

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับทำนายการนำความร้อนแบบชั่วขณะในครีป  
Computer Program for Prediction of Transient Conduction in Fin



โดย

นายคงศักดิ์ พวงทรัพย์

นายพรทิวา อาชีวะ

นายศุภเกียรติ ไชยภูมิ

อาจารย์ที่ปรึกษา

รศ.ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต  
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ปีการศึกษา 2544

ป.น.  
ด.ช. ๒๖

เลขที่.....  
เลขทะเบียน 45986  
วัน, เดือน, ปี 27 ก.พ. 2546

b.....  
i.....

ปริญญาโทปีการศึกษา 2544

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับทำนายการนำความร้อนแบบชั่วขณะในครีป

Computer Program for Prediction of Transient Conduction in Fin

ผู้จัดทำ

1. นาย คงศักดิ์ พวงทรัพย์ รหัสประจำตัว 42015335
2. นาย พรทิวา อาชีวะ รหัสประจำตัว 42015359
3. นาย ศุภเกียรติ ไชยภูมิ รหัสประจำตัว 42015369



*M-d*

อาจารย์ที่ปรึกษา

(รศ.ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์)

## โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับทำนายการนำความร้อนแบบชั่วขณะในครีป

นายคงศักดิ์ พวงทรัพย์ 42015335

นายพรทิวา อาชีวะ 42015359

นายศุภเกียรติ ไชยภูมิ 42015369

รศ.ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์ อาจารย์ที่ปรึกษา

ปีการศึกษา 2544

### บทคัดย่อ

บทความนี้ เป็นการสร้างแบบจำลองของการกระจายของสนามอุณหภูมิภายในวัสดุในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนทั้งในระบบ 1 มิติ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยอาศัยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่เรียกว่าวิธีการปริมาตรสี่เหลี่ยม มาประยุกต์ใช้ในระบบที่พิจารณา ภายใต้สมมติฐานของการวิเคราะห์คือ ผิวขอบเขตมีอุณหภูมิคงที่ นอกจากนั้นยังมีการนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขไปเปรียบเทียบกับคำตอบที่ใช้การคำนวณจากโปรแกรม ANSYS ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ใช้กันทั่วไป ในสถานะขอบเขตที่เหมือนกัน ซึ่งปรากฏว่ามีความสอดคล้องใกล้เคียงกันเป็นอย่างดี

# Computer Program for Prediction of Transient Conduction in Fin

Kongsak Phuangsub

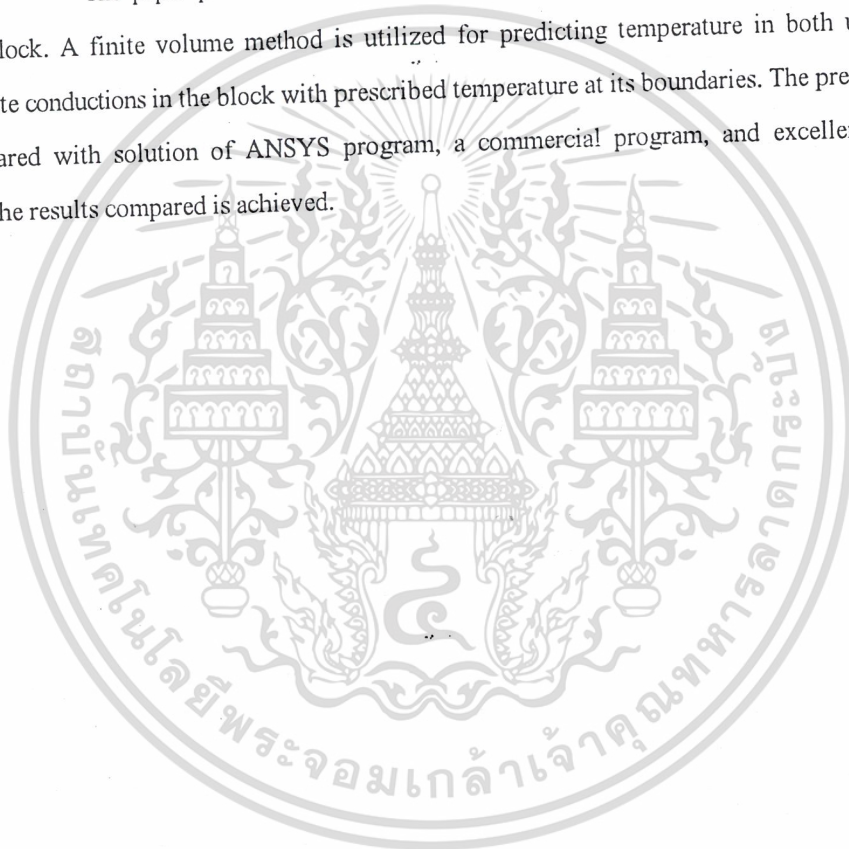
Pornitiwa Archeewa

Suppaheart Chaiyapoom

Assoc. Prof. Dr. Pongjet Promvonge Advisor

## ABSTRACT

The paper presents the simulation of temperature distributions in a 3-dimensional material block. A finite volume method is utilized for predicting temperature in both unsteady and steady-state conductions in the block with prescribed temperature at its boundaries. The predicted results are compared with solution of ANSYS program, a commercial program, and excellent agreement between the results compared is achieved.



## กิตติกรรมประกาศ

ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาเกี่ยวกับข้อมูลที่เกี่ยวข้องและจำเป็นต้องใช้ แหล่งข้อมูลเบื้องต้นต่าง ๆ รวมถึงแนวความคิดที่ใช้ในการนำไปประยุกต์ใช้งานของการศึกษาการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับทำนายนายการนำความร้อนแบบชั่วขณะในครีบจากรศ.ดร.พงษ์เจต พรหมวงศ์ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมปริญญาานิพนธ์ โดยทางผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์จากท่าน และกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณพี่ปริญญาโทและเพื่อนๆ นักศึกษาทุกคนที่ช่วยเหลือ และให้คำแนะนำต่างๆ พร้อมทั้งช่วยดำเนิน ดักเตือนถึงข้อผิดพลาด จนนำไปสู่ความสำเร็จสมบูรณ์ยิ่งขึ้น และยังให้กำลังใจต่อผู้วิจัย ทำให้การทำงานสนุก ไม่เครียดมาก จนปริญญาานิพนธ์นี้สำเร็จลงได้

สุดท้ายขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล ที่ได้ให้การสนับสนุนในการทำปริญญาานิพนธ์ครั้งนี้

คงศักดิ์ พวงทรัพย์  
พรทิวา อาชีวะ  
ศุภเกียรติ ไชยภูมิ

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่ออังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	V
สารบัญภาพ.....	VI
บทที่ 1 บทนำ.....	1
บทที่ 2 ทฤษฎีพื้นฐาน.....	2
2.1 สมการพื้นฐาน.....	2
2.2 ตัวอย่างการคำนวณ โดยวิธีทาง analytical.....	6
บทที่ 3 การประยุกต์ทฤษฎีพื้นฐาน.....	21
3.1 หลักการทั่วไปสำหรับวิธีผลต่างสืบเนื่องของรูปแบบการนำความร้อน.....	21
3.2 วิธีการทำ discretization ของสมการการนำความร้อน.....	23
3.3 วิธีการแก้ปัญหาสมการการนำความร้อนที่ discretize แล้ว.....	31
3.4 การแก้ Matrix โดยวิธี TDMA (Tri-diagonal Matrix Algorithm).....	38
บทที่ 4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์และการคำนวณ.....	41
4.1 Differential Equation ของ Heat Conduction ในกรณี 2 มิติ.....	41
4.2 สมการผลต่างสืบเนื่อง (Finite-Difference Equation).....	42
4.3 การหาค่าตอบของสมการ Finite Difference.....	48
4.4 อธิบายลักษณะของโปรแกรม.....	54
บทที่ 5 ผลการทดลองและการวิเคราะห์.....	61
5.1 ลักษณะของภาพปัญหา.....	61
5.2 ลักษณะการกระจายอุณหภูมิ 3 มิติ (11 x 11 x 11) แบบไม่สม่ำเสมอ ไม่มีการผลิตความร้อน.....	61
บทที่ 6 สรุปผลและข้อเสนอแนะ.....	69
ภาคผนวก การทำงานของ Subroutine ต่างๆ ในโปรแกรม.....	71
บรรณานุกรม.....	80

## สารบัญตาราง

หน้า

4.1 การกำหนดค่า $f$ ในสมการ (4.2) ที่ลักษณะขอบเขตแบบต่างๆ.....	41
4.2 ค่า Linearised-Source Coefficients.....	47



## สารบัญภาพ

รูปที่	หน้า
2.1 แสดงอัตราการใช้พลังงานในปริมาตรควบคุม .....	2
2.2 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน 1 มิติ .....	7
2.3 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน 2 มิติ .....	8
2.4 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน 3 มิติ .....	14
3.1 (a) ตารางกริด (b) กลุ่มของจุดกริดล้อมรอบจุด (i,j) .....	23
3.2 รูปแบบของกลุ่มกริดในปริมาตรควบคุม .....	24
3.3 การ discretize ที่ขอบเขตผิว a) ด้านล่าง (b) ด้านบน (c) ด้านซ้าย และ (d) ด้านซ้าย .....	28
3.4 พิกัดจุด (i,j) และบริเวณล้อมรอบ .....	36
3.5 ลักษณะของเส้นกริด .....	37
4.1 ลักษณะกริดทั่วไปในการคำนวณและปริมาตรควบคุมที่พิจารณา .....	42
4.2 ลักษณะของจุดกริดทั่วไปและบริเวณล้อมรอบ .....	43
4.3 ลักษณะสภาวะขอบเขตที่มีของไหลไหลผ่าน .....	46
4.4 แผนภูมิการไหลของโปรแกรมการคำนวณปัญหาด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข .....	51
4.5 แผนภูมิการไหลของการคำนวณด้วยโปรแกรม TEACH-C .....	54
4.6 การกำหนดค่าตัวแปรของกริด .....	56
4.7 การแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรม TEACH-C พื้นฐาน .....	58
5.1 ลักษณะภาพของปัญหา .....	61
5.2 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 0 .....	61
5.3 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 30 .....	62
5.4 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 60 .....	62
5.5 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 90 .....	62
5.6 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 120 .....	63
5.7 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 150 .....	63
5.8 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 180 .....	63
5.9 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 210 .....	64
5.10 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 240 .....	64
5.11 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 270 .....	64
5.12 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 300 .....	65
5.13 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 330 .....	65
5.14 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 360 .....	65
5.15 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 390 .....	66

## สารบัญญภาพ ( ต่อ )

รูปที่	หน้า
5.16 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 420 .....	66
5.17 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 450 .....	66
5.18 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 480 .....	67
5.19 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 510 .....	67
5.20 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ Steady .....	67
6.1 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกริดกับจำนวนการคำนวณ.....	69
6.2 แสดงค่าเปรียบเทียบของอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางระหว่าง Fortran กับ ANSYS .....	70



# บทที่ 1

## บทนำ

เนื่องจากทุกวันนี้คอมพิวเตอร์ได้มีประสิทธิภาพรวมไปถึงการที่มีความเร็วที่เพิ่มขึ้นอยู่ทุกขณะ ประกอบกับมีราคาที่ถูกลง ทำให้เกิดการใช้คอมพิวเตอร์อย่างแพร่หลายในทุกสาขาอาชีพ หากได้มีการนำข้อดีของคอมพิวเตอร์มาใช้ ซึ่งก็คือความเร็ว ความแม่นยำ และการที่ไม่รู้จักคำว่าเหนื่อย ฯลฯ มาใช้จะทำให้นำไปสู่การพัฒนางานต่างๆ ได้รวดเร็ว

การศึกษาการกระจายความร้อนในวัตถุก็เป็นตัวอย่างหนึ่งที่สามารถนำคอมพิวเตอร์มาใช้แก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี ซึ่งหากใช้วิธีการหาที่เรียกว่า Analytical Method ก็จะทำให้มีความยุ่งยากในด้านการแก้สมการทางคณิตศาสตร์ การที่จะแก้ผลหาคำตอบได้นั้นบางครั้งจำเป็นต้องมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ชั้นสูง ทำให้เป็นอุปสรรคในการที่จะได้มาซึ่งคำตอบ และบางครั้งสมการคณิตศาสตร์ที่ได้ (ผลเฉลย) ก็ไม่ได้ผลที่แม่นยำนัก ซึ่งเกิดจากข้อจำกัดทางคณิตศาสตร์ จะเห็นได้ว่าหากได้มีการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ ประกอบกับการหาคำตอบโดย Numerical Method และการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นจะช่วยลดและตัดทอนปัญหาความยุ่งยากต่างๆ ลงและประหยัดค่าใช้จ่าย และเวลาลงไปได้เป็นอย่างมาก

วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1. เพื่อศึกษาการกระจายของอุณหภูมิในแท่งสี่เหลี่ยมสั้น โดยอาศัยวิธีเชิงตัวเลข
2. เพื่อศึกษาการเขียนโปรแกรมสำหรับการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม รวมถึงสร้างความเข้าใจในเชิงวิชาการ
3. จำลองเหตุการณ์ซึ่งไม่สามารถมองเห็นได้จริง โดยคอมพิวเตอร์กราฟิก

ขอบเขตของงานวิจัย

1. ทำการปรับปรุงโปรแกรมให้สามารถแก้ปัญหาในกรณีที่มีอุณหภูมิที่ผิวคงที่จากเดิมในระบบพิกัดฉาก 2 มิติให้สามารถคิดในระบบ 3 มิติได้
2. ทำการปรับปรุงโปรแกรมให้สามารถแก้ปัญหาในกรณีการนำความร้อนแบบชั่วขณะ
3. นำผลการคำนวณมาวิเคราะห์เปรียบเทียบความถูกต้อง

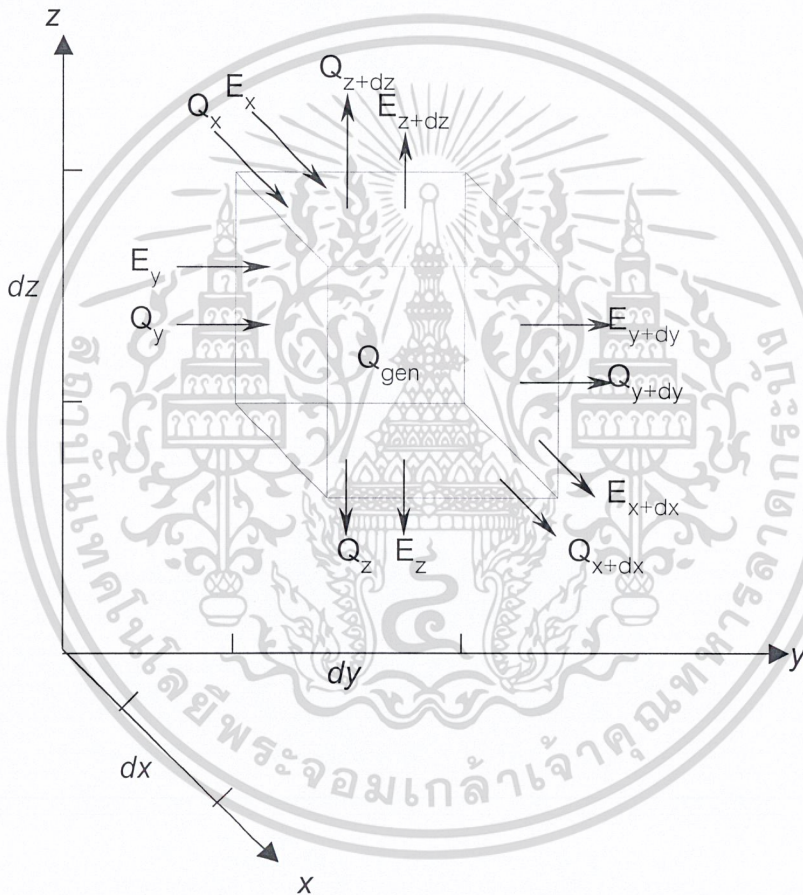
## บทที่ 2 ทฤษฎีพื้นฐาน

### 2.1 สมการพื้นฐาน

สมการพลังงาน(Energy Balance)

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานที่บรรจุในปริมาตรควบคุม

$$= \text{อัตราพลังงานที่ไหลเข้า} - \text{อัตราพลังงานที่ไหลออก} + \text{อัตราพลังงานที่ผลิตขึ้นมา}$$



รูปที่ 2.1 แสดงอัตราการไหลของพลังงานในปริมาตรควบคุม

จากรูปที่ 2.1 ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน สมการพลังงานจะได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}(E) = \sum_{i=x,y,z} \dot{Q}_i - \sum_{i=x+dx, y+dy, z+dz} \dot{Q}_i + \sum_{i=x,y,z} \dot{E}_i - \sum_{i=x+dx, y+dy, z+dz} \dot{E}_i + \dot{Q}_{gen} \quad (2.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการ (2.1) สามารถขยายได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(E) = & \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} + \dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+dy} + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+dz} \\ & + \dot{E}_x - \dot{E}_{x+dx} + \dot{E}_y - \dot{E}_{y+dy} + \dot{E}_z - \dot{E}_{z+dz} + \dot{Q}_{gen} \end{aligned} \quad (2.2)$$

จะเห็นได้ว่า การถ่ายเทพลังงานความร้อนที่จุดใดๆ จะมีความสอดคล้องกับจุดใกล้เคียงจากการใช้ Taylor Series โดยการใช้อย่างน้อย 2 เทอมแรก จะประมาณความถูกต้องเป็น first order ได้ว่า

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx + \dots \quad (2.3)$$

$$\dot{Q}_{y+dy} = \dot{Q}_y + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy + \dots \quad (2.4)$$

$$\dot{Q}_{z+dz} = \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz + \dots \quad (2.5)$$

$$\dot{E}_{x+dx} = \dot{E}_x + \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} dx + \dots \quad (2.6)$$

$$\dot{E}_{y+dy} = \dot{E}_y + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} dy + \dots \quad (2.7)$$

$$\dot{E}_{z+dz} = \dot{E}_z + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} dz + \dots \quad (2.8)$$

ทำการรวมสมการ (2.3) – (2.8) จะได้ว่า

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} dz + \dot{Q}_{gen} \quad (2.9)$$

สมการ (2.9) ในเทอมของค่า Q (การถ่ายเทความร้อน) สามารถหาได้โดยอุณหภูมิจะเกี่ยวข้องกับ Fourier's law ซึ่งได้ว่า

$$\dot{Q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \quad (2.10)$$

$$\dot{Q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} dx dz \quad (2.11)$$

$$\dot{Q}_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} dx dy \quad (2.12)$$

และในเทอมของค่า E (พลังงาน) จะอยู่ในรูป

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial x} dx = \frac{\partial E}{\partial x} U \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial y} dy = \frac{\partial E}{\partial y} V \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial z} dz = \frac{\partial E}{\partial z} W \quad (2.15)$$

การอธิบายพลังงานของปริมาตรควบคุมในเทอมของพลังงานภายในต่อหน่วยมวล (Specific Internal Energy)

$$e = \frac{E}{\rho \, dx \, dy \, dz} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = dx \, dy \, dz \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \quad (2.17)$$

รวมสมการ (2.9) – (2.17) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) = & \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - U \frac{\partial(\rho e)}{\partial x} - V \frac{\partial(\rho e)}{\partial y} - W \frac{\partial(\rho e)}{\partial z} + \dot{Q}_{\text{gen}}''' \end{aligned} \quad (2.18)$$

โดยที่ค่า  $\dot{Q}_{\text{gen}}'''$  เป็นค่า อัตราการผลิตความร้อนภายในต่อหน่วยปริมาตร ( $\text{W/m}^3$ ) และได้เปรียบเทียบกับพลังงานภายในไปเป็นค่า เอนทาลปี จากสมการเทอร์โมไดนามิกส์ คือ

$$h = e + \frac{P}{\rho} \quad (2.19)$$

โดย P คือความดัน แทนค่าสมการ (2.19) ลงในสมการ (2.20) จัดให้อยู่ในรูปพีชคณิต และเวกเตอร์จะได้เป็น

$$h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) + \rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h \right) - \frac{\partial P}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla P = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{Q}_{\text{gen}}''' \quad (2.20)$$

ซึ่งสามารถใช้ได้ในระบบพิกัดอื่นๆ ได้ด้วยนอกจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และจากสมการของความต่อเนื่อง (Continuity Equation) คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.21)$$

ในกรณีการถ่ายเทความร้อน ความเร็วของวัตถุประมาณเป็นค่าคงที่ (ให้เป็นจุดสังเกต) จากสมการ (2.21) เป็นผลให้ในวงเล็บเทอมแรกทางซ้ายมือของสมการ (2.20) มีค่าเป็นศูนย์ จะลดรูปได้เป็น

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h \right) - \frac{\partial P}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla P = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}_{\text{gen}}''' \quad (2.22)$$

ต่อไปอธิบายถึงค่าเอนทัลปีในเทอมอุณหภูมิต่อ

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dP \quad (2.23)$$

ซึ่งค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเอนโทรปีคือ

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T dP \quad (2.24)$$

จะแสดงได้ง่ายจากความสัมพันธ์ของเทอร์โมไดนามิกส์

$$\left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T = -\frac{\beta}{\rho} \quad (2.25)$$

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \frac{c_p}{T} \quad (2.26)$$

ซึ่ง  $c_p$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่,  $\beta$  คือ Coefficient of Thermal Expansion นิยามได้ดังนี้

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (2.27)$$

รวมสมการ (2.23) – (2.26) จะได้

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dP \quad (2.28)$$

แทนค่าสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.22) และจัดรูปพีชคณิตจะได้เป็น  
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) - \beta T \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{Q}_{\text{gen}}''' \quad (2.29)$$

สมมติให้ไม่คิดค่า Compressibility Effect คือให้

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (2.30)$$

$$\nabla P = 0 \quad (2.31)$$

ดังนั้นแล้ว ( $\rho =$  ค่าคงที่,  $\beta = 0$ ,  $C_p = c$ ) สมการ (2.29) จะได้เป็น

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{Q}_{\text{gen}}''' \quad (2.32)$$

ถ้าสมมติให้ค่าการนำความร้อนภายใน ( $k$ ) เป็นค่าคงที่แล้วสมการการนำความร้อน จะเป็น

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \dot{Q}_{\text{gen}}''' \quad (2.33)$$

ในกรณีศึกษาการนำความร้อนของวัตถุที่ไม่มีการเคลื่อนที่ ( $\mathbf{v} = 0$ ) ในกรณีนี้ที่สมการ (2.32) และสมการ (2.33) จะจัดให้อยู่ในรูปต่างๆ ได้คือ

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{Q}_{\text{gen}}''' \quad (2.34)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \dot{Q}_{\text{gen}}''' \quad (2.35)$$

ตามลำดับ สมการนี้นำไปใช้ได้ในทุกระบบพิกัดทั้งใน พิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลม

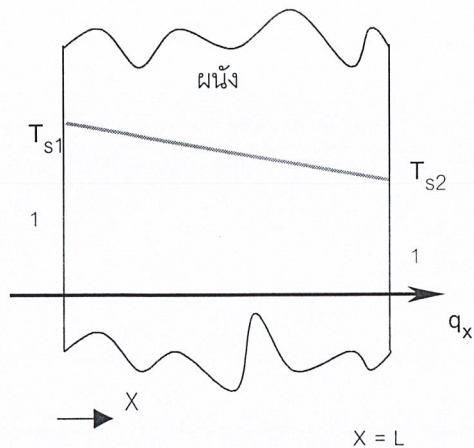
## 2.2 ตัวอย่างการคำนวณ

### 2.2.1 ในกรณีปัญหา 1 มิติ

โดยมีเงื่อนไข

- ผิวขอบอุณหภูมิคงที่
- ไม่มีการผลิตความร้อนภายใน
- ค่าสภาพการนำความร้อนคงที่
- ที่สภาวะคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.2 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน 1 มิติ

จะได้สมการ Governing สำหรับระบบพิกัด คาร์ทีเซียน เป็นดังนี้

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.36)$$

โดยเงื่อนไขที่ขอบตามรูปที่ 2.2 จะได้ว่า

$$T(0) = T_{s1} \quad (2.37)$$

$$T(L) = T_{s2} \quad (2.38)$$

ทำการอินทิเกรต 2 ครั้ง ได้คำตอบทั่วไปเป็น

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (2.39)$$

แทนสมการ (2.37) และ (2.38) ลงในสมการ (2.39) จะได้

$$C_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} \quad (2.40)$$

$$C_2 = T_{s2} \quad (2.41)$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของการกระจายอุณหภูมิในผนัง คือ

$$T(x) = \left( T_{s2} - T_{s1} \right) \frac{x}{L} + T_{s2} \quad (2.42)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยใช้กฎของ Fourier เพื่อหาค่าคำตอบของการส่งผ่านความร้อน นั่นคือ

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = \frac{kA}{L} (T_{s1} - T_{s2}) \quad (2.43)$$

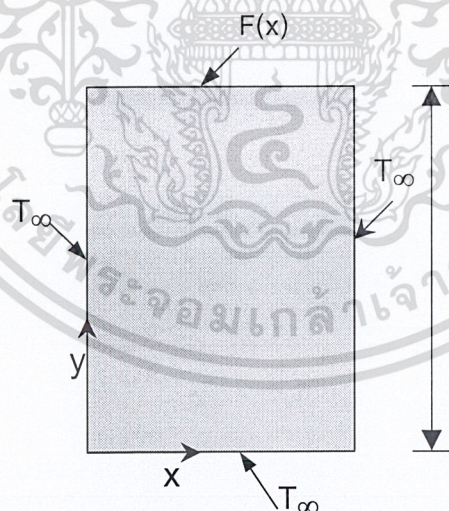
โดยที่ A เป็นพื้นที่ของผนังซึ่งตั้งฉากกับทิศทางการถ่ายเทความร้อน สังเกตเห็นได้ว่า ค่าฟลักซ์ความร้อนเป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับระยะ x ซึ่งเป็นลักษณะที่ตรงกับสมการ (2.36) ซึ่งหมายความว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง x

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = \frac{k}{L} (T_{s1} - T_{s2}) \quad (2.44)$$

## 2.2.2 ในกรณีปัญหา 2 มิติแบบสภาวะคงที่

โดยมีเงื่อนไข

- ผิวขอบอุณหภูมิคงที่
- ไม่มีการผลิตความร้อนภายใน
- ค่าสภาพการนำความร้อนคงที่
- ที่สภาวะคงที่



รูปที่ 2.3 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน 2 มิติ

จะได้สมการ Governing สำหรับระบบพิกัด คาร์ทีเซียน เป็นดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.45)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยเงื่อนไขที่ขอบตามรูปที่ 2.3 จะได้ว่า

$$\text{ที่ } x=0 \quad T=T_\infty \quad (2.46)$$

$$\text{ที่ } x=b \quad T=T_\infty \quad (2.47)$$

$$\text{ที่ } y=0 \quad T=T_\infty \quad (2.48)$$

$$\text{ที่ } y=H \quad T=f(x) \quad (2.49)$$

ในการคำนวณจะใช้วิธี Separation of Variable ซึ่งต้องการสมการ Governing ที่เป็น Homogeneous และต้องการค่า Boundary อย่างน้อย 3 ใน 4 ที่เป็น Homogeneous (กล่าวคือค่า boundary ที่มีค่าเป็น 0) สมการ Governing เป็น Homogeneous แล้ว แต่ไม่มี Boundary ใดที่เป็น Homogeneous ซึ่งจะสามารถทำให้อยู่ในรูป Homogeneous ได้ โดยการเปลี่ยนตัวแปร จึงจะทำให้สมการ (2.46) – (2.48) เป็นสมการ Homogeneous ซึ่งทำได้โดยแปลงให้เป็นค่าตัวแปรตัวใหม่ คือ

$$\theta = T - T_\infty \quad (2.50)$$

ซึ่งสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (2.51)$$

$$x=0 : \theta=0 \quad (2.52)$$

$$x=b : \theta=0 \quad (2.53)$$

$$y=0 : \theta=0 \quad (2.54)$$

$$x=H : \theta = f(x) - T_\infty = \varphi(x) \quad (2.55)$$

เป็นความจริงที่ว่า หลังจากเปลี่ยนสมการ Governing และ Boundary แล้ว สมการ (2.51) – (2.55) จะได้เป็นสมการ Homogeneous แล้ว จึงจะทำการใช้วิธี Separation of Variable ได้ ขั้นตอนการคำนวณ สมมติให้ค่า  $\theta$  เป็นค่าผลคูณของ 2 ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้อง ซึ่งแต่ละค่าจะเป็นฟังก์ชันเพียงค่าเดียว คือ

$$\theta = X(x)Y(y) \quad (2.56)$$

แทนค่าสมการ (2.56) ลงในสมการ (2.51) และหารทั้งสองข้างด้วย  $X(x)Y(y)$  จะได้

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\alpha^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{\alpha^2} = 0 \quad (2.57)$$

