

การศึกษาเทนเซอร์ผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต
EDUCATION TENSOR VIA THE INTERNET



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เลขหม.....

เลขทะเบียน..... 36146

วัน, เดือน, ปี..... 11 ก.ค. 2543

ปีการศึกษา 2542

ขอสงวนลิขสิทธิ์ในส่วนนี้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

EDUCATION TENSOR VIA THE INTERNET



A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 1999

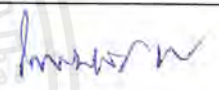


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การศึกษาเทนเซอร์ผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต
 EDUCATION TENSOR VIA THE INTERNET

ชื่อนักศึกษา นางสาวกฤติดา บุญโถม 39054101
 นางสาวธิติวรรณ ไชยวงษ์ 39054114
 นางสาววิภาดา ภูริภัทรวัฒนกุล 39054140

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
 สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
 อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นำปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2542

	คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	อาจารย์ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์	
กรรมการ	อาจารย์กาญจนา คำนึ่งกิจ	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล	

(อาจารย์ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การศึกษาด้านเทอร์มินอลผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกฤษิศา บุญโถม	39054101
	นางสาวธิดาวรรณ ไชยวงษ์	39054114
	นางสาววิภาดา ภูริภัทรวัฒนกุล	39054140
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์	คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2542	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล	



ในการค้นคว้าหาข้อมูลต่างๆ สามารถหาได้จากหลายสื่อ เว็บเพจเป็นสื่อหนึ่งที่สะดวก รวดเร็วและแพร่หลายเมื่อเทียบกับสื่ออื่นๆ อีกทั้งเว็บเพจสามารถแสดงออกมาได้ทั้งข้อความ ภาพ กราฟิก ภาพเคลื่อนไหว และเสียง ทำให้ผู้อ่านเข้าใจเนื้อหา และน่าที่จะทำให้อ่านมีความสนใจ ที่จะติดตามรายละเอียดเพิ่มขึ้น ดังนั้นปัญหาพิเศษฉบับนี้จึงนำเนื้อหาเทอร์มินอลจัดทำขึ้นบนเว็บเพจ และพัฒนาขึ้นเพื่อช่วยอำนวยความสะดวกในด้านการสอนคณิตศาสตร์เรื่องเทอร์มินอล

สเกดาร์สามารถศึกษาได้จากเทอร์มินอลอันดับศูนย์ และเวกเตอร์สามารถศึกษาได้จากเทอร์มินอลอันดับหนึ่ง ส่วนเนื้อหาของเทอร์มินอลที่น่าสนใจศึกษาจากเทอร์มินอลอันดับสอง เทอร์มินอล ความเค้น โมเมนต์ของเทอร์มินอลความถี่ เทอร์มินอลที่ผิดปกติ อัตราของเทอร์มินอลที่ผิดปกติ และได้แสดงบนเว็บเพจเพื่อใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการทำความเข้าใจเนื้อหาของเทอร์มินอล และเป็นแนวทางในการค้นคว้าเนื้อหาของเทอร์มินอลในส่วนที่ซับซ้อนต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	Education Tensor via the Internet	
Students	Miss.Kunlathida Boonchome	39054101
	Miss.Thitiwan Chaiyawong	39054114
	Miss.Wipada Puripatwattanakul	39054140
Degree	Bachelor's Degree of Science	
Department	Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Science	
Programme	Applied Mathamatics	
Academic Year	1999	
Special Project Advisor	Associate Professor Pakkinee Chitsakul	



ABSTRACT

When you search data , you can find in several way. Webpage is a choice that easily to used. It to be wide spread in text , graphic , animation and sound. There can help you to understand and interesting to be continued. So that this special project show tensor on internet and is developed for tensor in mathematics.

Scalar to be educated in zero order of tensor and vector to be educated in first order of tensor and the other tensor that interesting to be educated in second order of tensor , stress tensor , the moment of inertia tensor , the deformation tensor , the rate of deformation tensor. There show on webpage as basic information to be understand in concept of tensor and it is tendency that search concept of complex tensor.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องเทนเซอร์บนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต สามารถสำเร็จคล่องไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษที่กรุณาให้คำแนะนำ และเป็นທີ່ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ให้ความสนับสนุนทางด้านกำลังใจและทุนทรัพย์รวมทั้งขอขอบคุณ นายทรงคุณ สาสนะ และนายชัยยุทธ ศฤงคารเกษฎา รุ่นพี่รุ่น 14 ที่ให้คำปรึกษาในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ รวมทั้งเพื่อนๆ ทุกคนที่คอยช่วยเหลือในด้านต่างๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2543



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VIII
สารบัญภาพ.....	IX
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญ/ที่มาของปัญหาพิเศษ.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ.....	1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ.....	1
1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน.....	1
1.5 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ.....	1
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
2.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเวกเตอร์.....	3
2.1.1 เวกเตอร์และสเกลาร์ (Vector and Scalar).....	3
2.1.2 การดำเนินการบนเวกเตอร์.....	3
2.1.2.1 การบวกของเวกเตอร์.....	3
2.1.2.2 การลบของเวกเตอร์.....	4
2.1.2.3 Projection ของเวกเตอร์.....	4
2.1.2.4 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์.....	5
2.1.3 พื้นฐานและการเปลี่ยนรูป (Bases and Transformations).....	5
2.1.3.1 อิสระเชิงเส้นและไม่เป็นอิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์.....	5
2.1.3.2 พื้นฐานและเวกเตอร์มูลฐาน.....	6
2.1.3.3 การแปลงโดยตรงและการแปลงผกผันของเวกเตอร์มูลฐาน.....	8
2.1.4 ผลคูณของ 2 เวกเตอร์.....	10
2.1.4.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์.....	10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.4.2	ผลคูณเชิงเวกเตอร์.....	11
2.1.5	ผลคูณของ 3 เวกเตอร์.....	12
2.1.5.1	ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์.....	12
2.1.5.2	ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ 3 เวกเตอร์.....	13
2.1.6	ส่วนกลับของมูลฐานและหัวข้อที่เกี่ยวข้อง.....	14
2.1.6.1	ส่วนกลับของมูลฐาน.....	14
2.1.6.2	ส่วนประกอบของเวกเตอร์แปรปรวนและเวกเตอร์ไม่แปรปรวน.....	15
2.1.7	ตัวแปรเวกเตอร์.....	16
2.1.7.1	ฟังก์ชันเวกเตอร์ของสเกลาร์อาทิวเมนต์.....	16
2.1.7.2	ความต่อเนื่องและการมีอนุพันธ์.....	18
	1) อนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์.....	18
	2) อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์.....	18
	3) เชิงอนุพันธ์ของเวกเตอร์.....	20
2.1.7.3	อินทิกรัลของฟังก์ชันเวกเตอร์.....	20
	1) อินทิกรัลธรรมดาของเวกเตอร์.....	20
	2) อินทิกรัลตามเส้น.....	20
	3) อินทิกรัลตามพื้นผิว.....	22
2.2	แนวคิดของเทนเซอร์.....	22
2.2.1	เทนเซอร์อันดับศูนย์ (สเกลาร์).....	23
2.2.2	เทนเซอร์อันดับหนึ่ง (เวกเตอร์).....	24
2.2.3	เทนเซอร์อันดับสอง.....	25
2.2.3.1	เทนเซอร์ความเค้น.....	27
2.2.3.2	โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย.....	30
2.2.3.3	เทนเซอร์ศิครูป.....	32
2.2.3.4	อัตราของเทนเซอร์ศิครูป.....	34
2.2.4	การแปลงเทนเซอร์ภายใต้การหมุนพิกัด.....	37
2.2.5	พิกัดเชิงเส้นโค้ง.....	41
2.3	พีชคณิตเทนเซอร์.....	43
2.3.1	ผลบวกของเทนเซอร์.....	43
2.3.2	ผลคูณของเทนเซอร์.....	44
2.3.3	การลดรูปเทนเซอร์.....	44
2.3.4	คุณสมบัติสมมาตรของเทนเซอร์.....	45

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.4.1	เทนเซอร์สมมาตรและไม่สมมาตร.....	45
2.3.4.2	การเท่ากันของเทนเซอร์ที่ไม่สมมาตรอันดับที่ 2 กับแกนของเวกเตอร์..	47
2.3.5	การลดเทนเซอร์ไปที่แกนหลัก.....	48
2.3.5.1	ปัญหาที่เกิดขึ้น.....	48
2.3.5.2	กรณี 2 มิติ.....	49
2.3.5.3	กรณี 3 มิติ.....	53
2.3.5.4	เทนเซอร์ทรงรี.....	57
บทที่ 3	วิธีดำเนินการวิจัย.....	60
3.1	ภาษา HTML.....	60
3.2	HTML ทำงานอย่างไร.....	60
3.3	การสร้าง Web page ด้วย Allaire ColdFusion Studio 4.0.....	61
3.4	คำสั่ง HTML ที่ใช้ใน Webpage Tensor.....	63
3.4.1	คำสั่ง HTML.....	63
3.4.2	คำสั่ง HEAD.....	63
3.4.3	คำสั่ง TITLE.....	63
3.4.4	คำสั่ง BODY.....	63
3.4.5	คำสั่ง FRAMESET.....	63
3.4.6	คำสั่ง FRAME.....	64
3.4.7	คำสั่ง FONT.....	64
3.4.8	คำสั่ง BASEFONT.....	65
3.4.9	คำสั่ง CENTER.....	65
3.4.10	คำสั่ง IMG.....	65
3.4.11	คำสั่ง BR.....	65
3.4.12	คำสั่ง B.....	66
3.4.13	คำสั่ง U.....	66
3.4.14	คำสั่ง P.....	66
3.4.15	คำสั่ง HR.....	66
3.4.16	คำสั่ง A.....	66
3.4.17	คำสั่ง TABLE.....	66
3.4.18	คำสั่ง TR.....	67
3.4.19	คำสั่ง TH.....	67

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.20 คำสั่ง TD.....	67
3.5 การออกแบบ.....	67
3.6 การพัฒนาและปรับปรุง.....	68
3.7 คู่มือการใช้งาน.....	68
3.7.1 การเข้าสู่เว็บเพจ.....	68
3.7.2 หน้าจอต่างๆ ของเว็บเพจ.....	69
บทที่ 4 ผลการวิจัย.....	81
4.1 ผลที่ได้.....	81
บทที่ 5 สรุปผลและเสนอแนะ.....	82
5.1 สรุปผล.....	82
5.2 ข้อจำกัด.....	82
5.3 ข้อเสนอแนะ.....	82
บรรณานุกรม.....	83

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 โครงสร้างพื้นฐานของ HTML.....	61
3.2 Attribute ของ body	63
3.3 Attribute ของ frameset.....	64
3.4 Attribute ของ frame.....	64
3.5 Attribute ของ font	64
3.5 Attribute ของ basefont.....	64
3.6 Attribute ของ basefont.....	65
3.7 Attribute ของ img.....	65
3.8 Attribute ของ A.....	66
3.9 Attribute ของ table.....	66
3.10 Attribute ของ th.....	67

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญญภาพ

ภาพที่	หน้า
2.1 แสดงการบวกของเวกเตอร์.....	3
2.2 แสดงการลบของเวกเตอร์.....	4
2.3 แสดง projection ของเวกเตอร์.....	4
2.4 แสดงระบบพิกัดเฉียงขึ้นกับมูลฐาน e_1, e_2, e_3	6
2.5 แสดงระบบพิกัดเชิงตั้งฉากขึ้นกับมูลฐาน i_1, i_2, i_3	6
2.6 แสดงพิกัดเชิงเส้นโค้ง.....	7
2.7 แสดงการกระจายของเวกเตอร์ e'_1 ซึ่งขึ้นกับเวกเตอร์ e_1, e_2, e_3	9
2.8 แสดงการกระจายของผลคูณเชิงสเกลาร์.....	10
2.9 แสดงผลคูณเชิงเวกเตอร์.....	11
2.10 แสดงการกระจายของผลคูณเชิงเวกเตอร์.....	12
2.11 แสดงผลคูณเชิงสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์.....	12
2.12 แสดง $A \times B$ ในระบบพิกัดขวามือ และ $A \times B$ ในระบบพิกัดซ้ายมือ.....	13
2.13 แสดงผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ 3 เวกเตอร์.....	14
2.14 แสดงส่วนกลับของมูลฐานและปริซึม 6 ด้านที่ขนานกับขนาดของ e^3 จะเท่ากับส่วนกลับของด้านที่ขนานกับ h	15
2.15 แสดงเส้น hodograph ของ $A = A(t)$	17
2.16 แสดงลักษณะของเส้น hodograph.....	17
2.17 แสดงเส้น hodograph อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์.....	19
2.18 แสดง Line integral ของ F ตามเส้นโค้ง \vec{r}	21
2.19 แสดงความไม่แปรปรวนของระยะทางระหว่าง 2 จุด A และ B	23
2.20 แสดงการเปลี่ยนแปลงของส่วนประกอบของเวกเตอร์ ภายใต้การเปลี่ยนแปลงของระบบพิกัด.....	25
2.21 แสดงความเค้นที่กระทำบนส่วนประกอบของพื้นที่ใน elastic medium.....	28
2.22 แสดงความเค้นบนพื้นผิวของทรงสี่หน้า.....	28
2.23 แสดงเทนเซอร์ความเค้นที่ได้จากเวกเตอร์ความเค้น p_1, p_2, p_3	29
2.24 แสดงการผิดรูปของ elastic body.....	32
2.25 แสดงการผิดรูปของสารประกอบของของไหล.....	35
2.26 แสดงการหมุนรอบแกนพิกัด.....	38
2.27 แสดงพิกัดทรงกระบอก.....	42

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไมออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.28 แสดงพิกัดทรงกลม.....	43
2.29 แสดงแกนหลักของโมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อยของระนาบของอนุภาค.....	50
2.30 แสดงแกนหลัก 3 แกนของเทนเซอร์สมมาตรการมีอยู่ของแกน ไม่ขึ้นกับผลคูณของรากของ characteristic equation.....	55
2.31 แสดงแกนหลักของเทนเซอร์สมมาตร.....	57
2.32 แสดงรูป tensor ellipsoid ของเทนเซอร์สมมาตร T_{ik} แกนหลักของทรงรีเทียบกับเทนเซอร์.....	59
3.1 แสดงหน้าจอของการเข้าสู่เว็บไซต์เทนเซอร์.....	68
3.2 แสดงหน้าจอของการเข้าสู่เนื้อหาของเทนเซอร์.....	69
3.3 แสดงหน้าจอของการแนะนำเทนเซอร์.....	70
3.4 แสดงหน้าจอเทนเซอร์อันดับศูนย์.....	71
3.5 แสดงหน้าจอของเทนเซอร์อันดับหนึ่ง.....	72
3.6 แสดงหน้าจอเทนเซอร์อันดับสอง.....	73
3.7 แสดงหน้าจอเทนเซอร์ความเค้น.....	74
3.8 แสดงหน้าจอโมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย.....	75
3.9 แสดงหน้าจอเทนเซอร์ที่ผิดปกติ.....	76
3.10 แสดงหน้าจออัตราของเทนเซอร์ที่ผิดปกติ.....	77
3.11 แสดงหน้าจอส่งคำแนะนำติชม.....	78
3.12 แสดงปุ่ม download.....	78
3.13 แสดงหน้าจอการบันทึกเพิ่มข้อมูล tensor.zip.....	78
3.14 แสดงปุ่มความหมายของตัวแปร.....	79
3.15 แสดงหน้าจอความหมายของตัวแปร.....	79
3.16 แสดงหัวข้อหลักของเทนเซอร์ที่สามารถเชื่อมโยงได้.....	79
3.17 แสดงปุ่ม about us.....	80
3.18 แสดงหน้าจอ about us.....	80

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในปัจจุบันนี้เทคนิคการเขียนโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสื่อการสอนทางคณิตศาสตร์กำลังได้รับความสนใจและเป็นที่ต้องการเป็นอย่างมาก ซึ่งเราสามารถแบ่งสื่อการสอนออกเป็นหลายระดับ โดยเฉพาะในระดับอุดมศึกษา ทางคณะผู้จัดทำมีความเห็นว่าสื่อการสอนทางคณิตศาสตร์สามารถนำมาประยุกต์ให้สามารถใช้ได้กับสื่อทางด้านอื่นๆ โดยเฉพาะอินเทอร์เน็ตซึ่งเป็นที่นิยมกันอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน คณะผู้จัดทำจึงมีความต้องการที่จะนำเสนอผลงานเรื่องนี้เพื่อประโยชน์กับนักศึกษาที่ต้องการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรอเทนเซอร์ให้มีความเข้าใจในเนื้อหาเรื่องนี้มากยิ่งขึ้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. ให้นักศึกษามีความเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์เรอเทนเซอร์มากยิ่งขึ้น
2. สามารถนำสื่อการสอนนี้ไปใช้อย่างกว้างขวางทางสื่ออินเทอร์เน็ต
3. สื่อการสอนนี้สามารถใช้งานได้ง่ายและมีความดึงดูดในการใช้งาน

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

สมมติฐานของการศึกษาเรื่องการศึกษาเทนเซอร์ผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ตในรูปแบบภาษาไทยนี้ น่าที่จะสามารถทำให้ผู้อ่านได้เข้าใจเรื่องเทนเซอร์ได้มากยิ่งขึ้น จากการนำความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเวกเตอร์ และทฤษฎีพีทาโกรัสเข้ามาช่วยในการอธิบายเนื้อหาของ เทนเซอร์

1.4 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

ขอบเขตของสื่อการสอนจะเน้นเนื้อหาของเทนเซอร์เป็นหลักใหญ่ เพื่อให้ให้นักศึกษาที่กำลังศึกษาเรื่องนี้ได้มีความเข้าใจมากยิ่งขึ้น โดยจัดทำผ่านสื่ออินเทอร์เน็ตและใช้กับ Internet Explorer จะแสดงผลได้ดีกว่า

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาเนื้อหาของ เทนเซอร์
2. ศึกษาภาษาทางคอมพิวเตอร์ในการใช้เขียนโปรแกรมสร้าง web page บนอินเทอร์เน็ต
3. ทดลองและแก้ไข โปรแกรมที่เขียนให้ถูกต้อง และสามารถใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. รวบรวมข้อมูลและนำมาจัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

1.6 ข้อตกลงเบื้องต้น

การใช้สื่อการสอนเรื่องการศึกษาเทนเซอร์ผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ตนี้ ควรจะใช้กับ Web Browser ของ Internet Explorer จะดีกว่าการใช้กับ Netscape Communicator เพราะ Internet Explorer จะแสดงผลได้มีประสิทธิภาพมากกว่า Netscape Communicator



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเทนเซอร์

2.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเวกเตอร์

2.1.1 เวกเตอร์และสเกลาร์

สเกลาร์ (scalar) คือ ปริมาณที่มีแต่ขนาดแต่ไม่มีทิศทางเป็นเลขจำนวนเดียว (อาจเป็นบวก ลบหรือศูนย์) เช่น อุณหภูมิ ความหนาแน่น มวล งาน เป็นต้น สเกลาร์เปรียบเทียบกันได้ถ้าอยู่ในหน่วยเดียวกัน

เวกเตอร์ (vector) คือ ปริมาณซึ่งมีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น การจذب ความเร็ว ความเร่ง แรง โมเมนต์ของแรง สนามแม่เหล็ก เป็นต้น

เวกเตอร์ A แทนด้วยสัญลักษณ์ตัวหนา A หรือ \vec{A}

แทนขนาดของเวกเตอร์ A ด้วยสัญลักษณ์ $|A|$ หรือ \bar{A} หรือ $|\vec{A}|$

เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 จะไม่มีทิศทาง

2.1.2 การดำเนินการบนเวกเตอร์

2.1.2.1 การบวกของเวกเตอร์

ถ้า A B และ C เป็นเวกเตอร์แล้ว

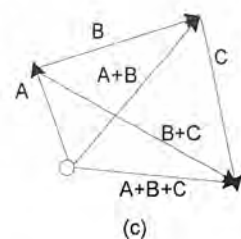
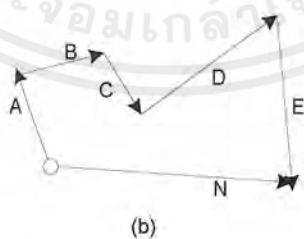
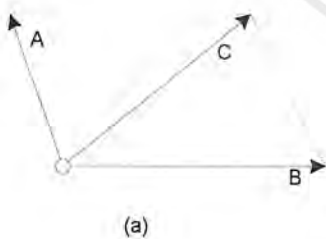
$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

$$A + 0 = A$$

กฎการสลับที่

กฎการเปลี่ยนกลุ่ม



รูปที่ 2.1 a) $A + B = C$ b) $A + B + C + \dots = N$
c) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2.2 การลบของเวกเตอร์

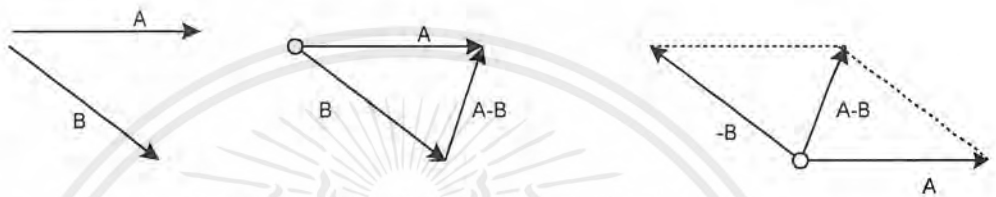
เวกเตอร์ $-A$ คือ เวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ A แต่มีขนาดเท่ากัน

$$A + (-A) = 0$$

ถ้า $x + B = A$ แล้ว

$$x + B + (-B) = A + (-B)$$

$$x = A + (-B)$$



รูปที่ 2.2 การลบของเวกเตอร์

2.1.2.3 Projection ของเวกเตอร์

Projection ของ A บน u (A_u) หมายถึง ความยาวของ u ที่เกิดจากระนาบที่ลากผ่านจุดปลายทั้ง 2 ของ A ลงมาตั้งฉากกับ u

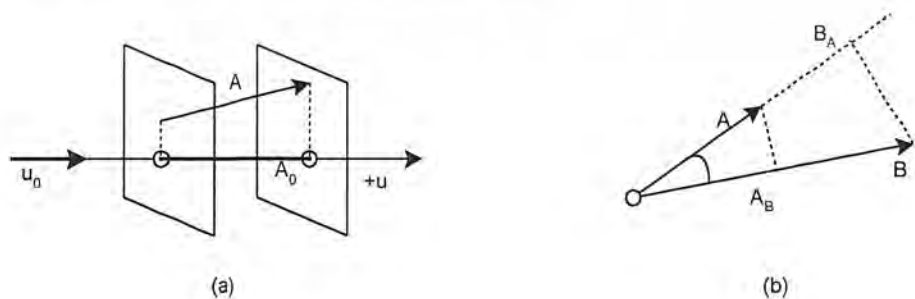
I ถ้า A และ u มีทิศทางเดียวกัน จะมีค่าเป็นค่าบวก

II ถ้า A และ u มีทิศทางตรงข้ามกัน จะมีค่าเป็นค่าลบ

เวกเตอร์ 1 หน่วย (unit vector) บนแกน u หมายถึงเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วย มีทิศทางเดียวกับ u ($u_0 = |u_0| = 1$) ดังรูป 2.3a) มุมระหว่าง A กับ u_0 จะได้

$$A_u = A \cos \varphi = A \cos(A, u_0) \quad (1)$$

ขนาดของ Projection ของ A บน $u = |A \cos \varphi|$



รูปที่ 2.3 a) projection ของเวกเตอร์บนแกนหลัก

b) projection ของเวกเตอร์หนึ่งบนเวกเตอร์หนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2.4 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์ A ด้วยสเกลาร์ m หมายถึง เวกเตอร์ mA ซึ่งมีขนาด $|m|$ เท่าของขนาด A โดยที่

I ถ้า $m > 0$ แล้ว mA จะมีทิศทางเดียวกับ A

II ถ้า $m < 0$ แล้ว mA จะมีทิศตรงข้ามกับ A

III ถ้า $m = 0$ แล้ว mA จะเป็นเวกเตอร์ศูนย์

กฎต่างๆ

1) $mA = Am$ กฎการสลับที่

2) $m(nA) = (mn)A$ กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

3) $(m+n)A = mA + nA$ กฎการกระจาย

4) $m(A+B) = mA + mB$ กฎการกระจาย

2.1.3 พื้นฐานและการเปลี่ยนรูป

2.1.3.1 อิสระเชิงเส้นและไม่เป็นอิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์

เวกเตอร์ n จำนวน A_1, A_2, \dots, A_n เป็นแบบไม่อิสระเชิงเส้น (linear dependence) ถ้ามีสเกลาร์ n จำนวน $c_1, c_2, \dots, c_n \neq 0$ ซึ่ง

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n = 0 \quad (2)$$

เวกเตอร์ n จำนวน A_1, A_2, \dots, A_n เป็นแบบอิสระเชิงเส้น (linear independence) ถ้า $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ หรือมีสเกลาร์บางตัวเท่ากับ 0

เวกเตอร์แบบไม่อิสระเชิงเส้น 2 ตัว เป็นแบบร่วมเส้นตรง (colinear) จะได้ $c_1 A + c_2 B = 0$

$$A = -\frac{c_2}{c_1} B \quad \text{ถ้า } c_1 \neq 0$$

$$B = -\frac{c_1}{c_2} A \quad \text{ถ้า } c_2 \neq 0$$

เวกเตอร์แบบไม่อิสระเชิงเส้น 3 ตัว เป็นแบบร่วมระนาบ (coplanar) จะได้

$$c_1 A + c_2 B + c_3 C = 0 \quad (3)$$

ถ้า c_1, c_2, c_3 อย่างน้อย 1 ตัวที่ไม่เท่ากับ 0 เช่น c_3 แล้ว

$$C = mA + nB \quad (4)$$

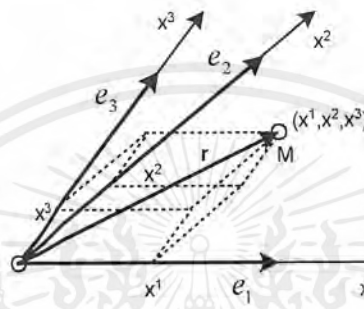
โดยที่ $m = -\frac{c_1}{c_3}$, $n = -\frac{c_2}{c_3}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\therefore C$ อยู่บนระนาบเดียวกับ A และ B (mA รวมเส้นตรงกับ A และ nB รวมเส้นตรงกับ B)

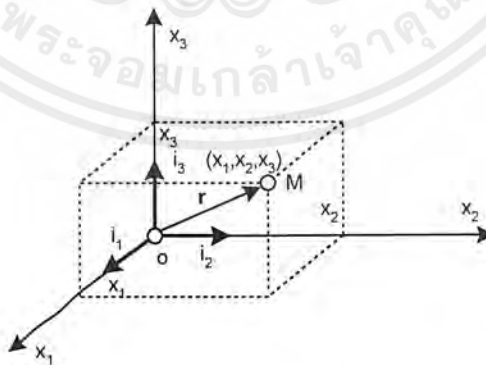
2.1.3.2 พื้นฐานและเวกเตอร์มูลฐาน

เวกเตอร์มูลฐาน (basis vector) หมายถึง เซตของเวกเตอร์อิสระเชิงเส้น เช่น e_1, e_2, e_3 ในระบบพิกัด 3 มิติ



รูปที่ 2.4 ระบบพิกัดเฉียงขึ้นกับมูลฐาน e_1, e_2, e_3

รูปที่ 2.4 เป็นระบบพิกัดเฉียง (oblique coordinate system) โดยที่มีเวกเตอร์มูลฐาน e_1, e_2, e_3 ตากจากจุด O และให้ Ox^k เป็นเส้นซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ e_k ($k = 1, 2, 3$)
เมื่อเวกเตอร์มูลฐาน e_1, e_2, e_3 เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉาก (orthogonal) กับอีกเวกเตอร์หนึ่งแล้วความยาว 1 หน่วยของเวกเตอร์จะเป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal)



รูปที่ 2.5 ระบบพิกัดเชิงตั้งฉากขึ้นกับมูลฐาน i_1, i_2, i_3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 2.5 ระบบพิกัดเชิงตั้งฉาก (rectangular coordinate system) โดยที่ x^1, x^2, x^3 เปลี่ยนเป็น x_1, x_2, x_3 และ e_1, e_2, e_3 เปลี่ยนเป็น i_1, i_2, i_3

ให้ M มีพิกัด x_1, x_2, x_3 จะได้เวกเตอร์รัศมี (radius vector) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$ ดังนั้น $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3$

ในระบบพิกัดฉาก ตำแหน่ง M จะแทนด้วยจำนวน p และ q (เรียกว่าพิกัด (coordinate)) ระยะทางของ $p = x_1$ และ $q = x_2$ ให้กำหนดพิกัดข้างหนึ่งคือ p เป็นค่าคงที่ แล้วเปลี่ยนพิกัด q จะได้พิกัดเส้นโค้ง (coordinate curve) ดังนั้นพิกัดเส้นโค้งทั้ง 2 จะลากผ่านจุดต่างๆ จุดบนระนาบ

