CAI สำหรับอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์

CAI FOR INTEGRAL CALCULUS OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLE AND APPLICATIONS

สุชาดา ชมจันทร์

อรุณศิริ ศิริสุทธา

เอมอร จิระรัตนโพธิชัย

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2542

CAI FOR INTEGRAL CALCULUS OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AND APPLICATIONS

SUCHADA CHOMJAN
ARUNSIRI SIRISUDDHA
AIMON GIRARATTANAPOCHAI

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 1999

หัวข้อปัญหาพิเศษ	CAI สำหรับอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์ CAI FOR INTEGRAL CALCULUS OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AND APPLICATIONS
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสุชาดา ชมจันทร์ 39054147 นางสาวอรุณศิริ ศิริสุทธา 39054150 นางสาวเอมอร จิระรัตนโพธิ์ชัย 39054155
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2542

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ	
กรรมการ	อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก	เทอดขวัญ
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	

(อาจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	CAI สำหรับอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์
ชื่อนักศึกษา	นางสาว สุชาดา ชมจันทร์ 39054147
	นางสาว อรุณศิริ ศิริสุทธา 39054150
	นางสาว เอมอร จิระรัตนโพธิ์ชัย 39054155
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2542
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษหัวข้อเรื่องโปรแกรมช่วยสอนสำหรับอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์นี้ เป็นการสร้างและพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อนำมาใช้ในการเรียนการสอน และใช้ในการทบทวนความรู้ในเรื่อง อินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์ โดยโครงสร้างของโปรแกรมจะประกอบด้วยส่วนที่เป็นเนื้อหาวิชาเพื่อใช้ในการเรียนการสอน ส่วนของตัวอย่างโจทย์ ที่อธิบายการแก้ปัญหาโจทย์อย่างละเอียด โดยผู้เรียนสามารถโต้ตอบกับคอมพิวเตอร์ได้ ส่วนของแบบทดสอบเพื่อให้ผู้เรียนได้ประเมินผลความรู้ของตนเองหลังจากที่ได้เรียนเนื้อหาวิชาและฝึกฝนจากตัวอย่างโจทย์แล้ว และสุดท้ายเป็นโปรแกรม MATHEMATICAที่รองรับปัญหาที่จะเกิดขึ้นจากการทำแบบฝึกหัดไม่ได้ โดยผู้เรียนสามารถเลือกเข้าใช้โปรแกรมได้โดยแยกเป็นอีกส่วนจากเนื้อหา

โปรแกรมช่วยสอน อินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์ ช่วยทำให้ผู้ใช้เกิดความสะดวกรวดเร็ว ในการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส อีกทั้งยังเป็นที่น่าสนใจมากกว่าการที่ผู้เรียนต้องเรียนจากหนังสือเพียงอย่างเดียว

Special Project Title	CAI for Integral Calculus of Functions of Several Variable and Applications
Students	Miss Suchada Chomjan 39054147
	Miss Arunsiri Sirisuddha 39054150
	Miss Aimon Girarattanapochai 39054155
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	1999
Special Project Advisor	Associate Professor Pongpun Rattanatanawan

ABSTRACT

This special project, CAI for Integral Calculus of Function of Several Variable and Application, focuses on the invention and development of the computer programs, which could facilitate calculus teaching, studying and revising. The structure of the programs could be divide 4 parts. The first part consists of theorematics contents for both teaching and studying. The second part comprises detailed sample questions and answers which allows users to interact with the computer. The third part provides user a set of self-test to evaluate users understanding for calculus after their studies and practices, And the last part is the MATHEMATICA 4.0 program that is serve your problems from your practice and you can choose it in the main menu of program.

CAI for Integral Calculus of Function of Several Variable and Application would convenience and speed in both teaching and studying calculus. It is more interesting than studying from textbook only.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดีก็เพราะหลายปัจจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่งต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ ที่ได้ให้แนวทางในการวิจัย ตลอดจนคำปรึกษาอันก่อให้เกิดแนวความคิดที่สามารถแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นระหว่างการทำวิจัย นอกจากนี้ยังช่วยแนะนำแนวทางในการดำเนินงานและตรวจทานแก้ไขด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง

ขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่สนับสนุนในการใช้ห้องปฏิบัติการ

ขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยช่วยเหลือ แนะนำ ให้คำปรึกษา และเป็นกำลังใจให้

ขอบคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และทุกคนในครอบครัวที่คอยเป็นกำลังใจอันยิ่งใหญ่ให้เสมอมา

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2543

สารบัญ

สารบัญ

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ 1

หน้า

สารบัญรูปภาพ

สารบัญรูปภาพ

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

แคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่ง ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อวิทยาการแขนงต่างๆมากมายและเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นสูง จึงเป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง นักเรียน นักศึกษา รวมทั้งผู้ที่สนใจหลายท่านยังอาจมีความไม่เข้าใจ หรือต้องการทบทวนเรียนรู้เนื้อหาวิชานี้เพิ่มเติม และปัจจุบันคอมพิวเตอร์ได้เข้ามาบทบาทในวงการการศึกษาอย่างมาก

เนื่องจากคอมพิวเตอร์เป็นสิ่งอำนวยความสะดวกรวดเร็วและมีประสิทธิภาพต่อการใช้งานในด้านต่าง ๆ ดังนั้น เราจึงมีความต้องการที่จะพัฒนาโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส เพื่อช่วยเสริมสร้างความรู้ความเข้าใจ และใช้แก้ปัญหาวิชาแคลคูลัสได้ง่ายและสะดวกยิ่งขึ้น โดยโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้สามารถใช้เป็นสื่อในการเรียนการสอนแก่นักเรียน นักศึกษา อีกทั้งผู้ที่มีความสนใจยังสามารถศึกษาเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง โดยไม่ต้องไปนั่งเรียน

2. วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อให้ผู้ใช้สามารถศึกษาวิชาแคลคูลัส ได้ด้วยตนเอง
2. เป็นสื่อในการสอนวิชาแคลคูลัส
3. เพื่อความสะดวกและเกิดการคล่องตัวในการแก้ปัญหาวิชาแคลคูลัส

3. ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

จัดทำสื่อการสอนวิชาแคลคูลัส โดย

1. ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของวิชาแคลคูลัส
2. จัดทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบเกี่ยวกับบทเรียนต่าง ๆ
3. ศึกษาการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยโปรแกรม Authorware 5.0

4. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ช่วยอำนวยความสะดวกในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับวิชาแคลคูลัสให้แก่ผู้เรียน
2. ช่วยฝึกฝนความชำนาญในการแก้ปัญหาวิชาแคลคูลัส
3. ได้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อความสะดวกและง่ายต่อการแก้ปัญหาวิชาแคลคูลัส
4. เพื่อพัฒนาระบบสื่อการสอน เป็นการเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

5. ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษารายละเอียดวิชาแคลคูลัส ในเรื่องอินทิกรัลของฟังก์ชันและการประยุกต์การอินทิเกรต
2. สร้างโปรแกรมงานสื่อการสอนวิชาแคลคูลัส
3. ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นให้มีประสิทธิภาพ
4. จัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

6. อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1. Pentium 166 MHz
2. RAM 32 MB
3. HDD 8.4 GB
4. Printer HP LaserJet 5L
5. Printer HP InkJet 880c
6. MS Window 98
7. กระดาษ A4 2 รีม

บทที่ 2

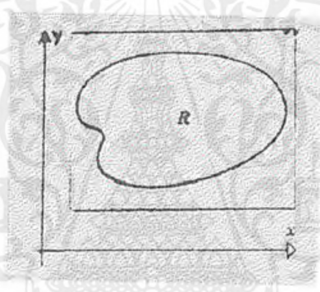
ความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 เนื้อหาวิชา

เรื่อง อินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร (INTEGRAL CALCULUS OF FUNCTIONS SEVERAL VARIABLES)

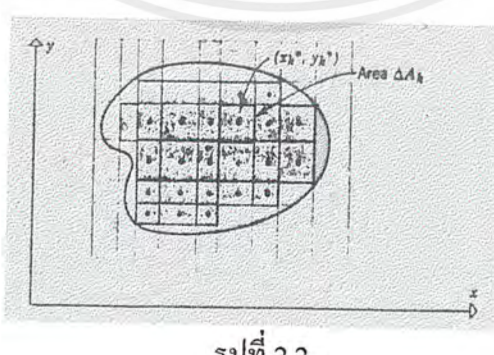
2.1.1 อินทิกรัลสองชั้น (Double Integral)

นิยามของการหาอินทิกรัลของฟังก์ชัน 2 ตัวแปรนั้นมีแนวความคิดเดียวกับการหา $\int_a^b f(x)dx$ คือเมื่อกำหนด f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรซึ่งต่อเนื่องบนบริเวณ R ในระนาบ xy ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1

ลากเส้นขนานกับแกน x และแกน y แล้วแบ่งสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีบริเวณ R อยู่ให้เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็กๆ แล้วพิจารณารูปสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ นั้นเฉพาะที่อยู่ในบริเวณ R ดังรูปที่ 2.2 และแทนพื้นที่สี่เหลี่ยมรูปเล็ก ๆ นั้นด้วย $\Delta A_1, \Delta A_2, ..., \Delta A_n$



รูปที่ 2.2

- เลือกจุดใด ๆ ในแต่ละรูปของสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ และแทนด้วย $(x^*_1, y^*_1), (x^*_2, y^*_2), ..., (x^*_n, y^*_n)$

- หาผลบวก $\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta A$ ซึ่งเรียกว่า ผลบวกรีมันต์ (Riemann sum)
- พิจารณาเพื่อแบ่งด้านของรูปสี่เหลี่ยมให้เล็กลงหรือเข้าใกล้ศูนย์แล้วนิยาม

$$\iint_R f(x,y)da \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta A$$

สัญลักษณ์ $\iint_R f(x,y)da$ เรียกว่า อินทิเกรตสองชั้นของ f(x,y) เหนือ R

ในกรณีที่ f(x,y) ไม่เป็นลบบริเวณ R นั้นการอินทิเกรตสองชั้นหมายถึงปริมาตรของรูปทรง (Solid) S ที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิว Z = f(x,y) ภายใต้บริเวณ R ดังรูปที่ 2.3

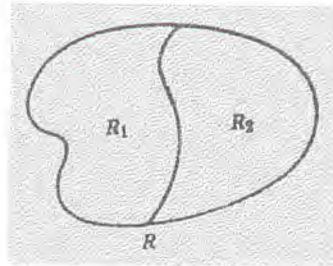
รูปที่ 2.3

จะเห็นได้ว่าผลคูณของ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A$ เป็นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Rectangular parallelepiped) ซึ่งมีส่วนสูง $f(x_k^*, y_k^*)$ และฐานมีพื้นที่ ΔA_k และมีผลบวกรีมันต์คือ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$

ส่วนในกรณีที่ f(x,y) มีค่าทั้งที่เป็นบวกและเป็นลบบนบริเวณ R นั้น การอินทิเกรตสองชั้นของ f เหนือ R พิจารณาได้ในลักษณะของผลต่างของปริมาตรเหนือระนาบ xy ระหว่าง Z = f(x,y) และ R ลบด้วยปริมาตรภายใต้ระนาบ xy ระหว่าง Z = f(x,y) และ R (เพราะเหตุใด)

2.1.1.1 คุณสมบัติอินทิกรัลสองชั้น

1. $\iint_R Cf(x,y)dA \quad = \quad C\iint_R f(x,y)dA$ (C เป็นสเกล่าใด ๆ)
2. $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA \quad = \quad \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$
3. ถ้าแบ่งบริเวณ R ออกเป็น 2 ส่วน ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4

$$\text{แล้ว } \iint_R f(x,y)dA = \iint_{R1} f(x,y)dA \pm \iint_{R2} f(x,y)dA$$

ในการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นนั้นใช้วิธีการที่เรียกว่า การทำอินทิเกรตซ้ำ (Iterated or Repeated integral) ลองพิจารณาการหาอนุพันธ์ย่อยของ f(x,y) นั้นทำได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรหนึ่งโดยถือว่าตัวแปรอีกตัวหนึ่งเป็นค่าคงที่ แล้วหาอนุพันธ์ย่อยของผลลัพธ์นั้นเทียบกับตัวแปรอีกตัวหนึ่ง สำหรับการอินทิเกรตซ้ำก็มีวิธีการที่คล้ายคลึงกัน

นิยามที่ 1 สัญลักษณ์ $\int_c^d [\int_a^b f(x,y)dx]dy$ แทนการอินทิเกรตซ้ำซึ่งเป็นอินทิกรัลสองชั้นที่เราอินทิเกรต f ครั้งแรกได้ผลลัพธ์ในรูปของฟังก์ชันของ y แล้วอินทิเกรตซ้ำในช่วง $c \leq y \leq d$

สัญลักษณ์ $\int_a^b [\int_c^d f(x,y)dy]dx$ แทนการอินทิเกรตซ้ำซึ่งเป็นการอินทิเกรตสองชั้นที่เราอินทิเกรต f ครั้งแรกได้ผลลัพธ์ในรูปของฟังก์ชัน x แล้วอินทิเกรตซ้ำอีกครั้งในช่วง $a \leq x \leq b$ โดยทั่วไปจะไม่เขียนเครื่องหมายวงเล็บไว้ในการอินทิเกรตซ้ำ จึงได้ว่า

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d [\int_a^b f(x,y)dx]dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b [\int_c^d f(x,y)dy]dx$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)dydx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)dydx &= \int_0^3 [\int_1^2 (1+8xy)dy]dx \\ &= \int_0^3 [y+4xy^2]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^3 [(2+16x)-(1+4x)]dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^3 (1+12x)dx$$

$$= x+6x^2 \Big|_0^3 = 57 \qquad \underline{\text{Ans}}$$

ข้อสังเกต ผลลัพธ์ของข้อ a และ b ในตัวอย่างเท่ากัน ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ R เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และ $a \le x \le b, c \le y \le d$ ถ้า f(x , y) เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

จากทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ ถ้า f(x,y)เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบบน R แล้ว $\iint_R f(x,y)dA$ แทนปริมาตรของรูปทรง S ที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิว Z = f(x , y) และ R ดังนั้น

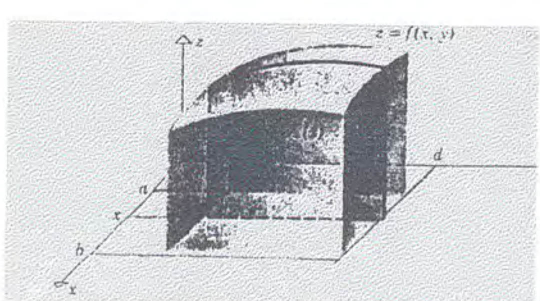
$$\text{Vol (S)} = \int_c^d A(y)dy$$

เมื่อ A(y) แทนพื้นที่หน้าตัดขวางที่ตั้งฉากกับแกน y ที่จุด y ใด ๆ ดังรูปที่ 2.5 และการหา A(y) นั้นต้องให้ $c \le y \le d$ คงที่ และ f(x , y) เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และจะได้ว่า

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

รูปที่ 2.5

หรือถ้าพิจารณา A(x) แทนพื้นที่หน้าตัดขวางที่ตั้งฉากกับแกน x ที่ x ใด ๆ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6

การหา A(x) นั้นหารได้ในทำนองเดียวกับการหา A(y) และได้ว่า

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

และ $$Vol(S) = \int_a^b A(x)dx$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\iint_R y^2 xdA$ เหนือบริเวณ $R = \{(x,y) / -3 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีบทที่ 1 จะได้

$$\int_{-3}^{2}\int_{0}^{1} y^2 xdydx \quad \text{หรือ} \quad \int_{0}^{1}\int_{-3}^{2} y^2 xdxdy$$

$$\therefore \iint_R y^2 xdA = \int_{-3}^{2}\int_{0}^{1} y^2 xdydx$$

$$= \int_{-3}^{2} [\frac{1}{3}y^3 x \Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_{-3}^{2} [\frac{1}{3}x]dx$$

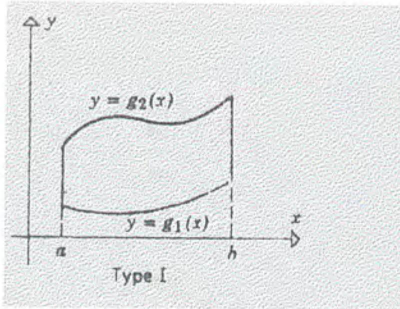
$$= \frac{x^2}{6}\Big|_{-3}^{2} = \frac{-5}{6}$$ <u>Ans</u>

2.1.1.2 อินทิกรัลเหนือบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Integral over Nonrectangular Regions)

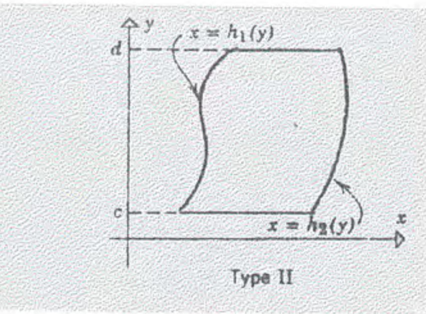
ทฤษฎีบทที่2 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ R ซึ่งอยู่บนระนาบ xy

1. ถ้า R เป็นบริเวณระหว่างกราฟ $g_1(x)$ และ $g_2(x)$ บน [a,b] ดังรูปที่ 2.7 แล้ว สามารถอินทิเกรตได้บน R และ $\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$

2. ถ้า R เป็นบริเวณระหว่างกราฟของ $h_1(y)$ และ $h_2(y)$ บน [c,d] ดังรปที่ 2.8 แล้ว f สามารถอินทิเกรตได้บน R และ $\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$



รูปที่ 2.7



รูปที่ 2.8

จากทฤษฎีบทที่ 2 ข้อ 1 สมมติ f (x,y) เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบบน R แล้ว $\iint_R f(x,y)dA$ แทนปริมาตรของรูปทรง S ที่ล้อมรอบด้วยพื้นที่ผิว z = f(x,y) และบริเวณ R โดยการพิจารณาพื้นที่หน้าตัดของ ปริมาตรของ S ที่ได้ คือ

$$\text{Vol(S)} \quad = \quad \int_a^b A(x)dx$$

เมื่อ A(x) เป็นพื้นที่หน้าตัดขวางที่จุดคงที่ x ดังแสดงในรูปที่ 2.9 และพื้นที่หน้าตัดขวางนั้นเริ่มจาก $g_1(x)$ ถึง $g_2(x)$ (ในทิศทางของ y)

รูปที่ 2.9

$$A(x) \quad = \quad \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

$$\text{Vol(S)} \quad = \quad \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

ดังนั้นจะได้ $\quad \iint_R f(x,y)dA \quad = \quad \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\iint\limits_R xydA$ เหนือบริเวณ R ซึ่งปิดล้อมด้วย $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ และ $x = 4$

<u>วิธีทำ</u> บริเวณ R แสดงได้ดังรูป

จากทฤษฎีบทที่ 2 (ข้อ1) จะได้

$$\iint\limits_R xydA = \int_2^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xydydx$$

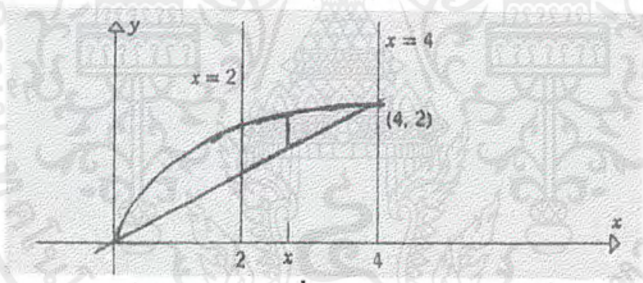
$$= \int_2^4 \frac{xy^2}{2} \Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8})dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \Big|_2^4$$

$$= \frac{11}{6}$$

<u>Ans</u>



รูปที่ 2.10

จากตัวอย่างนี้ ถ้าพิจารณา R ตามทฤษฎีบทที่ 2 ข้อ 1 จะต้องแบ่ง R เป็น 2 ส่วนโดยที่ $R = R_1 + R_2$ (ตามรูปที่ 8)จะได้

$$\iint\limits_R (2x - y^2)dA = \iint\limits_{R1} (2x - y^2)dA + \iint\limits_{R2} (2x - y^2)dA$$

$$= \int_{-2}^{0} \int_{-x+1}^{3} (2 - y^2)dydx + \int_{0}^{2} \int_{x+1}^{3} (2x - y^2)dydx$$

$$= \frac{-68}{3}$$

ในบางครั้งการหาผลลัพธ์ของการอินทิเกรตซ้ำทำได้ยากหรือเป็นไปไม่ได้ในการอินทิเกรต ดังนั้นจึงต้องเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรต คือเปลี่ยนจาก dx dy เป็น dy dx หรือเปลี่ยนจาก dx dy เป็น dy dx ตามความเหมาะสม

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\, dxdy$

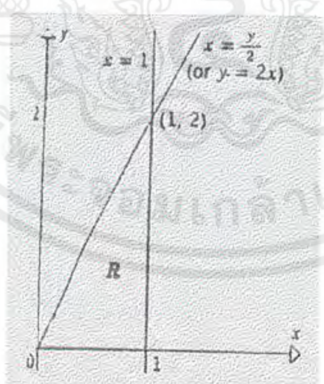
<u>วิธีทำ</u> จากลิมิตของการอินทิเกรตซ้ำ จะได้ว่า R เป็นบริเวณระหว่าง x = y/2 หรือ x = 1 เมื่อ $0 \leq y \leq 2$ ดังรูป

พิจารณาการอินทิเกรต $\int e^{x^2}\, dx$ ไม่สามารถหาค่าได้ ดังนั้นพิจารณา R เป็นบริเวณ

ระหว่าง y = 0 และ y=2x เมื่อ $0 \leq x \leq 1$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\, dxdy &= \iint_R e^{x^2}\, dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\, dydx \\
&= \int_0^1 e^{x^2}\, y \Big|_{y=0}^{y=2x}\, dx \\
&= \int_0^1 2xe^{x^2}\, dx \\
&= e^{x^2}\Big|_0^1 \\
&= e - 1
\end{aligned}$$

<u>Ans</u>



รูปที่ 2.11

อินทิเกรตสองชั้น $\iint_R dA = \iint_R dA$ แทนปริมาตรของรูปทรงที่มีความสูงเป็นค่าคงที่ 1 เหนือบริเวณ R ซึ่งเป็นพื้นที่ของบริเวณ R นั่นเอง ดังนั้น

$$A(R) = \iint_R dA$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้อินทิกรัลสองชั้นหาพื้นที่ R ซึ่งปิดล้อมด้วย $y = \frac{1}{2}x^2$ และ y = 2x

