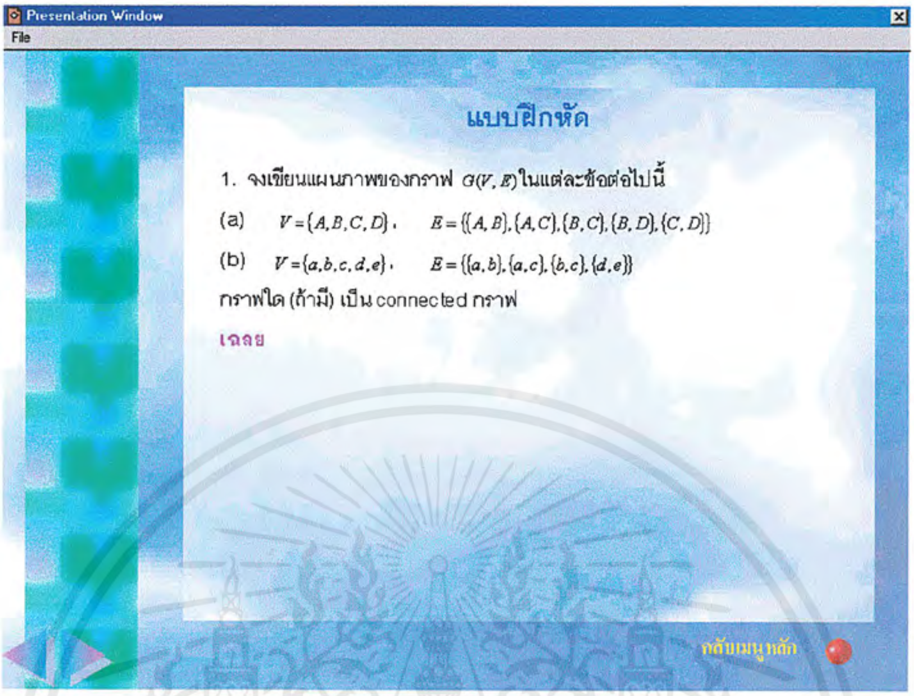


รูปที่ 4.2 ตัวอย่างโปรแกรมคำนวณ

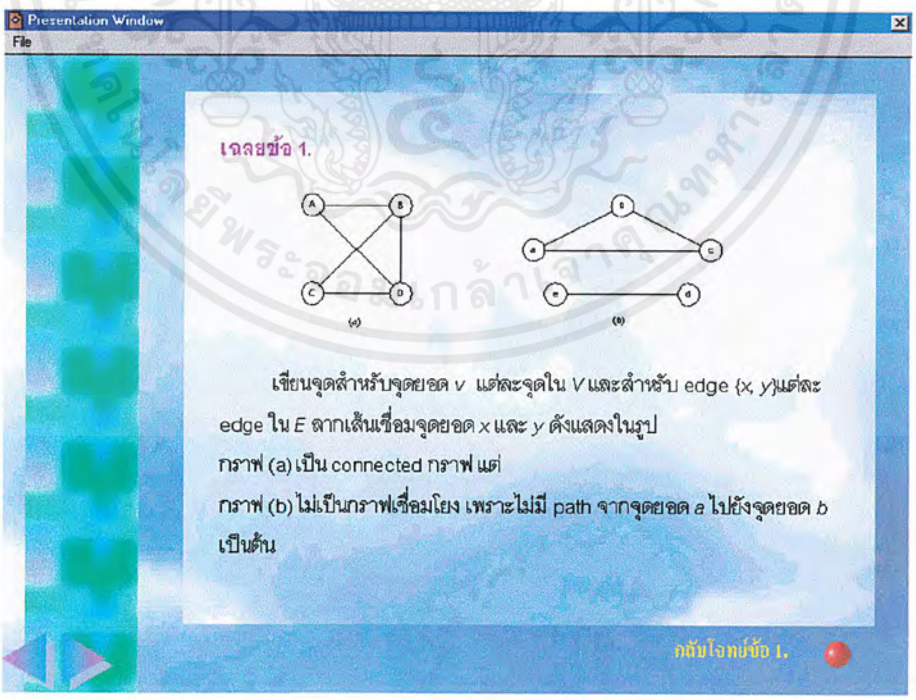
4.2.2.2 ข้อมูลแบบฝึกหัด และเฉลยแบบฝึกหัด

ข้อมูลประเภทนี้จะเน้นให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนการแก้ปัญหาทฤษฎีกราฟ ซึ่งผู้เรียนสามารถที่จะตรวจคำตอบ และศึกษาวิธีทำอย่างละเอียดจากตัวเฉลยได้ทันที ตัวอย่างหน้าจอแสดงดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 ตัวอย่างแบบฝึกหัด