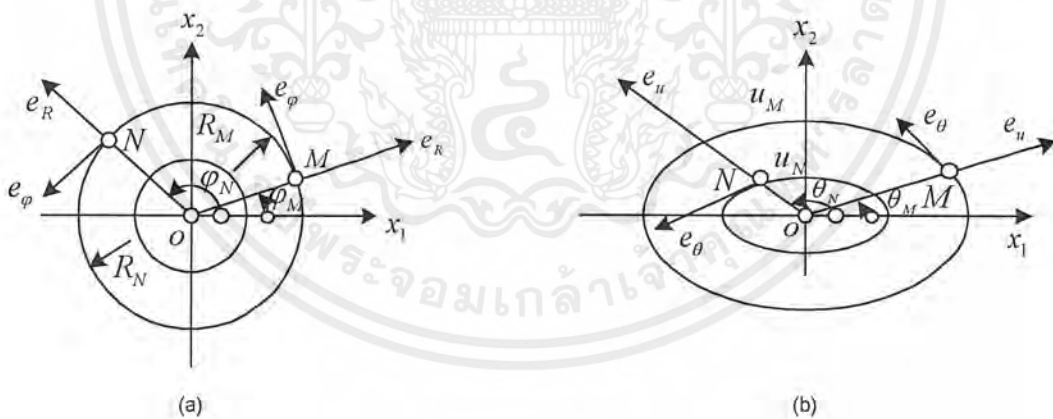
ให้ M เป็นจุดในพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate)

R เป็นระยะทางระหว่าง M และ fix point O (เรียกว่าขั้ว (pole))

φ เป็นมุมระหว่างเส้นที่ลากจาก O ถึง M และแกนเชิงขั้ว (polar axis)

พิกัดความโค้งเป็นวงกลมรัศมี R และมุม φ และขึ้นอยู่กับเวกเตอร์มูลฐาน e_R และ e_φ ดังรูปที่ 2.6a)

e_R และ e_φ เปลี่ยนจากจุดหนึ่งไปจุดหนึ่งจะมีมุมที่ตั้งฉากกัน ระบบพิกัดซึ่งเวกเตอร์มูลฐานตั้งฉากกัน เรียกว่า ระบบเชิงตั้งฉาก (orthogonal system) ระบบพิกัดที่พิกัดความโค้งไม่เป็นเส้นตรง เรียกว่า พิกัดเชิงเส้นโค้ง (curvilinear coordinate)



รูปที่ 2.6 พิกัดเชิงเส้นโค้ง

a) พิกัดขั้ว

b) พิกัดขั้วทั่วไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดระบบพิกัดเชิงขั้วมีระยะ R และมุม θ มีขั้วที่ O และให้ระบบพิกัดเชิงตั้งฉาก มีระยะ x_1 และ x_2 จากจุดกำเนิด O และให้แกน x ทับกับแกนเชิงขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงตั้งฉาก x_1, x_2 และพิกัดเชิงขั้ว R, φ เป็น

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \cos \varphi \\ x_2 &= R \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

และ $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad ; (0 \leq R < \infty)$

$$\tan \varphi = \frac{x_2}{x_1} \quad ; (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

พิจารณาระบบพิกัดเชิงขั้วโดยทั่วไป

ให้ความยาว u และมุม θ มีพิกัดความโค้งเป็นวงรี

$$u = \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}} \quad ; (0 \leq u < \infty)$$

$$a > 0, b > 0, a \neq b$$

$$\tan \theta = \frac{ax_2}{bx_1} \quad ; (0 \leq \theta < 2\pi)$$

เมื่อเทียบสมการ(5) เป็น $x_1 = au \cos \theta$, $x_2 = bu \sin \theta$ และเวกเตอร์มูลฐานเป็นเวกเตอร์หน่วย e_u และ e_θ (รูปที่ 2.6b) เมื่อ e_u และ e_θ เปลี่ยนจากจุดหนึ่งไปจุดหนึ่ง มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้ง 2 จะเปลี่ยน และจะไม่ตั้งฉากกันเพราะระบบของพิกัด u, θ ไม่เป็นเชิงตั้งฉาก (nonorthogonal)

2.1.3.3 การแปลงโดยตรงและการแปลงผกผันของเวกเตอร์มูลฐาน

พิจารณามูลฐานทั้ง 2 คือ e_1, e_2, e_3 และ e'_1, e'_2, e'_3 ถูกลากจากจุด O เดียวกัน แล้วทุกๆ เวกเตอร์ของมูลฐานแรก จะถูกกระจายโดยขึ้นกับเวกเตอร์มูลฐานที่ 2 และในทางกลับกัน (รูปที่ 2.7) ให้ $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3$ เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจายของ e'_i ซึ่งขึ้นกับเวกเตอร์ e_1, e_2, e_3 แล้ว

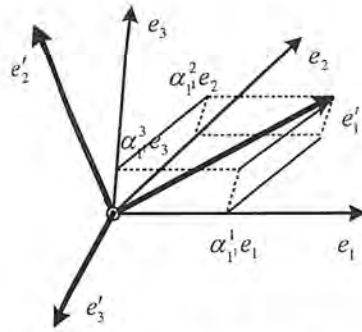
$$e'_1 = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \alpha_1^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_1^k e_k$$

$$e'_2 = \alpha_2^1 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \alpha_2^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_2^k e_k$$

$$e'_3 = \alpha_3^1 e_1 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_3^k e_k$$

$$\text{หรือ } e'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_i^k e_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.7 การกระจายของเวกเตอร์ e'_1 ซึ่งขึ้นกับเวกเตอร์ e_1, e_2, e_3

จำนวน α_i^k ($i, k = 1, 2, 3$) 9 จำนวน เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของการแปลงโดยตรง (coefficients of the direct transformation) (จากมูลฐานไม่เฉพาะกลับไปมูลฐานเฉพาะ)

ในทำนองเดียวกัน ให้ $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3$ เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจายของ e_i ซึ่งขึ้นกับเวกเตอร์ e'_1, e'_2, e'_3 ดังนั้น

$$e_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_i^k e'_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

จำนวน α_i^k ($i, k = 1, 2, 3$) 9 จำนวน เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของการแปลงผกผัน (coefficients of the inverse transformation) (จากมูลฐานเฉพาะกลับไปมูลฐานไม่เฉพาะ)

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของการแปลงโดยตรงและการแปลงผกผัน โดยแทนการกระจายเวกเตอร์ e_1, e_2, e_3 จากสมการ(7) ลงในสมการ(6) และจัดกลุ่มใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} e'_i &= \alpha_i^1 e_1 + \alpha_i^2 e_2 + \alpha_i^3 e_3 \\ &= \alpha_i^1 (\alpha_1^1 e'_1 + \alpha_1^2 e'_2 + \alpha_1^3 e'_3) + \alpha_i^2 (\alpha_2^1 e'_1 + \dots) + \alpha_i^3 (\alpha_3^1 e'_1 + \dots) \\ &= (\alpha_i^1 \alpha_1^1 + \alpha_i^2 \alpha_2^1 + \alpha_i^3 \alpha_3^1) e'_1 + (\alpha_i^1 \alpha_1^2 + \dots) e'_2 + (\alpha_i^1 \alpha_1^3 + \dots) e'_3 \\ &= e'_1 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^1 + e'_2 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^2 + e'_3 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^3 \\ &= \sum_{k=1}^3 e'_k \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^k \end{aligned} \quad (8)$$

ในทำนองเดียวกันหา

$$\begin{aligned} e_i &= e_1 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^1 + e_2 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^2 + e_3 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^3 \\ &= \sum_{k=1}^3 e_k \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^k \end{aligned}$$

จากสมการ(8) จะได้ 18 ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\sum_{l=1}^3 \alpha_l^i \alpha_l^j = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 & \text{ถ้า } i = j \end{cases}$$

$$\sum_{l=1}^3 \alpha_l^j \alpha_l^i = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 & \text{ถ้า } i = j \end{cases} \quad (9)$$

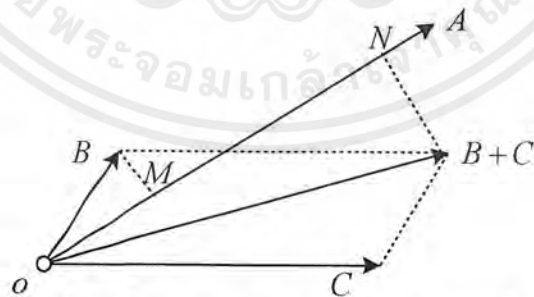
2.1.4 ผลคูณของ 2 เวกเตอร์

2.1.4.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product หรือ dot product) ของ 2 เวกเตอร์ A และ B แทนด้วย $A \cdot B$ คือ $A \cdot B = |A||B|\cos(A, B)$

กฎต่างๆ

- 1) $A \cdot B = B \cdot A$ กฎการสลับที่
- 2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ กฎการกระจาย ดังรูปที่ 2.8
- 3) $m(A \cdot B) = (mA) \cdot B = A \cdot (mB) = (A \cdot B)m$ เมื่อ m เป็นสเกลาร์
- 4) $i_1 \cdot i_1 = i_2 \cdot i_2 = i_3 \cdot i_3 = 1$
 $i_1 \cdot i_2 = i_2 \cdot i_3 = i_3 \cdot i_1 = 0$
- 5) ถ้า $A = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3$ และ $B = B_1 i_1 + B_2 i_2 + B_3 i_3$ แล้ว
 $A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$
 $A \cdot A = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$
 $B \cdot B = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$
- 6) ถ้า $A \cdot B = 0$ A และ B ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์แล้ว A และ B ตั้งฉากกัน



รูปที่ 2.8 การกระจายของผลคูณเชิงสเกลาร์

$$\text{เมื่อ } ON = OM + MN$$

$$|A|ON = |A|OM + |A|MN$$

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.4.2 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

กำหนดเวกเตอร์ A และ B ให้เวกเตอร์ C ถ้า

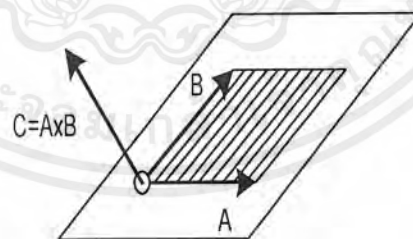
- 1) $C = |A||B|\sin(A, B)$ เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ถูกแผ่ (spaned) โดย A และ B (ดังรูปที่ 2.9)
- 2) C จะตั้งฉากกับระนาบของ A และ B
- 3) ตำแหน่ง C ในทิศทางการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ของ A และ B แล้ว เรียก C ว่าผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product หรือ cross product) ของ A และ B แสดงโดย $A \times B$ ตำแหน่งของ $A \times B$ อยู่ในทิศของการหมุนด้วยมือขวาจาก A ไป B

กฎต่างๆ

- 1) $A \times B = -B \times A$
- 2) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ กฎการกระจาย
- 3) $m(A \times B) = (mA) \times B = A \times (mB) = (A \times B)m$ เมื่อ m เป็นสเกลาร์
- 4) $i_1 \times i_1 = i_2 \times i_2 = i_3 \times i_3 = 0$
 $i_1 \times i_2 = i_3, i_2 \times i_3 = i_1, i_3 \times i_1 = i_2$
- 5) ถ้า $A = A_1i_1 + A_2i_2 + A_3i_3$ และ $B = B_1i_1 + B_2i_2 + B_3i_3$ แล้ว

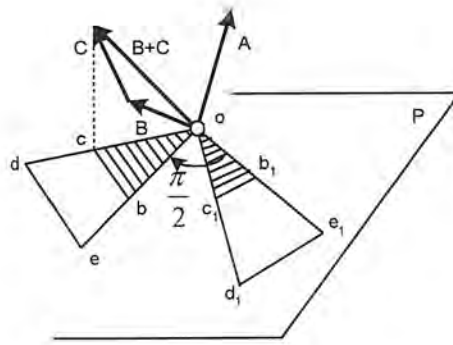
$$A \times B = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

- 6) ถ้า $A \times B = 0$ A และ B ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์แล้ว A ขนานกับ B



รูปที่ 2.9 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.10 การกระจายของผลคูณเชิงเวกเตอร์

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

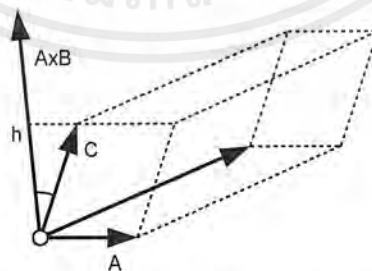
เวกเตอร์แกน (axial vector) เป็นเวกเตอร์ซึ่งถ้า handedness ของระบบพิกัดเปลี่ยน ทิศทางจะเปลี่ยนด้วย เช่น โมเมนต์ของแรง ความเร็วเชิงมุม เป็นต้น

เวกเตอร์เชิงขั้ว (polar vector) เป็นเวกเตอร์ซึ่งถ้า handedness ของระบบพิกัดเปลี่ยน แต่ทิศทางจะไม่เปลี่ยน เช่น แรง ความเร็ว เป็นต้น

2.1.5 ผลคูณของ 3 เวกเตอร์

2.1.5.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์

กำหนดเวกเตอร์ A B และ C แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ของทั้ง 3 เวกเตอร์ (The scalar triple product) คือ $V = (A \times B) \cdot C = |A \times B| C_{A \times B} = |A \times B| h$ เมื่อ $C_{A \times B} = h$ เป็น projection ของ C บนทิศทาง $A \times B$ ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

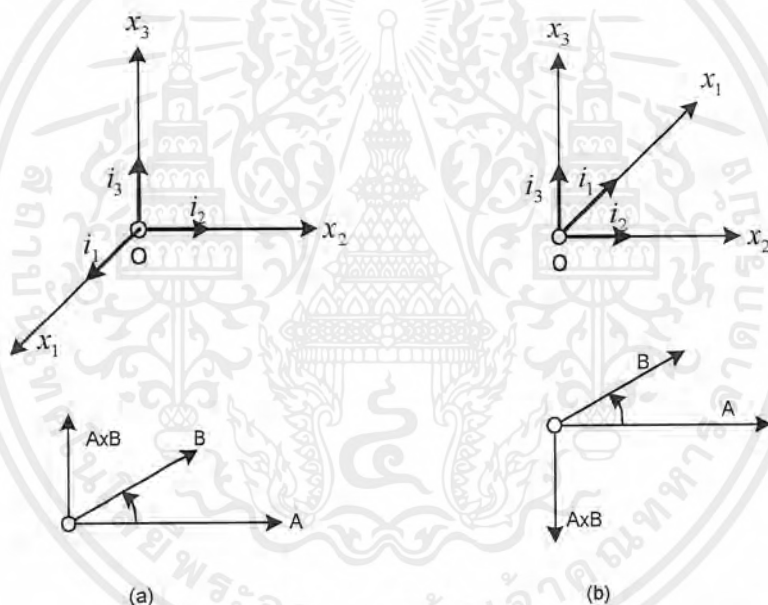
$|A \times B|$ เป็นพื้นที่ของฐาน $|V| = |(A \times B) \cdot C|$ เป็นปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $(A \times B) \cdot C$ อาจมีค่าเป็นค่าบวกหรือลบขึ้นอยู่กับมุมระหว่าง C และ $A \times B$ ว่าเป็นมุมแหลมหรือมุมป้าน

$$(A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \cdot (C_1 i_1 + C_2 i_2 + C_3 i_3) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$$

ถ้า $(A \times B) \cdot C > 0$ จะเป็น right-handed ดังรูปที่ 2.12a)

ถ้า $(A \times B) \cdot C < 0$ จะเป็น left-handed ดังรูปที่ 2.12b)



รูปที่ 2.12 a) เป็น $A \times B$ ในระบบพิกัดขวามือ (right-handed)

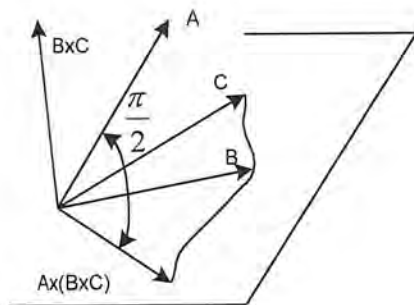
b) เป็น $A \times B$ ในระบบพิกัดซ้ายมือ (left-handed)

2.1.5.2 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ 3 เวกเตอร์

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ 3 เวกเตอร์ (The vector triple product) $A \cdot B$ และ C หมายถึง $A \times (B \times C)$ ซึ่งจะตั้งฉากกับ A และอยู่บนระนาบเดียวกับ B และ C ดังรูปที่

2.13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.13 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ 3 เวกเตอร์

กฎต่างๆ

- 1) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
- 2) $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$
- 3) $(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - A(B \cdot C)$

2.1.6 ส่วนกลับของมูลฐานและหัวข้อที่เกี่ยวข้อง

2.1.6.1 ส่วนกลับของมูลฐาน

เซตของมูลฐาน e_1, e_2, e_3 และ e^1, e^2, e^3 เรียกว่าเซตส่วนกลับหรือส่วนกลับของมูลฐาน

$$e_i \cdot e^k = \begin{cases} 0 & ; i \neq k \\ 1 & ; i = k \end{cases} \quad (10)$$

เซต e_1, e_2, e_3 และ e^1, e^2, e^3 เป็นเซตส่วนกลับของเวกเตอร์ก็ต่อเมื่อ

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{e_2 \times e_3}{V}$$

$$e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{e_3 \times e_1}{V}$$

$$e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{e_1 \times e_2}{V}$$

ซึ่ง

$$e^i = \frac{e_j \times e_k}{V} \quad (11)$$

เมื่อ $e_1 \cdot (e_2 \times e_3) \neq 0$ และ $V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$ และ $|V|$ เป็นปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ถูกแผ่โดยมูลฐาน e_1, e_2, e_3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทำนองเดียวกัน

$$e_1 = \frac{e^2 \times e^3}{e^1 \cdot (e^2 \times e^3)} = \frac{e^2 \times e^3}{V'}$$

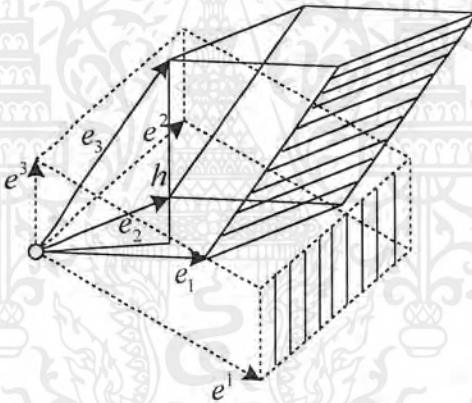
$$e_2 = \frac{e^3 \times e^1}{e^1 \cdot (e^2 \times e^3)} = \frac{e^3 \times e^1}{V'}$$

$$e_3 = \frac{e^1 \times e^2}{e^1 \cdot (e^2 \times e^3)} = \frac{e^1 \times e^2}{V'}$$

ซึ่ง

$$e_i = \frac{e^j \times e^k}{V'}$$

เมื่อ $e^1 \cdot (e^2 \times e^3) \neq 0$ และ $V' = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$ และ $|V'|$ เป็นปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่ถูกแผ่โดยมูลฐาน e^1, e^2, e^3



รูปที่ 2.14 ส่วนกลับของมูลฐานและปริซึม 6 ด้านที่ขนานกัน
ขนาดของ e^3 จะเท่ากับส่วนกลับของด้านที่ขนานกับ h

2.1.6.2 ส่วนประกอบของเวกเตอร์แปรปรวนและเวกเตอร์ไม่แปรปรวน

ให้เวกเตอร์ A ซึ่งขึ้นกับมูลฐาน e_1, e_2, e_3 แสดงได้เป็น

$$A = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = \sum_{i=1}^3 A^i e_i \equiv A^i e_i \quad (A^i = A \cdot e^i) \quad (12)$$

A^i เรียกว่า ส่วนประกอบไม่แปรปรวน (contravariant components) ของ A

ให้เวกเตอร์ A ซึ่งขึ้นกับมูลฐาน e^1, e^2, e^3 แสดงได้เป็น

$$A = A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3 = \sum_{i=1}^3 A_i e^i \equiv A_i e^i \quad (A_i = A \cdot e_i) \quad (13)$$

A_i เรียกว่า ส่วนประกอบที่แปรปรวน (covariant components) ของ A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การแปลงรูปโดยตรง (direct transformation) ของส่วนประกอบที่แปรปรวน เกี่ยวข้องกับ สัมประสิทธิ์ α_i^k ของการแปลงรูปโดยตรง

$$A_i' = \alpha_i^k A_k \quad (14)$$

การแปลงรูปโดยตรง ของส่วนประกอบไม่แปรปรวน เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ α_k^i ของการแปลงผกผัน (inverse transformation)

$$A'' = \alpha_k^i A^k \quad (15)$$

ให้ A มีส่วนประกอบแปรปรวน A_i และส่วนประกอบไม่แปรปรวน A' ในระบบพิกัดหนึ่ง ขึ้นกับมูลฐาน e_1, e_2, e_3 และให้ A มีส่วนประกอบแปรปรวน A_i' และส่วนประกอบไม่แปรปรวน A'' ในอีกระบบพิกัดหนึ่ง ขึ้นกับมูลฐาน e'_1, e'_2, e'_3 จากสมการ(6) และสมการ(7) จะได้

$$\begin{aligned} \alpha_i^k &= e'_i \cdot e^k \\ \alpha_k^i &= e_i \cdot e'^k \end{aligned} \quad (16)$$

จาก $A = A_k e^k$

คูณด้วย e'_i จะได้

$$A \cdot e'_i = A_k e_i^k \cdot e'^k$$

จาก $A = A^k e_k$

คูณด้วย e''^i จะได้

$$A \cdot e''^i = A^k e_k \cdot e''^i$$

ดังนั้น ค่าผกผันของสมการ(12), สมการ(13) คือ

$$A_i = \alpha_i^k A_k'$$

$$A^i = \alpha_k^i A'^k$$

ความสัมพันธ์กับแนวคิดของส่วนประกอบไม่แปรปรวน จะแสดงว่าพิกัดของจุดในระบบพิกัดเฉื่อยจะเขียนได้เป็น x^1, x^2, x^3 (ดังรูปที่ 2.14) คือ พิกัดจะเป็นส่วนประกอบไม่แปรปรวนของเวกเตอร์รัศมี

$$r = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \equiv x^k e_k$$

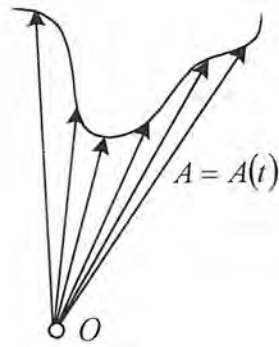
2.1.7 ตัวแปรเวกเตอร์

2.1.7.1 ฟังก์ชันเวกเตอร์ของสเกลาร์อากิวเมนต์

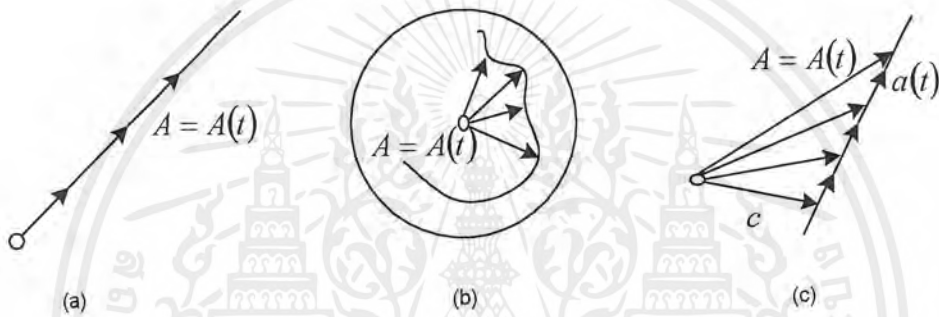
เวกเตอร์สามารถเปลี่ยนแปลงได้ เช่นเดียวกับสเกลาร์ เมื่อเทียบกับตำแหน่ง r และเวลา t กำหนดให้ฟังก์ชันเวกเตอร์ $A = A(r, t)$ มีทิศชี้ขึ้น ถ้า A เป็นฟังก์ชันของ t แล้วส่วนประกอบของเวกเตอร์เป็นฟังก์ชันของ t ด้วยรวมทั้งขนาดและทิศทาง

ให้เวกเตอร์ $A = A(t)$ ลากจากจุด O แล้ว เมื่อ t เปลี่ยนแปลง เส้นโค้งที่เป็นทางเดินของจุดปลายของ A เรียกว่า hodograph ของ A ดังรูปที่ 2.15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.15 เส้น hodograph ของ $A = A(t)$



- รูปที่ 2.16 a) ถ้า A เปลี่ยนเฉพาะขนาด hodograph จะเป็นเส้นตรง โดยที่ $\frac{A}{|A|}$ เป็นค่าคงที่
- b) ถ้า A เปลี่ยนเฉพาะทิศทาง hodograph จะเป็นเส้นโค้งอยู่บนพื้นผิวทรงกลม โดยที่ $|A|$ เป็นค่าคงที่
- c) ถ้า hodograph เป็นเส้นตรงแล้ว ในกรณีทั่วไปอาจเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทางได้

ดังรูปที่ 2.16 c) โดยสามารถเขียน A เป็นผลรวมของเวกเตอร์ค่าคงที่ และเวกเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงขนาด

$$A = A(t) = c + a(t)$$

เมื่อ c และ $\frac{a}{|a|}$ เป็นค่าคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.7.2 ความต่อเนื่องและการมีอนุพันธ์

ฟังก์ชันสเกลาร์ $\phi(u)$ เรียกว่าต่อเนื่อง (Continuity) ที่จุด u ถ้า $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \phi(u + \Delta u) = \phi(u)$ ถ้าแต่ละจำนวนจริงบวก ε เราสามารถหาจำนวนจริงบวก δ บางตัวได้ ซึ่งทำให้

$$|\phi(u + \Delta u) - \phi(u)| < \varepsilon \quad ; \quad |\Delta u| < \delta$$

ฟังก์ชันเวกเตอร์ $R(u) = R_1(u)\mathbf{i}_1 + R_2(u)\mathbf{i}_2 + R_3(u)\mathbf{i}_3$ เรียกว่าต่อเนื่องที่ u ถ้าฟังก์ชันสเกลาร์ทั้งสาม $R_1(u), R_2(u), R_3(u)$ ต่อเนื่องที่ u หรือ

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} R(u + \Delta u) = R(u)$$

ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนบวก ε เราสามารถหาจำนวนจริงบวก δ บางค่าได้ ซึ่ง

$$|R(u + \Delta u) - R(u)| < \varepsilon \quad ; \quad |\Delta u| < \delta$$

ซึ่งฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้จำเป็นต้องต่อเนื่อง

1) อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่งขึ้นกับตัวแปรสเกลาร์มากกว่าหนึ่งตัวแปร สมมติว่าเป็น x, y, z เราเขียน $F = F(x, y, z)$ อนุพันธ์ย่อยของ F เมื่อเทียบกับ x คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y, z) - F(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y, z) - F(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z}$$

อนุพันธ์อันดับสูงกว่าสามารถนิยามได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)$$

2) อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

กำหนดฟังก์ชันเวกเตอร์ $A(t)$ ให้มีเวกเตอร์ค่าคงที่ A_0 ซึ่ง

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |A(t) - A_0| = 0$$

แล้วเวกเตอร์ A_0 เรียกว่า limit ของ $A(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ t_0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

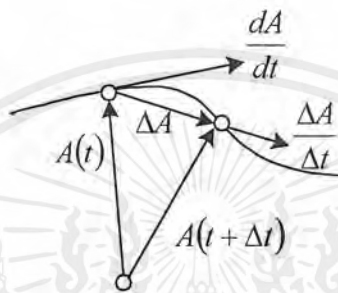
อนุพันธ์ $\frac{dA}{dt}$ ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $A(t)$ หมายถึง

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (17)$$

เมื่อ limit หาค่าได้ เวกเตอร์ $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ อยู่ในทิศเดียวกับเส้นตัดของ hodograph ลิมิตเมื่อ

$\Delta t \rightarrow 0$ ของ $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ คือ เวกเตอร์ $\frac{dA}{dt}$ ซึ่งมีทิศเดียวกับเส้นสัมผัส hodograph ของ A ดังรูปที่

2.17



รูปที่ 2.17 ถ้า $A(t)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของสเกลาร์อาร์กิวเมนต์ แล้วอนุพันธ์ $\frac{dA}{dt}$ มีทิศทางการสัมผัส hodograph ของ $A(t)$

ถ้า $A_k = A_k(t)$ เป็นส่วนประกอบของ $A(t)$ ในระบบพิกัดฉาก และมีเวกเตอร์มูลฐานเชิงตั้งฉาก i_1, i_2, i_3 แล้ว

$$A = A_k i_k$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_k}{dt} i_k$$

$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_k = \frac{dA_k}{dt}$$

ส่วนประกอบของอนุพันธ์ $\frac{dA}{dt}$ เป็นอนุพันธ์ของส่วนประกอบของฟังก์ชันเวกเตอร์ $A(t)$ เมื่อ t เป็นอิสระในระบบพิกัด สามารถหาขนาดของอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dA_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dA_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dA_3}{dt} \right)^2}$$