<u>วิธีทำ</u> บริเวณ R แสดงได้ดังรูป และจุดตัดของ $y = \frac{1}{2}x^2$ และ y = 2x คือ (0,0) และ (4,8)

พื้นที่

$$A(R) = \iint_R dA$$

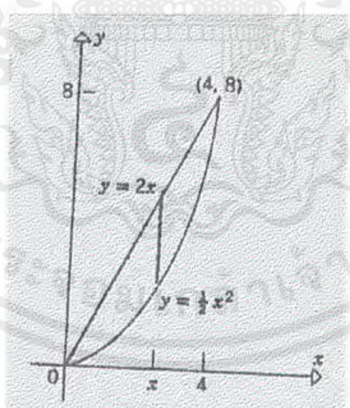
$$= \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{2}}^{2x} dydx$$

$$= \int_0^4 y \Big|_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^4 (2x - \frac{x}{2})dx$$

$$= (x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^4$$

$$= \frac{16}{3} \qquad \underline{\text{Ans}}$$



รูปที่ 2.12

2.1.2 อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

จุดบนระนาบในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) สัมพันธ์กับระบบพิกัดฉาก (x,y) ด้วยสมการ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0$

เมื่อกำหนด R เป็นบริเวณบนระนาบในพิกัดเชิงขั้วซึ่งปิดล้อมด้วย $r = r_1$, $r = r_2$ และ$\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ ซึ่ง $2\pi > \theta_2 > \theta_1 \geq 0$, $r_2 > r_1 > 0$ แล้วพื้นที่ของ R ในรูปของการอินทิเกรตซ้ำคือ

$$A(R) = \iint_R r\,dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} r\,dr\,d\theta$$

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนด R และ G เป็นบริเวณที่สัมพันธ์และสอดคล้องกับ mapping $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ และ $f(x,y)$ ต่อเนื่องบน R แล้วฟังก์ชัน $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ จะหาได้และต่อเนื่องบน G และ

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_G g(r,\theta)\,r\,dA$$

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนด $g_1(\theta)$ และ $g_2(\theta)$ ต่อเนื่อง $[\alpha,\beta]$ โดย $0 \le \beta-\alpha \le 2\pi$ และ $0 \le g_1(\theta) \le g_2(\theta)$ เมื่อ $\alpha \le \theta \le \beta$ ให้ R เป็นบริเวณระหว่างเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว $r = g_1(\theta)$ และ $r = g_2(\theta)$ เมื่อ $\alpha \le \theta \le \beta$

ถ้า f ต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

ในกรณีที่ f ไม่เป็นค่าลบบน R แล้ว ปริมาตร V ของรูปทรงที่อยู่ระหว่างพื้นผิว f และบริเวณ R กำหนดโดย

$$V = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

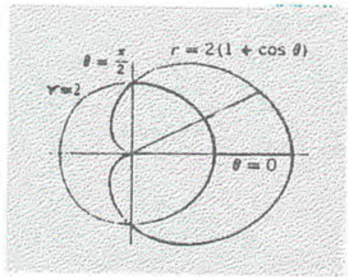
<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\iint_R \sin\theta\,dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณในควอดแดรนท์ที่ 1ซึ่งอยู่นอกวงกลม $r=2$ และอยู่ในเส้นโค้งรูปหัวใจ (cardioid) $r = 2(1+\cos\theta)$

<u>วิธีทำ</u> บริเวณ R แสดงได้ดังรูป

$$\iint_R \sin\theta\,dA = \int_0^{\frac{\Pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\theta)} (\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{1}{2}r^2\sin\theta \Big|_{r=2}^{r=2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\Pi}{2}} [(1+\cos\theta)^2\sin\theta - \sin\theta]\,d\theta \qquad \underline{\text{Ans}}$$



รูปที่ 2.13

ในบางครั้งการคำนวณหาค่าอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วจะง่ายกว่าในระบบพิกัดฉากและจะใช้ในกรณีที่สมการเป็น $x^2 + y^2$ และ $\sqrt{x^2 + y^2}$ เพราะสามารถเขียนได้เป็น r^2 และ r ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วหาค่า $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\,dydx$

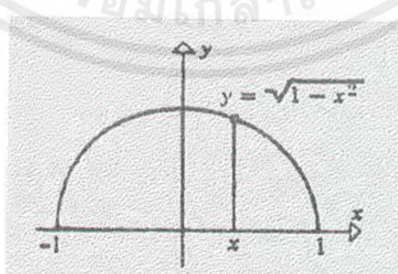
<u>วิธีทำ</u> $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\,dydx = \iint_R (x^2 + y^2)^{3/2}\,dA$

เมื่อ R เป็นบริเวณดังรูป

$$\therefore \iint_R (x^2 + y^2)^{3/2}\,dA = \int_0^{\Pi}\int_0^{1} (r^3)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_2^{\Pi} \frac{1}{5}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{5}$$ <u>Ans</u>



รูปที่ 2.14

2.1.3 พื้นที่พื้นผิว (Surface area)

นิยามที่ 2 ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องบน r ซึ่งอยู่บนระนาบ xy แล้วพื้นที่ S ของส่วนของพื้นผิว Z = f(x,y) ซึ่ง projects ลงบน R คือ

$$s=\iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1dA}$$

จากนิยามจะเห็นว่าการหาพื้นที่พื้นผิวนั้นหาได้โดยการหาพื้นที่ของระนาบสัมผัสบนโดเมน ซึ่งถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อย ๆ แล้วนำพื้นที่เล็ก ๆ นั้นมารวมกันจะได้ค่าประมาณของพื้นที่พื้นผิว ซึ่งมีวิธีการดังนี้

แบ่ง R ออกเป็นส่วนย่อย ๆ R ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาด Δx_k และ Δy_k แล้วสร้างระนาบสัมผัสกับพื้นผิวที่จุด $\left(x_k,y_k\right)$ ซึ่งเป็นจุดใด ๆ ใน R ดังรูป แล้วจึงหาพื้นที่เล็ก ๆ ของระนาบสัมผัสซึ่งอยู่เหนือ R_k ซึ่งจะได้ว่าเป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน H_k เวกเตอร์ $\vec{i}+f_x\left(x_k,y_k\right)\vec{k}$ และ $\vec{j}+f_y\left(x_k,y_k\right)\vec{k}$ ขนานกับเวกเตอร์ที่ประกอบกันเป็นด้านของสี่เหลี่ยม H_k ดังนั้น

$$\vec{B}_k=\Delta x_k\vec{i}+f_x\left(x_k,y_k\right)\Delta x_k\vec{k}$$
$$\vec{C}_k=\Delta y_k\vec{i}+f_y\left(x_k,y_k\right)\Delta y_k\vec{k}$$

พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

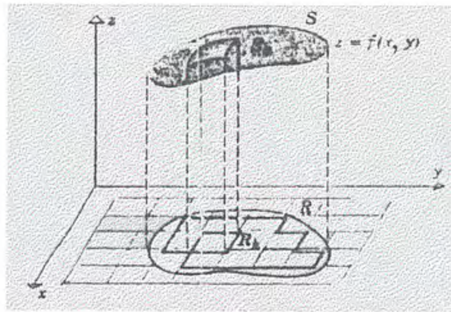
$$\begin{aligned}H_k&=\left\|\vec{B}_k\times\vec{C}_k\right\|\\&=\left\|-f_x\left(x_k,y_k\right)\Delta x\Delta y_k\vec{i}-f_y\left(x_k,y_k\right)\Delta x_k\Delta y_k\vec{j}+\Delta x_k\Delta y_k\vec{k}\right\|\\&=\sqrt{\left[f_x\left(x_k,y_k\right)\right]^2+\left[f_y\left(x_k,y_k\right)\right]^2+1}\,\Delta x_k\Delta y_k\\&=\sqrt{\left[f_x\left(x_k,y_k\right)\right]^2+\left[f_y\left(x_k,y_k\right)\right]^2+1}\Delta A_k\end{aligned}$$

จะเห็นว่า ΔA_k ก็คือพื้นที่ของ R นั่นเอง

ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน $H=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left[f_x\left(x_k,y_k\right)\right]^2+\left[f_y\left(x_k,y_k\right)\right]^2+1}\Delta A_k$

ถ้าแบ่ง R_k ให้เล็กมากพอแล้ว H_k จะเป็นค่าประมาณที่ดีของพื้นที่ผิวที่อยู่เหนือ R_k และผลบวกรีมันต์ จะประมาณได้ด้วย

$$\iint_R\sqrt{\left[f_x\left(x,y\right)\right]^2+\left[f_y\left(x,y\right)\right]^2+1dA}$$



รูปที่ 2.15

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาพื้นที่พื้นผิวของส่วนของทรงกระบอก $x^2 + z^2 = 4$ เหนือบริเวณ $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 4\}$ ในระนาบ xy

<u>วิธีทำ</u> พื้นผิวเขียนได้ดังรูป

จาก
$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

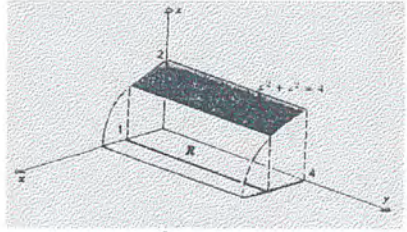
$$= \iint_R \sqrt{\left(-\frac{X}{\sqrt{4-X^2}}\right) + 0 + 1}\, dA$$

$$= \int_0^4 \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx\, dy$$

$$= 2\int_0^4 \left[\sin^{-1}\frac{1}{2}x\right]_{x=0}^{1} dy$$

$$= 2\int_0^4 \frac{\pi}{6}\, dy$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$ <u>Ans</u>



รูปที่ 2.16

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาพื้นที่พื้นผิวของส่วยของพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ ที่อยู่เหนือระนาบ xy และภายใต้ระนาบ $z = 1$

<u>วิธีทำ</u> สมการ $z = x^2 + y^2$ และ $z = 1$ ตัดกันเป็นสมการวงกลม เมื่อพิจารณา projection บนระนาบ xy จะได้ $x^2 + y^2 = 1$

$$\therefore \quad S = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dA$$

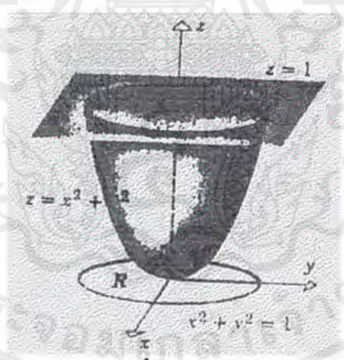
อินทิกรัลสองชั้นนี้หาได้ในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยแทน $x^2 + y^2$ ด้วย r^2 และแทน r dr dθ ที่ dA

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}\left(4r^2 + 1\right)^{3/2}\right]_{r=0}^{1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$



รูปที่ 2.17

2.1.4 ปริมาตรของรูปทรงสามมิติใต้พื้นผิว

z = f(x,y) หรือ z = f(ρ,θ) คือ ปริมาตรของแท่งตรงแนวดิ่งซึ่งมีฐานด้านบนเป็นส่วนหนึ่งของพื้นผิว และฐานด้านล่างอยู่บนระนาบ xOy หาได้จากการอินทิกรัลสองชั้น $V = \iint_R z\,dA$

เมื่อ R คือ ฐานด้านล่างของทรงสามมิติ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันสามมิติในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่ระหว่างระนาบ z = 0 และ z = x+y+2 ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 16$

วิธีทำ จากรูป จะเห็นได้ว่าจะต้องอินทิเกรต $z = x + y + 2$ บนบริเวณ R ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 16$ ในอัฐภาคที่หนึ่งของระนาบ xOy ดังนั้น

$$V = \iint_R z\,dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x+y+2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^4 \left(x\sqrt{16-x^2} + 8 - \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{16-x^2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16-x^2} + 16\arcsin\frac{1}{4}x\right]_0^4$$

$$= \left(\frac{128}{3} + 8\pi\right) \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

รูปที่ 2.18 รูปที่ 2.19 รูปที่ 2.20

2.1.5 การหาพื้นที่ของพื้นผิว

การคำนวณความยาวของส่วนโค้งกระทำได้โดย

1. หาภาพฉายของพื้นผิวบนแกนพิกัดที่เหมาะสม จะได้ช่วงบนแกนพิกัด
2. ถ้าใช้ภาพฉายบนแกน x ความยาวของส่วนโค้งจะหาได้จากการอินทิเกรต

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{บนช่วงในข้อ 1}$$

ถ้าใช้ภาพฉายบนแกน y ความยาวของส่วนโค้งจะหาได้จากการอินทิเกรต

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{บนช่วงในข้อ 1}$$

การคำนวณพื้นที่ S ของส่วนหนึ่ง R′ ของพื้นผิว $z = f(x,y)$ ใช้วิธีการที่คล้ายกันดังนี้

1. หาภาพฉายของ R′ บนระนาบพิกัดที่เหมาะสม จะได้บริเวณ R บนระนาบพิกัดนั้น

2. หาอินทิกรัลบน R โดยใช้ตัวถูกอินทิเกรตที่เหมาะสม

ถ้าภาพฉายของ R′ บนระนาบ xOy จะได้ $S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$

ถ้าภาพฉายของ R′ บนระนาบ yOz จะได้ $S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}\, dA$

ถ้าภาพฉายของ R′ บนระนาบ zOx จะได้ $S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}\, dA$

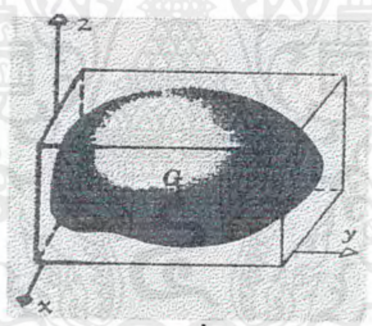
2.1.5.1 แบบฝึกหัดอินทิกรัลสองชั้น

1. จงหาค่าของ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\sin\theta} r\cos\theta \, dr\, d\theta$
2. พื้นที่ภายในเส้นโค้งรูปหัวใจ $r = 1 - \cos\theta$
3. จงหาอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วปริมาตรของรูปทรงที่ปิดล้อมด้านบนด้วย cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ด้านล่างด้วยระนาบ xy และด้านข้างเป็น cylinder $x^2 + y^2 = 2y$
4. จงหาพื้นที่ผิวของส่วนของทรงกระบอก $y^2 + z^2 = 9$ เหนือบริเวณ $R = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 2 , -3 \leq y \leq 3 \}$
5. จงหาพื้นที่พื้นผิวของส่วนของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ที่อยู่ในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = ay$
6. จงหาพื้นที่พื้นผิวของรูปกรวย $x^2 = y^2 + z^2$ ซึ่งอยู่ภายในทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$
7. รูปทรงที่ปิดล้อมด้านบนด้วย paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ ด้านล่างด้วยระนาบ xy และด้านข้างด้วย cylinder $x^2 + y^2 - x = 0$
8. จงหาค่าของ $\int_{0}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dydx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$
9. จงหา $\iint_R (2x - y^2)\, dA$ เหนือบริเวณ R ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นกราฟ y = -x + 1, y = x + 1 และ y = 3
10. จงใช้อินทิกรัลสองชั้นหาปริมาตรของรูปทรงสี่หน้าที่ล้อมรอบด้วยระนาบโคออดิเนท และระนาบ z = 4 – 4x - 2y

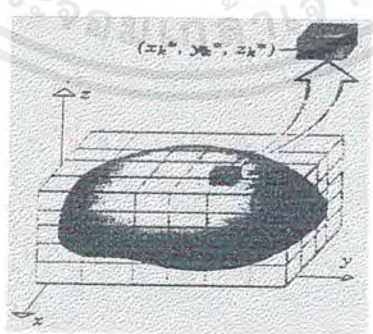
2.1.6 อินทิกรัลสามชั้น (Triple integrals)

ให้ G เป็นบริเวณรูปทรงตัน และสมมติฐาน G บรรจุในกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากหน้าขนาน(rectangular parallelpiped) (ดังรูปที่ 2.21) ซึ่งมีแต่ละด้านขนานกับระนาบพิกัด การให้นิยามของอินทิกรัลสามชั้น มีขั้นตอนดังนี้

1. บรรจุ G ลงในกล่องซึ่งมีด้านขนานกับระนาบพิกัด และแบ่งกล่องดังกล่าวให้เป็นกล่องเล็ก ๆ โดยใช้ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด พิจารณาเฉพาะกล่องเล็ก ๆ ที่เป็นเซตย่อยของ G (ดังรูปที่ 2.22) แล้วแทนปริมาตรของกล่องเล็ก ๆ นั้นด้วย $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$
2. เลือกจุดใด ๆ ในแต่ละกล่องเล็ก ๆ นั้น และแทนด้วย $(x_1^*, y_1^*, z_1^*), (x_2^*, y_2^*, z_2^*), ..., (x_n^*, y_n^*, z_n^*)$
3. พิจารณาผลบวก $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta v_k$ ซึ่งเรียกว่าผลบวกรีมันต์
4. ทำขั้นตอน 1-3 ซ้ำ แต่กำหนดด้านกว้าง ยาว สูง ของแต่ละกล่องให้เข้าใกล้ศูนย์ n เป็นจำนวนกล่อง แล้วนิยาม



รูปที่ 2.21



รูปที่ 2.22

สัญลักษณ์ $\iiint\limits_G f(x,y,z)dv$ เรียกว่า อินทิกรัลสามชั้นของ f(x,y,z) เหนือบริเวณ G

- สำหรับในกรณีที่ f(x,y,z) = 1 อินทิกรัลสามชั้นเหนือ G แทนปริมาตรของรูปทรง G นั่นคือ ปริมาตรของ $G = \iiint\limits_G dv$

2.1.6.1 คุณสมบัติของอินทิกรัลสามชั้น

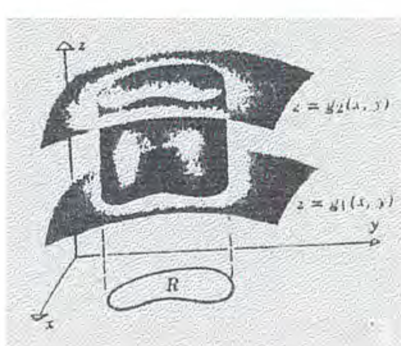
1. $\iiint\limits_G cf(x,y,z)dv = c\iiint\limits_G f(x,y,z)dv$ (C เป็นค่าคงที่)
2. $\iiint\limits_G [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dv = \iiint\limits_G f(x,y,z)dv + \iiint\limits_G g(x,y,z)dv$
3. $\iiint\limits_G [f(x,y,z)-g(x,y,z)]dv = \iiint\limits_G f(x,y,z)dv - \iiint\limits_G g(x,y,z)dv$
4. ถ้าบริเวณ G แบ่งเป็น G_1 และ G_2 แล้ว
   $\iiint\limits_G f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)dv$

ทฤษฎีบทที่ 5 ให้ G เป็นกล่องลูกบาศก์ซึ่ง $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $k \le z \le 1$ ถ้า f ต่อเนื่องบนบริเวณ G แล้ว

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dv = \int_a^b\int_c^d\int_k^1 f(x,y,z)dzdydx$$

(จากทฤษฎีบทนี้ ไม่ว่าจะเปลี่ยนลำดับชั้นในการอินทิเกรตซ้ำด้วยวิธีการต่าง ๆ อีก 5 อย่าง พบว่าผลของการอินทิเกรตเท่ากัน) สำหรับในกรณีที่ G ไม่เป็นสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ เราพิจารณาได้ดังนี้

ให้ R เป็นบริเวณปิดบนระนาบ xy และ $g_1(x,y)$, $g_2(x,y)$ ต่อเนื่องและ $g_1(x,y) \le g_2(x,y)$ สำหรับทุก (x,y) ใน R ดังนั้น $z = g_1(x,y)$ เป็น lower surface และ $z = g_2(x,y)$ เป็น upper surface ให้ G เป็นรูปทรงซึ่งประกอบด้วยจุดซึ่งอยู่เหนือหรือใต้บริเวณ R อยู่ระหว่าง upper surface และ lower surface G ในลักษณะนี้เรียกว่า Simple solid และ R เรียก projection ของ G บนระนาบ xy (ดังรูปที่ 2.23)



รูปที่ 2.23

ตัวอย่าง จงหา $\iiint_G 12xy^2z^3dv$ เหนือ G ที่กำหนดเมื่อ $-1 \le x \le 2 , 0 \le y \le 3 , 0 \le z \le 2$

วิธีทำ จากรูปที่ 2.24 จะได้

$$\iiint_G zdv = \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\ dz \right] dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\ dzdxdy$$

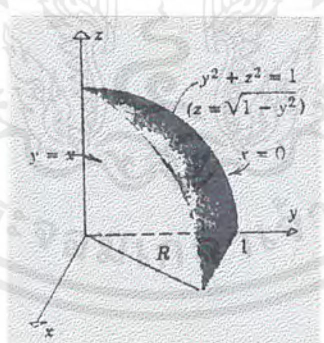
$$= \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y^2)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)x \Big|_{x=0}^{y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y-y^3)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y^2 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$ Ans



รูปที่ 2.24

ทฤษฎีบทที่ 6 ให้ G เป็น Simple solid ซึ่งอยู่ระหว่าง $z = g_2(x,y)$ และ $z = g_1(x,y)$ และให้ R เป็น projection ของ G บนระนาบ xy

ถ้า f(x,y,z) ต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dv = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

การคำนวณ $\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ นั้นอินทิเกรตเทียบ z ก่อน แล้วได้ผลลัพธ์ในรูปของฟังก์ชันของ x และ y แล้วอินทิเกรตเหนือ R บนระนาบ xy

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของรูปทรงที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ $z = 5x^2 + 5y^2$ และ $z = 6 - 7x^2 - y^2$

วิธีทำ Solid G และ R แสดงได้ ดังรูป

หาสมการที่ได้จากการตัดกันของพาราโบลอยด์ ซึ่งได้

$$5x^2 + 5y^2 = 6 - 7x^2 - y^2$$

หรือ $2x^2 + y^2 = 1$ (เป็น elliptic cylinder)