สมการ (2.57) แสดงให้เห็นว่าจะเกี่ยวข้องกับค่าตัวแปร ( $x$  หรือ  $y$ ) ในเทอมแรก เป็นฟังก์ชันของ  $x$  เพียงอย่างเดียวในเทอมที่ 2 เป็นฟังก์ชันของ  $y$  เพียงอย่างเดียว แต่ละเทอมต้องมีค่าเท่ากับค่าคงที่แทนค่าได้ด้วยค่า  $-\alpha^2$  และ  $\alpha^2$  ตามลำดับ ซึ่งมีค่าที่ระบุได้ชัดเจน ดังนั้นจะได้ 2 Ordinary Differential Equations สำหรับค่า  $X$  และ  $Y$  คือ

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \quad (2.58)$$

$$Y'' - \alpha^2 Y = 0 \quad (2.59)$$

ใช้พื้นฐานแนวคิดของ Orthogonality และ Orthogonal Function [2] แก่หาค่าคำตอบได้คือ

$$X = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) \quad (2.60)$$

$$Y = D_1 \sinh(\alpha y) + D_2 \cosh(\alpha y) \quad (2.61)$$

แทนค่าสมการ (2.60)–(2.61) ลงในสมการ (2.56) จะได้เป็น

$$\theta = [C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x)] [D_1 \sinh(\alpha y) + D_2 \cosh(\alpha y)] \quad (2.62)$$

จากการแทนค่า โดยใช้เงื่อนไขที่ขอบ (Boundary) จากสมการ (2.52) และสมการ (2.54) จะได้ค่า  $C_2 = 0$  และ  $D_1 = 0$  ตามลำดับ จากนั้นทำการรวมค่าคงที่ที่เหลืออยู่เป็นเพียงค่าตัวแปรเดียว ( $C_1 D_2 = C$ ) จะได้ว่า

$$\theta = C \sin(\alpha x) \sinh(\alpha y) \quad (2.63)$$

แล้วทำการใช้เงื่อนไขที่ขอบ (Boundary) สมการ (2.53) พิจารณาค่า

$$\sin(\alpha b) = 0 \quad (2.64)$$

นั่นคือจะได้ว่า

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.65)$$

แต่ละค่าของ  $\alpha$  จากสมการ (2.65) เกิด Linearly Independent Solution สำหรับอุณหภูมิในสมการ (2.63) ค่าคำตอบทั่วไปของสมการจะได้เป็น

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.66)$$

หลังจากนั้นใช้เงื่อนไขที่ขอบ (Boundary) ที่เหลือ คือ สมการ (2.55) โดยใช้คุณสมบัติ Orthogonality Property ของ ฟังก์ชัน sine [2] จะได้ค่าสุดท้ายของ  $C_n$  เป็น

$$C_n = \frac{2 \int_0^b \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx}{b \sinh\left(\frac{n\pi H}{b}\right)} \quad (2.67)$$

แทนค่า  $C_n$  ในสมการ (2.66) จะได้เป็น

$$\theta = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^b (f(x) - T_{\infty}) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.68)$$

นั่นคือ สามารถอธิบายอยู่ในรูปอุณหภูมิได้เป็น

$$T = T_{\infty} + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^b (f(x) - T_{\infty}) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.69)$$

ใช้กฎของ Fourier หาค่าฟลักซ์ความร้อนที่ผ่านฐานของครีบที่พิจารณา คือ

$$\begin{aligned} \dot{q}''(x) &= -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=H} \\ &= -k \frac{2\pi}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^b (f(x) - T_{\infty}) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{b}\right)} n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cosh\left(\frac{n\pi H}{b}\right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

ถ้าในกรณี อุณหภูมิที่ฐานครีบคงที่ จะได้

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T_{\infty} + \frac{4(T_0 - T_{\infty})}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \sinh\left[\frac{(2n+1)\pi H}{b}\right]} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{b}\right] \\ &\quad \cdot \sinh\left[\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\dot{q}'' = -\frac{4k(T_0 - T_\infty)}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \coth\left[\frac{(2n+1)\pi H}{b}\right] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{b}\right] \quad (2.72)$$

### 2.2.3 ในกรณีปัญหา 2 มิติแบบสภาวะไม่คงที่

โดยมีเงื่อนไข

- ผิวขอบอุณหภูมิคงที่
- ไม่มีการผลิตความร้อนภายใน
- ค่าสภาพการนำความร้อนคงที่

จะได้สมการ Governing สำหรับระบบพิกัด คาร์ทีเซียน เป็นดังนี้

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} T(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} T(x, y, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} T(x, y, t) \quad (2.73)$$

คำตอบ  $T(x, y, t) = \psi(x, y)T(t)$

$\psi(x, y)$  = คำตอบในฟังก์ชันของตำแหน่ง  $x$  และ  $y$

$T(t)$  = คำตอบในฟังก์ชันของเวลา  $t$

$T(x, y, t)$  สอดคล้องกับสมการ (2.73)

$$\frac{1}{\psi(x, y)} \left[ \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial Y^2} \right] = \frac{1}{\alpha T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\lambda^2 \quad (2.74)$$

สมการอนุพันธ์ธรรมดาของ  $T(t)$

$$\frac{dT}{dt}(t) + \alpha\lambda^2 T(t) = 0 \quad (2.75a)$$

$$\therefore T_\lambda(t) = C_{\lambda} e^{-\alpha\lambda^2 t} \quad (2.75b)$$

สมการอนุพันธ์ธรรมดาของปัญหาไอเคนวาลู

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \psi(x, y) + \lambda^2 \psi(x, y) = 0 \quad (2.76a)$$

$$\therefore \psi(x, y) = X(x) Y(y) \quad (2.76b)$$

$X(x)$  คำตอบในฟังก์ชันของ  $x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$Y(y)$  คำตอบในฟังก์ชันของ  $y$

$\Psi(x,y)$  สอดคล้องกับสมการ (2.76a)

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dX^2} + x(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \lambda^2 X(x)Y(y) = 0$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \lambda^2 = 0 \quad (2.77)$$

สองเทอมแรกทางซ้ายในสมการ(2.77) เป็นฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว ดังนั้นแต่ละเทอมจะเท่ากับค่าคงที่

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\beta^2 \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \cdot \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\gamma^2 \quad (2.79)$$

แทนลงในสมการ (2.77) จะได้

$$\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2 \quad (2.80)$$

สมการอนุพันธ์ของปัญหาไอเกนวาลูในพิกัด  $x$  และ  $y$

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \beta^2 X(x) = 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \gamma^2 Y(y) = 0 \quad (2.82)$$

คำตอบของสมการ (2.81) และ (2.82) ขึ้นอยู่กับสมการขอบเขตของปัญหานั้น ๆ โดยที่

$X(\beta_m, x)$  หรือ  $X_m(x)$  ไอเกนฟังก์ชันในพิกัด  $x$

$Y(\gamma_n, y)$  หรือ  $Y_n(y)$  ไอเกนฟังก์ชันในพิกัด  $y$

คำตอบของปัญหา

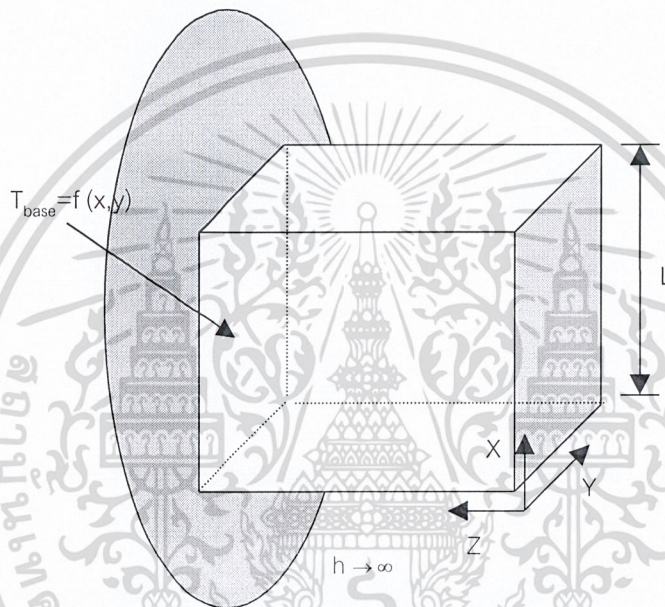
$$T(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} X(\beta_m, x) Y(\gamma_n, y) e^{-\alpha(\beta_m^2 + \gamma_n^2)t} \quad (2.83)$$

$A_{mn}$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรม ซึ่งสามารถหาค่าโดยอาศัยสมการเงื่อนไขเริ่มและคุณสมบัติ Orthogonality ของ  $X(\beta_{m,x})$  และ  $Y(\gamma_{n,y})$

### 2.2.4 ในกรณีปัญหา 3 มิติแบบสถานะคงที่

โดยมีเงื่อนไข

- ผิวขอบอุณหภูมิคงที่
- ไม่มีการผลิตความร้อนภายใน
- ค่าสภาพการนำความร้อนคงที่
- ที่สถานะคงที่



รูปที่ 2.4 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน 3 มิติ

ใช้วิธีการคล้ายกับปัญหา 2 มิติ จะได้สมการ Governing สำหรับระบบพิกัด คาร์ทีเซียน เป็นดังนี้

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (2.84)$$

โดยเงื่อนไขที่ขอบตามรูปที่ 2.4 จะได้ว่า

$$\text{ที่ } z=0: \theta = 0 \quad (2.85)$$

$$\text{ที่ } z=L: \theta = f(x,y) - T_\infty = \varphi(x,y) \quad (2.86)$$

$$\text{ที่ } y=0: \theta = 0 \quad (2.87)$$

$$\text{ที่ } y=L: \theta = 0 \quad (2.88)$$

$$\text{ที่ } x=0: \theta = 0 \quad (2.89)$$

$$\text{ที่ } x=L: \theta = 0 \quad (2.90)$$

ใช้วิธีการ Separation of Variable ประยุกต์ในระบบ 3 มิติและทำให้ 5 ใน 6 ของเงื่อนไขที่ขอบ (Boundary) ให้เป็น Homogeneous แล้ว จากนั้นทำการสมมติค่าตัวแปร โดย

$$\theta = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.91)$$

แทนสมการ (2.91) ลงในสมการ (2.84) และหารทั้ง 2 ข้าง ด้วย ผลคูณ XYZ จะได้

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\lambda^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\beta^2} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (2.92)$$

หา Orthogonality ของ 2 ทิศทางที่กำหนดให้เป็นค่าคงที่ เทอมเกี่ยวกับ X เท่ากับ  $-\lambda^2$  และในเทอมเกี่ยวกับ Y เท่ากับ  $-\beta^2$  พิจารณาได้เป็น

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2.93)$$

$$Y'' + \beta^2 Y = 0 \quad (2.94)$$

$$Z'' - (\lambda^2 + \beta^2)Z = 0 \quad (2.95)$$

หาคำคำตอบของ Ordinary Differential Equation [2] และแทนค่าคำตอบของสมการลงในสมการ (2.91) จะได้

$$\theta = \left[ A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) \right] \left[ A_3 \sin(\beta y) + A_4 \cos(\beta y) \right] \cdot \left[ A_5 \sinh\left(\sqrt{\lambda^2 + \beta^2} z\right) + A_6 \cosh\left(\sqrt{\lambda^2 + \beta^2} z\right) \right] \quad (2.96)$$

ต้องการคำนวณหาค่า  $A_1$  ถึง  $A_6$ ,  $\lambda$  และ  $\beta$  จะเริ่มต้นประยุกต์ค่าเงื่อนไขที่ขอบ (Boundary) ในสมการ

(2.85) - (2.90)

ขั้นแรก จากสมการ (2.85), (2.87) และ (2.89) จะได้

$$A_2 = A_4 = A_6 = 0 \quad (2.97)$$

ต่อมา ประยุกต์จากสมการ (2.88) และ (2.90) ตามลำดับ จะได้

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.98)$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{L} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.99)$$

ทำการรวมสมการ (2.96) – (2.99) จะได้เป็น

$$\theta_{mn} = E_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) \sinh\left(\pi\sqrt{m^2 + n^2} \frac{z}{L}\right) \quad (2.100)$$

ค่าคงที่  $E_{mn}$  เป็นค่ารวมของค่าคงที่  $A_1, A_3$  และ  $A_5$  ค่าคำตอบทั่วไปเป็น Linear Combination ของค่าคำตอบทั้งหมด จะอธิบายคำตอบทั่วไปสำหรับการกระจายอุณหภูมิได้เป็น

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) \sinh\left(\pi\sqrt{m^2 + n^2} \frac{z}{L}\right) \quad (2.101)$$

ต่อไป จะประยุกต์ Boundary สมการ (2.86)

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\pi\sqrt{m^2 + n^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) \quad (2.102)$$

การปฏิบัติ จะใช้ปริมาณ

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\pi\sqrt{m^2 + n^2}\right) \quad (2.103)$$

เกี่ยวข้องกับเฉพาะ คำนีค่า  $m$  แล้วจึงนิยามได้ดังนี้คือ

$$G_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\pi\sqrt{m^2 + n^2}\right) \quad (2.104)$$

ทำให้สมการ (2.103) กลายเป็น

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) \quad (2.105)$$

แล้วใช้คุณสมบัติ Orthogonality ของฟังก์ชัน  $\sin\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)y\right]$  [2] ในสมการ (2.105) จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$G_m(x) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) dy \quad (2.106)$$

แทนค่าสมการ (2.104) กลับในสมการ (2.106) แล้วใช้คุณสมบัติ Orthogonality ของฟังก์ชัน  $\sin\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)y\right]$  จะได้เป็น

$$E_{mn} = \frac{4}{L^2} \frac{\int_0^L \left[ \int_0^L \varphi(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) dy \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}{\sinh\left(\pi\sqrt{m^2+n^2}\right)} \quad (2.107)$$

ณ จุดนี้ การหาค่าคำตอบของการกระจายอุณหภูมิจะหาได้โดยการรวมสมการ (2.102) และ (2.107) ผลลัพธ์ขั้นสุดท้ายของการกระจายอุณหภูมิ คือ

$$T = T_\infty + \frac{4}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^L \left[ \int_0^L (f(x,y) - T_\infty) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) dy \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}{\sinh\left(\pi\sqrt{m^2+n^2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) \sinh\left(\pi\sqrt{m^2+n^2}\frac{z}{L}\right) \quad (2.108)$$

พิจารณาค่า ผลรวมอัตราถ่ายเทความร้อนผ่านฐานครีป โดยกฎของ Fourier จะได้ผลรวมอัตราถ่ายเทความร้อนผ่านพื้นที่ของชิ้นส่วนเล็ก  $dx dy$  คือ

$$dq = -k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=L} dx dy \quad (2.109)$$

ถ้าค่าของ  $m$  และ  $n$  ทั้งคู่ไม่เท่ากัน จะให้เป็น  $m=2k+1$  และ  $n=2j+1$  จะสามารถหาค่าอัตราถ่ายเทความร้อนได้ดังนี้

$$q = \frac{16k}{\pi L} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\int_0^L \left[ \int_0^L (f(x,y) - T_\infty) \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{L}y\right] dy \right] \sin\left[\frac{(2j+1)\pi}{L}x\right] dx}{(2k+1)(2j+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2j+1)^2}} \cdot \coth\left[\pi\sqrt{(2k+1)^2+(2j+1)^2}\right] \quad (2.110)$$

ถ้าในกรณี อุณหภูมิที่ฐานครีปคงที่ ( $T_0$ ) จะได้

$$\dot{q} = \frac{64kL}{\pi^3} (T_0 - T_\infty) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cosh \left[ \pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2j+1)^2} \right]}{(2k+1)^2 (2j+1)^2 \sqrt{(2k+1)^2 + (2j+1)^2}} \quad (2.111)$$

### 2.2.5 ในกรณีปัญหา 3 มิติแบบสถานะไม่คงที่

โดยมีเงื่อนไข

- ผิวขอบอุณหภูมิคงที่
- ไม่มีการผลิตความร้อนภายใน
- ค่าสภาพการนำความร้อนคงที่

พิจารณาการนำความร้อนของตัวกลางใน 3 มิติพิกัด  $x, y$  และ  $z$  ขณะสถานะไม่คงที่เมื่อเวลา  $t > 0$  ระบุเงื่อนไขขอบเขตชนิดใด ๆ ที่เป็นสมการเชิงเส้น - เอกพันธ์ สมการอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (2.112)$$

คำตอบ  $T(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)T(t)$

$\Psi(x, y, z)$  คำตอบในฟังก์ชันของตำแหน่ง  $x, y$  และ  $z$

$T(x, y, z, t)$  สอดคล้องกับสมการ (2.112)

$$\frac{1}{\Psi(x, y, z)} \left[ \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{\alpha T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\lambda^2 \quad (2.113)$$

สมการอนุพันธ์ของ  $T(t)$

$$\frac{dT(t)}{dt} + \alpha \lambda^2 T(t) = 0 \quad (2.114a)$$

$$\therefore T_\lambda(t) = C_{1\lambda} e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (2.114b)$$

สมการของปัญหาไอเกินวาลู

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial z^2} + \lambda^2 \Psi(x, y, z) = 0 \quad (2.115a)$$

$$\therefore \Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.115b)$$

$X(x)$  คำตอบในฟังก์ชันของ  $x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$Y(y)$  คำตอบในฟังก์ชันของ  $y$

$Z(z)$  คำตอบในฟังก์ชันของ  $z$

$\Psi(x,y,z)$  สอดคล้องกับสมการ (2.115a)

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \lambda^2 = 0 \quad (2.116)$$

สามเทอมแรกทางซ้ายในสมการ (2.116) เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว ดังนั้นแต่ละเทอมจะเท่ากับค่าคงที่

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\beta^2 \quad (2.117)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\gamma^2 \quad (2.118)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\eta^2 \quad (2.119)$$

แทนลงในสมการ (2.116)

$$\beta^2 + \gamma^2 + \eta^2 = \lambda^2 \quad (2.120)$$

สมการอนุพันธ์ของปัญหาไอเกนวาเล 3 ชุด ได้แก่

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \beta^2 X(x) = 0 \quad (2.121)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \gamma^2 Y(y) = 0 \quad (2.122)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \eta^2 Z(z) = 0 \quad (2.123)$$

คำตอบของสมการ (2.121), (2.122) และ (2.123) ขึ้นอยู่กับสมการขอบเขตของปัญหาโดยที่

$X(\beta_m, x)$  ไอเกนฟังก์ชันในพิกัด  $x$

$Y(\gamma_n, y)$  ไอเกนฟังก์ชันในพิกัด  $y$

$Z(\eta_p, z)$  ไอเกนฟังก์ชันในพิกัด  $z$

คำตอบของปัญหา

$$T(x,y,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mn} x(\beta_m, x) Y(\gamma_n, y) Z(n_p, z) e^{-\alpha(\beta_m^2 + \gamma_n^2 + n_p^2)t} \quad (2.124)$$

Amp เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรม ซึ่งสามารถหาค่าโดยอาศัยสมการเงื่อนไขเริ่มต้นและคุณสมบัติของ Orthogonality ของ  $X(\beta_m, x)$ ,  $Y(\gamma_n, y)$  และ  $Z(n_p, z)$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 3

# การประยุกต์ทฤษฎีพื้นฐาน

ในบทนี้ เราจะบรรยายถึงวิธีการแก้ปัญหาแบบเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อนแบบต่างๆ บ่อยครั้งในการประยุกต์ไปใช้งาน รูปแบบปัญหาการนำความร้อนที่สนใจจะถูกบรรยายเป็นปรากฏการณ์ที่ซับซ้อน จากเหตุผลดังกล่าว เป็นผลให้วิธีการแก้ปัญหาแบบตรงที่ใช้ในหนังสือนี้ไม่สามารถนำมาใช้หาผลเฉลยในรูปสนามอนุกรมได้ วิธีเหล่านี้จะสามารถใช้แก้ปัญหารูปแบบปัญหาอย่างง่ายซึ่งประกอบรวมเป็นรูปแบบปัญหาซับซ้อนเท่านั้น อย่างไรก็ตาม เมื่อรูปแบบปัญหาอย่างง่ายมีไม่ครอบคลุมเพียงพอถึงการวิเคราะห์ปัญหาประโยชน์ของวิธีการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขก็เป็นสิ่งจำเป็น ความซับซ้อนซึ่งทำให้รูปแบบปัญหาการนำความร้อนไม่เพียงพอต่อวิธีการแก้ปัญหาแบบตรง สามารถยกตัวอย่างให้ได้ อย่างเช่น การขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของคุณสมบัติทางกายภาพของวัสดุ เงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อน แหล่งกำเนิดความร้อน รูปร่างของวัสดุที่ซับซ้อน แปลกๆ(นอกเหนือ ไปจากรูปเหลี่ยม, ทรงกระบอกและทรงกลม) และการแข็งตัวและการละลายในหลายมิติ

มีอยู่ 2 วิธีหลักที่ถูกใช้ทั่วไปหาวิธีการแก้ปัญหาแบบเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อน วิธีผลต่างสลับเนื่องและวิธี finite element บทนี้จะมุ่งเน้นในวิธีแรก ข้อมูลของวิธี finite element สามารถหาได้จากหนังสือเกี่ยวกับเชิงตัวเลข ซึ่งมีหัวข้อของวิธีการแก้ปัญหาแบบเชิงตัวเลขในทางวิศวกรรมทั่วไปและในวิทยาศาสตร์ทางความร้อนเฉพาะ เราเลือกที่จะแสดงวิธีผลต่างสลับเนื่องในงานนี้ เพราะความง่ายของมันพอๆกับความนิยมของมันในการนำไปใช้ในการสอน, การวิจัย และพื้นฐานทางวิศวกรรมในสาขาทางวิทยาศาสตร์ความร้อน

### 3.1 หลักการทั่วไปสำหรับวิธีผลต่างสลับเนื่องของรูปแบบการนำความร้อน

เพื่อที่จะให้ได้วิธีการแก้ปัญหาการนำความร้อนแบบเชิงตัวเลข รูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาจำเป็นต้องสร้างขึ้นมาก่อน จากนั้นจึงเป็นกระบวนการของข้อมูลสำหรับการหาอนุกรมโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่จุด discrete ภายในวัตถุที่พิจารณา เพราะว่าทุกรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการนำความร้อนจะอยู่ในรูป continuum กระบวนการดังกล่าวต้องสามารถทำให้รูปแบบการนำความร้อนแบบ continuum เปลี่ยนเป็นรูปแบบการนำความร้อนแบบ discrete ซึ่งถูกแทนด้วยจำนวนของจุด discrete ของปัญหาที่พิจารณา ถ้าจำนวนของจุดเหล่านี้มีขนาดมากเพียงพอ ความถูกต้องของการกระจายอนุกรมและรูปแบบปัญหาการนำความร้อนที่พิจารณาจะสอดคล้องซึ่งกันและกัน กระบวนการที่กล่าวข้างต้นดังกล่าวเลขถูกเรียกว่า discretization

ลำดับขั้นตอนในการได้รับการแก้ปัญหาแบบเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อนมีโครงสร้างดังนี้

#### ขั้นที่ 1

สร้างรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ของปัญหาที่พิจารณา สมการนี้จะประกอบด้วยสมการการนำและขอบเขตที่เหมาะสมและเงื่อนไขเริ่มต้น โดยทุกสมการเขียนในรูปวัตถุต่อเนื่อง (continuum) ซึ่งอยู่ภายใต้การนำความร้อนที่เกิดขึ้น

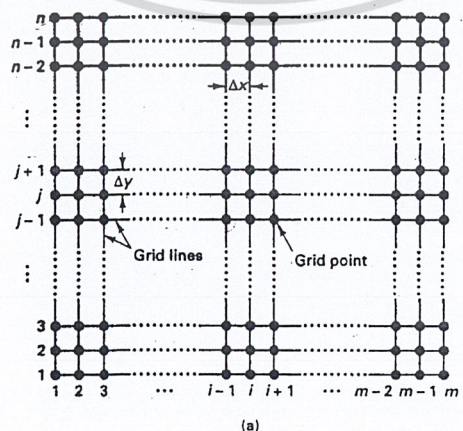
## ขั้นที่ 2

เป็นการประยุกต์กระบวนการ discretization ขั้นตอนนี้ประกอบด้วย ขั้นแรกคือระบุกลุ่มของจุดภายในวัตถุให้มีจำนวนมากเพียงพอ การคำนวณหาอุณหภูมิที่จุดเหล่านี้ควรอธิบายโดยสนามอุณหภูมิในวัตถุที่เพียงพอ ต่อมาเป็นการ discretization สมการการนำความร้อนในขั้นที่ 1 กับกลุ่มของจุดซึ่งระบุที่ผ่านมาสำหรับการเกิดปัญหา ขั้นตอนสุดท้ายของขั้นที่ 2 เราจะได้ชุดสมการพีชคณิต(ในรูป differential ของวัตถุ) ซึ่งอธิบายอุณหภูมิของวัตถุที่กลุ่มของจุด discrete ต่างๆ

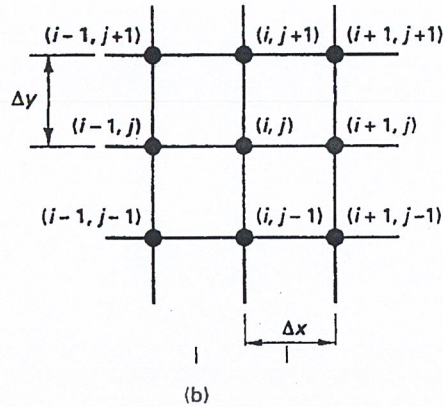
## ขั้นที่ 3

เป็นการแก้ปัญหาชุดสมการพีชคณิตในขั้นที่ 2 และให้อุณหภูมิของวัตถุที่จุด discrete ต่างๆ ซึ่งได้กล่าวแต่ตอนต้นแล้ว ถ้าจำนวนของจุดเหล่านี้มีมากเพียงพอ การหาอุณหภูมิที่จุดต่างๆก็สามารถคำนวณได้อย่างเหมาะสม ความแม่นยำถูกต้องอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ ลักษณะการกระจายอุณหภูมิที่เกิดขึ้นสอดคล้องกับปัญหา

ขั้นตอนแรกในลำดับขั้นข้างบน ไม่แตกต่างไปจากอะไรที่กล่าวในบทที่สอง มันคือขั้นที่ 2 และ 3 ที่ถูกสร้างขึ้นเป็นจุดหลักของบทนี้ งานแรกของขบวนการ discretization ของขั้นที่ 2 คือกำหนดกลุ่มของจุด discrete ในวัตถุที่พิจารณาที่ต้องการคำนวณหาอุณหภูมิ ในวิธีผลต่างสี่บเนื่อง ขั้นตอนนี้จะถูกแสดงโดยการร่างกรวยาบนพื้นที่ที่พิจารณาด้วย net หรือ จุดต่อของเส้นตัดกัน(เส้นกริด) จุดต่อต่างๆของเส้นเหล่านี้คือจุดกริด ในรูป 3.1a แสดงถึงกลุ่มของจุดกริดทั่วไปในพื้นที่เหลี่ยม เส้นกริดจะถูกลากให้มีระยะห่างเท่ากันและขนานซึ่งกันและกันบนพื้นที่เหลี่ยม ( $m$  แทนแนวนอนและ  $n$  แทนแนวตั้ง) โดยทั่วไปสังเกตเห็นว่า ระยะห่างระหว่างเส้นกริด 2 เส้นใดๆจะแปรเปลี่ยนขึ้นอยู่กับที่ตั้งในพื้นที่ที่พิจารณา จำนวนและระยะห่างของเส้นกริดมีผลกระทบต่อผลจำนวนของจุดกริดและต่อเนื่องไปถึงความถูกต้องของสนามอุณหภูมิที่ได้จากวิธีการแก้ปัญหาแบบเชิงตัวเลข การวาดร่างของเส้นกริดในปัญหาต่างๆต้องอาศัยจากประสบการณ์



(a)



รูป 3.1 (a) ตารางกริด (b) กลุ่มของจุดกริดล้อมรอบจุด  $(i, j)$

หลังจากกระบวนการ trial-error และขึ้นอยู่กับลักษณะของแต่ละปัญหาที่พิจารณา เมื่อชุดของจุดกริดถูกสร้างขึ้นมาจากพื้นที่ที่พิจารณา รูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการนำความร้อนสามารถจะถูก discrete ได้ ซึ่งไม่ยกเว้นแม้แต่ตัวแปรเวลา  $t$  ในสมการการนำความร้อนที่จะถูก discrete ด้วยวิธีการคล้ายกันกับตัวแปรมิติ ในทำนองนี้ จะสมมติให้ขบวนการการนำความร้อนดำเนินการไปด้วยช่วงเวลาแต่ละช่วงเป็น  $\Delta t$  ตัวเล็กของขนาด  $\Delta t$  ขึ้นอยู่กับปัญหาภายใต้การพิจารณาและวิธีการแก้ปัญหา การคำนวณด้วยวิธีที่เหมาะสม(บางครั้งอาจต้องใช้ผลของขบวนการ trial-error) เป็นผลดีต่อประสิทธิภาพและความถูกต้องของวิธีการแก้ปัญหา วิธีการ discretization ที่นิยม 2 แบบจะอธิบายในหัวข้อถัดไป