ให้ r เป็นเวกเตอร์รัศมีที่แทนตำแหน่งของอนุภาคที่เคลื่อน

ให้ t เป็นเวลา

แล้วการเคลื่อนที่ของอนุภาค จะกำหนดโดยฟังก์ชันเวกเตอร์ $r = r(t)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความเร็ว v ของอนุภาคที่เวลา t กำหนดโดย $v(t) = \frac{dr}{dt}$

ความเร่ง a ของอนุภาคที่เวลา t กำหนดโดย $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$

กฎการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

ถ้า A , B และ C เป็นฟังก์ชันของเวกเตอร์ของสเกลาร์ t ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ของ t ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้แล้ว จะได้ว่า

$$1) \frac{d}{dt}(A \pm B) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt}$$

$$2) \frac{d}{dt}(A \cdot B) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt}$$

$$3) \frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}$$

$$4) \frac{d}{dt}(cA) = \frac{dc}{dt}A + c \frac{dA}{dt}$$

$$5) \frac{d}{dt}(A \cdot B \times C) = A \cdot B \times \frac{dC}{dt} + A \cdot \frac{dB}{dt} \times C + \frac{dA}{dt} \cdot B \times C$$

$$6) \frac{d}{dt}\{A \times (B \times C)\} = A \times \left(B \times \frac{dC}{dt}\right) + A \times \left(\frac{dB}{dt} \times C\right) + \frac{dA}{dt} \times (B \times C)$$

3) เชิงอนุพันธ์ของเวกเตอร์

$$1) \text{ ถ้า } A = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3 \text{ แล้ว } dA = dA_1 i_1 + dA_2 i_2 + dA_3 i_3$$

$$2) d(A \cdot B) = A \cdot dB + dA \cdot B$$

$$3) d(A \times B) = A \times dB + dA \times B$$

$$4) \text{ ถ้า } A = A(x, y, z) \text{ แล้ว } dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz$$

2.1.7.3 อินทิกรัลของฟังก์ชันเวกเตอร์

1) อินทิกรัลธรรมดาของเวกเตอร์

ให้ $R(u) = R_1(u)i_1 + R_2(u)i_2 + R_3(u)i_3$ เป็นเวกเตอร์ขึ้นอยู่กับตัวแปรเดี่ยว u เมื่อสมมติให้ $R_1(u)$, $R_2(u)$, $R_3(u)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงเฉพาะแล้ว

$$\int R(u)du = i_1 \int R_1(u)du + i_2 \int R_2(u)du + i_3 \int R_3(u)du$$

เรียกว่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral) ของ $R(u)$

ถ้ามีเวกเตอร์ $\mathbf{S}(u)$ ซึ่ง $\mathbf{R}(u) = \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))$

$$\text{แล้ว} \quad \int \mathbf{R}(u) du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u)) du = \mathbf{S}(u) + c$$

เมื่อ c เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เจาะจงค่า ซึ่งเป็นอิสระต่อ u

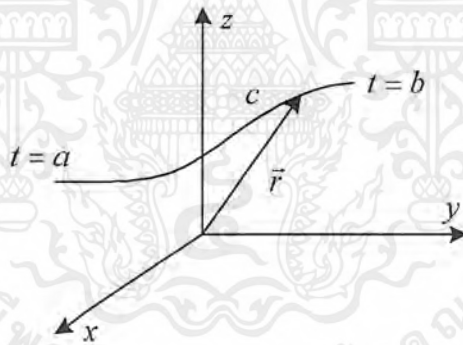
อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral) ระหว่าง $u = a$ และ $u = b$ เขียนได้เป็น

$$\int_a^b \mathbf{R}(u) du = \int_a^b \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u)) du = \mathbf{S}(u) + c \Big|_a^b = \mathbf{S}(b) - \mathbf{S}(a)$$

2) อินทิกรัลตามเส้น

เส้นโค้ง $\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$; $a \leq t \leq b$ ผ่าน domain ของ function $F(x, y, z)$ ในปริภูมิค่าของ F ตามเส้นโค้ง \vec{r} จะกำหนดโดย composite function $F(f(t), g(t), h(t))$ ถ้า integrate composite function นี้ เทียบกับความยาวของเส้นโค้งจาก $t = a$ ถึง $t = b$ เรียก Line integral ของ F ตามเส้นโค้ง \vec{r}

parametric equation $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ เมื่อเขียนกราฟใน 3 มิติ จะได้เส้นโค้ง



รูปที่ 2.18 Line integral ของ F ตามเส้นโค้ง \vec{r}

ให้ c เป็นส่วนของเส้นโค้ง จาก $t = a$ ถึง $t = b$ ซึ่งมีความยาว s

$$s = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

ถ้า c เป็นส่วนเล็กๆ n ส่วน จะได้ความยาวแต่ละส่วน ds โดย

$$ds = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

ณ แต่ละตำแหน่ง (x, y, z) บน c กำหนด $F(x, y, z)$ เป็น scalar function ที่ต่อเนื่องบน c

$$F(x, y, z) ds = F(x, y, z) \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$

$$F(x, y, z) ds = F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

ดังนั้น
$$\int_c F(x, y, z) ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

$$\int_c F(x, y, z) ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt$$

เรียก Line integral และ c คือ path of integration

3) อินทิกรัลตามพื้นผิว

$z = f(x, y)$ เมื่อเขียนกราฟใน 3 มิติ จะได้พื้นผิวแทนพื้นที่ด้วย Σ จะหาพื้นที่ของผิวได้โดย

$$S = \iint_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

ถ้าแบ่งพื้นผิวออกเป็น n ส่วนเล็กๆ จะได้พื้นที่แต่ละส่วน

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

ณ แต่ละจุด (x, y, z) บน Σ กำหนด $G(x, y, z)$ เป็น scalar function ที่ต่อเนื่องบนพื้นผิว Σ

$$G(x, y, z) = G(x, y, z) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

เนื่องจาก $z = f(x, y)$

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) ds = \iint_R G(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

เรียก Surface integral

2.2 แนวคิดของเทนเซอร์

สเกลาร์ เป็นปริมาณที่กำหนดด้วยเลขจำนวนเดียว (อาจมีค่าเป็นบวก ลบหรือศูนย์) และเวกเตอร์ เป็นปริมาณของเส้นตรงที่แทนด้วยจำนวน 3 จำนวน โดยทั้งสเกลาร์และเวกเตอร์เป็นกรณีหนึ่งของเทนเซอร์อันดับที่ n สามารถแทนในระบัพิกัดใดๆ ด้วยจำนวน 3^n จำนวนที่เรียกว่า “ส่วนประกอบของเทนเซอร์ (Component of tensor)” โดยสเกลาร์จะเป็นเทนเซอร์อันดับศูนย์ มี $3^0 = 1$ ส่วนประกอบ เวกเตอร์เป็นเทนเซอร์อันดับหนึ่งมี $3^1 = 3$ ส่วนประกอบ

ลักษณะสมบัติของเทนเซอร์ที่จะกล่าวในเรื่องนี้คือกฎการแปลงส่วนประกอบ (Transformation Law of Component) โดยจะศึกษาว่าส่วนประกอบของเทนเซอร์ในระบบพิกัดหนึ่งๆ จะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับส่วนประกอบของมันเองในอีกระบบพิกัดหนึ่ง โดยรูปแบบการแปลงเป็นผลจากทฤษฎีการฉายภาพหรือเรขาคณิตของเทนเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติว่าส่วนประกอบ a, b, c, \dots แทนปริมาณทางกายภาพใดๆ ระบบพิกัด 3 มิติ K และ a', b', c', \dots แทนปริมาณทางกายภาพใดๆ ใน K' โดย K' เกิดจากการเลื่อนแกน K (ปริภูมิมีคุณสมบัติเอกพันธ์) หรือเกิดจากการหมุนแกน K (ปริภูมิมีคุณสมบัติไอโซโทรปิก) โดยคุณสมบัติทางกายภาพไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การเลื่อนและการหมุน

2.2.1 เทนเซอร์อันดับศูนย์ (สเกลาร์)

จากนิยามของสเกลาร์ ค่าจะไม่เปลี่ยนแปลงแม้ระบบพิกัดจะเปลี่ยนไป ให้ φ แทนสเกลาร์ในระบบพิกัดหนึ่งและ φ' แทนสเกลาร์ในอีกระบบพิกัดหนึ่ง แล้ว $\varphi' = \varphi$ ตัวอย่าง ให้ A และ B แทนจุด 2 จุดที่มีพิกัด x_i^A, x_i^B ในระบบพิกัดจาก K (รูปที่ 2.19) และให้ Δs แทนระยะทางระหว่าง A และ B ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ โดยที่ $\Delta s'$ ใน K' มีค่าเท่ากับ Δs ใน K



รูปที่ 2.19 แสดงความไม่แปรปรวนของระยะทางระหว่าง 2 จุด A และ B

ในทางเรขาคณิตจะคำนวณได้ดังนี้

$$\Delta x_i = x_i^B - x_i^A, \Delta x'_i = x'^i_B - x'^i_A \quad (i = 1, 2, 3)$$

และให้การแปลงจาก K ไป K' คือ

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k + x_{0i}$$

โดย x_0 แทนพิกัดของจุดกำเนิดเก่าในระบบพิกัดใหม่

α_{ik} แทน $\cos(x'_i, x_k)$ เป็นค่าโคไซน์ของมุมระหว่างแกนที่ i ของระบบพิกัดใหม่กับแกนที่ k ของระบบพิกัดเก่า

จะได้

$$\begin{aligned}\Delta x'_i &= x_i'^B - x_i'^A \\ &= \alpha_{i'k} x_k^B + x_{0i'} - \alpha_{ik} x_k^A - x_{0i} \\ &= \alpha_{ik} (x_k^B - x_k^A) \\ &= \alpha_{i'k} \Delta x_k\end{aligned}$$

จากทฤษฎี Pythagorean

$$(\Delta s')^2 = \sum_{i=1}^3 (\Delta x'_i)^2$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}(\Delta s')^2 &= \sum_{i=1}^3 \alpha_{i'k} \Delta x_k \alpha_{i'l} \Delta x_l \\ &= \alpha_{i'k} \alpha_{i'l} \Delta x_k \Delta x_l\end{aligned}$$

จากเงื่อนไขเชิงตั้งฉาก (Orthogonality Condition)

$$\alpha_{i'k} \alpha_{i'l} = \delta_{kl}$$

จาก

$$(\Delta s')^2 = \delta_{kl} \Delta x_k \Delta x_l = \sum_{k=1}^3 (\Delta x_k)^2$$

พิจารณาค่าทางด้านขวามือ ก็คือ $(\Delta s)^2$ จะได้

$$\Delta s' = \Delta s$$

ซึ่งเป็นจริงตามที่กำหนดไว้

หมายเหตุ ต่อไปเราจะเน้นเฉพาะระบบพิกัดฉาก เทนเซอร์ที่เขียนในระบบพิกัดฉาก เรียกว่า เทนเซอร์คาร์ทีเซียน (Cartesian Tensors)

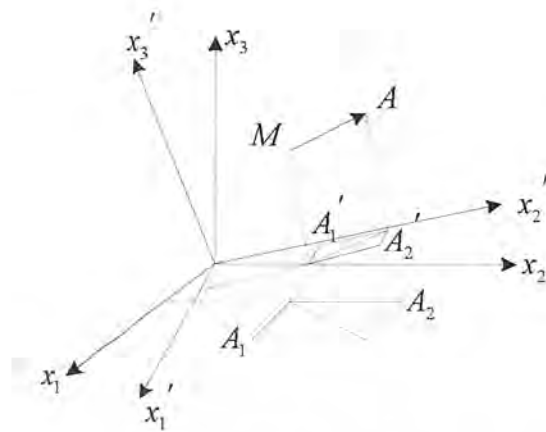
2.2.2 เทนเซอร์อันดับหนึ่ง (เวกเตอร์)

จากนิยามของเวกเตอร์ เราต้องใช้สเกลาร์ 3 จำนวน ในการแทนเวกเตอร์ (เช่น การขจัด, ความเร็ว, แรง ฯลฯ) โดยเวกเตอร์มีมากกว่า $3^1 = 3$ ส่วนประกอบ เมื่อมีการเปลี่ยนพิกัด จำนวนเหล่านี้จะเปลี่ยนไปตามกฎที่กำหนดไว้ โดยส่วนประกอบใหม่จะยังคงเป็นเวกเตอร์ตัวเดิม

ในการหากฎนี้ให้ Δx_i และ $\Delta x'_i$ เป็นผลต่างระหว่างพิกัดจุด A และ B ในระบบพิกัดฉาก K และ K' จากเทนเซอร์อันดับศูนย์จะได้ว่า

$$\Delta x'_i = \alpha_{i'k} \Delta x_k \quad (18)$$

โดย $\alpha_{i'k}$ คือค่าโคไซน์ของมุมระหว่างแกนที่ i ของระบบพิกัด K' กับแกนที่ k ของระบบพิกัด K



รูปที่ 2.20 แสดงการเปลี่ยนแปลงของส่วนประกอบของเวกเตอร์
ภายใต้การเปลี่ยนแปลงของระบบพิกัด

สมมติว่าเวกเตอร์ A มีส่วนประกอบ A_k ใน K และ A'_i ใน K' (รูปที่ 2.20) แทนด้วยส่วนของเส้นตรง โดยเราจะให้ A แทนทั้งจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุด ดังนั้น A_k และ A'_i สามารถแปลงได้เหมือน $\Delta x_k, \Delta x'_i$ เช่นกัน ดังนั้นจะได้นิยามเวกเตอร์ว่าเป็นปริมาณเดียวที่แทนในระบบพิกัดใดๆ ด้วยจำนวน 3 จำนวน จะแปลงได้เมื่อมีการเปลี่ยนระบบพิกัด การแปลงส่วนประกอบจะเป็นไปตามกฎ

$$A'_i = \alpha_{ik} A_k \quad (19)$$

เมื่อ A_k, A'_i แทนส่วนประกอบของเทนเซอร์ในระบบพิกัด K และ K' ตามลำดับ

α_{ik} แทนค่าโคไซน์ของมุมระหว่างแกนที่ i ของระบบพิกัดใหม่ K' กับแกนที่ k ของระบบพิกัดเก่า K

หมายเหตุ ถ้ากำหนดส่วนประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดจากหนึ่ง เราสามารถใช้สมการ(19) ในการหาส่วนประกอบในอีกพิกัดหนึ่งได้ และถ้าไม่มีเวกเตอร์ในระบบพิกัดหนึ่ง ก็จะไม่ปรากฏเวกเตอร์นั้นในอีกพิกัดหนึ่งได้

หมายเหตุ จากนิยามของเวกเตอร์ในสมการ(19) จะสมมูลกับนิยามของเวกเตอร์ในลักษณะของส่วนของเส้นตรงเราจึงสามารถใช้สมการ(19) ในกรณีเทนเซอร์อันดับอื่นๆ ได้

ตัวอย่าง สมมติให้พิกัด x_i ของจุด P ในระบบพิกัด K เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$x_i = x_i(t)$$

ดังนั้นการขจัดของ P ในเวลา Δt (เวกเตอร์) คือ

$$x_i(t + \Delta t) - x_i(t) \quad (20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเวกเตอร์การขจัดในระบบพิกัดใหม่ K' คือ

$$x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')$$

จากสมการ(18) ให้ $t' = t$, $\Delta t' = \Delta t$ (เวลาเป็นสเกลาร์) จะได้

$$x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t') = \alpha_{i'k} [x_k(t + \Delta t) - x_k(t)]$$

นั่นคือ การแปลงปริมาณในสมการ(20) จะเหมือนกับเวกเตอร์ เช่นเดียวกับอัตราส่วน

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$$

แทนเวกเตอร์ (ความเร็วโดยเฉลี่ยของ P ในช่วงเวลาตั้งแต่ t ถึง $t + \Delta t$) และเมื่อลิมิตของ

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$$

หาค่าได้จะหมายความว่า v_i แทนเวกเตอร์ (ความเร็วขณะใดขณะหนึ่งของจุด P ที่เวลา t)

$$\begin{aligned} v'_i &= \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'} \\ &= \alpha_{i'k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_k(t + \Delta t) - x_k(t)}{\Delta t} \\ &= \alpha_{i'k} v_k \end{aligned}$$

(โดยที่ปริมาณ $\alpha_{i'k}$ เป็นอิสระจาก t) ซึ่งได้จากการใช้กฎการแปลงเวกเตอร์อีกครั้ง

จากกฎการแปลงของเวกเตอร์วิธีเดียวกันนี้ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}$$

แทนเวกเตอร์ (ความเร่งขณะใดขณะหนึ่งของ P ณ เวลา t) ดังนั้นจากกฎข้อ 2 ของนิวตัน

$$F_i = ma_i$$

ใช้ได้กับระบบพิกัดใดๆ ที่แรง F_i เป็นเวกเตอร์

2.2.3 เเทนเซอร์อันดับสอง

แทนด้วยจำนวนจริง 9 จำนวน ซึ่งเป็นการแปลงภายใต้การเปลี่ยนระบบพิกัดเป็นไปตามกฎ

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm} \quad (21)$$

เมื่อ A_{lm} , A'_{ik} แทนส่วนประกอบของเทนเซอร์ในระบบพิกัดเก่า K และระบบพิกัดใหม่ K'

$\alpha_{i'l}$ แทนค่าโคไซน์ของมุมระหว่างแกนที่ i ของ K' และแกนที่ l ของ K (เช่นเดียวกับ $\alpha_{k'm}$)

หมายเหตุ เมื่อให้ส่วนประกอบของเทนเซอร์อันดับสอง ในระบบพิกัดฉากหนึ่งสามารถใช้สมการ (21) เพื่อหาส่วนประกอบในอีกระบบพิกัดหนึ่งได้

หมายเหตุ ส่วนประกอบของเทนเซอร์อันดับสอง เขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\|A_{ik}\| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง สมการพื้นผิวกำลังสอง (เช่น ทรงรี) ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

$$\text{ในระบบเก่า } K \quad A_{ik} x_i x_k = 1 \quad (22)$$

$$\text{ในระบบใหม่ } K' \quad A'_{ik} x'_i x'_k = 1 \quad (23)$$

จะหาความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์เก่า A_{ik} กับสัมประสิทธิ์ใหม่ A'_{ik} จาก

$$x'_i = \alpha_{i'l} x_l, \quad x'_k = \alpha_{k'm} x_m$$

และ

$$x_l = \alpha_{l'i} x'_i, \quad x_m = \alpha_{m'k} x'_k \quad (24)$$

แทนสมการ(24) ในสมการ(22) โดยให้ $i=l$ และ $k=m$ จะได้

$$A_{lm} x_l x_m = A_{lm} \alpha_{l'i} x'_i \alpha_{m'k} x'_k = 1 \quad (25)$$

เปรียบเทียบสมการ(25) กับสมการ(23) จะได้

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm}$$

จะเห็นว่ามีความสัมพันธ์กันกับสมการ(21) เพราะฉะนั้น A_{ik} เป็นเทนเซอร์อันดับสอง

2.2.3.1 เทนเซอร์ของความเค้น

สามารถหาความเค้นของวัตถุที่ยืดหยุ่น ถ้าเราทราบแรงที่กระทำลงบนพื้นผิวใดๆ ผ่านจุด

M ใดๆของวัตถุ

เมื่อ $d\sigma$ คือพื้นผิวใดๆ

\mathbf{r} คือเวกเตอร์รัศมีของ M

\mathbf{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่กำกับ $d\sigma$

ดังนั้นแรงที่กระทำบน $d\sigma$ จะมีค่าเท่ากับ $p d\sigma$ เมื่อ p เป็นความเค้นและเวกเตอร์ \mathbf{r} และ \mathbf{n} เป็นฟังก์ชัน (รูปที่ 2.21) จะแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน $\mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ สามารถอ้างจากเทนเซอร์อันดับสองได้โดยเรียกว่าเทนเซอร์ความเค้น (strees tensor) ซึ่งขึ้นอยู่กับ \mathbf{r} ไม่ขึ้นอยู่กับ \mathbf{n}

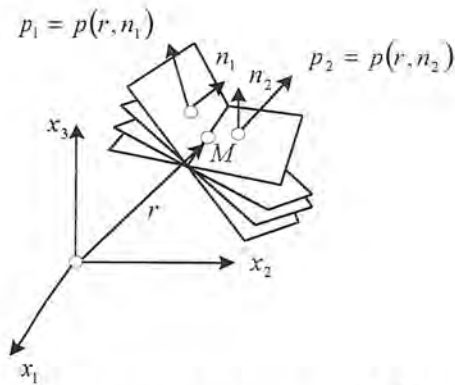
เราจะแสดงให้เห็นโดยใช้รูปทรงสี่หน้าที่มีจุด M โดยมีด้านอยู่บนแกนของระบบพิกัดฉาก K (รูปที่ 2.22)

ให้ $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ แสดงพื้นที่หน้าตัดที่ตั้งฉากกับแกน x_1, x_2, x_3

$d\sigma_n$ แสดงพื้นที่ของหน้าตัดที่เอียง

\mathbf{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้ออกจาก $d\sigma_n$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.21 ความเค้นที่กระทำบนส่วนประกอบของพื้นที่ใน elastic medium



รูปที่ 2.22 ความเค้นบนพื้นผิวของทรงสี่หน้า

กำหนดให้ $p_1 d\sigma_1, p_2 d\sigma_2, p_3 d\sigma_3$ และ $p_n d\sigma_n$ เป็นแรงพยายามจากวัตถุกระทำต่อพื้นที่ $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ และ $d\sigma_n$ ตามลำดับ (เครื่องหมายลบบอกว่าแรง p_1, p_2, p_3 กระทำบนพื้นผิวภายนอกทรงสี่หน้า) จากกฎแรงกิริยา และแรงปฏิกิริยา (Law of action and reaction) แรง $p_1 d\sigma_1, p_2 d\sigma_2, p_3 d\sigma_3$ จะกระทำที่พื้นผิวภายในของหน้าตัดของรูปทรงสี่หน้า ซึ่งจะเท่ากับแรงทั้งหมดที่กระทำภายนอก และมีทิศทางตรงกันข้าม คือ

$$p_1 = -p_{-1}, p_2 = -p_{-2}, p_3 = -p_{-3}$$

ให้ a เป็นความเร่งที่จุดศูนย์กลางมวลของรูปทรงสี่หน้า

f เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุต่อมวล 1 หน่วย

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\begin{aligned} adm &= f dm + p_n d\sigma_n + p_{-1} d\sigma_1 + p_{-2} d\sigma_2 + p_{-3} d\sigma_3 \\ &= f dm + p_n d\sigma_n - p_1 d\sigma_1 - p_2 d\sigma_2 - p_3 d\sigma_3 \end{aligned}$$

เมื่อ dm เป็นมวลของรูปทรงสี่หน้า

ในการจำกัดรูปทรงสี่หน้าทั้งหมดถึงจุด M พบว่า

$$p_n d\sigma_n = p_1 d\sigma_1 + p_2 d\sigma_2 + p_3 d\sigma_3 = \sum_{i=1}^3 p_i d\sigma_i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะว่าพจน์ที่มี dm เป็นสัดส่วนกับปริมาตรของรูปทรงสี่หน้า และปริมาตรมีอันดับสูงกว่าเมื่อเทียบกับพื้นที่ผิว ดังนั้นจาก

$$d\sigma_i = d\sigma_n \cos(n, x_i) = n_i d\sigma_n$$

จะได้ว่า ความเค้นบนพื้นที่กับเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยกำหนดโดย

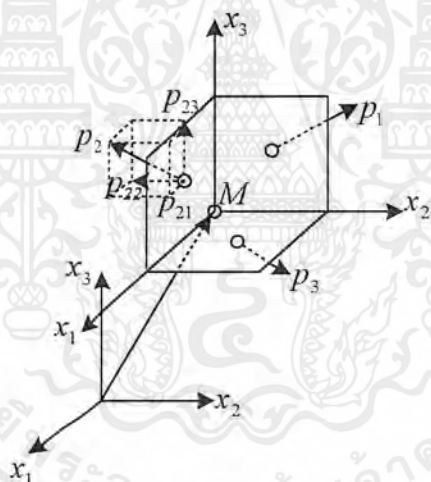
$$p_n = \sum_{i=1}^3 p_i n_i \equiv p_i n_i$$

เมื่อฉายภาพ p_n ลงบนแกนของระบบ K จะได้

$$p_{nk} = p_{ik} n_i \quad (26)$$

เมื่อ p_{ik} ($i, k=1,2,3$) เป็นเซตของความเค้นปกติ ($i=k$) และความเค้นสัมผัส ($i \neq k$) ทั้ง 9 ที่กระทำบนส่วนของพื้นที่ตั้งฉากทั้ง 3 ส่วนที่จุด M (รูปที่ 2.23)

ปริมาณทั้ง 9 นี้ขึ้นอยู่กับจุด M อย่างเดียว ทำให้เราสามารถที่จะใช้ p_n กับ n ใดๆ ดังนั้นปริมาณทางกายภาพที่มีส่วนประกอบ p_{ik} ที่เรียกว่า เทนเซอร์ความเค้นจะแทนโดยใช้ความเค้นที่ทุกๆ จุดบนวัตถุยืดหยุ่น



รูปที่ 2.23 เทนเซอร์ความเค้นที่ได้จากเวกเตอร์ความเค้น p_1, p_2, p_3 จะกระทำบนพื้นที่ตั้งฉากทั้งสาม โดยการฉายเงาของเวกเตอร์นี้ลงบนแกนพิกัด จะให้เทนเซอร์ความเค้น 9 ส่วนประกอบ

การพิสูจน์ลักษณะของเทนเซอร์ p_{ik} โดยไม่ขึ้นกับเวกเตอร์ปกติ n เราสมมติว่าแกนที่ i ของระบบพิกัดใหม่ K' มีทิศทางเดียวกันกับ n

$$n = i'_i$$

(โดยที่ K และ K' มีแกนฉากปกติ i_1, i_2, i_3 และ i'_1, i'_2, i'_3 ตามลำดับ) เงาของ n ที่ฉายลงบนแกนที่ l ของ K คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_i = \mathbf{i}'_i \cdot \mathbf{i}_i = \alpha_{i'l}$$

เมื่อ $\alpha_{i'l}$ เป็นโคไซน์ของมุมระหว่างแกนที่ i ของระบบพิกัดใหม่ K' และแกนที่ l ของระบบพิกัดเก่า K ดังนั้น

$$\mathbf{p}_n \equiv \mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i n_i = \alpha_{i'l} \mathbf{p}_l = \alpha_{i'l} i_{lm} p_{lm}$$

ขั้นสุดท้าย จะฉายเงา \mathbf{p}'_i ลงบนแกนที่ k ของ K' จะได้

$$\mathbf{p}'_i \cdot \mathbf{i}'_k = \alpha_{i'l} (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}'_k) p_{lm}$$

หรือ

$$p'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} p_{lm} \quad (27)$$

เปรียบเทียบสมการ(27) กับสมการ (26) เราจะพบว่า การแปลง p_{ik} เป็นเทนเซอร์อันดับสองตามที่คาดไว้

2.2.3.2 โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย

โมเมนต์เชิงมุม \mathbf{L} ของระบบที่มี n อนุภาค ขึ้นอยู่กับจุดกำเนิดของระบบพิกัด K กำหนดโดย

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j) \quad (28)$$

โดยอนุภาคที่ j จะมีมวล m_j เวกเตอร์รัศมี \mathbf{r}_j และความเร็ว \mathbf{v}_j สมมติว่าระยะห่างระหว่างอนุภาค 2 อนุภาค และระหว่างอนุภาคกับจุดกำเนิดมีค่าตายตัว เพื่อจะเป็นระบบที่มีวัตถุคงรูป โดยมีจุดกำเนิดเป็นจุดคงที่

$$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j$$

เมื่อ $\boldsymbol{\omega}$ เป็นความเร็วเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่ง แทน \mathbf{v}_j ใน สมการ(28) จะได้

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^n m_j [\mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j)] = \sum_{j=1}^n m_j [\boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_j) - \mathbf{r}_j (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_j)]$$

โดยเราฉาย \mathbf{L} ลงบนแกนของ K จะได้

$$L_i = \sum_{j=1}^n m_j (\omega_i x_l^{(j)} x_l^{(j)} - x_i^{(j)} \omega_k x_k^{(j)}) \quad (\text{ผลรวมไม่เกินของ } k \text{ และ } l)$$

เมื่ออนุภาคอันดับที่ j มีพิกัด $x_i^{(j)}$ ให้ $\omega_i = \delta_{ik} \omega_k$ (δ_{ik} เป็น Kronecker delta) จะได้

$$L_i = \omega_k \sum_{j=1}^n m_j (\delta_{ik} x_l^{(j)} x_l^{(j)} - x_i^{(j)} x_k^{(j)}) = \omega_k I_{ik}$$