ปริมาตรของ G $= \iiint_G dv$

$$= \iint_R \left[\int_{5x^2+5y}^{6-7x^2-y^2} dz \right] dA$$

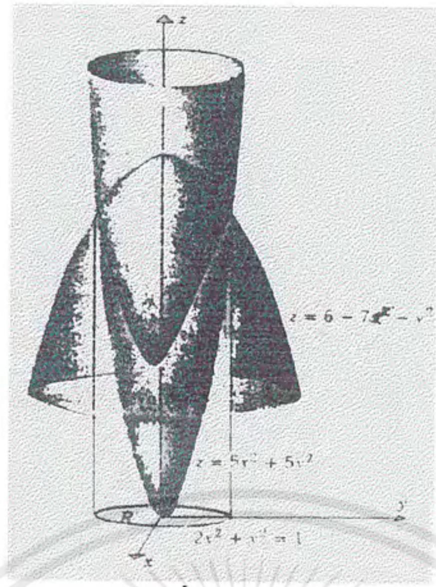
$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dzdydx$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} (6-12x^2-6y^2)dydx$$

$$= 8\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1-2x^2)^{3/2} dx \left[x = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$ Ans



รูปที่ 2.25

ถ้ารูปทรง G ล้อมรอบด้วยพื้นผิว $y = g_1(x,y)$ และ $y = g_2(x,y)$ แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dv = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dy \right] dA$$

เมื่อ R เป็นภาพฉายของรูปทรง G บนระนาบ xz

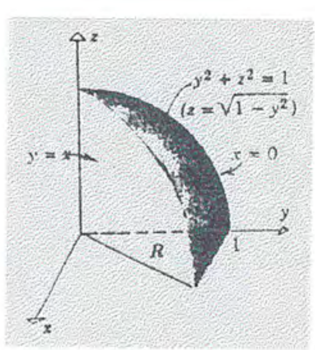
ถ้ารูปทรง G ล้อมรอบด้วย $x = g_1(y,z)$ และ $x = g_2(y,z)$ แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dv = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dx \right] dA$$

เมื่อ R เป็นภาพฉายของรูปทรง G และ xz

<u>ตัวอย่าง</u> จาก $\iiint_G 12xy^2z^3dv$ เหนือ G ที่กำหนดเมื่อ $-1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3, 0 \le z \le 2$

จงคำนวณหา $\iiint_G zdv$ เหนือขอบเขตดังในรูปที่ 2.26



รูปที่ 2.26

การอินทิเกรตครั้งแรกเทียบกับ z แต่ในตัวอย่างนี้จะอินทิเกรตครั้งแรกเทียบกับ x

<u>วิธีทำ</u> จากรูปที่ 2.27 จะได้

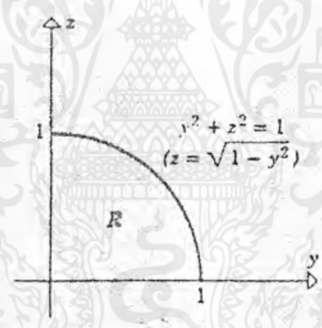
$$\iiint_G z\,dv = \iint_R \left[\int_0^y z\,dx\right] dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y z\,dx\,dz\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} zx \Big|_{x=0}^{y} dz\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} zy\,dz\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 y \Big|_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y^2)\,y\,dy = \frac{1}{8}$$ Ans



รูปที่ 2.27

2.1.6.2 แบบฝึกหัดอินทิกรัลสามชั้น

1. จงหาค่าของ $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$

2. จงหาค่าของ $\int_{0}^{2}\int_{-0}^{y^2}\int_{1}^{2} yzdxdzdy$

3. จงหาค่าของ $\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-z^2}}\int_{0}^{x} xydxdzdy$

4. จงหาค่าของ $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} x\quad dzdy$

5. จงหาค่าของ $\iiint_G xy\,\mathbf{sin}\,yzdv$ เมื่อ G เป็นกล่องรูปลูกบาศก์ซึ่ง $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le \dfrac{\pi}{6}$

6. จงหาค่าของ $\iiint_G xyzdv$ เมื่อ G เป็นรูปทรงในอัฐภาคที่ 1 ที่ล้อมรอบด้วย $z = 2-x^2$, $z = 0$, $y = x$ และ $y = 0$

7. จงใช้อินทิกรัลสามชั้นหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคแรกที่ล้อมรอบด้วยระนาบโคออดิเนทและระนาบ $3x + 6y + 4z = 1$

8. จงใช้อินทิกรัลสามชั้นหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิว $y = x^2$ และระนาบ $y + z = 4$ และ $z = 0$

9. จงใช้อินทิกรัลสามชั้นหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่ระหว่าง $x^2 + 9y^2 = 9$ และระนาบ $z = 0$ และ $z = x+3$

10. จงใช้อินทิกรัลสามชั้นหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ล้อมรอบด้วย $z = 4x^2 + y^2$ และ $z = 4-3y^2$

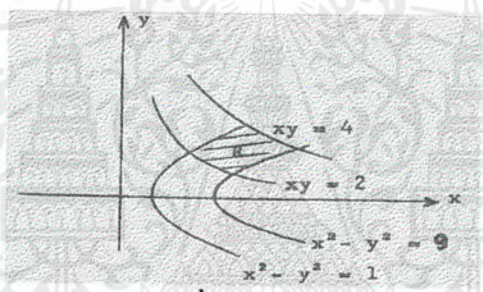
2.1.7 การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นโดยการเปลี่ยนตัวแปร

ทฤษฎีบท ให้ f(x,y) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณปิด R กำหนด x = F(u,v) , y = G(u,v) เป็นการแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 transformation) จากบริเวณ R ในระนาบ xy ไปยังบริเวณ R′ ในระนาบ uv และมีจาโคเบียน $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ แล้ว

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\iint_R f(F(u,v),G(u,v))|J|dudv$$

พิสูจน์ ละเว้นการพิสูจน์ในที่นี้

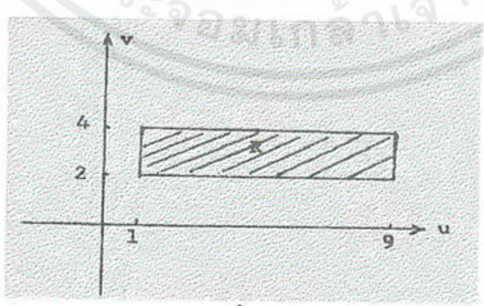
<u>ตัวอย่าง</u> จากรูปที่ 2.28 ให้ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$, xy = 2 , xy = 4 , x > 0 , y > 0 จงหาค่าของ $\iint_R (x^2+y^2)dxdy$



รูปที่ 2.28

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=x^2-y^2$, $v=xy$

ดังนั้น $R'=\{(u,v)|1\le u\le 9, 2\le v\le 4\}$ ดังรูป 2.29



รูปที่ 2.29

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{vmatrix}}=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

แต่ $u^2+4v^2=(x^2+y^2)^2$

ดังนั้น $(x^2+y^2)=\sqrt{u^2+4v^2}$ และ $2(x^2+y^2)=2\sqrt{u^2+4v^2}$

$$\therefore \quad \iint_{Rr}(x^2+y^2)dxdy = \iint_{R}\sqrt{u^2+4v^2}\,\frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4\int_1^9 dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 u\Big|_1^9 dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 8dv$$

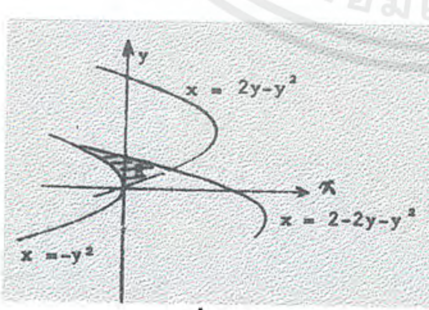
$$= 4(v)\Big|_2^4$$

$$= 4(4-2)$$

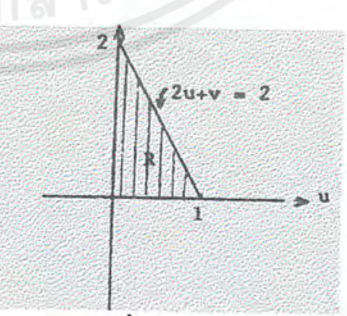
ดังนั้น $\iint_{Rr}(x^2+y^2)dxdy = 8$ <u>Ans</u>

<u>ตัวอย่าง</u> จากรูปที่ 2.30 กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x=-y^2$, $x=2y-y^2$ และ $x=2-y^2-2y$ จงหาค่าของ $\iint_{Rr} xdA$ โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่เป็น u,v เมื่อ

$x=u-\dfrac{(u+v)^2}{4}$ และ $y=\dfrac{u+v}{2}$



รูปที่ 2.30



รูปที่ 2.31

จากรูปที่ 2.30 แสดง R บนระนาบ xy และรูปที่ 2.31 แสดง R′ บนระนาบ uv

<u>วิธีทำ</u> จาก $x = u - \frac{(u+v)^2}{4}$, $y = \frac{u+v}{2}$

จะเห็นได้ว่า $x = -y^2$ ได้ $u = 0$

$x = 2y - y^2$ ได้ $u = u + v$ หรือ $v = 0$

$x + y^2 = 2 - 2y$ ได้ $u = 2 - u - v$ หรือ $2u + v = 2$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-\frac{u+v}{2} & \frac{-(u+v)}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{Rr} x\,dA &= \iint_{R'} \left(u - \frac{(u+v)^2}{4}\right)\frac{1}{2}\,dvdu \\
&= \int_0^1 \int_0^{2-2u} \left(u - \frac{(u+v)^2}{4}\right)\frac{1}{2}\,dvdu \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[uv - \frac{(u+v)^3}{12} \right]_0^{2-2u} du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[2u - 2u^2 - \frac{(2-u)^3}{12} + \frac{u^3}{12} \right] du \\
&= \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

<u>Ans</u>

2.1.8 การหาค่าอินทิกรัลสามชั้นโดยการเปลี่ยนตัวแปร

ทฤษฎีบท ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณปิด R กำหนด $x = F(u,v,w)$, $y = G(u,v,w)$, $z = H(u,v,w)$ เป็นการแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 transformation) จากบริเวณ R ใน ระนาบ xyz ไปยังบริเวณ R' ในระนาบ uvw และมีจาโคเบียน $J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$ แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G'} f(F(u,v,w),G(u,v,w),H(u,v,w)|J(u,v,w)|dudvdw$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\iiint_G dv$ เมื่อ G คือ ทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวทรงกระบอกไฮเพอร์โบลิก 6 รูป คือ xy = 1 , xy = 2 , yz = 1 , yz = 2 , zx = 1 และ zx = 2 โดยที่ x,y,z > 0

<u>วิธีทำ</u> เปลี่ยนตัวแปรให้ u = xy , v = yz , w = zx

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & 0 & z \\ x & z & 0 \\ 0 & y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2xyz}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{2\sqrt{uvw}} (2\sqrt{uvw} \neq 0 \text{ ทุก } u,v,w > 0)$$

$$\begin{aligned} \iiint_G dv &= \int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{uvw}} dudvdw \\ &= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_1^2\left[2\sqrt{v}\right]_1^2\left[2\sqrt{w}\right]_1^2 \\ &= 4(5\sqrt{2}-7) \end{aligned}$$

<u>Ans</u>

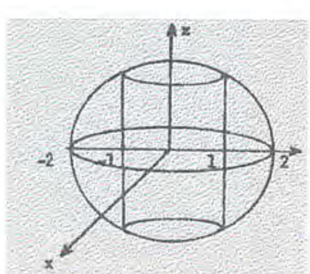
2.1.8.1 การเปลี่ยนตัวแปรจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก

เราใช้ความสัมพันธ์ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ โดยใช้ข้อกำหนดของ r และ θ เช่นเดียวกันกับในระบบพิกัดเชิงขั้ว และจะได้

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

ดังนั้น $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdzdxdy$ โดยเปลี่ยนตัวแปรเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก



รูปที่ 2.32

จากรูปที่ 2.32 แสดงบริเวณของการอินทิเกรตซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ และปิดหัวท้ายด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ เขียนในระบบพิกัดทรงกระบอกได้เป็น

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$r^2 = 1$$

จะได้ $r = 1$ เมื่อ $r > 0$

ทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ เขียนในระบบพิกัดทรงกระบอกได้เป็น

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + z^2 = 4$$

$$r^2 + z^2 = 4$$

$$z^2 = 4 - r^2$$

$$z = -\sqrt{4 - r^2} \text{ และ } \sqrt{4 - r^2}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \, dz dx dy = z \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z^2 rrz dr d\theta$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - r^2)^{3/2} r dr d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{5} (4 - r^2)^{5/2} \right]_0^1 d\theta$$

$$= -\frac{2}{15} \int_0^{2\pi} (9\sqrt{3} - 32) d\theta$$

$$= \frac{2}{15} \int_0^{2\pi} (32 - 9\sqrt{3}) d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{15} (32 - 9\sqrt{3})$$

<u>Ans</u>

2.1.8.2 การเปลี่ยนตัวแปรจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดทรงกลม

โดยใช้ความสัมพันธ์ $x=\rho\sin\phi\cos\theta, y=\rho\sin\phi\cos\theta, z=\rho\cos\phi$

และถ้า $\rho=0$ ให้ $\phi=0$ และ $\theta=0$

โดยที่ $\rho>0, \theta_0\le\theta\le\theta_0+2\pi, 0\le\phi\le\pi$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix}\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\\ -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\sin\theta & 0\\ \rho\cos\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & -\rho\sin\phi\end{vmatrix}$$

$$=-\rho^2\sin\phi$$

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{G'} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

2.1.9 การประยุกต์ของอินทิกรัลสองชั้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ของอินทิกรัลสองชั้น ในทางฟิสิกส์บางอย่าง

2.1.9.1 มวลของวัตถุแผ่นแบน

นิยาม 1.1 ถ้าวัตถุแผ่นแบนเป็นบริเวณ R ในระนาบ xy และมีฟังก์ชันความหนาแน่น $\delta(x,y)$ แล้วมวลรวม M หาได้จาก

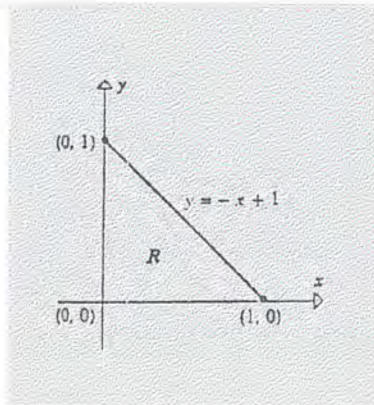
$$M=\iint_R \delta(x,y)dA$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหามวลรวมของวัตถุแผ่นแบนรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ (0,0) ,(0,1) และ (1,0) มีฟังก์ชันความหนาแน่น $\delta(x,y) = xy$

<u>วิธีทำ</u> วัตถุแผ่นแบน ดังรูปที่ 2.33 หามวลรวมได้จาก

$$\begin{aligned}M &=\iint_R \partial(x,y)dA\\ &=\int_0^1\int_0^{-x+1} xydydx\\ &=\int_0^1\int_0^{-x+1} xydydx\\ &=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{-x+1}dx\\ &=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x\right]dx\\ &=124\end{aligned}$$

หน่วยของมวล <u>Ans</u>



รูปที่ 2.33

2.1.9.2 จุดศูนย์ถ่วงของวัตถุแผ่นแบน

นิยาม 2.1 วัตถุแผ่นแบนใน 2 มิติ มีมวล m เราจะนิยามโมเมนต์ของ m รอบเส้นตรง x = a และโมเมนต์ของ m รอบเส้นตรง y = c ดังนี้

ก) โมเมนต์ ของ m รอบเส้นตรง x = a เท่ากับ m(x-a)

ข) โมเมนต์ ของ m รอบเส้นตรง y = c เท่ากับ m(y-c)

นิยาม 2.2 วัตถุแผ่นแบนบริเวณ R มีฟังก์ชันความหนาแน่น $\delta(x,y)$

ก) มีโมเมนต์รอบเส้นตรง x = a เท่ากับ $\iint_R (x-a)\delta(x,y)\,dA$

ข) มีโมเมนต์รอบเส้นตรง y = c เท่ากับ $\iint_R (y-c)\delta(x,y)\,dA$

จากนิยาม2.2 เราจะได้โมเมนต์รอบแกน Y และรอบแกน X ของวัตถุดังกล่าว คือ

M_y = โมเมนต์ของวัตถุแผ่นแบน R รอบแกน Y = $\iint_R x\delta(x,y)\,dA$

M_x = โมเมนต์ของวัตถุแผ่นแบน R รอบแกน X = $\iint_R y\delta(x,y)\,dA$

ต่อไปเราจะได้สูตรสำหรับจุดศูนย์ถ่วง $(\bar{x},\bar{y})$ ของวัตถุแผ่นแบน R คือ

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\delta(x,y)\,dA}{\iint_R \delta(x,y)\,dA} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\delta(x,y)\,dA}{\iint_R \delta(x,y)\,dA}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุแผ่นแบนรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ (0,0) ,(0,1) และ (1,0) และมีฟังก์ชันความหนาแน่น $\delta(x,y) = xy$

<u>วิธีทำ</u> วัตถุแผ่นแบนนี้ดังตัวอย่างที่แล้วจะได้มวล คือ

$$M = \iint_R \delta(x,y)dA = \iint_R xydA = 1/24$$

เพราะฉะนั้น โมเมนต์ของวัตถุแผ่นแบนรอบแกน Y คือ

$$M_y = \iint_R x\delta(x,y)\,dA = \iint_R x^2 y\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{-x+1} x^2 y\,dA \quad = 1/60$$

และ โมเมนต์ของวัตถุแผ่นแบนรอบแกน X คือ

$$M_x = \iint_R y\,\delta(x,y)\,dA = \iint_R xy^2\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x+1} xy^2\,dA \quad = 1/60$$

เพราะฉะนั้น $\bar{x} = \dfrac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{24}} = \dfrac{2}{5}, \bar{y} = \dfrac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{24}} = \dfrac{2}{5}$

นั่นคือ จุดศูนย์ถ่วง คือ $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ Ans

ในกรณีที่วัตถุแผ่นแบนมีฟังก์ชันความหนาแน่น δ เป็นค่าคงที่ จะเรียกจุดศูนย์ถ่วงว่า เซนทรอยด์ของวัตถุแผ่นแบน (Centroid of the lamina) หรือ เซนทรอยด์ของบริเวณ R ซึ่งจะได้สูตร คือ

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\,dA}{\iint_R dA} = \frac{1}{\text{พื้นที่ของ R}} \iint_R xdA$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\,dA}{\iint_R dA} = \frac{1}{\text{พื้นที่ของ R}} \iint_R ydA$$

ตัวอย่าง จงหาเซนทรอยด์ของวัตถุแผ่นแบนที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 2x - x^2$ และ $y = x^2 - 4$

วิธีทำ จากสูตร $\bar{x} = \dfrac{1}{\text{พื้นที่ของ } R} \iint_R x\,dA$

และ $\bar{y} = \dfrac{1}{พื้นที่ของ\ R} \iint\limits_R y\ dA$

หาพื้นที่ของ $R = \iint\limits_R dA = \int_{-1}^{2}\int_{x^2-4}^{2x-x^2} dy\, dx = 9$

$$\iint\limits_R x\ dA = \int_{-1}^{2}\int_{x^2-4}^{2x-x^2} x\, dy\, dx = 9/2$$

$$\iint\limits_R y\ dA = \int_{-1}^{2}\int_{x^2-4}^{2x-x^2} y\, dy\, dx = 27/2$$

เพราะฉะนั้น $\bar{x} = \left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

และ $\bar{y} = \left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{27}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$

นั่นคือ เซนทรอยด์ของวัตถุอยู่ที่ $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ <u>Ans</u>

2.1.9.3 โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแผ่นแบน

นิยาม 3.1 โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแผ่นแบนบริเวณ R รอบแกน X , รอบแกน Y และจุดกำเนิดหาได้จากสูตร ตามลำดับ ดังนี้

$$I_x = \iint\limits_R y^2\, \delta(x,y)\, dA$$

$$I_y = \iint\limits_R x^2\, \delta(x,y)\, dA$$

$$I_0 = \iint\limits_R \left(x^2 + y^2\right) \delta(x,y)\, dA$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดกำเนิดของวัตถุที่มีความหนาแน่นคงที่(δ) ถ้าวัตถุมีพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยแกน Y เส้นตรง y = 4

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร $I_0 = \iint\limits_R \left(x^2 + y^2\right) \delta(x,y)\, dA$

บริเวณ $R = \{(x,y) | 0 \le x \le 2\ ,\ 2x \le y \le 4\}$

ดังนั้น

$$I_0 = \int_0^2 \int_{2x}^4 \left(x^2 + y^2\right)\delta \,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$$

$$= \delta \int_0^1 \left(\frac{x^2 y + y^3}{3} \right)^4$$

$$= \frac{104}{3\delta}$$

<u>Ans</u>

2.1.9.4 แบบฝึกหัดการประยุกต์อินทิกรัลสองชั้น

1. วัตถุแผ่นแบนมีความหนาแน่น $\delta(x,y) = x + y$ ล้อมรอบด้วยแกน X เส้นตรง $X = 1$ และเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ จงหามวลและจุดศูนย์ถ่วง
2. วัตถุแผ่นแบนมีความหนาแน่น $\delta(x,y) = xy$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นรอบวงของวงกลม $x^2+y^2 = a^2$ และแกนพิกัด จงหามวลและจุดศูนย์ถ่วง
3. จงหาเซนทรอยด์ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = x$ และ $y = 2 - x^2$
4. จงหาเซนทรอยด์ของบริเวณสามเหลี่ยมที่ล้อมรอบด้วย $y = x$, $x = 1$ และแกน X
5. จงหาเซนทรอยด์ของบริเวณเหนือแกน X และอยู่ระหว่างวงกลม $x^2+y^2 = a^2$ และ $x^2 + y^2 = b^2 \quad (a < b)$
6. จงหาเซนทรอยด์ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = |x|$ และเส้นตรง $y = 4$
7. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแผ่นแบนที่มีความหนาแน่นคงที่ ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง และรอบแกนที่กำหนด คือ $x = y$, $x + y = 2$ รอบเส้นตรง $x = -1$
8. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแผ่นแบนที่มีความหนาแน่นคงที่ ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง และรอบแกนที่กำหนด คือ $y = x^2 - 4$, $y = 2x - x^2$ รอบเส้นตรง $x = -2$
9. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแผ่นแบนที่มีความหนาแน่นคงที่ ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง และรอบแกนที่กำหนด คือ $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 2y$, $y = 2x$, $x > 0$, $y > 0$ รอบแกน Y
10. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน X ของวัตถุแผ่นแบน ที่มีความหนาแน่นคงที่ (δ) ถ้าวัตถุมีพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2, y = \sqrt{2 - x}$ และ $x = 0$