### 3.2 วิธี discretization ของสมการการนำความร้อน

มี 2 วิธีการที่นิยมในการ discretization คือ วิธีการขยายอนุกรมเทย์เลอร์และวิธีปริมาตรควบคุม [2] สำหรับในวิธีแรกนั้นแต่ละอนุพันธ์ในสมการการนำความร้อนจะถูก discrete ที่ละพจน์แยกกัน ในวิธีต่อมาสมการการนำความร้อนจะถูก discrete โดยการอินทิเกรตครอบคลุมปริมาตรควบคุมที่กำหนดไว้ทุกพจน์พร้อมกัน ในที่นี้จะแสดงเฉพาะวิธี discretization แบบปริมาตรควบคุมเท่านั้น

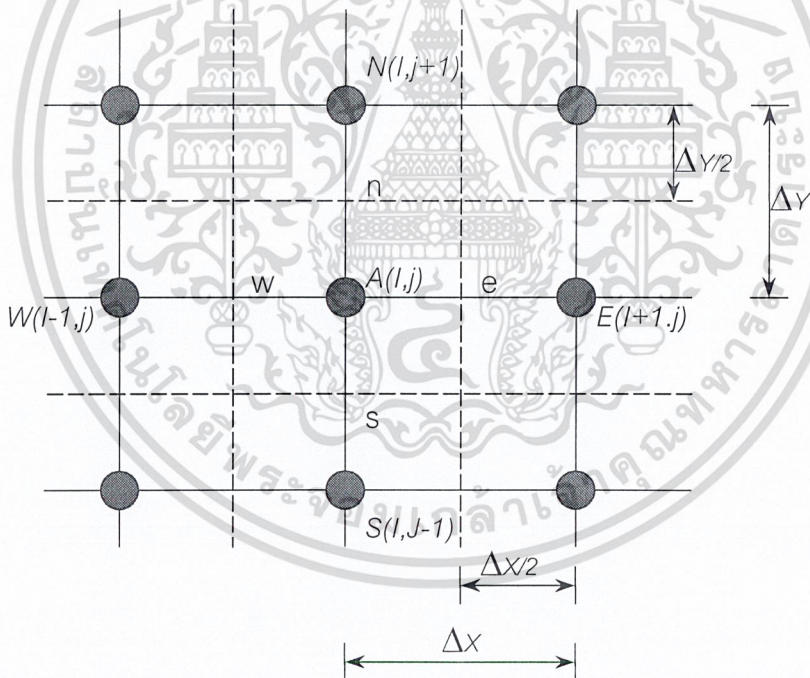
#### 3.2.1 วิธี discretization แบบปริมาตรควบคุม

จุดหลักสำคัญของวิธีนี้คือการ discretize สมการการนำความร้อนโดยตรง โดยการอินทิเกรตครอบคลุมปริมาตรควบคุมที่กำหนดไว้ที่เหมาะสม ในทำนองนี้ ขอบเขตการคำนวณจะถูกแบ่งเป็นจำนวนของปริมาตรควบคุม โดยปริมาตรควบคุมแต่ละส่วนไม่ควรจะเกยเหลื่อมล้ำกัน และแต่ละค่าควรล้อมรอบจุดกริดหนึ่งๆด้วย จากนั้นสมการการนำความร้อนจะถูกอินทิเกรตครอบคลุมบนแต่ละปริมาตรควบคุม เพื่อสำหรับการอินทิเกรต การกระจายของอุณหภูมิจำเป็นจะถูกสมมติสำหรับแต่ละปริมาตรควบคุม รูปแบบโดยตรงของการกระจายอุณหภูมินี้(เชิงเส้น, expo, ...) ขึ้นอยู่กับการประยุกต์ของปัญหาที่พิจารณา การกระจาย

อุณหภูมิแบบเชิงเส้นเป็นพื้นฐานหลักที่ใช้เมื่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในแต่ละช่วงเกิดขึ้นโดยไม่สามารถกำหนดค่าได้ในปริมาตรควบคุม หลังจากทำการอินทิเกรตแล้ว สมการการนำความร้อนที่ถูก discrete แล้วจะประกอบด้วยค่าของอุณหภูมิที่แต่ละจุดกริดที่ต้องการ วิธีนี้ได้ถูกแสดงอย่างละเอียดในหนังสือการถ่ายเทความร้อนทั่วไป สำหรับในส่วนนี้จะกล่าวถึงการ discretization ของสมการการนำความร้อน 2 มิติแบบสม่ำเสมอ

### 3.2.1.1 วิธีการ discretization สมการการนำความร้อน 2 มิติแบบสม่ำเสมอ

พิจารณาจุดกริดทั่วไป  $A$  ที่แสดงในรูป 3.2 จุดกริดที่ล้อมรอบจุด  $A$  จะถูกกำหนดอย่างง่ายโดย E,W,N และ S (east,west,north และ south ของจุด  $A$ ) เส้นประในรูป 3.2 จะระบุถึงพื้นผิวหน้าทั้ง 4 ของปริมาตรควบคุมเหลี่ยมที่ล้อมรอบจุด  $A$  การตัดของเส้นประกับเส้นกริดจะถูกกำหนดด้วย  $e,w,n$  และ  $s$  ในเบื้องต้น เราสมมติว่ากริดสม่ำเสมอในทิศทาง  $x$  ( $\Delta x =$  ค่าคงที่) แต่เราจะ discrete สมการการนำในแบบที่  $\Delta x \neq \Delta y$  รวมไปถึงการสมมติว่าพื้นผิวหน้าของปริมาตรควบคุมตั้งอยู่กึ่งกลางระหว่างจุดกริดทั้ง 2 (รูป 3.2) นี้ อาจไม่จำเป็นต้องสมมติขึ้น แต่มันช่วยให้ดูง่ายขึ้นในขบวนการ discretization ถ้าให้ค่าการนำความร้อนของวัสดุแสดงด้วยค่า  $k$  และค่าการผลิตความร้อน  $\dot{q}'''$  สมการการนำความร้อน 2 มิติแบบสม่ำเสมอที่ถูก discrete อยู่ในรูป



รูป 3.2 รูปแบบของกลุ่มกริดในปริมาตรควบคุม

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q}''' = 0 \quad (3.1)$$

ทำการอินทิเกรตสมการนี้ครอบควบคุมปริมาตรควบคุมดังรูป 3.2 จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\iint_{w_s}^c \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \iint_{w_s}^c \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{w_s}^c \dot{q}''' dx dy = 0 \quad (3.2)$$

ต่อไปเราจะแสดงการอินทิเกรตแนว x จากตะวันออก-ตะวันตกในเทอมแรกของสมการ (3.2) และการอินทิเกรตแนว y จากใต้-เหนือในเทอมสอง

$$\int_s^n \left[ \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_c - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dy + \int_w^c \left[ \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] dx + \dot{q}''' \Delta x \Delta y = 0 \quad (3.3)$$

ซึ่ง  $\dot{q}'''$  แทนค่าเฉลี่ยของการผลิตความร้อนครอบคลุมปริมาตรควบคุม ถัดมาเราสมมติว่าฟลักซ์ความร้อน  $\left( k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right)_c$ ,  $\left( k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right)_w$ ,  $\left( k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right)_n$ ,  $\left( k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right)_s$  เกิดขึ้นทั่วบริเวณพื้นที่ผิวของปริมาตรควบคุมที่จุด c,w,n และ s ตามลำดับ ดังนั้นสมการ (3.3) จะกลายเป็น

$$\left[ \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_c - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x + \dot{q}''' \Delta x \Delta y = 0 \quad (3.4)$$

ถึงตอนนี้เราจำเป็นต้องทำการสมมติลักษณะการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในปริมาตรควบคุมและต่อเนื่องระหว่างจุดกริดมี ลักษณะที่ใช้กันส่วนมากโดยทั่วไปคือ piecewise-linear shape (การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิแบบเชิงเส้นจากจุดกริดหนึ่งไปสู่จุดกริดหนึ่ง) ลักษณะนี้ทำให้เข้าใจได้ง่ายและมีประสิทธิภาพดี การนำมาประยุกต์ของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ piecewise-linear จะได้

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = \frac{T_A - T_W}{\Delta x} \quad (3.5)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_c = \frac{T_E - T_A}{\Delta x} \quad (3.6)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s = \frac{T_A - T_S}{\Delta y} \quad (3.7)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n = \frac{T_N - T_A}{\Delta y} \quad (3.8)$$

ทำการรวมสมการ (3.4) – (3.8) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left( k_c \frac{T_E - T_A}{\Delta x} - k_w \frac{T_A - T_w}{\Delta y} \right) \Delta y + \left( k_n \frac{T_N - T_A}{\Delta y} - k_s \frac{T_A - T_s}{\Delta y} \right) \Delta x + \bar{q}''' \Delta x \Delta y = 0 \quad (3.9)$$

ทำการแก้สมการหาค่า  $T_A$  จะได้

$$T_A = \frac{1}{\left( k_c + k_w \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \left( k_n + k_s \right) \frac{\Delta x}{\Delta y}} \cdot \left( k_c \frac{\Delta y}{\Delta x} T_E + k_w \frac{\Delta y}{\Delta x} T_w + k_n \frac{\Delta x}{\Delta y} T_N + k_s \frac{\Delta x}{\Delta y} T_s + \bar{q}''' \Delta x \Delta y \right) \quad (3.10)$$

สมการ (3.10) เป็นรูปแบบการ discretization ของสมการพลังงาน (3.1) สังเกตเห็นว่าการ discretize สมการการนำความร้อนแบบ 3 มิติเป็นการขยายส่วนเพิ่มขึ้นของกระบวนการที่อธิบายได้ในส่วนนี้

### 3.2.1.2 วิธีการ discretization เงื่อนไขขอบเขต

เมื่ออุณหภูมิที่ผิวได้ถูกกำหนดขึ้น ซึ่งเป็นกรณีหนึ่งในการกำหนดค่าอุณหภูมิให้กับบริเวณผิว ความยากจะเกิดขึ้นเมื่อจำเป็นต้อง discretize เงื่อนไขขอบเขตที่ประกอบด้วยค่าฟลักซ์ความร้อน (เกรเดียนของ  $T$ ) เงื่อนไขขอบเขตที่ประกอบนี้อาจเป็นชนิดที่ 2 หรือ 3 ก็ได้

สำหรับการพิสูจน์สมการการ discretization ของเงื่อนไขขอบเขตที่ประกอบด้วยฟลักซ์ความร้อน พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตจุด  $D$  ในรูป 3.3a เพราะว่าจุดนี้อยู่บนผิว จึงมีเพียงครึ่งหนึ่งของปริมาตรควบคุมเท่านั้นในขอบเขตของการ discretization ซึ่งล้อมรอบอยู่ ก็คือบริเวณที่แรเงาในรูป 3.3a ทำการอินทิเกรตสมการ (3.1) ครอบคลุมปริมาตรควบคุมครึ่งหนึ่ง เราจะได้อ

$$\iint_{w_D}^c \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \iint_{w_D}^c \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{w_D}^c \bar{q}''' dx dy = 0 \quad (3.11)$$

ดำเนินการต่อสมการ (3.11) กลายเป็น

$$\left[ \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_c - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \frac{\Delta y}{2} + \left[ \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_D \right] \Delta x + \bar{q}''' \frac{\Delta x \Delta y}{2} = 0 \quad (3.12)$$

การกระจายอุณหภูมิแบบ piecewise-linear จะถูกสมมติประมาณใช้ในเกรเดียนที่จุด  $e, w$  และ  $n$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_E - T_D}{\Delta x} \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_D - T_W}{\Delta x} \quad (3.14)$$

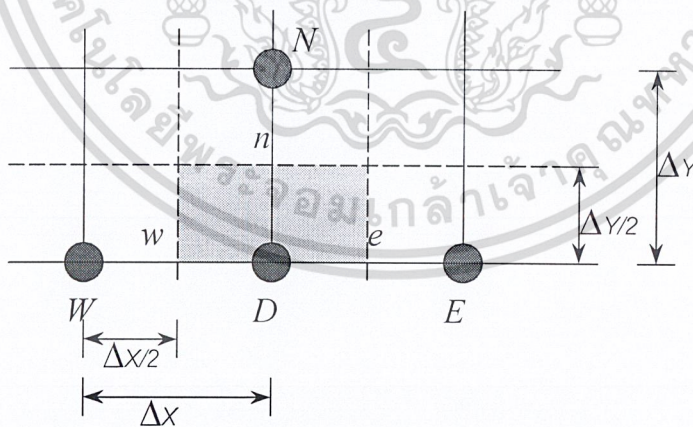
$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_N - T_D}{\Delta y} \quad (3.15)$$

เกรเดียนอุณหภูมิสุดท้ายในสมการ (3.12) จะถูกกำหนดโดยเงื่อนไขขอบเขตแบบฟลักซ์ความร้อน ประยุกต์อนุกรมฟูเรียร์ เราจะได้

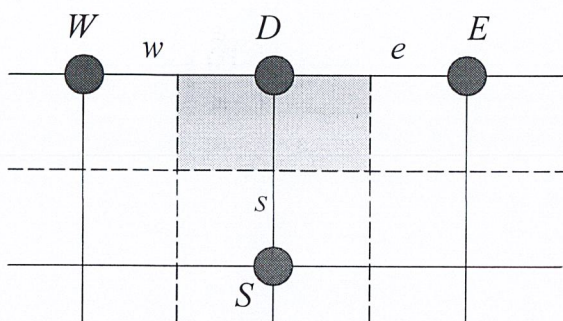
$$\dot{q}'' = -k_D \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_D \quad (3.16)$$

รวมสมการ (3.12) - (3.16) แล้วกำจัดอนุพันธ์ของ T และ แก้สมการผลลัพธ์เพื่อหา  $T_D$  จะได้

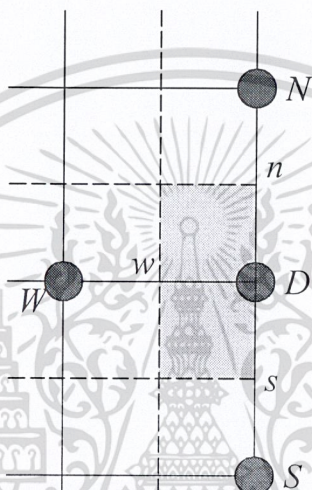
$$T_D = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} (k_c + k_w) + \frac{\Delta x}{\Delta y} k_n} \cdot \left( \frac{k_e \Delta y}{2 \Delta x} T_E + \frac{k_w \Delta y}{2 \Delta x} T_W + k_n \frac{\Delta x}{\Delta y} T_N + \dot{q}''_D \Delta x + \bar{q}''' \frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \quad (3.17)$$



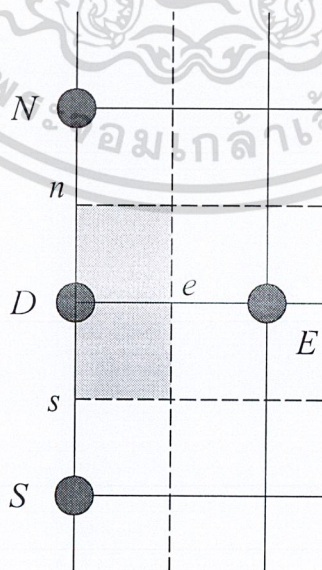
(a)



(b)



(c)



(d)

รูปที่ 3.3 การ discretize ที่ขอบเขตผิว (a)ด้านล่าง (b)ด้านบน (c)ด้านขวา และ(d) ด้านซ้าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับ  $\dot{q}_D''$  ที่กำหนด สมการ (3.17) เป็นสมการสำหรับอุณหภูมิที่ผิว สังเกตว่าในส่วนประกอบของรูป 3.3a จุด D ตั้งอยู่ที่ผิว สมการทำนองเดียวกันก็สามารถหาได้สำหรับหาอุณหภูมิ ถ้าจุด D อยู่ที่ผิวด้านบน, ด้านขวา หรือด้านซ้าย (รูป 3.3b ตามลำดับ) จะได้ว่าจุดกริดอยู่ที่ผิวด้านบน (รูป 3.3b)

$$T_D = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} (k_c + k_w) + \frac{\Delta x}{\Delta y} k_s} \cdot \left( \frac{k_c}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} T_E + \frac{k_w}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} T_W + k_s \frac{\Delta x}{\Delta y} T_S - \dot{q}_D'' \Delta x + \bar{\dot{q}}''' \frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \quad (3.18)$$

จุดกริดอยู่ที่ผิวด้านขวา (รูป 3.3c)

$$T_D = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} (k_n + k_s) + \frac{\Delta y}{\Delta x} k_w} \cdot \left( \frac{k_n}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} T_N + \frac{k_s}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} T_S + k_w \frac{\Delta y}{\Delta x} T_W - \dot{q}_D'' \Delta y + \bar{\dot{q}}''' \frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \quad (3.19)$$

จุดกริดอยู่ที่ผิวด้านซ้าย (รูป 3.3d)

$$T_D = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} (k_n + k_s) + \frac{\Delta y}{\Delta x} k_c} \cdot \left( \frac{k_n}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} T_N + \frac{k_s}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} T_S + k_c \frac{\Delta y}{\Delta x} T_E + \dot{q}_D'' \Delta y + \bar{\dot{q}}''' \frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) \quad (3.20)$$

### 3.2.1.3 วิธีกริด discretization สมการการนำความร้อน 2 มิติแบบไม่สม่ำเสมอ

รูปแบบทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \bar{\dot{q}}''' \quad (3.21)$$

เพื่อความสะดวก เราจะสมมติว่าค่าการเก็บความร้อนของวัสดุคงที่ ( $\rho c =$  ค่าคงที่) ทำการ discretize สมการ (3.21) โดยใช้รูปกริด 3.2 วัตถุที่ทำการ discretize จะให้อุณหภูมิที่จุดกริด A มีช่วงเวลา  $p+1$  (หรือที่เวลา  $t+\Delta t$ ) เมื่ออุณหภูมิของทุกจุดกริดที่ช่วงเวลาที่ผ่านมา ( $p$ ) ทราบค่าแล้ว เราทำการอินทิเกรตสมการ (3.21) ครอบคลุมปริมาตรควบคุมของรูป 3.2 และครอบคลุมช่วงเวลาจาก  $t$  ถึง  $t+\Delta t$

$$\rho c \int_{w} \int_{s} \int_{t} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dx dy dt = \int_{w} \int_{s} \int_{t} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_{w} \int_{s} \int_{t} \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) dx dy dt + \int_{w} \int_{s} \int_{t} \dot{q}''' dx dy dt \quad (3.22)$$

สำหรับการอินทิเกรตตัวแปรมิติของอนุพันธ์ตัวแปรมิตินั้น กระบวนการและสมมติฐานส่วนนี้ยังคงใช้เหมือนเดิม สำหรับการอินทิเกรตตัวแปรมิติของอนุพันธ์เวลาจะสมมติเป็นค่า  $\left( \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right)_A$  (ค่าของอนุพันธ์ที่จุด A) ที่เกิดขึ้น ครอบคลุมจำนวนปริมาตรควบคุม ดังนั้นหลังจากทำการอินทิเกรตตัวแปรมิติแล้วจะได้

$$\rho c \Delta x \Delta y \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right)_A dt = \Delta y \int_t^{t+\Delta t} \left( k_c \frac{T_E - T_A}{\Delta x} - k_w \frac{T_A - T_W}{\Delta x} \right) dt + \Delta x \int_t^{t+\Delta t} \left( k_n \frac{T_N - T_A}{\Delta y} - k_s \frac{T_A - T_S}{\Delta y} \right) dt + \bar{q}''' \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.23)$$

ซึ่ง  $\bar{q}'''$  คือค่าเฉลี่ยการผลิตความร้อนครอบคลุมปริมาตรควบคุม ( $\Delta x \Delta y$ ) และช่วงเวลา  $\Delta t$  ทำการแสดงการอินทิเกรตอนุพันธ์เวลาของสมการ (3.23) โดยจะได้

$$\int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right)_A dt = T_A^{p+1} - T_A^p \quad (3.24)$$

ในทางตรงกันข้าม สมมติฐานเป็นสิ่งจำเป็นในการอินทิเกรตที่ทางด้านขวามือของสมการ (3.23) ตัวเลือกของสมมติฐานที่ทั่วไปนิยมใช้คือถือว่าอุณหภูมิที่แต่ละจุดกริด (จุด A เป็นต้น) เป็น

$$\int_t^{t+\Delta t} T_A dt = [\lambda T_A^{p+1} + (1-\lambda) T_A^p] \Delta t \quad (3.25)$$

ซึ่ง  $\lambda$  เป็นค่าน้ำหนักมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 เมื่อ  $\lambda = 0$  มันหมายความว่าอุณหภูมิคือค่าปัจจุบันที่ช่วงเวลา  $p$  เกิดขึ้น เมื่อ  $\lambda = 1$  มันหมายความว่าอุณหภูมิคือค่าอนาคตที่ช่วงเวลา  $p+1$  เกิดขึ้น รวมสมการ (3.23) - (3.25) เราจะได้

$$\begin{aligned}
\rho c \Delta x \Delta y (T_A^{p+1} - T_A^p) = & \Delta y \Delta t \left[ \lambda \left( k_e \frac{T_E^{p+1} - T_A^{p+1}}{\Delta x} - k_w \frac{T_A^{p+1} - T_W^{p+1}}{\Delta x} \right) \right. \\
& \left. + (1-\lambda) \left( k_e \frac{T_E^p - T_A^p}{\Delta x} - k_w \frac{T_A^p - T_W^p}{\Delta x} \right) \right] \\
& + \Delta x \Delta t \left[ \lambda \left( k_n \frac{T_N^{p+1} - T_A^{p+1}}{\Delta y} - k_s \frac{T_A^{p+1} - T_S^{p+1}}{\Delta y} \right) \right. \\
& \left. + (1-\lambda) \left( k_n \frac{T_N^p - T_A^p}{\Delta y} - k_s \frac{T_A^p - T_S^p}{\Delta y} \right) \right] + \bar{q}''' \Delta x \Delta y \Delta t
\end{aligned} \tag{3.26}$$

แก้สมการ (3.26) หาค่า  $T_A^{p+1}$  จะได้

$$\begin{aligned}
T_A^{p+1} = & \left[ \frac{\rho c \Delta x \Delta y}{\Delta t} + \lambda \frac{\Delta y}{\Delta x} (k_e + k_w) + \lambda \frac{\Delta x}{\Delta y} (k_n + k_s) \right]^{-1} \cdot \\
& \left\{ k_e \frac{\Delta y}{\Delta x} [\lambda T_E^{p+1} + (1-\lambda) T_E^p] + k_w \frac{\Delta y}{\Delta x} [\lambda T_W^{p+1} + (1-\lambda) T_W^p] \right. \\
& \left. + k_n \frac{\Delta x}{\Delta y} [\lambda T_N^{p+1} + (1-\lambda) T_N^p] + k_s \frac{\Delta x}{\Delta y} [\lambda T_S^{p+1} + (1-\lambda) T_S^p] \right. \\
& \left. + \left[ \frac{\rho c \Delta x \Delta y}{\Delta t} - (1-\lambda) \frac{\Delta y}{\Delta x} (k_e + k_w) - (1-\lambda) \frac{\Delta x}{\Delta y} (k_n + k_s) \right] T_A^p \right. \\
& \left. + \bar{q}''' \Delta x \Delta y \right\}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

สมการ (3.27) ให้ค่าอุณหภูมิที่ต้องการของจุด A ที่เวลา  $t+\Delta t$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าอุณหภูมิ (ทราบค่า) ที่จุดนี้ที่ช่วงเวลาครั้งก่อน ( $t$ ) และค่าอุณหภูมิของจุด W,E,S และ N ที่เวลา  $t$  (ทราบค่า) และเวลา  $t+\Delta t$  (ไม่ทราบค่า) สังเกตว่า ในกรณีพิเศษ  $\lambda = 0$  สมการ (3.27) จะแสดงค่าอุณหภูมิของจุด A ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าอุณหภูมิที่ทราบค่าที่จุด A,W,E,S และ N ที่เวลา  $t$  เท่านั้น วิธีการแก้ปัญหาคงของชุดสมการพีชคณิตต่างๆ ซึ่งเป็นผลมาจากการประยุกต์สมการ (3.27) ที่จุดกริดของขอบเขตการคำนวณจะอธิบายถัดไปจากนี้

### 3.3 วิธีการแก้ปัญหาคงการนำความร้อนที่ discretize แล้ว

ได้แสดงในหัวข้อ 3.2 แล้วว่ากระบวนการ discretization ได้ทำการแปลงรูปสมการการนำความร้อน (ทั้งสมการการนำและขอบเขตและเงื่อนไขขั้นต้น) ไปอยู่ในรูปชุดสมการพีชคณิตสำหรับการหาอุณหภูมิที่จุดกริด ในส่วนนี้จะแสดงวิธีการแก้ปัญหาคงการนำความร้อนเหล่านี้ โดยในส่วนนี้จะครอบคลุมถึงปัญหาการนำความร้อนแบบ transient ด้วย โดยทั่วไปวิธีการแก้ปัญหามีรูปแบบปัญหาแบบสมมาตรสามารถหาได้โดยการละพจน์ของสมการสนามอุณหภูมิที่ขึ้นกับเวลาและกีดกันการตามขั้นตอนเหมือนเดิม

วิธีการแก้ปัญหาคงได้ถูกแบ่งออกเป็น 2 วิธี : วิธี explicit และวิธี implicit ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างวิธีทั้ง 2 นี้ สามารถอธิบายได้ในการนำไปประยุกต์ใช้ในตัวอย่างปัญหาการนำแบบ transient ซึ่งไหลในทิศทางเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เดียว ในวิธี explicit นั้น หลังจากการ discretize แล้ว ค่าอุณหภูมิที่ไม่ทราบค่า  $T_j^{p+1}$  จะถูกแสดงในพจน์ของ ปริมาณที่ทราบค่า (ค่าอุณหภูมิที่คำนวณเสร็จเรียบร้อยแล้วของจุดกริดที่ช่วงเวลาก่อน) ดังนั้น สมการพีชคณิต สำหรับอุณหภูมิของแต่ละจุดกริดสามารถแก้ปัญหาค่าได้โดยตรง เพื่อให้ได้ค่าอุณหภูมิที่ต้องการของจุดกริดเฉพาะ ในทางตรงกันข้าม วิธี implicit หลังจาก discretization แล้ว ค่าอุณหภูมิที่ไม่ทราบค่า  $T_j^{p+1}$  จะถูก แสดงไม่เพียงเฉพาะพจน์ของค่าอุณหภูมิที่ทราบค่าของช่วงเวลาที่ผ่านมา  $p$  เท่านั้น แต่ยังรวมถึงค่าอุณหภูมิที่ ไม่ทราบค่าของช่วงเวลา  $p+1$  ด้วย สิ่งนี้นำไปสู่การเชื่อมโยงของสมการพีชคณิตที่จุดกริดแต่ละจุดและเป็นสิ่ง จำเป็นสำหรับการแก้ปัญหาคงสมการพีชคณิตด้วยวิธีการคำนวณด้วยการทำซ้ำ วิธี explicit และ implicit ในการนำแบบ transient ก็แสดงด้วยแบบดังกล่าว ในทั้ง 2 กรณี การใช้และการแทนค่ารวมไปถึงวิธีการต่างๆ สามารถหาได้จากเอกสารการนำความร้อน โดยวิธีแบบเชิงตัวเลขอื่นๆ ได้

### 3.3.1 วิธี implicit

แผนผังวิธี implicit 2 รูปแบบที่พิจารณา : รูปแบบ fully implicit และ รูปแบบ Crank-Nicolson

3.3.1.1 รูปแบบ fully implicit ในแผนผังแบบนี้อนุพันธ์ของตัวแปรมิติจะถูกคำนวณที่ช่วงเวลา  $(p+1)$  ขณะที่ใช้วิธีผลต่างข้างหน้าต่ออนุพันธ์เวลา ในกรณีของกระบวนการการนำความร้อน 2 มิติ โดยค่าคุณสมบัติทางความร้อนของวัสดุคงที่ รูปแบบ fully implicit จะได้