เมื่อ
$$I_{ik} = \sum_{j=1}^n m_j (\delta_{ik} x_l^{(j)} x_l^{(j)} - x_i^{(j)} x_k^{(j)}) \quad (29)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติว่า ระบบมีโมเมนต์ความเฉื่อย $I_{x_1}, I_{x_2}, I_{x_3}$ ที่เกี่ยวกับแกนพิกัด และผลคูณของความเฉื่อย $I_{x_1x_2}, I_{x_1x_3}, I_{x_2x_3}$ แล้วโมเมนต์เหล่านี้จะมีความสัมพันธ์กับปริมาณ I_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) ทั้ง 9 ดังนี้

$$I_{11} = \sum_{j=1}^n m_j \left[(x_2^{(j)})^2 + (x_3^{(j)})^2 \right] = I_{x_1}$$

$$I_{22} = \sum_{j=1}^n m_j \left[(x_1^{(j)})^2 + (x_3^{(j)})^2 \right] = I_{x_2}$$

$$I_{33} = \sum_{j=1}^n m_j \left[(x_1^{(j)})^2 + (x_2^{(j)})^2 \right] = I_{x_3}$$

$$I_{12} = I_{21} = - \sum_{j=1}^n m_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} = - I_{x_1x_2}$$

$$I_{13} = I_{31} = - \sum_{j=1}^n m_j x_1^{(j)} x_3^{(j)} = - I_{x_1x_3}$$

$$I_{23} = I_{32} = - \sum_{j=1}^n m_j x_2^{(j)} x_3^{(j)} = - I_{x_2x_3}$$

ปริมาณ I_{ik} จากเทนเซอร์อันดับ 2 เรียกว่า โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย (Moment of inertia tensor) ที่จุด O เพื่อแสดงให้เห็นจากสมการ(29) จะได้

$$I'_{ik} = \sum_{j=1}^n m_j \left(\delta'_{ik} x_i'^{(j)} x_i'^{(j)} - x_i'^{(j)} x_k'^{(j)} \right)$$

ในอีกระบบพิกัดจากหนึ่ง K' ที่มีจุดกำเนิดเดียวกัน แต่

$$x_i'^{(j)} x_i'^{(j)} = x_i^{(j)} x_i^{(j)}$$

(ผลคูณสเกลาร์ไม่เปลี่ยนแปลง) ในขณะที่

$$x_i'^{(j)} x_k'^{(j)} = \alpha_{i'r} \alpha_{k's} x_r^{(j)} x_s^{(j)}$$

$$\alpha_{i'r} \alpha_{i'k} = \delta_{ik}$$

$$\alpha_{i'r} \alpha_{k'r} = \delta'_{ik}$$

ในรูปแบบของ Kronecker delta จะได้

$$\delta'_{ik} = \alpha_{i'r} \alpha_{k's} \delta_{rs} \quad (30)$$

เพราะว่า

$$\alpha_{k'r} = \alpha_{k's} \delta_{rs}$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} I'_{ik} &= \sum_{j=1}^n m_j \left(\alpha_{i'r} \alpha_{k's} \delta_{rs} x_i^{(j)} x_i^{(j)} - \alpha_{i'r} \alpha_{k's} x_r^{(j)} x_s^{(j)} \right) \\ &= \alpha_{i'r} \alpha_{k's} \sum_{j=1}^n m_j \left(\delta_{rs} x_i^{(j)} x_i^{(j)} - x_r^{(j)} x_s^{(j)} \right) \\ &= \alpha_{i'r} \alpha_{k's} I_{rs} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

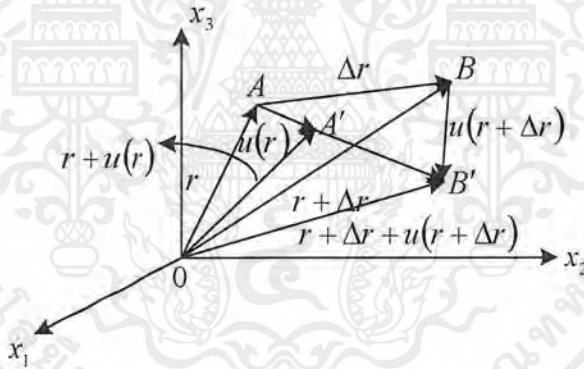
ซึ่งเป็นกฎการแปลงเดียวกันกับสมการ(21)

จากสมการ(30) จะเห็นได้ว่า Kronecker delta δ_{ik} เป็นเทนเซอร์อันดับสอง เทนเซอร์ δ_{ik} อาจเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า เทนเซอร์หนึ่งหน่วย (Unit tensor) ซึ่งมีเมตริกซ์ในทุก ๆ พิกัดเชิงตั้งฉากเป็นดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.3.3 เทนเซอร์ที่ผิดรูป

กำหนดให้จุดที่ติดกัน 2 จุดใดๆ คือ จุด A และ B บนวัตถุยืดหยุ่น สมมติว่ามีการผิดรูปทำให้ A และ B มีตำแหน่งใหม่เป็น A' และ B' ให้ A และ B มีเวกเตอร์รัศมีเป็น \mathbf{r} และ $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ ในขณะที่ A' และ B' มีเวกเตอร์รัศมีเป็น $\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$ และ $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ (รูปที่ 2.24) โดยที่เวกเตอร์ $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ และ $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ คือระยะขจัดของจุด A และ B ที่ผิดรูป



รูปที่ 2.24 การผิดรูปของ elastic body

จากรูป ความสัมพันธ์ของตำแหน่งของจุดถูกกำหนดโดย $\Delta\mathbf{r}$ ก่อนการผิดรูป และโดย $\Delta\mathbf{r}' = A'B' = \Delta\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})$ หลังการผิดรูป การเปลี่ยน $\Delta\mathbf{r}$ สามารถคำนวณหาได้จาก $(\Delta\mathbf{r}')^2 - (\Delta\mathbf{r})^2$ สมมติ \mathbf{u} เป็นฟังก์ชันเรียบพอ (sufficiently smooth function) ของตำแหน่ง ด้วยส่วนประกอบ $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ แล้ว

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3)$$

หรือ

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \quad (31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หลังจากใช้ทฤษฎีของเทย์เลอร์ (Taylor's theorem) และการตัดเทอมกำลังสองที่มีค่าน้อย ๆ จะได้

$$\Delta x'_i \Delta x'_i = (\Delta r')^2, \Delta x_i \Delta x_i = (\Delta r)^2$$

นำสมการ(31) มายกกำลังสอง จะได้เป็น

$$\begin{aligned} (\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 &= 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \Delta x_k \Delta x_l \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \Delta x_i \Delta x_k \\ &= 2u_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \end{aligned}$$

เมื่อ

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (32)$$

ดังนั้นการเปลี่ยนระยะห่างระหว่างจุด 2 จุดใดๆของวัตถุยืดหยุ่น จะใช้ u_{ik} ที่เรียกว่า เทนเซอร์ผิดรูป (deformation tensor)

ในการพิสูจน์ลักษณะของเทนเซอร์ u_{ik} เราแปลงเป็นระบบพิกัดใหม่ K' จะได้

$$u'_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_l}{\partial x'_i} \frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \right)$$

เป็นไปตามสูตร

$$x_i = \alpha_{ki} x'_k + x'_{0i}$$

ใช้วิธีการแปลงกลับจากระบบพิกัดใหม่ K' ไปเป็นระบบพิกัดเก่า K (x'_{0i} เป็นพิกัดของจุดกำเนิดใหม่ในระบบพิกัดเก่า)

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_k} = \alpha_{ki} \quad (33)$$

ทำซ้ำโดยใช้สมการ(19), สมการ(33) และกฎลูกโซ่สำหรับหาอนุพันธ์ย่อย จะพบว่า

$$\begin{aligned} u'_{ik} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_{im} u_m) \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{kn} u_n) \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{lr} u_r) \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_{ls} u_s) \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \alpha_{kn} + \alpha_{kn} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \alpha_{im} + \alpha_{lr} \frac{\partial u_r}{\partial x_m} \alpha_{im} \alpha_{ls} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \alpha_{kn} \right) \\ &= \alpha_{im} \alpha_{kn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \delta_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_m} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \right) \\ &= \alpha_{im} \alpha_{kn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_r}{\partial x_m} \frac{\partial u_r}{\partial x_n} \right) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ

$$u'_{ik} = \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} u_{mn}$$

ทำให้ได้ว่า u_{ik} เป็นเทนเซอร์อันดับสอง ในทฤษฎีเชิงเส้นของความยืดหยุ่นทอมของ

$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ ถูกลดจากสมการ(32) จะได้เป็น

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

2.2.3.4 อัตราของเทนเซอร์ผิดรูป

สมมติให้ความเร็วในการเคลื่อนที่ของของไหล (ของเหลวและก๊าซ) ที่จุด M คือ $\mathbf{v}=\mathbf{v}(M)$ การเคลื่อนที่ของของไหลจะเหมือนการเคลื่อนที่ของของแข็ง หรือกึ่งของแข็ง นั่นคือ สารประกอบในของไหลจะเหมือนของแข็ง ทำให้มีการเคลื่อนที่ผิดรูป ต่อมาจึงเรียกว่า “อัตราของเทนเซอร์ผิดรูป (The rate of deformation tensor)”

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (34)$$

ความเร็วของส่วนประกอบของของไหลที่จุด M จะขึ้นอยู่กับจุด O ที่กำหนดไว้มีการผิดรูป และมีค่าเท่ากับ

$$v_i^{def}(M) = v_{ik}(O) \Delta x_k \quad (35)$$

เมื่อ

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2}$$

เป็นระยะทางระหว่างจุด M และจุด O

เมื่อ $v^{def}(M)$ คือความเร็วที่ผิดรูปในส่วนประกอบที่จุด M

$v_{ik}(O)$ คือค่าของเทนเซอร์ (34) ที่จุด O

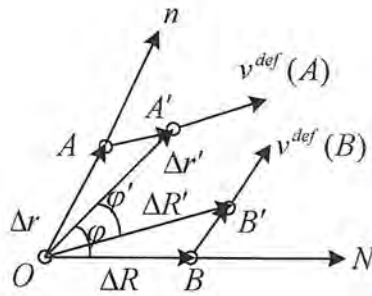
ลักษณะของ v_{ik} จะเหมือน u_{ik} ในหัวข้อที่กล่าวมาแล้ว

เราจะหาความหมายในทางฟิสิกส์ของเทนเซอร์สมการ(34) ได้จากการพิจารณาจุด A, B ก่อนการผิดรูปของของไหลและตำแหน่งที่ A', B' หลังการผิดรูป (รูปที่ 2.25)

ให้ $\vec{OA} = \Delta \mathbf{r}, \vec{OA}' = \Delta \mathbf{r}'$

$$\vec{OB} = \Delta \mathbf{R}, \vec{OB}' = \Delta \mathbf{R}'$$

การผิดรูปของของไหลเกิดจากการเปลี่ยนแปลงความยาวของเวกเตอร์ $\Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{R}$ และการเปลี่ยนมุมระหว่างเวกเตอร์นั้น



รูปที่ 2.25 การผิดรูปของสารประกอบของของไหล

ในระหว่างการเกิดการผิดรูปของของไหลจะเกิดการแทนที่ของจุด A และ B ในเวลา Δt โดยให้

$$A\vec{A}' = v^{def}(A)\Delta t$$

$$B\vec{B}' = v^{def}(B)\Delta t$$

จากรูปจะได้

$$\Delta\mathbf{r}' = \Delta\mathbf{r} + A\vec{A}' = \Delta\mathbf{r} + v^{def}(A)\Delta t$$

$$\Delta\mathbf{R}' = \Delta\mathbf{R} + B\vec{B}' = \Delta\mathbf{R} + v^{def}(B)\Delta t$$

นำส่วนประกอบที่ได้และสมการ(35) มาหาความเร็วผิดรูปในเทอมของอัตราการผิดรูปของเทนเซอร์ จะได้

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + v_{ik}\Delta x_k \Delta t$$

$$\Delta X'_i = \Delta X_i + v_{ik}\Delta X_k \Delta t$$

เมื่อ $\Delta x_i, \Delta x'_i, \Delta X_i, \Delta X'_i$ คือส่วนประกอบที่ i ของเวกเตอร์ $\Delta\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}', \Delta\mathbf{R}, \Delta\mathbf{R}'$ จะได้ v_{ik} เป็นการประเมินค่าที่จุด O โดยใช้การสมมาตรของ v_{ik} ($v_{ik} = v_{ki}$) และเป็นเทอมที่มีอันดับสูงกว่า 1 ในเวลา Δt จะได้รูปแบบทางสเกลาร์

นั่นคือ

$$\Delta\mathbf{r}' \cdot \Delta\mathbf{R}' = \Delta x'_i \Delta X'_i = \Delta x_i \Delta X_i + 2v_{ik}\Delta x_i \Delta X_k \Delta t \quad (36)$$

กำหนดให้ \mathbf{n} และ \mathbf{N} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับ $\Delta\mathbf{r}$ และ $\Delta\mathbf{R}$ ซึ่ง

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta r}, \quad \mathbf{N} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{|\Delta\mathbf{R}|} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta R}$$

จากนิยามความสัมพันธ์ของการยืด (relative elongation) ของส่วนของของไหล ในเวลา Δt ทิศทาง \mathbf{n} คือ

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta r' - \Delta r}{\Delta r} = \frac{\Delta r'}{\Delta r} - 1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ความสัมพันธ์ของการยืดในทิศทางเดิม คือ

$$\dot{\varepsilon}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r' - \Delta r}{\Delta r \Delta t}$$

กำหนดให้ φ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ Δr และ ΔR และ φ' เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\Delta r'$ และ $\Delta R'$ ดังนั้นจะได้ปริมาณ $\dot{\varepsilon}_n$ เป็นลักษณะในอัตราของการยืด (“ การผิดรูปเชิงเส้น ”) ของส่วนประกอบของของไหล ในขณะที่ปริมาณ คือ

$$\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi' - \varphi}{\Delta t}$$

เป็นอัตราของ “ การผิดรูปเชิงมุม ” หารสมการ(36) ด้วย $\Delta r \Delta R$ จะได้

$$(1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_N) \cos \varphi' = \cos \varphi + 2v_{ik} n_i N_k \Delta t \quad (37)$$

เพราะว่า

$$\frac{\Delta x_i \Delta X_i'}{\Delta r \Delta R} = \frac{\Delta r' \Delta R' \cos \varphi'}{\Delta r \Delta R}$$

$$n_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta r}, N_k = \frac{\Delta X_k}{\Delta R}$$

เราจะไม่คิด $\varepsilon_n, \varepsilon_N$ ในเทอมอันดับ 2 จะได้สมการ(37) คือ

$$(1 + \varepsilon_n + \varepsilon_N) \cos \varphi' = \cos \varphi + 2v_{ik} n_i N_k \Delta t \quad (38)$$

อธิบายสมการ(38) ได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้จุด A และ B ทับกันสนิท และอยู่บนแกน x_1 ก่อนการผิดรูปจะได้

$$\varphi = 0, \varphi' \approx 0,$$

$$\Delta r = \Delta R = \Delta x_1 i_1,$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{N} = \mathbf{i}_1, (n_1 = N_1 = 1, n_2 = n_3 = N_2 = N_3 = 0)$$

จากสมการ(38) จะได้

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1 + 2v_{11} \Delta t$$

แล้วจะได้

$$\dot{\varepsilon}_1 = v_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

ในทำนองเดียวกัน เลือกจุด A และ B ก่อนการผิดรูปบนแกน x_2 และแกน x_3

จะได้

$$\dot{\varepsilon}_2 = v_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = v_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

ดังนั้นส่วนทะแยงมุม (diagonal components) v_{11}, v_{22}, v_{33} ของอัตราการผิดรูปของเทนเซอร์ คือ อัตราความสัมพันธ์ของการยืดในสารประกอบของของไหลตามแกนพิกัดทั้งสาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที 2 กำหนดให้ก่อนการบิดรูปมีจุด A วางบนแกน x_1 และจุด B วางบนแกน x_2 จะได้

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, n=i_1, N=i_2, \Delta r \perp \Delta R$$

จากสมการ(38) จะได้

$$(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \varphi' = 2v_{12} \Delta t \quad (39)$$

กำหนดให้ γ_{ij} เป็นการลดมุม (ในเวลา Δt) ระหว่างเส้นตรง 2 เส้น “ฝังใน (embedded)” ในของไหลตามแกน x_i และแกน x_j ก่อนการบิดรูป ดังนั้นถ้าให้ $i=1, j=2$ แล้ว

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \varphi' \approx \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right) = \cos \varphi' \quad (40)$$

แทนสมการ(40) ในสมการ(39) แล้วตัดเทอมที่มีค่าน้อยๆ คือกำลังสอง จะได้

$$\gamma_{12} = 2v_{12} \Delta t$$

จะได้

$$\dot{\gamma}_{12} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi'}{\Delta t} = 2v_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 2v_{13}$$

$$\dot{\gamma}_{23} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 2v_{23}$$

ดังนั้นส่วนที่ไม่ได้ผ่านส่วนทะแยงมุม $v_{12}=v_{21}, v_{13}=v_{31}, v_{23}=v_{32}$ ของอัตราการบิดรูปของเทนเซอร์เท่ากับครึ่งหนึ่งของสารประกอบของของไหล นั่นคือ ครึ่งหนึ่งของอัตราการเปลี่ยนมุมระหว่างเส้นที่ถูกแบ่งไปตามแกนที่เหมาะสมก่อนการบิดรูป

2.2.4 การแปลงเทนเซอร์ภายใต้การหมุนพิกัด

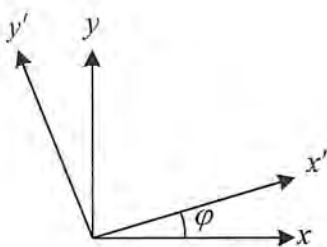
การแปลงพิกัดที่น่าสนใจเป็นพิเศษ คือ การหมุนพิกัดซึ่งเป็นภาวะเชิงเดียว (simplicity) โดยใช้แกน z (ใช้ x, y, z แทน x_1, x_2, x_3) กำหนดให้ φ เป็นมุมระหว่างแกน x' ใหม่และแกน x เก่า (รูปที่ 2.26) จะได้ว่ารูปทั่วไปเป็น

$$x'_i = \alpha_{i'k} x_k + x_{oi}$$

ลดรูปแล้วจะได้

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' &= z \end{aligned} \quad (41)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.26 การหมุนรอบแกนพิทัก

ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนเชิงซ้อน $x + iy$ คือเวกเตอร์รัศมีของจุด (x, y) ในการแปลงระนาบ xy ตามสูตร

$$x' + iy' = (x + iy)e^{-i\varphi} \quad (42)$$

หรือ

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (x + iy)(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ &= (x\cos\varphi + y\sin\varphi) + i(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) \end{aligned}$$

และจากสมการ(41) ในทำนองเดียวกันจะได้

$$x' - iy' = (x - iy)e^{i\varphi}$$

ในทำนองเดียวกัน กำหนดให้เวกเตอร์ A ประกอบด้วย A_x, A_y, A_z และปริมาณ $A_x + iA_y, A_x - iA_y, A_z$ ทำการแปลงภายใต้การหมุนพิทัก (Transformation of Tensors under Rotations about a Coordinate Axis) สมการ(41)

จากสมการ

$$\begin{aligned} A'_x + iA'_y &= (A_x + iA_y)e^{-i\varphi} \\ A'_x - iA'_y &= (A_x - iA_y)e^{i\varphi} \\ A'_z &= A_z \end{aligned} \quad (43)$$

โดยมีข้อสังเกตว่า

$$\begin{aligned} A_{+1} &= A_x + iA_y \\ A_{-1} &= A_x - iA_y \\ A_0 &= A_z \end{aligned}$$

จากสมการ(43) จะได้

$$A'_\alpha = A_\alpha e^{-i\alpha\varphi} \quad (\text{ผลรวมไม่เกิน } \alpha) \quad (44)$$

เมื่อ α มีค่า $-1, 0, +1$

จากสมการ(44) สามารถหาอนุพันธ์ (derived) ในวิธีอื่นๆ ได้โดยใช้ modulus และ argument ของจำนวน $A_{\pm 1}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหมุนแกนผ่านมุม φ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา จะได้ค่าใหม่ที่ทำกับอาร์ทิมินต์

$$\gamma' = \gamma - \varphi$$

ดังนั้น

$$A'_{+1} = Ae^{i\gamma'} = Ae^{i\gamma} e^{-i\varphi} = A_{+1} e^{-i\varphi}$$

$$A'_{-1} = Ae^{-i\gamma'} = Ae^{-i\gamma} e^{i\varphi} = A_{-1} e^{i\varphi}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสมการ(44)

กำหนดให้เวกเตอร์ A และ B ประกอบด้วย A_x, A_y, A_z และ B_x, B_y, B_z จะได้

$$A'_\alpha = A_\alpha e^{-i\alpha}, B'_\alpha = B_\alpha e^{-i\alpha} \quad (\text{ผลรวมไม่เกิน } \alpha)$$

และ

$$A'_\alpha B'_\beta = A_\alpha B_\beta e^{-i(\alpha+\beta)} \quad (\text{ผลรวมไม่เกิน } \alpha \text{ และ } \beta) \quad (45)$$

เมื่อ α และ β มีค่า $-1, 0, +1$

ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ $A'_\alpha B'_\alpha$ และส่วนประกอบของเวกเตอร์ A และ B คือ

$$\begin{aligned} A_0 B_0 &= A_z B_z \\ A_{+1} B_{+1} &= (A_x + iA_y)(B_x + iB_y) = A_x B_x - A_y B_y + i(A_x B_y + A_y B_x) \\ A_{-1} B_{-1} &= (A_x - iA_y)(B_x - iB_y) = A_x B_x - A_y B_y - i(A_x B_y + A_y B_x) \\ A_0 B_{+1} &= A_z (B_x + iB_y) = A_z B_x + iA_z B_y \\ A_0 B_{-1} &= A_z (B_x - iB_y) = A_z B_x - iA_z B_y \\ A_{+1} B_0 &= (A_x + iA_y) B_z = A_x B_z + iA_y B_z \\ A_{-1} B_0 &= (A_x - iA_y) B_z = A_x B_z - iA_y B_z \\ A_{+1} B_{-1} &= (A_x + iA_y)(B_x - iB_y) = A_x B_x + A_y B_y - i(A_x B_y - A_y B_x) \\ A_{-1} B_{+1} &= (A_x - iA_y)(B_x + iB_y) = A_x B_x + A_y B_y + i(A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (46)$$

สมการ(45) เป็นการรวมของส่วนประกอบ A และ B โดยการแปลงภายใต้การหมุนแกน z ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $\alpha = +1, \beta = -1$ จะได้

$$A'_{+1} B'_{-1} = A_{+1} B_{-1}$$

หรือ

$$A'_x B'_x + A'_y B'_y - i(A'_x B'_y - A'_y B'_x) = A_x B_x + A_y B_y - i(A_x B_y - A_y B_x)$$

แยกส่วนจริง และส่วนจินตภาพจะได้

$$A'_x B'_x + A'_y B'_y = A_x B_x + A_y B_y$$

$$A'_x B'_y - A'_y B'_x = A_x B_y - A_y B_x$$

จากสูตรแรกจะได้

$$A'_z B'_z = A_z B_z$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ(25) กำหนดให้ $\alpha = \beta = 0$ จะได้ $A \cdot B$ เป็นสเกลาร์ที่มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การหมุน (หรือภายใต้การแปลงพิกัด) จากสูตรสองจะได้ $A \times B$ เป็นสเกลาร์ (ส่วนประกอบของ z ไม่เปลี่ยน) หาได้จากการหมุนแกน z โดยจำกัดจุดคงที่ เช่นเดียวกับกับในกรณีที่ $\alpha = -1, \beta = +1$

ต่อไปจะดูการหมุนภายใต้การหมุนแกน z ในการสมมาตรของเทนเซอร์อันดับสองประกอบด้วย

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy} = p_{yx}, p_{xz} = p_{zx}, p_{yz} = p_{zy}$$

จาก สมการ(46) จะได้รูปแบบทั้งหมด คือ

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= p_{zz} \\ p_{+1,+1} &= p_{xx} - p_{yy} + 2ip_{xy} \\ p_{-1,-1} &= p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy} \\ p_{0,+1} &= p_{+1,0} = p_{xz} + ip_{yz} \\ p_{0,-1} &= p_{-1,0} = p_{xz} - ip_{yz} \\ p_{+1,-1} &= p_{-1,+1} = p_{xx} + p_{yy} \end{aligned} \quad (47)$$

จากสมการ(45)

$$p'_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} e^{-i(\alpha+\beta)} \quad (\text{ผลรวมไม่เกิน } \alpha \text{ และ } \beta) \quad (48)$$

เมื่อ α และ β มีค่า $-1, 0, +1$ จากสมการ(48)

จะได้

$$\begin{aligned} p'_{0,0} &= p_{0,0} \\ p'_{+1,+1} &= p_{+1,+1} e^{-2i\varphi} \\ p'_{-1,-1} &= p_{-1,-1} e^{2i\varphi} \\ p'_{0,+1} &= p_{0,+1} e^{-i\varphi} \\ p'_{0,-1} &= p_{0,-1} e^{i\varphi} \\ p'_{+1,-1} &= p_{+1,-1} \end{aligned}$$

หรือในเทอมของส่วนประกอบ $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz}$

$$\begin{aligned} p'_{zz} &= p_{zz} \\ p'_{xx} - p'_{yy} + 2ip'_{xy} &= (p_{xx} - p_{yy} + 2ip_{xy}) e^{-2i\varphi} \\ p'_{xx} - p'_{yy} - 2ip'_{xy} &= (p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}) e^{2i\varphi} \\ p'_{xz} + ip'_{yz} &= (p_{xz} + ip_{yz}) e^{-i\varphi} \\ p'_{xz} - ip'_{yz} &= (p_{xz} - ip_{yz}) e^{i\varphi} \\ p'_{xx} + p'_{yy} &= p_{xx} + p_{yy} \end{aligned} \quad (49)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการที่ 2,3 และสุดท้าย (ไม่รวมตัวห้อย z) มีความสำคัญกับทฤษฎีการยืดหยุ่น 2 มิติ แทน โดย

$$e^{-2i\varphi} = \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi$$

ในสมการที่ 2 และแยกส่วนจริง และส่วนจินตภาพ จะได้

$$\begin{aligned} p'_{xx} - p'_{yy} &= (p_{xx} - p_{yy}) \cos 2\varphi + 2p_{xy} \sin 2\varphi \\ 2p'_{xy} &= 2p_{xy} \cos 2\varphi - (p_{xx} - p_{yy}) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (50)$$

จากสมการ(50) และสมการสุดท้ายของสมการ(49) จะได้

$$\begin{aligned} p'_{xx} &= \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} + \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\varphi + p_{xy} \sin 2\varphi \\ p'_{yy} &= \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} - \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\varphi - p_{xy} \sin 2\varphi \\ p'_{xy} &= -\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \sin 2\varphi + p_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned}$$

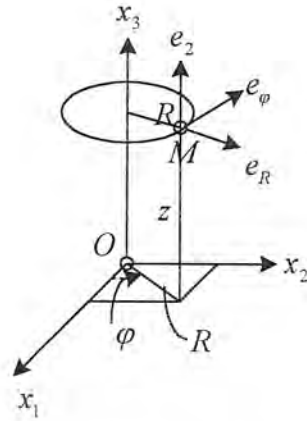
2.2.5 พิกัดเชิงเส้นโค้ง

ทุก 3 จำนวน q^1, q^2, q^3 จะมีจำนวนเดียวที่ระบุตำแหน่งของจุด M ใน space ที่เรียกอย่างกว้างๆ ว่าพิกัดของ M

ตัวอย่าง ในระบบพิกัดฉากที่จุดกำเนิด O , $q^1 = x_1, q^2 = x_2, q^3 = x_3$ เป็นระยะทางระหว่าง M กับ 3 เส้นที่ตั้งฉากไปยังระนาบถึงจุด O

ตัวอย่าง กำหนดให้ระบบมูลฐาน (underlying system) ของพิกัดฉาก x_1, x_2, x_3 ที่จุดกำเนิด O ให้ $q^1 = R$ เป็นระยะทางระหว่าง M กับแกน x_3 และให้ $q^2 = \varphi$ เป็นระยะระหว่างครึ่งระนาบตามแกน x_3 และแกน x_1 ทางบวกและครึ่งระนาบตามแกน x_3 และจุด M และให้ $q^3 = z$ เป็นระยะทางระหว่างจุด M และระนาบ x_1, x_2 (รูปที่ 2.27) จะได้ว่า R, φ และ z เรียกพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate) ของ M จะเกี่ยวข้องกับพิกัดฉาก x_1, x_2, x_3 ตามสูตร

$$\begin{aligned} q^1 = R &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \tan q^2 = \tan \varphi = \frac{x_2}{x_1}, \quad q^3 = z = x_3 \\ x_1 &= R \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \varphi, \quad x_3 = z \end{aligned} \quad (51)$$



รูปที่ 2.27 แสดงพิกัดทรงกระบอก

ตัวอย่าง กำหนดให้ระบบมูลฐานของพิกัดฉาก x_1, x_2, x_3 ที่จุดกำเนิด O ให้ $q^1 = R$ เป็นระยะทางระหว่างจุด M และจุด O ให้ $q^2 = \theta$ เป็นมุมระหว่างแกน x_3 ทางบวกกับเวกเตอร์ OM และให้ $q^3 = \varphi$ เป็นมุมระหว่างครึ่งระนาบตามแกน x_3 กับแกน x_1 ทางบวก และครึ่งระนาบตามแกน x_3 กับจุด M (รูปที่ 2.28) จะได้ว่า R, φ และ θ เรียกว่า พิกัดทรงกลมจะเกี่ยวข้องกับพิกัดฉาก x_1, x_2, x_3 ตามสูตร

$$q^1 = R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\tan q^2 = \tan \theta = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}$$