2.1.10 การประยุกต์ของอินทิกรัลสามชั้น

นิยาม 1 วัตถุทรงตัน G มีความหนาแน่น ณ จุด (x,y,z) ใด ๆ กำหนดด้วยฟังก์ชันความหนาแน่น $\delta(x,y,z)$ แล้วจะหามวลได้จาก

$$\text{มวลของ G} = \iiint_G \delta(x,y,z)\,dV$$

2.1.10.1 จุดศูนย์ถ่วงของทรงตัน

วัตถุทรงตัน G มีฟังก์ชันความหนาแน่น $\delta(x,y,z)$ จะหาจุดศูนย์ถ่วง $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ ของวัตถุทรงตัน G นี้ได้จากสูตร

$$\bar{x} = \frac{\iiint_G x\,\delta(x,y,z)\,dV}{\iiint_G \delta(x,y,z)\,dV} = \frac{1}{\text{มวลของG}}\iiint_G x\,\delta(x,y,z)\,dV$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_G y\,\delta(x,y,z)\,dV}{\iiint_G \delta(x,y,z)\,dV} = \frac{1}{\text{มวลของG}}\iiint_G y\,\delta(x,y,z)\,dV\,.$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_G z\,\delta(x,y,z)\,dV}{\iiint_G \delta(x,y,z)\,dV} = \frac{1}{\text{มวลของG}}\iiint_G z\,\delta(x,y,z)\,dV$$

2.1.10.2 เซนทรอยด์ (x,y,z) ของรูปทรงตัน G หาได้จากสูตร

$$\bar{x} = \frac{\iiint_G x\,dV}{\iiint_G dV} = \frac{\iiint_G x\,dV}{\text{ปริมาตรของG}}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_G y\,dV}{\iiint_G dV} = \frac{\iiint_G y\,dV}{\text{ปริมาตรของG}}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_G z\,dV}{\iiint_G dV} = \frac{\iiint_G z\,dV}{\text{ปริมาตรของG}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหามวลและจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุรูปทรงกระบอกกลมตัน $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$ ถ้ากำหนดความหนาแน่น ณ ทุกจุดตันแปรผันโดยตรงกับระยะทางระหว่างจุดนั้นกับฐานของวัตถุนั้น

<u>วิธีทำ</u> วัตถุรูปทรงตัน G กำหนดด้วยอสมการ $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$ และความหนาแน่น $\delta(x,y,z) = kz$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\text{มวล (M)} = \iiint_G \delta(\text{x,y,z})dV$$

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(\frac{1}{2}\right) h^2 \,\text{dy dx}$$

$$= \text{kh}^2 \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{1}{2}\right) kh^2 \pi a^2$$

หา $\bar{z}$ ได้จาก

$$\bar{z} = \frac{\iiint_G \text{z}\delta(\text{x,y,z})dV}{\text{มวลของ}G}$$

$$= \frac{\iiint_G \text{z}\delta(\text{x,y,z})dV}{\left(\frac{1}{2}\right) kh^2 \pi a^2}$$

แต่ว่า

$$\iiint_G z\delta(x,y,z)dV = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^h z(kz)dzdydx$$

$$= k\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{1}{3}\right)h^2 dydx$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)kh^2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)kh^2\pi a^2$$

ดังนั้น
$$\bar{z} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)kh^2\pi a^2}{\left(\frac{1}{2}\right)kh^2\pi a^2} = \left(\frac{2}{3}\right)h$$

ในทำนองเดียวกันใช้สูตรหา x, y จะได้ $\bar{x} = \bar{y} = 0$

นั่นคือ จุดศูนย์ถ่วงของ G อยู่ที่ $(0, 0, \frac{2}{3}h)$ Ans

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาเซนทรอยด์ของวัตถุทรงตันที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z = 1 - y^2, x = 0, z = 0$ และ $x = 2$

<u>วิธีทำ</u> วัตถุทรงตัน G กำหนดด้วยอสมการ $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 - y^2$
หาปริมาตรของ G ได้จาก

$$V = \int_0^2\int_{-1}^{1}\int_0^{1-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2\int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)dy\,dx = \int_0^2\left(y - \frac{y^3}{3}\right)_{-1}^{1}dx$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)\int_0^2 dx = \frac{8}{3}$$

ฉะนั้น

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_G z\,dV}{\text{ปริมาตรของ G}} = \frac{\int\limits_0^2 \int\limits_{-1}^1 \int\limits_0^{1-y^2} z\,dz\,dy\,dx}{\text{ปริมาตรของ G}}$$

$$= \frac{\frac{16}{15}}{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{2}{5}$$

ในทำนองเดียวกัน จากสูตร จะหา $\bar{x}, \bar{y}$ ได้ดังนี้ $\bar{x} = 1, \bar{y} = 0$

นั่นคือ เซนทรอยด์ของวัตถุอยู่ที่ $(1, 0, \frac{2}{5})$ Ans

2.1.10.3 โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงตัน

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงตัน G ใน 3 มิติได้จากสูตรต่อไปนี้

รอบแกน $x = I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\delta(x,y,z)\,dV$

รอบแกน $y = I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\delta(x,y,z)\,dV$

รอบแกน $z = I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)\,dV$

ตัวอย่าง จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงกระบอกกลมตัน $x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le z \le h$ ซึ่งมีความหนาแน่นคงที่ (δ) รอบแกนสมมาตร

วิธีทำ วัตถุทรงกระบอกกลมตัน มีลักษณะสมมาตรกับแกน z ดังนั้นต้องหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ G รอบแกน z เท่ากับ 4 เท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ G ส่วนที่อยู่ในอัฐภาคที่ 1 รอบแกน z ซึ่งได้จาก

$$I_z = 4\iiint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)\delta \, dV$$

$$= 4\delta\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h \left(x^2 + y^2\right) dy \, dx$$

$$= 4\delta h \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\theta$$ (เปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว)

$$= 4\delta h \int_0^{\pi/2} \left(r^4/4\right)_0^a d\theta$$

$$= \frac{\left(\delta h a^4 \pi\right)}{2}$$

2.1.10.4 แบบฝึกหัดการประยุกต์ของอินทิกรัลสามชั้น

1. กล่องลูกบาศก์กำหนดด้วยอสมการ $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ มีความหนาแน่น $\delta(x,y,z) = a - x$ จงหามวลและจุดศูนย์ถ่วง
2. รูปทรงตันปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 1 - y^2$ (เมื่อ $y \geq 0$) และระนาบ $z = 0, x = -1, x = 1$ มีความหนาแน่น $\delta(x,y,z) = yz$ จงหามวลและจุดศูนย์ถ่วง
3. จงหาเซนทรอยด์ของวัตถุทรงตันที่กำหนดรูปทรงสี่หน้าตันในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งปิดล้อมด้วยระนาบพิกัดและระนาบ $x + y + z = 1$
4. รูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = y^2$ และระนาบ $x = 0, x = 1$ และ $x = 1$
5. รูปทรงตันในอัฐภาคที่ 1 ที่ล้อมรอบด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ และระนาบพิกัด
6. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงตันที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิว $x + y + z = 2$, $y = 0, x = 0$, $0 \leq z \leq \sqrt{1-y}$ ความหนาแน่น (δ) รอบแกน X
7. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงตันที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวที่กำหนด ความหนาแน่น (δ) รอบแกนที่กำหนด คือ
8. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงตันที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวที่กำหนด ความหนาแน่น (δ) รอบแกนที่กำหนด คือ $y + z = 2 , x + z = 2 , x = 0 , y = 0, z = 0$ รอบแกน Z
9. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงตันที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวที่กำหนด ความหนาแน่น (δ) รอบแกนที่กำหนด คือ $x^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = a^2$ รอบแกน X
10. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทรงตันที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวที่กำหนด ความหนาแน่น (δ) รอบแกนที่กำหนด คือ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1, z = 1$ รอบแกน X

2.2 เนื้อหาเกี่ยวกับโปรแกรมช่วยสอน

ความสำคัญในการพัฒนาคุณภาพการศึกษาก็คือ การประยุกต์เทคโนโลยีใหม่ ๆ ในด้านต่างๆมาช่วยเสริมการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ปัจจุบันกล่าวได้ว่าคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนเป็นเทคโนโลยีหนึ่งที่ครูอาจารย์ให้ความสนใจ เนื่องจากคอมพิวเตอร์มีคุณสมบัติในการมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน ซึ่งสื่ออื่น ๆ ขาดคุณสมบัติข้อนี้

ในขณะนี้ประเทศไทย มีความตื่นตัวในการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอนเป็นอย่างมาก ดังจะเห็นได้จากการมีหลักสูตรวิชาคอมพิวเตอร์ในระดับโรงเรียนเพิ่มจากวิชาอื่น ๆ นอกจากนี้ได้มีการพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในวิชาต่าง ๆ เพิ่มขึ้น ดังจะเห็นได้จากการที่หน่วยงานภาครัฐและเอกชนมีการนำเสนอผลงานบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในการจัดประชุมทางวิชาการเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นประจำทุกปี นับตั้งแต่ปี พ.ศ. 2529 เป็นต้นมา แต่เป็นที่น่าสังเกตว่าในช่วงเวลาที่ผ่านมาดังกล่าว การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนยังไม่มากและแพร่หลายเท่าที่ควร ทั้งนี้อาจจะเนื่องมาจากระบบคอมพิวเตอร์มีพัฒนาการที่รวดเร็วมาก ทำให้บทเรียนที่พัฒนาขึ้นไม่สามารถไปด้วยกันกับระบบคอมพิวเตอร์หรือใช้ด้วยกันไม่ได้ อีกทั้งราคายังอยู่ในระดับที่โรงเรียนทั่ว ๆ ไปไม่สามารถจัดหามาใช้ได้

ปัจจุบันพัฒนาการของระบบคอมพิวเตอร์อยู่ในรูปของมัลติมีเดีย ที่มีการแสดงผลในรูปของแสง สี เสียง ภาพเคลื่อนไหว และการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับบทเรียน ทำให้มีความน่าสนใจมากขึ้นต่อการนำคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนมาประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอน ที่ผู้เรียนสามารถรับประสบการณ์ประสาทสัมผัสทั้ง 5 ซึ่งจะช่วยส่งผลต่อการเกิดความรู้ความเข้าใจบทเรียนที่ศึกษา

2.2.1 ความเป็นมาของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

เมื่อพิจารณาถึงความเป็นมาของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน ในระยะเวลากว่า 20 ปีที่ผ่านมา การเรียนการสอนแบบโปรแกรม ได้รับความสนใจว่าเป็นวิธีการที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดีขึ้น เนื่องจากการเรียนการสอนวิธีนี้มีหลักการพื้นฐานของการใช้ทฤษฎีและหลักจิตวิทยาการเรียนรู้ที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล มีการให้แรงเสริม และการให้ข้อมูลป้อนกลับแก่ผู้เรียน การเรียนการสอนในลักษณะนี้นอกจากจะใช้สื่อการเรียนการสอนในรูปเอกสารแล้วได้มีผู้พยายามสร้างเครื่องสอน (Teaching Machine) เพื่อนำเสนอบทเรียนแบบโปรแกรมอีกด้วย และเมื่อคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทในวงการศึกษา บทเรียนแบบโปรแกรมจึงมีการพัฒนามาอยู่บนจอคอมพิวเตอร์ ในลักษณะการนำเสนอบทเรียนในรูปของหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ (Electronic Book) และทำให้เกิดรูปแบบการเรียนการสอนที่เรียกว่าคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน (Computer Assisted Instruction) และเรียกย่อ ๆ ว่า CAI ขึ้น

2.2.2 คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

2.2.2.1 CAI แบบฝึกฝนและฝึกหัด

CAI รูปแบบนี้เป็นรูปแบบที่พบเห็นกันทั่วไป ลักษณะของบทเรียนมักเป็นการให้โจทย์แล้วถามคำถาม ถ้าตอบผิดก็อธิบายการตอบผิดอย่างไร ให้ลองตอบดูใหม่ ถ้าตอบถูกก็จะเสริมแรงว่าทำถูก หรือให้คำชมเชย แล้วจึงขึ้นคำถามใหม่

2.2.2.2 CAI แบบทบทวนความรู้

เป็น CAI รูปแบบที่พยายามใช้คอมพิวเตอร์แทนครู ในการดำเนินการทบทวนเนื้อหาวิชาความรู้ที่ได้เรียนไปแล้ว ในลักษณะเช่นเดียวกับการเรียนพิเศษนอกเวลาชั่วโมงเรียนปกติ ลักษณะของบทเรียนมักเป็นการให้เนื้อหาและรูปภาพประกอบบนจอภาพ เมื่อให้เนื้อหาเป็นพื้นฐานแล้วก็จะมีคำถามให้ผู้เรียนตอบหรือให้โจทย์ผู้เรียนทำ ถ้าผู้เรียนตอบหรือทำได้ถูก คอมพิวเตอร์จะสอนเนื้อหาต่อไป แต่ถ้าผู้เรียนตอบหรือทำโจทย์ผิด คอมพิวเตอร์อาจจะย้อนกลับมายังเนื้อหาที่เรียนแล้ว หรือไปยังเนื้อหาที่เป็นส่วนซ่อมเสริม ขึ้นอยู่กับลักษณะการตอบผิดถูกในคำถามนั้น ๆ

2.2.2.3 CAI แบบสถานการณ์จำลอง

CAI รูปแบบนี้เป็นรูปแบบที่พยายามเลียนแบบกระบวนการที่จะเกิดขึ้นจริง โดยการจำลองสถานการณ์ขึ้นนั้นให้ปรากฏ เช่น จำลองการขับเครื่องบิน จำลองการประกอบธุรกิจขนาดเล็ก จำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคของอะตอม หรือจำลองการเคลื่อนที่ของกระแสประสาทเป็นต้น สถานการณ์จำลองดังกล่าวนี้ช่วยให้ผู้เรียน ได้มีโอกาสรับประสบการณ์ในสิ่งที่จะเกิดขึ้นจริง หรือในสิ่งที่เป็นนามธรรม โดยปกติทั่วไปอธิบายให้เข้าใจได้ยาก และช่วยให้เกิดความปลอดภัยในการเรียนรู้หรือการให้ประสบการณ์ที่ต้องเสี่ยงภัยกับความเสียหายหรือความล้มเหลวที่จะเกิดขึ้น เป็นการช่วยลดค่าใช้จ่ายได้เป็นอย่างมาก นอกจากนี้ยังสามารถขยายหรือลดเวลาเรียนให้เหมาะกับผู้เรียนแต่ละคนด้วย

การจำลองสถานการณ์โดยใช้คอมพิวเตอร์จึงเป็นการเรียนการสอนที่ช่วยให้เข้าใจในสิ่งที่ยากต่อการเรียนรู้ การสร้างบทเรียนในลักษณะนี้จะต้องสะท้อนกระบวนการที่เกิดขึ้นอย่างถูกต้องตามหลักวิชา จึงเป็นบทเรียนที่มีประสิทธิภาพได้

2.2.2.4 CAI แบบเกม

CAI รูปแบบเกมมีพื้นฐานมาจากธรรมชาติของผู้เรียนที่ชอบการแข่งขัน เมื่อมีสิ่งที่ท้าทายให้แข่งขันก็จะเป็นแรงจูงใจให้สนใจเรียนเพิ่มขึ้น เช่น เรียนพิมพ์ดีด โดยเล่นเกมยิงตัวอักษรที่พิมพ์เพื่อเก็บคะแนน การสะกดคำพิมพ์ภาษาอังกฤษให้ถูกต้องก่อนหมดเวลา การตอบโจทย์ปัญหาแข่งขันกัน เป็นต้น

2.2.2.5 CAI แบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

CAI รูปแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ มีพื้นฐานมาจากการจำลองบทเรียนในลักษณะที่ปรากฏในหนังสือแบบเรียน จึงมีส่วนประกอบที่คล้ายคลึงกับส่วนประกอบของหนังสือแบบเรียนคือ ปก คำนำ สารบัญ แบบฝึกหัด เป็นต้น

2.2.2.6 CAI แบบกำหนดสถานการณ์ให้แก้ปัญหา

CAI รูปแบบกำหนดสถานการณ์ให้แก้ปัญหา เป็นการนำเสนอสถานการณ์ให้ผู้เรียนศึกษาแล้วตอบคำถาม เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์นั้น ๆ

2.2.2.7 CAI แบบวินิจฉัยข้อบกพร่อง

CAI รูปแบบวินิจฉัยข้อบกพร่อง เป็นการถามคำถามหรือทดสอบนักเรียน เพื่อดูว่าผู้เรียนยังมีจุดบกพร่องในมโนทัศน์นั้น ๆ อย่างไร แล้วดำเนินแก้ไขข้อบกพร่องที่พบนั้น

คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนสามารถนำไปใช้ช่วยการเรียนการสอนหลายรูปแบบและในการนำไปใช้นั้นจะต้องมีส่วนประกอบที่สำคัญคือ ระบบคอมพิวเตอร์ หรือฮาร์ดแวร์ และบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน สำหรับโปรแกรมประยุกต์ที่มีบทบาทเกี่ยวข้องกับการสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน คือ โปรแกรมระบบช่วยสร้างบทเรียน เช่น โปรแกรม Autoware Professional, Tool Book, Director และ Hypercard เป็นต้น

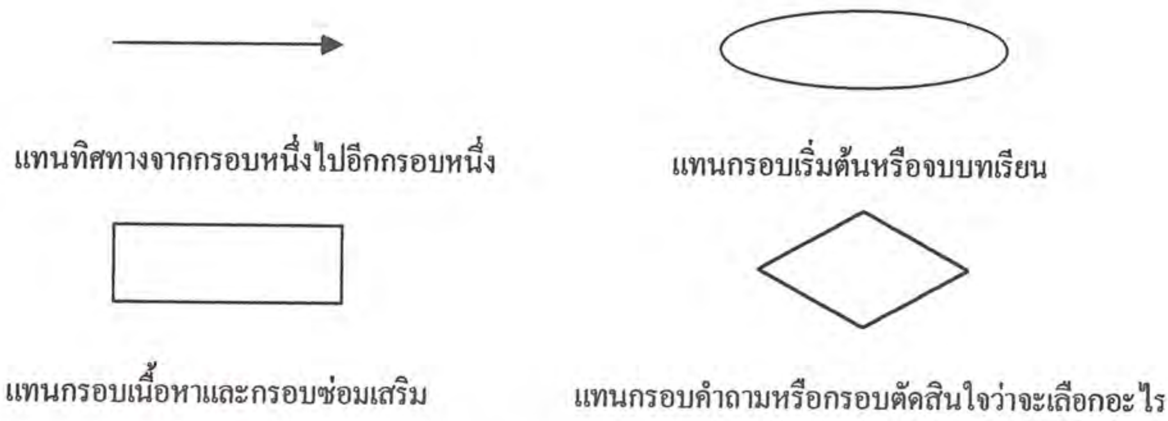
2.2.3 ผังโครงสร้างบทเรียน

การนำคอมพิวเตอร์ไปใช้ช่วยการเรียนการสอนจะต้องมีองค์ประกอบสำคัญ คือ ต้องมีฮาร์ดแวร์ หรือระบบคอมพิวเตอร์ และบทเรียนช่วยการเรียนการสอน ในที่นี้จะเรียกสั้น ๆ ว่า บทเรียน CAI

การสร้างบทเรียน CAI ควรดำเนินการ โดยกำหนดผังโครงสร้างบทเรียน ซึ่งช่วยให้การสร้างบทเรียนเป็นไปตามรูปแบบที่ต้องนำบทเรียน CAI ไปใช้

2.2.4 การออกแบบผังโครงสร้างบทเรียน

การออกแบบผังโครงสร้างบทเรียนวิธีหนึ่ง คือ การเขียนแผนผังการทำงานของบทเรียนจะช่วยให้ผู้สร้างบทเรียนมีความเข้าใจชัดเจนขึ้นว่าควรจะสร้างบทเรียนและเขียนแผนผังการทำงานของบทเรียนอย่างไร โดยทั่วไปแล้วนิยมเขียนแผนผังการทำงานของโปรแกรมบทเรียนโดยใช้รูปสัญลักษณ์แทนความหมายของแต่ละกรอบบทเรียน สัญลักษณ์ที่ใช้มีดังแสดงในรูปที่ 2.34



รูปที่ 2.34 แสดงสัญลักษณ์ในการวางผังโครงสร้างบทเรียน

2.2.5 รูปแบบผังโครงสร้างบทเรียน

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน มีลักษณะ 2 รูปแบบใหญ่ ๆ คือ

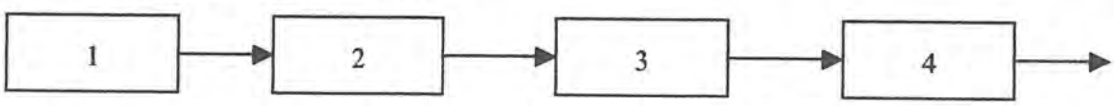
1. แบบเส้นทางเดียว (Linear program)
2. แบบแตกกิ่ง (Branching program)

2.2.5.1 แบบเส้นทางเดียว

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนลักษณะนี้ เป็นการสร้างกรอบบทเรียนที่มีลำดับการตอบสนองอย่างต่อเนื่อง เป็นเทคนิควิธีการที่สร้างได้ง่าย ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาหรือกรอบคำถามเรียงต่อกันไปในทิศทางเดียว

ลักษณะผังโครงสร้างบทเรียนดังกล่าวข้างต้นไม่เป็นที่นิยมในปัจจุบันเพราะจัดเรียงเนื้อหาตายตัว ผู้เรียนได้รับหรือต้องเรียนเนื้อหาที่เหมือนกันหมด ไม่เอื้อต่อความแตกต่างระหว่างบุคคลหากบทเรียนตอบสนองต่อผู้เรียนแตกย่อยเป็นขั้นตอนที่ค่อนข้างละเอียดก็อาจจะทำให้น่าเบื่อสำหรับผู้ที่เรียนได้เร็ว จึงไม่เหมาะกับผู้เรียนที่มีความสามารถต่างกันซึ่งต้องเรียนผ่านกรอบบทเรียนทุกกรอบมาทีละกรอบเหมือนกันทุกคน