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^p}{\Delta t} &= \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (T_{i+1,j}^{p+1} - 2T_{i,j}^{p+1} + T_{i-1,j}^{p+1}) \\ &+ \frac{\alpha}{(\Delta y)^2} (T_{i,j+1}^{p+1} - 2T_{i,j}^{p+1} + T_{i,j-1}^{p+1}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

สังเกตว่าสมการ (3.28) สามารถหาได้จากสมการ (3.27) เมื่อค่า  $k$  เป็นค่าคงที่ ไม่มีการผลิตความร้อนและ กำหนดให้  $\lambda = 1$  แก้ปัญหาสมการ (3.28) หาค่า  $T_j^{p+1}$  จะได้

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{p+1} &= \frac{\alpha \Delta t / (\Delta x)^2}{1 + 2[\alpha \Delta t / (\Delta x)^2] + 2[\alpha \Delta t / (\Delta y)^2]} (T_{i+1,j}^{p+1} + T_{i-1,j}^{p+1}) \\ &+ \frac{\alpha \Delta t / (\Delta y)^2}{1 + 2[\alpha \Delta t / (\Delta x)^2] + 2[\alpha \Delta t / (\Delta y)^2]} (T_{i,j+1}^{p+1} + T_{i,j-1}^{p+1}) \\ &+ \frac{1}{1 + 2[\alpha \Delta t / (\Delta x)^2] + 2[\alpha \Delta t / (\Delta y)^2]} T_{i,j}^p \end{aligned} \quad (3.29)$$

โดยพื้นฐานการวิเคราะห์ความเสถียรของ Von Neumann สามารถแสดงให้เห็นว่า รูปแบบ fully implicit มีความเสถียร วิธีการแก้ปัญหาคงสมการพีชคณิตเป็นผลให้เกิดสมการ (3.29) เหมาะสมสำหรับการพิจารณา เป็นพิเศษ ในช่วงท้ายนี้ การอธิบายเริ่มโดยแสดงในกรณีพิเศษของการนำความร้อนในทิศทางเดียวแบบ transient (ในทิศทาง  $x$ ) ในกรณีนี้ สมการ (3.29) จะลดรูปได้

$$T_i^{p+1} = \frac{\alpha \Delta t / (\Delta x)^2}{1 + 2[\alpha \Delta t / (\Delta x)^2]} (T_{i+1}^{p+1} + T_{i-1}^{p+1}) + \frac{1}{1 + 2[\alpha \Delta t / (\Delta x)^2]} T_i^p \quad (3.30)$$

สังเกตว่าตัวห้อย  $j$  ได้ถูกละทิ้ง ไม่มีความหมายเกี่ยวข้องกับสมการที่ได้ discretize สำหรับการนำในทิศทางเดียว ตัดมาเราสามารถเขียนสมการ (3.30) ใหม่ได้

$$-\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} T_{i-1}^{p+1} + [1 + 2\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}] T_i^{p+1} - \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} T_{i+1}^{p+1} = T_i^p \quad (3.31)$$

ถ้าสมการ (3.31) ถูกประยุกต์เข้ากับทุกจุดภายในของพื้นที่ที่พิจารณา  $I=2, \dots, M-1$ , เราจะได้

$$\begin{aligned} -\gamma T_1^{p+1} + (1 + 2\gamma) T_2^{p+1} - \gamma T_3^{p+1} &= T_2^p \\ -\gamma T_2^{p+1} + (1 + 2\gamma) T_3^{p+1} - \gamma T_4^{p+1} &= T_3^p \\ \dots & \\ -\gamma T_{i-1}^{p+1} + (1 + 2\gamma) T_i^{p+1} - \gamma T_{i+1}^{p+1} &= T_i^p \\ \dots & \\ -\gamma T_{M-2}^{p+1} + (1 + 2\gamma) T_{M-1}^{p+1} - \gamma T_M^{p+1} &= T_{M-1}^p \end{aligned} \quad (3.32)$$

เพื่อความสะดวกสมมติให้

$$\gamma = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (3.33)$$

ถูกใช้ สมมติค่า  $T_1^{p+1}$  และค่า  $T_M^{p+1}$  ในสมการด้านบนเป็นค่าที่ทราบค่าจากเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่พิจารณา เมทริกซ์ของสมการสามารถสร้างขึ้นโดยใช้สมการ (3.32)

$$\begin{bmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & & & & & \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & -\gamma & 1+2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^{P+1} \\ T_3^{P+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_i^{P+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{M-1}^{P+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2^P + \gamma T_1^{P+1} \\ T_3^P \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_i^P \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{M-1}^P + \gamma T_M^{P+1} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

แน่นอน เมตริกแรกทางซ้ายมือของสมการ (3.34) เป็น tridigonal และทุกค่าภายในเป็นค่าที่ทราบ รวมทั้งทุกค่าของเมตริกคอสต์นทางขวามือของสมการ (3.34) เป็นค่าที่ทราบ ดังนั้นค่าที่ไม่ทราบ (T) ของเมตริกคอสต์นทางซ้ายมือของสมการ (3.34) ( $T_2^{P+1}, T_3^{P+1}, \dots, T_{M-1}^{P+1}$ ) สามารถหาได้โดยการใช้วิธีการแก้ปัญหาพีชคณิตเชิงเส้น เช่นการแยกตัวแปรและการขยายของวิธี Gauss elimination กระบวนการที่รู้จักกันดีซึ่งถูกนำมาใช้แสดงต่อกระบวนการของ Thomas

ไม่เหมือนกับปัญหาการนำความร้อนแบบ transient ในทิศทางเดียวที่อธิบายตอนต้น สมการ discretized การนำความร้อนแบบ transient 2 มิติ สมการ (3.29) ไม่สามารถแก้สมการโดยใช้กระบวนการ Thomas เหตุผลของข้อนี้คือสมการ (3.29) สามารถจัดรูปใหม่โดยมี 3 พจน์อยู่ตำแหน่งเดิมในแถว diagonal หลัก มี 2 พจน์ที่ตำแหน่งเดิมถูกเข้าแทนที่ใหม่ วิธีการ Gauss elimination ถึงสามารถใช้ได้ มี 2 วิธีสำหรับใช้ในการแก้ปัญหาคำนวณนำความร้อนหลายมิติแบบ transient และจะอธิบายเป็นลำดับต่อไป : วิธี point-by-point ของ Gauss-Seidel และวิธี line-by-line

**3.3.1.1.1 วิธี Gauss-Seidel :** บางทีนี่คือการตีความหมายอย่างง่ายที่สุดของวิธีการทำซ้ำทั้งหมด มันไม่ใช่ข้อมูลของแต่ละชุด ค่าที่คำนวณได้ล่าสุดของอุณหภูมิจะถูกเก็บไว้ในหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ กระบวนการทำซ้ำที่แต่ละช่วงเวลาจะถูกดำเนินการก่อนที่จะดำเนินการในช่วงเวลาถัดไป ระหว่างกระบวนการหาค่าอุณหภูมิแต่ละจุดสำหรับการนำความร้อน 2 มิติในวัตถุซึ่งค่าคุณสมบัติทางความร้อนคงที่หาได้จาก

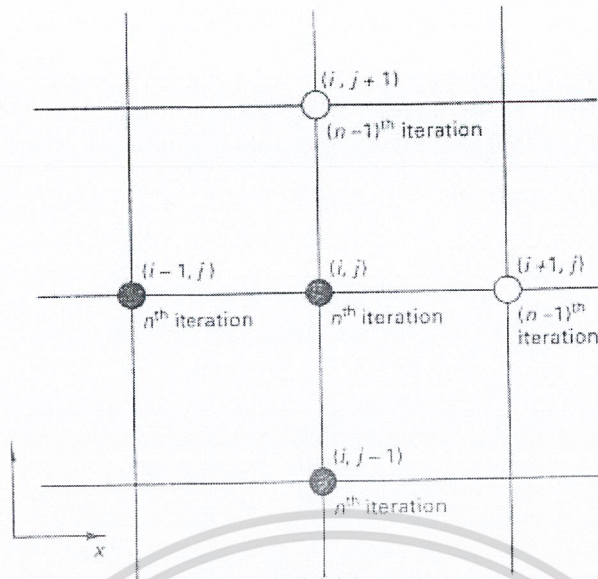
$$T_{i,j}^{P+1} = \frac{\alpha \Delta t / (\Delta x)^2 [T_{i+1,j}^{\wedge P+1} + T_{i-1,j}^{\wedge P+1}] + \alpha \Delta t / (\Delta y)^2 [T_{i,j+1}^{\wedge P+1} + T_{i,j-1}^{\wedge P+1}] + T_{i,j}^P}{1 + 2[\alpha \Delta t / (\Delta x)^2] + 2[\alpha \Delta t / (\Delta y)^2]} \quad (3.35)$$

ในสมการ (3.35) ค่า  $T_{i-1,j}^{p+1}$ ,  $T_{i+1,j}^{p+1}$ ,  $T_{i,j+1}^{p+1}$ ,  $T_{i,j-1}^{p+1}$  แทนค่าอุณหภูมิที่จุดกริดทั้ง 4 ที่ล้อมรอบจุด  $(i,j)$  ซึ่งถูกเก็บไว้ในหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์เมื่อปัจจุบัน รูป 3.4 แสดงให้เห็นถึงกลุ่มของจุดกริดซึ่งกระบวนการคำนวณเริ่มจากล่างขึ้นบนในทิศทาง  $y$  และจากซ้ายไปขวาในทิศทาง  $x$  นำสมการ (3.35) ไปใช้ในการคำนวณค่าอุณหภูมิ ซึ่งได้กล่าวในตอนต้นแล้ว กระบวนการทำซ้ำได้ถูกปรับเปลี่ยนในแต่ละช่วงเวลา ระหว่างการทำซ้ำครั้งที่  $n$  ของกระบวนการนี้ เพราะว่าการคำนวณกระทำจากล่างขึ้นบนและจากซ้ายไปขวา ค่าปัจจุบันของ  $T_{i-1,j}^{p+1}$  และ  $T_{i,j-1}^{p+1}$  ในสมการ (3.35) ซึ่งเป็นค่าซึ่งคำนวณได้จากการทำซ้ำครั้งที่  $n$  เดียวกัน ในทางตรงกันข้าม ค่าปัจจุบันของ  $T_{i+1,j}^{p+1}$  และ  $T_{i,j+1}^{p+1}$  ในสมการ (3.35) เป็นค่าของการทำซ้ำครั้งที่  $(n-1)$  ดังนั้นทุกจุดของขอบเขตที่พิจารณาจะถูกนำมาใช้ในสมการ (3.35) เมื่อการทำซ้ำ 1 ครั้งเสร็จสิ้น กระบวนการจะถูกทำซ้ำไปเรื่อยๆจนกระทั่งเข้าสู่ภายในค่า error ที่ยอมรับได้ โดยจุดที่คำนวณได้จะมีประโยชน์ในช่วงเวลาถัดไป

ในส่วนของการลู่เข้า วิธี Gauss-Seidel ไม่ลู่เข้าเสมอไป สภาพที่สำคัญสำหรับการลู่เข้าคือข้อกำหนดของ Scarborough ข้อกำหนดนี้ให้ผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของค่าอุณหภูมิที่ล้อมรอบจุด  $(i,j)$  ทหารด้วยค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ที่คูณด้วยค่าอุณหภูมิที่ไม่ทราบค่าของจุด  $(i,j)$  ซึ่งควรจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 สำหรับทุกจุดกริดและน้อยกว่า 1 ที่จุดกริดตำแหน่งใด ๆ โดยใช้สมการ (3.35) อัตราส่วนข้างบนของสัมประสิทธิ์สามารถเขียนโดย

$$\frac{|2[\alpha\Delta t/(\Delta x)^2] + 2[\alpha\Delta t/(\Delta y)^2]|}{|1 + 2[\alpha\Delta t/(\Delta x)^2] + 2[\alpha\Delta t/(\Delta y)^2]|} < 1 \quad (3.36)$$

ข้อกำหนด Scarborough นั้นสอดคล้องกับสมการ (3.35) เพราะอัตราส่วนสัมประสิทธิ์สมการ (3.36) น้อยกว่า 1 ทุกจุดกริด อย่างไรก็ตาม ในกรณีของการนำความร้อนที่มีการผลิตความร้อน ข้อกำหนดนี้อาจไม่สอดคล้องได้ ดังนั้นวิธี Gauss-Seidel เป็นวิธีง่ายที่ใช่และแนะนำสำหรับการลู่เข้าอย่างช้าและไม่เสถียรพยากรณ์มาก เมื่อมีจำนวนของกริดมากมาเกี่ยวข้อง



รูปที่ 3.4 พิกัดจุด  $(i, j)$  และบริเวณล้อมรอบ

**3.3.1.1.2 วิธี Line-By-Line :** วิธีนี้ถูกแนะนำโดย Patankar และประกอบด้วยลักษณะที่ต้องการของวิธีกระบวนการเมตริก tridiagonal (กระบวนการ Thomas) ซึ่งถูกใช้สำหรับปัญหาการนำในทิศทางเดียวและวิธี Gauss-Seidel พื้นฐานของวิธีนี้คือเส้นกริดที่ต้องการ ค่าของอุณหภูมิที่เส้นกริดด้านข้างทั้ง 2 จะถูกสมมติว่าทราบค่า ยกตัวอย่างเช่นภาพในรูป 3.5 จะสมมติให้ค่าของอุณหภูมิที่เส้นกริดด้านซ้ายและขวา (สังเกตที่เป็นจุดโปร่ง) ทราบค่า ถ้าการคำนวณค่าเป็นทางจากซ้ายไปขวา ค่าอุณหภูมิที่ถูกสมมติขึ้นที่เส้นกริดด้านซ้ายจะเป็นค่าที่คำนวณได้ใหม่ในการทำซ้ำครั้งปัจจุบัน ค่าอุณหภูมิที่ถูกสมมติขึ้นทางเส้นกริดด้านขวาจะเป็นค่าที่คำนวณได้โดยการทำซ้ำครั้งก่อน จุดมุ่งหมายคือการหาค่าอุณหภูมิของเส้นกริดกลาง (สังเกตว่าเป็นจุดทึบ) ขั้นนี้สามารถทำได้โดยการมองการนำความร้อนในเส้นกริดกลางเป็นทิศทางเดียว (ทิศทาง  $y$ ) และโดยการใช้สมการ (3.34) และกระบวนการ Thomas กระบวนการนี้กระทำซ้ำในเส้นกริดถัดไปจนกระทั่งครบทุกเส้นกริดในแนวตั้งจากทุกจุดก็จะถูกทำซ้ำจนครบ สำหรับการนำซ้ำต่อไป อาจเลือกพิจารณาเส้นกริดแนวขวางและทำซ้ำกระบวนการจนครบเส้นกริดแนวขวาง หลังจากนั้น การเปลี่ยนแปลงทิศทางจากการทำซ้ำหนึ่งสู่การทำซ้ำหนึ่ง อาจปรับปรุงข้อมูลความสัมพันธ์ระหว่างค่าขอบเขตและค่าภายในและทำให้ลู่เข้า หลังจากสนามอุณหภูมิได้ลู่เข้าสู่ช่วงเวลาที่ต้องการแล้ว วิธีการแก้สมการจะถูกนำมาใช้ในวงถัดไป กระบวนการนี้เป็นขั้นหนึ่งของวิธี Gauss-Seidel

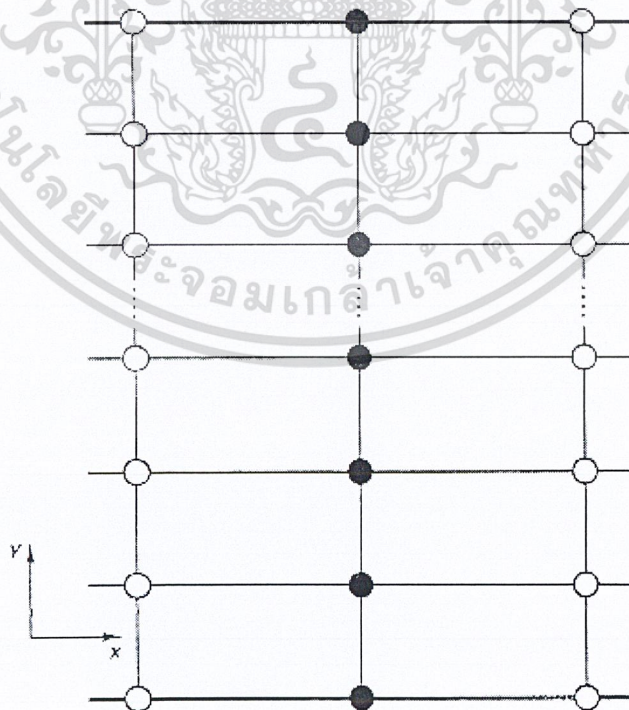
ข้อดีของวิธี Line-By-Line คือข้อมูลจะถูกส่งผ่านจากเส้นกริดขอบผิวทั้งหมดสู่เส้นกริดภายในทั้งหมด และยังเพิ่มความเร็วการแลกเปลี่ยนข้อมูลจากขอบผิวสู่พื้นที่การคำนวณภายใน การตัดสินใจเลือกระหว่างทิศทางในการคำนวณต่างๆ (ระหว่างแนวขวางกับแนวตั้งสำหรับการนำ 2 มิติ) หรือเลือกทิศทางการคำนวณในการทำซ้ำขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาที่พิจารณา (ลักษณะรูปร่างพื้นฐาน, เงื่อนไขขอบเขต)

**3.3.2 รูปแบบของ Crank-Nicolson** ในแผนผังนี้ อนุพันธ์ตัวแปรมิติจะถูกเฉลี่ยค่าระหว่างช่วงเวลา  $P$  กับช่วงเวลา  $P+1$  การประมาณผลต่างไปข้างหน้าจะถูกนำมาใช้ discretize กับอนุพันธ์ตัวแปรเวลา ผลลัพธ์ของสมการ discretize สำหรับการนำความร้อน 2 มิติในวัตถุซึ่งค่าคุณสมบัติทางความร้อนคงที่ ในกรณีไม่มีการผลิตความร้อนคือ

$$\frac{T_{i,j}^{P+1} - T_{i,j}^P}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{T_{i-1,j}^{P+1} - 2T_{i,j}^{P+1} + T_{i+1,j}^{P+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{i-1,j}^P - 2T_{i,j}^P + T_{i+1,j}^P}{(\Delta x)^2} \right] + \alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{T_{i,j-1}^{P+1} - 2T_{i,j}^{P+1} + T_{i,j+1}^{P+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{i,j-1}^P - 2T_{i,j}^P + T_{i,j+1}^P}{(\Delta y)^2} \right] \quad (3.37)$$

จะสังเกตเห็นว่าสมการ (3.37) สามารถได้มาจากสมการ (3.27) โดยกำหนดให้  $\lambda = 0.5$  สำหรับค่าการนำความร้อนคงที่และไม่มีการผลิตความร้อน แก่สมการ (3.27) หากค่าอนุกรม  $T_{i-1,j}^{P+1}$  เราจะได้

$$T_{i,j}^{P+1} = \frac{1 - [\alpha\Delta t/(\Delta x)^2] - [\alpha\Delta t/(\Delta y)^2]}{1 + [\alpha\Delta t/(\Delta x)^2] + [\alpha\Delta t/(\Delta y)^2]} T_{i,j}^P + \frac{[\alpha\Delta t/2(\Delta x)^2]}{1 + [\alpha\Delta t/(\Delta x)^2] + [\alpha\Delta t/(\Delta y)^2]} (T_{i-1,j}^{P+1} + T_{i+1,j}^{P+1} + T_{i-1,j}^P + T_{i+1,j}^P) + \frac{[\alpha\Delta t/2(\Delta y)^2]}{1 + [\alpha\Delta t/(\Delta x)^2] + [\alpha\Delta t/(\Delta y)^2]} (T_{i,j-1}^{P+1} + T_{i,j+1}^{P+1} + T_{i,j-1}^P + T_{i,j+1}^P) \quad (3.38)$$



รูปที่ 3.5 ลักษณะของเส้นกริด

การวิเคราะห์ความเสถียร von Neumann แสดงให้เห็นว่าแผนผัง Crank-Nicolson มีความเสถียร โดยเกี่ยวข้องกับค่าสัมประสิทธิ์ของชุดสมการพีชคณิต ผลลัพธ์จากการประยุกต์ใช้กับสมการ (3.38) ที่ทุกจุดกริดภายในทั้งหมด วิธีดังกล่าวนี้ รูปแบบ fully implicit สามารถนำไปใช้กับกรณีนี้ได้เช่นเดียวกัน สำหรับในกรณีของสภาพการนำทิศทางเดียว (ทิศทาง x) สมการ (3.38) สามารถจัดรูปใหม่ได้

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} T_{i-1}^{p+1} + \left[ 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_i^{p+1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} T_{i+1}^{p+1} \\ & = \frac{1}{2} \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} T_{i-1}^p + \left[ 1 - \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_i^p + \frac{1}{2} \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} T_{i+1}^p \end{aligned} \quad (3.39)$$

สำหรับการนำแบบ 2 และ 3 มิติวิธีการ Gauss-Seidel หรือวิธีการ Line-By-Line ซึ่งได้อธิบายรายละเอียดการนำไปใช้ในรูปแบบ fully implicit สามารถได้เช่นเดียวกันสำหรับรูปแบบ Crank-Nicolson

### 3.4 การแก้ Matrix โดยวิธี TDMA (Tri-diagonal Matrix Algorithm)

ในการพิจารณาปัญหาการนำความร้อนที่แบ่งเป็น grid จะได้สมการซึ่งสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปเมทริกได้ ซึ่งใช้ TDMA (Tri-diagonal Matrix Algorithm) ในการแก้เมทริก เพื่อให้ได้คำตอบที่เราต้องการ โดยสามารถอธิบายได้ดังนี้

เมื่อเราได้สมการของแต่ละ node ซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \phi_1 & = C_1 \\ -\beta_2 \phi_1 + D_2 \phi_2 - \alpha_2 \phi_3 & = C_2 \\ -\beta_3 \phi_2 + D_3 \phi_3 - \alpha_3 \phi_4 & = C_3 \\ -\beta_4 \phi_3 + D_4 \phi_4 - \alpha_4 \phi_5 & = C_4 \\ & \vdots \\ -\beta_n \phi_{n-1} + D_n \phi_n - \alpha_n \phi_{n+1} & = C_n \\ \phi_{n+1} & = C_{n+1} \end{aligned}$$

โดย  $\phi$  คือค่าคุณสมบัติใดๆ ที่พิจารณาของวัสดุ (เช่น สภาพการนำความร้อน, ความร้อนจำเพาะ, ค่าความหนาแน่น เป็นต้น) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของสมการในแต่ละแถวได้ดังนี้

$$-\beta_j \phi_{j-1} + D_j \phi_j - \alpha_j \phi_{j+1} = C_j$$

สำหรับ  $\phi_2$  ถึง  $\phi_n$  สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ต่อไปนี้

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2}$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_4} \phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3} \phi_2 + \frac{C_3}{D_3}$$

$$\phi_n = \frac{\alpha_n}{D_n} \phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n} \phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n}$$

ในขั้นตอนการหาคำตอบ เราจะใช้วิธี back-substitution ยกตัวอย่างเช่นในการหาค่าของ  $\phi_3$  เราจะใช้ค่าของ  $\phi_2$  มาแทนในสมการของ  $\phi_3$  จึงจะได้คำตอบตามต้องการ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\phi_3 = A_3 \phi_4 + C'_3$$

โดย

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad \text{และ} \quad C'_3 = \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2}$$

เราสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\phi_j = A_j \phi_{j+1} + C'_j$$

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}}$$

$$C'_j = \frac{\beta_j C'_{j-1} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}}$$

สำหรับการแก้สมการหาค่า  $\phi$  จะเริ่มการหาค่า  $A_j$  และ  $C'_j$  สำหรับทุกค่า  $j$  ( $j=1$  ถึง  $j=n$ ) แล้วจึงหาค่า  $\phi$  ย้อนกลับจาก  $\phi_n$  ไปหา  $\phi_1$  หรือเขียนเป็นขั้นตอนดังนี้

สำหรับปัญหาใน 2 มิติ สมการเริ่มต้นที่ใช้ในการสร้าง matrix จะอยู่ในรูป

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S_U$$

ในการแก้สมการเราจะเริ่มทำในแนว N-S ก่อน (ทิศ r) ดังนั้นสมการ จึงเป็น

$$-a_S \phi_S + a_P \phi_P - a_N \phi_N = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_U$$

กำหนดให้

$$\alpha_j = a_N$$

$$\beta_j = a_S$$

$$D_j = a_P$$

$$C_j = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_U$$

จากนั้นจึงใช้ขั้นตอนในข้างต้นแก้สมการหาค่า  $\phi$  ในแนว N-S ก่อนโดยกำหนดค่าเริ่มต้น (initial) สำหรับ  $\phi$  ที่เราไม่ทราบค่า (ยกตัวอย่างเช่น  $\phi_w$  สำหรับแนวกวาดแถวแรก ( $i=1$ ) ในการหาค่าในรอบที่ 1 (Iteration ครั้งที่ 1))

หลังจากหาค่า  $\phi$  ในแนว N-S ทุกๆ แนวแล้ว (จบ Iteration ครั้งที่ 1) จึงเริ่มทำซ้ำจนกว่าค่าความแตกต่างระหว่าง  $\phi_{new}$  และ  $\phi_{old}$  จะน้อยกว่าค่าที่ตั้งไว้ ( $|\phi_{new} - \phi_{old}| \leq \epsilon$ ) และวิธี TDMA ที่อธิบายข้างต้นนี้ จะถูกเขียนไว้ใน Sub Routine ที่ชื่อ LISOLV ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณคุณสมบัติต่างๆ



## บทที่ 4

# โปรแกรมคอมพิวเตอร์และการคำนวณ

### 4.1 สมการอนุพันธ์ของการนำความร้อนในกรณี 2 มิติ

พิจารณากับปัญหาการนำความร้อนภายในวัสดุสนใจอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและเกี่ยวข้องกับ 2 co-ordinates ตามทิศทางในระบบพิกัด คาร์ทีเซียน คือ  $x, y$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k \frac{\partial T}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ k \frac{\partial T}{\partial y} \right\} - r_s = 0 \quad (4.1)$$

โดยที่

$\rho$   $\equiv$  ค่าความหนาแน่นของวัสดุ

$c_v$   $\equiv$  ค่าความร้อนจำเพาะที่ปริมาตรคงที่

$k$   $\equiv$  ค่าสภาพการนำความร้อน

$r_s$   $\equiv$  แหล่งผลิตความร้อน

สมการสามารถเปลี่ยนพิกัดเป็นพิกัดทรงกระบอกได้ โดยมีข้อมูลช่วยในการกำหนดคุณสมบัติในวัสดุแบบต่างๆ

- คุณสมบัติของวัสดุ
- ค่าอุณหภูมิเริ่มต้น (กรณี สำหรับ ปัญหาขึ้นกับเวลา)
- การกำหนด อุณหภูมิ หรือ และ ฟลักซ์ความร้อน อยู่ในรูปแบบทั่วไป คือ

$$f_1 \frac{\partial T}{\partial n} + f_2 T + f_3 = 0 \quad (4.2)$$

โดย  $n$  แสดงผิวภายนอกที่ตั้งฉากกับขอบเขตและ  $f_1, f_2$  และ  $f_3$  เป็นฟังก์ชันเฉพาะของสถานะนั้น ๆ ตามตารางที่ 4.1

รูปแบบของสภาวะขอบเขต	$f_1$	$f_2$	$f_3$
มีการกำหนดค่าอุณหภูมิที่ผิวคงที่	0	1	$-T_B$
มีการกำหนดฟลักซ์ความร้อนที่ผิวคงที่	$k$	0	$-\dot{q}_B''$
มีการกำหนดไทม์ของไหลไหลผ่านพื้นผิว (มีการพาความร้อนที่ผิว)	$k$	$h$	$-hT_F$