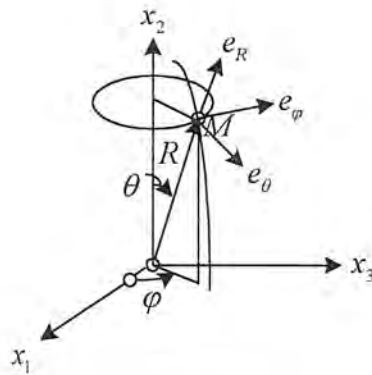
$$\tan q^3 = \tan \varphi = \frac{x_2}{x_1}$$

(52)

$$x_1 = R \sin \theta \cos \varphi$$

$$x_2 = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_3 = R \cos \theta$$



รูปที่ 2.28 แสดงพิกัดทรงกลม

2.3 พีชคณิตเทนเซอร์

2.3.1 ผลบวกของเทนเซอร์

ให้ A_{ik} และ B_{ik} เป็นส่วนประกอบของเทนเซอร์อันดับที่ 2 (Cartesian) และให้

$$C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$$

จำนวน C_{ik} เป็นส่วนประกอบของเทนเซอร์อันดับที่ 2 เรียกว่า ผลบวกของเทนเซอร์กับส่วนประกอบ A_{ik} และ B_{ik}

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm}$$

$$B'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} B_{lm}$$

(53)

ดังนั้น C_{ik} จะได้

$$\begin{aligned} C'_{ik} &= A'_{ik} + B'_{ik} \\ &= \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} (A_{lm} + B_{lm}) \\ &= \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} C_{lm} \end{aligned}$$

รวมทั้งทุกๆ จำนวนของเทนเซอร์ถูกกำหนดในทำนองเดียวกัน เช่น ผลบวกของ 2 เทนเซอร์ หรือมากกว่าในอันดับเดียวกันเป็นเทนเซอร์ที่ประกอบด้วยผลบวกของส่วนประกอบที่สอดคล้องกับผลบวกของเทนเซอร์อันดับที่แตกต่างกันไม่สามารถรวมกันได้

ในกรณีพิถีพิถันๆ เทนเซอร์ต้องไม่มีอันดับเดียวกัน แต่มีโครงสร้างที่เหมือนกัน เช่น จำนวนของตัวแปรเดียวกัน และตัวแปรต่างกัน เช่น

$$C^{ik} = A^{ik} + B^{ik}$$

$$C_i^k = A_i^k + B_i^k$$

$$C_{..l}^{ik} = A_{..l}^{ik} + B_{..l}^{ik}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทางซ้ายของสมการคือเทนเซอร์อันดับเดียวกัน และโครงสร้างเดียวกับทางขวาของสมการ ผลที่เกิดขึ้นของการแปลงกฎสำหรับเทนเซอร์คือ ผลของการแปลงสัมประสิทธิ์ที่มีลักษณะเหมือนกัน และส่วนประกอบของเทนเซอร์ที่เป็นเชิงเส้น

2.3.2 ผลคูณของเทนเซอร์

ให้ A_{ik} และ B_{ik} เป็นส่วนประกอบของเทนเซอร์อันดับที่ 2 จะพิจารณาผลคูณที่เป็นไปได้ทั้งหมดของรูปแบบ

$$C_{iklm} = A_{ik} B_{lm}$$

จำนวน C_{iklm} เป็นส่วนประกอบของเทนเซอร์อันดับที่ 4 เรียกว่า ผลคูณของเทนเซอร์กับส่วนประกอบ A_{ik} และ B_{ik} จากสมการ(53) จะได้

$$C'_{iklm} = A'_{ik} B'_{lm} = \alpha_{i'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'r} \alpha_{m's} A_{np} B_{rs} = \alpha_{i'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'r} \alpha_{m's} C_{nprs}$$

จะเห็นว่าผลคูณของเทนเซอร์ไม่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลง เช่น

$$C_{iklm} = A_{ik} B_{lm} \neq C_{lmik} = A_{lm} B_{ik}$$

การคูณกันของทุกๆ จำนวนของเทนเซอร์ทำในทำนองเดียวกัน ผลคูณของ 2 เทนเซอร์หรือมากกว่าประกอบด้วยผลคูณของตัวประกอบ อันดับของผลคูณของเทนเซอร์คือ ผลรวมของอันดับของตัวประกอบ

ในระบบพิกัดฉาก บางส่วนอาจจะเป็นตัวแปรเดียวกัน ขณะที่บางส่วนอาจเป็นตัวแปรต่างกัน เช่น ผลคูณของเทนเซอร์ที่ประกอบด้วย A^i_{kl} และ B^{jk} คือ

$$C^{i..mn}_{.kl} = A^i_{kl} B^{mn}$$

ซึ่ง $C^{i..mn}_{.kl}$ เป็นเทนเซอร์อันดับที่ 5 เป็นผลที่เกิดขึ้นทันทีที่คูณ A^i_{kl} กับ B^{jk} เทนเซอร์อันดับอื่นๆ ที่ต่างโครงสร้างสามารถคูณกันได้ (แต่ไม่สามารถบวกกันได้)

2.3.3 การลดรูปของเทนเซอร์

การบวกเทนเซอร์อันดับที่ n ($n \geq 2$) เรียกว่า การลดรูป (contraction) เช่น การลดรูปของเทนเซอร์อันดับที่ 3 A_{ikl}

$$A_{iil} = \sum_{i=1}^3 A_{iil} = A_{11l} + A_{22l} + A_{33l} \quad (l = 1, 2, 3)$$

การลดรูปที่เป็นไปได้ของ A_{ikl} คือ A_{iki} และ A_{iil} แต่ลดการลดรูปจะเป็นเทนเซอร์อันดับที่ 1 เช่น เวกเตอร์ ดังนั้น A_{ikl} เปลี่ยนเป็น

$$A'_{ikl} = \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \alpha_{l'r} A_{mnr}$$

ดังนั้นให้ $k = i$ และผลรวมมากกว่า i จะได้

$$A'_{iil} = \alpha_{i'm} \alpha_{i'n} \alpha_{l'r} A_{mnr} = \delta_{mn} \alpha_{l'r} A_{mnr} = \alpha_{l'r} A_{mnr}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(จากเงื่อนไขเชิงตั้งฉาก จำนวน A'_{ii} เปลี่ยนรูปเหมือนเวกเตอร์)

โดยทั่วไป การลดรูปของเทนเซอร์อันดับที่ n ($n \geq 2$) นำไปสู่เทนเซอร์อันดับที่ $n-2$ และสามารถลดรูปได้อีก เช่น เทนเซอร์อันดับที่ n ($n \geq 4$) ให้เป็นเทนเซอร์อันดับที่ $n-4$ และต่อไป จนกระทั่งได้เทนเซอร์อันดับที่น้อยกว่า 2 ลดรูปเทนเซอร์อันดับที่ n ไปเรื่อยๆ ในที่สุดจะได้เป็นสเกลาร์ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และเป็นเวกเตอร์ ถ้า n เป็นจำนวนคี่

ผลคูณของ 2 เทนเซอร์หรือมากกว่าและการลดรูปผลคูณให้กลายเป็นตัวประกอบที่ต่างกัน เรียกว่า ผลคูณภายในของเทนเซอร์ เช่น พจน์ $A_{ik}B_k$ และ $\lambda_{iklm}B_{lm}$ เป็นผลคูณภายในทั้งคู่ และเป็นผลคูณสเกลาร์ A_iB_i ของ 2 เวกเตอร์ **A** และ **B**

ในระบบพิกัดฉาก สิ่งสำคัญของการลดรูป (เหมือนกับการหาผลรวม) สามารถแสดงในตำแหน่งที่ต่างกัน เช่น ลดรูปตัวแปรเดียวกันและตัวแปรต่างกัน นอกจากนี้ ผลลัพธ์ของการลดรูปจะไม่ใช่เวกเตอร์ เช่น สมมติว่าจะลดรูปเทนเซอร์ A_i^{kl} ในตำแหน่ง i และ k แล้ว A_i^{il} เป็นเทนเซอร์ (เป็นเวกเตอร์ตัวแปรต่างกัน) จะได้

$$A_i^{il} = \alpha_r^m \alpha_n^i \alpha_r^l A_m^{nr} = \alpha_r^l A_n^{nr}$$

อย่างไรก็ตาม การลดรูป A_i^{kl} ในตำแหน่ง k และ l จะได้

$$A_i^{kk} = \alpha_r^m \alpha_n^k \alpha_r^k A_m^{nr}$$

ไม่เป็นเวกเตอร์ ในทำนองเดียวกับในรูปแบบผลคูณภายในของระบบพิกัดฉาก สามารถหาผลรวมของตำแหน่งที่ต่างกัน จะได้พจน์ที่เหมือนกับ $A^i B_i, A_{ik}B^k, \lambda_{ik}^{lm} B_{lm}, \lambda_{ik,m}^l B_l^m, \dots$

2.3.4 คุณสมบัติสมมาตรของเทนเซอร์

2.3.4.1 เทนเซอร์สมมาตรและไม่สมมาตร

เทนเซอร์ $S_{ikl\dots}$ (อันดับที่ 2 หรือสูงกว่า) เป็น symmetric ในตำแหน่ง i และ k ถ้า

$$S_{ikl\dots} = S_{kil\dots}$$

ถ้าสลับ i และ k จะไม่มีผลต่อส่วนประกอบ

$$\therefore S_{12l\dots} = S_{21l\dots}, S_{23l\dots} = S_{32l\dots} \quad \text{และต่อไป}$$

เทนเซอร์ $A_{ikl\dots}$ (อันดับที่ 2 หรือสูงกว่า) เป็น antisymmetric ในตำแหน่ง i และ k ถ้า

$$A_{ikl\dots} = -A_{kil\dots} \quad (54)$$

ถ้าสลับ i และ k จะเปลี่ยนเครื่องหมายของส่วนประกอบ

$$\therefore A_{12l\dots} = -A_{21l\dots}, A_{23l\dots} = -A_{32l\dots} \quad \text{และต่อไป}$$

ถ้า $A_{ikl\dots}$ เป็น antisymmetric ที่คู่ของตำแหน่งแล้ว ส่วนประกอบที่มีอยู่ในสมการจะหายไป เช่น สมการ(65) จะได้

$$A_{iil\dots} = -A_{iil\dots} \quad \text{และ} \quad A_{iil\dots} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง ในระบบพิกัดฉาก x_1, x_2, x_3 กับมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ i_1, i_2, i_3 ส่วนประกอบของส่วนโค้ง กำหนดให้

$$(ds)^2 = \delta_{jk} dx_j dx_k$$

ในเทอมของเทนเซอร์สมมาตรอันดับที่ 2 $\delta_{jk} = i_j \cdot i_k$ เรียกว่า Kronecker delta หรือเวกเตอร์ 1 หน่วย (unit vector)

ตัวอย่าง ให้ A และ B เป็นเวกเตอร์ประกอบด้วย A_i และ B_i เทนเซอร์อันดับที่ 2 ประกอบด้วย

$$C_{ik} = A_i B_k - A_k B_i$$

เป็น antisymmetric

เทนเซอร์ซึ่งเป็น symmetric (หรือ antisymmetric) ในพิกัดหนึ่งยังคงเป็น symmetric (หรือ antisymmetric) ในพิกัดอื่นๆ ถ้า T_{ik} เป็น symmetric โดยที่ $T_{ik} = T_{ki}$ แล้ว

$$T'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} T_{lm} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} T_{ml} = \alpha_{k'm} \alpha_{i'l} T_{ml} = T'_{ki}$$

และในทำนองเดียวกันสำหรับ antisymmetric และเทนเซอร์อันดับสูงขึ้นไป

เทนเซอร์สมมาตรอันดับที่ 2 S_{ik} มีเมตริกซ์รูปแบบ คือ

$$\|S_{ik}\| = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}$$

เทนเซอร์ไม่สมมาตรอันดับที่ 2 A_{ik} มีเมตริกซ์รูปแบบ คือ

$$\|A_{ik}\| = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

ดังนั้นเทนเซอร์สมมาตรอันดับที่ 2 มี 6 ส่วนประกอบที่เป็นอิสระกัน ในขณะที่ เทนเซอร์ไม่สมมาตรอันดับที่ 2 มี 3 ส่วนประกอบที่เป็นอิสระ ทุกๆ เทนเซอร์อันดับที่ 2 T_{ik} สามารถแสดงผลรวมของเทนเซอร์สมมาตรและไม่สมมาตรได้ โดยกำหนดให้

$$T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$$

ซึ่ง
$$S_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) \text{ และ } A_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki})$$

หมายเหตุ การดำเนินการกับเทนเซอร์ T_{ik} ไปยังเทนเซอร์ที่ประกอบด้วย $T_{ik} + T_{ki}$ เรียกว่า symmetrization ในขณะที่การดำเนินการกับเทนเซอร์ที่ประกอบด้วย $T_{ik} - T_{ki}$ เรียกว่า antisymmetrization

ในระบบพิกัดทั่วไป การสมมาตรและไม่สมมาตรในตำแหน่งเดียวกัน ดังนั้น $A_{ik}^{\cdot l}$ เป็น symmetric ใน i และ k ถ้า $A_{ik}^{\cdot l} = A_{ki}^{\cdot l}$ ขณะที่ $B_{ik}^{\cdot l}$ เป็น antisymmetric ใน i และ k ถ้า $B_{ik}^{\cdot l} = -B_{ki}^{\cdot l}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง ในระบบพิกัดทั่วไป x^1, x^2, x^3 ประกอบด้วย e_1, e_2, e_3 ส่วนประกอบของส่วนโค้ง กำหนดให้

$$(ds)^2 = g_{jk} dx^j dx^k$$

ในเทอมของเทนเซอร์สมมาตรอันดับที่ 2 $g_{jk} = e_j \cdot e_k$ เรียกว่า เมตริกซ์เทนเซอร์ (metric tensor)

2.3.4.2 การทำกันของเทนเซอร์ไม่สมมาตรอันดับที่ 2 กับแกนเวกเตอร์

ให้ A_{jk} เป็นเทนเซอร์ไม่สมมาตรอันดับที่ 2

$$\begin{aligned} A'_{jk} &= \alpha_{j'l} \alpha_{k'm} A_{lm} \\ &= \alpha_{j'1} \alpha_{k'2} A_{12} + \alpha_{j'2} \alpha_{k'1} A_{21} + \alpha_{j'1} \alpha_{k'3} A_{13} \\ &\quad + \alpha_{j'3} \alpha_{k'1} A_{31} + \alpha_{j'2} \alpha_{k'3} A_{23} + \alpha_{j'3} \alpha_{k'2} A_{32} \end{aligned}$$

(55)

เมื่อ $(A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0)$

เนื่องจาก $A_{lm} = -A_{ml}$ สามารถเขียนสมการ (55) ในรูปของ

$$A'_{jk} = (\alpha_{j'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{j'm} \alpha_{k'l}) A_{lm} \quad (56)$$

ในตำแหน่ง l และ m ถูกกำหนดค่าเป็น 1,2 หรือ 2,3 หรือ 3,1

$$A_{12} = -A_{21} \equiv A_3, A_{23} = -A_{32} \equiv A_1, A_{31} = -A_{13} \equiv A_2$$

$$A_{lm} = A_n, \quad l, m, n \text{ คือ } 1, 2, 3$$

และในทำนองเดียวกัน

$$A'_{jk} = A'_r, \quad j, k, r \text{ คือ } 1, 2, 3$$

แล้วสมการ (56) สามารถเขียนได้เป็น

$$A'_r = \sum_{l,m,n} (\alpha_{j'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{j'm} \alpha_{k'l}) A_n \quad (57)$$

ที่ตำแหน่ง r, j, k และ l, m, n คือ 1, 2, 3 ทั้งคู่

จัดรูปสมการ(57) ให้ง่ายขึ้น โดยขยายมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ i'_1, i'_2, i'_3 ของระบบพิกัดใหม่ k' ด้วยมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ i_1, i_2, i_3 ของระบบพิกัดเดิม k

$$i'_r = \alpha_{r'l} i_l$$

แล้วคำนวณผลคูณเวกเตอร์ $i'_j \times i'_k$

จะได้

$$i'_j \times i'_k = \alpha_{j'l} \alpha_{k'm} (i_l \times i_m) \quad (58)$$

ที่ผลคูณเวกเตอร์ที่อยู่ทางด้านขวาของพิกัด และผลรวมของทางขวาเป็นค่าคงที่ที่มากกว่า l และ m แล้วคูณ สเกลาร์กับสมการ(58) ด้วย i_n จะได้

$$(i'_j \times i'_k) \cdot i_n = \alpha_{j'l} \alpha_{k'm} (i_l \times i_m) \cdot i_n \quad (59)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ l, m, n คือ 1, 2, 3 นอกจากนั้น ถ้าระบบใหม่ k' อยู่ทางด้านขวาแล้ว

$$i'_j \times i'_k = i'_r$$

ถ้า k' อยู่ทางด้านซ้าย จะได้ $i'_j \times i'_k = -i'_r$ ที่ j, k, r คือ 1, 2, 3

$$(i'_j \times i'_k) \cdot i_n = i'_r \cdot i_n = \alpha_{r'n}$$

ถ้า k' อยู่ทางด้านขวา จะได้

$$(i'_j \times i'_k) \cdot i_n = -i'_r \cdot i_n = -\alpha_{r'n}$$

ถ้า k' อยู่ทางด้านซ้าย ดังนั้นสมการ (59) จะเป็น

$$\alpha_{r'n} = \pm(\alpha_{j'l}\alpha_{k'm} - \alpha_{j'm}\alpha_{k'l}) \quad (60)$$

ที่ j, k, r และ l, m, n คือ 1, 2, 3 ทั้งคู่ และเลือกเครื่องหมายบวกถ้า k' อยู่ทางขวา และเครื่องหมายลบถ้า k' อยู่ทางด้านซ้าย

จากกฎของการแปลงสมการ(57) และใช้สมการ(60) จะได้

$$A'_r = \alpha_{r'n} A_n \quad (61)$$

ภายใต้การแปลงจากพิกัดทางด้านขวาไปเป็นระบบทางด้านซ้าย และ

$$A'_r = -\alpha_{r'n} A_n \quad (62)$$

ภายใต้การแปลงจากพิกัดทางด้านขวาไปยังระบบทางด้านซ้าย สามารถแสดงว่าสมการ(61) ควบคุมการแปลงจากพิกัดทางด้านซ้ายไปยังระบบทางด้านซ้าย ขณะที่สมการ(62) ควบคุมการแปลงจากระบบทางด้านซ้ายไปยังระบบทางด้านขวา การแปลงเวกเตอร์ตามสมการ(61) และสมการ(62) เรียกว่า แกนเวกเตอร์ (axial vectors) ดังนั้น แสดงว่าส่วนประกอบของเทนเซอร์ไม่สมมาตรอันดับที่ 2 เปลี่ยนไปเป็นส่วนประกอบของแกนเวกเตอร์

แกนเวกเตอร์เป็นกรณีพิเศษของเทนเซอร์ เรียกว่า pseudotensors ซึ่งประกอบด้วยการเปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อ handedness ของพิกัดถูกเปลี่ยน

2.3.5 การลดเทนเซอร์ไปยังแกนหลัก

2.3.5.1 ปัญหาที่เกิดขึ้น

พิจารณาปัญหาสำคัญทางฟิสิกส์ ให้เทนเซอร์อันดับที่ 2 ประกอบด้วย T_{ik} และทุกๆ เวกเตอร์ A ประกอบด้วย A_i ดังนั้นผลคูณภายใน คือ

$$T_{ik} A_k = B_i$$

ด้วยเหตุนี้จะได้เวกเตอร์ใหม่ B ประกอบด้วย B_i โดยทั่วไปเวกเตอร์ B ต่างจากเวกเตอร์ A ทั้งขนาดและทิศทาง $T_{ik} A_k$ จะหมุน B และเปลี่ยนความยาว สมมติว่าปัญหาของการหาเวกเตอร์ A ทั้งหมดที่ไม่หมุน โดยผลคูณภายใน T_{ik} และเวกเตอร์ A ทั้งหมด นั่นคือ

$$T_{ik} A_k = \lambda A_i \quad (63)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเป็นสเกลาร์ (ความยาวของ A ถูกเปลี่ยน ถ้า $\lambda \neq \pm 1$) ถ้ามีเวกเตอร์ จะเรียกว่า characteristic vectors หรือ eigenvectors ของเทนเซอร์ T_{ik} และทิศทางเรียกว่า characteristic หรือทิศทางหลัก (principal direction) ของ T_{ik} นอกจากนี้ ทิศทางหลักกำหนดโดยแกนหลักของ T_{ik} ปัญหาของการหาแกนหลักของ T_{ik} เรียกว่า ปัญหาของการลด T_{ik} ไปเป็นแกนหลัก

ค่าส่วนประกอบ T_{ik} ในระบบพิกัดถูกกำหนดโดยแกนหลักเรียกว่า characteristic value หรือ eigenvalues ของเทนเซอร์ที่สอดคล้องกันจะปรากฏเป็นค่าของ λ สำหรับผลเฉลยของสมการ(63)

ตัวอย่าง ให้ P_{ik} เป็นเทนเซอร์ความเค้น แล้วความเค้น P_n บนส่วนของพื้นที่กับเวกเตอร์ตั้งฉาก I หน่วย n มีส่วนประกอบ $P_{nk} = P_{ik} n_i$ ที่ P_n ไม่คู่กับ n โดยทั่วไปมีเส้นสัมผัสความเค้นปกติบนส่วนของพื้นที่ สมมติว่าจะหาส่วนของพื้นที่บนความเค้นปกติกับความเค้นที่ไม่สัมผัสส่วนของพื้นที่ที่ P_n ที่คู่กับ n

$$\therefore P_n = P_i n_i = \lambda n$$

หรือ

$$P_{ik} n_i = \lambda n_k$$

เป็นส่วนที่ตั้งฉากกับพื้นที่ตามทิศทางหลักของเทนเซอร์ P_{ik}

ตัวอย่าง ให้เวกเตอร์ D ใน dielectric medium เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์เชิงเส้นของ electric field E เช่น

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k \quad , \quad \varepsilon_{ik} \text{ คือ direction tensor}$$

D และ E มีทิศทางต่างกัน อย่างไรก็ตาม ตัวเล็อกของ E ถูกกำหนดโดยผลเฉลยของสมการ

$$\varepsilon_{ik} E_k = \lambda E_i$$

ทิศทางของ D และ E ทับกันสนิท

2.3.5.2 กรณี 2 มิติ

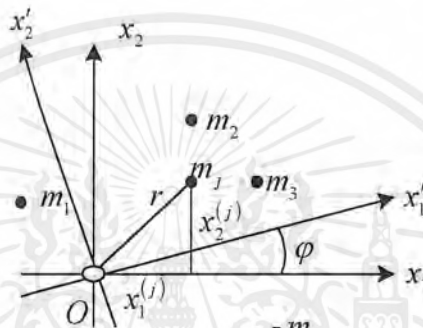
ก่อนจะศึกษาปัญหาของการลดเทนเซอร์ 3 มิติไปเป็นแกนหลักจะพิจารณาปัญหาใน 2 มิติก่อน ดังนั้น พิจารณา n ของมวล m_1, m_2, \dots, m_n กระจายในระนาบ และให้ I_{ik} เป็นโมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อยของระบบเทียบกับระบบพิกัดฉาก x_1, x_2 กับจุดกำเนิด o ดังรูปที่ 2.29 ใน 2 มิติเทนเซอร์ I_{ik} มี 4 ส่วนประกอบเท่านั้น มีเมตริกซ์รูปแบบคือ

$$\|I_{ik}\| = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_{11} = \sum_{j=1}^n m_j (x_2^{(j)})^2$$

$$I_{22} = \sum_{j=1}^n m_j (x_1^{(j)})^2$$

$$I_{12} = I_{21} = -\sum_{j=1}^n m_j (x_1^{(j)} x_2^{(j)})^2$$



รูปที่ 2.29 แกนหลักของโมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อยของระนาบของอนุภาค

ถ้าเวกเตอร์ A อยู่ในรูปของแกนหลักของเทนเซอร์ I_{ik} แล้วส่วนประกอบจะต้องสอดคล้องกับระบบที่มีลักษณะเดียวกัน

$$I_{11}A_1 + I_{21}A_2 = \lambda A_1 \quad (64)$$

$$I_{12}A_1 + I_{22}A_2 = \lambda A_2$$

$$\text{หรือ} \quad \begin{aligned} (I_{11} - \lambda)A_1 + I_{12}A_2 &= 0 \\ I_{12}A_1 + (I_{22} - \lambda)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

สมการ(65) มีผลเฉลยไม่เป็น 0 ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{vmatrix} (I_{11} - \lambda) & I_{12} \\ I_{12} & (I_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{หรือ} \quad \lambda^2 - \lambda(I_{11} + I_{22}) + I_{11}I_{22} - I_{12}^2 = 0 \quad (66)$$

จากสมการ(65) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $\lambda = \lambda_1$ หรือ $\lambda = \lambda_2$ ซึ่ง

$$\lambda_1 = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}$$
(67)

เป็นรากของสมการ(66)

ถ้า $I_{12} = 0$ จากสมการ(64) ที่แกน x_1 และ x_2 เป็นแกนหลักแล้ว A ไม่หมุนโดยผลคูณภายในกับ I_{ik} ดังนั้นสมมติ $I_{12} \neq 0$ แล้ว $\lambda_1 \neq \lambda_2$ และ แกนหลักทั้ง 2 ถูกกำหนดโดยเวกเตอร์ $A^{(1)}$ และ $A^{(2)}$ ใช้สมการ(65) หาว่าทิศทางของ $A^{(1)}$ และ $A^{(2)}$ มีความชัน

$$\tan \varphi_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{\lambda_1 - I_{11}}{I_{12}} = \frac{I_{12}}{\lambda_1 - I_{22}}$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{\lambda_2 - I_{11}}{I_{12}} = \frac{I_{12}}{\lambda_2 - I_{22}}$$

ซึ่ง φ_1 และ φ_2 เป็นมุมระหว่างแกน x_1 กับแกนหลักของเทนเซอร์ I_{ik} ดังนั้น

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \tan \varphi_1}{1 - \tan^2 \varphi_1} = \frac{2 \frac{\lambda_1 - I_{11}}{I_{12}}}{1 - \left(\frac{\lambda_1 - I_{11}}{I_{12}}\right)^2} = \frac{2I_{12}(\lambda_1 - I_{11})}{I_{12}^2 - (\lambda_1 - I_{11})^2}$$

และในทำนองเดียวกันสำหรับ $\tan \varphi_2$ กับ λ_2 แทนที่ λ_1 แทนในสมการ(67) และคำนวณบางส่วน

$$\tan 2\varphi_1 = \tan 2\varphi_2 = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}$$

ดังนั้น $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ เช่น แกนหลักตั้งฉากกับแกนอื่นๆ

ในระบบพิกัดถูกกำหนดโดยแกนหลักของเทนเซอร์ I_{ik} มีส่วนประกอบ

$$\begin{aligned} I'_{11} &= \lambda_1 \\ I'_{22} &= \lambda_2 \\ I'_{12} &= 0 \end{aligned}$$
(68)

พิสูจน์สมการ(68) ด้วยการคำนวณโดยตรง ต้องการเขียนสมการ(66) ในแกนหลักจะได้

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_1^{(1)'} &= I'_{11} A_1^{(1)'} + I'_{12} A_2^{(1)'} \\ \lambda_1 A_2^{(1)'} &= I'_{12} A_1^{(1)'} + I'_{22} A_2^{(1)'} \\ \lambda_2 A_1^{(2)'} &= I'_{11} A_1^{(2)'} + I'_{12} A_2^{(2)'} \\ \text{และ} \quad \lambda_2 A_2^{(2)'} &= I'_{12} A_1^{(2)'} + I'_{22} A_2^{(2)'} \end{aligned}$$

จะได้สมการ(68) ทันที เนื่องจาก $A_1^{(1')} \neq 0, A_2^{(1')} = 0$ และ $A_1^{(2')} \neq 0, A_2^{(2')} \neq 0$

แกนหลักของ I_{ik} สามารถหาได้ง่าย ถ้ารู้ว่าแกนหลักตั้งฉาก และ I'_{ik} หายไปในแกนหลัก ดังนั้น ระบบพิกัดฉากใหม่ x'_1 และ x'_2 จะได้

$$I'_{12} = \alpha_{1'k} \alpha_{2'l} I_{kl}$$

ซึ่ง cosine ทั้งหมด $\alpha_{1'k}, \alpha_{2'l}$ สามารถแสดงในเทอมของพารามิเตอร์ φ มุมระหว่างแกน x'_1 ใหม่และ x_1 แกนเดิม ดังรูปที่ 2.29

$$\begin{aligned} \alpha_{1'1} &= \cos \varphi & \alpha_{1'2} &= \sin \varphi \\ \alpha_{2'1} &= -\sin \varphi & \alpha_{2'2} &= \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I'_{12} &= \alpha_{1'1} \alpha_{2'1} I_{11} + \alpha_{1'1} \alpha_{2'2} I_{12} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'1} I_{21} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} I_{22} \\ \text{และ} \quad &= -I_{11} \cos \varphi \sin \varphi + I_{12} \cos^2 \varphi + I_{21} \sin^2 \varphi + I_{22} \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\varphi + I_{12} \cos 2\varphi \end{aligned}$$