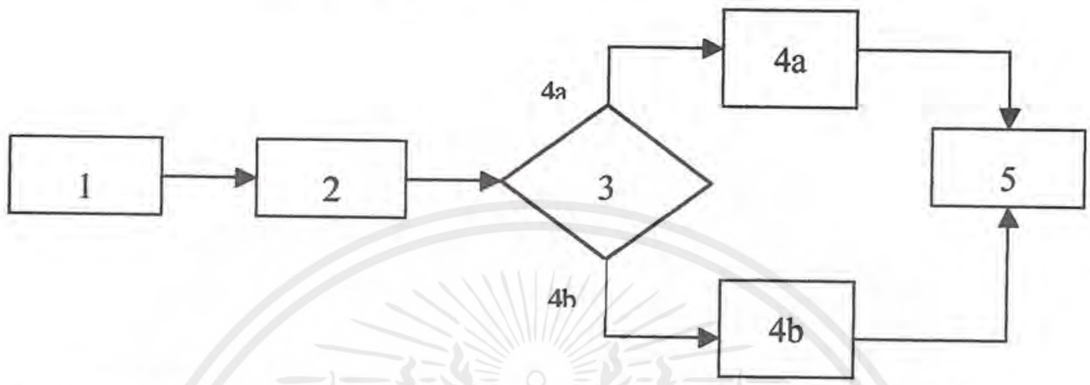
ปัจจุบันโปรแกรมระบบช่วยสร้างบทเรียน เอื้อต่อการสร้างบทเรียนทำให้บทเรียนแบบเส้นทางเดียวสมารถดำเนินบทเรียนในลักษณะเดินหน้าไปและย้อนกลับแบบพลิกหน้าได้ ทำให้การดำเนินบทเรียนมีประสิทธิภาพดีขึ้น



รูปที่ 2.35 แสดงแผนโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบเส้นทางเดียว

2.2.5.2 แบบแตกกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ได้รับความนิยมมากกว่าผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบเส้นทางเดียว เพราะมีลักษณะท้าทายและน่าสนใจกว่าเหมาะต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนเพราะจะทำให้ทางเลือกตามระดับความรู้ความเข้าใจและความสามารถของผู้เรียน เพราะจะทำให้ทางเลือกตามระดับความรู้ความเข้าใจและความสมารถของผู้เรียน



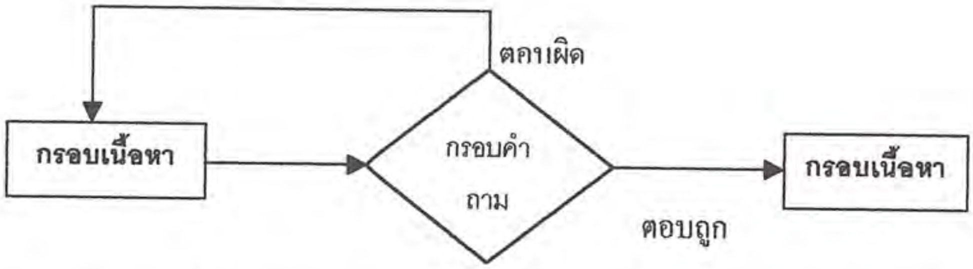
รูปที่ 2.36 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบแตกกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบแตกกิ่งแยกออกได้หลายรูปแบบดังต่อไปนี้ คือ

1. แบบกรอบซ้ำเดิม (Linear format with repeatition)
2. แบบสอบก่อนข้ามกรอบ (Pretest and skip format)
3. แบบข้ามและย้อนกรอบ (Gate frames)
4. แบบทางเดินหลายเส้น (Multiple tracks)
5. แบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว (Single remedial branch)
6. แบบมีหวงกรอบซ่อมเสริม (Remedial loops)
7. แบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง (Multiple remedial branches)
8. แบบแตกกิ่งคู่ (Branching frame sequence)
9. แบบกิ่งประกอบ (Compound branches)

2.2.5.2.1 แบบซ้ำกรอบเดิม

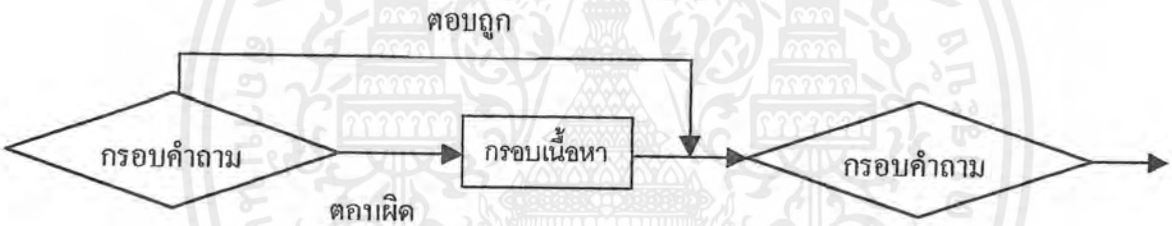
ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนลักษณะนี้คล้ายคลึงกับโครงสร้างแบบเส้นทางเดียวต่างกันตรงที่มีคำถามแทรกระหว่างกรอบเนื้อหา ถ้าผู้เรียนตอบคำถามถูกต้อง ผู้เรียนก็จะได้ผ่านไปยังกรอบเนื้อหาที่อยู่ถัดไป ถ้าตอบไม่ถูกโปรแกรมก็จะให้ผู้เรียนย้อนกลับมายังเนื้อหาเดิมอีกครั้ง และถามคำถามซ้ำเดิมอีก ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะกับ CAI แบบทบทวนความรู้แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์



รูปที่ 2.37 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบซ้ำกรอบเดิม

2.2.5.2.2 แบบทดสอบก่อนข้ามกรอบ

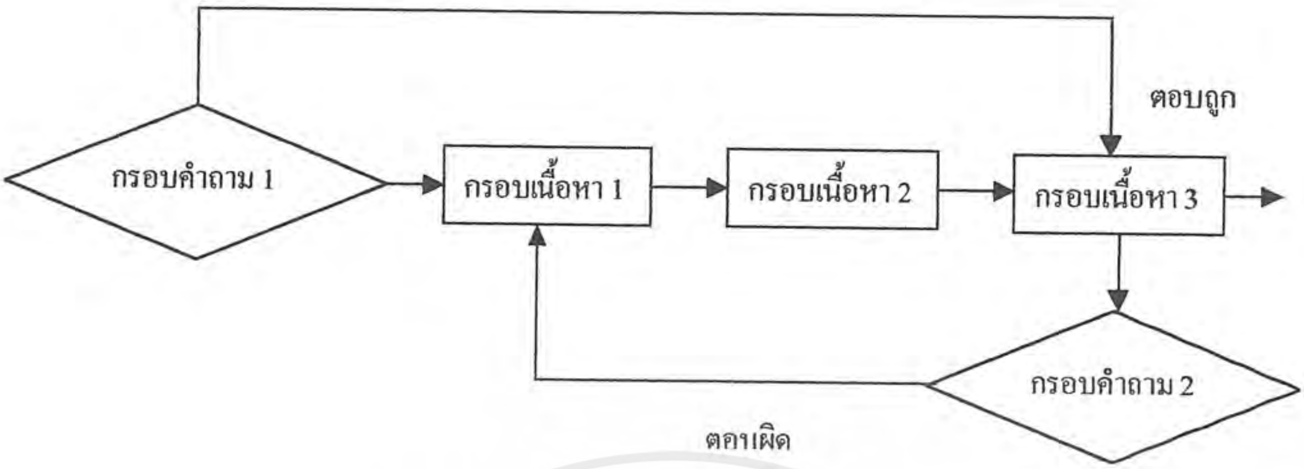
ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ บทเรียนจะทดสอบความรู้ของผู้เรียนก่อนเรียนเนื้อหาถ้าทดสอบผ่านก็จะข้ามกรอบที่ผู้เรียนรู้เนื้อหานั้นไปยังกรอบเนื้อหาจุดประสงค์อื่น บทเรียนลักษณะนี้จึงมีประสิทธิภาพในการตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล ผังโครงสร้างรูปแบบนี้เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์



รูปที่ 2.38 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบทดสอบก่อนข้ามกรอบ

2.2.5.2.3 แบบข้ามและย้อนกรอบ

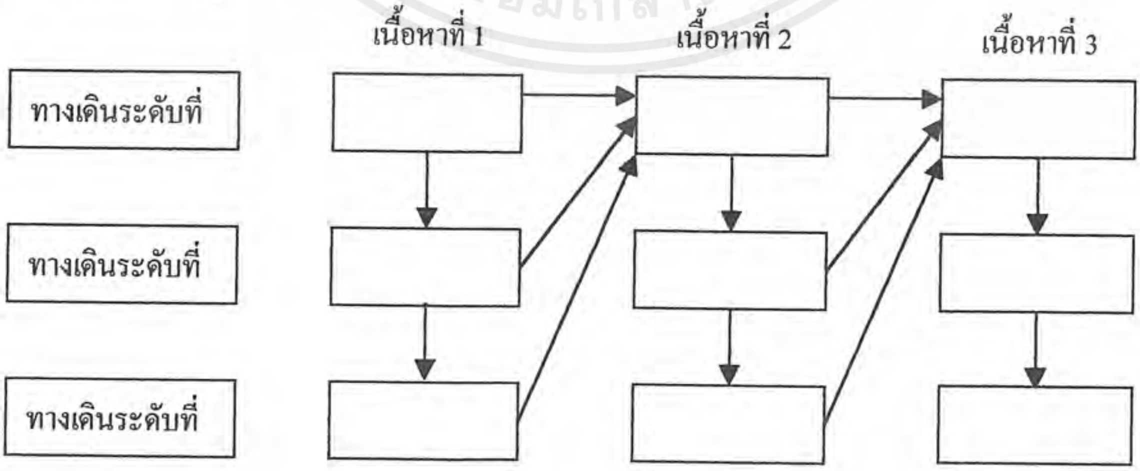
ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้กำหนดให้ผู้เรียนไปยังกรอบต่าง ๆ ตามระดับความสามารถและความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาที่ให้แก่ผู้เรียน มีลักษณะผังโครงสร้างแบบเดียวกับบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบเส้นทางเดียว ผู้เรียนอาจมองข้ามกรอบไปได้หลายกรอบบทเรียนและบทเรียนอาจส่งผู้เรียนกลับมากรอบที่ผ่านมาแล้วเพื่อทบทวนเนื้อหาบางส่วนใหม่ ถ้าผู้เรียนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อน ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสุถานการณจำลอง และแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์



รูปที่ 2.39 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบข้ามกรอบและย้อนกรอบ

2.2.5.2.4 แบบทางเดินหลายเส้น

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนลักษณะนี้ ประกอบด้วยกรอบบทเรียนในเส้นทางเดินหลายระดับ ทางเดินระดับที่ 1 เป็นเส้นทางเดินของกรอบบทเรียนเนื้อหาหลักที่ไม่มีคำอธิบายละเอียดมากนัก ส่วนทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 เป็นกรอบเนื้อหาที่เพิ่มเติมรายละเอียดมากกว่ากรอบที่อยู่ในทางเดินระดับที่ 1 นอกจากนี้ ทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 ยังมีเส้นทางเดินมากกว่า 1 เส้นทาง ขึ้นอยู่กับว่าผู้เรียนสามารถเข้าใจเนื้อหาในกรอบทางเดินระดับที่ 1 มากน้อยเพียงใด กรอบในทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 จะให้เนื้อหาละเอียดจากน้อยไปสู่มากตามลำดับ โดยเนื้อหาในกรอบส่วนนี้จะเป็นเนื้อหาเรื่องเดียวกันเพียงแต่ขยายความหมายของคำบางคำให้ชัดเจนขึ้น ผังโครงสร้างรูปแบบนี้เหมาะต่อ CAI แบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์



รูปที่ 2.40 แสดงผังโครงสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบทางเดินหลายเส้น

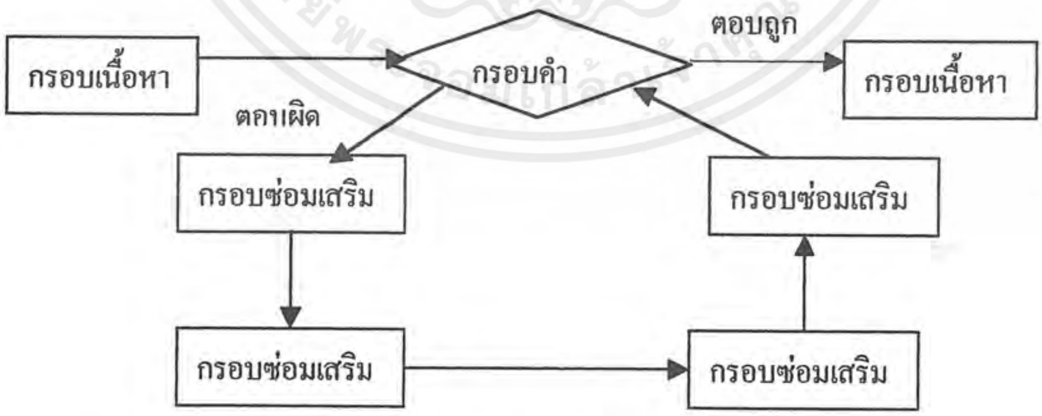
2.2.5.2.5 แบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้เริ่มด้วยกรอบเนื้อหา ตามด้วยกรอบคำถาม ถ้าผู้เรียนตอบถูกจะได้รับข้อมูลป้อนกลับในทางบวก และเรียนเนื้อหาในกรอบต่อไป หากตอบผิดผู้เรียนก็จะได้รับการสอนซ่อมเสริมก่อนไปเนื้อหากรอบต่อไป ผังโครงสร้างรูปแบบนี้เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและแบบฝึกหัด

รูปที่ 2.41 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว

2.2.5.2.6 แบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม

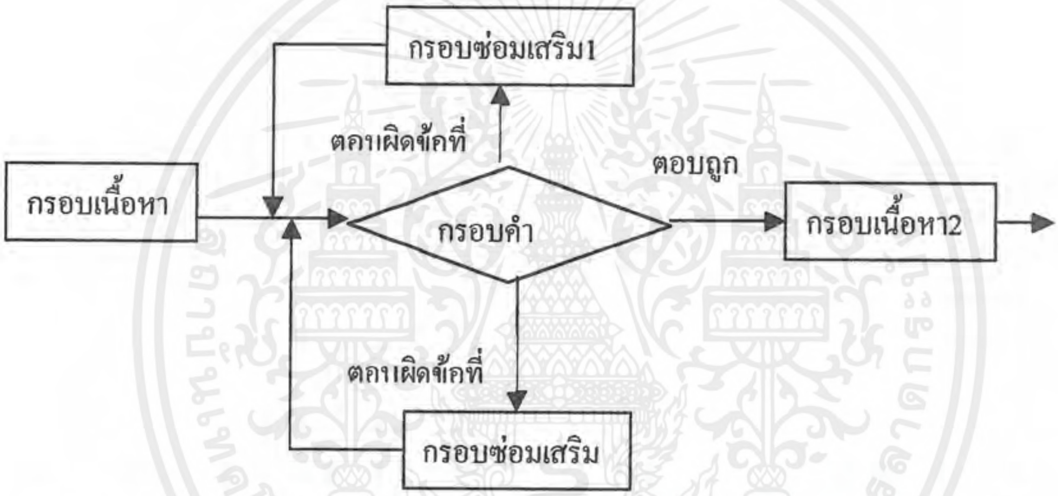
ลักษณะของผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม มีลักษณะคล้ายคลึงกับบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว ต่างกันตรงที่แทนที่จะแตกออกเป็นกรอบซ่อมเสริมกรอบเดียวกลับมีลักษณะประกอบด้วยกรอบซ่อมเสริมหลายกรอบประกอบกับเป็นชุดบทเรียนย่อย 5 – 6 กรอบ เพื่อให้ความรู้และข้อมูลที่ผู้เรียนยังขาดอยู่ก่อนที่จะส่งผู้เรียนกลับกรอบเนื้อหาเดิม ผังโครงสร้างรูปแบบนี้เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด



รูปที่ 2.42 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน
แบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม

2.2.5.2.7 แบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาที่ให้ข้อมูล แล้วตามด้วยกรอบคำถามที่แตกเป็นกรอบซ่อมเสริมตั้งแต่ 2 กรอบขึ้นไป กรอบคำถามแต่ละกรอบจะมีกิ่งแยกออกมาตามจำนวนข้อของตัวเลือกในคำถามแบบเลือกตอบนั้นโดยแยกออกมาอย่างน้อย 2 กิ่ง เพื่อไปยังกรอบซ่อมเสริม แล้วจึงจะส่งผู้เรียนมายังกรอบคำถามเดิม เพื่อให้ผู้เรียนตอบคำถามในกรอบนั้นใหม่ และเลือกคำตอบอื่น ดังนั้นจะมีคำตอบที่ถูกต้องอยู่เพียง 1 คำตอบ คำตอบที่ผู้เรียนเลือกจะเป็นตัวกำหนดบทเรียนว่าจะไปกรอบใดต่อไป นั่นคือถ้าผู้เรียนตอบถูกต้องก็จะไปยังกรอบเนื้อหาใหม่ต่อไป แต่ถ้าผู้เรียนตอบผิด บทเรียนก็จะไปยังกรอบซ่อมเสริมก่อนจะกลับมายังคำถามเดิมใหม่ ผังโครงสร้างรูปแบบนี้เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด

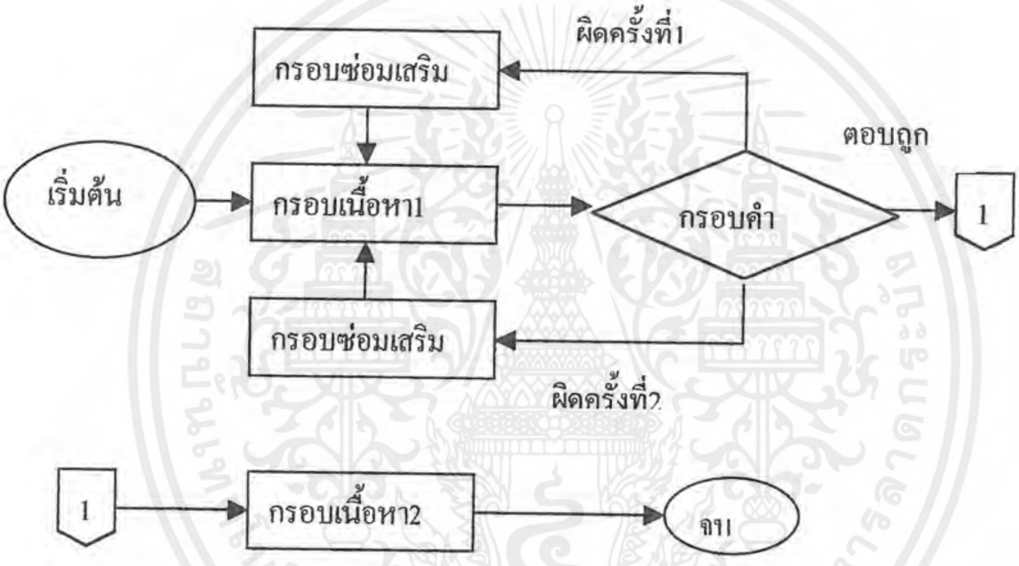


รูปที่ 2.43 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการสอนแบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง

2.2.5.2.8 แบบแตกกิ่งคู่

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาที่แตกเป็นกรอบซ่อมเสริม 2 กรอบ ถ้าผู้เรียนตอบคำถามของกรอบเนื้อหาได้ถูกต้องจะทำให้ผู้เรียนผ่านจากกรอบเนื้อหาหนึ่งไปยังอีกกรอบเนื้อหาหนึ่ง กรอบเนื้อหาแต่ละกรอบจะแสดงข้อความ 1-2 ย่อหน้า ซึ่งจะเป็นข้อมูลที่ผู้เรียนนำมาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์การแก้ปัญหาและเลือกคำตอบที่มีอยู่ 3 คำตอบ โดยมีคำตอบที่ถูกต้องอยู่เพียง 1 คำตอบ คำตอบที่ผู้เรียนเลือกจะเป็นตัวกำหนดว่าจะให้กรอบใดเป็นกรอบต่อไป ถ้าผู้เรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้อง ก็จะไปยังเนื้อหากรอบต่อไป แต่ถ้าตอบผิดก็จะต้องไปยังกรอบซ่อมเสริมแล้วจึงกลับมายังกรอบเนื้อหาเดิมเพื่อศึกษาและตอบคำถามใหม่อีกครั้ง ดังนั้นการตอบสนองที่ถูกต้องของผู้เรียนขึ้นอยู่กับความรู้ และความเข้าใจในเนื้อหาและความสามารถในการประยุกต์ข้อมูลที่ได้รับในกรอบนั้น ผู้เรียนบางคนอาจต้องผ่านทั้งกรอบเนื้อหา และกรอบซ่อมเสริมทุกกรอบ บางคนก็ผ่านกรอบเนื้อหา และกรอบซ่อมเสริมเพียงบางกรอบ