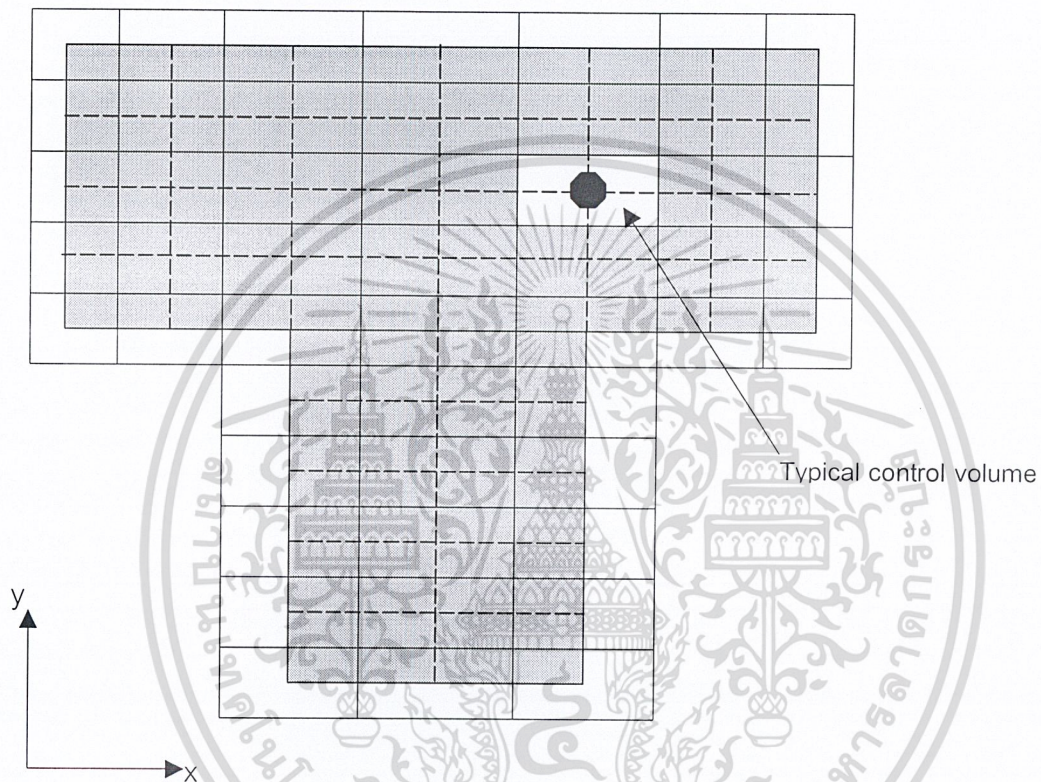
ตารางที่ 4.1 แสดงการกำหนดค่า  $f$  ในสมการ (4.2) ที่ลักษณะขอบเขตแบบต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.2 สมการผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite-Difference Equation)

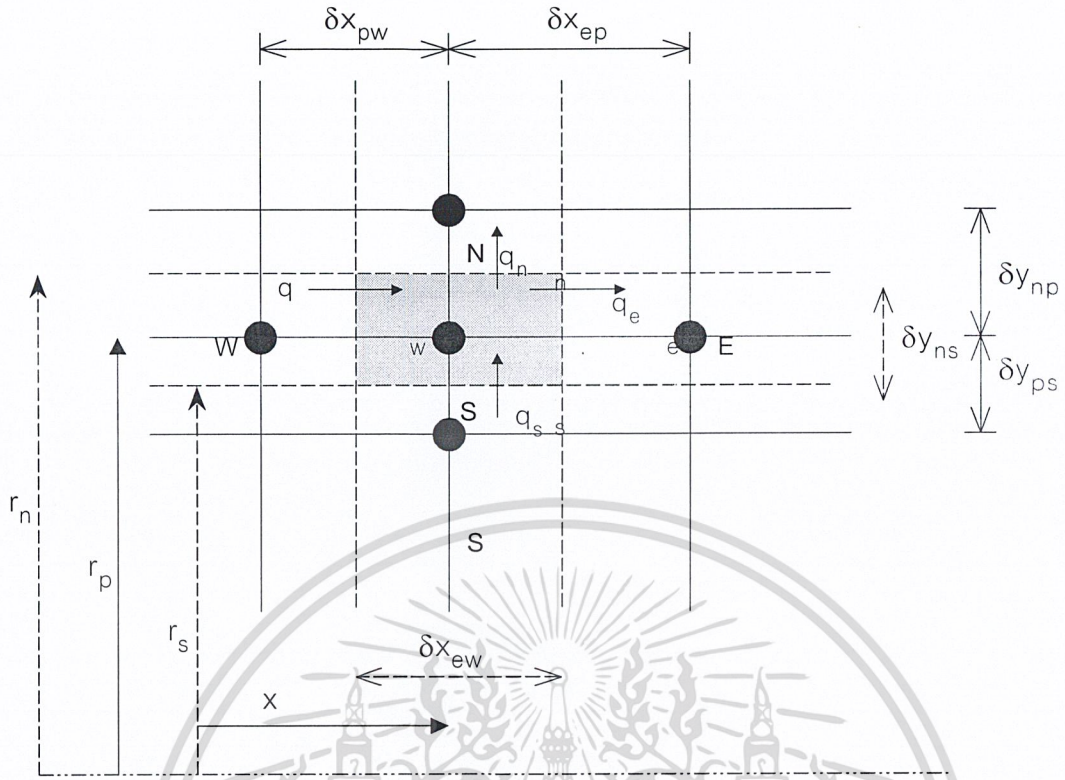
### 4.2.1 การสร้าง grid และ การกำหนดค่า

จุดประสงค์ คือ ในการหาค่าคำตอบเป็นตำแหน่งๆ แบ่งเป็น grid ที่เป็น เส้นตรง สร้างโดยเส้นระบบพิกัด การคำนวณอุณหภูมิจะคำนวณที่จุดที่ต่อเนื่องกัน บริเวณจุดต่อ หรือ เรียกว่า ‘node’ ตำแหน่ง และ พื้นที่ว่างระหว่างเส้น grid จะเป็นเท่าใดก็ได้ ซึ่งจะเกี่ยวกับการจับกลุ่ม และค่าเศรษฐศาสตร์ ที่บริเวณขอบจะเป็นที่ gradient ของอุณหภูมิจะมีลักษณะสูงชัน



รูปที่ 4.1 ลักษณะกริดทั่วไปในการคำนวณและปริมาตรควบคุมที่พิจารณา

แต่ละ grid node จะมีรูปร่างที่ขึ้นกับสิ่งแวดล้อมโดยตัวปริมาตรควบคุมของรูปร่าง ซึ่งเรียกว่า ‘cell’ และกับ สภาวะขอบเขต ดังแสดงในรูปที่ 4.1 และจากรูปที่ 4.2 แสดงความสัมพันธ์ของ ปริมาตรควบคุมรอบข้าง พร้อมทั้งแสดงลักษณะ node และ node ข้างเคียง ลักษณะนี้ จุด P เป็นจุดกลาง node ของกลุ่ม และมี node ใกล้เคียงเรียกเป็น N,S,E และ W ในลักษณะเป็นขอบเขตที่เหมาะสม และในการเกี่ยวข้องกับขอบเขตของ cell จะแสดงเป็นอักษรตัวเล็กแสดงในรูป พิกัด P คือ  $(x_p, y_p)$  ระยะที่เซลล์ติดกันคือ  $\delta x_{cw}$  และ  $\delta r_{ns}$  และระยะภายใน node คือ  $\delta x_{pw}$  และ  $\delta r_{np}$  อธิบายได้ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ลักษณะของจุดกริดทั่วไปและบริเวณล้อมรอบ

การอ้างอิงจะมีการเกี่ยวข้องกับทั้งพื้นที่ผิว และปริมาตร จะกล่าวได้ว่า  $V_p$  คือ

$$V_p \approx r_p \delta x_{cw} \delta r_{ns} \tag{4.3}$$

และพื้นที่ อธิบายได้เป็น

$$a_n \approx r_n \delta x_{cw} \tag{4.4}$$

$$a_c \approx r_p \delta r_{ns} \tag{4.5}$$

### 4.2.2 Derivation of Equation

พีชคณิต ระบบผลต่างสืบเนื่อง เป็นสิ่งที่เสริมกันของสมการ differential ดังในสมการ (4.1) จะทำการอธิบาย กลุ่มของ grid node ที่แสดงในรูป (รูป4.3) กระบวนการจะเป็นดังนี้ คือทำการอินทิเกรตครอบคลุม ปริมาตรควบคุมรอบจุด P และพร้อมกับการเฉลี่ยครอบคลุมการเพิ่มของเวลา  $\delta t$  จากนั้นค่าการอินทิเกรตจะถูกแทนด้วยการประมาณแบบพีชคณิต

เริ่มจาก รูปแบบของการอินทิเกรต ดังนี้

$$\frac{1}{\delta t} \int_{I_1}^{I_2} \int_{I_3}^{I_4} \left[ \rho c_v r \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( rk \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) - rs \right] dx dr dt = 0 \quad (4.6)$$

ทำการแยกเทอมในการคำนวณ การสมมติ และการประมาณ และให้ค่าคุณสมบัติ  $\rho$  และ  $c_v$  เป็นค่าคงที่กับเวลาและตำแหน่ง การประมาณค่าของ  $I_1$  จะได้ว่า

$$I_1 = \rho \frac{c_v}{\delta t} \left[ \int_w \int_r T dx dr \right]_{t+\delta t} \quad (4.7)$$

และจากการประมาณจะได้ว่า

$$I_1 \approx \rho c_v \frac{(T_p^{\text{new}} - T_p^{\text{old}})}{\delta t} V_p \quad (4.8)$$

ค่าตัวยก บอกถึง ค่าใหม่ และเก่า ที่เวลา  $t + \delta t$  และ  $t$  ตามลำดับ ค่า  $V_p$  อธิบายได้จากสมการ (4.3)

ในเทอม  $I_2$  ค่าการอินทิเกรต สามารถแยกเขียนได้เป็น

$$I_2 = -\frac{1}{\delta t} \int_{t+\delta t}^t \left\{ \int_w \left[ rk \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w dr \right\} dt \quad (4.9)$$

จากนั้นทำการประมาณค่าโดย รวมเป็นวงเล็บเป็นค่าน้ำหนักของเวลา ดังนี้

$$\frac{1}{\delta t} \int_{t+\delta t}^t \left\{ \right\} dt \approx f \left\{ \right\}^{\text{new}} + (1-f) \left\{ \right\}^{\text{old}} \quad (4.10)$$

โดย  $f$  เป็นการให้น้ำหนักมีค่าอยู่ระหว่าง 0 - 1 จากนั้นทำการอินทิเกรตภายในวงเล็บ ซึ่งแสดงผลรวมการไหลของความร้อนผ่านหน้า  $w$  และ  $e$  ของ cell การประมาณการไหลของความร้อนผ่านหน้า  $w$  จะได้ว่า

$$\int_w \left[ rk \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w dr \approx r_p \frac{(k_w + k_p)}{2} \frac{(T_p - T_w)}{\delta x_{pw}} \delta r_{ns} \quad (4.11)$$

ซึ่งเป็นการอธิบายรูปแบบความต้านทานความร้อน สำหรับ การถ่ายเทความร้อน 1 มิติระหว่างจุด P และ W ความคล้ายของรูปแบบสามารถแทนได้กับการถ่ายเทความร้อนระหว่างจุด E และ P อาจจะยอมให้มีการกำหนดค่าสภาพการนำความร้อน ได้จากการเฉลี่ยทางคณิตศาสตร์ของค่าสภาพการนำความร้อนของ node

กับ node ที่อยู่ติดกัน ซึ่งมีความถูกต้องและความเป็นจริงตามกายภาพของวัสดุ และค่าในเทอม  $I_3$  จะมีลักษณะคล้ายกับค่าในเทอม  $I_2$

การคำนวณในเทอมสุดท้าย  $I_4$  ค่า  $s$  แหล่งความร้อน สำหรับปัญหาจะยังไม่พิจารณา ซึ่งจะอธิบายได้ว่า ผลลัพธ์จะเป็นเชิงเส้น และ ฟังก์ชันค่าเฉลี่ยของ  $T_p$  เป็นดังนี้

$$I_4 = \frac{1}{\delta t} \int_0^{+\delta t} \int_w \int_v rs \, dx \, dr \, dt \quad (4.12)$$

$$\approx f(B_p^{\text{new}} T_p^{\text{new}} + C_p^{\text{new}}) + (1-f)(B_p^{\text{old}} T_p^{\text{old}} + C_p^{\text{old}})$$

ทำการรวมผลลัพธ์ที่ได้มา และจัดให้อยู่ในรูป สมการอนุรักษ์พลังงานแบบผลต่างสืบเนื่อง (Finite-Differential Energy Conservation Equation)

$$D_p (T_p^{\text{new}} - T_p^{\text{old}}) + f \left\{ \sum_c A_c^{\text{new}} (T_p^{\text{new}} - T_c^{\text{new}}) - (B_p^{\text{new}} T_p^{\text{new}} + C_p^{\text{new}}) \right\} \quad (4.13)$$

$$+ (1-f) \left\{ \sum_c A_c^{\text{old}} (T_p^{\text{old}} - T_c^{\text{old}}) - (B_p^{\text{old}} T_p^{\text{old}} + C_p^{\text{old}}) \right\} = 0$$

โดยค่า  $\sum_c$  แสดงค่า ผลรวมของกลุ่มของ node N S E W และค่าสัมประสิทธิ์ จะมีนิยามกับข้อกำหนดทางกายภาพ คือ

$$D_p \equiv \rho c_v V_p / \delta t \quad (4.14)$$

อาจเรียกได้เป็น ผลรวมความจุความร้อนของปริมาตร

ค่า  $A_c$  แทนค่า สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal Conductances) สำหรับการไหลของความร้อนระหว่างเซลล์ที่ติดกัน แทนได้ด้วย

$$A_N \equiv (k_N + k_p) a_n / 2\delta r_{NP} \quad (4.15)$$

$$A_S \equiv (k_S + k_p) a_s / 2\delta r_{PS} \quad (4.16)$$

$$A_E \equiv (k_E + k_p) a_e / 2\delta r_{EP} \quad (4.17)$$

$$A_W \equiv (k_W + k_p) a_w / 2\delta r_{PW} \quad (4.18)$$

การระบุค่า สัดส่วนการให้น้ำหนัก ( $f$ ) จำเป็นที่จะต้องให้ค่า  $f$  [3] แสดงให้เห็นว่ามีการใช้จริง ถ้าการให้ค่า  $f$  เป็น 0 สมการ (4.13) จะเป็นการคำนวณหาค่า  $T_p^{\text{new}}$  ที่จะอยู่ในรูปของ step เวลาเท่าทั้งหมด เป็น Explicit Function คือ

$$D_p T_p^{\text{new}} = \sum_c A_c^{\text{old}} T_c^{\text{old}} + \left( D_p - \sum_c A_c^{\text{old}} + B_p^{\text{old}} \right) T_p^{\text{old}} + C_p^{\text{old}} \quad (4.19)$$

การหาค่า  $T_p^{\text{new}}$  ทำได้ง่ายโดยใช้สมการ (4.19) แต่ละ grid node แต่จะมีข้อจำกัดของวิธี Explicit คือ บางครั้งค่า  $T_p^{\text{new}}$  จะไม่สัมพันธ์กับค่า  $T_p^{\text{old}}$  และค่า  $T_c^{\text{old}}$  เมื่อค่า  $s=0$  บอกถึงการบึงคับจำนวนมากที่สุดของ ระยะเวลาที่พอจะรับได้ สำหรับกรณีง่าย ๆ ที่ไม่มีแหล่งความร้อน ค่าต่างๆจะจำกัดอยู่เพียง

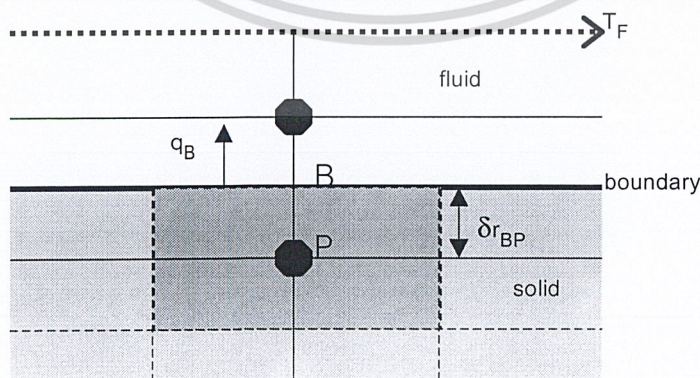
$$\frac{k(\delta t)_{\text{max}}}{\rho c_v \delta^2} \leq \frac{1}{4} \quad (4.20)$$

ด้วยเหตุนี้ วิธีแบบ Explicit จึงไม่นำมาใช้ แต่จะใช้วิธีของ Crank-Nicholson คือจะใช้ค่า  $f = 0.5$  ซึ่งเป็นวิธีแบบ Implicit เพราะค่าที่หาได้ของ  $T_p^{\text{new}}$  จะอยู่ในรูปที่เกี่ยวข้องกับค่าอุณหภูมิแวดล้อม”ใหม่” ( $T_c^{\text{new}}$ ) ค่าคำตอบจะอยู่ในเซตของสมการ Simultaneous ทำให้สามารถเลือกค่า  $\delta t$  ได้ โปรแกรม TEACH-C จะใช้รูปแบบ Fully Implicit โดยให้ค่า  $f = 1$  เพื่อให้การจัดเก็บข้อมูลในหน่วยความจำในคอมพิวเตอร์น้อยที่สุด การคำนวณปัญหาโดย TEACH-C จะอยู่ในรูปแบบของ

$$D_p^{\text{new}} (T_p^{\text{new}} - T_p^{\text{old}}) + \sum_c A_c^{\text{new}} (T_p^{\text{new}} - T_c^{\text{new}}) - (B_p T_p^{\text{new}} + C_p^{\text{new}}) = 0 \quad (4.21)$$

### 4.2.3 สภาวะขอบเขต

มีความสำคัญต่อหลักการ การอนุรักษ์พลังงาน grid จะถูกระบุตำแหน่งด้วยกายภาพของขอบเขตที่ซ้อนทับกัน กับขอบเขตที่ห่างไกลที่สุดของ cell โดยอุณหภูมิที่ grid node ภายนอกจะไม่เกี่ยวข้องกับลักษณะทางกายภาพ ในสมการ (4.21) จะเกี่ยวข้องกับ node ภายนอก ขั้นตอนการหาค่า ทำการกำจัดค่าเทอมการไหลความร้อนในสมการ (4.21) โดยกำหนดค่า  $A_c = 0$  จากนั้นใส่ค่าขอบเขตที่แท้จริง ในลักษณะ False Heat Source [3] ใช้ตัวแปร  $B_p$  และ  $C_p$  ดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 ลักษณะสภาวะขอบเขตที่มีของไหลไหลผ่าน

ซึ่งขอบเขตของปัญหาจะผ่านจุด B ที่ติดกับการพาความร้อนของของไหลที่ไหลผ่านขอบเขตที่อุณหภูมิ  $T_F$  และสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเป็น  $h$  อธิบายการไหลของความร้อน ( $\dot{q}_N$ ) ผ่านขอบเขตของ cell ซึ่งยังไม่ใช้ค่าที่ถูกต้องคือ

$$\dot{q}_N = -A_N(T_P - T_N) \quad (4.22)$$

ซึ่งสามารถกำจัดได้โดยการให้ค่า  $A_N = 0$  ดังนั้นค่าที่ถูกต้องของการไหลของความร้อน ได้จากการช่วยของสมการ (4.2) และ Finite-Differencing จะได้

$$\dot{q}_N = -(T_P - T_N)/R \quad (4.23)$$

โดยค่า  $R \equiv [2\delta_{r_{BP}}/(k_B + k_P) + 1/h]a_n$  เป็นผลรวมของการต้านทานความร้อนระหว่างจุด P กับของไหล ดังนั้นสุดท้ายค่า Linearised-Source Coefficients จะลดรูปเป็น

$$B_P \equiv -1/R \quad (4.24)$$

$$C_P \equiv T_F/R \quad (4.25)$$

ค่า Linearised-Source Coefficients จะขึ้นอยู่กับลักษณะสถานะของขอบเขต อธิบายได้ดังตารางที่ 4.2

รูปแบบของสถานะขอบเขต	$B_P$	$C_P$
มีการกำหนดค่าอุณหภูมิที่ผิวคงที่	$-\frac{k_{BP}a_n}{\delta_{r_{BP}}}$	$\frac{k_{BP}a_n T_B}{\delta_{r_{BP}}}$
มีการกำหนดฟลักซ์ความร้อนที่ผิวคงที่	0	$\dot{q}_B'' a_n$
มีการกำหนดให้มีของไหลไหลผ่านพื้นผิว (มีการพาความร้อนที่ผิว)	$-\frac{1}{R}$	$\frac{T_F}{R}$

$$\text{โดยที่ } k_{BP} \equiv \frac{1}{2}(k_B + k_P); R \equiv [\delta_{r_{BP}}/k_{BP} + 1/h]a_n$$

ตารางที่ 4.2 แสดงค่า Linearised-Source Coefficients

### 4.3 การหาค่าคำตอบของสมการ Difference

#### 4.3.1 รูปแบบการแทนค่า

จากสมการ (4.21) จัดรูปได้ใหม่เป็น

$$(A_p - S_p)T_p = \sum_c A_c T_c + S_U \quad (4.26)$$

โดยที่

$$A_p \equiv \sum_c A_c$$

$$S_U \equiv C_p + D_p T_p^{\text{old}}$$

$$S_p \equiv B_p - D_p$$

แต่ละสมการนี้จะเขียนแทนแต่ละ cell ภายใน และจะทำให้เกิดเซตของสมการ Simultaneous เป็นจำนวนสมการที่เท่ากับจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า โครงสร้างของโปรแกรม TEACH-C เป็นที่ยอมรับในกระบวนการหาค่าโดยใช้วิธีการการทำซ้ำเป็นแถว (Iteration of line) และการปรับปรุงเป็นกลุ่ม (Block adjustments) เป็นผลให้การคำนวณมีประสิทธิภาพ ปราศจากความยุ่งยากและลดปริมาณความต้องการความจุของคอมพิวเตอร์

#### 4.3.2 การทำซ้ำเป็นแถว (Iteration of line)

กระบวนการนี้เกี่ยวข้องกับกาแก้ปัญหาาระบบสมการที่เกิดขึ้นพร้อมกันสำหรับค่าอุณหภูมิของแต่ละ grid line ขณะที่อุณหภูมิของเส้นข้างเคียงจะถูกสมมติให้เป็นอุณหภูมิที่รู้ค่า อาจใช้การคิดแบบ line by line กำหนดใช้วิธีการกระทำซ้ำจุดแบบ Gauss-Seidel แล้วใช้การกำจัดแบบ Gaussian รูปแบบ TDMA 'Tri-Diagonal Matrix Algorithm'

กระบวนการ line by line จะประยุกต์ใช้ตามแนวเส้นเหนือ-ใต้ เริ่มจากเส้นทาง ตะวันตก ไป ตะวันออก สำหรับแต่ละเส้นจะเขียนสมการได้เป็น

$$(A_p - S_p)T_p = A_N T_N + A_S T_S + S'_U \quad (4.27)$$

โดยที่  $S'_U \equiv S_U + A_E T_E^{N-1} + A_W T_W$  เป็นการคิดที่อุณหภูมิ step เวลาปัจจุบัน ด้วย  $(N-1)$  เป็นค่าของ  $T_E$  ที่ step เวลาก่อนหน้าการคำนวณครั้งปัจจุบัน 1 ครั้ง เซตของสมการแต่ละเส้นจะมีรูปแบบดังนี้

$$d_j T_j = a_j T_{j+1} + b_j T_{j-1} + c_j \quad (4.28)$$

โดยค่า  $j$  แสดงตำแหน่งของเส้นในแนวตั้ง

ด้วยหลักการ TDMA จะเปลี่ยนสมการ (4.28) ด้วยการแทนค่าวิธี Back-substitution

$$T_j = a'_j T_{j+1} + c'_j \quad (4.29)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ จะนิยามได้เป็น

$$\begin{aligned} a'_j &\equiv a_j / (d_j - b_j a'_{j-1}) \\ c'_j &\equiv (b_j c'_{j-1} + c_j) / (d_j - b_j a'_{j-1}) \end{aligned}$$

และทำการวนแทนค่าจนครบทุกเส้นของ grid line

### 4.3.3 การปรับปรุงเป็นกลุ่ม (Block adjustments)

ในการทำซ้ำโดยทั่วไปจะเกิดค่าผิดพลาด ในสมการทั่วไปจะเกิดค่าผิดพลาดได้ไปจากบริเวณสนาม อุณหภูมิไปจนถึงค่าขอบเขต จะมีการทำให้ค่าลดลงหรือทำการกำจัดค่าผิดพลาดได้โดยค่าขอบเขต ซึ่งไม่สามารถลดค่าผิดพลาดให้เท่ากับ 0 ได้ภายในการทำซ้ำเพียงครั้งเดียว จึงพิจารณาค่าผิดพลาดเป็นแหล่งตกค้าง (Residual Source,  $R_p$ ) ของสมการ Finite Difference นิยามได้ดังนี้

$$R_p \equiv (A_p - S_p) T_p - \sum_c A_c T_c - S_U \quad (4.30)$$

ค่า  $R_p$  ตามกายภาพ เป็นค่าที่แสดงถึง ค่าสุทธิของพลังงานที่ไม่สมดุลสำหรับ cell

การใช้หลักการ TDMA ลดค่า  $R_p$  ที่ทุก node ของเส้นให้เป็นศูนย์ ค่าของมันจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของ เส้นข้างเคียง ซึ่งค่าของมันจะน้อยลงเมื่ออุณหภูมิของเส้นข้างเคียงมีการปรับตัวให้ค่าเข้าใกล้ค่าตอบของ สนามอุณหภูมิ

ในวัฏจักรการคำนวณเมื่อมีการลู่ออกค่าคำตอบซ้ำ จะมีสาเหตุมาจาก เมื่อค่าความต้านทานที่ขอบเขต มีค่ามาก เช่นกรณีมีค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน  $h$  มีค่าน้อย ผลจากค่าความต้านทานความร้อนมีค่า มากทำให้ส่งผลสะท้อนกลับไปภายในสนามอุณหภูมิ โดยการไม่ลดลงของค่า  $R_p$

การแก้ไขที่มีประสิทธิภาพคือ การนำมาซึ่งกระบวนการปรับแก้แบบต่อเนื่องในเวลาเดียวกันของ อุณหภูมิในแต่ละเส้น โดยให้การเพิ่มขึ้นของแต่ละเส้นเพิ่มอย่างเป็นรูปแบบเดียวกันจะเป็นผลให้ค่า  $R_p$  มีผล รวมเท่ากับศูนย์ ในทุกๆเส้น

รายละเอียดของกระบวนการนั้น คือ ให้สมการการหาค่าคำตอบทั่วไปคูณด้วยการทำซ้ำของเส้น แทน ด้วย  $\tilde{T}_{i,j}$  โดย  $i$  คือคอลัมน์ที่  $i$  (ตามแนวแกนตั้ง) และ  $j$  คือแถวที่  $j$  (ตามแนวแกนนอน) ถ้าการเพิ่มของ  $\delta T$  ถูกเพิ่มเข้าไปภายใน node ในแต่ละคอลัมน์ ดังนี้

$$\sum_{\text{all } j} \left\{ \begin{array}{l} (A_{ij}^P - S_{ij}^P)(\tilde{T}_{ij} + \delta T_i) - A_{ij}^W(\tilde{T}_{i-1,j} + \delta T_{i-1}) \\ -A_{ij}^E(\tilde{T}_{i+1,j} + \delta T_{i+1}) - A_{ij}^N(\tilde{T}_{i,j+1} + \delta T_i) \\ -A_{ij}^S(\tilde{T}_{i,j-1} + \delta T_i) - S_{ij}^U \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

จากนั้นหาสมการเพื่อหาค่าผลลัพธ์ค่า  $\delta T$  จะทำการจัดรูปแบบใหม่ของสมการ (4.31) ได้เป็น

$$d_i \delta T_i = a_i \delta T_{i+1} + b_i \delta T_{i-1} + c_i \quad (4.32)$$

โดย

$$a_i \equiv \sum_j A_{ij}^E$$

$$b_i \equiv \sum_j A_{ij}^W$$

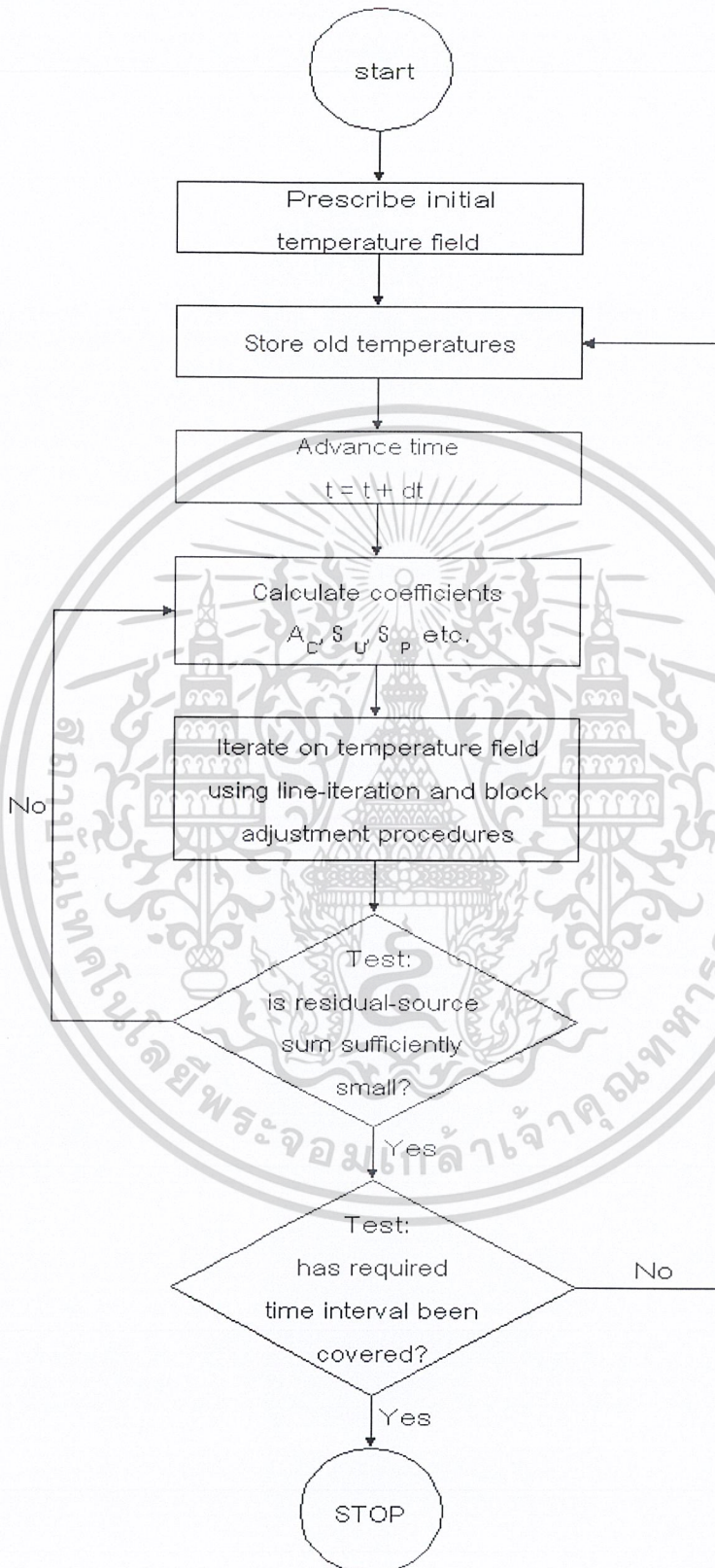
$$c_i \equiv -\sum_j \left\{ (A_{ij}^P - S_{ij}^P)\tilde{T}_{ij} - \sum_c A_{ij}^c \tilde{T}^c - S_{ij}^U \right\} = -\sum_j R_{ij}^P$$

$$d_i \equiv \sum_j (A_{ij}^E + A_{ij}^W - S_{ij}^U)$$

มีสิ่งที่น่าสนใจคือ

1. ค่า “Source Term”  $c_i$  สำหรับการปรับปรุง T จะไม่มากกว่าผลรวมค่าแหล่งตักข้าง  $\sum R_{ij}^P$
2. สมการมีลักษณะคล้ายสมการ (4.28) ด้วยเหตุนี้จึงสามารถใช้วิธี TDMA ได้

#### 4.3.4 ลักษณะกระบวนการที่สมบูรณ์



รูปที่ 4.4 แสดง flow chart ของโปรแกรมการคำนวณปัญหาด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.4 เป็น Flow Chart ของกระบวนการคำนวณ มีหลายขั้นตอนที่เกี่ยวข้องในการส่งอุณหภูมิไปข้างหน้า เริ่มจาก การจำแนกค่าเริ่มต้น  $t = t_0$  แล้วต่อไปเป็น  $t = t + \Delta t$  โดยการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของสมการ Finite Difference ครั้งแรกเริ่มจากประมาณค่าอุณหภูมิทั่วไปเริ่มต้นจากนั้นอุณหภูมิจะมีการปรับปรุงค่าโดยค่าการประมาณแบบ line-Iteration กวาดไป และรวมการคิดเป็นกลุ่ม Block Adjustment ผลลัพธ์ที่ได้จะถูกตรวจสอบความถูกต้องเพื่อที่จะค่าคำตอบที่สามารถยอมรับได้ด้วยบรรทัดฐานที่กำหนดไว้ ถ้าไม่เป็นที่ยอมรับจะเริ่มต้นคำนวณใหม่จนได้ค่าคำตอบที่สามารถยอมรับได้ จากนั้นด้วย step เวลา จะมีการเก็บค่าใหม่เป็นค่าเก่า ถ้าเป็นที่สภาวะ Steady-State จะกำหนดให้  $\Delta t = \infty$  จนได้ค่าคำตอบที่สมบูรณ์จึงหยุดการคำนวณ

### 4.3.5 ความน่าเชื่อถือของโปรแกรม

#### 4.3.5.1 การทดสอบการลู่ออก

การลู่ออก หมายถึง การที่ค่าคำตอบของปัญหาที่ได้จากการทำซ้ำมีค่าที่ออกห่างจากเซตของค่าเริ่มต้นที่เป็นค่าคำตอบที่ยอมรับได้ของ Finite-Differential Equation ซึ่งค่าที่ยอมรับได้วัดได้โดย

1. การลดลงของค่าความเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ จะยอมรับได้เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงจาก step ก่อนมีค่าน้อยๆ ตามที่กำหนดไว้
2. การลดลงของค่าผิดพลาดส่วนที่เหลือ ( $R_p$ ) ของ Finite-Difference Energy Conservation Equation ให้มีค่าน้อยที่สุด โดยเฉพาะค่า  $R_p$  น้อยที่สุดจะเป็นที่นิยมในการพิจารณา

#### 4.3.5.2 ความถูกต้อง

ในกระบวนการทั่วไปของสมการ Finite-Difference ความถูกต้องของกระบวนการจะไม่ขึ้นกับค่าที่ยอมรับได้ของค่าคำตอบของกระบวนการเท่านั้น แต่ยังขึ้นกับขนาดของความกว้าง grid line และการเปลี่ยนแปลงระยะความห่างของเวลา

#### 4.3.5.3 เสถียรภาพ

สมการ Finite-Difference ดังในสมการ (4.26) เป็นรูปแบบที่น่าพอใจ ในเทอมคณิตศาสตร์ จะต้องการลักษณะที่เป็น

$$|A_p - S_p| \geq \sum_c |A_c| \quad (4.33)$$

ที่ทุกจุดของ grid cell

สำหรับ ปัญหาไม่เชิงเส้น บางครั้งจำเป็นต้องลดค่าการเปลี่ยนแปลงในอุณหภูมิ ที่ปรากฏระหว่างการทำซ้ำ มี 2 ความหมายที่สามารถทำได้โดย

1. ทำให้ step เวลา มีค่าน้อยๆ
2. การใช้ Under-Relaxation

การคำนวณ  $T_p$  คือ

$$T_p = \beta T_p^N + (1-\beta) T_p^{N-1} \quad (4.34)$$

โดย  $T_p^N$  และ  $T_p^{N-1}$  เป็นค่าคำตอบที่ได้จากการทำซ้ำครั้งที่  $N$  และ  $N-1$  ตามลำดับ และ  $\beta$  เป็นสัดส่วน Under-Relaxation มีค่าระหว่าง  $0 - 1$  จะมีลักษณะในการปฏิบัติการแบบ Implicit จะทำการแทนค่า  $T_p^N$  ในสมการ (4.34) ลงในสมการ (4.26) จะได้

$$\left[ (A_p - s_p) / \beta \right] T_p = \sum_c A_c T_c + s_U + (1-\beta) T_p^{N-1} (A_p - s_p) / \beta \quad (4.35)$$





กำหนดค่าเริ่มต้นของการคำนวณจากการที่ผู้ใช้ต้องการ สังเกต ควบคุมขั้นตอนการทำงาน ซึ่งระบุได้เป็นจำนวน Step เวลา การหยุดการทำงานในแต่ละ Step และ สร้างผลลัพธ์ของสนามอุณหภูมิพร้อมกับค่าอื่นๆ ที่ระหว่างและสิ้นสุดขั้นตอนการทำงาน ซึ่งสามารถเข้าใจได้ง่ายโดยการแบ่ง Subroutine เป็น Chapter ย่อยๆ ดังรูปที่ 4.5

การคำนวณที่เหมาะสมจะได้รับการช่วยเหลือโดย Subroutine ช่วยเหลือ ได้แก่ Subroutine INIT ,PROPS ,CALCT และ PROMOD กับ SOLVE

**Subroutine INIT** เป็นชื่อเรียกแทน INITialisation process คือ การเริ่มเก็บค่าเริ่มต้น เช่น ความกว้าง grid line ปริมาณที่เกี่ยวข้องต่างๆภายในปริมาตรควบคุม

**Subroutine PROPS** เป็นชื่อเรียกแทน material PROPerTieS คือ การทำให้เกิดการคำนวณค่าคุณสมบัติของวัสดุ เช่น ค่าสภาพการนำความร้อนที่อาจเปลี่ยนแปลงไม่คงที่

**Subroutine CALCT** เป็นชื่อเรียกแทน CALClation of Temperature คือ การคำนวณค่าอุณหภูมิ แต่ละครั้งที่เรียกใช้จะเริ่มต้นวัฏจักรการทำงานซ้ำของค่าหาค่าคำตอบสนามอุณหภูมิ ทำการรวบรวมค่าสัมประสิทธิ์ของ Finite-Diffence Equation ที่ทุกๆ cell ภายใน แล้วทำการเรียก subroutine promod

**Subroutine PROMOD** เป็นชื่อเรียกแทน PROblem Modification คือ การจัดรูปค่าสภาวะขอบเขต และแหล่งความร้อน สุดท้ายทำการเรียก subroutine solve

**Subroutine SOLVE** เป็นชื่อเรียกแทน SOLVE คือ การหาค่าคำตอบของ Finite Difference Equation ซึ่งภายใน subroutine นี้แบ่งออกเป็นอีก 2 ส่วน

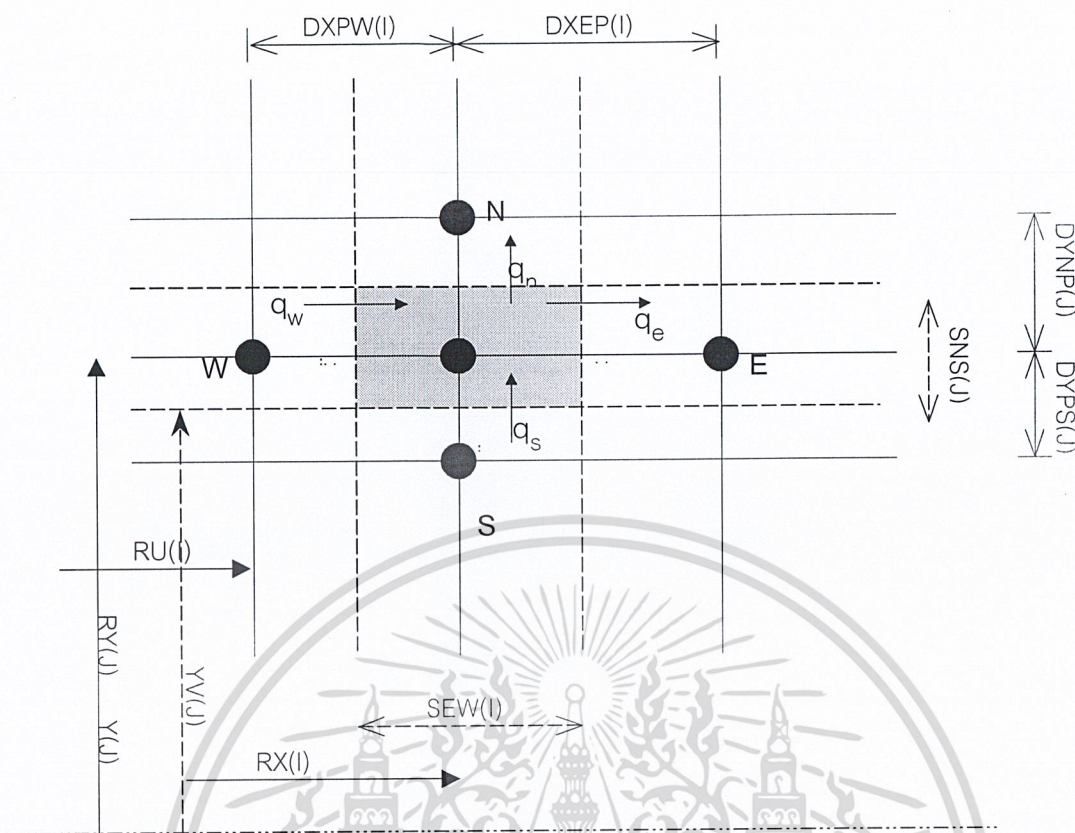
**Subroutine LISOLV** เป็นชื่อเรียกแทน Line SOLVing คือ การสร้างค่าเมบ line-by-line เพื่อที่จะมาประยุกต์ใน BLKSLV เป็นชื่อเรียกแทน BlocK SoLVing เป็นการใช้วิธีการ Block Adjustment

**Subroutine PRINT** เป็นชื่อเรียกแทน PRINT คือ การพิมพ์ค่าคำตอบของสนามอุณหภูมิ พร้อมกับคำอธิบายที่เหมาะสม

#### 4.4.3 ระเบียบแบบแผน และ สัญลักษณ์

##### 4.4.3.1 grid

ในรูปที่ 4.6 แสดง ตัวแปรในภาษา Fortran ที่อธิบายพิกัดของ grid node และปริมาณที่เกี่ยวข้อง เช่น ระยะช่องว่างระหว่าง node รูปร่างของปริมาตรควบคุม โดยที่ node จะมีคู่อันดับเป็น  $(I, J)$  โดยที่  $I$  บอกรหัส grid line ตามแนวแกน  $x$  และ  $J$  บอกรหัส grid line ตามแนวแกน  $y$  ขอบเขตของ  $I$  และ  $J$  คือ  $1 \leq I \leq NI$  และ  $1 \leq J \leq NJ$  ตามลำดับ แต่เป็นเพียงแค่การกำหนดดาร์เรย์ และมีค่า INCYLX และ INCYLY เป็นตัวกำหนดระบบพิกัดที่เป็นพิกัดทรงกระบอก



รูปที่ 4.6 การกำหนดค่าตัวแปรของกริด

ค่าที่เห็นในรูปที่ 4.6

- DXPW (I) เป็นช่องว่างระหว่างจุด P กับ W แทนค่า  $\delta_{x_{pw}}$
- DYPS (J) เป็นช่องว่างระหว่างจุด P กับ S แทนค่า  $\delta_{y_{ps}}$
- SEW (I) เป็นระยะของ cell แวดล้อมจุด P ตามแนวแกน X
- SNS (J) เป็นระยะของ cell แวดล้อมจุด P ตามแนวแกน Y

#### 4.4.3.2 ค่าตัวแปรเกี่ยวข้อง และ คุณสมบัติวัสดุ

ค่า T “ใหม่” และ “เก่า” จะถูกเก็บไว้ใน T(I, J) และ TOLD(I, J) ตามลำดับ เมื่อ I และ J ระบุตำแหน่ง และมีอาร์เรย์ระบุค่าสภาพการนำความร้อน เป็น GAMH(I, J) ค่าความหนาแน่น และ ค่าความร้อนจำเพาะระบุเป็น DENSIT และ CV ตามลำดับ การกำหนดรูปร่างจะกำหนดใน DIMENSION และ COMMON โดยค่า IT และ JT ใช้ในการระบุตำแหน่งในตัวโปรแกรม

#### 4.4.3.3 การควบคุมค่าตัวแปร

4.4.3.3.1 การระบุการคำนวณเป็นแบบเกี่ยวข้องกับเวลา หรือ ที่สภาวะสม่ำเสมอ ใช้กำหนดโดย INTIME เมื่อให้มีค่าเป็น .TRUE. จะเป็นการคำนวณแบบเกี่ยวข้องกับเวลา ถ้ากำหนดเป็น .FALSE. จะเป็นการคำนวณแบบที่สภาวะสม่ำเสมอ ซึ่งจะให้ค่า  $\delta_t = \infty$  โดยอัตโนมัติ

4.4.3.3.2 การระบุให้ค่าสภาพการนำความร้อนเป็นแบบคงที่ หรือ แบบเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ กำหนดโดยINPRO เมื่อให้ห้ค่าเป็น .TRUE. จะเป็นการคำนวณแบบการให้ค่าสภาพการนำความร้อนเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ ถ้ากำหนดเป็น .FALSE. จะเป็นการคำนวณที่ให้ค่าสภาพการนำความร้อนเป็นค่าคงที่

#### 4.4.3.3.3 การควบคุมการคำนวณ

MAXSTP	เป็นการกำหนดค่าสูงสุดของStep เวลา ถ้า INTIME=.FALSE. MAXSTP จะถูกทำให้เท่ากับ 1 โดยอัตโนมัติ
MAXIT	เป็นการกำหนดค่าจำนวนสูงสุดที่อนุญาตในการทำการทำซ้ำ
SORMAX	เป็นระดับการลดลงของค่า $\sum R_p$ ที่เป็นที่ยอมรับที่จะสิ้นสุดการทำซ้ำ
DT	เป็นการกำหนดค่าการเพิ่มของ Step เวลา ( $\delta t$ )
URFT	เป็นค่า Under Relaxation Factor ที่ระบุในสมการ (4.34)

#### 4.4.3.3.4 การควบคุมค่าผลลัพธ์

NITPRI	เป็นการกำหนดจำนวนการทำซ้ำที่จะให้พิมพ์ค่าสนามอุณหภูมิ ระหว่างการทำซ้ำ
NSTPRI	เป็นการกำหนดช่วงจำนวน Step เวลาที่จะให้พิมพ์ค่าสนามอุณหภูมิ ระหว่างที่มีการลู่ออก
IMON,JMON	เป็นการกำหนดจุดที่จะเป็นจุดสังเกต ส่วนใหญ่จะเป็นจุดกึ่งกลางของวัสดุที่จะพิจารณา

#### 4.4.3.4 ค่าสัมประสิทธิ์ของ Finite-Difference equation

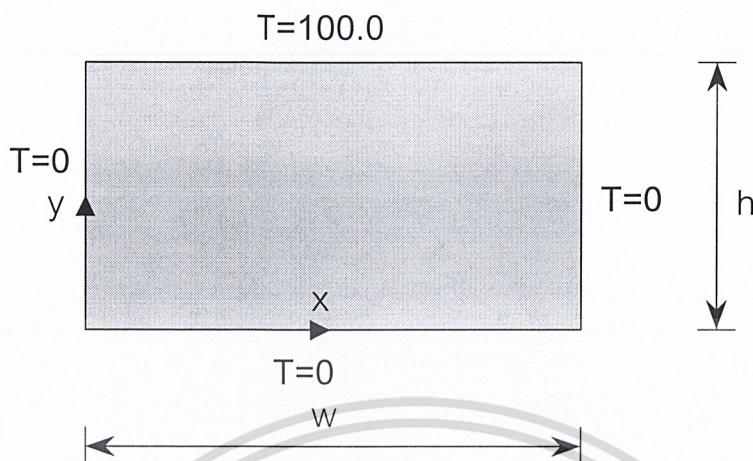
เป็นค่าที่ปรากฏอยู่ในสมการ (4.30) เป็นดังนี้

ค่าสัมประสิทธิ์	สัญลักษณ์ทางภาษา FORTRAN
$A_N$	AN (J)
$A_S$	AS (J)
$A_E$	AE (J)
$A_W$	AW (J)
$A_P$	AP (J)
$S_U$	SU (J)
$S_P$	SP (J)

ใช้ระบุเป็นเพียงอาร์เรย์ 1 มิติ จะมีการเขียนทับกันในกระบวนการ 1 grid line ไป grid line

เส้นต่อไป

#### 4.4.4 ค่าทั่วไปในการระบุขนาดวัตถุที่พิจารณา



รูปที่ 4.7 การแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรม TEACH-C พื้นฐาน

จากรูปที่ 4.7 จะได้

H เป็นความสูงของแท่ง  
 W เป็นความกว้างของแท่ง  
 TBOT เป็นค่าอุณหภูมิที่ขอบเขตต่างๆ  
 TTOP  
 TLEFT  
 TRIGHT

#### 4.4.5 อธิบายการทำงานในแต่ละ Subroutine

##### 4.4.5.1 Subroutine ที่ขึ้นกับปัญหา

##### 4.4.5.1.1 CONTRO

- i. Chapter 0 เกี่ยวกับการจัดเตรียมการปฏิบัติการระบุตัวอักษรที่จะเป็นหัวเรื่องของผลลัพธ์ในอาร์เรย์ HEDT ( 6 ), HEDS ( 6 ) ระบุรูปร่างเป็น JT และ IT
- ii. Chapter 1 เริ่มต้นประกาศรูปร่าง grid ในระบบคาร์ทีเซียน กำหนด INCYLX และ INCYLY เป็น .FALSE. ในจำนวน node เป็น 12 x 12 ระบุขนาดของบริเวณคำนวณ พร้อมด้วยมีการใช้ฟังก์ชันขยายระยะห่างระหว่าง grid ด้วย FEXPX และ FEXPY สุดท้ายคือกำหนด JS ( I ) และ JN ( I ) เป็น 2 และ (NJ-1) ตามลำดับ พร้อมกับกำหนดค่าผิดพลาดส่วนเหลือ จำนวนการทำซ้ำสูงสุด ค่า Under-Relaxation กำหนดเป็น 1 และให้ IMON = JMON = 6
- iii. Chapter 2 เริ่มด้วยการเรียก Subroutine INIT ซึ่งทำการเซตค่า Geometrical ของ grid เป็น 0 แล้วกลับสู่ Subroutine CONTRO ทำการกำหนดอุณหภูมิของสถานะขอบเขต และกำหนด

ค่าอุณหภูมิภายในเริ่มต้น แล้วเรียก Subroutine PROPS เพื่อกำหนดอาร์เรย์สภาพการนำความร้อน จากนั้น คำนวณค่าผิดพลาดส่วนเหลือ โดย ค่าความต้านทานความร้อนอยู่ในรูปแบบ

$$k(T_{\text{top}} - T_{\text{bot}})W/H$$

ขั้นตอนสุดท้ายคือการพิมพ์ค่าสนามอุณหภูมิ และรูปแบบปัญหา

iv. Chapter 3 เกี่ยวข้องกับการคำนวณจริงๆ ซึ่งจะทำการ

- ปรับเปลี่ยน DT ในการคำนวณแบบ Unsteady
- ปรับปรุงค่าสถานะขอบเขต และ/หรือ แหล่งความร้อน
- เปลี่ยนการพิมพ์ออกที่จุดพิจารณา

ถ้าไม่เจอค่า  $R_p$  เท่าที่กำหนดไว้ ภายในเวลาที่กำหนดในขั้นตอนการคำนวณจะเป็นการคู่ ออก

v. Chapter 4 เป็นขั้นตอนสุดท้ายสิ้นสุดการคำนวณหลัก จะทำการพิมพ์ค่าสุดท้ายของสนามอุณหภูมิ

#### 4.4.5.1.2 PROMOD

ใน Subroutine นี้ จะปรับปรุงลำดับของปัญหาให้สอดคล้องกับสถานะขอบเขตของ Finite Difference Equation ระบุได้เป็น

- i. ชั้นแรกละเว้นค่าที่ไม่เหมาะสมของการไหลของความร้อน คือ กำหนดให้  $AN(NJ - 1) = 0$
- ii. ระบุค่าการอธิบายการไหลของความร้อน อยู่ในรูปแบบ

$$\dot{q}_n = k_B \frac{(T_B - T_P) \delta x_{cw}}{\delta y_{BP}} \quad (4.36)$$

สังเกตได้จากรูปที่ 4.3

#### 4.4.5.1.3 PROPS

เป็นเพียงแค่การกำหนดค่าสภาพการนำความร้อน ระบุเป็น TCON นำไปเก็บไว้ใน อาร์เรย์ GAMH ( I , J )

### 4.4.5.2 Subroutine เป็นอิสระกับปัญหา

#### 4.4.5.2.1 CACLT

- i. Chapter 1 เกี่ยวข้องกับการรวมสัมประสิทธิ์ของ Finite Difference Equation จะทำให้ในรูปแบบ line-by-line สำหรับ  $2 \leq I \leq NI - 1$  จำกัดแต่ละ line โดย JS ( I ) และ JN ( 2 ) จะเป็น

การสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องคือ  $AS(J) = AN(J-1)$  และ  $AW(J)$  ในแถวที่  $I$  จะเท่ากับ  $AE(J)$  ในแถวที่  $I-1$

- ii. Chapter 2 ทำการเรียก Subroutine PROMOD ทำการปรับปรุงค่าสัมประสิทธิ์ที่จะเป็น
- iii. Chapter 3 ประกอบด้วยขั้นตอน รวบรวม Difference Equation อยู่ในรูปแบบที่ต้องการสำหรับการหาค่าคำตอบของการคำนวณ และรวมค่าผิดพลาดส่วนเหลือ
- iv. Chapter 4 เกี่ยวกับการคำนวณ เรียก Subroutine LISOLV และ BLKSLV

#### 4.4.5.2.2 SOLVE

- i. Chapter 1 เข้า LISOLV ที่มีการใช้ TDMA รวบรวมสัมประสิทธิ์จากสมการ (4.28) แล้วคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ตามสมการ (4.29) หาค่าสุดท้ายสำหรับอนุกรมโดยการแทนค่ากลับแล้วทำการสร้างสัมประสิทธิ์ตามสมการ (4.32) เพื่อใช้ใน BLKSLV
- ii. Chapter 2 เข้า BLKSLV เกี่ยวกับการใช้ Block Adjustment ตามขั้นตอน แล้วทำการสร้างการปรับปรุงอนุกรมเปลี่ยนแปลง

#### 4.4.5.2.3 INIT

- i. Chapter 1 ประกอบด้วยการคำนวณ grid
- ii. Chapter 2 เป็นการสร้างค่าเริ่มต้น

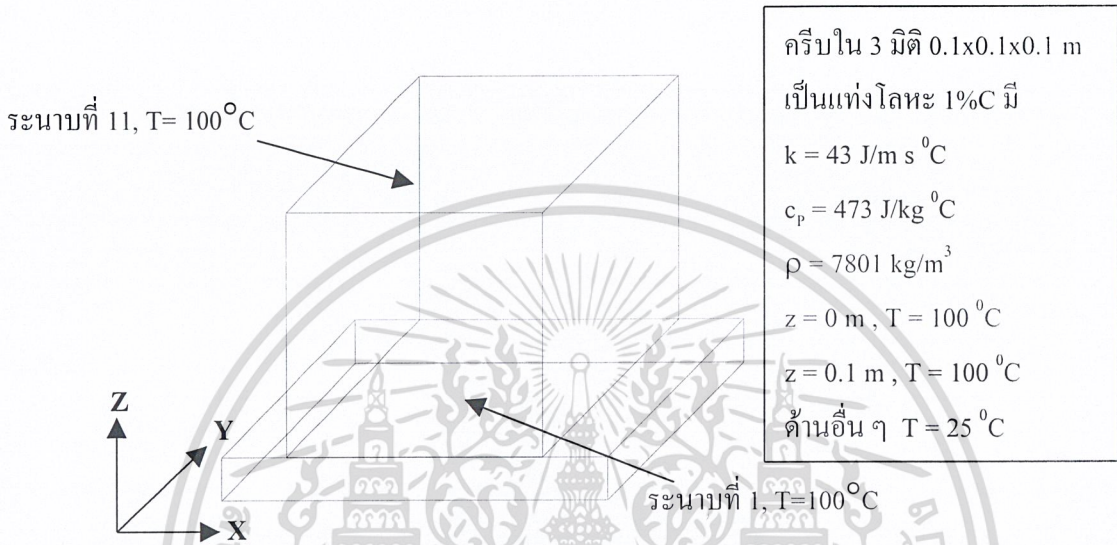
#### 4.4.5.2.4 PRINT

เป็นการพิมพ์ค่าสนามอนุกรมทั้งในกรณีการสุ่มเข้า หรือสุ่มออก

# บทที่ 5

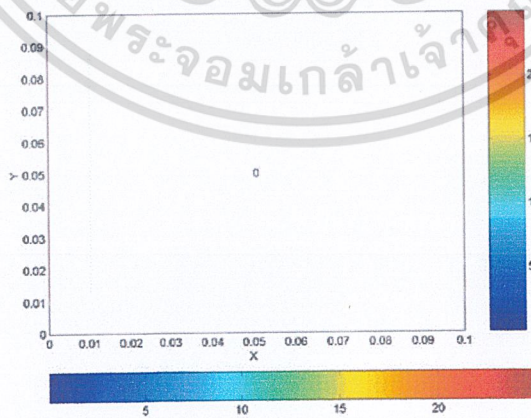
## ผลการคำนวณและการวิเคราะห์

### 5.1 ลักษณะของภาพปัญหา

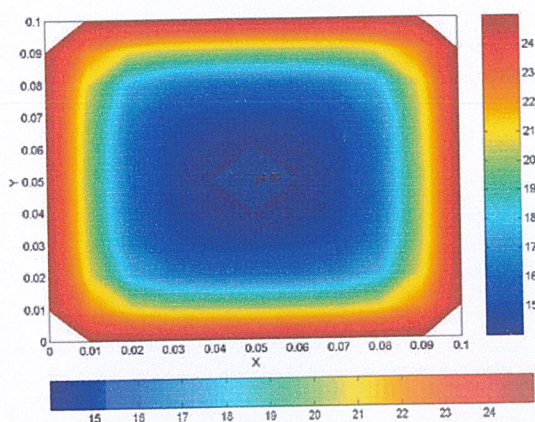


รูปที่ 5.1 ลักษณะภาพของการคำนวณ

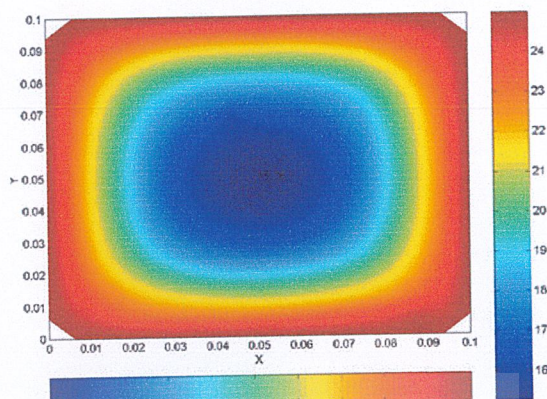
### 5.2 ลักษณะการกระจายอุณหภูมิ 3 มิติ ( $11 \times 11 \times 11$ ) แบบไม่สม่ำเสมอ ไม่มีการผลิตความร้อน ที่ระนาบที่ 6 (ระนาบกึ่งกลางของครีบ)



รูปที่ 5.2 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 0 sec

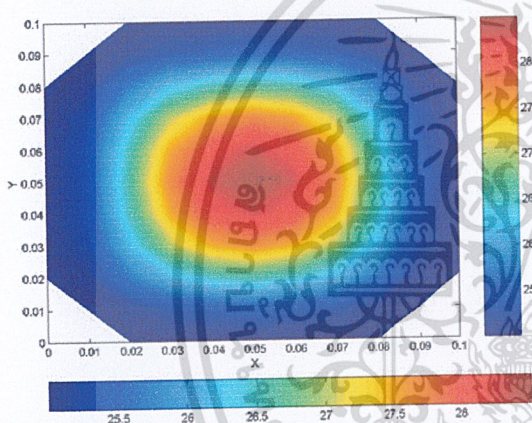


a) Fortran

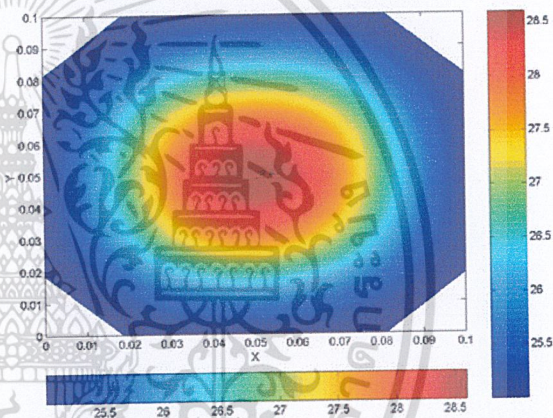


b) ANSYS

รูปที่ 5.3 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 30 sec

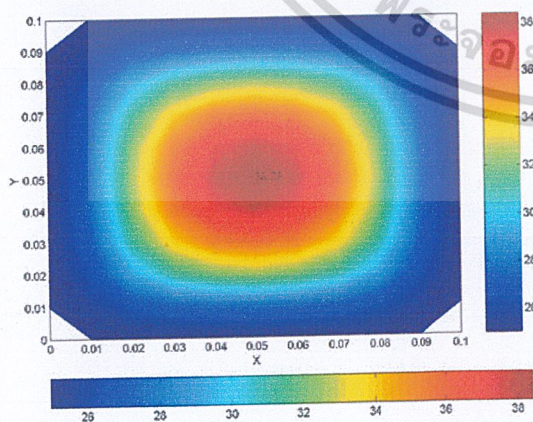


a) Fortran

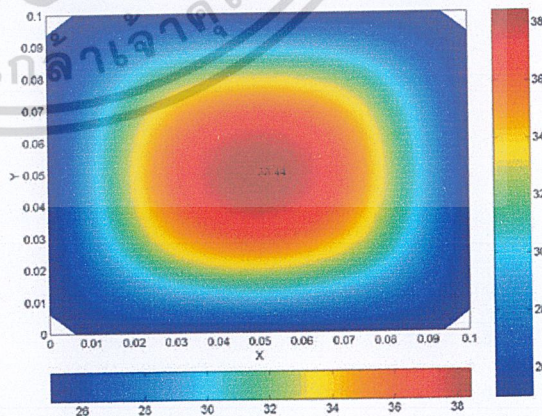


b) ANSYS

รูปที่ 5.4 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 60 sec



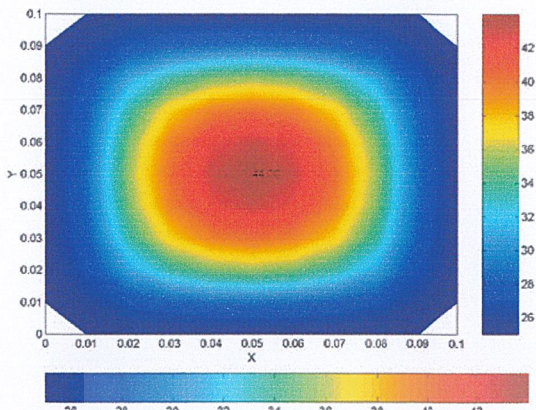
a) Fortran



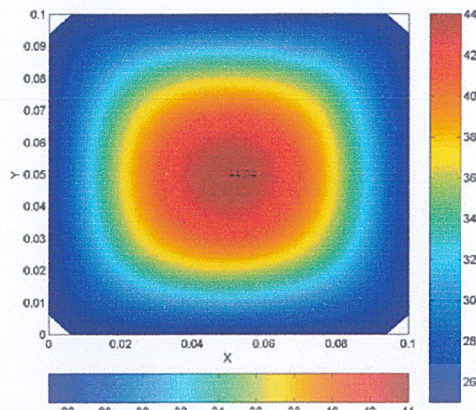
b) ANSYS

รูปที่ 5.5 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 90 sec

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

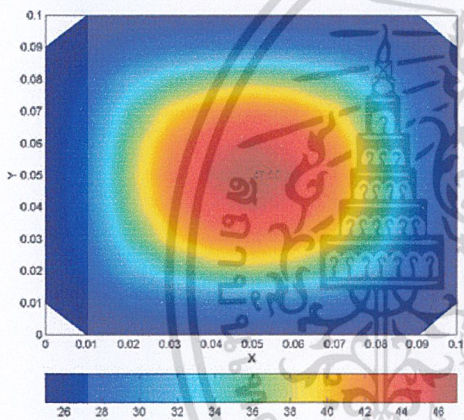


a) Fortran



b) ANSYS

รูปที่ 5.6 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 120 sec

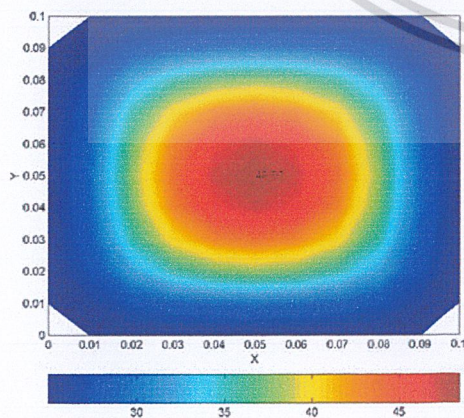


a) Fortran

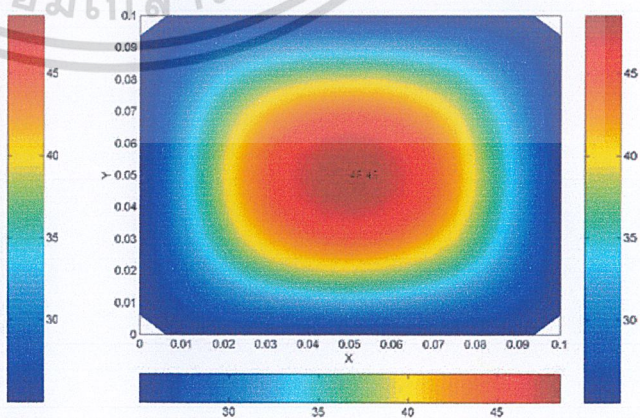


b) ANSYS

รูปที่ 5.7 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 150 sec



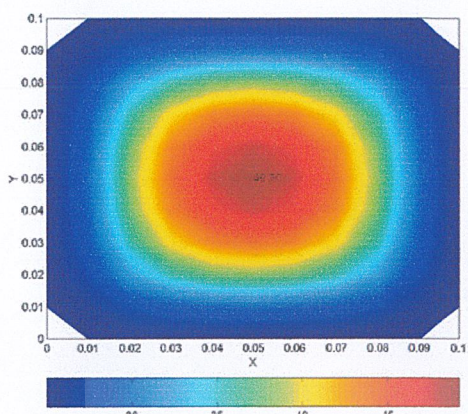
a) Fortran



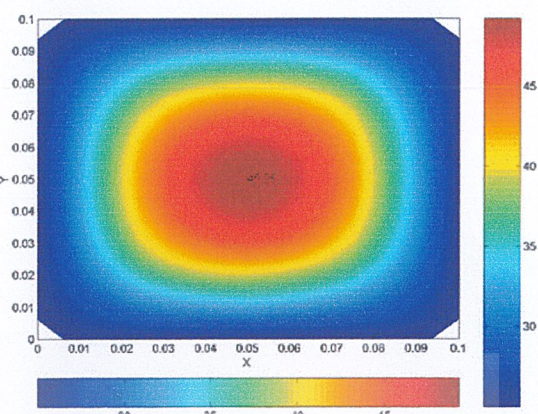
b) ANSYS

รูปที่ 5.8 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 180 sec

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง หากมีการนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตจากทางสถาบันฯ จะถือว่าผิดกฎหมายและต้องรับผิดชอบต่อความเสียหายที่เกิดขึ้น

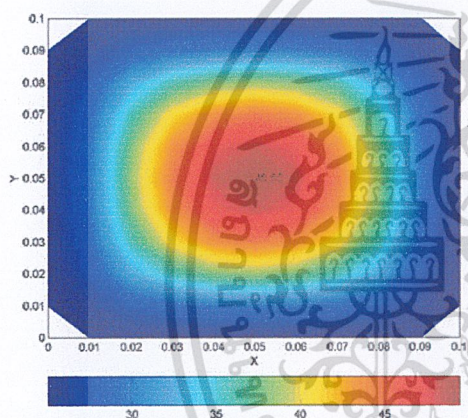


a) Fortran

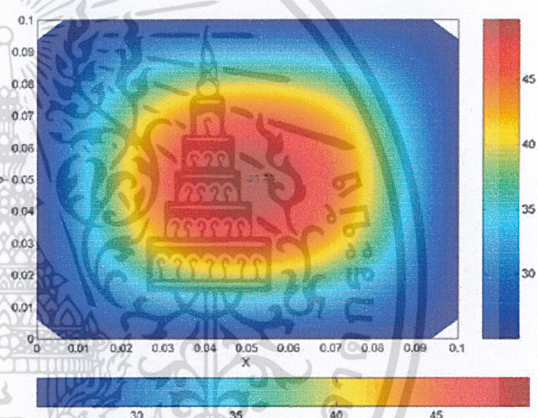


b) ANSYS

รูปที่ 5.9 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 210 sec

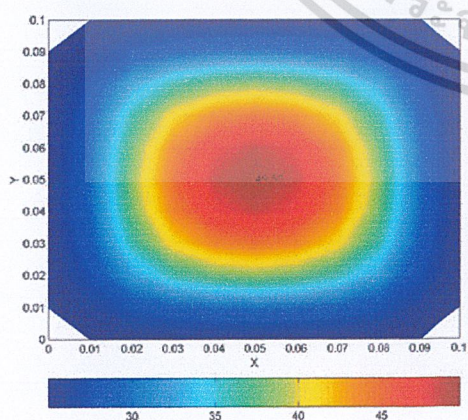


a) Fortran

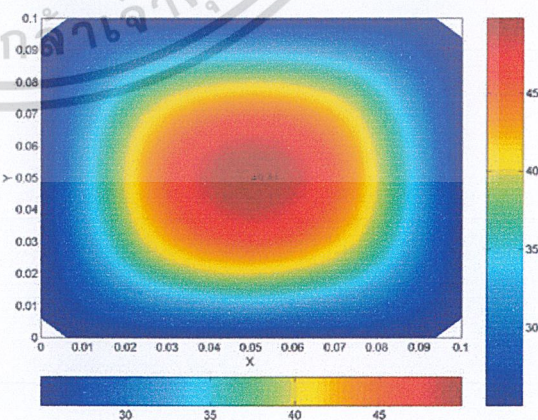


b) ANSYS

รูปที่ 5.10 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 240 sec



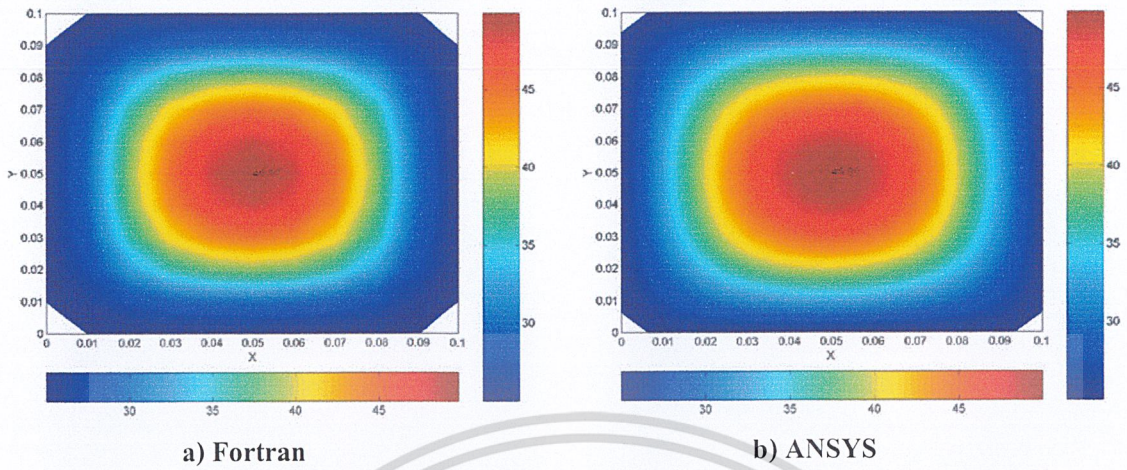
a) Fortran



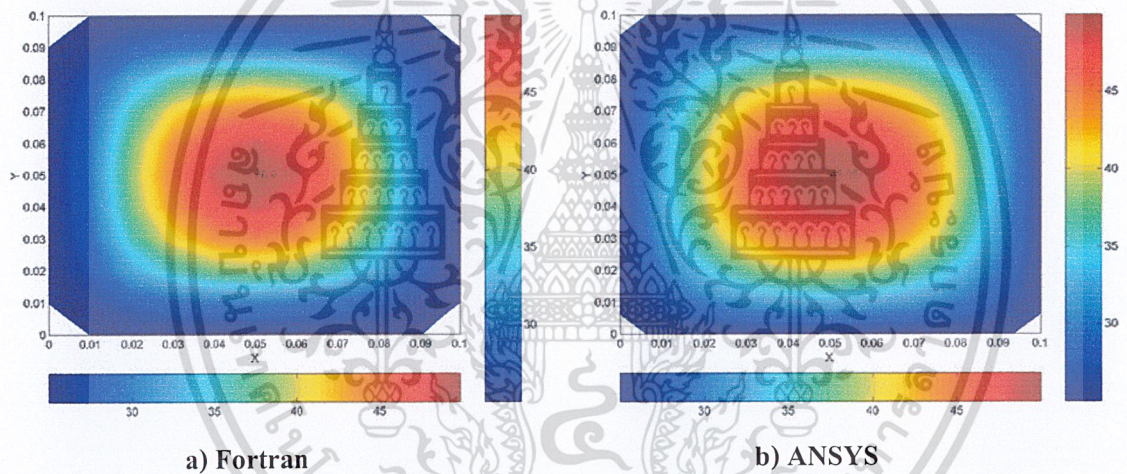
b) ANSYS

รูปที่ 5.11 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 270 sec

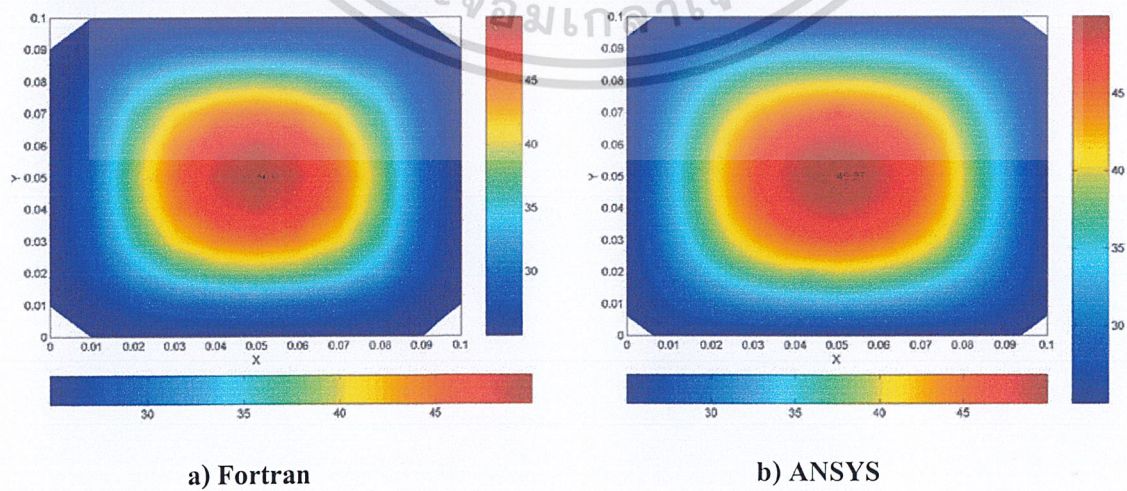
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.12 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 300 sec

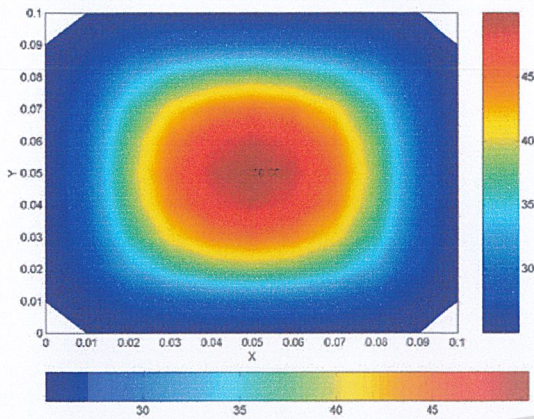


รูปที่ 5.13 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 330 sec

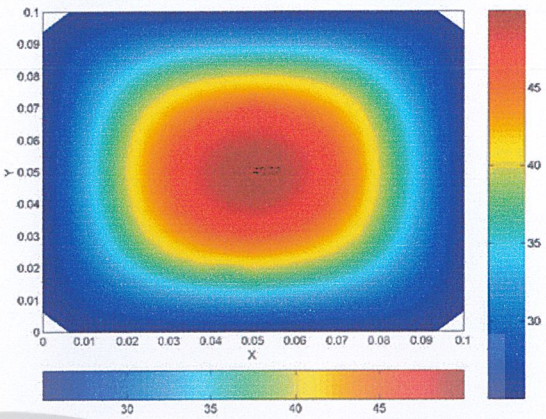


รูปที่ 5.14 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 360 sec

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

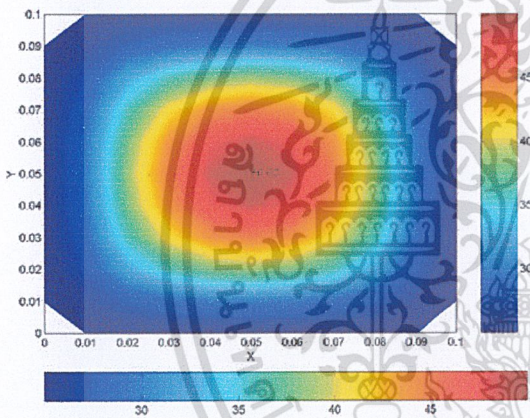


a) Fortran

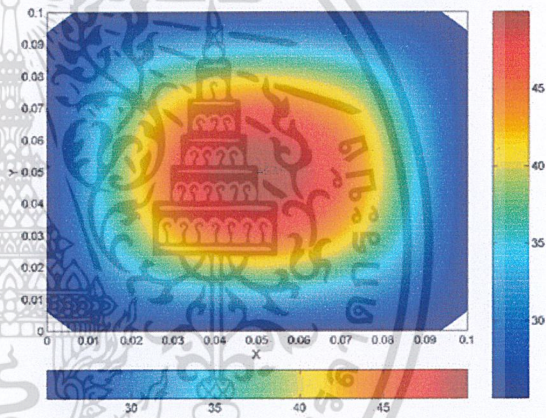


b) ANSYS

รูปที่ 5.15 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 390 sec

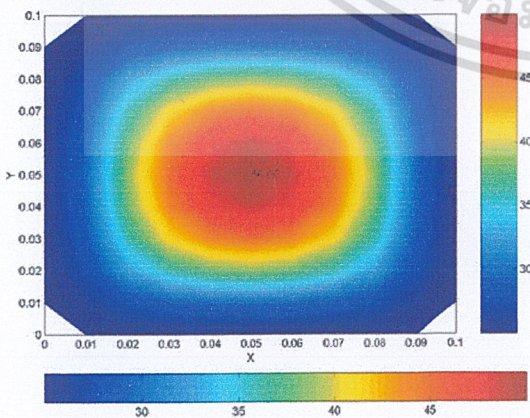


a) Fortran

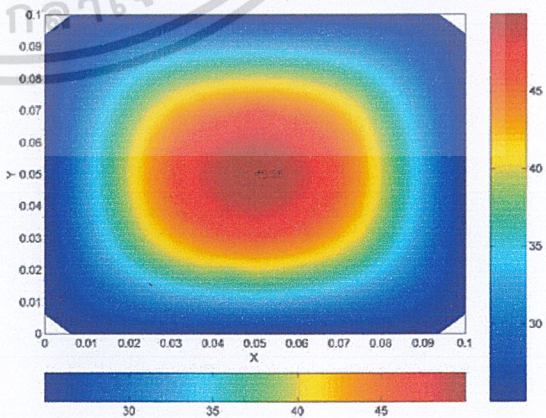


b) ANSYS

รูปที่ 5.16 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 420 sec



a) Fortran



b) ANSYS

รูปที่ 5.17 การกระจายอุณหภูมิที่ Time step ที่ 450 sec



จากรูปที่ 5.2 – 5.20 แสดงถึงการกระจายอุณหภูมิของระนาบกึ่งกลางของครีป ในลักษณะไม่สม่ำเสมอคือแสดงแต่ละครั้ง ๆ ละ 30 sec ในช่วงเวลา 18 ครั้ง ซึ่งแสดงจากช่วง transient ไปสู่ช่วง steady-state ในกรณีเมื่อนำผลการคำนวณไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากโปรแกรม ANSYS ซึ่งเป็นโปรแกรมที่นิยมใช้ในทางวิศวกรรม จะได้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงกันมาก

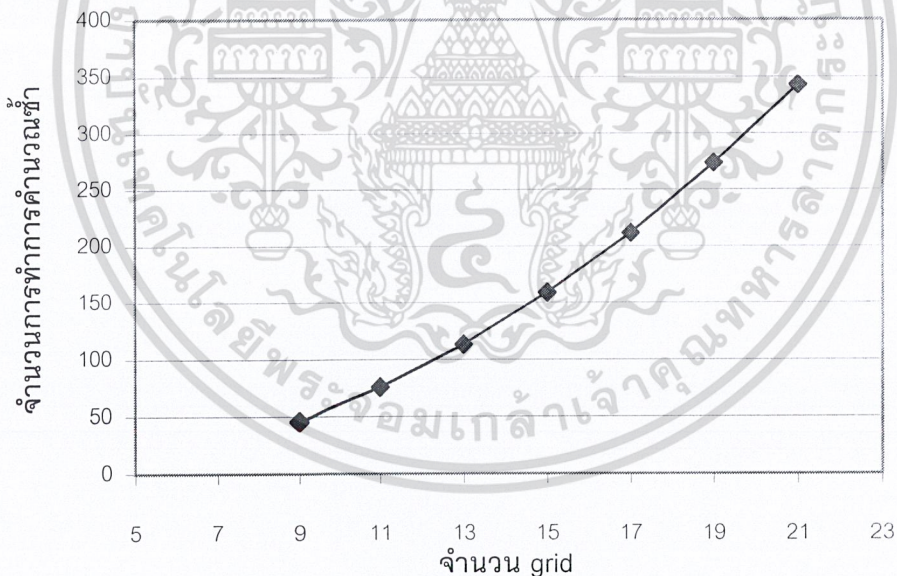


## บทที่ 6

### สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

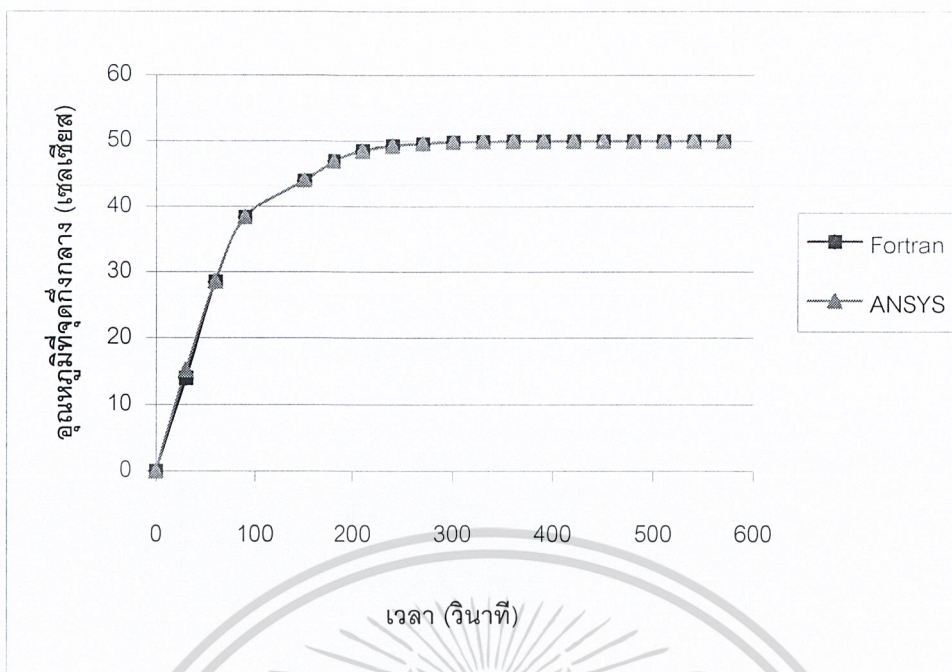
จากการที่ได้ศึกษาถึงสมการ ความสัมพันธ์รวม ไปถึงระเบียบวิธีการต่างๆ ตั้งแต่บทที่ 1 เป็นต้นมา ทำให้ทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิกับลักษณะต่างๆของแท่งสี่เหลี่ยมและการมีผลกระทบของอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆของแท่งสี่เหลี่ยม ทำให้ทราบถึงลักษณะการกระจายอุณหภูมิที่เกิดขึ้นทั้งในสภาวะที่อยู่ตัวแล้ว (Steady State) และสภาวะยังไม่เสถียร (Transient) นอกจากนี้ยังได้นำผลที่ได้จากการใช้โปรแกรมมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากสมการแม่นยำ (Exact Solution) และโปรแกรม ANSYS ด้วย

จากรูปที่ 6.1 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน grid กับจำนวนการทำการคำนวณซ้ำ แสดงให้เห็นว่า เมื่อปรับค่าขนาด grid ในการคำนวณมากขึ้นเท่าใดจำนวนการซ้ำในการคำนวณก็ยิ่งเพิ่มมากขึ้นเท่านั้น



รูปที่ 6.1 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน grid กับจำนวนการคำนวณซ้ำ

จากรูปที่ 6.2 เป็นกราฟแสดงค่าอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางของระนาบกึ่งกลางจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นและโปรแกรม ANSYS นำมาเปรียบเทียบค่ากันซึ่งจะเห็นว่ามีความใกล้เคียงกันมาก โดยโปรแกรม ANSYS นั้นนิยมใช้ในทางวิศวกรรมอยู่ในขณะนี้



รูปที่ 6.2 แสดงค่าเปรียบเทียบของอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางระหว่าง Fortran กับ ANSYS

## 6.1 ปัญหาในการเปรียบเทียบคำตอบ

เนื่องจากการทดลองด้วยวัตถุจริงทำได้ยากเนื่องจากการที่จะหาอุณหภูมิภายในวัตถุนั้นทำได้ยาก ด้วยเหตุนี้จึงต้องเปรียบเทียบผลคำตอบที่ได้จากสมการคณิตศาสตร์ซึ่งจะพบได้ว่ามีค่าผิดพลาดบ้าง เนื่องจากการปัดค่าทศนิยม การมีข้อจำกัดทางผลเฉลยทางคณิตศาสตร์ (Analytic Solution) การกำหนดขนาด Grid ของวัตถุเนื่องจากถ้ากำหนดจำนวน Grid มากขึ้นก็จะใช้เวลาในการประมวลผลนานขึ้น และการได้มาซึ่งผลเฉลยนั้นทำได้ยาก ใช้เวลาในการหาคำตอบ และบางครั้งจำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ระดับสูงในการแก้ปัญหา เพื่อที่จะได้นำผลมาเปรียบเทียบกับคำตอบโดยวิธี Numerical ทำให้การเปรียบเทียบทำได้น้อย

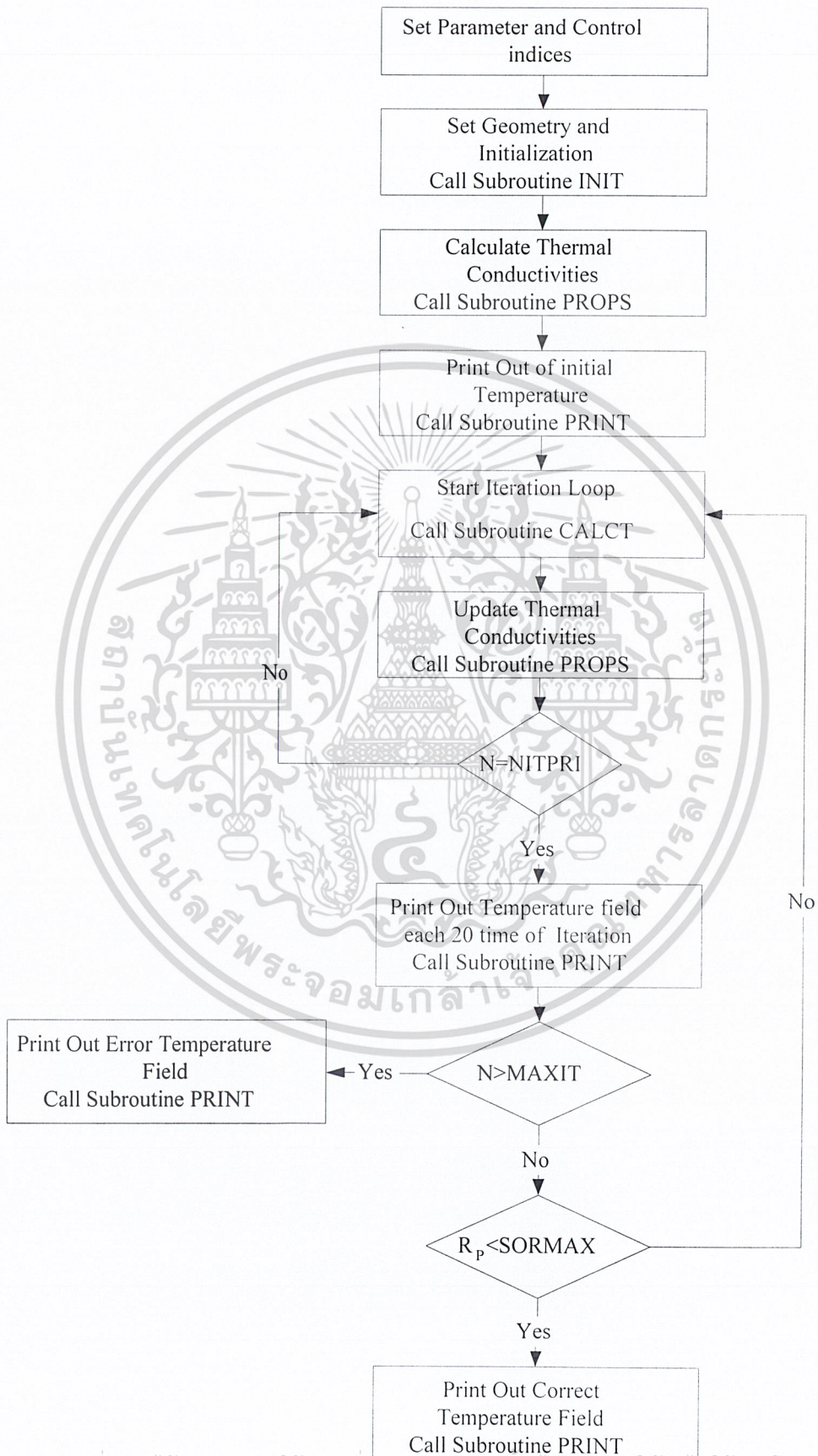
## 6.2 สรุปและข้อเสนอแนะ

ดังนั้นจึงพอสรุปได้ว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้นนี้ สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการทำงานของอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆและเวลาต่างๆภายในแท่งสี่เหลี่ยมได้ ซึ่งจะมีประโยชน์ในออกแบบกำหนดขนาด รวมไปถึงการเลือกวัสดุที่จะนำมาใช้งานให้เหมาะสมเช่น ใช้ในการระบายความร้อนโดยครีป การทำลานสเก็ตน้ำแข็ง ฯลฯ ซึ่งโดยต่อไปอาจมีการพัฒนาให้มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างวัตถุในการคำนวณได้ รวมทั้งการเพิ่มความสามารถในคิดปัญหาที่ขอบเขตผิว (Boundary Condition) อีก 2 ลักษณะคือ 1. มีการพาความร้อน 2. มีฟลักซ์ความร้อนได้



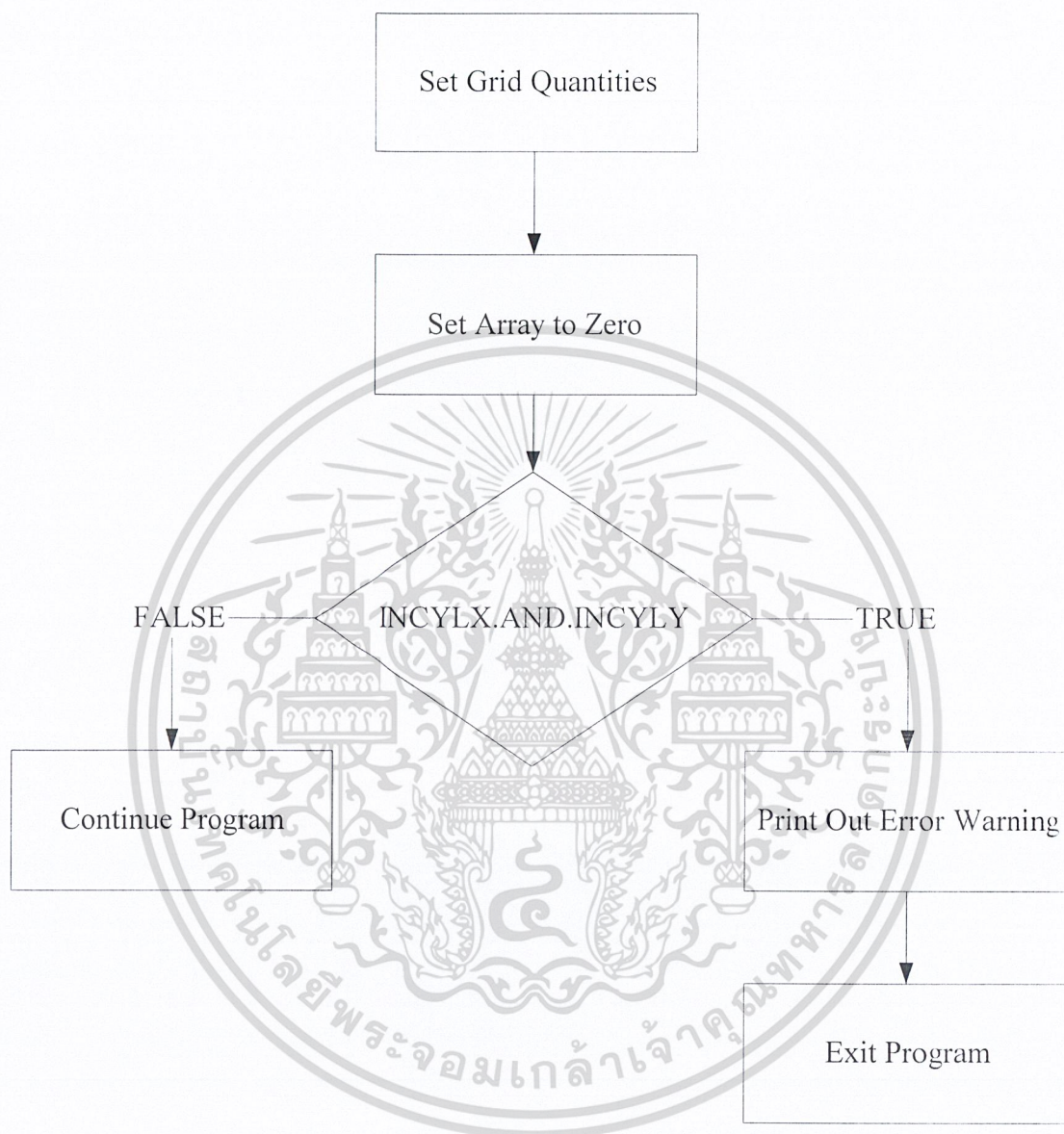
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## การทำงานของ Subroutine CONTRO



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทำงานของ Subroutine INIT

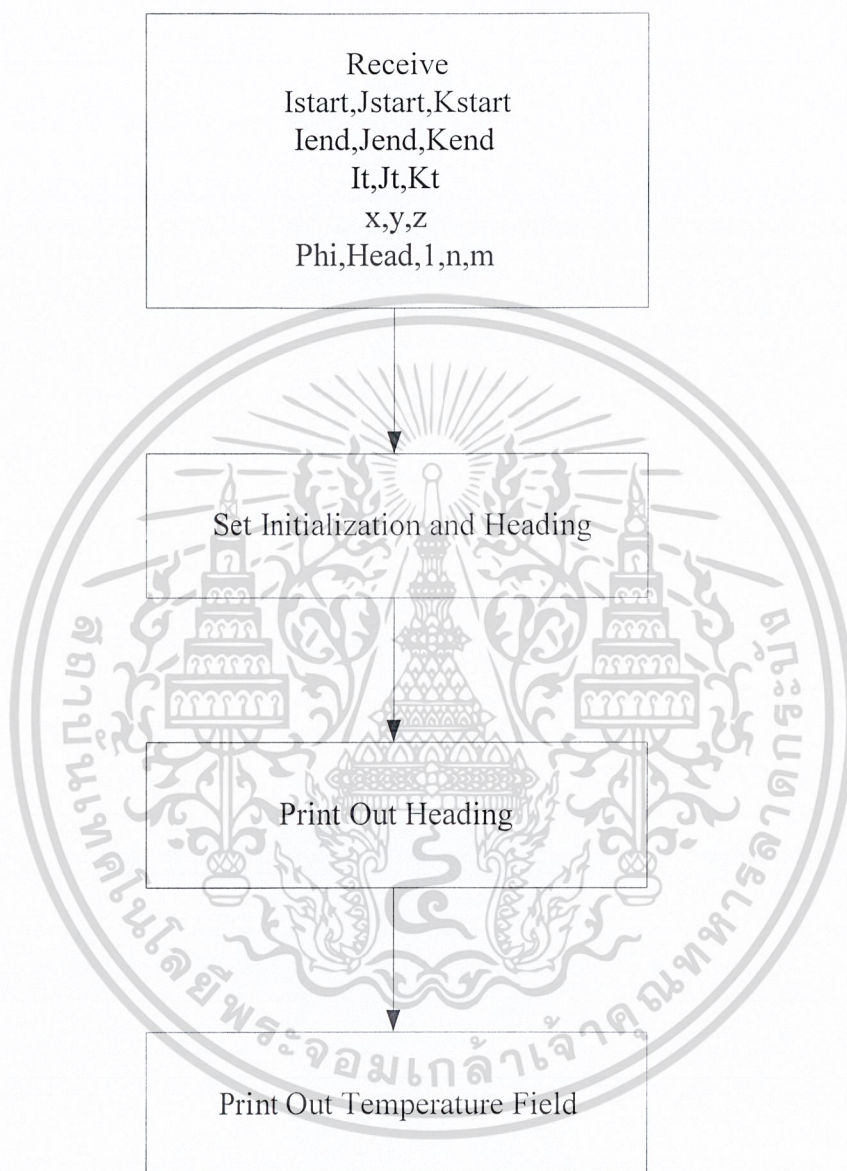


Update Thermal Conductivities

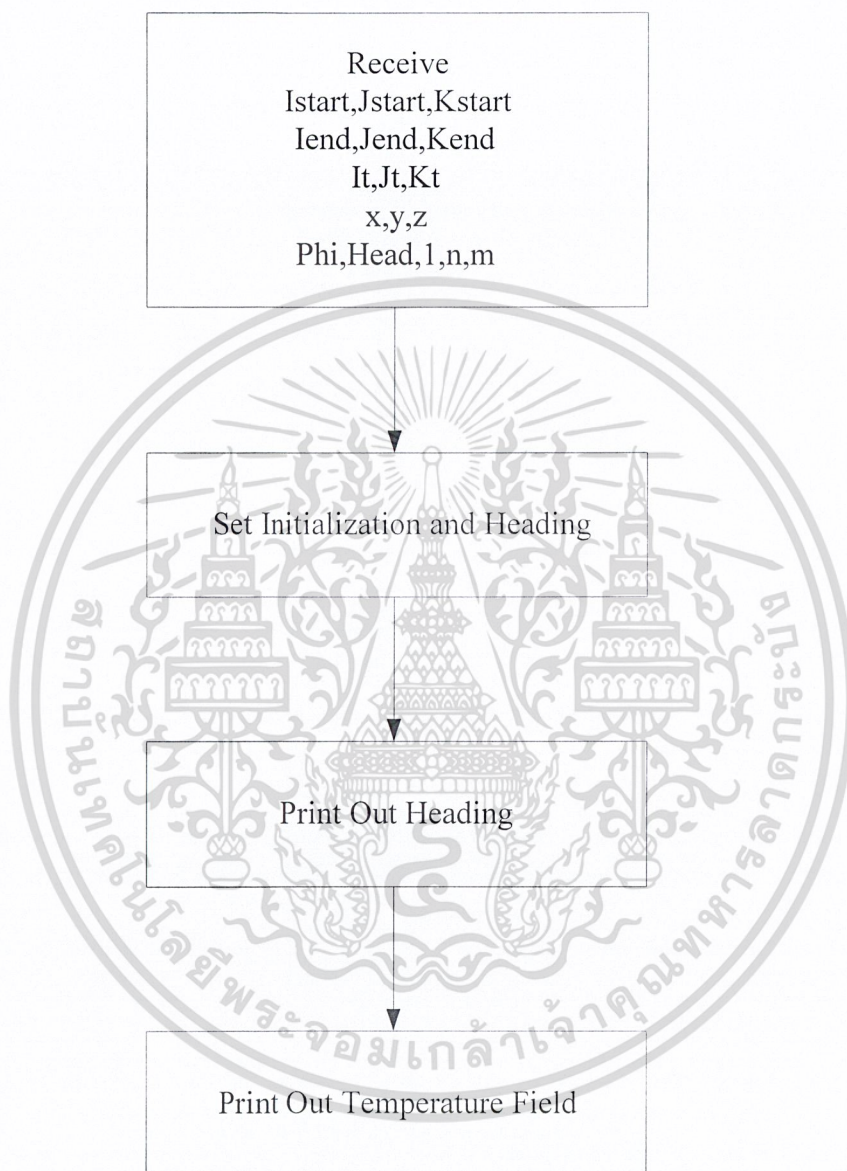


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทำงานของ Subroutine PRINT

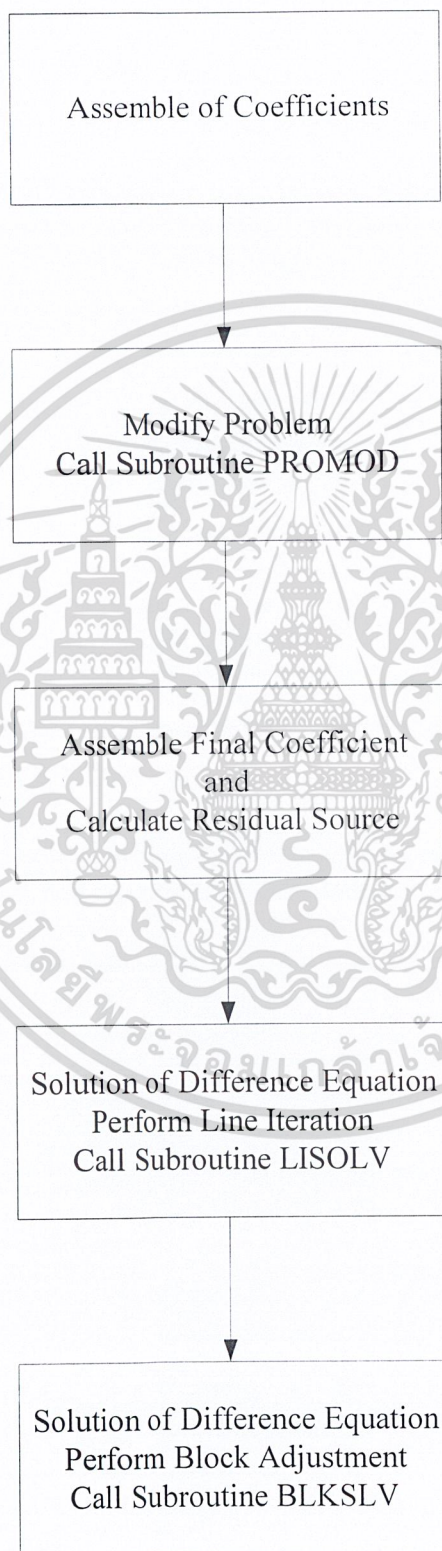


การทำงานของ Subroutine PRINT



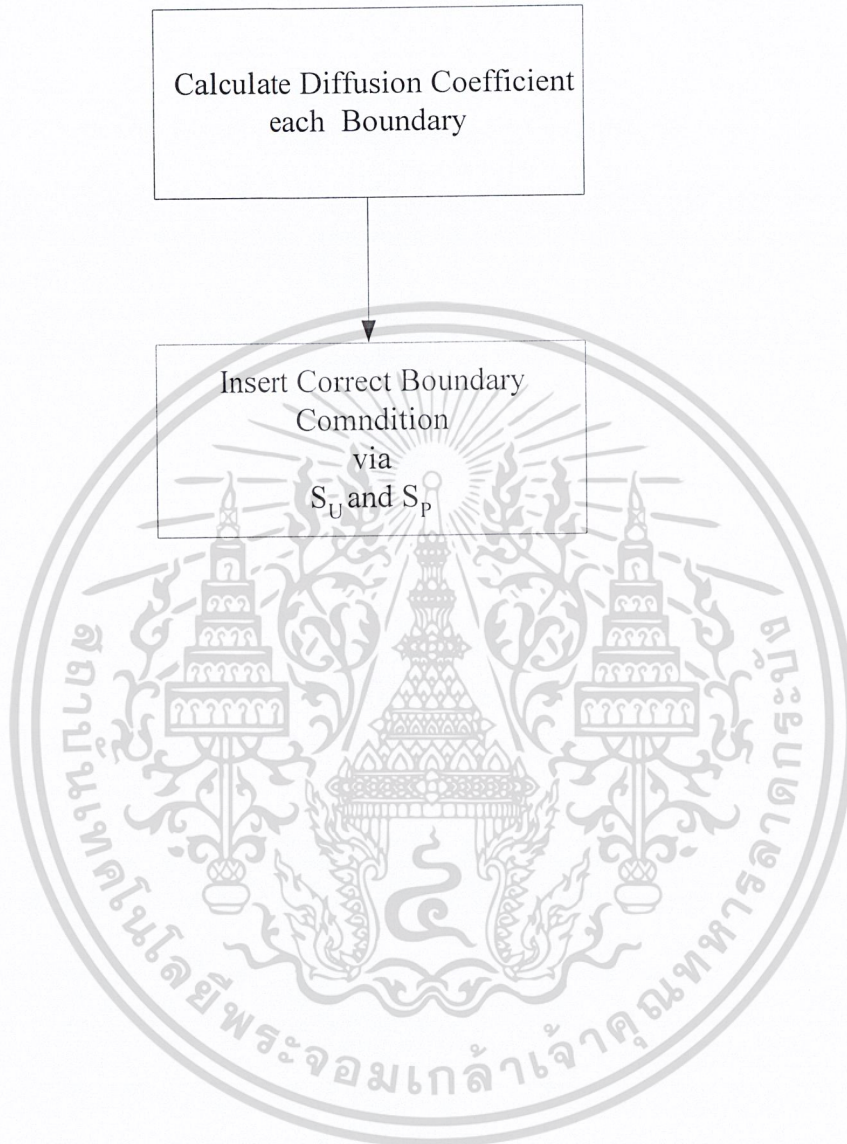
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทำงานของ Subroutine CALCT



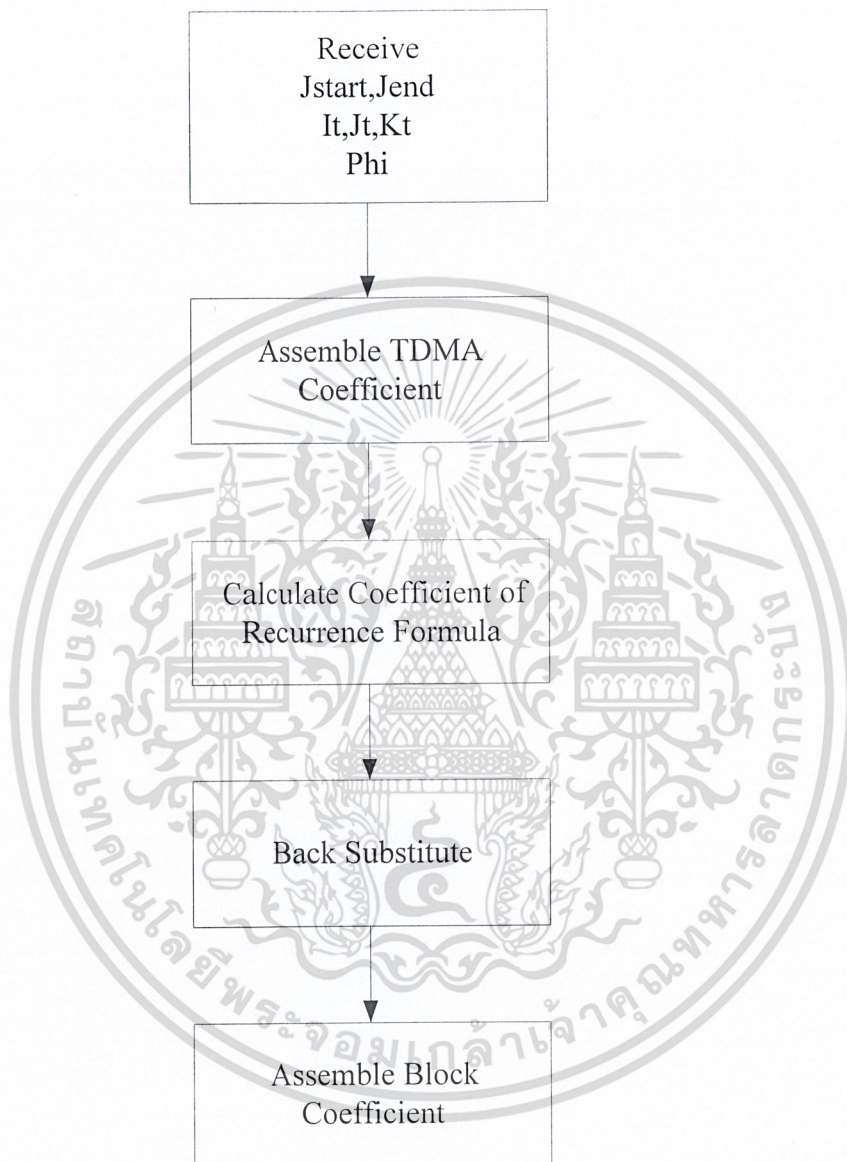
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## การทำงานของ Subroutine PROMOD



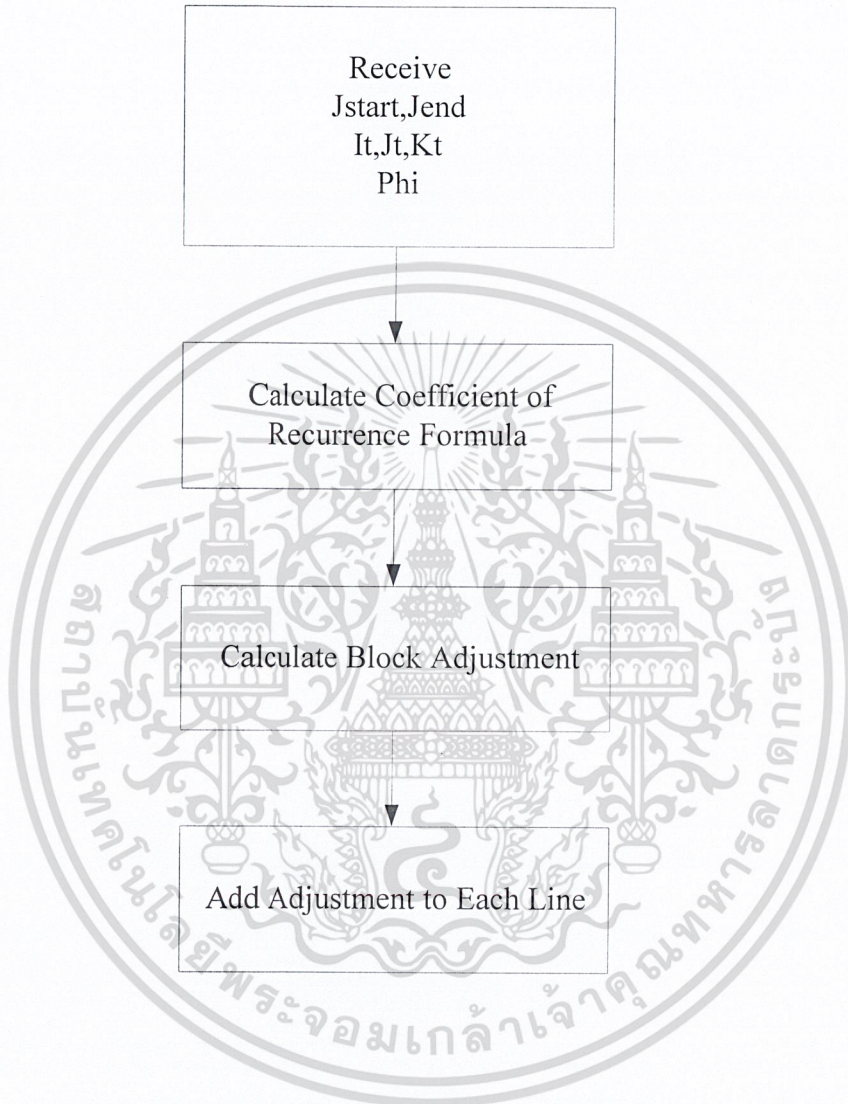
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทำงานของ Subroutine LISOLV



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทำงานของ Subroutine BLKSLV



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บรรณานุกรม

1. รศ.ดร.พงษ์เจต พรหมวงศ์ , การถ่ายเทความร้อน , ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
2. มนตรี อึ้งเจริญ , การนำความร้อน , ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3. D.POULIKAKOS , Conduction Heat Transfer (USA : Prentice Hall , 1994)
4. A.D. GOSMAN , B.E. LAUNDER and G.J. REECE , Computer-Aided Engineering : Heat Transfer and Fluid Flow (USA : John Wiley & Sons , 1985)
5. H.K. VERSTEEG and W. MALALASEKERA , An Introduction to Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method (English : Longman Scientific & Technical , 1995)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้