ดังนั้น I'_{12} จะหายไป

$$\therefore \tan 2\varphi = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}$$

ด้วยเหตุนี้จึงเป็นการพิจารณาที่ตำแหน่งเดียวกันของแกนหลักของเทนเซอร์ I_{ik} นอกจากนี้ characteristic value I'_{11} คือ

$$\begin{aligned} I'_{11} &= \alpha_{1'k} \alpha_{1'l} I_{kl} = I_{11} \cos^2 \varphi + I_{12} \sin 2\varphi + I_{22} \sin^2 \varphi \\ &= I_{11} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + I_{22} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + I_{12} \sin 2\varphi \\ &= \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \cos 2\varphi + I_{12} \sin 2\varphi \\ &= \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2} \quad (= \lambda_1) \end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกัน

$$I'_{22} = \alpha_{2'k} \alpha_{2'l} I_{kl} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2} \quad (= \lambda_2)$$

ดังนั้น โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเค้นในแกนหลักเป็น

$$\|I'_{ik}\| = \begin{vmatrix} I'_{11} & 0 \\ 0 & I'_{22} \end{vmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.5.3 กรณี 3 มิติ

พิจารณาปัญหาของการลดเทนเซอร์ 3 มิติ T_{ik} ไปยังแกนหลักตามสมการ(63) ส่วนประกอบ A_i ของเวกเตอร์ A กำหนดแกนหลักของ T_{ik} สอดคล้องกับระบบที่มีลักษณะเหมือนกัน

$$\begin{aligned} T_{ik} A_k - \lambda A_i &= (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_k = 0 \\ \text{หรือ} \quad (T_{11} - \lambda) A_1 + T_{12} A_2 + T_{13} A_3 &= 0 \\ T_{21} A_1 + (T_{22} - \lambda) A_2 + T_{23} A_3 &= 0 \\ T_{31} A_1 + T_{32} A_2 + (T_{33} - \lambda) A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

สมการ(69) มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ determinant = 0

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (70)$$

สมการ(70) เรียกว่า characteristic equation ของเทนเซอร์ T_{ik}

หมายเหตุ ในกรณีของระบบพิกัดทั่วไปมีหลายวิธีในการลดแกนหลักของเทนเซอร์ ขึ้นอยู่กับว่าจะเลือกส่วนประกอบอย่างไร เช่น การเลือกส่วนประกอบ

$$T_{ik} A^k = \lambda A_i \quad (71)$$

แทนในสมการ(63) เนื่องจาก $A_i = g_{ik} A^k$ แล้วสมการ(82) จะกลายเป็น

$$(T_{ik} - \lambda g_{ik}) A^k = 0 \quad (72)$$

อย่างไรก็ตาม ให้สมการ(72) เป็นรูปแบบที่เหมือนกับสมการ(69) ใช้ร่วมกับส่วนประกอบของเทนเซอร์ i แทน l ด้วย ในสมการ(72) คูณด้วย g^{il} และผลรวมมากกว่า l จะได้

$$(T_k^i - \lambda g_k^i) A^k = 0$$

เป็นไปตาม characteristic equation สำหรับ eigenvalue ของเทนเซอร์

$$\begin{vmatrix} T_1^1 - \lambda & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 - \lambda & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (73)$$

ต่อไปจะสมมติว่า T_{ik} เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเทนเซอร์สมมาตร เช่น เทนเซอร์ที่อยู่ในรูปของส่วนประกอบเชิงตั้งฉาก ซึ่งส่วนประกอบจะสอดคล้องกับเงื่อนไข $T_{ik} = T_{ki}$ ในกรณีนี้รากของ characteristic equation สมการ(70) เป็นจำนวนจริงทั้งหมด ให้ λ เป็นรากของสมการ(81) และให้ A_i เป็น eigenvalue ที่สอดคล้อง นั่นคือ

$$T_{ik} A^k = \lambda A_i$$

คูณด้วยเอกลักษณ์การคูณ \bar{A} และผลรวมมากกว่า i จะได้

$$T_{ik} A_i \bar{A}_i = \lambda A_i \bar{A}_i \quad (74)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทางซ้ายของสมการ(74) เป็นจริง เนื่องจาก $T_{ik} = T_{ki}$

$$\begin{aligned} T_{ik} A_k \overline{A_i} &= \frac{1}{2} (T_{ik} A_k \overline{A_i} + T_{ik} A_k \overline{A_i}) \\ &= \frac{1}{2} (T_{ik} A_k \overline{A_i} + T_{ki} \overline{A_k} A_i) \\ &= \frac{1}{2} T_{ik} (A_k \overline{A_i} + \overline{A_k} A_i) \end{aligned}$$

ที่พจน์สุดท้ายเป็นผลคูณของจำนวนจริง 2 จำนวน (T_{ik} เป็นจำนวนจริงโดยสมมติฐาน และ $A_k \overline{A_i} + \overline{A_k} A_i$ เป็นจำนวนจริงโดยการตรวจสอบ) แต่ $A_i \overline{A_i}$ เป็นจำนวนจริงอย่างเห็นได้ชัด ดังนั้นสมการ(74) จะได้ว่า λ เป็นจำนวนจริงด้วย

สมมติว่า eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ คือ มีค่าทั้งหมด (ในกรณีของการคูณ eigenvalue จะกล่าวถึงภายหลัง) แล้ว eigenvalue λ_r แต่ละตัวถูกทำให้มีลักษณะพิเศษ โดยเซตของจำนวน $A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, A_3^{(r)}$ (ส่วนประกอบของ eigenvector $A^{(r)}$) ถูกกำหนดอยู่ในค่าคงที่ โดยสมการ

$$(T_{ik} - \lambda_r \delta_{ik}) A_k^{(r)} = 0$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda_1) A_1^{(1)} + T_{12} A_2^{(1)} + T_{13} A_3^{(1)} &= 0 \\ T_{21} A_1^{(1)} + (T_{22} - \lambda_1) A_2^{(1)} + T_{23} A_3^{(1)} &= 0 \\ T_{31} A_1^{(1)} + T_{32} A_2^{(1)} + (T_{33} - \lambda_1) A_3^{(1)} &= 0 \\ \therefore \begin{vmatrix} T_{22} - \lambda_1 & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} - \lambda_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} T_{23} & T_{21} \\ T_{33} - \lambda_1 & T_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{21} & T_{22} - \lambda_1 \\ T_{31} & T_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

ความสัมพันธ์ของสมการ(75) กำหนดทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $A^{(1)}$ (แต่คนละขนาด) ทิศทางของแกนหลักหนึ่งของเทนเซอร์ T_{ik} สองทิศทางหลักถูกกำหนดโดยเวกเตอร์ $A^{(2)}$ และ $A^{(3)}$

จะเห็นว่า แกนหลักของเทนเซอร์ T_{ik} ตั้งฉาก ให้ $A^{(r)}$ และ $A^{(s)}$ เป็น eigenvector ที่สอดคล้องกับ eigenvalue λ_r และ λ_s ($r \neq s$) ตามลำดับ นั่นคือ

$$T_{ik} A_k^{(r)} = \lambda_r A_i^{(r)} \quad (76)$$

$$T_{ik} A_k^{(s)} = \lambda_s A_i^{(s)} \quad (77)$$

คูณสมการ(76) ด้วย $A_i^{(s)}$ และคูณสมการ(77) ด้วย $A_i^{(r)}$ ผลรวมมากกว่า i และลบสมการ(77) ด้วยสมการ(76) จะได้

$$T_{ik} A_k^{(r)} A_i^{(s)} - T_{ik} A_k^{(s)} A_i^{(r)} = (\lambda_r - \lambda_s) A_i^{(r)} A_i^{(s)}$$

เนื่องจาก $T_{ik} = T_{ki}$ จะได้

$$0 = (\lambda_r - \lambda_s) A_i^{(r)} A_i^{(s)}$$

$$\therefore A_i^{(r)} A_i^{(s)} = A^{(r)} \cdot A^{(s)} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $\lambda_r \neq \lambda_s$ (eigenvalue ถูกต้องตามสมมติฐาน) $A^{(r)}$ ตั้งฉากกับ $A^{(s)}$ อีกวิธีหนึ่งของการพิสูจน์การมีอยู่ของแกนหลัก 3 แกนที่ทับกันสนิท ซึ่งจะเป็นจริงตาม characteristic equation สมการ(70) และให้ λ_1 เป็นรากของสมการ(70) และให้ $A^{(1)}$ เป็น eigenvector ที่สอดคล้องกับแกนหลักของเทนเซอร์ ดังนั้น

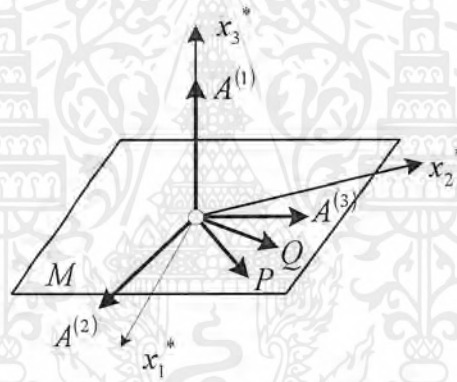
$$T_{ik} A_k^{(1)} = \lambda_1 A_i^{(1)}$$

ให้ M เป็นระนาบที่ผ่านจุดเริ่มต้นของ $A^{(1)}$ ตั้งฉากกับ $A^{(1)}$ แล้ว T_{ik} นำมาซึ่งเวกเตอร์ใน M ไปยังเวกเตอร์อื่นๆใน M ให้ P เป็นเวกเตอร์ใน M ดังนั้น

$$P \cdot A^{(1)} = P_i A_i^{(1)} = 0$$

$$\text{หรือ } T_{ik} A_k^{(1)} P_i = \lambda_1 A_i^{(1)} P_i = 0$$

เช่น เวกเตอร์ Q ประกอบด้วย $Q_k = T_{ik} P_i$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $A^{(1)}$ (เนื่องจาก $Q_k A_k^{(1)} = 0$) และเส้นในระนาบ M ดังรูปที่ 2.30



รูปที่ 2.30 แสดงแกนหลัก 3 แกนของเทนเซอร์สมมาตรที่มีอยู่ของแกน
ไม่ขึ้นกับผลคูณของรากของ characteristic equation

ในการพิจารณาระบบพิกัดฉาก x_1^*, x_2^*, x_3^* นั่นคือ แกน x_3^* มีเส้น $A^{(1)}$ และอีก 2 แกนในระนาบ M ในรูปที่ 2.30 ในระบบพิกัดนี้เวกเตอร์ A ในระนาบ M มีส่วนประกอบคือ $A_1^*, A_2^*, 0$ และผลของเทนเซอร์บนเวกเตอร์ A ถูกอธิบายด้วยเมตริกซ์รูปแบบ

$$\|T_k^*\| = \begin{vmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* & 0 \\ T_{21}^* & T_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (T_{12}^* = T_{21}^*)$$

สมมติว่า เวกเตอร์ A ในระนาบ M ซึ่งไม่หมุนโดย T_{ik} แต่มีความยาวที่เปลี่ยนไป
แล้ว จะได้ 2 สมการ

$$T_{ik}^* A_k^* = \lambda A_i^* \quad (i=1,2)$$

(สมการที่ 3 $T_{3k}^* A_k^* = A_3^*$ ถดลงเท่ากับ 0) และ characteristic equation ที่สอดคล้องกัน คือ

$$\begin{vmatrix} T_{11}^* - \lambda & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ซึ่งเป็นกำลังสองแทนที่จะเป็นกำลังสามใน λ ให้ λ_2 เป็นรากของสมการนี้ และให้ $A^{(2)}$ เป็น
เวกเตอร์ที่สอดคล้องกัน นั่นคือ

$$T_{ik}^* A_k^{(2)*} = \lambda_2 A_i^{(2)*}$$

แล้วพิจารณา $A^{(2)}$ ด้วยแกนหลักของเทนเซอร์อันดับที่ 2 อย่างไรก็ตาม $A^{(2)}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์
 $A^{(1)}$ เนื่องจากอยู่ในระนาบ M

ให้ $A^{(3)}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากทั้ง $A^{(1)}$ และ $A^{(2)}$ แล้วเวกเตอร์จะประกอบด้วยตั้งฉากกับ
เวกเตอร์ $A^{(1)}$ (เนื่องจากเป็นเส้นอยู่ในระนาบของ M) และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $A^{(2)}$ (เนื่องจาก
เวกเตอร์เชิงตั้งฉาก $A^{(2)}$ และ $A^{(3)}$ แล้ว $T_{ik}^* A_i^{(3)*} A_k^{(2)*} = \lambda_2 A_i^{(2)*} A_i^{(3)*} = 0$) ดังนั้นเวกเตอร์
ประกอบด้วย $T_{ik}^* A_i^{(3)*}$ ร่วมเส้นตรงกับเวกเตอร์ $A^{(3)}$ เช่น

$$T_{ik}^* A_i^{(3)*} = \lambda_3 A_k^{(3)*}$$

สำหรับค่าคงที่ λ_3 แต่ $T_{ik}^* A_i^{(3)*} = \lambda_3 A_k^{(3)*}$ เนื่องจาก $T_{ik}^* = T_{ki}^*$ เช่น $A^{(3)}$ กำหนดแกนหลักของ
เทนเซอร์ไม่มีเงื่อนไขว่าจำนวน $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ แยกออกจากกัน และจะพิสูจน์ว่า เทนเซอร์สมมาตร
มีแกนหลักตั้งฉากกับ 3 แกน โดยไม่สนใจรากที่มากมายของ characteristic equation (70)

สมมติเทนเซอร์ T_{ik} เป็นลักษณะเฉพาะในระบบพิกัดฉาก x_1, x_2, x_3 แล้วแกนหลักของ
 T_{ik} กำหนดในระบบพิกัดฉาก x'_1, x'_2, x'_3 ที่สอดคล้องกับมูลฐานเชิงตั้งฉาก

$$n^{(r)} = \frac{A^{(r)}}{|A^{(r)}|} \quad (r=1,2,3)$$

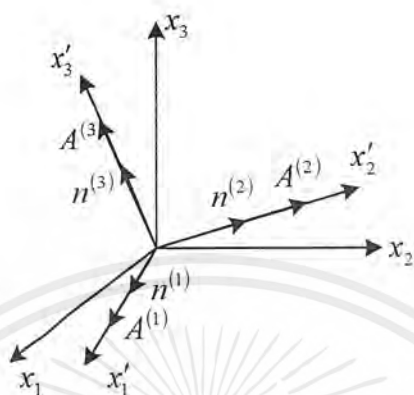
ดังรูปที่ 2.31 ในระบบพิกัดเดิมเรามี $T_{ik} n_k^{(r)} = \lambda_r n_i^{(r)}$ ($i, r=1,2,3$) ซึ่ง $n_i^{(r)}$ เป็นส่วน
ประกอบที่ i ของ $n^{(r)}$ ในทำนองเดียวกัน

$$T'_{ik} n_k^{(r)'} = \lambda_r n_i^{(r)'} \quad (i, r=1,2,3) \quad (78)$$

ในพิกัดใหม่ เนื่องจาก $n_1^{(1)'} = n_2^{(2)'} = n_3^{(3)'} = 1$ และ $n_i^{(r)'} = 0$ ถ้า $i \neq r$ มีสมการ(78)

จำนวน 9 สมการ คือ

$$\begin{aligned} T'_{11} &= 1, T'_{12} = 0, T'_{13} = 0 \\ T'_{21} &= 0, T'_{22} = 1, T'_{23} = 0 \\ T'_{31} &= 0, T'_{32} = 0, T'_{33} = 1 \end{aligned}$$



รูปที่ 2.31 แกนหลักของเทนเซอร์สมมาตร

ดังนั้น ในแกนหลักของระบบเทนเซอร์มีเมตริกซ์เส้นทแยงมุม

$$\|T'_{ik}\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

และ eigenvalue ของเทนเซอร์ (ราก $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ของ characteristic equation) ตามเส้นทแยงมุมหลักและ 0 ทุกๆ ที่ไม่ใช่เส้นทแยงมุม

2.3.5.4 เทนเซอร์ทรงรี

สมมติเทนเซอร์ ประกอบด้วยเวกเตอร์ P ไปยังเวกเตอร์ Q นั่นคือ

$$Q_i = T_{ik} P_k \quad (79)$$

ในระบบแกนหลักสมการ(79) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} Q'_i &= T'_{ik} P'_k \\ \text{หรือ} \quad Q'_1 &= T'_{11} P'_1 = \lambda_1 P'_1 \\ Q'_2 &= T'_{22} P'_2 = \lambda_2 P'_2 \\ Q'_3 &= T'_{33} P'_3 = \lambda_3 P'_3 \end{aligned} \quad (80)$$

ถ้า eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ มีค่าทั้งหมด แล้ว T_{ik} มี 3 ทิศทางหลัก (ถูกกำหนดโดย $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) จากสมการ(80) ผลของการประยุกต์ T_{ik} ไปยัง P คือการหมุน P ให้เปลี่ยนความยาวจนกว่า P จะอยู่ระหว่างแกนหลักหนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติว่า $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ แล้ว characteristic equation มีรากเดียวและรากคู่ แล้วสมการ(80) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Q'_1 &= \lambda_1 P'_1 \\ Q'_2 &= \lambda_2 P'_2 \\ Q'_3 &= \lambda_3 P'_3 \end{aligned}$$

และผลของการประยุกต์ T_{ik} ไปยังเวกเตอร์ P ในระนาบ $x'_1 x'_2$ เป็นเพียงการเปลี่ยนความยาวของ P แต่ไม่หมุน P ระนาบ $x'_1 x'_2$ คือ characteristic plane ในทุกทิศทางทุกทางในระนาบนี้ที่เป็นทิศทางหลัก ถ้าทิศทางหลักหนึ่งถูกกำหนด (สอดคล้องกับ eigenvalue λ_3) และถ้า 2 eigenvalue สอดคล้องกันแล้วทิศทางหลักทั้ง 2 ตั้งฉากกัน และทิศทางแรกสามารถช่วยแกนหลักของเทนเซอร์

สมมติว่า characteristic equation มี 3 ราก $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ แล้วสมการ(80) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} Q'_1 &= \lambda P'_1 \\ Q'_2 &= \lambda P'_2 \\ Q'_3 &= \lambda P'_3 \end{aligned}$$

ผลของการประยุกต์ T_{ik} กับทุกๆ เวกเตอร์ที่เปลี่ยนความยาวแล้วทั้งหมด (ถ้า $\lambda \neq 1$) โดยไม่มีการเปลี่ยนความยาว ในกรณีนี้ทุกทิศทางเป็นทิศทางหลักของเทนเซอร์ T_{ik} ซึ่งกล่าวได้ว่าเป็น isotropic มีคุณสมบัติ 1-1 ระหว่างเวกเตอร์ A และระนาบของรูปแบบ

$$A \cdot r = A_i x^i = 1$$

ในทำนองเดียวกันมีคุณสมบัติ 1-1 ระหว่างเทนเซอร์สมมาตร และพื้นผิวกำลังสองของรูปแบบ

$$T_{ik} x^i x^k = 1 \quad (81)$$

แกนหลักของพื้นผิวนี้นี้เหมือนกับแกนหลักของเทนเซอร์ T_{ik} ในระบบพิกัด x'_1, x'_2, x'_3 ที่สอดคล้องกับแกนหลักสมการ(81) จะอยู่ในรูปของ

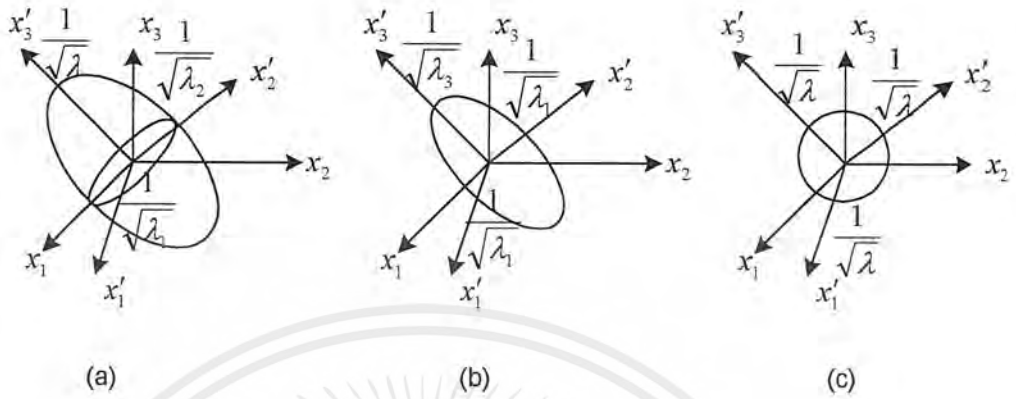
$$\begin{aligned} T'_{11} (x'_1)^2 + T'_{22} (x'_2)^2 + T'_{33} (x'_3)^2 &= \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \lambda_3 (x'_3)^2 = 1 \\ \text{หรือ} \quad \frac{(x'_1)^2}{\lambda_1} + \frac{(x'_2)^2}{\lambda_2} + \frac{(x'_3)^2}{\lambda_3} &= 1 \end{aligned}$$

ถ้า $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ เป็นบวก พื้นผิวในสมการ(92) เป็นทรงรี เรียกว่า tensor ellipsoid กับครึ่งแกนยาว

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เทนเซอร์ทรงรี เป็นการเปลี่ยนแปลงทรงรี ถ้า $\lambda_1 = \lambda_2$ และเป็นทรงกลมถ้า $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$
 ดังรูปที่ 2.32



รูปที่ 2.32 แสดงรูป tensor ellipsoid ของเทนเซอร์สมมาตร T_{ik} แกนหลักของทรงรีเทียบกับเทนเซอร์

a) กรณีของ eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ เทนเซอร์มีเมตริกซ์รูปแบบในแกนหลัก คือ

$$\|T'_{ik}\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

b) กรณีของ double eigenvalue ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$) เทนเซอร์มีเมตริกซ์รูปแบบในแกนหลัก คือ

$$\|T'_{ik}\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

c) กรณีของ triple eigenvalue ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$) เทนเซอร์เป็น isotropic และมีเมตริกซ์รูปแบบในระบบพิกัดฉาก คือ

$$\|T_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การวิจัยและการดำเนินการ

3.1 ภาษา HTML

HTML (Hypertext Markup Language) เป็นรูปแบบหนึ่งของภาษา SGML (Standard Generalized Markup Language) นิยมใช้กันทั่วไปบนอินเทอร์เน็ต เหมือนเราใช้โปรแกรมระบบปฏิบัติการ DOS ซึ่งถูกตัดแยกออกมาจากโปรแกรมระบบปฏิบัติการ UNIX เช่นเดียวกับ HTML ซึ่งเป็นภาษาหลักสำหรับการสร้างเว็บเพจ เพิ่มเอกสาร HTML ที่สร้างขึ้นจะนำไปแสดงผลได้ด้วยโปรแกรม Web browser เช่น โปรแกรม Netscape Navigator หรือ Internet Explorer

HTML เป็นภาษาที่ง่ายต่อการเรียนรู้และการเขียน ซึ่งจัดได้ว่าง่ายที่สุด ง่ายกว่าภาษาคอมพิวเตอร์อื่นที่เคยมีมา แต่ก่อให้เกิดคุณประโยชน์ขึ้นมาจนทำให้เราก็มองว่านี่เป็นเพียงส่วนหนึ่งของภาษาใหญ่ที่มีขีดความสามารถสูงกว่านี้

ปัจจุบันภาษา HTML ได้ถูกกำหนดมาตรฐานให้สูงขึ้น มีขีดความสามารถสูงขึ้น มีองค์ประกอบในการสร้างฐานข้อมูลที่ดีขึ้น

3.2 HTML ทำงานอย่างไร

การใช้บริการอินเทอร์เน็ตไม่ว่าจะเป็น E-Mail , FTP , Gopher , Telnet หรือบริการอื่นๆ ต้องใช้อุปกรณ์เชื่อมต่อภายในอันซับซ้อนของ Hardware ที่สามารถทำงานได้ด้วยโปรแกรมเฉพาะที่ทำงานบนอินเทอร์เน็ตเท่านั้น

WWW แบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็น Client และส่วนที่เป็น Server เหมือนกับที่มีแบ่งกันในระบบเครือข่ายทั่วไป ทั้งสองส่วนจะถูกเชื่อมโยงถึงกันผ่านทางอินเทอร์เน็ต โดยมี HTML เป็นส่วนฐานข้อมูลสำคัญ เมื่อ Web browser ส่งข้อความร้องขอข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบของไฟล์ HTML จากเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งานอยู่ผ่าน Modem หรืออุปกรณ์สื่อสารข้อมูลอื่นไปยังศูนย์บริการอินเทอร์เน็ต (ISP) ตาม protocol ที่กำหนดไว้ผ่านทาง URLs (Uniform Resource Locators) และเมื่อข้อมูลเดินทางมาถึง Web Server ศูนย์บริการปลายทางที่ผู้ใช้ต้องการ ณ ที่นี้เครื่อง Web Server ของศูนย์จะทำการอ่านข้อมูลที่ถูกส่งมาและจะทำงานตามคำสั่งที่กำหนด โดยอาจมีการเชื่อมโยงไปยัง Web Server อื่นอีก หลังจากจบสิ้นกระบวนการแล้วจะทำการนัดส่งข้อมูลคำตอบย้อนกลับมายังเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งานอยู่ โปรแกรม Web Server ที่เครื่องคอมพิวเตอร์ของเราก็จะแปลงสัญญาณคำสั่งและแสดงผลเป็นข้อความ รูปภาพ เสียง ให้เราใช้งานต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

HTML นอกจากใช้ในการสร้างฐานข้อมูลบนอินเทอร์เน็ตแล้ว ยังมีความสามารถทางด้านการเชื่อมโยงข้อมูลจากแหล่งข้อมูลอื่นบนอินเทอร์เน็ต ไม่ว่าจะเป็น E-Mail , FTP , Gopher , Telnet หรือ News (ขึ้นอยู่กับชนิดของ Web browser แต่ละชนิดว่ามีความสามารถหรือไม่) ทำให้เราสามารถเรียกใช้บริการเหล่านี้ได้ทันที ต่างจากเมื่อขณะเริ่มแรกที่มีการเปิดให้บริการ จะใช้บริการใดก็ต้องไปหาโปรแกรมที่ทำงานเฉพาะมาทำงาน

ปัจจุบัน Web Server ที่ให้บริการกันอยู่ทั่วทุกมุมโลกนั้น ข้อมูลที่บริการส่วนใหญ่ไม่เสียค่าบริการใดๆ เราเสียเพียงค่าโทรศัพท์เท่านั้น แต่ได้สาระข้อมูลมากมาย ด้วยความสามารถอันยอดเยี่ยมของ HTML ข้อมูลจากแหล่งต่างๆ จะถูกนำมาแสดงตรงหน้าผู้ใช้โดยเครื่องคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่ประมวลผลข้อมูลผ่าน protocol HTML เป็น protocol หลักทำให้เราสามารถติดต่อสื่อสารบนอินเทอร์เน็ตได้

3.3 การสร้างเว็บเพจ ด้วย Allaire ColdFusion Studio 4.0

ในการสร้างเว็บเพจบนเซิร์ฟเวอร์นี้ จะใช้โปรแกรม Allaire ColdFusion Studio 4.0 ซึ่งเป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ภาษา HTML โดยที่ผู้ใช้ไม่ต้องเขียนโปรแกรมเอง เนื่องจากมี Object ต่างๆ ให้เลือกใช้ ซึ่งโปรแกรมจะเขียน Source code ให้เองโดยอัตโนมัติ

การเขียนคำสั่ง (tags) ที่ใช้ในภาษา HTML ส่วนใหญ่ต้องประกอบด้วยคำสั่งเปิดและคำสั่งปิดคู่กันเสมอ

- คำสั่งเปิดประกอบด้วย < ตามด้วยคำสั่ง และปิดท้ายด้วย > เช่น <HTML>
- คำสั่งปิดมีรูปแบบเหมือนคำสั่งเปิด แต่เพิ่มเครื่องหมาย / หน้าชื่อคำสั่งนั้นเช่น </HTML>
- และในแต่ละคำสั่งเปิดอาจมีส่วนขยายอื่น (Attribute) ผสมอยู่ด้วย

ตารางที่ 3.1 โครงสร้างพื้นฐานของ HTML

<HTML>	
<HEAD>	ส่วนหัวของโปรแกรม
<TITLE> ชื่อ โปรแกรมหรือข้อมูลที่ต้องการแสดง</TITLE>	
</HEAD>	
<BODY>	เป็นตัวคุมโปรแกรมทั้งหมด
...คำสั่งหรือข้อความที่ต้องการแสดง	ส่วนเนื้อหาที่ต้องการแสดงผล
</BODY>	ทั้งหมด
</HTML>	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 1

เขียนโปรแกรม HTML ใน Allaire ColdFusion Studio 4.0 โดยโปรแกรมสำเร็จรูปนี้จะแสดงโครงสร้างในการเขียนเว็บเพจตามตัวอย่างด้านบนแล้ว และผู้ใช้สามารถเขียนโปรแกรมเพิ่มเติมได้เองหรืออาจเรียกใช้ Object ต่างๆ เพื่อความสะดวกในการเขียนยิ่งขึ้น จากนั้นบันทึกข้อมูลเป็นแฟ้มข้อมูลนามสกุล HTML โดยบันทึกแฟ้มข้อมูลหลักเป็น index.html

ขั้นตอนที่ 2

ดูผลลัพธ์จากโปรแกรม HTML ที่เขียน ในโปรแกรม Web browser หนึ่ง เช่น Netscape communicator หรือ Internet Explorer โดย

1. เลือกเมนู File
2. เลือก Open Page... เปิดแฟ้มข้อมูล HTML ที่บันทึกไว้

ขั้นตอนที่ 3

เมื่อได้โปรแกรม HTML ที่สมบูรณ์แล้ว จึงสร้างไดเรกทอรีชื่อ public_html ในหน่วยความจำของรหัสนักศึกษาที่อยู่ใน server Chaokhun จากนั้นนำโปรแกรม HTML ทั้งหมดเก็บลงในไดเรกทอรีนี้ แล้วจึงกำหนดสิทธิในการอ่าน เขียน หรือ Execute โปรแกรม HTML ที่สร้างขึ้นในที่นี้จะขอใช้โปรแกรม CuteFTP 2.8 โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. เปิดโปรแกรม CuteFTP
2. คลิกปุ่ม Add Site เพื่อเลือกเซิร์ฟเวอร์ปลายทางที่จะ upload
3. กำหนดรายละเอียดของปลายทาง โดย

Site Label	: kmitl
Host Address	: 161.246.10.21
User ID	: s9054140
Password	: xxxxxx
4. ในวินโดว์ FTP Site Manager ดับเบิลคลิกที่ kmitl
5. เมื่อเชื่อมต่อได้แล้วก็คลิก OK
6. คลิกเมาส์ขวาในส่วนของข้อมูลด้านขวาแล้วเลือก Make new directory...
7. ตั้งชื่อ directory นั้นเป็น public_html
8. upload โปรแกรม HTML ทั้งหมดที่สร้างไว้ โดยเลือกแฟ้มข้อมูล HTML ทางด้าน

ซ้าย

9. ดับเบิลคลิก public_html
10. คลิกลากแฟ้มข้อมูลที่เลือกไว้ไปปล่อยทางด้านขวา แล้วคลิกปุ่ม Yes
11. เลือก directory public_html
12. คลิกขวา เลือก Change file attributes

13. กำหนด attribute เป็น 755 คลิกปุ่ม OK
14. ทำซ้ำข้อ 13-15 ในทุกๆ เพิ่มข้อมูลของ public_html
15. กดปุ่ม Disconnect เพื่อยกเลิกการเชื่อมต่อ

ขั้นตอนที่ 4

คุณผลโปรแกรมที่ได้ใน Internet Explorer โดยพิมพ์ URL เป็น
www.kmitl.ac.th/~s9054140 , 161.246.10.21/~s9054140 , www.kmitl.ac.th/~kcpakkin หรือ
161.246.10.21/~kcpakkin

3.4 คำสั่ง HTML ที่ใช้ในเว็บเพจเทนเซอร์

3.4.1 คำสั่ง HTML

คำสั่งนี้เป็นคำสั่งเริ่มต้นของการเขียนโปรแกรม HTML

```
<html> </html>
```

3.4.2 คำสั่ง HEAD

คำสั่งนี้ใช้กำหนดข้อความในส่วนที่เป็นชื่อเรื่อง

```
<head> </head>
```

3.4.3 คำสั่ง TITLE

คำสั่งนี้เป็นส่วนแสดงชื่อของโปรแกรม โดยจะแสดงบนไตเติลบาร์ของ Web browser และคำสั่งนี้จะอยู่ระหว่าง <head> และ </head>

```
<title> </title>
```

3.4.4 คำสั่ง BODY

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงเนื้อหาต่างๆ

```
<body> </body>
```

ตารางที่ 3.2 Attribute ของ body

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Background = “ชื่อเพิ่มรูปภาพ”	กำหนดรูปภาพของ background

3.4.5 คำสั่ง FRAMESET

คำสั่งนี้ใช้ในการแบ่ง frame

```
<frameset> <frame>
```

```
</frameset>
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.3 Attribute ของ frameset

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Cols = “พื้นที่ส่วนที่ 1 , พื้นที่ส่วนที่ 2 ,...”	กำหนดพื้นที่ของแต่ละ Column เป็นเปอร์เซ็นต์หรือขนาดเป็น pixel

3.4.6 คำสั่ง FRAME

คำสั่งนี้ใช้กำหนดว่าแต่ละ frame จะแสดงข้อมูลจากเพิ่มข้อมูล HTML ใด

<frame>

ตารางที่ 3.4 Attribute ของ frame

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Src = “เพิ่มข้อมูล HTML”	กำหนดเพิ่มข้อมูล HTML ที่ใช้แสดงใน frame นั้น
Noresize	คำสั่งไม่ให้ผู้ใช้ปรับขนาดของ frame เอง
Frameborder = “Yes หรือ No”	กำหนดให้แสดงกรอบ frame หรือไม่
Scrolling = “Yes หรือ No”	กำหนดแถบที่ใช้เลื่อนหน้าจอ
Name = “ชื่อ frame”	กำหนดชื่อให้ frame นั้น
Bordercolor = “รหัสสี”	กำหนดสีของกรอบรอบ frame

3.4.7 คำสั่ง FONT

คำสั่งนี้ใช้ในการกำหนด font ของโปรแกรม HTML

ตารางที่ 3.5 Attribute ของ font

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Face = “ชื่อ font”	กำหนดชื่อ font
Color = “#รหัสสี”	กำหนดสีของตัวอักษร
Size = “ขนาดตัวอักษร”	กำหนดขนาดของตัวอักษร

3.4.8 คำสั่ง BASEFONT

คำสั่งนี้ใช้ในการกำหนด font มาตรฐานของโปรแกรม HTML นั้นๆ

```
<basefont>
```

ตารางที่ 3.6 Attribute ของ basefont

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Face = “ชื่อ font”	กำหนดชื่อ font
Color = “#รหัสสี”	กำหนดสีของตัวอักษร
Size = “ขนาดตัวอักษร”	กำหนดขนาดของตัวอักษร

3.4.9 คำสั่ง CENTER

คำสั่งนี้ใช้จัดตำแหน่งของข้อความหรือรูปให้อยู่ตรงกลาง

```
<center>            </center>
```

3.4.10 คำสั่ง IMG

คำสั่งนี้ใช้แทรกรูปภาพในโปรแกรม HTML

```
<img>
```

ตารางที่ 3.7 Attribute ของ img

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Src = “ชื่อ ไฟล์รูป”	กำหนดโฟลเดอร์ที่เก็บไฟล์รูป
Alt = “ข้อความ”	กำหนดข้อความที่ใช้อธิบายรูป ในขณะที่รูปยังอยู่ในระหว่างการโหลด
Border = “ขนาดกรอบ”	กำหนดขนาดกรอบของรูป
Height = “ความสูงของรูป”	กำหนดความสูงของรูปเป็น pixel
Width = “ความกว้างของรูป”	กำหนดความกว้างของรูปเป็น pixel
Align = “ตำแหน่ง”	กำหนดตำแหน่งของรูป

3.4.11 คำสั่ง BR

คำสั่งนี้ใช้ในการขึ้นบรรทัดใหม่

```
<br>
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.12 คำสั่ง B

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความเป็นตัวหนา

`` ``

3.4.13 คำสั่ง U

คำสั่งนี้ใช้ในการขีดเส้นใต้ข้อความ

`<u>` `</u>`

3.4.14 คำสั่ง P

คำสั่งนี้ใช้จัดข้อความให้เป็น Paragraph

`<p>` `</p>`

3.4.15 คำสั่ง HR

คำสั่งนี้ใช้ในการสร้างเส้นกั้นหน้า

`<hr>`

3.4.16 คำสั่ง A

คำสั่งนี้ใช้ในการเชื่อมโยงเนื้อหาใน page ต่างๆ

`<a>` ``

ตารางที่ 3.8 Attribute ของ A

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Href = “ชื่อเพิ่มข้อมูล HTML”	กำหนด URL หรือเพิ่มข้อมูลที่ต้องการเชื่อมโยง
Target = “ชื่อ frame”	กำหนด frame ที่ต้องการให้แสดงผลการเชื่อมโยง

3.4.17 คำสั่ง TABLE

คำสั่งนี้ใช้ในการสร้างตาราง

`<table>` `</table>`

ตารางที่ 3.9 Attribute ของ table

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Align = “ตำแหน่ง”	กำหนดตำแหน่งของตาราง
Cellpadding = “ขนาด”	กำหนดระยะห่างระหว่างข้อความและตารางมีหน่วยเป็น pixel หรือเปอร์เซ็นต์
Cellspacing = “ขนาด”	กำหนดระยะห่างของแต่ละช่องตารางมีหน่วยเป็น pixel หรือเปอร์เซ็นต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.9 (ต่อ) Attribute ของ table

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Border = “ขนาด”	กำหนดขนาดของกรอบตารางมีหน่วยเป็น pixel หรือ เปอร์เซ็นต์
Bordercolor = “#รหัสสี”	กำหนดสีของกรอบตาราง
Bgcolor = “#รหัสสี”	กำหนดสี background ของตาราง

3.4.18 คำสั่ง TR

คำสั่งนี้ใช้ในการสร้างแถวของตาราง ซึ่งคำสั่งนี้อยู่ระหว่างคำสั่ง `<table>` และ `</table>`

```
<tr>                                </tr>
```

3.4.19 คำสั่ง TH

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความในแต่ละช่องตาราง โดยมีมักใช้กับข้อความที่เป็นหัวเรื่อง ซึ่งคำสั่งนี้อยู่ระหว่างคำสั่ง `<table>` และ `</table>`

```
<th>                                </th>
```

ตารางที่ 3.10 Attribute ของ th

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Align = “ตำแหน่ง”	กำหนดตำแหน่งของข้อความในแต่ละช่อง

3.4.20 คำสั่ง TD

คำสั่งนี้ใช้ในการแสดงข้อความที่เป็นรายละเอียดในแต่ละช่องตาราง

```
<td>                                </td>
```

ตารางที่ 3.11 Attribute ของ td

รูปแบบคำสั่ง	ความหมาย
Align = “ตำแหน่ง”	กำหนดตำแหน่งของข้อความในแต่ละช่อง

3.5 การออกแบบ

ขั้นตอนในการออกแบบในระยะแรกๆ ได้ออกแบบหน้าจอของแต่ละหัวข้อเรื่องของตน เซอร์ ซึ่งมีหัวข้อหลักๆ ดังนี้

1. เทนเซอร์อันดับศูนย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. เทนเซอร์อันดับหนึ่ง
3. เทนเซอร์อันดับสอง
4. เทนเซอร์ความเค้น
5. โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย
6. เทนเซอร์ที่ผิดปกติ
7. อัตราของเทนเซอร์ที่ผิดปกติ

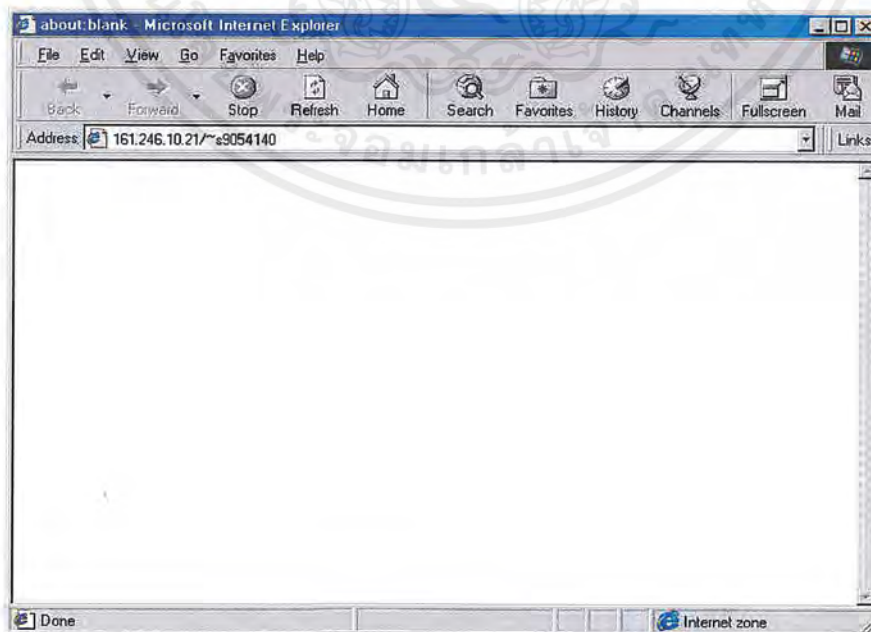
3.6 การพัฒนาและปรับปรุง

เมื่อออกแบบหน้าจอทั้ง 7 หน้าจอของเทนเซอร์แล้ว ได้มีการเพิ่มเติมหน้าจอที่จำเป็นบางส่วนเช่น หน้าจอแรกก่อนการเข้าสู่หน้าจอเนื้อหาของเทนเซอร์ ได้ออกแบบหน้าจอนี้ให้สามารถเข้าไปในหน้าจอหัวข้อต่างๆ ของเทนเซอร์ได้ทันที นอกจากนี้ยังมีหน้าจอของ GuestBook ที่ให้ผู้ที่เข้ามาเยี่ยมชมได้ส่งคำแนะนำและคำติชมต่างๆ เข้ามายังเว็บเพจนี้ด้วย

3.7 คู่มือการใช้งาน

3.7.1 การเข้าสู่เว็บเพจ

เมื่อติดต่อคอมพิวเตอร์เข้าสู่อินเทอร์เน็ตเรียบร้อยแล้ว เปิด browser เช่น Internet Explorer หรือ Netscape Communicator ขึ้นมา แต่ควรจะเป็น Internet Explorer เพราะจะทำให้เว็บเพจนี้แสดงผลได้ดีกว่า Netscape Communicator จากนั้นพิมพ์ URL ดังนี้ 161.246.10.21/~s9054140 แล้วกด enter ดังรูปต่อไปนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ **รูปที่ 3.1** หน้าจอของการเข้าสู่เว็บเพจเทนเซอร์ หน้าไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.2 หน้าจอต่างๆ ของเว็บเพจ

หน้าจอที่ 1 เป็นหน้าจอที่จะได้รู้จักกับเทนเซอร์ click ที่ปุ่มรูปหัวใจเพื่อจอเข้าหน้าจอลัดไปหรือจะ click ที่หัวข้อหลักของเทนเซอร์ทางด้านซ้ายของหน้าจอเลขก็ได้



รูปที่ 3.2 หน้าจอของการเข้าสู่เนื้อหาของเทนเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้าที่ 2 เป็นหน้าจอนำเสนอเทนเซอร์

TENSOR

การที่วัตถุในระบบพิกัดจากหนึ่งเปลี่ยนไปเป็นอีกระบบพิกัดจากหนึ่ง ส่วนประกอบของวัตถุที่อยู่ในพิกัดจากนั้นจะเปลี่ยนไปอย่างไร ซึ่งจะศึกษาได้จากส่วนประกอบของเทนเซอร์ โดยพิจารณาว่าส่วนประกอบ ในระบบพิกัดจากหนึ่งจะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับส่วนประกอบนั้นในอีกระบบพิกัดหนึ่ง

เทนเซอร์อันดับที่ n ในระบบพิกัดใดๆ จะมีส่วนประกอบ เป็น (Component of tensor) 3^n จำนวน

อันดับของเทนเซอร์(n)	นิยาม	จำนวนส่วนประกอบ	แสดงรูปภาพ	ตัวอย่าง
เทนเซอร์อันดับศูนย์ (สเกลาร์)	ปริมาณของเลขจำนวนเต็ม(อาจมีค่าเป็นบวก ลบ หรือ ศูนย์) มี $3^0 = 1$ ส่วนประกอบ ซึ่งในเทนเซอร์อันดับศูนย์ สเกลาร์จะไม่เปลี่ยนแปลง แม้ระบบพิกัดจะเปลี่ยนไป	$3^0 = 1$		อุณหภูมิ, งาน, มวล, ความหนาแน่น
เทนเซอร์อันดับหนึ่ง (เวกเตอร์)	ปริมาณของเส้นตรง มีทั้งขนาดและทิศทาง $3^1 = 3$ ส่วนประกอบ เมื่อมีการเปลี่ยนพิกัด ส่วนประกอบเหล่านี้จะเปลี่ยนไป แต่ยังคงเป็นเวกเตอร์ทั้งหมด	$3^1 = 3$		การขจัด, ความเร็ว, ความเร่ง, แรง
เทนเซอร์อันดับสอง (เทนเซอร์ความเค้น)	เมื่อพิจารณาขนาดใน 3 มิติ ในแต่ละระนาบจะมีแรงมากจะหักับวัตถุ โดยมีแรงขนาดแนบแกน x_2 แรงที่ขนานกับแกน x_3 และแรงที่กระทำตั้งฉากกับระนาบ x_1, x_2 ในด้านของเดียวกันบน x_1, x_2 และ x_2, x_3 ระนาบที่ขนานกันมีส่วนประกอบเดียวกัน เพราะมีขนาดและทิศทางเดียวกัน ดังนั้นวัตถุนี้จึงมี 9 ส่วนประกอบ	$3^2 = 9$		เทนเซอร์ความเค้น, โมเมนต์ของเทนเซอร์, ความเค้น, เทนเซอร์ที่คิดรูป, อัตราของเทนเซอร์ที่คิดรูป



[HOME] [บทนำ] [เทนเซอร์อันดับศูนย์(สเกลาร์)] [เทนเซอร์อันดับหนึ่ง(เวกเตอร์)] [เทนเซอร์อันดับสอง] [เทนเซอร์ความเค้น] [โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเค้น] [เทนเซอร์ที่คิดรูป] [อัตราของเทนเซอร์ที่คิดรูป] [แนะนำติชม] [ดาวน์โหลดเนื้อหา] [ผู้จัดทำ]

รูปที่ 3.3 หน้าจอของการแนะนำเทนเซอร์

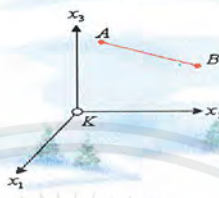
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้าที่ 3 เป็นหน้าของเทนเซอร์อันดับศูนย์

• เทนเซอร์อันดับศูนย์ (สเกลาร์) •

ปริมาณจะไม่เปลี่ยนแปลงแม้ระบบพิกัดจะเปลี่ยนไป นั่นคือ $\varphi = \varphi'$
 เมื่อ φ คือ ปริมาณสเกลาร์ในระบบพิกัดหนึ่ง
 และ φ' คือ ปริมาณสเกลาร์ในระบบพิกัดที่เปลี่ยนไป

ตัวอย่าง ในระบบพิกัดฉาก K ให้ Δs แทนระยะทางระหว่างจุด A และ B เป็นปริมาณสเกลาร์



รูปที่ 1 เส้นระบบพิกัด K' ไปเป็นระบบพิกัด K
 นั่นคือ $\Delta s = \Delta s'$

โดยที่ Δs คือ ระยะทางระหว่างจุด A และ B ในระบบพิกัด K
 และ $\Delta s'$ คือ ระยะทางระหว่างจุด A' และ B' ในระบบพิกัด K'

พิสูจน์ ระยะทางระหว่างจุด A และ B ในระบบพิกัดหนึ่ง (K) เท่ากับระยะทางระหว่างจุด A' และ B' ในระบบพิกัดที่เปลี่ยนไป (K')

$$\Delta x_i = x_i^B - x_i^A$$

$$\Delta x'_i = x_i'^B - x_i'^A \quad (i = 1, 2, 3)$$

การแปลงจาก K ไป K' คือ $x'_i = \alpha_{ik} x_k + x_{0i}$
 โดยที่ x_{0i} คือ พิกัดของจุดกำเนิดในระบบพิกัดใหม่
 และ α_{ik} คือ ค่า \cos ของมุมระหว่างแกนที่ i ของระบบพิกัดใหม่กับแกนที่ k ของระบบพิกัดเก่า $[\cos(x'_i, x_k)]$
 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta x'_i &= x_i'^B - x_i'^A \\ &= \alpha_{ik} x_k^B + x_{0i} - \alpha_{ik} x_k^A - x_{0i} \\ &= \alpha_{ik} (x_k^B - x_k^A) \\ &= \alpha_{ik} \Delta x_k \end{aligned}$$

จากทฤษฎี **Pythagorean** จะได้

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= (\Delta x_1')^2 + (\Delta x_2')^2 + (\Delta x_3')^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{il} \Delta x_k \Delta x_l \\ &= \alpha_{ik} \alpha_{il} \Delta x_k \Delta x_l \end{aligned}$$


จากเงื่อนไขเชิงตั้งฉาก (**Orthogonality Condition**)

$$\alpha_{ik} \alpha_{il} = \delta_{kl}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= \delta_{kl} \Delta x_k \Delta x_l \\ &= \sum_{k=1}^3 (\Delta x_k)^2 \\ &= (\Delta s)^2 \\ \therefore \Delta s' &= \Delta s \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นจริงตามที่กำหนดไว้

 ความหมายของตัวแปร

[HOME] [บทนำ] [เทนเซอร์อันดับศูนย์(สเกลาร์)] [เทนเซอร์อันดับหนึ่ง(เวกเตอร์)] [เทนเซอร์อันดับสอง] [เทนเซอร์ความเค้น] [โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเค้น] [เทนเซอร์ที่บิดรูป] [อัตราของเทนเซอร์บิดรูป] [แนะนำถึง] [ตารางเนื้อหา] [ผู้จัดทำ]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับครูผู้สอนเพื่อใช้ประกอบการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้าที่ 4 เป็นหน้าจอของเทนเซอร์อันดับหนึ่ง

❖ เทนเซอร์อันดับหนึ่ง (เวกเตอร์) ❖

เมื่อเวกเตอร์มีการเปลี่ยน พิกัด ส่วนประกอบ ๓ จำนวน ในระบบพิกัดใหม่ยังคงเป็นเวกเตอร์ตัวเดิม

รูปที่ ๑ แสดงการเปลี่ยนแปลงของส่วนประกอบของเวกเตอร์ ภายใต้การเปลี่ยนแปลงของระบบพิกัด

สมมติ เวกเตอร์ A มีส่วนประกอบ A_1, A_2, A_3 ใน K และ A'_1, A'_2, A'_3 ใน K' แสดงในส่วนประกอบเส้นตรง ส่วนใน A และ A'_k สามารถแสดงได้เหมือน $\Delta x_1, \Delta x'_1$ ในเทนเซอร์อันดับศูนย์เช่นกัน

การแปลงส่วนประกอบจะเป็นไปตามกฎ

$$A'_k = \alpha_{rk} A_r$$

โดยที่ A'_k คือ ส่วนประกอบของเทนเซอร์ในระบบพิกัด K'
 α_{rk} คือ ค่า \cos ของมุมระหว่างแกนที่ r ของระบบพิกัดใหม่ K' กับแกนที่ k ของระบบพิกัดเก่า K
 และ A_k คือ ส่วนประกอบของเทนเซอร์ในระบบพิกัด K

- ❖ ถ้ากำหนดส่วนประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดใด ๆ สามารถใช้กฎนี้หาส่วนประกอบในอีกระบบพิกัดหนึ่งได้
- ❖ ถ้าไม่มีเวกเตอร์ในระบบพิกัดหนึ่งก็จะไม่ปรากฏเวกเตอร์ในระบบพิกัดหนึ่ง
- ❖ จากกฎนี้จะสมมูลกับเวกเตอร์ในลักษณะของส่วนประกอบเส้นตรง จึงสามารถนำกฎนี้ในกรณีเทนเซอร์อันดับอื่น ๆ ได้

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่าอนุพันธ์ของเวกเตอร์เป็นเทนเซอร์อันดับสอง
 พิสูจน์ ให้จุด P ในระบบพิกัด K เป็นฟังก์ชันเวลา

$$x_i = x_i(t)$$

ดังนั้นการขจัดของ P ในช่วงเวลา Δt คือ

$$x_i(t + \Delta t) - x_i(t) \tag{1}$$

เวกเตอร์การขจัดในระบบพิกัดใหม่ K' คือ

$$x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')$$

ให้ $t' = t, \Delta t' = \Delta t$ (เวลาเป็นสเกลาร์ สามารถใช้นิยาม $\Delta s = \Delta s'$ ของเทนเซอร์อันดับศูนย์ได้)
 จาก $\Delta x'_k = \alpha_{rk} \Delta x_r$ (กฎของเทนเซอร์อันดับหนึ่ง) จะได้ว่า

$$x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t') = \alpha_{rk} [x_k(t + \Delta t) - x_k(t)]$$

นั่นคือ การแปลงปริมาตรใน (๑) จะเหมือนกับเวกเตอร์ เช่นเดียวกับอัตราส่วน $\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$

แทนเวกเตอร์ความเร็วโดยเฉลี่ยของ P ในช่วงเวลา t ถึง $t + \Delta t$ และเมื่อสามารถหาลิมิตได้ จะได้

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$$

$$v'_i = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'}$$

$$= \alpha_{rk} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_k(t + \Delta t) - x_k(t)}{\Delta t}$$

$$= \alpha_{rk} v_k$$

เมื่อ v_i แทนเวกเตอร์(ความเร็วขณะใดขณะหนึ่งของจุด P ที่เวลา t)
 โดยที่ α_{rk} เป็นอิสระจาก t ซึ่งได้จากกฎการแปลงเวกเตอร์อีกครั้ง จากวิธีเดียวกันนี้

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}$$

แทนเวกเตอร์(ความเร่งขณะใดขณะหนึ่งของ P ณ เวลา t)
 เมื่อสามารถหาลิมิตได้ จะได้

$$a'_i = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{v'_i(t' + \Delta t') - v'_i(t')}{\Delta t'}$$

$$= \alpha_{rk} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_k(t + \Delta t) - v_k(t)}{\Delta t}$$

$$= \alpha_{rk} a_k$$

ซึ่งเป็นตามกฎการแปลงของเทนเซอร์อันดับหนึ่ง #

ความหมายของตัวแปร

[HOME] [หน้า] [เทนเซอร์อันดับศูนย์(สเกลาร์)] [เทนเซอร์อันดับหนึ่ง(เวกเตอร์)] [เทนเซอร์อันดับสอง] [เทนเซอร์ความเร่ง] [โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเร่ง] [เทนเซอร์ที่ก่อรูป] [สำรวจเทนเซอร์ที่ก่อรูป] [แนะนำเวกเตอร์] [ตารางเนื้อหาเอกสาร] [ผู้จัดทำ]

รูปที่ 3.5 หน้าจอของเทนเซอร์อันดับหนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้าจอกที่ 5 เป็นหน้าจอของเทนเซอร์อันดับสอง

◆ เทนเซอร์อันดับสอง ◆

เทนเซอร์อันดับสองแทนด้วยส่วนประกอบ $3^2=9$ จำนวน ซึ่งเป็นการแปลงภายใต้การเปลี่ยนระบบพิกัดเป็นไปตามกฎ

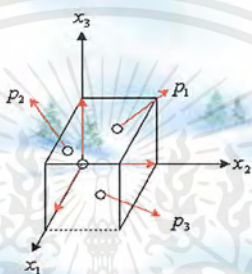
$$A'_{ik} = \alpha_{ri} \alpha_{km} A_{rm} \quad (1)$$

โดยที่ A'_{ik} คือ ส่วนประกอบของเทนเซอร์ในระบบพิกัดใหม่ K'

α_{ri} คือ ค่า \cos ของมุมระหว่างแกนที่ i ของ K' และแกนที่ r ของ K

α_{km} คือ ค่า \cos ของมุมระหว่างแกนที่ k ของ K' และแกนที่ m ของ K

และ A_{rm} คือ ส่วนประกอบของเทนเซอร์ในระบบพิกัดเก่า K



รูปที่ ๑ แสดงส่วนประกอบทั้ง ๙ ของเทนเซอร์อันดับสอง

ในแต่ละระนาบจะมีแรงมากกระทันหันวัตถุโดยมีแรงขนานกับแกน x_2 และแรงที่ขนานกับแกน x_3 และแรงที่กระทำตั้งฉากกับระนาบ โดยที่ส่วนประกอบของระนาบที่ขนานกันถือว่าเป็นส่วนประกอบเดียวกันเพราะว่ามีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน ดังนั้นวัตถุนี้จึงมี ๙ ส่วนประกอบจาก ๓ ระนาบ

- เมื่อให้ส่วนประกอบของเทนเซอร์อันดับสองในระบบพิกัดใดหนึ่ง สามารถใช้สมการ (๑) เพื่อหาส่วนประกอบในระบบพิกัดหนึ่งได้
- ส่วนประกอบของเทนเซอร์อันดับสอง เขียนในรูป Matrix ได้ดังนี้

$$\|A_{i,k}\| = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงยกตัวอย่างเพื่อแสดงกฎการแปลงของเทนเซอร์อันดับสอง

วิธีทำ กำหนดเวกเตอร์ A และ B จะมีผลคูณ ๙ แขน สำหรับส่วนประกอบของ A และ B

$$A_i B_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

จะแปลงเป็นระบบพิกัดใหม่ K' โดยที่ A และ B จะมีส่วนประกอบ A'_i และ B'_k และจากกฎการแปลงของเทนเซอร์อันดับหนึ่ง จะได้

$$A'_i = \alpha_{ri} A_r \quad , \quad B'_k = \alpha_{km} B_m$$

ดังนั้นจะได้

$$A'_i B'_k = \alpha_{ri} \alpha_{km} A_r B_m$$

เปรียบเทียบกับสมการ (๑) จะพบว่า $A_i B_k$ เป็นเทนเซอร์อันดับสอง #

จำนวนของตัวแปร

[HOME] [หน้า] [เทนเซอร์อันดับหนึ่ง(เวกเตอร์)] [เทนเซอร์อันดับหนึ่ง(เวกเตอร์)] [เทนเซอร์อันดับสอง] [เทนเซอร์ความเร่ง] [นิยามของเทนเซอร์ความเร่ง] [เทนเซอร์ที่ฝังรูป] [อัตราของเทนเซอร์ที่ฝังรูป] [แนะนำลิ้ม] [ดาวน์โหลดเอกสาร] [คู่มือ]

รูปที่ 3.6 หน้าจอเทนเซอร์อันดับสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับครูเชิงงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้าจอกที่ 6 เป็นหน้าจอของเทนเซอร์ความเค้น

• เทนเซอร์ความเค้น •

เราจะแสดงให้เห็นว่าความเค้นสามารถอ้างจากเทนเซอร์อันดับสองได้ โดยเรียกว่า เทนเซอร์ความเค้น (**stress tensor**) โดยจะแสดงให้เห็นโดยใช้รูป ทรงสี่หน้าที่มีจุด M เป็นจุดตัดของแกน x_1, x_2, x_3 ดังรูป 1

รูปที่ 1 ความเค้นบนพื้นผิวของทรงสี่หน้า

โดย $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ แสดงพื้นผิวที่ตั้งฉากกับแกน x_1, x_2, x_3
 $d\sigma_n$ แสดงพื้นผิวของทรงสี่หน้าที่ตั้งฉากที่เขียน
 n คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้ออกจาก $d\sigma_n$
 P_1, P_2, P_3 คือความเค้นที่กระทำกับพื้นผิว $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$

แรงที่กระทำบน $d\sigma$ จะมีค่าเท่ากับ $p d\sigma$
 โดย
 แรง $P_1 d\sigma_1, P_2 d\sigma_2, P_3 d\sigma_3$ และ $p_n d\sigma_n$ จะกระทำที่พื้นผิวภายนอกของรูปทรงสี่หน้า
 แรง $P_1 d\sigma_1, P_2 d\sigma_2, P_3 d\sigma_3$ จะกระทำที่พื้นผิวภายในของรูปทรงสี่หน้า
 นั่นคือ

$$P_1 = -P_{-1}, P_2 = -P_{-2}, P_3 = -P_{-3}$$

จะได้ว่า

$$p_n d\sigma_n = p_1 d\sigma_1 + p_2 d\sigma_2 + p_3 d\sigma_3 = \sum_{i=1}^3 p_i d\sigma_i$$

แสดงแรง n ของระนาบ $d\sigma_n$ ไปตามแกน x_1, x_2, x_3
 จะได้ว่า

$$d\sigma_n = d\sigma_n \cos(n, x_i) = n_i d\sigma_n$$

แทน $d\sigma_i$ ที่ได้ลงใน $p_n d\sigma_n = \sum_{i=1}^3 p_i d\sigma_i$
 จะได้

$$P_n = \sum_{i=1}^3 P_i n_i = P_{ik} n_i$$

เมื่อฉาย E ลงบนแกนของระบบ K จะได้

$$P_{ik} = P_{ik} n_i$$

รูปที่ 2 เทนเซอร์ความเค้น ที่ได้จากเวกเตอร์ความเค้น P_1, P_2, P_3 จะกระทำบนพื้นที่ตั้งฉากทั้งสามโดยการฉายเงาของเวกเตอร์ที่ลงบนพิสัย จะได้เทนเซอร์ความเค้น 9 ส่วนประกอบ

เมื่อ $P_{ik} (i, k=1, 2, 3)$ แบ่งออกได้เป็น
 ความเค้นปกติ ($i=k$) คือความเค้นที่กระทำกับพื้นผิวในแนวตั้งฉากกับพื้นผิว (3 ส่วนประกอบ)
 ความเค้นเฉือน ($i \neq k$) คือความเค้นที่กระทำกับพื้นผิวตามแนวแกน x (6 ส่วนประกอบ)

ทฤษฎี จะแสดงว่าเทนเซอร์ความเค้น P_{ik} เป็นเทนเซอร์อันดับสองจริง
 สมมติว่าแกนที่ i ของระบบ พิกัดใหม่ K' มีทิศทางเดียวกับกับ n
 $n = n'_i e'_i$

เงาของ n ที่ฉายลงบนแกนที่ i ของ K คือ

$$n_i = n \cdot e_i = n'_j \cdot e_i = \alpha_{ji}$$

จะได้

$$P_n = P'_k n'_k = P_{ik} n_i = \alpha_{ij} P'_k = \alpha_{ij} \alpha_{km} P'_{km}$$

และเมื่อฉายเงา P'_k ลงบนแกนที่ k ของ K' จะได้

$$P'_k \cdot e'_k = \alpha_{ij} (e'_k \cdot e'_m) P_{im}$$

หรือ

$$P'_{ik} = \alpha_{ij} \alpha_{km} P_{im}$$

ดังนั้น P_{ik} เป็นเทนเซอร์อันดับสองจริง

ความหมายของตัวแปร

[HOME] [บทนำ] [เทนเซอร์อันดับศูนย์(สเกลาร์)] [เทนเซอร์อันดับหนึ่ง(เวกเตอร์)] [เทนเซอร์อันดับสอง] [เทนเซอร์ความเค้น] [โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเค้น] [เทนเซอร์ที่ถือรูป] [วิธีการของเทนเซอร์ที่ถือรูป] [สมการนิวตัน] [ตารางโมเมนต์เฉื่อย] [ผู้จัดทำ]

รูปที่ 3.7 หน้าจอเทนเซอร์ความเค้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้าจอกที่ 7 เป็นหน้าจอของโมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย

★โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย★

โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อยเป็นเทนเซอร์อันดับสอง นั่นคือ

$$I_{ik} = \sum_{j=1}^n m_j (\delta_{ik} x_j^{(j)} x_j^{(j)} - x_j^{(j)} x_k^{(j)})$$

ที่มาของ I_{ik}

กำหนดให้มวลอนุภาค j อนุภาคที่ขึ้นอยู่กับจุดกำเนิดของระบบ พิกัด K จะมีโมเมนต์เชิงมุม L ซึ่ง

$$L = \sum_{j=1}^n m_j (r_j \times v_j)$$

เมื่อ

$$v_j = \omega \times r_j$$

แทน v_j ในสมการข้างต้น จะได้

$$L = \sum_{j=1}^n m_j [r_j \times (\omega \times r_j)] = \sum_{j=1}^n m_j [\omega (r_j \cdot r_j) - r_j (\omega \cdot r_j)]$$

จากนั้นฉาย L ลงบนแกนของ K จะได้

$$L_i = \sum_{j=1}^n m_j (\omega_j x_j^{(j)} x_j^{(j)} - x_j^{(j)} \omega_k x_k^{(j)})$$

ถ้า $\omega_i = \delta_{ik} \omega_k$ (เมื่อ δ_{ik} เป็น **Kronecker delta**) จะได้

$$L_i = \omega_k \sum_{j=1}^n m_j (\delta_{ik} x_j^{(j)} x_j^{(j)} - x_j^{(j)} x_k^{(j)}) = \omega_k I_{ik}$$

ดังนั้น

$$I_{ik} = \sum_{j=1}^n m_j (\delta_{ik} x_j^{(j)} x_j^{(j)} - x_j^{(j)} x_k^{(j)})$$

เมื่อมีโมเมนต์ความเฉื่อย $I_{x_1}, I_{x_2}, I_{x_3}$ และผลคูณของโมเมนต์ความเฉื่อย $I_{x_1 x_2}, I_{x_2 x_3}, I_{x_3 x_1}$ แล้วโมเมนต์เหล่านี้จะมีความสัมพันธ์กับปริมาณ I_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) ดังนี้

$$I_{11} = \sum_{j=1}^n m_j [(x_2^{(j)})^2 + (x_3^{(j)})^2] = I_{x_1}$$

$$I_{22} = \sum_{j=1}^n m_j [(x_1^{(j)})^2 + (x_3^{(j)})^2] = I_{x_2}$$

$$I_{33} = \sum_{j=1}^n m_j [(x_1^{(j)})^2 + (x_2^{(j)})^2] = I_{x_3}$$

$$I_{12} = I_{21} = - \sum_{j=1}^n m_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} = - I_{x_1 x_2}$$

$$I_{13} = I_{31} = - \sum_{j=1}^n m_j x_1^{(j)} x_3^{(j)} = - I_{x_1 x_3}$$

$$I_{23} = I_{32} = - \sum_{j=1}^n m_j x_2^{(j)} x_3^{(j)} = - I_{x_2 x_3}$$

นั่นคือมี 9 ส่วนประกอบ แสดงว่าเป็นเทนเซอร์อันดับสองจริง

พิสูจน์ จะแสดงว่าปริมาณ I_{ik} เป็นเทนเซอร์อันดับสอง เรียกว่า โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย

ถ้า

$$I'_{ik} = \sum_{j=1}^n m_j (\delta'_{ik} x_j^{(j)} x_j^{(j)} - x_j^{(j)} x_k^{(j)})$$

และที่จุดกำเนิดเดียวกันในอีกระบบ พิกัดฉากหนึ่ง K' จะมี

$$x_i^{(j)} x_j^{(j)} = x_i^{(j)} x_j^{(j)}$$

ในขณะที่

$$x_i^{(j)} x_k^{(j)} = \alpha_{ir} \alpha_{ks} x_r^{(j)} x_s^{(j)}$$

เพราะว่า

$$\delta_{ik} = \alpha_{ir} \alpha_{rk} \quad \text{และ} \quad \alpha_{kr} = \alpha_{rk} \delta_{kr}$$

$$\delta'_{ik} = \alpha_{ir} \alpha_{ks}$$

จะได้

$$\delta'_{ik} = \alpha_{ir} \alpha_{ks} \delta_{kr}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$I'_{ik} = \sum_{j=1}^n m_j (\alpha_{ir} \alpha_{ks} \delta_{kr} x_j^{(j)} x_j^{(j)} - \alpha_{ir} \alpha_{ks} x_r^{(j)} x_s^{(j)})$$

$$= \alpha_{ir} \alpha_{ks} \sum_{j=1}^n m_j (\delta_{kr} x_j^{(j)} x_j^{(j)} - x_r^{(j)} x_s^{(j)})$$

$$= \alpha_{ir} \alpha_{ks} I_{rs}$$

เพราะฉะนั้นโมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อยเป็นเทนเซอร์อันดับสองจริง

ความหมายของตัวแปร

รูปที่ 3.8 หน้าจอโมเมนต์ของเทนเซอร์ความเฉื่อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้าจอกี่ 8 เป็นหน้าจอของเทนเซอร์ที่ผิดรูป

★ เทนเซอร์ที่ผิดรูป ★

กำหนดให้จุด A และ B อยู่บนวัตถุยืดหยุ่น
 สมมติว่าการผิดรูปของวัตถุทำให้ A และ B มีตำแหน่งใหม่เป็น A' และ B'
 ให้ A และ B มีเวกเตอร์รัศมีเป็น r และ $r + \Delta r$ ในขณะที่ A' และ B' มีเวกเตอร์รัศมีเป็น $r + u(r)$ และ $r + \Delta r + u(r + \Delta r)$ ดังรูป 1

โดยที่เวกเตอร์ $u(r)$ และ $u(r + \Delta r)$ คือระยะขยับของจุด A และ B ที่ผิดรูป

$OB' = OA' + A'B' = r + \Delta r + u(r + \Delta r)$

รูปที่ 1 การผิดรูปของ elastic body

จากรูปความสัมพันธ์ของตำแหน่งของจุดถูกกำหนดโดย Δr ก่อนการผิดรูป และ $\Delta r' = A'B' = \Delta r + u(r + \Delta r) - u(r)$ หลังการผิดรูป การเปลี่ยนแปลง Δr สามารถคำนวณหาได้จาก $(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2$

สมมติ u เป็นฟังก์ชันเรียบพอ (**sufficiently smooth function**) ของตำแหน่ง ด้วยส่วนประกอบ $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ แล้ว

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k$$

ใช้ทฤษฎีของเทย์เลอร์ และตัดเทอมกำลังสองที่มีค่าน้อย ๆ จะได้ว่า

$$\Delta x'_i \Delta x'_i = (\Delta r')^2, \Delta x_i \Delta x_i = (\Delta r)^2$$

ยกกำลังสอง จะได้

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \Delta x_k \Delta x_l$$

$$= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \Delta x_k \Delta x_l$$

$$= 2u_{ik} \Delta x_k \Delta x_i \quad ; \quad u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

ใช้ u_{ik} เป็นการเปลี่ยนแปลงระหว่างจุด **รูปที่ 2** จุดใดๆของวัตถุยืดหยุ่น เรียก u_{ik} ว่า **เทนเซอร์ผิดรูป (deformation tensor)**

พิสูจน์เอกลักษณ์ของเทนเซอร์ u_{ik} แปลงเป็นระบบพิกัดใหม่ K' จะได้

$$u'_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_l} \frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \right)$$

$$x_i = \alpha_{ij} x'_j + x'_{0i}$$

ใช้อธิบายการแปลงกลับจากระบบพิกัดใหม่ K' ไปเป็นระบบพิกัดเก่า K (x'_{0i} เป็นพิกัดของจุดกำเนิดใหม่ในระบบพิกัดเก่า)

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \alpha_{ji}$$

ใช้กฎลูกโซ่สำหรับหาอนุพันธ์ย่อย จะพบว่า

$$u'_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x'_n} (\alpha_{im} u_m) \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x'_n} (\alpha_{kn} u_n) \frac{\partial x_n}{\partial x'_i} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\alpha_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x'_n} \alpha_{kn} + \alpha_{kn} \frac{\partial u_n}{\partial x'_m} \alpha_{im} + \alpha_{ir} \frac{\partial u_r}{\partial x'_m} \alpha_{in} \frac{\partial u_l}{\partial x'_k} \right]$$

$$= \alpha_{im} \alpha_{kn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x'_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x'_m} + \delta_{rn} \frac{\partial u_r}{\partial x'_m} \frac{\partial u_l}{\partial x'_k} \right)$$

$$= \alpha_{im} \alpha_{kn} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x'_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x'_m} + \frac{\partial u_r}{\partial x'_m} \frac{\partial u_l}{\partial x'_k} \right)$$

$$u'_{ik} = \alpha_{im} \alpha_{kn} u_{mn}$$

ทำให้ u_{ik} เป็นเทนเซอร์อันดับสอง ในทฤษฎีเชิงเส้นของความยืดหยุ่น เทอมของ $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$ ถูกตัดทิ้ง จะได้เป็น

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

ความหมายของหัวแม่

[HOME] [บทนำ] [เทนเซอร์อันดับศูนย์(สเกลาร์)] [เทนเซอร์อันดับหนึ่ง(เวกเตอร์)] [เทนเซอร์อันดับสอง] [เทนเซอร์ของความดัน] [โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเค้น] [เทนเซอร์ที่ผิดรูป] [ตัวของเทนเซอร์ที่ผิดรูป] [แนะนำเพิ่มเติม] [ดาวน์โหลดเนื้อหา] [ผู้จัดทำ]

รูปที่ 3.9 หน้าจอเทนเซอร์ที่ผิดรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้าจที่ 10 เป็นหน้าจอของการส่งแนะนำติชม ผู้ที่เข้ามาเยี่ยมชมสามารถส่งคำเสนอแนะหรือติชมต่างๆ เข้ามาได้ที่หน้าจนี้



รูปที่ 3.11 หน้าจอส่งคำแนะนำติชม

เมื่อ click ไปที่ข้อความ download ในหน้าจด้านซ้ายมือ จะสามารถ download เนื้อหาเทนเซอร์ได้

ดาวน์โหลดเนื้อหา


รูปที่ 3.12 ปุ่ม download



รูปที่ 3.13 หน้าจอการบันทึกเพิ่มข้อมูล tensor.zip

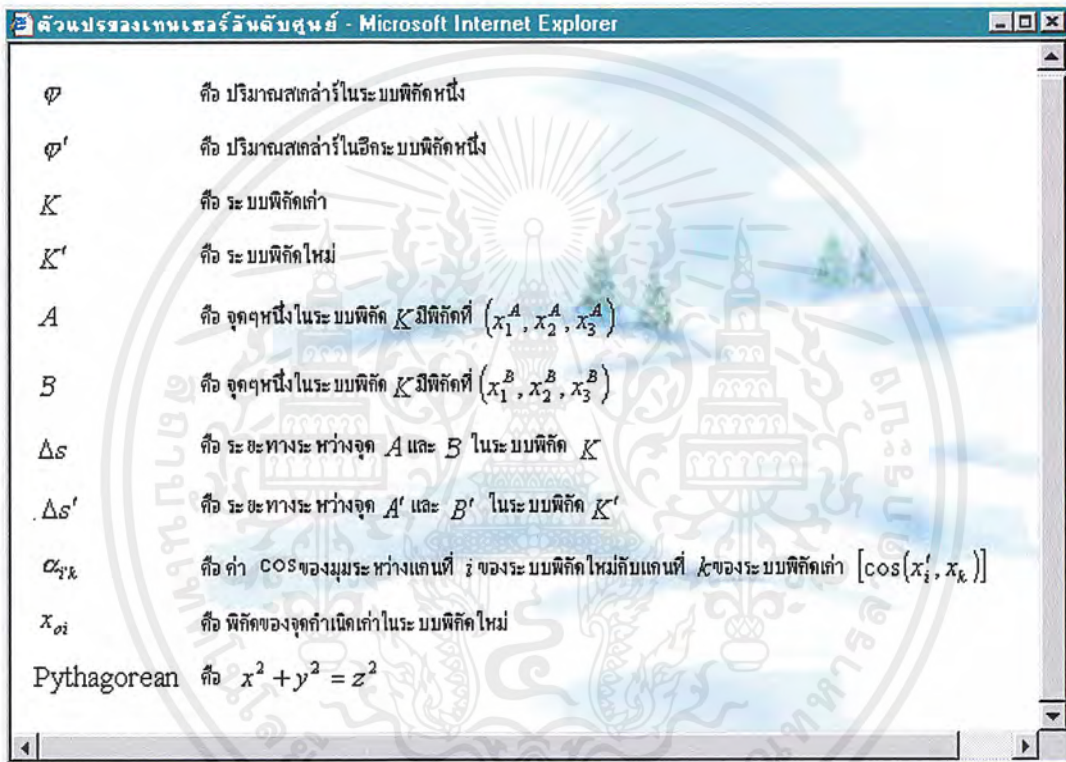
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตั้งแต่หน้าจอที่ 3 ถึงหน้าจอที่ 9 ถ้าผู้ที่เข้ามาอยากทราบว่าตัวแปรตัวใดมีความหมายว่าอย่างไร สามารถทราบได้โดย click ที่ปุ่มด้านล่างของหน้านั้นๆ

 ความหมายของตัวแปร

รูปที่ 3.14 ปุ่มความหมายของตัวแปร

เมื่อ click ปุ่มนี้แล้วจะปรากฏหน้าจอต่อไปนี้



รูปที่ 3.15 หน้าจอความหมายของตัวแปร

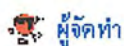
เมื่อต้องการเชื่อมโยงไปยังหัวข้ออื่นจากหน้าจอปัจจุบัน สามารถทำได้โดยการ click หัวข้อเรื่องที่ต้องการที่อยู่ส่วนล่างของหน้านั้นๆ

[\[HOME\]](#) [\[บทนำ\]](#) [\[แทนเซอร์อันดับศูนย์\(สเกลาร์\)\]](#) [\[แทนเซอร์อันดับหนึ่ง\(เวกเตอร์\)\]](#) [\[แทนเซอร์อันดับสอง\]](#) [\[แทนเซอร์ปริมาณถ่วง\]](#) [\[โมเมนต์ของแทนเซอร์ปริมาณถ่วง\]](#) [\[แทนเซอร์ที่ผิดปกติ\]](#) [\[อัตราของแทนเซอร์ผิดปกติ\]](#) [\[แนะนำวิชช\]](#) [\[ทวนใจหลอดเนื้อหา\]](#) [\[ผู้จัดทำ\]](#)

รูปที่ 3.16 หัวข้อหลักของแทนเซอร์ที่สามารถเชื่อมโยงได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าผู้ที่เข้ามาเยี่ยมชมอยากทราบข้อมูลเกี่ยวกับผู้จัดทำสามารถ click ที่ด้านล่างต่อไปนี้



รูปที่ 3.17 ปุ่ม about us

แล้วจะปรากฏหน้าจอดังต่อไปนี้

ABOUT US

ชื่อ กุลธิดา บุญโถม
ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขา คณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะ วิทยาศาสตร์
ศึกษาที่ [สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง](#)
e-mail yes@netsiam.com

ชื่อ ธิติวรรณ ไชยวงษ์
ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขา คณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะ วิทยาศาสตร์
ศึกษาที่ [สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง](#)
e-mail thitiwan@netsiam.com

ชื่อ วิภาดา ภูริภัทรวิฒนกุล
ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขา คณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะ วิทยาศาสตร์
ศึกษาที่ [สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง](#)
e-mail nang22@netsiam.com

รูปที่ 3.18 หน้าจอ about us

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการวิจัย

4.1 ผลที่ได้

ผลที่ได้จากเว็บเพจเทนเซอร์สามารถประเมินผลได้ดังนี้

1. ได้ความรู้เรื่องเทนเซอร์ว่ามีเนื้อหาเป็นอย่างไร
2. ผู้ที่สนใจสามารถเข้ามาอ่านเนื้อหาของเทนเซอร์นี้ ทำให้เรื่องเทนเซอร์แพร่หลายไปสู่ผู้ที่สนใจ
3. รูปภาพที่สามารถเคลื่อนไหวได้ ทำให้เข้าใจเนื้อเรื่องได้ดีกว่าเป็นภาพนิ่ง
4. มีความสะดวกในการใช้งาน สามารถกลับไปหน้าแรกได้จากทุกหน้าของเว็บเพจ
5. มีการนับจำนวนผู้ที่เข้ามาเยี่ยมชมเว็บเพจเทนเซอร์นี้
6. ผู้ที่เข้ามาเยี่ยมชมเว็บเพจนี้สามารถส่งคำแนะนำติชมมายังผู้จัดทำได้โดยทางGuestBook
7. ผู้ที่สนใจเนื้อหาของเทนเซอร์สามารถ Download จากเว็บเพจนี้ได้อีกด้วย

บทที่ 5

สรุปผลและเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

การศึกษาเทนเซอร์ผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต ได้จัดทำเป็นเว็บเพจที่ใช้ศึกษาเนื้อหาของเทนเซอร์ เช่น เทนเซอร์อันดับศูนย์, เทนเซอร์อันดับหนึ่ง, เทนเซอร์อันดับสอง, เทนเซอร์ความเค้น, โมเมนต์ของเทนเซอร์ความเค้น, เทนเซอร์ที่คิดรูป, อัตราของเทนเซอร์ที่คิดรูป นอกจากนี้ยังมีคำอธิบายตัวแปรต่างๆ ของแต่ละหัวข้อ และยังมีภาพเคลื่อนไหวเพื่อใช้ประกอบการศึกษา ซึ่งแตกต่างจากเนื้อหาในรูปแบบของหนังสือทั่วไป ในปัญหาพิเศษฉบับนี้ คณะผู้จัดทำได้พยายามจัดทำให้ผู้สนใจในเรื่องเทนเซอร์สามารถใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการทำความเข้าใจ และเป็นแนวทางในการค้นคว้าที่ซับซ้อนต่อไป

5.2 ข้อจำกัด

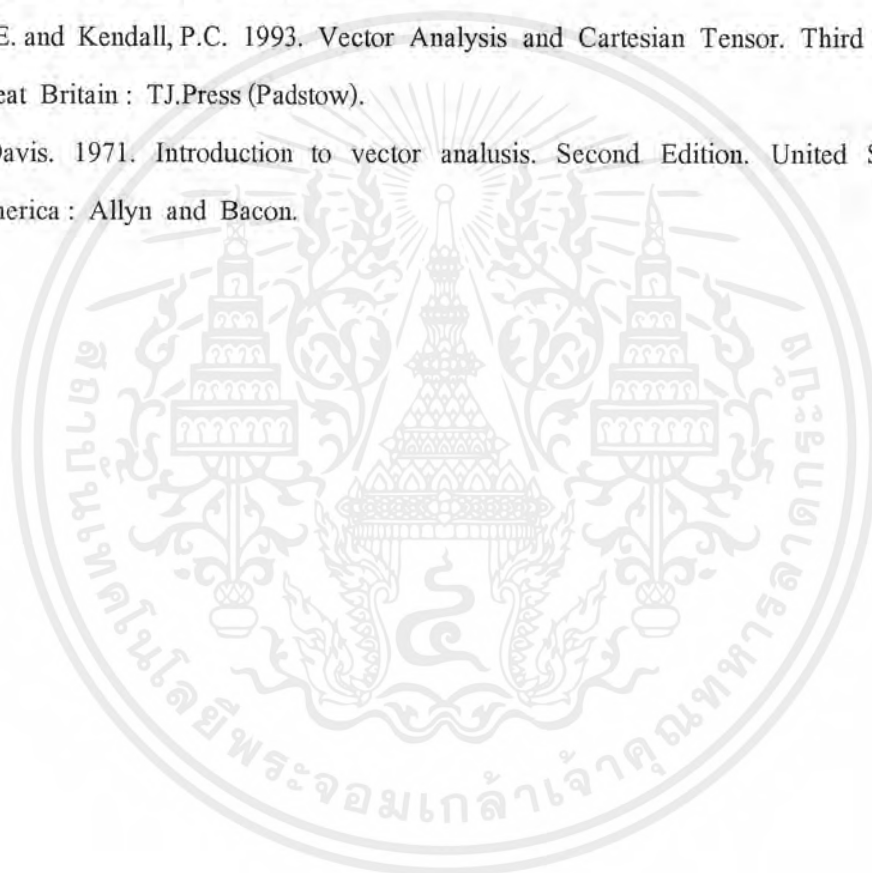
1. เนื้อหาที่มีอยู่เป็นเนื้อหาเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น
2. ในที่นี้ยังไม่มีแบบฝึกหัด ซึ่งทำให้เข้าใจเนื้อหาได้ไม่ดีเท่าที่ควร
3. เว็บเพจนี้แสดงผลใน Netscape Navigator ยังไม่ดีเท่าที่ควร

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. เนื่องจากเนื้อหาของเทนเซอร์ยังมีอีกมากมาย แต่ที่อยู่ในเว็บเพจนี้เป็นเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น จึงเหมาะสมที่จะพัฒนาต่อไป
2. รูปแบบการทำปัญหาพิเศษนี้เป็นรูปแบบของ CAI แต่ยังไม่มีการฝึกหัดในการฝึกฝน จึงควรมีการเพิ่มเติมต่อไป
3. เว็บเพจนี้สามารถแสดงผลได้ดีใน Internet Explorer แต่แสดงผลใน Netscape ไม่ค่อยดี เพราะ Internet Explorer และ Netscape Navigator ถูกพัฒนามาจากต่างบริษัทกัน แต่คณะผู้จัดทำได้อ้างอิงรูปแบบของคำสั่ง HTML จาก Internet Explorer บางคำสั่งจึงแสดงผลต่างกัน ดังนั้นจึงควรมีการพัฒนาต่อไป

บรรณานุกรม

- จิตเกษม พัฒนาศิริ. 2539. เริ่มสร้างโฮมเพจด้วย HTML. กรุงเทพฯ : วิตต์กรุ๊ป.
- จินดา อาจารย์ชะกุล. 2539. ทฤษฎี และตัวอย่างโจทย์การวิเคราะห์เวกเตอร์. กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล อินเทอร์เน็ตเนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพรส์.
- ศุปรานี ชีร์ไกรศรี. 2542. HTML4 Visual Guide. กรุงเทพฯ : โปรวิชัน.
- Borisenko, A.I. and Tarapov, I.E. 1979. Vector and Tensor Analysis with Application. United State : America Dover Publications.
- Bourne, D.E. and Kendall, P.C. 1993. Vector Analysis and Cartesian Tensor. Third Edition. Great Britain : TJ.Press (Padstow).
- Harry, F. Davis. 1971. Introduction to vector analysis. Second Edition. United State of America : Allyn and Bacon.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้