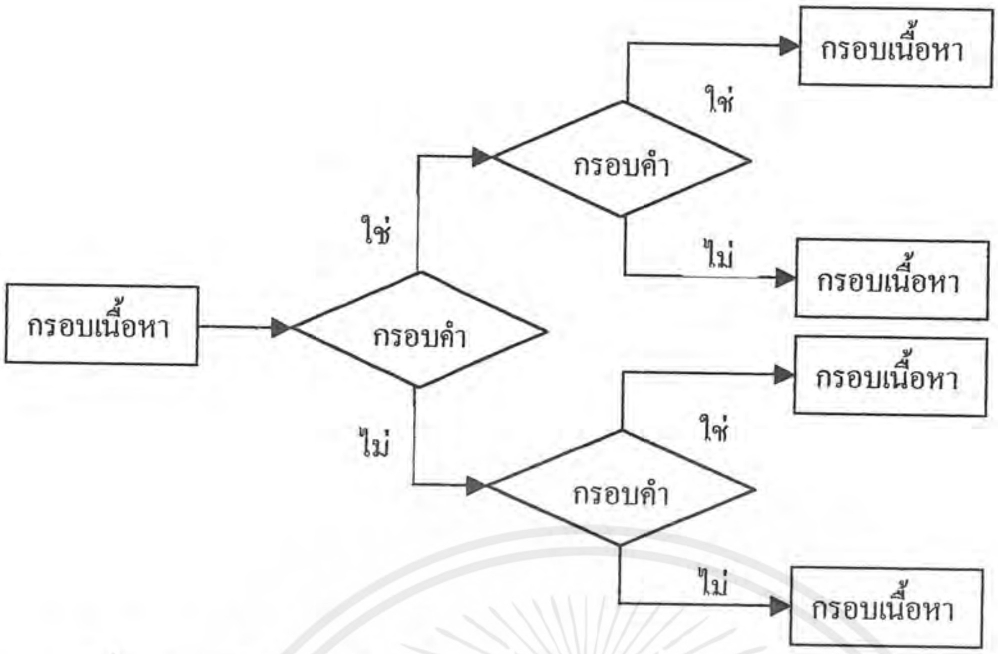
กรอบเนื้อหาควรมีข้อความที่แสดงให้ผู้เรียนทราบว่าผู้เรียนตอบถูกโดยให้คำชมเชย เช่น ดีมาก เยี่ยมมาก ก่อนที่จะเริ่มเข้าสู่ย่อหน้าของเนื้อหาต่อไป ตามด้วยคำถามจากสถานการณ์ที่เป็นปัญหา พร้อมให้เลือกตอบสนองจากตัวเลือก 3 ตัว ส่วนกรอบซ่อมเสริมควรมีข้อความเริ่มต้นที่แสดงให้ผู้เรียนทราบว่าตอบผิด ในลักษณะที่ไม่ทำให้ผู้เรียนเสียกำลังใจ เช่น น่าเสียดายที่ตอบผิดไปนิดหนึ่ง เกือบถูก เป็นต้น ตามด้วยคำอธิบายว่าเหตุใดข้อนี้ไม่ใช่คำตอบที่ถูกและให้ข้อความเชิงชี้แนะว่าคำตอบที่ถูกควรเป็นอย่างไร แต่ไม่บอกให้ทราบคำตอบที่ถูกโดยตรง ประโยคสุดท้ายในกรอบซ่อมเสริมควรเป็นข้อความที่ให้ผู้เรียนได้ทราบว่าจะกลับไปยังกรอบเนื้อหากรอบเดิมให้อ่านเนื้อหาใหม่อีกครั้ง ผังโครงสร้างรูปแบบนี้เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัดแบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์



รูปที่ 2.44 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบแตกกิ่งคู่

2.2.5.2.9 แบบกิ่งประกอบ

ผังโครงสร้างบทเรียนรูปแบบนี้ใช้กันมากในการเรียนเพื่อวินิจฉัยข้อบกพร่องของผู้เรียนหรือในสถานการณ์การแก้ปัญหา คำถามอยู่ในรูปแบบที่มีคำตอบใช่ หรือไม่ใช่ กิ่งที่แยกจากแต่ละกรอบคำถามจะแยกไปสู่กรอบเนื้อหาใหม่ตามพื้นฐานความรู้ความเข้าใจและความสามารถที่แตกต่างกันระหว่างบุคคล



รูปที่ 2.45 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบกิ่งประกอบ

ผังโครงสร้างบทเรียนดังกล่าวข้างต้น จะสัมพันธ์กับรูปแบบของ CAI ที่นำไปใช้ ซึ่งสามารถเลือกได้หลายรูปแบบ และอาจประยุกต์โดยนำแบบต่าง ๆ มาประสมประสาน หรือกำหนดผังโครงสร้างเองใหม่ที่คิดว่าจะเหมาะต่อการเรียนรู้ของผู้เรียน

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

รูปแบบคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนที่ใช้ดำเนินงานเป็นแบบทบทวนความรู้ ซึ่งมีโครงสร้างแบบซ้ำกรอบเดิม โครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนลักษณะนี้คล้ายคลึงกับโครงสร้างแบบเส้นทางเดียวต่างกันตรงที่มีคำถามแทรกระหว่างกรอบเนื้อหา ถ้าผู้เรียนตอบคำถามถูกต้อง ผู้เรียนก็จะผ่านไปยังกรอบเนื้อหาที่อยู่ถัดไป ถ้าตอบไม่ถูกโปรแกรมก็จะให้ผู้เรียนย้อนกลับมายังเนื้อหาเดิมอีกครั้งและถามคำถามซ้ำเดิมอีก ผังโครงสร้างแบบนี้เหมาะกับ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกมส์ แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

3.1 การพัฒนาโปรแกรม

3.1.1 บทเรียน

วิธีดำเนินการในส่วนนี้ ดำเนินการโดยการคัดลอกเนื้อหาในส่วนที่ต้องการให้ปรากฏแต่ละหน้าจอ มาวางใน Interactive Icon ของแต่ละหน้าจอ เพื่อให้เกิดการ Active ขึ้นในหน้าจอนั้น ๆ โดยความสามารถในการทำงานแต่ละหน้านั้นจะให้รวมกันที่ Map Icon โดยความสามารถดังกล่าวคือ

ภาพประกอบ ส่วนนี้จะดำเนินการให้สีของตัวอักษรคำว่า " ดังรูป.. " เป็นสีที่แตกต่างจากเนื้อความรอบข้างเมื่อใช้เมาส์คลิกที่คำนั้น จะปรากฏภาพให้เห็น และเมื่อใช้เมาส์คลิก ณ ที่ใดที่หนึ่งบนหน้าจอนั้น หรือ กดคีย์ใด ๆ ภาพนั้นจะหายไป

ตัวอย่าง ส่วนนี้จะแสดงคำว่า " ตัวอย่าง " ไว้ ณ ที่ใดที่หนึ่งของจอ เมื่อผู้เรียนนำเมาส์เข้ามาใกล้คำนี้จะแสดงให้รู้ว่าสามารถคลิกเข้าไปได้ และเมื่อผู้เรียนคลิกเข้าไปจะเข้าสู่หน้าจอของตัวอย่างทันที วิธีดำเนินการในส่วนของตัวอย่างนั้นจะเหมือนกับส่วนเนื้อหา แต่ตัวอย่างจะอยู่ในรากของเนื้อหาอีกที

เปิดเสียง (Audio on) ส่วนนี้จะกำหนดให้ผู้เรียนสามารถเปิดฟังเสียงการอธิบายเนื้อหาได้ วิธีดำเนินการคือ นำไฟล์เสียงที่มีรากเป็น .WAV มาใส่ไว้ใน Map Icon ที่อยู่ในรากของส่วนเนื้อหา

ปิดเสียง (Audio off) ดำเนินการแบบเดียวกับการเปิดเสียง แต่ไฟล์ที่นำเข้าจะเป็นเสียงเงียบ

ออกจากโปรแกรม (Exit) ส่วนนี้ภายใน Map Icon จะมี Calculation Icon ที่บรรจุคำสั่ง Quit(0) ที่เป็นคำสั่งของ Authorware เพื่อให้ออกมาสู่ Window

ปุ่มดำเนินการต่าง ๆ มีดังนี้

1. Go back
2. Recent page
3. Find
4. Exit framework
5. First page
6. Previous page
7. Next page
8. Last page

ปุ่มเหล่านี้กำหนดให้ปรากฏทุกหน้าจอของเนื้อหา โดยภาพปุ่มดังกล่าวจะอยู่ในรากของ Framework Icon ที่ดำเนินการเกี่ยวกับการสับเปลี่ยนหน้า ค้นหา หน้าที่เคยเปิด และกลับเมนูหลักซึ่งเป็นคุณสมบัติที่Authorware มีมาให้

3.1.2 แบบฝึกหัด

ส่วนนี้เป็น Map Icon ที่อยู่ในรากของส่วนเนื้อหาซึ่งอยู่ในลำดับสุดท้าย ดำเนินการ โดยให้ผู้เรียนดำเนินมาถึงหน้าสุดท้ายของเนื้อหาแล้ว จะเข้าสู่การทำแบบฝึกหัดทันที ภายใน Map Icon ของแบบฝึกหัด
ส่วนสำคัญจะอธิบายดังนี้

Map Icon ของโจทย์ Icon นี้จะกำหนดตัวแปรใหม่ N ซึ่งเป็นตัวแปรสำหรับนับจำนวนข้อ โดยให้ค่าเริ่มต้นของ N, Total Correct และ Total Wrong เป็น 0 และ ภายใน Map Icon นี้จะบรรจุ Map Icon ของโจทย์ไว้ 10 ข้อ โดย Map Icon แต่ละ โจทย์ถูกกำหนดการคำนวณให้ N = N+1 ทุก Map Icon ทั้ง 10 ข้อ แล้วภายใน Map Icon แต่ละข้อจะมี Interactive Icon ที่ทำการคัดลอกโจทย์มาวางไว้อยู่แล้วรวมทั้งตัวเลือก ก. ,ข. , ค. และ ง. ในรากของ Interactive Icon จะบรรจุ Map Icon ของตัวเลือกไว้ 4 ตัวเลือกและ Map Icon ที่มีคุณสมบัติเป็น Time limit ที่กำหนดให้โปรแกรมทำการรอ หากผู้เรียนยังไม่ตอบคำถามภายใน 3 นาที โดยคุณสมบัติเฉพาะของแต่ละ Map Icon นั้นจะแตกต่างกันที่คุณสมบัติ Status ใน Response tab ที่ต้องกำหนดว่าจะให้ตัวเลือกเป็นตัวเลือกที่ถูกหรือผิดเพื่อดำเนินการให้ Authorware คำนวณคะแนนที่ผู้เรียนทำได้ คุณสมบัติข้อหนึ่งของ Hot Spot แต่ละตัวเลือกที่สำคัญคือ Branch เลือกเป็น Exit Interaction จากนั้นนำ Erase Icon มาวางบน Flow Line ต่อจาก Interaction Icon ของโจทย์ เพื่อลบโจทย์ข้อเดิมทิ้งก่อนปรากฏโจทย์ในข้อใหม่

Map Icon ของส่วนรวมคะแนน ภายในบรรจุ Display Icon ที่พิมพ์คำว่า " คุณทำแบบทดสอบทั้งหมด {N} ข้อ ทำผิด {TotalWrong} ข้อ และทำถูก {TotalCorrrect} ข้อ " สังเกตเห็นว่ามีการใช้ปีกกาคลุมตัวแปรที่ประกาศไว้เพื่อจัดให้ค่า ณ ปัจจุบันปรากฏให้ผู้เรียนทราบ

Map Icon ของส่วนวัดผล ประกอบด้วย Decision Icon ซึ่งเป็น Icon สำหรับการวางเงื่อนไขที่ต้องการ โดยเงื่อนไขที่วางไว้คือ TotalCorrect <= N/2 Authorware จะทำการพิจารณาค่า ณ ปัจจุบันว่าตรงตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้หรือไม่ หากตรงเงื่อนไขจะเข้าสู่รากของ Decision Icon ที่เป็น Map Icon ภายในบรรจุ Calculation Icon มีคำสั่ง GoTo(IconID@"IconTitle") (IconTitle หมายถึงชื่อ Icon ปลายทางที่ต้องการให้แสดง) แต่หากไม่ตรงเงื่อนไขคือ TotalCorrect > N/2 นั้น Authorware จะดำเนินการออกจาก Decision Icon มายัง Map Icon อีกอันหนึ่งที่วางต่อกันบน Flowline เดียวกับ Decision Icon

3.1.3 Mathematica4.0

ส่วนนี้ดำเนินการบน Interactive Icon ของเมนูหลักที่ใช้คุณสมบัติของ Authorware จากเมนู Insert เลือก Insert OLE แล้วค้นหารากของโปรแกรม Mathematica4.0 เลือก Link เพื่อให้สามารถนำโปรแกรมนั้นมาใช้ได้ จากนั้นมาทำการกำหนดคุณสมบัติของ OLE จากเมนู Edit เลือก Package OLE Object แล้วเลือก Attributes… กำหนดคุณสมบัติโดย Activation trigger เป็น Single Click, Trigger Verb เป็น None และเลือก Package as OLE Object ทั้งหมดนี้เป็นการกำหนดเพื่อให้ผู้เรียนเลือก Click 1 ครั้งจึงเข้าสู่โปรแกรม Mathematica 4.0 ได้

3.1.4 ช่วยเหลือ (Help)

ภายในบรรจุเนื้อหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษ, การใช้โปรแกรมช่วยสอน และการใช้โปรแกรม Mathematica4.0 ในเรื่องการอินทิเกรต วิธีดำเนินการจะเป็นไปในรูปแบบเดียวกับการทำในส่วนของบทเรียน

3.2 ตารางเวลาดำเนินงาน

	พฤศจิกายน	ธันวาคม	มกราคม	กุมภาพันธ์	มีนาคม
ศึกษาโปรแกรม Authorware เพิ่มเติม					
แก้ไขเอกสารปัญหาพิเศษ					
ดำเนินงานส่วนเนื้อหา					
ดำเนินงานส่วนแบบทดสอบ					
ดำเนินงานส่วนของ Mathematica และ Help					
แก้ไขและปรับปรุงทั้งหมด					
เก็บรายละเอียดของงาน					

บทที่ 4
การวิเคราะห์ข้อมูล

โปรแกรม Macromedia Authorware เป็นผลที่ได้จากการศึกษาและพัฒนาโปรแกรมประเภทนิพนธ์ (Authoring System) ซึ่งจากการศึกษาพบว่ามีความสะดวกรวดเร็วในการสร้างโปรแกรมประยุกต์อันสลับซับซ้อนที่มีการใช้สื่อหลายแบบมากมายหลายวิธี ภายใต้หัวข้อที่ว่า “CAI สำหรับอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์” จากการศึกษาและพัฒนาโปรแกรมดังกล่าว สามารถประเมินผลได้ดังนี้

4.1 คุณสมบัติและความสามารถของโปรแกรม

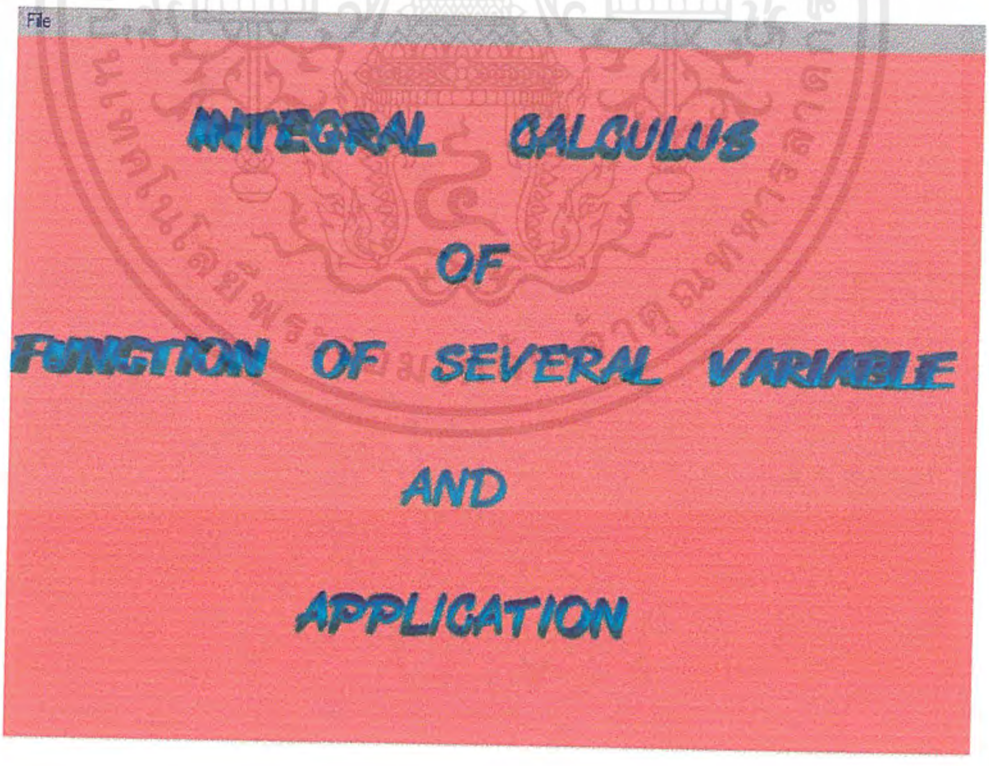
1. เนื่องจากโปรแกรม Authorware เป็นเครื่องมือเชิงวัตถุ (Object-Oriented) ซึ่งทำการสร้างทุกอย่างเป็นโมดูล (Module) ทำให้สามารถนำไอคอนทั้งหลายมาปรับปรุงและนำกลับมาใช้ได้อีก
2. เนื่องจากความสามารถของโปรแกรม Authorware ทำให้สามารถเชื่อมโยงกับโปรแกรม Mathematica และสามารถใช้งานจากโปรแกรมดังกล่าวได้เต็มความสามารถ
3. เนื่องจากความสามารถของโปรแกรม Authorware ที่มีระบบ Multimedia ในรูปแบบของรูปภาพ ภาพเคลื่อนไหว และเสียง ทำให้การนำเสนอบทเรียนในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนน่าสนใจและดึงดูดใจผู้เรียน
4. เมื่อผู้เรียนต้องการไปที่หน้าถัดไปหรือย้อนกลับ ก็สามารถคลิกเมาส์ที่เครื่องหมายใน Tool box ที่จัดเตรียมไว้ให้ในแต่ละหน้า นั่นคือ มีการเชื่อมโยงระหว่างหน้า ซึ่งเป็นลักษณะของไฮเปอร์เท็กซ์ คือ มีการเชื่อมโยงวัตถุที่อยู่ต่างหน้า เพื่อให้เกิดความน่าสนใจยิ่งขึ้น
5. เมื่อผู้เรียนเคลื่อนเมาส์ผ่านข้อความที่ว่า ดังรูปที่.. รูปภาพประกอบ ตัวอย่างประกอบ และผู้เรียนสามารถคลิกเมาส์ที่ข้อความนั้น 1 ครั้ง เมื่อต้องการดูรูปภาพหรือตัวอย่างประกอบ เพื่อความเข้าใจที่ชัดเจนยิ่งขึ้น
6. เมื่อผู้เรียนเคลื่อนเมาส์ผ่านรูปภาพที่เป็น Tool ด้านข้างและด้านล่างของหน้าจอ จะมีข้อความอธิบายสถานะของรูปภาพนั้น ๆ ให้รู้ และเมื่อผู้เรียนคลิกเมาส์ 1 ครั้งที่รูปภาพนั้นจะเป็นการทำตามคำอธิบายของรูปภาพดังกล่าว
7. มีแบบทดสอบอย่างง่ายหลังเรียน โดยเมื่อผู้เรียนตอบแบบทดสอบครบทุกข้อจะมีการรวมคะแนน พร้อมทั้งบอกว่าผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหานั้นพอที่จะผ่านไปยังเนื้อหาถัดไปได้หรือไม่

4.2 ข้อจำกัดของโปรแกรม

1. เนื่องจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีการเชื่อมโยงการใช้งานกับโปรแกรม Mathematica ดังนั้นผู้เรียนควรจะมีความรู้เกี่ยวกับการใช้งานในส่วนของโปรแกรม Mathematica มาบ้าง
2. เนื่องจากการสร้างบทเรียนต้องดึงดูดเพื่อทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจในบทเรียน จึงมีการใส่รูปภาพและเสียงเป็นจำนวนมาก ซึ่งทำให้ตัวโปรแกรมมีขนาดใหญ่ ทำให้การเคลื่อนย้ายโปรแกรมไม่สะดวกนัก
3. เนื่องจากข้อจำกัดของโปรแกรมในการใช้เสียง ทำให้เวลาผู้เรียนเปิดเสียงจะไม่สามารถ
คลิ๊กเมาส์ในบริเวณใดได้ เพราะจะทำให้เสียงหยุด

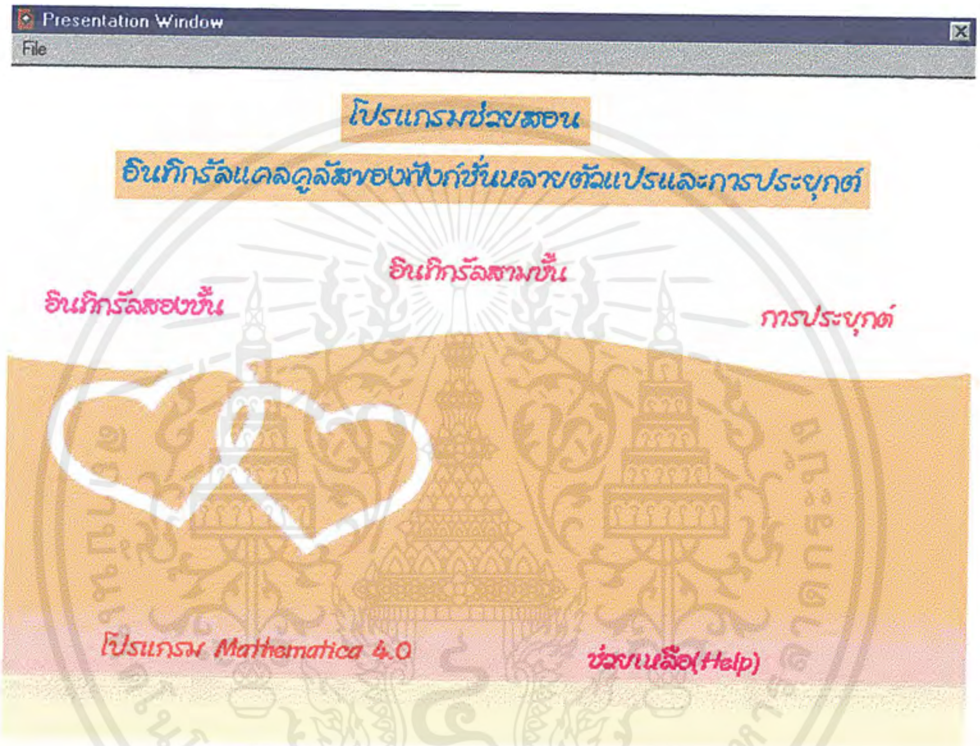
4.3 การทำงานของโปรแกรม

1. เมื่อเข้าสู่โปรแกรมจะปรากฏหน้าจอแรก เมื่อผู้เรียนต้องการพลิกไปที่หน้าถัดไปให้คลิ๊กเมาส์ 1 ครั้ง กี่เข้าสู่หน้าจอที่ 2 แนะนำหัวข้อที่นำมาทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน สักครู่หน้าจอก็จะเปลี่ยนเป็นหน้าจอเมนูหลัก