รูปที่ 4.4 ตัวอย่างเฉลยแบบฝึกหัด

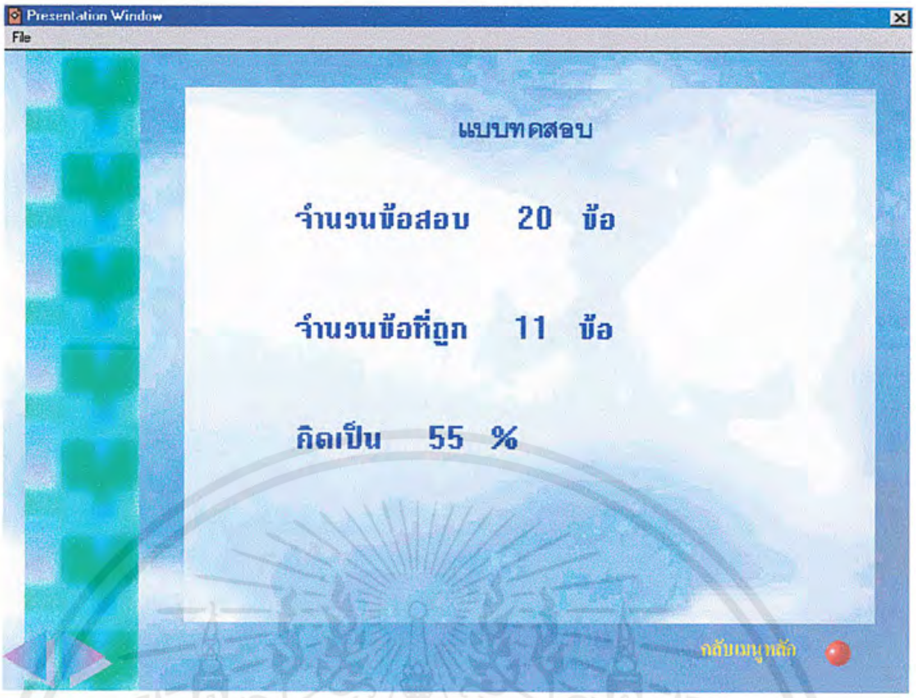
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2.3 ข้อมูลแบบทดสอบ

ข้อมูลประเภทนี้จะเป็นโจทย์คำถามหลังจากที่ผู้เรียน เรียนเนื้อหาเสร็จ แล้วโดยผู้เรียนจะต้องใช้เมาส์คลิกที่คำตอบที่ต้องการ โดยตัวโปรแกรมจะทำการคำนวณคะแนน ถ้าผู้เรียนทำคะแนนได้ถึงที่กำหนดไว้ถือว่าสอบผ่าน ตัวอย่างหน้าจอแสดงดังรูป

รูปที่ 4.5 ตัวอย่างแบบทดสอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



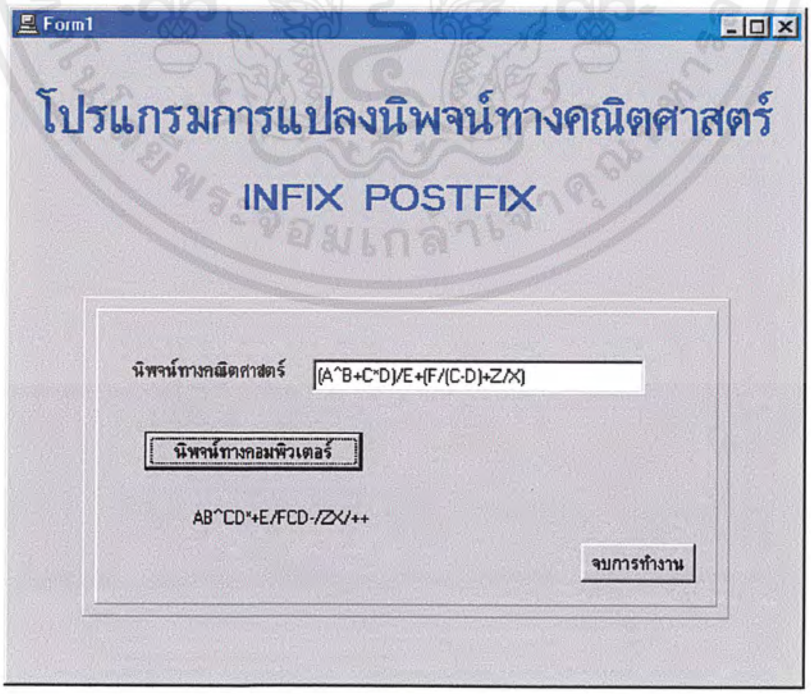
รูปที่ 4.6 ตัวอย่างสรุปคะแนนแบบทดสอบ

4.2.3 ส่วนโปรแกรมคำนวณ

ส่วนนี้เป็นตัวอย่างโปรแกรมใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับเนื้อหาบางส่วนของทฤษฎีกราฟโดยตัวโปรแกรมฒนาบน Delphi 4 ตัวอย่างโปรแกรมแสดงดังรูป

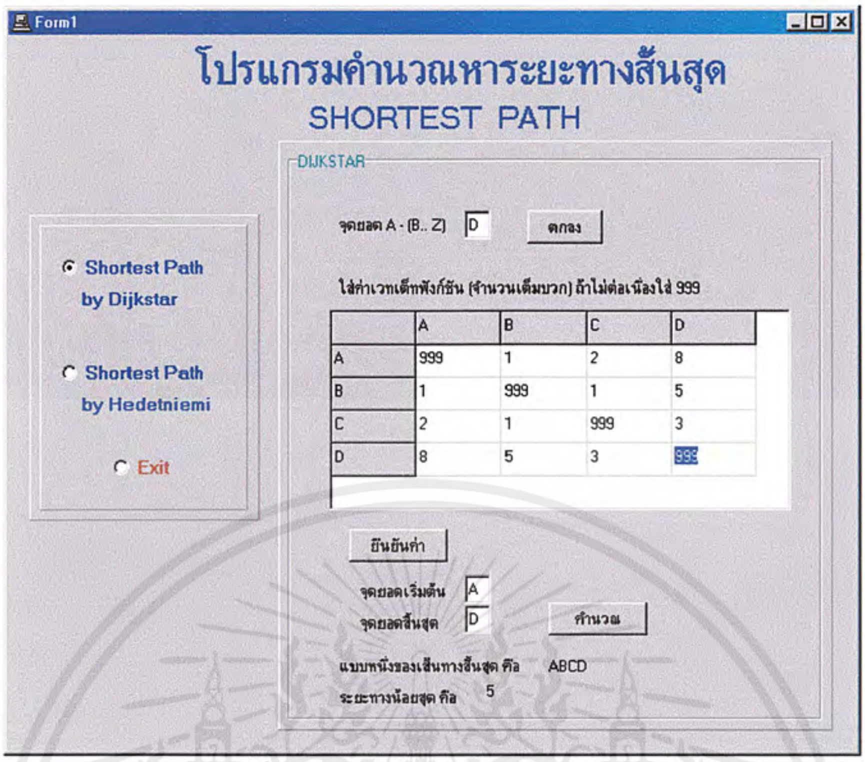
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.7 โปรแกรมคำนวณ Minimal Spanning Tree



รูปที่ 4.8 โปรแกรมแปลงนิพจน์ทางคณิตศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.9 โปรแกรมหา Shortest Path

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลการจัดการปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการจัดการปัญหาพิเศษ

โปรแกรมช่วยสอนทฤษฎีกราฟนี้ เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นเพื่อช่วยในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ผลการจัดการโปรแกรมช่วยสอนนี้ สามารถสรุปได้โดยสังเขป

5.1.1 ผู้เรียนสามารถทำการศึกษาได้ด้วยตนเองภายนอกห้องเรียน

5.1.2 ตัวโปรแกรมมีส่วนของแบบฝึกหัด ส่วนของการเฉลยแบบฝึกหัด และส่วนของแบบทดสอบ ทำให้ผู้เรียนสามารถประเมินได้ว่ามีความเข้าใจมากน้อยเพียงใด

5.1.3 โปรแกรมที่จัดทำขึ้นในส่วนคำนวณนั้น จะทำการแก้ปัญหาในส่วนเนื้อหาที่เกี่ยวข้อง ช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 ปัญหาพิเศษเรื่องโปรแกรมช่วยสอนทฤษฎีกราฟนี้ ในส่วนของการพิสูจน์ไม่สามารถจัดทำเป็นแบบทดสอบได้

5.2.2 เพื่อเพิ่มความน่าสนใจในตัวโปรแกรม ควรจะมีภาพเคลื่อนไหวแทรกในโปรแกรมในส่วนแสดงลักษณะของกราฟ

5.2.3 ส่วนของโปรแกรมการแก้ปัญหาเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟขาดในหัวข้อเรื่องการไหลของข่ายงานเท่านั้น หากผู้ศึกษาสนใจจะทำการพัฒนาโปรแกรมต่อไปสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ และเนื่องจากโปรแกรมนี้พัฒนาโดยโปรแกรม Delphi 4 และ Authorware 5 ดังนั้นผู้ทำการวิจัยจึงควรทำการศึกษาการใช้งานโปรแกรมเหล่านี้ให้เข้าใจด้วยเช่นกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

รศ. ภัคคินี ชิตสกุล. **เอกสารประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิศาสตร์ดิสครีต.**

ดร. วิทยา วัชระวิทยากุล และ ดร. สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. **คณิตศาสตร์ดิสครีตเชิงประยุกต์.** บริษัท เอช. เอ็น. กรุ๊ป จำกัด

ดร. วนิดา เหมะกุล. 2530. **คณิตศาสดิสครีต.** กรุงเทพ : ภาควิชาคณิศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วีระพนธ์ คำดี. **สร้างงานมัลติมิเดียสมบูรณ์แบบ โดยใช้** macromedia AUTHORWARE 5. กรุงเทพ : บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด.

Robin J. Wilson. **Introduction to Graph Theory.** 4^{th} ed. Longman Group Ltp, England : Edinburgh Gate

Robin J. Wilson, John J. Watkins. **Graphs An Introductry Approach.** John Wiley & Sons Inc. : Publishes simulaneously in Canada.

Saymour Lipschutz, Ph. D. **Schaum ' s Outline Series Theory and Problems Of Discrete Mathematics.** McGraw – Hill Book Company.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้