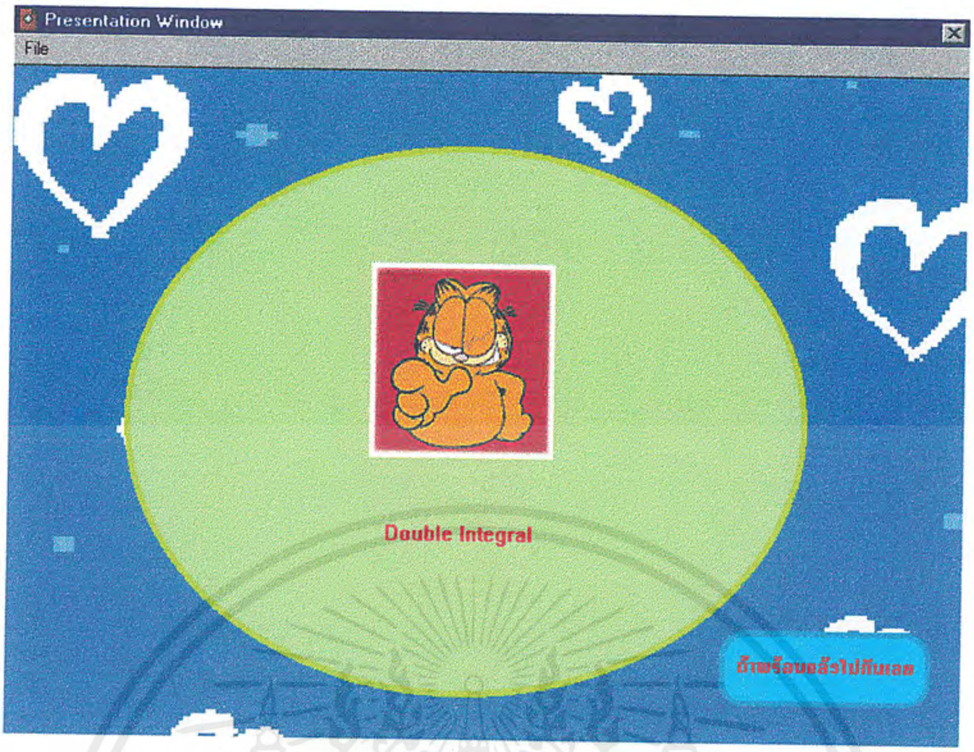
รูปที่ 4.1 หน้าจอแรกของโปรแกรม

2. ในหน้าจอเมนูหลัก ผู้เรียนสามารถเลือกศึกษาหัวข้อที่ต้องการศึกษาได้ตามต้องการ และถ้าต้องการเปลี่ยนหรือเลือกศึกษาหัวข้อแบบใด ผู้เรียนจะต้องกลับมาหน้าจอนี้เช่นกัน รวมทั้งถ้าผู้เรียนต้องการออกจากโปรแกรมก็ต้องกลับมาหน้าจอนี้เช่นกัน โดยคลิ๊กเมาส์ที่ปุ่ม exit เมื่อผู้เรียนเคลื่อนเมาส์ผ่านปุ่มหน้าหัวข้อ เมาส์จะเปลี่ยนเป็นรูปมือ เมื่อต้องการศึกษาหัวข้อใดก็ให้คลิ๊กเมาส์ในบริเวณชื่อหัวข้อนั้น ๆ



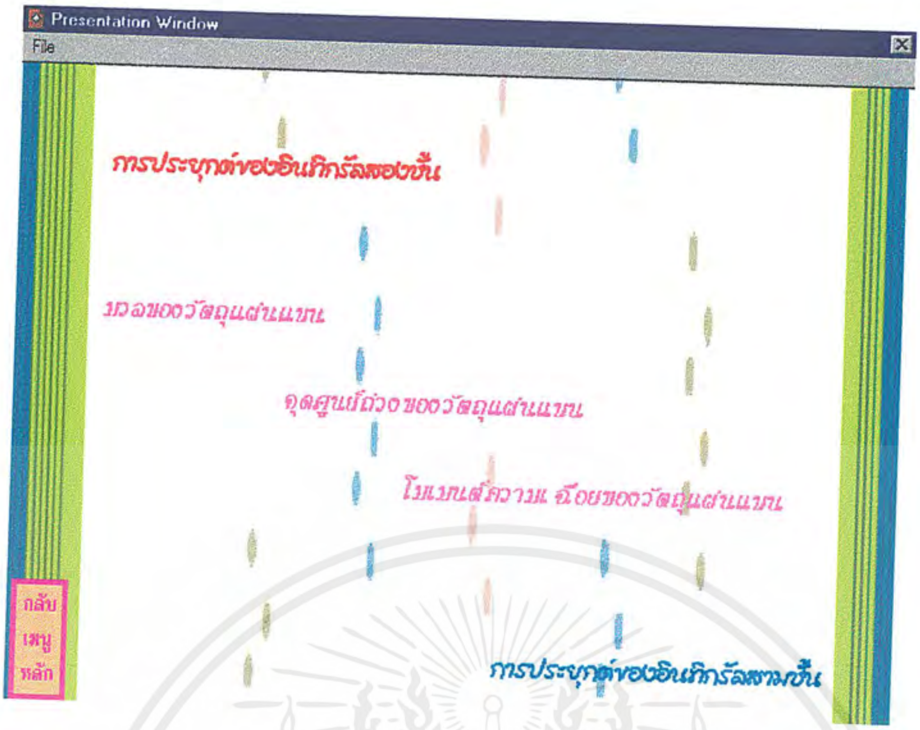
รูปที่ 4.2 หน้าจอเมนูหลัก

3. เมื่อผู้เรียนเลือกหัวข้อที่ต้องการศึกษาแล้ว จะปรากฏหน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียน เมื่อต้องการเข้าสู่บทเรียนสามารถคลิ๊กเมาส์ที่รูปภาพที่กำหนดไว้ เมื่อต้องการกลับสู่เมนูหลักก็สามารถคลิ๊กเมาส์ที่ปุ่มกลับสู่เมนูหลัก

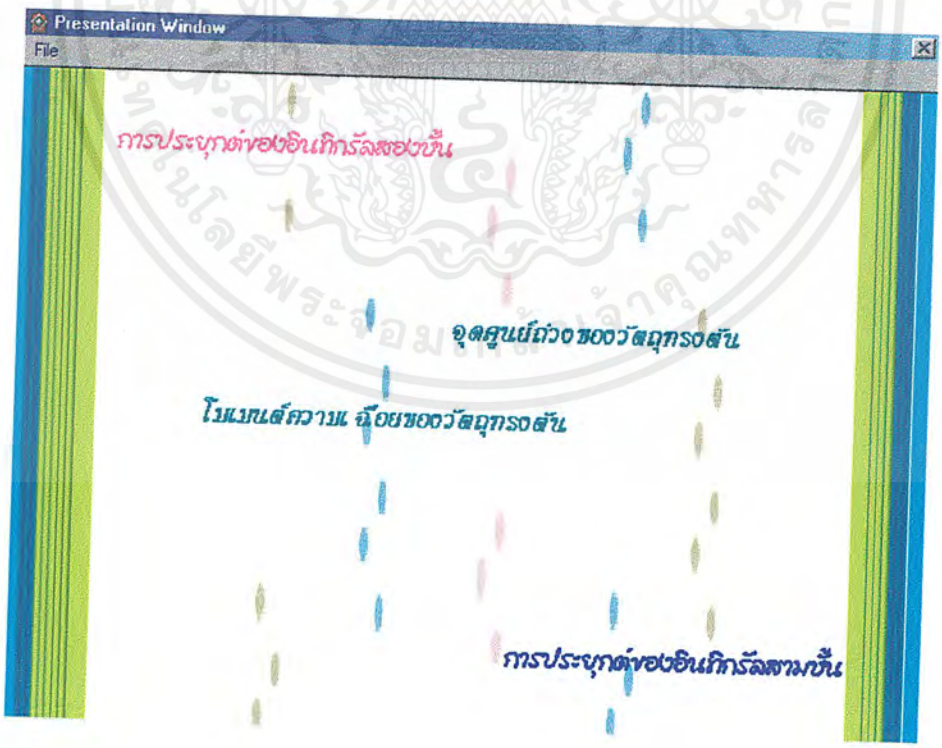


รูปที่ 4.3 หน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนอินทิกรัลสองชั้น

รูปที่ 4.4 หน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนอินทิกรัลสามชั้น



รูปที่ 4.5 หน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนการประยุกต์อินทิกรัลสองชั้น



รูปที่ 4.6 หน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนการประยุกต์อินทิกรัลสามชั้น

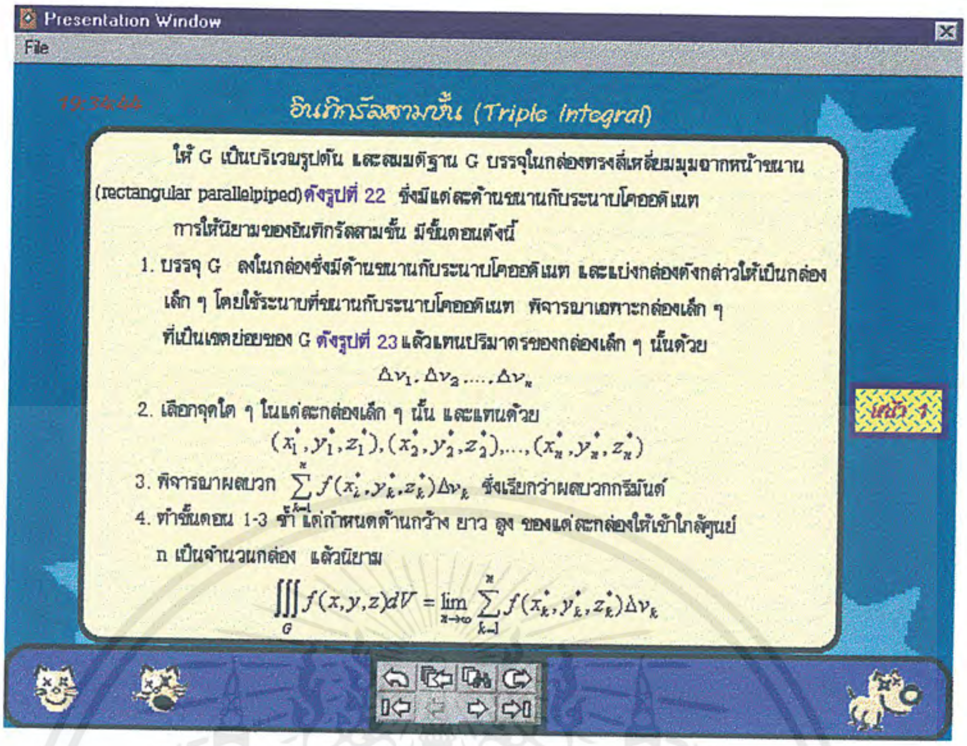
4. เมื่อเข้าสู่บทเรียน ในแต่ละหน้าจะมีปุ่มรูปภาพให้เลือกใช้งานได้ดังนี้

รูปที่ 4.7 ปุ่มเปิดเสียง

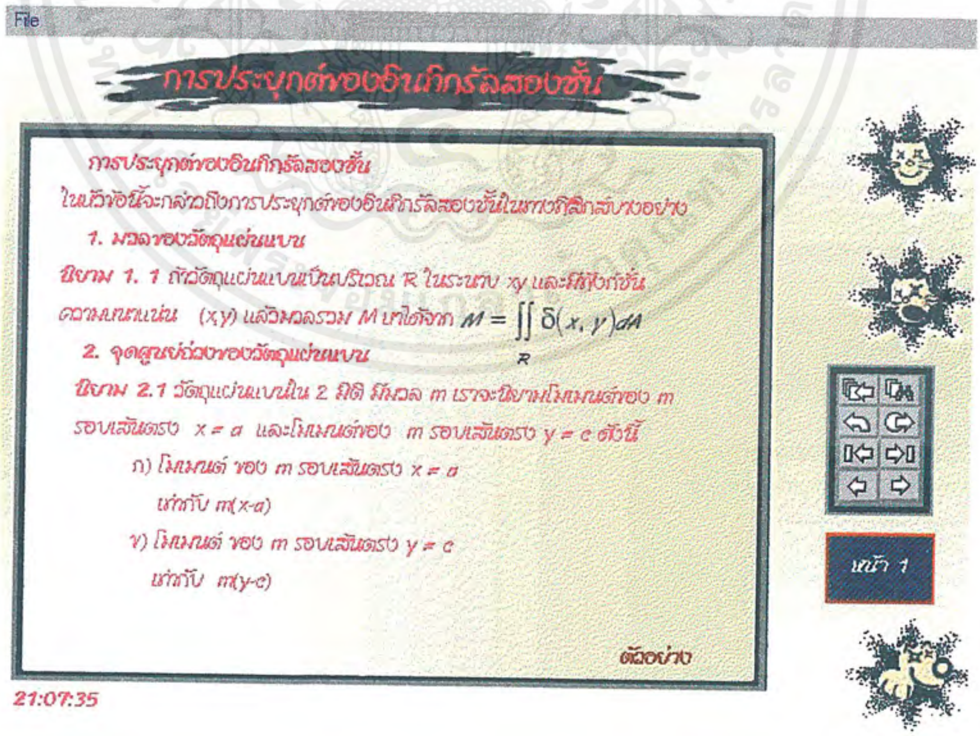
รูปที่ 4.8 ปุ่มปิดเสียง

รูปที่ 4.9 ปุ่มออกจากโปรแกรม

รูปที่ 4.10 หน้าจอบทเรียนอินทิกรัลสองชั้น



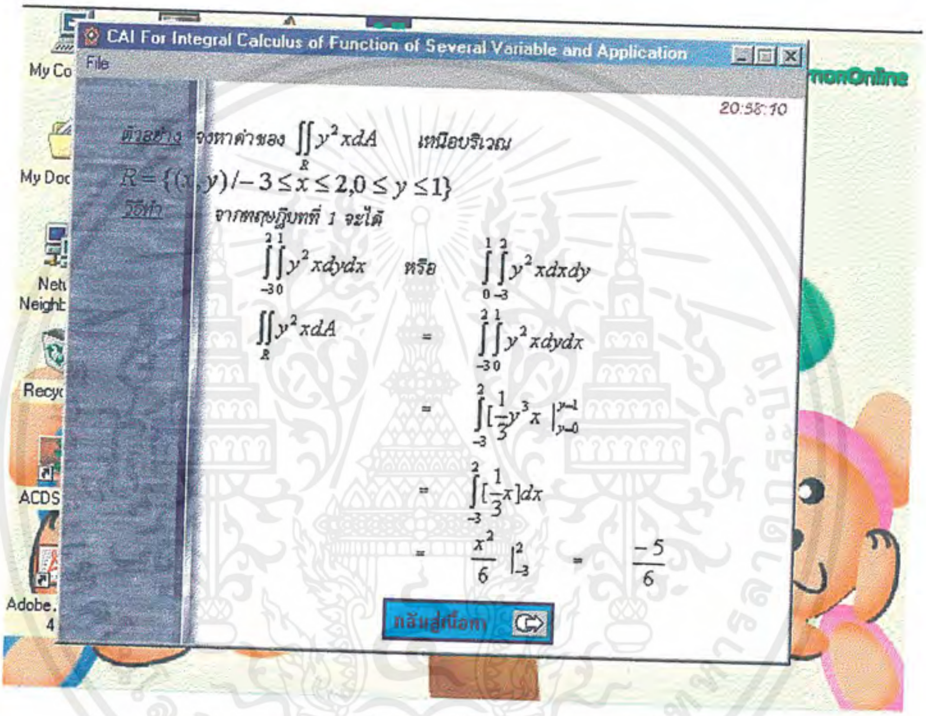
รูปที่ 4.11 หน้าจอบทเรียนอินทิกรัลสามชั้น



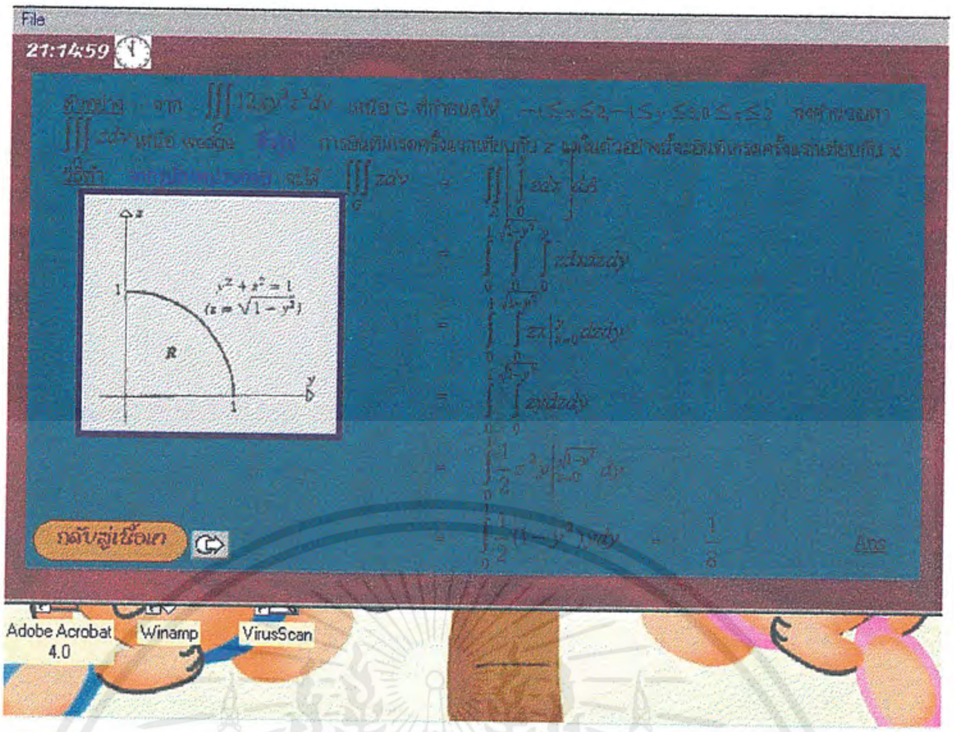
รูปที่ 4.12 หน้าจอบทเรียนการประยุกต์อินทิกรัลสองชั้นและอินทิกรัลสามชั้น

ในบทเรียน เมื่อผู้เรียนเคลื่อนเมาส์ผ่านตัวอักษรใดแล้วเมาส์เลี่ยนเป็นรูปมือ นั้นหมายความว่า ผู้เรียนสามารถคลิ๊กเมาส์ที่คำ ๆ นั้น เพื่อต้องการดูรูปภาพประกอบหรือตัวอย่างประกอบ เพื่อความชัดเจนหรือเข้าใจในบทเรียนมากยิ่งขึ้น

5. ในบทเรียนในแต่ละหัวข้อ ผู้เรียนสามารถเข้าไปคลิ๊กดูตัวอย่างโจทย์ประกอบ เพิ่มเสริมทักษะและความเข้าใจสำหรับผู้เรียน เพื่อความชัดเจนหรือความกระจ่างในบทเรียนแต่ละหัวข้อมากยิ่งขึ้น



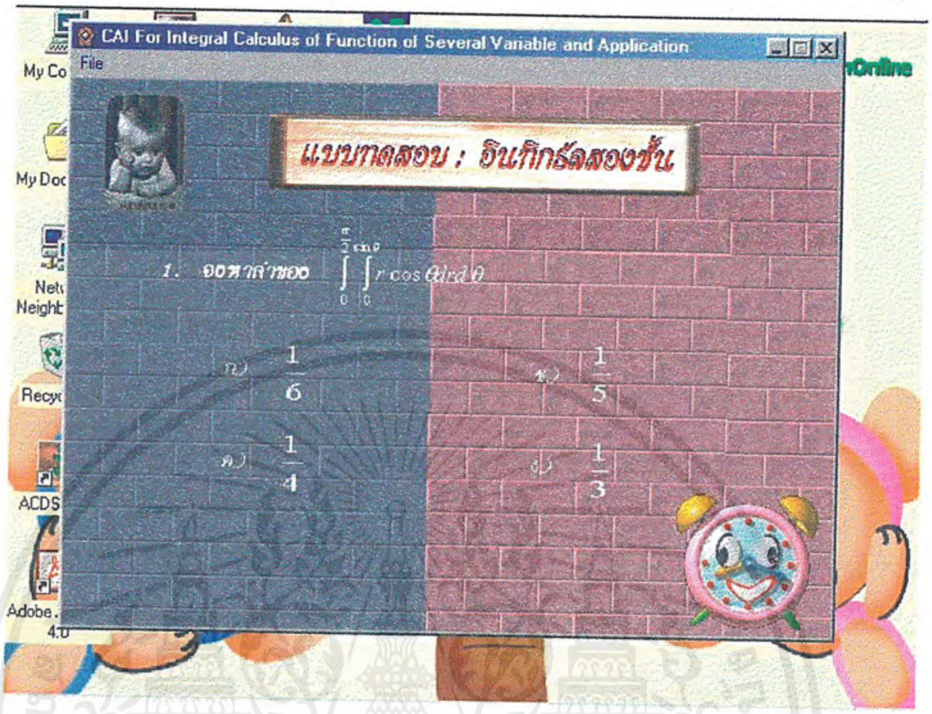
รูปที่ 4.13 ตัวอย่างโจทย์อินทิกรัลสองชั้น



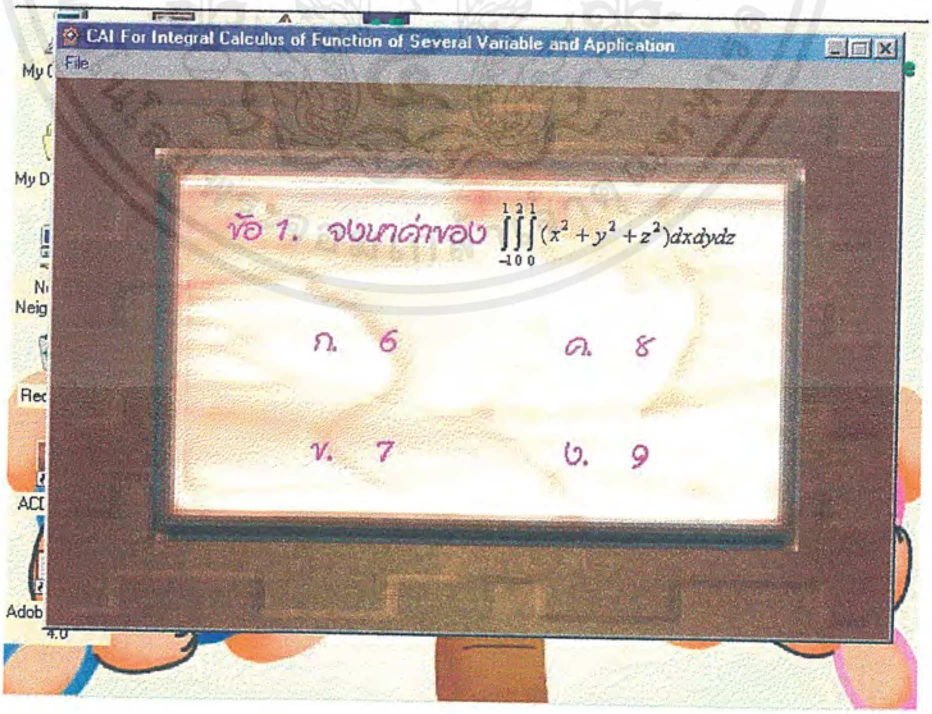
รูปที่ 4.14 ตัวอย่างโจทย์อินทิกรัลสามชั้น

รูปที่ 4.15 ตัวอย่างโจทย์การประยุกต์อินทิกรัลสองชั้นและอินทิกรัลสามชั้น

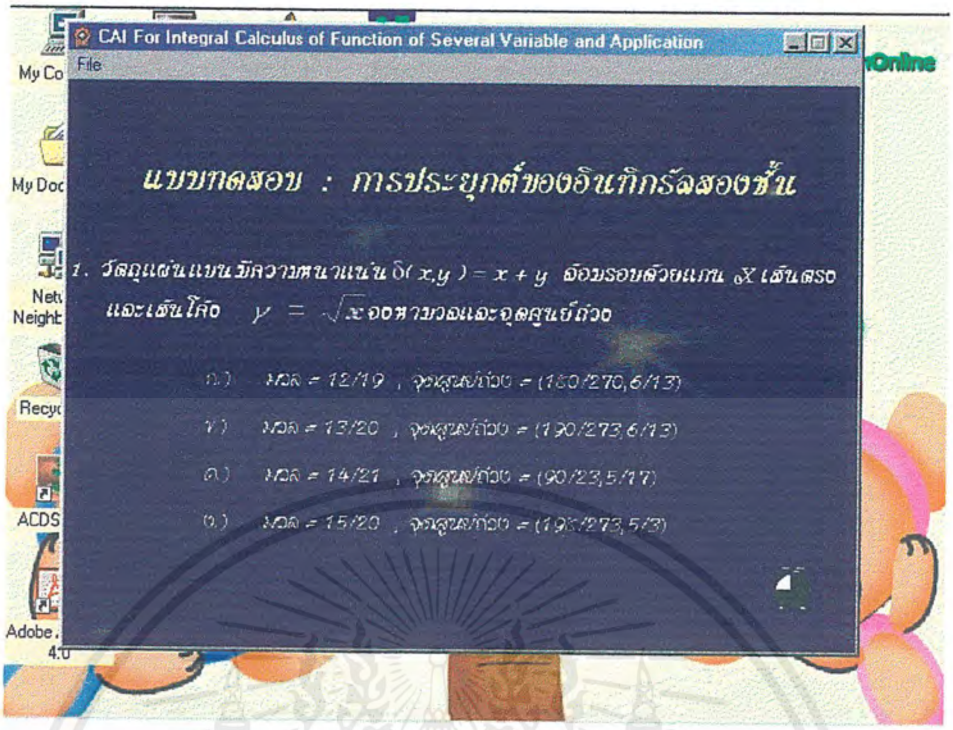
6. เมื่อจบบทเรียนในแต่ละหัวข้อ ผู้เรียนจะต้องทำแบบทดสอบ เพื่อประเมินความรู้ความเข้าใจในบทเรียนนั้น ๆ โดยรูปแบบจะเป็นตัวเลือกให้ผู้เรียนเลือกตอบ



รูปที่ 4.16 หน้าจอแบบทดสอบอินทิกรัลสองชั้น

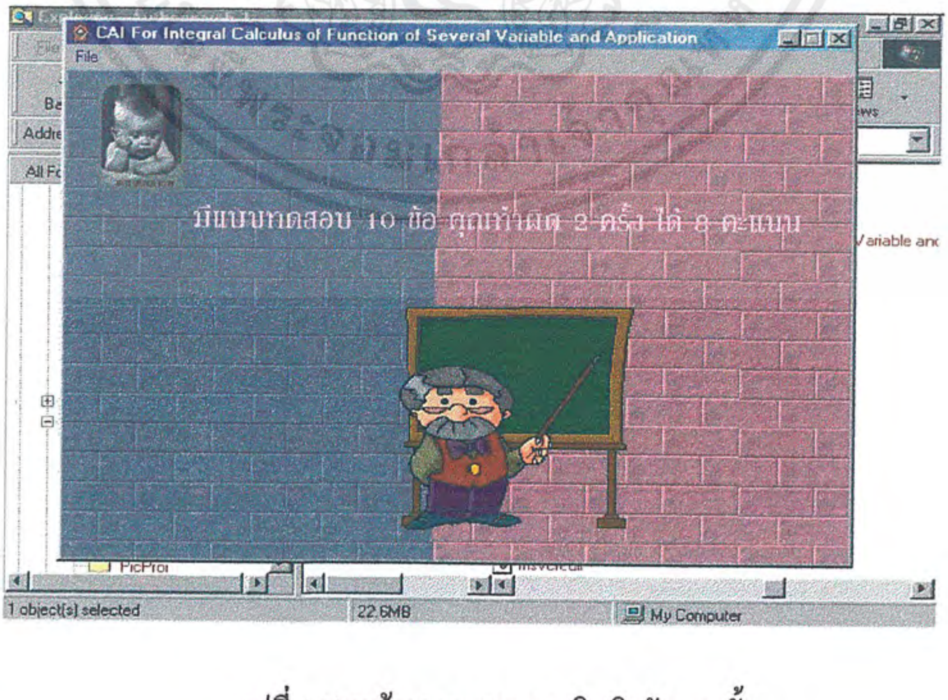


รูปที่ 4.17 หน้าจอแบบทดสอบอินทิกรัลสามชั้น

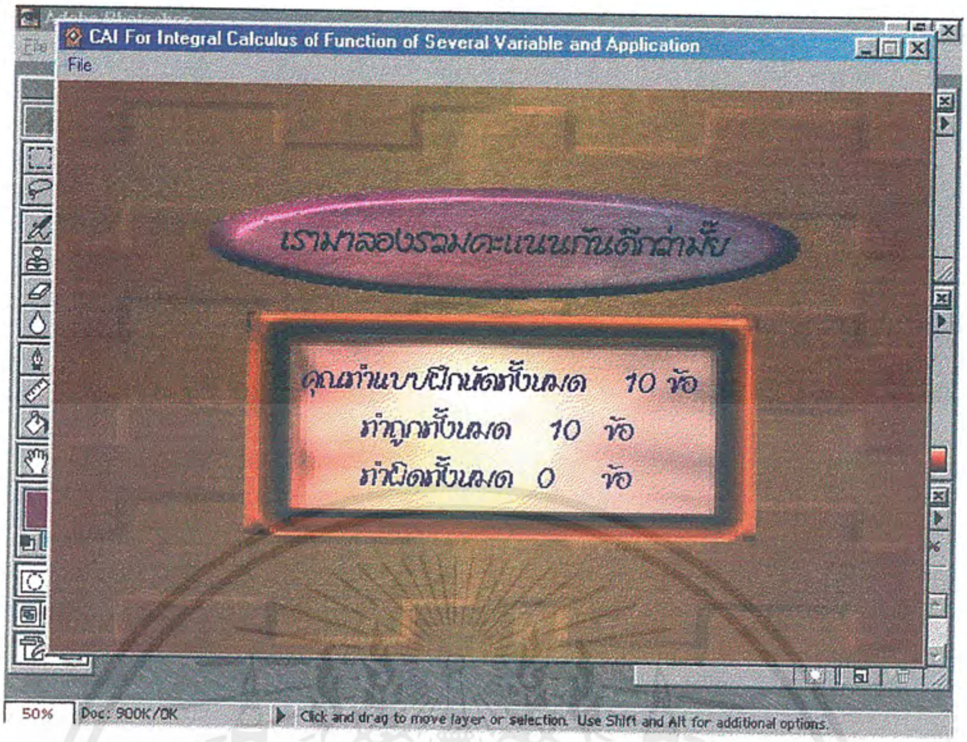


รูปที่ 4.18 หน้าจอแบบทดสอบการประยุกต์อินทิกรัลสองชั้นและอินทิกรัลสามชั้น

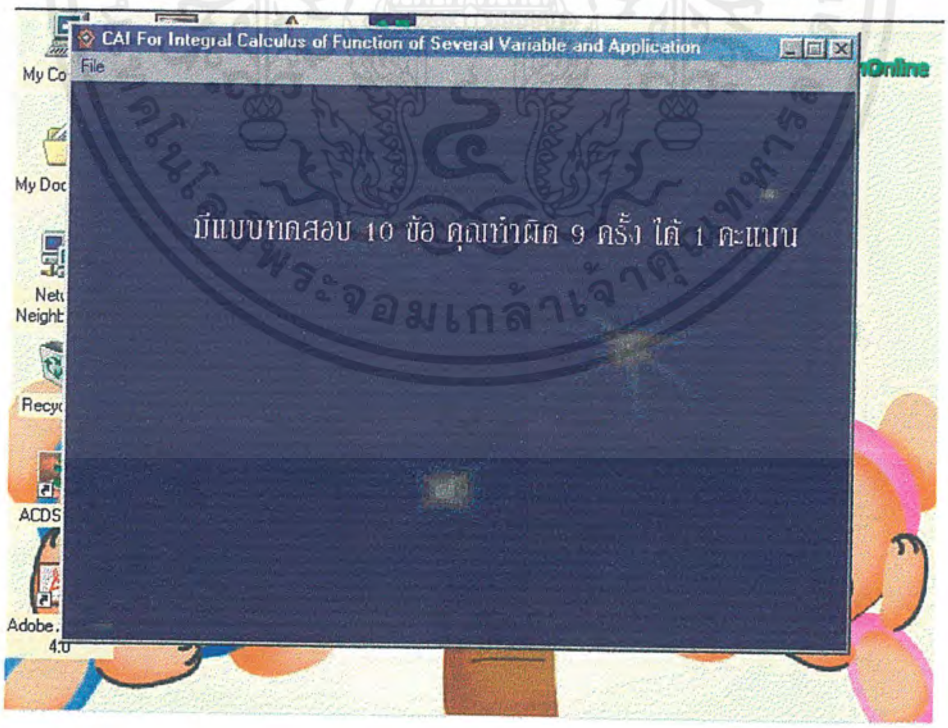
7. เมื่อทำแบบทดสอบครบทั้งหมด 10 ข้อในแต่ละบทเรียนแล้ว จะมีหน้าจอแสดงจำนวนข้อที่ผู้เรียนทำทั้งหมด รวมทั้งแสดงจำนวนข้อที่ผู้เรียนตอบถูกและตอบผิดด้วย



รูปที่ 4.19 หน้าจอรวมคะแนนอินทิกรัลสองชั้น

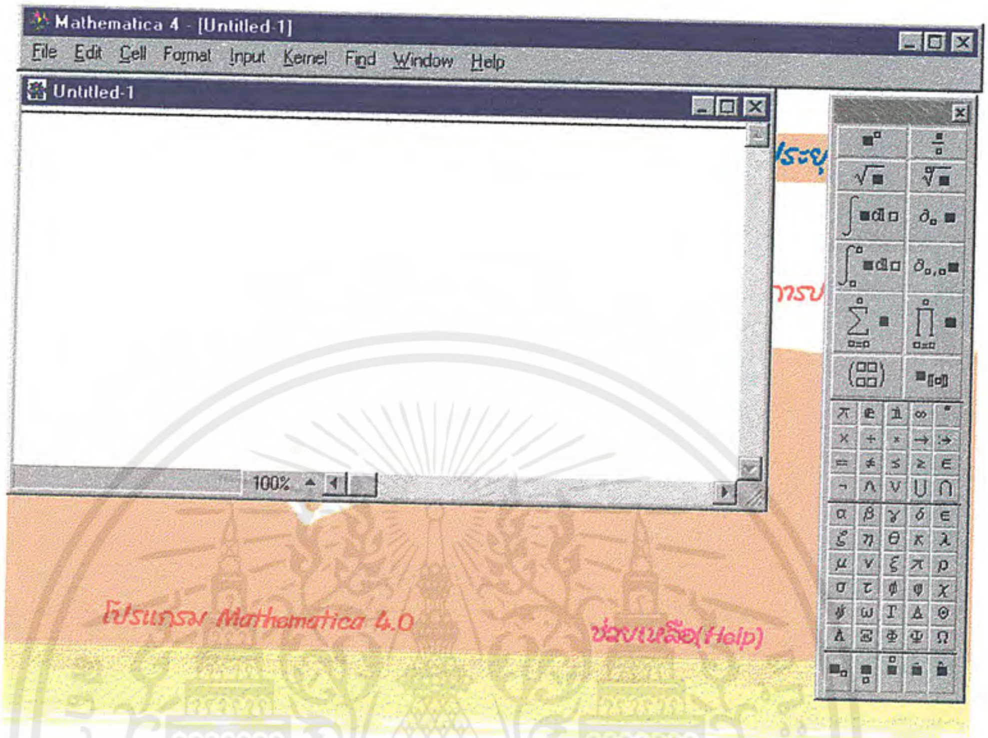


รูปที่ 4.20 หน้าจอรวมคะแนนอินทิกรัลสามชั้น



รูปที่ 4.21 หน้าจอรวมคะแนนอินทิกรัลสองชั้นและอินทิกรัลสามชั้น

8. ในบทเรียน เมื่อผู้เรียนต้องการเชื่อมโยงไปยังโปรแกรม Mathematica ผู้เรียนสามารถคลิ๊กที่ปุ่ม เพื่อเชื่อมโยงโปรแกรมไปยังตัวโปรแกรม Mathematica



รูปที่4.22 หน้าจอ โปรแกรม Mathematica

บทที่ 5
การวิจารณ์หรืออภิปรายผล

ในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ ทำให้ได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาแคลคูลัสเรื่องอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์ โดยตัวโปรแกรมมีการใช้งานที่เข้าใจง่าย ไม่ซับซ้อน และมีการแนะนำวิธีการใช้ให้แก่ผู้เรียน ทำให้ผู้เรียนสามารถศึกษาวิธีการใช้โปรแกรมได้ด้วยตนเอง ซึ่งโปรแกรมจะอยู่ในรูปของการเลือกบทเรียนในหัวข้อที่ต้องการและจะจบการทำงานเมื่อไรก็ได้ตามความต้องการของผู้เรียน ทุกหัวข้อย่อยจะมีแบบทดสอบให้ผู้เรียนได้ทำจำนวน 10 ข้อเพื่อเพิ่มความเข้าใจในหัวข้อนั้น ๆ มากยิ่งขึ้น โดยแบบทดสอบข้อหนึ่งผู้เรียนสามารถตอบได้เพียงครั้งเดียว และผู้เรียนจะต้องทำแบบทดสอบให้ครบทุกข้อตามที่กำหนดไว้ เมื่อทำเสร็จแบบทดสอบในแต่ละบทเรียนเสร็จแล้วโปรแกรมจะมีการรวมคะแนนให้กับผู้เรียน ว่ามีแบบทดสอบทั้งหมดกี่ข้อ ทำแบบทดสอบถูกทั้งหมดกี่ข้อ และทำผิดทั้งหมดกี่ข้อ ถ้าผู้เรียนสามารถทำแบบทดสอบได้ 50% ขึ้นไปของแบบทดสอบทั้งหมด ถือว่าผู้เรียนมีความรู้ความสามารถในระดับที่สามารถผ่านไปเรียนในบทเรียนต่อไปได้ โดยโปรแกรมจะผ่านไปแสดงหน้าจอในบทเรียนต่อไปให้ แต่ถ้าผู้เรียนทำแบบทดสอบได้ไม่เกิน 50% ของแบบทดสอบทั้งหมด ผู้เรียนจะต้องกลับไปเรียนในบทเรียนนั้น ๆ ซ้ำอีกครั้ง โดยโปรแกรมจะย้อนกลับไปแสดงหน้าจอในบทเรียนนั้น ๆ ให้ จากบทเรียนผู้เรียนจะสังเกตเห็นว่าเนื้อหาในแต่ละบทเรียนจะมีความกระชับ รัดกุม แต่ยังคงไว้ในส่วนที่เป็นเนื้อหาสาระสำคัญ เพื่อความไม่เบื่อหน่ายต่อการเรียนของผู้เรียน และในการเชื่อมโยงกับโปรแกรม Mathematica เพื่อให้ผู้เรียนได้เสริมความรู้ให้กับตนเอง แต่การใช้โปรแกรม Mathematica นั้น ผู้เรียนจะต้องมีความรู้เบื้องต้นในการใช้โปรแกรม Mathematica เพราะไม่มีการแนะนำวิธีการใช้โปรแกรม Mathematica เป็นภาษาไทย เนื่องจากข้อจำกัดในเรื่องของเวลาทำให้เป็นการยากต่อการพัฒนาโปรแกรมให้เป็นไปตามที่ต้องการอย่างสมบูรณ์

โปรแกรมประกอบไปด้วยภาพประกอบบทเรียน ภาพเคลื่อนไหวและเสียง เพื่อเพิ่มความดึงดูดใจ ความสนใจในบทเรียนให้กับผู้เรียน โดยไม่เกิดความเบื่อหน่ายต่อการเรียนโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

บทที่ 6
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผล

การนำบทเรียนเรื่องอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์มานำเสนอในรูปแบบของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เป็นทางเลือกที่ดีทางหนึ่งในการเพิ่มประสิทธิภาพทางการศึกษาให้มากขึ้น โดยการสร้างโปรแกรมช่วยการเรียนการสอนสำหรับวิชานี้ มีการเชื่อมโยงกับโปรแกรม Mathematica เพื่อให้ผู้เรียนมองเห็นรูปภาพ 2 มิติ และ 3 มิติ จากการใส่ข้อมูลของผู้เรียนเองและยังได้ศึกษาคำสั่งอื่น ๆ เพิ่มเติมอีกด้วย และ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ได้มีการนำระบบมัลติมีเดียมาเสริม เพื่อการเพิ่มประสิทธิภาพ ทักษะในการเรียนการสอนและดึงดูดความสนใจของผู้เรียน ทำให้ไม่เกิดความเบื่อหน่าย กระตือรือร้นที่จะเรียน และมีความตื่นตัวในการเรียน

สำหรับการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่อง “CAI สำหรับอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์” โดยการนำระบบมัลติมีเดียและการเชื่อมโยงกับโปรแกรม Mathematica ในครั้งนี้ ได้เกิดปัญหาระหว่างการทำงาน ดังนี้

1. เนื่องจากระยะเวลาในการสร้างและพัฒนาโปรแกรมถูกจำกัด ทำให้ไม่สามารถหาข้อมูลและเครื่องมือที่จะใช้ในการพัฒนาโปรแกรมได้ครบทุกอย่าง
2. เนื่องจากเนื้อหาของอินทิกรัลแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรและการประยุกต์มีค่อนข้างมาก ทำให้ต้องย่อเนื้อหาบางส่วนลงให้เหมาะสม โดยมิได้ตัดส่วนที่เป็นสาระสำคัญของเนื้อหาออก อันเนื่องมาจากข้อจำกัดทางด้านเวลาและเพื่อป้องกันความเบื่อหน่ายของผู้เรียน

หลังจากที่ได้ดำเนินงานมาจนกระทั่งบรรลุวัตถุประสงค์ พบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างและพัฒนาขึ้นนี้ยังขาดความสมบูรณ์บางประการ เช่น รายละเอียดของบทเรียนบางส่วนเนื่องจากว่าถูกจำกัดทางด้านเวลาและหนังสือที่ค้นคว้ามานั้นบางเล่มให้ความสำคัญกับนิยามและระเบียบวิธีที่สำคัญเท่านั้น

อย่างไรก็ดี โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่พัฒนาขึ้นนี้ สามารถเป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนขึ้นมาใหม่ สำหรับการปรับปรุงและพัฒนางานด้านโปรแกรมช่วยการเรียนการสอนที่ดีต่อไป

6.2 ข้อเสนอแนะ

1. การสร้างบทเรียนของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ค่อนข้างยุ่งยาก ดังนั้นควรใช้เวลาในการเตรียมการผลิตให้มากพอสมควร
2. การเลือกโปรแกรมมาพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้น ควรพิจารณาให้รอบคอบถึงความยืดหยุ่นของโปรแกรมที่จะนำมาใช้ และรูปแบบการนำเสนอให้เหมาะสมกับความต้องการนั้น ๆ
3. การเลือกเนื้อหาที่จะนำมาสร้างเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้น ควรพิจารณาให้รอบคอบว่าจะใช้ประโยชน์จากจุดเด่นของโปรแกรม และระบบมัลติมีเดียได้เต็มประสิทธิภาพอย่างไร จึงจะทำให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้นมีคุณค่าต่อการเรียนการสอนอย่างแท้จริง
4. การออกแบบบทเรียนควรใช้บทเรียนที่มีแนวการสอนหลายแบบ เพื่อให้เหมาะสมกับคนที่มีพื้นฐานความรู้ หรือมีความสามารถต่างกัน
5. ควรทำการศึกษาทัศนคติ ความคิดเห็นของผู้เรียนและผู้สอน เพื่อเป็นแนวทางในการปรับปรุงแก้ไข เพื่อให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์. เอกสารประกอบการสอน **การประยุกต์ของอินทิกรัลฟังก์ชันหลายตัวแปร** โครงการตำราคณะวิทยาศาสตร์. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

ภัคคินี ยิมเรวัต. 2529. **คณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์ 1** โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

พัชรินทร์ เหมโชติ. เอกสารประกอบการสอน **การประยุกต์ของอินทิกรัลฟังก์ชันหลายตัวแปร.** กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

Anton, Howard. 1988. **Calculus with analytic geometry/Howard Anton : late trigonometry version.** 3rd ed. New York : John Wiley

Edward, C. Henny and Penney, David E. 1990. **Integral Calculus for Functions of Two and Three Variables.** 5th ed. Englewood : Prentice Hall.

Garret J. Etgen. 1995. **Salas and Helle's Calculus : One And Several Variables.** 7th ed. New York : John Wiley & Sons.

Philip M. Anselone and John W.Lee. 1996. **Multivariable Calculus with Engineering and Science Application.** Upper Saddle River : Prentice Hall.

Stewart, James. 1991. **Multivariables Calculus/James Stewart.** 2nd ed. California : Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove.