การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยใช้คอมพิวเตอร์

CONVERGENCE TEST OF INFINITE SERIES BY COMPUTER

ธนาณิตย์ สันติวิริยนนท์
พิชัย กนกวัฒนเลิศ
เอกสิทธิ์ กิจขจรกุล

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2544

CONVERGENCE TEST OF INFINITE SERIES BY COMPUTER

THANANIT SUNTIVIRIYANON
PICHAI KANOKWATTANALERT
EKASIT KITKHAJORNKUL

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADAMIC YEAR 2001

หัวข้อปัญหาพิเศษ การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยใช้คอมพิวเตอร์

CONVERGENCE TEST OF INFINITE SERIES BY COMPUTER

ชื่อนักศึกษา นายธนาณิตย์ สันติวิริยนนท์ 41051021

นายพิชัย กนกวัฒนเลิศ 41051033

นายเอกสิทธิ์ กิจขจรกุล 41051066

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2544

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ	
กรรมการ	อาจารย์วีระศักดิ์ นิ่มขุนทด	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ	

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยใช้คอมพิวเตอร์

ชื่อนักศึกษา นายธนาณิตย์ สันติวิริยนนท์ 41051021

นายพิชัย กนกวัฒนเลิศ 41051033

นายเอกสิทธิ์ กิจขจรกุล 41051066

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2544

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้จัดทำขึ้นเพื่อช่วยในการศึกษาหัวข้อเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยนำความรู้ทางคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยในการจัดทำโปรแกรมได้ใช้โปรแกรม Visual Basic และ Mathematica ทั้งนี้คณะผู้จัดทำได้มีการเขียนโปรแกรมเพื่อทดสอบการลู่เข้าของลำดับอนันต์ อนุกรมอนันต์ อนุกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์ ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ใช้วิธีการทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบอนุกรมสลับ พร้อมทั้งแสดงผลการทดสอบว่าอนุกรมอนันต์ลู่เข้าหรือลู่ออกและถ้าอนุกรมอนันต์ลู่เข้าจะแสดงผลว่าลู่เข้าสู่ค่าใด

Special Project Title	Convergence Test of Infinite Series by Computer
Student	Mr.Thananit Suntiviriyanon 41051021
	Mr.Pichai Kanokwattanalert 41051033
	Mr.Ekasit Kitkhajornkul 41051066
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2001
Special Project Advisor	Associate Professor Pongpran Ratanathanawan
	Assistant Professor Sunthorn Suchatvejapoom

ABTRACT

This project is created for study about the Infinite series. We used computer to test the convergence of the Infinite series, by used Mathematica and visual basics to design program for test convergence of Infinite sequence, Infinite series, Power series and Taylor series. We used Divergence test, Integral test, Comparison test, Ratio test and Alternating series test, the program would shoe that the sequence or series converge or diverge. And if it converge, this program would show the value that it converge to.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยใช้คอมพิวเตอร์ฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ผู้ซึ่งให้คำปรึกษาในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งยังเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาฉบับนี้ได้เป็นอย่างดี

ที่ลืมมิได้คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณบิดา มารดาที่คอยช่วยเหลือด้านทุนทรัพย์ อีกทั้งเป็นกำลังใจตลอดการทำงานจนสำเร็จลุล่วงได้อย่างดีเยี่ยม รวมทั้งเพื่อน ๆ ทุกคนที่มีส่วนร่วมคอยให้ความช่วยเหลือต่าง ๆ ในการจัดทำปัญหาพิเศษฉบับนี้

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2545

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษาในระดับอุดมศึกษาโดยเฉพาะทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์มีความจำเป็นต้องศึกษาในเรื่องอนุกรมอนันต์ ซึ่งเนื้อหาส่วนใหญ่คือการทดสอบอนุกรมอนันต์ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก การทดสอบนั้นมีหลายวิธี ได้แก่ การทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบอนุกรมสลับ เป็นต้น โดยผู้เรียนจะต้องทราบถึงทฤษฎีที่ใช้ในการทดสอบและสามารถทดสอบอนุกรมได้โดยใช้ทฤษฎีบทในการคำนวณเพื่อการทดสอบ

ปัจจุบันนี้เป็นยุคสมัยที่มีวิวัฒนาการทางเทคโนโลยีก้าวหน้ามากขึ้น มีการนำเทคโนโลยีที่ทันสมัยมาประยุกต์ใช้ในงานทุกสายอาชีพ คณะผู้จัดทำจึงเล็งเห็นความสำคัญจุดนี้ว่าน่าจะใช้ความรู้ทางคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการศึกษาในหัวข้อเรื่องอนุกรมอนันต์ คณะผู้จัดทำจึงจัดทำโปรแกรมเพื่อทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ซึ่งสามารถเพิ่มความสะดวก รวดเร็วและความถูกต้องให้แก่นักศึกษาและอาจารย์ อีกทั้งคณะผู้จัดทำคาดว่าโปรแกรมที่จัดทำขึ้นจะสามารถดึงดูดความสนใจของนักศึกษาให้มีความอยากเรียนรู้มากขึ้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.เพื่อศึกษาทฤษฎีการทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมอนันต์ ซึ่งจะเน้นถึงวิธีการทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบอนุกรมสลับ

2.ศึกษาซอฟต์แวร์แมททิเมติกา เพื่อใช้ในการจัดทำโปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมอนันต์

3.ทำโปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ เพื่อสามารถทำงานได้และถูกต้อง

1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

ได้โปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมอนันต์โดยเฉพาะวิธี การทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบ

ราก การทดสอบอนุกรมสลับ ที่สามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ พร้อมทั้งแสดงผลของการทดสอบอนุกรมอนันต์ว่าลู่เข้าหรือลู่ออกและถ้าลำดับอนันต์หรืออนุกรมอนันต์นั้นลู่เข้าจะลู่เข้าสู่ค่าใด

1.4 ขอบเขตของการศึกษา

1.ศึกษาทฤษฎีการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ได้อย่างถูกต้อง

2.จัดทำโปรแกรมสำหรับการทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมอนันต์ โดยใช้วิธีการทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบอนุกรมสลับ

3.สามารถใช้โปรแกรมที่จัดทำขึ้นตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับอนันต์ อนุกรมอนันต์ อนุกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์ได้อย่างถูกต้องและชำนาญ

1.5 ขั้นตอนของการศึกษา

1.ศึกษาทฤษฎีการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

2.ศึกษาซอฟต์แวร์แมททิเมติกาเพื่อใช้ในการจัดทำโปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมอนันต์

3.ทำการเขียนโปรแกรม

4.ทดสอบและการแก้ไขโปรแกรมที่จัดทำขึ้นเพื่อให้มีความถูกต้องเหมาะสม

5.จัดทำคู่มือและเอกสารประกอบปัญหาพิเศษ

1.6 ข้อตกลงเบื้องต้น

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นจะมีการเรียกใช้ซอฟต์แวร์แมททิเมติกา ดังนั้นคอมพิวเตอร์ที่จะทำการติดตั้งโปรแกรมนี้จึงควรมีซอฟต์แวร์แมททิเมติกาอยู่เสียก่อน และต้องศึกษาการป้อนฟังก์ชันอนุกรมอนันต์ในตัวโปรแกรมเพื่อทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมอนันต์ให้ถูกต้อง ซึ่งสามารถศึกษาได้ในส่วนของภาคผนวก

บทที่ 2

ลำดับและอนุกรม

2.1 **ลำดับ**(Sequence)

ในทางคณิตศาสตร์ใช้คำว่า ลำดับเพื่อเรียกเลขหลาย ๆ จำนวนนั้นเรียงต่อกันไปอย่างไม่สิ้นสุด เช่น

1,2,3,4,…

2,4,6,8,…

1,-1,1,-1,…

ใช้จุด 3 จุด เพื่อแสดงว่าลำดับนั้นมีเลขจำนวนอื่น ๆ ต่อไปเรื่อย ๆ ตามแบบที่เห็นได้ชัดจากพจน์ก่อนหน้านี้ เลขแต่ละจำนวนในลำดับ เรียกว่า พจน์(term) มีพจน์แรก พจน์ที่สอง พจน์ที่สาม และต่อ ๆ ไป โดยคั่นระหว่างแต่ละพจน์ด้วยเครื่องหมาย “,”

อาจเขียนลำดับโดยไม่นิยามค่าของพจน์ต่าง ๆ ได้โดย

$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$

หรือ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

หรือเรียกสั้น ๆ ว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

นิยมใช้ a_n แทนพจน์ที่ n ของลำดับ

ค่าของ a_n ขึ้นอยู่กับค่าของ n

ดังนั้น a_n เป็นฟังก์ชันของ n โดย n เป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น นั่นคือ $a_n = f(x)$

ลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เรียก n ว่า ดัชนี(index) อาจใช้ดัชนี เป็น k ได้ โดย $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ และไม่จำเป็นที่จะต้องเริ่ม ดัชนี ที่ 1 ในบางครั้งเพื่อให้ง่ายอาจเริ่ม ดัชนีที่ 0 หรือ ที่จำนวนเต็มอื่น ๆ

นิยาม ลำดับ ของจำนวนคือฟังก์ชันซึ่งโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ค่าของฟังก์ชัน เรียกว่าเทอมของลำดับ และ ลำดับของจำนวนจริงเรียกว่า ลำดับจำนวนจริง ถ้าจำนวนใด ๆ ใน ลำดับเป็นจำนวนเชิงซ้อน เรียกว่า ลำดับจำนวนเชิงซ้อน เช่น

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ เป็นลำดับจำนวนจริง

$\{a_n\} = \left\{\frac{i^{n+1}}{n}\right\}$ เป็นลำดับเชิงซ้อน

นิยาม กราฟของลำดับ $\{a_n\}$ คือกราฟของ ฟังก์ชัน $f(n) = a_n$

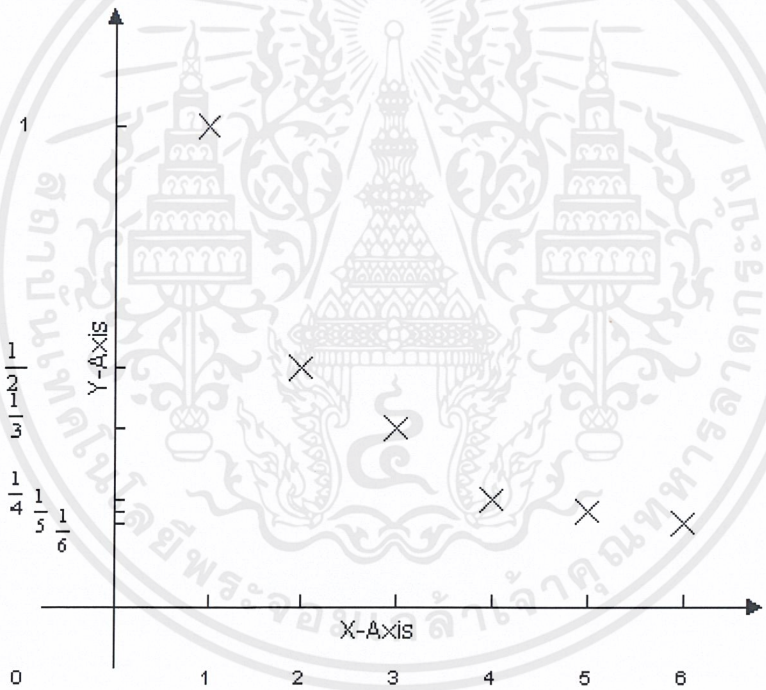
<u>ตัวอย่างที่</u><u>2.1</u> จงเขียนกราฟของลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

<u>วิธีทำ</u> กราฟของลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ คือกราฟของ f(x) = a_n

หรือ $f(n) = a_n = \frac{1}{n}$, n=1,2,3,...

กราฟของ $y = f(n) = \frac{1}{n}$, n=1,2,3,...

ซึ่งคล้ายกับกราฟของ y = $\frac{1}{x}$, x $\geq$ 1 เพียงแต่ค่า x เป็นค่าจำนวนเต็มบวกได้เท่านั้น ดังรูป



รูปที่ 2.1 **รูปแสดงกราฟลำดับ** $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

พจน์ในลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ มีลิมิต 0 เนื่องจาก $\frac{1}{n} \to 0$ เมื่อ $n \to 0$

$\{(-1)^n\}$ ไม่มีลิมิต เพราะมีค่าสลับไปมา ไม่เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งเพียงค่าเดียว

$\left\{(-\frac{1}{2})^n + 1\right\}$ มีลิมิต 1 เนื่องจาก $(-\frac{1}{2})^n + 1 \to 0$ เมื่อ $n \to 0$

$\{n+1\}$ ไม่มีลิมิต เพราะ n+1 มีค่าเพิ่มอย่างไม่สิ้นสุด เมื่อ n มีค่าเพิ่มอย่างไม่มีขีดจำกัด

นิยาม ถ้าลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ มีลิมิต L จะกล่าวว่าลำดับนี้ลู่เข้า(convergent) สู่ค่า L และเขียนได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

ลำดับซึ่งไม่มีลิมิต จะกล่าวว่าลำดับนั้นลู่ออก(divergent)

นิยาม ลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก(divergent sequence) ก็ต่อเมื่อลำดับนั้น ไม่ใช่ลำดับลู่เข้า(convergent sequence) แบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีที่1 ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ หรือ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ เรียกลำดับนี้ว่า ลำดับลู่ออกชนิดแท้ (properly divergent sequence)

กรณีที่2 ลำดับอนันต์ลู่ออกที่ไม่เป็นลำดับลู่ออกชนิดแท้เรียกว่า ลำดับลู่ออกชนิดแกว่ง (oscillatary divergent sequence)

2.1.1 ลำดับมีขอบเขต(Bounded)

นิยาม ลำดับ $\{a_n\}$ กล่าวว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตบน(upper bound)ถ้ามีจำนวนจริง A ที่ $a_n \le A$ สำหรับทุกค่าของ n

ลำดับ $\{a_n\}$ กล่าวว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตล่าง(lower bound)ถ้ามีจำนวนจริง B ที่ $a_n \ge B$ สำหรับทุกค่าของ n

นิยาม ถ้า C เป็นขอบเขตบนของลำดับ $\{a_n\}$ และ A เป็นขอบเขตบนของลำดับ $\{a_n\}$

ถ้า $C \le A$ แล้ว C เป็นค่าขอบบนที่น้อยที่สุด(least upper bound : l.u.b)

ถ้า D เป็นขอบเขตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ และ B เป็นขอบเขตล่างของลำดับ $\{a_n\}$

ถ้า $B \le D$ แล้ว D เป็นค่าขอบล่างที่มากที่สุด(greatest lower bound : g.l.b)

นิยาม ลำดับ $\{a_n\}$ เรียกว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด ก็ต่อเมื่อ ลำดับ $\{a_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ดังนั้น $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ และ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ลำดับ $\{n\}$ หรือ 1,2,3,4,5,…,n,… มีขอบเขตล่างเป็น 1 ไม่มีขอบเขตบนดังนั้น $\{n\}$ ไม่เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ทฤษฎี ถ้า $\{a_n\}$ เป็น ลำดับทางเดียวที่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

2.1.2 **ลำดับย่อย**(Subsequence)

พิจารณาลำดับ $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ หรือ $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...$

ถ้าเขียนเฉพาะพจน์เลขคี่ยกกำลังสองได้ $1^2, 3^2, 5^2, ...$

ถ้าเขียนเฉพาะพจน์เลขคู่ยกกำลังสองได้ $2^2, 4^2, 6^2, ...$

ลำดับใหม่ที่ได้นี้เรียกว่าลำดับย่อยของลำดับ $\{n^2\}$

ให้ $t_{n_1} = 2n-1$ เมื่อ n = 1,2,3,... แล้ว $\{t_{n_1}$ เป็นลำดับของ 1,3,5,...

ให้ $t_{n_2} = 2n$ เมื่อ n = 1,2,3,... แล้ว $\{t_{n_2}$ เป็นลำดับของ 2,4,6,...

ถ้า $a_n = n^2$ แล้ว

ลำดับ $\{at_{n_1}\}$ คือ $1^2, 3^2, 5^2, ...$ และ

ลำดับ $\{at_{n_2}$ คือ $2^2, 4^2, 6^2, ...$

เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$

ทฤษฎี ลำดับลู่เข้าสู่ค่าลิมิต L ก็ต่อเมื่อ ลำดับย่อยของพจน์จำนวนคู่ และพจน์ของจำนวนคี่ ทั้งคู่ลู่เข้าสู่ค่า L

2.2 **อนุกรมอนันต์**(Infinite Series)

นิยาม ถ้าให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับอนันต์แล้ว ผลบวกของลำดับอนันต์

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

เรียกว่าลำดับอนันต์ แต่ละ $\{a_n\}$ เรียกว่าพจน์ของอนุกรม

ผลบวกย่อย(partial sum) ของอนุกรมคือ

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

พจน์ $\{s_n\}$ เรียกว่า ผลบวกย่อยอันดับที่ n (n^{th} partial sum)

อันดับ $\{s_n\} = s_1 + s_2 + s_3 + ...$ เรียกว่าอันดับของผลบวกย่อย(sequence of partial sum)

<u>**ตัวอย่างที่**2.2</u> พิจารณาอนุกรมอนันต์ $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + ...$

ผลบวกย่อยอันดับต่าง ๆ $s_1 = \frac{3}{10} = 0.3$

$s_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0.33$

$s_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0.333$

$$\frac{1}{3} = 0.333\dot{3}$$

$$\frac{1}{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

$\frac{1}{3}$ สามารถมองให้อยู่ในรูปผลรวมหลาย ๆ จำนวนจริง

$s_1, s_2, s_3, \ldots$ เป็นลำดับที่สามารถพิจารณาว่าเป็นการประมาณของผลบวกของอนุกรมอนันต์ ถ้าจำนวนพจน์ในอนุกรมอนันต์มีมาก ค่าประมาณก็จะดีขึ้นเรื่อย ๆ

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots \frac{3}{10^n} +$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots \frac{3}{10^n}\right)$$

$$\frac{1}{10} s_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots \frac{3}{10^{n+1}}$$

$$s_n - \frac{1}{10} s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10} s_n = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3}$$

นิยาม ให้ $\{s_n\}$ เป็น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots$ ถ้าลำดับ $\{s_n\}$ ลู่เข้าสู่ลิมิต s แล้วกล่าวว่า อนุกรมลู่เข้าสู่ s และเรียก s ว่าเป็นผลบวกของอนุกรม เขียนแทนด้วย

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ถ้าลำดับของผลบวกย่อยลู่ออกแล้วกล่าวว่า อนุกรมลู่ออก อนุกรมที่ลู่ออกไม่มีผลบวก

ดัชนีใน อนุกรมอนันต์ อาจเริ่มที่ k = 0 หรือ k = 1 การเปลี่ยนค่าเริ่มต้นของดัชนี นี้ไม่มีผลกับการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรม

ตัวอย่างที่2.3 จงพิจารณาว่าอนุกรม $1-1+1-1+1-1+....$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกด้วย

วิธีทำ $s_1 = 1$

$s_2 = 1-1 = 0$

$s_3 = 1-1+1 = 1$

$s_4 = 1-1+1-1 = 0$

ซึ่งได้ลำดับของผลบวกย่อยดังนี้

1,0,1,0,...

พบว่าค่าในลำดับมีค่าสลับกันระหว่าง 1 และ 0 ไม่ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งเพียงค่าเดียว จึงไม่มีลิมิต ลำดับของผลบวกย่อยลู่ออกดังนั้นอนุกรมลู่ออก และหาผลบวกไม่ได้

2.2.1 อนุกรมเรขาคณิต

นิยาม อนุกรมเรขาคณิตคือ อนุกรมที่สามารถเขียนในรูปแบบ $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^k + \ldots, a \neq 0$ แต่ละพจน์ในอนุกรมเรขาคณิตได้มาจากการคูณพจน์ก่อนด้วยค่าคงที่ r จำนวน r นี้เรียกว่า อัตราส่วน (ratio) ของอนุกรม

ตัวอย่างของอนุกรมเรขาคณิต

$1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots$ $\quad a=1, r=2$

$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots+\frac{3}{10^k}+\ldots$ $\quad a=\frac{3}{10}, r=\frac{1}{10}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{2^k}+\ldots$ $\quad a=\frac{1}{2}, r=\frac{-1}{2}$

$1+1+1+1+\ldots+1+\ldots$ $\quad a=1, r=1$

$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{k+1}+\ldots$ $\quad a=1, r=-1$

$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+\ldots$ $\quad a=1, r=x$

อนุกรมในตัวอย่างนี้ ดัชนีเริ่มจาก k = 0 บ้าง เริ่มจาก k = 1 บ้าง

ทฤษฎีบท อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + \ldots \quad ; a \neq 0$ ลู่เข้าถ้า $|r| < 1$ และลู่ออกถ้า $|r| \geq 1$ และถ้าอนุกรมลู่เข้าแล้ว ผลบวกของอนุกรมคือ

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

<u>ตัวอย่างที่2.4</u> อนุกรม $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5}{4^k}=5+\frac{5}{4}+\frac{5}{4^2}+\frac{5}{4^3}+\ldots+\frac{5}{4^k}+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $a=5, r=\frac{1}{4}$

$|r|=\frac{1}{4}<1$ ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าและผลบวกคือ $\frac{a}{1-r}=\frac{5}{1-\frac{1}{4}}=\frac{20}{3}$

2.2.2 **อนุกรมฮาร์มอนิค**

นิยาม อนุกรมฮาร์มอนิค คือ อนุกรมในรูปแบบ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

ผลบวกย่อยของอนุกรมนี้คือ $S_1=1$

$$S_2=1+\frac{1}{2}$$

$$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

ซึ่งเป็นลำดับเพิ่ม $S_1<S_2<S_3<\ldots<S_n<\ldots$

พบว่า

$$S_2=1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$$

$$S_4=S_2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>S_2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=S_2+\frac{1}{2}>\frac{3}{2}$$

$$S_8=S_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>S_4+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=S_4+\frac{1}{2}>\frac{4}{2}$$

$$S_{16}=S_8+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>S_8+\overbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}^{8\text{ ตัว}}$$

$$=S_8+\frac{1}{2}>\frac{5}{2}$$

ดังนั้น $S_n>\frac{n+1}{2}$

ดังนั้นไม่ว่า M มีค่าเท่าใด จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\frac{n+1}{2}>M$ ดังนั้น $S_{2^n}>\frac{n+1}{2}>M$

ลำดับS_n ไม่มีค่าขอบเขตบนและลู่ออก ดังนั้นอนุกรมลู่ออก

2.2.3 **การทดสอบการลู่เข้า**(Convergence Tests)

ทฤษฎีบท การทดสอบการลู่ออก(The Divergence Test)

(a) ถ้า $\lim_{k\to\infty}a_k\neq 0$ แล้วอนุกรม $\sum a_k$ ลู่ออก

(b) ถ้า $\lim_{k\to\infty}a_k=0$ แล้วอนุกรมอาจลู่ออกหรือลู่เข้า

พิจารณาอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}=0$$

และอนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่ง $a=1$ และ $r=\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $|r|<1$ แล้วอนุกรมเรขาคณิตลู่เข้า

ดังนั้นอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ ลู่เข้า

พิจารณาอนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$$

และอนุกรมนี้คืออนุกรมฮาร์มอนิคซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้นอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ลู่ออก

ถ้า $\lim_{k\to\infty}a_{k\neq 0}$ แล้ว อนุกรม $\sum a_k$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท ถ้าอนุกรม $\sum a_k$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{k\to\infty}a_k=0$

การทดสอบว่าอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือไม่ ก็คือการพิจารณา $\lim_{k\to\infty}a_k=0$ หรือไม่ ถ้าลิมิตไม่เท่ากับศูนย์ สรุปได้ทันทีว่าลู่ออก แต่ถ้าลิมิตเท่ากับศูนย์ ต้องพิจารณาต่อ

1. **การทดสอบอินทิกรัล**(The Integral Test)

ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีจำนวนบวกและเป็นลำดับลดลง ดังนั้นสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n $a>a_{n+1}>0$

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องลดลงนิยามบน $[1,\infty]$ ซึ่ง $f(n)=a_n$ สำหรับทุก $n\geq 1$ แล้ว

$a_{n+1}\leq f(x)\leq a_n$ สำหรับทุก x ใน $[n,n+1]$ ดังนั้น

$$\int_n^{n+1}a_{n+1}dx\ \leq\ \int_n^{n+1}f(x)dx\ \leq\ \int_n^{n+1}a_n dx$$

$$a_{n+1}\left((n+1)-n\right)\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\ \leq a_n\left((n+1)-n\right)$$

$$a_{n+1}\ \leq\ \int_n^{n+1}f(x)dx\ \leq a_n$$

ทฤษฎีบท ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับบวกและให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องลดลงนิยามบน $[1,\infty]$ โดย

$f(n) = a_n$ เมื่อ $n \le 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ อินทิกรัลไม่ตรงแบบ(improper integral) $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่างที่2.5 พิจารณา $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

วิธีทำ แทน k ด้วย x แล้ว $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{-1}{x} \bigg|_{1}^{b} \right)$$

$$= \int_{1}^{b} \left(\frac{-1}{b} + 1 \right) = 1$$

อินทิกรัลลู่เข้า ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าด้วย

2. **อนุกรม P หรือ อนุกรมไฮเปอร์ฮาร์มอนิค**

คืออนุกรมอนันต์ที่อยู่ในรูปแบบ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{k^p} + ...$ เมื่อ $p > 0$ เช่น

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} \qquad p = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{k^2} \qquad p = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad p = \frac{1}{2}$$

ทฤษฎีบท การลู่เข้าของอนุกรม P

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{k^p} + ...$ ลู่เข้าถ้า $p > 1$ และ ลู่ออกถ้า $0 \le p \le 1$

2.2.4 การทดสอบการลู่เข้าโดยวิธีอื่น ๆ สำหรับอนุกรมที่มีพจน์บวก

1. **การทดสอบเปรียบเทียบ**(Comparison Test)

ทฤษฎีบท ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่มีทุกพจน์เป็นจำนวนบวก และ

$$a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3, ..., a_n < b_n < ...$$

1) ถ้าอนุกรมที่ใหญ่กว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้วอนุกรมที่เล็กกว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าด้วย

2) ถ้าอนุกรมที่เล็กกว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก แล้วอนุกรมที่ใหญ่กว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออกด้วย

<u>**ตัวอย่างที่2.6**</u> พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

<u>**วิธีทำ**</u> $\frac{1}{2^n+1} \le \frac{1}{2^n}$ เมื่อ $n \ge 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ ลู่เข้า

ดังนั้นโดยการทดสอบเปรียบเทียบ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ ลู่เข้า

2. **การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต**(The limit comparison test)

ทฤษฎีบท ให้ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ และ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ เป็นอนุกรมซึ่งมีพจน์เป็นจำนวนบวก และสมมุติ

$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \rho$ เมื่อ ρ มีค่าจำกัด และ $\rho > 0$ แล้วอนุกรมอาจลู่เข้าทั้งคู่ หรือลู่ออกทั้งคู่

3. **การทดสอบอัตราส่วน**(The Ratio Test)

ทฤษฎีบท ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งมีทุกพจน์เป็นจำนวนบวก และ $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

(เป็น ∞ ได้)

1. ถ้า $0 \le r \le 1$ แล้วอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $r > 1$ แล้วอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $r = 1$ ไม่สามารถสรุปได้

<u>**ตัวอย่างที่2.7**</u> พิจารณา $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

<u>**วิธีทำ**</u>

$$r = \lim_{n = \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)n!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$r = 0 < 1 \quad \Rightarrow$ อนุกรมลู่เข้าโดยการทดสอบอัตราส่วน

4. **การทดสอบราก**(The Root Test)

ทฤษฎีบท ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งมีทุกพจน์เป็นจำนวนบวก และ $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ (เป็น ∞ ได้)

1. ถ้า $0 \le r \le 1$ แล้วอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $r > 1$ แล้วอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $r = 1$ ไม่สามารถสรุปได้

2.2.5 **อนุกรมสลับ**(Alternating series)

นิยาม อนุกรมซึ่งมีพจน์ที่มีเครื่องหมายเป็นบวกและลบสลับกัน เรียกว่า อนุกรมสลับ (alternating series) โดยเขียนได้สองแบบ คือ

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots + (-1)^{k-1} a_k + \ldots$$

หรือ $$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + \ldots + (-1)^k a_k + \ldots$$

เช่น $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n = 3 - 9 + 27 - 81 + \ldots$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \ldots$

ทฤษฎีบท อนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ และ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ ลู่เข้า

1. $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge \ldots \ge a_k \ge \ldots$
2. $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

นิยาม ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่เข้า จะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบสมบูรณ์ (converges absolutely) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออกจะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (converges conditionally)

2.2.6 **อนุกรมกำลัง**(Power Series)

นิยาม ถ้า $c_0, c_1, c_2, \ldots$ เป็นค่าคงที่ และ x เป็นตัวแปรแล้ว อนุกรมในรูปแบบ

$$\sum_{k=o}^{\infty} C_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k + \ldots$$

เรียกว่า อนุกรมกำลัง (power series) เช่น

$$\sum_{k=o}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$\sum_{k=o}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

ถ้า $c_0 = 0$ อนุกรมกำลังอยู่ในรูปแบบ $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ และถ้า $c_1 = 0$ ด้วย อนุกรมกำลังคือ $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$

อนุกรมกำลัง เหมือนกับการเขียนเป็นพหุนาม ของพจน์จำนวนไม่จำกัด ถ้า $c_n = 0$ ทุก $n > N$ แล้วอนุกรมกำลัง คือพหุนามดีกรีไม่เกิน N เช่น

$$2 - 3x + 4x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

เมื่อ $c_0 = 2, c_1 = -3, c_2 = 4$ และ $c_n = 0$ เมื่อ $n \geq 3$ เนื่องจากค่าของแต่ละพจน์กำลังขึ้นกับค่าของ x ดังนั้นลักษณะการลู่เข้าของอนุกรมกำลังจะขึ้นกับค่าของ x

ทฤษฎีบท ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ เป็นอนุกรมกำลัง แล้วหนึ่งในเงื่อนไขต่อไปนี้เท่านั้นที่จะเป็นจริง

1) อนุกรมลู่เข้าสำหรับ $x = 0$ ค่าเดียวเท่านั้น

2) อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุกค่าของ x

3) มีจำนวน $R > 0$ ซึ่งอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $|x| < R$ และลู่ออกเมื่อ $|x| > R$

ค่าของ R เรียกว่า รัศมีการลู่เข้า(radius of convergence) ของอนุกรม

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ลู่เข้าสำหรับ $x = 0$ เท่านั้น แล้ว $R = 0$

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ลู่เข้าสำหรับทุกค่าของ x แล้ว $R = \infty$

นั่นคือ ทุกอนุกรมกำลังมีรัศมีการลู่เข้า R ซึ่งไม่ใช่ค่าลบ หรือ เป็น ∞ ได้ เซตของค่าของ x ซึ่ง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ลู่เข้าเรียกว่าช่วงแห่งการลู่เข้า (Internal of Convergence) ของอนุกรม ช่วงแห่งการลู่เข้าจะเป็นแบบใดแบบหนึ่งของรูปแบบต่อไปนี้

$[0,0], (-R, R), [-R, R), (-R, R], [-R, R], (-\infty, \infty)$

$[0,0]$ $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

$(-1,1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$[-1,1)$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$(-1,1]$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^n)}{n}$

$[1,1]$ $\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

$(-\infty,\infty)$ $\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

การหารัศมีการลู่เข้า R

หาได้ 2 วิธีคือ

วิธีที่ 1 $\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$

ถ้า R = 0 แล้วได้ว่าอนุกรมกำลังลู่เข้าเฉพาะที่ $x = x_0$ เท่านั้น

วิธีที่ 2 $\quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{|C_n|}}$

ถ้า R = 0 แล้วได้ว่าอนุกรมกำลังลู่เข้าเฉพาะที่ $x = x_0$ เท่านั้น

1. **อนุกรมกำลังใน** x-x_0

ถ้า x_0 เป็นค่าคงที่ และแทน x ด้วย $x-x_0$ ใน $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ ได้อนุกรมกำลังในรูปแบบ

$\sum_{n=o}^{\infty}C_n(x-x_0)^n = c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots$ เรียก อนุกรมกำลังในพจน์ $x-x_0$ เช่น

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k+1}=1+\frac{(x-1)}{2}+\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(x-1)^3}{4}+\ldots;\ x_0=1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x+3)^k}{k!}=1-(x+3)+\frac{(x+3)^2}{2!}-\frac{(x+3)^3}{3!}+\ldots;\ x_0=-3$$

การลู่เข้าจะลู่เข้าในช่วงที่มี $x-x_0$ เป็นศูนย์กลาง

__ตัวอย่างที่2.8__ จงหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-5)^k}{k^2}$

__วิธีทำ__ โดยนัยทั่วไปของการทดสอบอัตราส่วน

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{k+1}\big/(k+1)^2}{(x-5)^k\big/k^2}\right|$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left| \frac{(x-5)^{k+1}}{(k+1)^2} \bullet \frac{k^2}{(x-5)^k} \right|$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left| (x-5) \bullet \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \right|$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left| (x-5) \bullet \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \right)^2 \right| = |x-5|$$

ลู่เข้าถ้า $|x-5| < 1$ ลู่ออกถ้า $|x-5| > 1$ หรือลู่ออกเมื่อ $-1 < x-5 < 1$ หรือ $4 < x < 6$ และลู่ ออกถ้า $x < 4$ หรือ $x > 6$

พิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกที่ $x = 4$ และ$x = 6$

ที่ x=4 ได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$

$a_k = \frac{1}{k^2} > \frac{1}{(k+1)^2} = a_{k+1}$ และ $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^2} = 0$

ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าโดยการทดสอบอนุกรมสลับ ที่ $x = 6$ ได้ว่า

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

เป็นอนุกรม p ซึ่ง $p = 2 > 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow$ ลู่เข้า

ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าในช่วง[4,6] และรัศมีการลู่เข้า $R = 1$ ผ่านศูนย์กลางคือ $x_0 = 5$

2. การหาอนุพันธ์ของอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=o}^{\infty} C_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n + \ldots$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=o}^{\infty} C_n x^n \right) = \frac{d}{dx} \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \right)$$

$$= \frac{dc_0}{dx} + \frac{dc_1 x}{dx} + \frac{dc_2 x^2}{dx} + \ldots + \frac{dc_n x^n}{dx} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} c_n x^n \right)$$

$$= c_0 + 2c_2 x + 3c_2 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(c_n x^n \right)$

ดัชนี ของอนุพันธ์เมื่อเริ่มต้นเป็น 1 ไม่ใช่ 0 เพราะอนุพันธ์ ของ $c_0 x^0$ เป็น 0

ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทการหาอนุพันธ์ของอนุกรมกำลัง(DifferentiationTheorem of Power Series)
ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่มีรัศมีการลู่เข้า $R > 0$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเดียวกัน และ $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n x^n\right)$ เมื่อ $|x| < R$ จากทฤษฎีได้ว่ารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ เหมือนกัน แต่มิได้หมายความว่าช่วงของการลู่เข้าเหมือนกัน เช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ เป็นอนุพันธ์ของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ช่วงของการลู่เข้าคือ $[-1,1)$, $R = 1 > 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่ง $r = x$ ซึ่ งลู่เข้าเมื่อ $|x| < 1$ ช่วงของการลู่เข้าคือ $(-1,1)$, $R = 1 > 0$

ทฤษฎีบท สมมุติอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ มีรัศมีการลู่เข้า $R > 0$ ให้ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ เมื่อ $-R < x < R$ แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ทุกลำดับบน $(-R, R)$ และ

$$f^{(n)}(0) = n!c_n \quad \text{เมื่อ} \quad n \geq 0$$

สรุปได้ว่า $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ เมื่อ $-R < x < R$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n 0^n = c_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \qquad f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n 0^{n-1} = 1c_1 = 1!c_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \qquad f''(0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n 0^{n-2} = 2!c_2$$

$$f^{(n)}(0) = n!c_n \qquad \text{หรือ } c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

บทแทรก ให้ R>0สมมุติ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ เป็นอนุกรมอนันต์ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $-R < x < R$

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ เมื่อ $-R < x < R$ แล้ว $c_n = b_n$ สำหรับแต่ละ $n \geq 0$

3. **การอินทิเกรตอนุกรมกำลัง**(Integration of Power Series)

จากการหาอนุพันธ์ของอนุกรมอนันต์ คือการหาอนุพันธ์ทีละพจน์ ดังนั้นการอินทิเกรตอนุกรมอนันต์ คือหาอินทิเกรตทีละพจน์

ทฤษฎีบท การอินทิเกรตอนุกรมกำลัง

ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่มีรัศมีการลู่เข้า $R > 0$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_n}{n+1}\right)^{x^{n+1}}$ มีรัศมีการลู่เข้าเดียวกัน และ

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) dt = \sum_{n=o}^{\infty}\left(\int_0^x c_n t^n dt\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \text{ เมื่อ} |x| < R$$

2.2.7 **อนุกรมเทย์เลอร์**(Taylor Series)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{เมื่อ } -1 < x < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{เมื่อ } -1 < x < 1$$

$$\tan^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{เมื่อ } -1 < x < 1$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่ง ถ้า I เป็นช่วงเปิดที่มี 0 อยู่ด้วย และถ้า $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ สำหรับทุก x ใน I แล้วกล่าวได้ว่า มีอนุกรมกำลังที่แทน f บน I

นิยาม สมมุติ f หาอนุพันธ์ทุกอันดับได้ที่ 0 แล้วอนุกรมเทย์เลอร์ของ f คือ อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ อนุกรมเทย์เลอร์ตามนิยามนี้บางครั้งเรียกว่า อนุกรมแมคคลอริน

f เป็นอนุกรมกำลังบนช่วงเปิดที่มี 0 อยู่ด้วยโดย $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ สำหรับ x ใน I

และ $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ดังนั้น $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

อนุกรมกำลังที่แทนฟังก์ชันเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน ถ้า f เป็น พหุนาม ใดๆ โดย

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$

แล้ว f เป็นอนุกรมกำลังซึ่ง $c_j = 0$ เมื่อ $j > n$ และ พหุนาม อนุกรมเทย์เลอร์

1. **พหุนามเทย์เลอร์**(Taylor Polynomial)

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

เป็น $(n+1)st$ ผลบวกย่อยของ อนุกรมเทย์เลอร์ ของ f

$p_n(x)$ เป็นค่าประมาณของ $f(x)$

n^{th} เศษเหลือของเทย์เลอร์(Taylor remainder) r_n ของ f นิยามโดย

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

ถ้า $|r_n(x)|$ มีค่าน้อยๆ แล้ว $p_n(x)$ เป็นค่าประมาณ $f(x)$ ที่ดี

ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

ให้ n เป็น จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ(nonnegative integer) และสมมุติ $f^{(n+1)}(x)$ หาค่าได้ที่แต่ละ x ในช่วงเปิด I ที่มี 0 อยู่ด้วย สำหรับแต่ละ $x \neq 0$ ใน I มีจำนวน t_x ซึ่งมีค่าแน่นอนระหว่าง 0 และ x ซึ่ง

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(t_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

ดังนั้น $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$

เรียก สูตรของเทย์เลอร์(Taylor's Formula)

เรียก สูตรลากรองของเศษเหลือ(Lagrange Remainder Formula)

ถ้า $n = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) + f'(t_x)x$

หรือ $f(x) = -f(0) = f'(t_x)x$

ให้ a, b และ c แทนที่ $0, x$ และ t_x ตามลำดับ ได้ $f(b) - b(a) = f'(c)(b - a)$ ซึ่งคือทฤษฎีบทค่ามัชฌิม(Mean Value Theorem) นั่นเองเนื่องจาก $f(x) = p_n(x) + z_n(x)$ แล้วสำหรับ x ใด ๆ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0$$

ดังนั้นสามารถพิสูจน์ว่าอนุกรมเทย์เลอร์ของ f ลู่เข้าสู่ $f(x)$ โดยการแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0$

ถ้าฟังก์ชัน f สามารถ หาอนุพันธ์ได้ $n+1$ ครั้งบนช่วง I ที่มี 0 อยู่ด้วยและ $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$ สำหรับทุก x ใน I

2. **อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดใด ๆ**(Taylor Series About an Arbitrary Point)

ถ้า f มีอนุกรมเทย์เลอร์ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ แล้ว f มีอนุพันธ์ที่ 0 และนิยามในช่วงเปิดรอบ 0 เช่น

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{เมื่อ} \quad -1 < x < 1$$

ไม่มีอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \ln x$ เนื่องจาก $\ln x = \int \frac{1}{x} dx$ เมื่อ $x > 0$ $\ln x$ ไม่นิยามในช่วงเปิดรอบ 0 มีอนุกรมเทย์เลอร์ของ $\ln(1 + x)$

โดย $f(x) = \ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{n+1}$ เมื่อ $-1 < x < 1$

ถ้า $0 < x < 2$ แล้ว $-1 < x - 1 < 1$ และได้ว่า

$$\ln x = \ln(1 + (x - 1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{n+1} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < x < 2$$

เป็นอนุกรมกำลังซึ่งช่วงของการลู่เข้ามีศูนย์กลางอยู่ที่ 1 ไม่ 0 ในกรณีทั่วไป ต้องการหาฟังก์ชันในรูปแบบอนุกรมอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} c^n (x - a)^n$ ในพจน์ $(x - a)$ เมื่อ a เป็น จำนวนตรึง(fixed number)

ลักษณะสมบัติต่างๆ ของอนุกรมอนันต์ที่กล่าวมาแล้วยังคงเป็นจริงในกรณีนี้ และถ้า $a = 0$ แล้วจะได้รูปแบบเดิมที่กล่าวมาแล้ว ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่ a แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด a (Taylor series of f about the number a) และ พหุนามเทย์เลอร์ p_n อันดับที่ n ของ f รอบ a คือ

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(0)}{2}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - a)^n$$

และอันดับที่ n ของเศษเหลือเทย์เลอร์ r_n ของ f รอบ a คือ $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$

ทฤษฎีบท นัยทั่วไปของทฤษฎีบทของเทย์เลอร์(Generalized Taylor's Theorem)

ให้ n เป็น จำนวนเต็มบวก สมมุติ $f^{(n+1)}(x)$ หาค่าได้ที่แต่ x ในช่วงเปิด I ที่มี a อยู่ด้วยสำหรับแต่ละ $x \neq a$ ใน I มีจำนวน t_x ซึ่งอยู่ระหว่าง a และ x ซึ่ง สูตรของเทย์เลอร์ คือ

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(t_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ดังนั้น $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ เป็น สูตรเศษเหลือลากรอง

__ตัวอย่างที่2.9__ จงเขียนพหุนามของ $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ เป็นพหุนาม ในพจน์ $(x-2)$

__วิธีทำ__

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \qquad f(2) = 16 - 3 + 22 = 1$$

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 11 \qquad f'(2) = 24 - 36 + 11 = -1$$

$$f''(x) = 12x - 18 \qquad f''(2) = 24 - 18 = 6$$

$$f^{(3)}(x) = 12 \qquad f^{(3)}(2) = 12 = 12$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad f^{(n)}(2) = 0 = 0$$

$$f(x) = 1 + (-1)(x-2) + \frac{6}{2!}(x-2)^2 + \frac{12}{3}(x-2)^3$$

$$= 1 - (x-2) + 3(x-2)^2 + 2(x-2)^3$$

3. **อนุกรมทวินาม**(Binomial Series)

ถ้า s เป็น จำนวนจริงตรึงใด ๆ (any fixed real number) แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ รอบ 0 หรืออนุกรมแมคคลอริน สำหรับ $f(x) = (1+x)^s$ เรียกว่าฟังก์ชันทวินาม(binomial functions)

ให้ $s = \dfrac{1}{2}$ แล้ว $f(x) = (1+x)^{1/2}$

หา อนุกรมเทย์เลอร์ รอบ 0

$$f(x) = (1+x)^{1/2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} \qquad f''(0) = \frac{-1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)(1+x)^{-5/2} \qquad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)(1+x)^{-7/2} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$$

ในรูปทั่วไป

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-2n+3}{2}\right)^{-5/2}(1+x)^{(-2n+1)/2} \quad \text{เมื่อ } n \geq 2$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+3)}{2^n} \qquad \text{เมื่อ} n \geq 2$$

อนุกรมเทย์เลอร์ของ f คือ

$$1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+3)}{2^n n!}x^n$$

หรือ $1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}x^n$

โดย การทดสอบอัตราส่วน ได้ว่า รัศมีของการลู่เข้า คือ 1

นิยาม สัมประสิทธิ์ทวินาม(binomial coefficient) โดยสูตรดังนี้

$\binom{s}{0} = 1$ และ $\binom{s}{n} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots((s-(n-1))}{n!}$ เมื่อ $n \geq 1$

เช่น $\binom{s}{1} = s$ และ $\binom{s}{n} = \frac{s(s-1)}{2}$

ถ้า s เป็น จำนวนเต็มบวก(positive integer)

$$\binom{s}{n} = \frac{s!}{n!(s-n)!}$$

ใช้ สัมประสิทธิ์ทวินาม(binomial coefficient) แล้วเขียน อนุกรมเทย์เลอร์ ของ f ได้เป็น

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}x^n$ เรียก อนุกรมทวินาม สามารถแสดงได้ว่า

$$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}x^n \quad \begin{cases} -1 < x < 1 & \text{ถ้า} s \leq -1 \\ -1 < x \leq 1 & \text{ถ้า} -1 < s < 0 \text{ เมื่อ} \\ -1 \leq x \leq 1 & \text{ถ้า} s > 0 \text{ และ} s \text{ ไม่เป็น จำนวนเต็ม} \end{cases}$$

ทุกx ถ้าs เป็น จำนวนเต็มไม่ลบ

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)x^3 + \ldots$$

$$(1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}x^n$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)x^{2} + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)x^{3} + \ldots$$

2.3 Mathematica V.3

2.3.1 Running Mathematica

1. Notebook Interface

การรัน MATHEMATICA ด้วย

ดับเบิ้ลคลิก ที่ไอคอน Mathematica	การแสดงในรูปแบบกราฟฟิกสำหรับการเริ่มต้นMathematica
mathematica	คำสั่งระบบปฏิบัติการเพื่อสั่งเริ่มต้น Mathematica
การจบข้อความด้วย SHIFE-RETURN	การป้อน input สำหรับ Mathematica
เลือก Quit เมนู	การออกจาก Mathematica

ถ้าเราใช้คอมพิวเตอร์โดยผ่านทาง graphical interface เราต้องดับเบิ้ลคลิกที่ไอคอน Mathematica เพื่อการเริ่มต้นของ Mathematica แต่ถ้าเราใช้คอมพิวเตอร์โดยผ่านทางระบบปฏิบัติการโดยพื้นฐานเป็นข้อความ (textually baed O.S.) เราต้องพิมพ์คำสั่ง Mathematica เพื่อการเริ่มต้นของ Mathematica

เมื่อ Mathematica เริ่มทำงาน จะแสดงหน้าจอว่ างเพื่อให้เราทำการป้อน input ลงไป แล้วกดปุ่ม shift และ return (หมายถึง ปุ่ม enter) โดยจะกดปุ่ม shift ค้างเอาไว้แล้วกดปุ่ม return จากนั้น Mathematica จะทำการประมวลผล input และแสดงผลลัพธ์มาให้

เราเพียงพิมพ์ 4+5 แล้วกดปุ่ม shift-return จากนั้น Mathematica ทำการประมวลผล input แล้วผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงหลังข้อความ Out[1]= และจะเพิ่มข้อความ In[1]:= ขึ้นมา

```
In[1]  : = 4+5
Out[1] : = 9
```

ถ้าต้องการออกจาก Mathematica ทำได้โดยการเลือก Quit จากเมนูใน notebook interface

2. Text-Based Interface

การรัน Mathematica ด้วย text-based interface

Math	คำสั่งระบบปฏิบัติการเพื่อเริ่มต้น Mathematica
การจบข้อความด้วย SHIFT-RETURN	การป้อน input สำหรับ Mathematica ที่ใช้ในทุกระบบ
การจบข้อความด้วย RETURN	รูปแบบอย่างง่ายของการป้อน input ที่ใช้ได้ในทุกระบบ
เลือก Quit เมนู	การออกจาก Mathematica

เพื่อการเริ่มต้น Mathematica เราจะต้องพิมพ์คำสั่ง math ที่ O.S. promt ในบางระบบอาจจะเริ่มต้น Mathematica ด้วยการดับเบิ้ลคลิกที่ไอคอน Mathematica kernel

เมื่อ Mathematica เริ่มต้นการทำงานมันจะพิมพ์ In[1]:= ขึ้นมาเพื่อเป็นการบอกว่าพร้อมสำหรับการป้อน input แล้ว และเมื่อทำการป้อน input เสร็จในบางระบบจะกดปุ่ม shift-return บางระบบจะกดปุ่ม return (หรือ enter) เพียงปุ่มเดียว หลังจากนั้น Mathematica จะทำการประมวลผล input และแสดงผลลัพธ์หลังข้อความ Out[1]:=

สำหรับการออกจาก Mathematica นั้นทำได้โดยการกด Control-D หรือพิมพ์ Quit[ ] ที่ input prompt

2.3.2 Numerical calculations

1. **เลขคณิต** (Arithemtic)

เราสามารถจัดการเกี่ยวกับเลขคณิตได้ด้วย Mathematica ดังเช่นเดียวกับการใช้เครื่องคิดเลข

ตัวอย่าง เช่น

```
In[1]    : = 4.5+6.1
Out[1] : = 10.6
```

-แสดงผลรวมของจำนวน 2 จำนวน

```
In[2]    : = 2.5/5^2
Out[2] : =0.1
```

-เครื่องหมาย (/) แทนการหาร และเครื่องหมาย (^) แทนการยกกำลัง

```
In[3]    : = 4 5 6
Out[3] : =120
```

-ใน Mathematica การเว้นช่องว่าง หมายถึง การคูณ แต่สามารถใช้เครื่องหมาย (*)ได้ถ้าต้องการ

การดำเนินการเกี่ยวกับเรขาคณิตใน Mathematica

1. x^y	การยกกำลัง
2. –x	จำนวนลบ
3. x/y	การหาร
4. x y z หรือ x*y*z	การคูณ
5. x+y+z	การบวก

การดำเนินการ เลขคณิตใน Mathematica จะถูกจับกลุ่มตามแบบแผนมาตรฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น 3^2+6 จะหมายถึง (3^2)+6 ไม่ใช่ 3^(2+6) เราสามารถควบคุมการจับกลุ่มได้โดยใช้เครื่องหมาย ( ) เพื่อให้แน่ใจ

```
In[1]   : = 3^2+6
Out[1] : = 15


In[1]   : = (3^2)+6
Out[1] : = 15
```

-จะเห็นว่าการป้อน input ทั้งสองแบบนี้จะได้ output เท่ากัน

2. **ค่าที่แท้จริงและค่าประมาณ** (Exact and Approximate Results)

ในการใช้เครื่องคิดเลขนั้น ผลลัพธ์ที่ได้นั้นมีความถูกต้องเพียงบางส่วนเท่านั้น นั่นคือ เครื่องคิดเลขจะแสดงผลลัพธ์ถึงตำแหน่งที่ 10 (แล้วแต่ขนาดของหน้าปัดเครื่องคิดเลข) ซึ่งผลลัพธ์จริง ๆ อาจจะมีถึงตำแหน่งที่ 20 ก็ได้

สำหรับใน Mathematica จะให้ค่าที่แท้จริงของผลลัพธ์ เช่น ผลลัพธ์ของ 2^{100} ค่าที่แท้จริงมีถึง 31 ตำแหน่ง

```
In[1]   : = 2^100
Out[1] : = 1267650600228229401496703205376
```

แต่เราสามาถบอกให้ Mathematica แสดงผลลัพธ์เป็นค่าโดยประมาณเชิงตัวเลข ได้โดยพิมพ์ //N หลังจากการป้อน input (N ต้องเป็นอักษรตัวพิมพ์ใหญ่) เช่น

In[2] : = 2^100//N

Out[2] : = 1.2765×10^{30}

ในการป้อน input ถ้าเราพิมพ์เลขจำนวนเต็ม เช่น 7,9,10,... Mathematica จะสันนิษฐานว่าจำนวนนั้นเป็นค่าที่แท้จริง (exact value) แต่ถ้าพิมพ์จำนวนที่มีจุดทศนิยม เช่น 2.5,1.23,.... Mathematica จะสันนิษฐานว่าจำนวนนั้นมีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ถูกพิมพ์

In[1] : =400/58

Out[1] : = $\frac{200}{29}$

-เราป้อน input เป็นอัตราส่วนของจำนวนเต็ม (หรือค่าที่แท้จริง) output จะแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการลดทอนเศษส่วน

```
In[2]   : = 451.5/61
Out[2] : = 7.40164
```

-เมื่อไรก็ตามที่ป้อน input เป็นจำนวน ที่มีจุดทศนิยม Mathematica จะแสดงผลลัพธ์เป็นค่าประมาณ

3. **ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์** (Some Mathematical Functions)

ใน Mathematica ได้รวบรวมฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ไว้มากมาย ที่นำมานี้เป็นเพียงบางส่วนของฟังก์ชันทั้งหมด ที่มีการใช้กันทั่วไป

Sqrt[x]	รากของ x ($\sqrt{x}$)
Exp[x]	เอ็กซ์โปเนนเชียล (e^x)
Log[x]	ลอการิทึมธรรมชาติ ($\log_e x$)
Log[b,x]	ลอการิทึมฐาน b ($\log_b x$)
Sin[x],Cos[x],Tan[x]	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ArcSin[x],ArcCos[x],ArcTan[x]	ส่วนกลับของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
$n!$	แฟคทอเรียล (n เป็นจำนวนเต็ม)
Abs[x]	ค่าสัมบูรณ์ของ x
Round[x]	จำนวนเต็มที่ใกล้ x ที่สุด
Mod[x]	n มอดดูโล m
Max[x,y,…],Min[x,y,…]	ค่าสูงสุด,ค่าต่ำสุดของ x,y,…

สิ่งสำคัญ 2 สิ่งที่เกี่ยวกับการใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ใน Mathematica ก็คือ

1. Argumentes ของฟังก์ชันจะต้องอยู่ภายในเครื่องหมาย [ ] (square braket)
2. ชื่อของฟังก์ชันจะต้องขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่

```
In[1]   : = Log[5.5]
Out[1] : = 1.70475
```

- นี่เป็นการหาค่าลอการิทึมของ 5.5 จะสังเกตเห็นว่าชื่อฟังก์ชันขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ (Log)และ argument (นั่นคือ 5.5)อยู่ภายในเครื่องหมาย [ ]

สำหรับการคำนวณของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ Mathematica พยายามที่จะแสดงผลลัพธ์เป็นค่าที่แท้จริง เช่น

```
In[2]   : = Sqrt[25]
Out[2] : = 5
```

-ค่าของรากที่สองของ 16 เท่ากับ 4 เป็นค่าที่แท้จริงซึ่งเป็นจำนวนเต็มพอดี สังเกตว่าชื่อของค่าคงที่ทั้งหมดจะต้องขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่

```
In[3]   : = Sqrt[3.]
Out[3] : = 1.73205
```

- การที่เราป้อน argument เป็นเลขที่มีจุดทศนิยม (2.) เป็นการให้ Mathematica แสดงผลลัพธ์เป็นค่าประมาณเชิงตัวเลข หรืออาจจะพิมพ์ // N หลังจากป้อน input ผลลัพธ์ก็จะออกมาเหมือนกัน ดังนี้

```
In[4]   : = Sqrt[3]//N
Out[4] : = 1.73205
```

แต่ถ้าเราป้อน argument เป็นจำนวนเต็ม และไม่ได้จบด้วย //N แล้ว Mathematica จะแสดงผลลัพธ์เป็นค่าที่แท้จริงในรูปแบบของสัญลักษณ์ ดังนี้

In[5]   : = Sqrt[3]

Out[5] : = $\sqrt{3}$

แต่ถ้าเราป้อน argument เป็นจำนวนเต็ม และไม่ได้จบด้วย //N แล้ว Mathematica จะแสดงผลลัพธ์เป็นค่าที่แท้จริงในรูปแบบของสัญลักษณ์ ดังนี้

In[5]:=Sqrt[3]

Out[5]:= $\sqrt{3}$

พิจารณาตัวอย่างอื่น

In[6] : = 10!
Out[6] : = 3628800

แต่ถ้าจบด้วย // N จะได้

In[7] : = 10!//N
Out[7] : = 3.2688×10^{6}

ค่าคงที่ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้กันทั่วไป

Pi	$\pi = 3.14159$
E	$e = 2.71828$
Degree	$\frac{\pi}{180}$: การเปลี่ยนจากองศาเป็นเรเดียน
I	i= $\sqrt{-1}$
Infinity	∞

สังเกตว่าชื่อของค่าคงที่ทั้งหมดจะต้องขึ้นต้นด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่

In[8] : = 2*Pi
Out[8] : = 6.28319

-เป็นการหาค่าของ 2π

In[9] : = Sin[Pi]
Out[9] : = 0

-เป็นการหาค่าของ $\sin(\frac{\pi}{2})$ สังเกตว่า argument ของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะต้องเป็นเรเดียนเสมอ

```
In[10]    : = Sin[30 Degree]//N
Out[10]  : = 0.5
```

- Degree คือการเปลี่ยนองศาเป็นเรเดียน ในที่นี้คือการเปลี่ยน 30^0 เป็นเรเดียน $(30 \times \frac{\pi}{180})$ แล้วหาค่า Sin

4. **การคำนวณแบบกำหนดเอง** (Arbitary-Precision Calculations)

ใน Mathematica เราสามารถกำหนดจำนวนของตำแหน่งทศนิยม ที่ผลลัพธ์จะแสดงได้เองโดยใช้ ฟังก์ชันดังนี้

Expr // N หรือ N[expr]	ค่าประมาณเชิงตัวเลขของ expr
N[expr,n]	ค่าประมาณเชิงตัวเลขของ expr ที่แสดงทศนิยมถึงตำแหน่งที่ n

เช่น

```
In[1]    : = N[Pi]
Out[1] : = 3.14159
```

-จะแสดงค่าของ π ถึงทศนิยมที่มีนัยสำคัญ แต่ถ้าเรากำหนดตำแหน่งทศนิยมเอง จะได้ดังนี้

```
In[2]    : = N[Pi,30]
Out[2] : = 3.141592653589793238462643383328
```

หรือการหาค่าของ $\sqrt{7}$ ถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 30

```
In[3]    : = N[Sqrt[7],40]
Out[3] : = 2.645751311064590590501615753639260425710
```

5. **การคำนวณหาลิมิต**

ใน Mathematica การคำนวณหาลิมิตของฟังก์ชันรูปแบบของฟังก์ชันที่จะใช้มีลักษณะดังนี้

Limit[expr, $x \rightarrow x_0$]	หาค่าลิมิตของฟังก์ชันโดย x เข้าใกล้ x_0

ตัวอย่าง หาลิมิตของ $\dfrac{n}{(n+1)}$ โดยที่ n เข้าใกล้ 0

```
In[1]   : = Limit[n/{n+1},n -> 0]
Out[1] : = {0}
```

คำตอบที่ได้เท่ากับ 0

ตัวอย่าง หาลิมิตของ $\dfrac{\sin x}{x}$ โดยที่ x เข้าใกล้ 0

```
In[2]   : = Limit[Sin[x]/x,x -> 0]
Out[2] : =1
```

คำตอบที่ได้เท่ากับ 1

การหาลิมิตเข้าใกล้อนันต์ (infinity) จะใส่ในค่าที่ใกล้เข้าหาด้วย Infinity (ต้องขึ้นต้นด้วยตัวใหญ่)

ตัวอย่าง หาลิมิตของ $\dfrac{n}{(n+1)}$ โดยที่ n เข้าใกล้อนันต์

```
In[3]   : = Limit[n/{n+1},n -> Infinity]
Out[3] : = {1}
```

คำตอบที่ได้เท่ากับ 1

6. Sequence and Series

คำสั่งที่ใช้ในลำดับ (sequence)

Sequence[expr_1,expr_2,…]	รวมแต่ละพจน์ที่อยู่ในลำดับให้เป็นฟังก์ชันเดียว

2.4 VISUAL BASIC

ประวัติของภาษาเบสิกโดยย่อ

ภาษาเบสิกถูกคิดค้นขึ้นมาในปี ค.ศ.1963 โดย john kemeny และ thomas kurtrz แห่งสถาบัน Dartmouth College โดยมีจุดมุ่งหมายที่จะออกแบบภาษาเบสิกขึ้นมาเพื่อใช้สอนหลักการเขียนโปรแกรม โดยเน้นที่ความชัดเจนรวดเร็วและประสิทธิภาพในการเรียนรู้ พวกเข้าสามารถสร้างภาษาเบสิกได้เป็นผลสำเร็จ โดยยกเลิกการใช้ภาษาควบคุมงาน(Job Control Language) และหันมาใช้ภาษาสำหรับสร้างโปรแกรมอื่น ๆ โดยใชขั้นตอนการคอมไพล์และเชื่อมโยง เช่น ภาษาฟอร์แทรนและภาษาแอสแซมบลี จึงทำให้ภาเบสิกเป็นภาษาที่ง่ายต่อการใช้งานภาษาแรกที่เน้นให้ผู้ใช้สนใจขั้นตอนการทำงานในส่วนของฮาร์ดแวร์ ภาเบสิกในเวอร์ชั่นแรก ๆ มีคุณสมบัติต่าง ๆ หลายประการอันเป็นที่รู้จักกันทั่วไป อาทิเช่น ในแต่ละบรรทัดของโปรแกรมจะถูกขึ้นต้นด้วยหมายเลขบรรทัด ไม่มีการย่อหน้าในแต่ละกลุ่มคำสั่ง

คุณลักษณะของภาษาเบสิกดังที่กล่าวข้างต้นนั้น ก่อให้เกิดความยุ่งยากในการทำความเข้าใจขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม ซึ่งถูกเรียกว่าสปาเก็ตตี้โค้ด(spaghetti code) ที่เรียกเช่นนี้ก็เพราะว่าความต่อเนื่องของโปรแกรมจะถูกเชื่อมโยงกันกลับไปกลับมาคล้ายกับเส้นสปาเก็ตตี้บนจาน ถึงแม้จะเป็นโปรแกรมที่สั้น ๆ แต่ทำให้คุณลำบากในการทำความเข้าใจได้โดยง่าย จึงนับว่าเป็นความบังเอิญอย่างยิ่งที่ภาเบสิกยังคงเป็นที่ยอมรับจนถึงทุกวันนี้

ในปัจจุบันภาษาเบสิกถูกมองว่าเป็นภาษาเด็กเล่น ซึ่งไม่เหมาะสมกับงานโปรแกรมในปัจจุบัน แต่อย่างไรก็ดีภาเบสิกก็ยังคงถูกพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง จากภาษาที่ช้าไม่มีโครงสร้างและแปลโปรมแกรมทีละคำสั่ง กลายเป็นภาษาที่รวดเร็วมีโครงสร้างแน่นอน และแปลโปรแกรมภาษาชั้นสูง ทำให้มีความเหมาะสมในการสร้างแอปพลิเคชั่นต่าง ๆ ได้หลากหลายขึ้น เป็นผลให้ Hewlett Packard Company, Microsoft Corporation และอีกหลายบริษัทได้ผลิตเวอร์ชั่นต่าง ๆ ของภาษาเบสิกออกมา โดยมีการพัฒนารายละเอียดการใช้งานให้มีความก้าวหน้ายิ่งขึ้น

การพัฒนาของภาษาเบสิก

ความก้าวหน้าของภาษาเบสิกนั้นถูกพัฒนาควบคู่ไปกับการปฏิวัติทางคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล โดยในระหว่างคริสต์ทศวรรษที่ 1970 ไมโครซอฟต์ริเริ่มที่จะพัฒนาภาษาเบสิกเป็นตัวแปลภาษาพื้นฐานในไมโครโปรเซสเซอร์ของคอมพิวเตอร์ ต่อมาบริษัท Ratio Shack TRS80 ได้แนะนำภาษาเบสิก(และหลักการจัดการส่วนบุคคล) ให้แก่สาธารณชนได้รู้จักไมโครซอพต์เบสิกเวอร์ชั่นแรกยังคงถูกใช้จนมาถึงทุกวันนี้ โดยไม่ได้มีการดัดแปลงอะไรมากมาย โดยอยู่ในรูปของGW-BASIC ซึ่งเป็นตัวแปลภาษาที่อยู่ในระบบปฏิบัติการ MS-DOS เวอร์ชั่นล่าสุด

ถึงแม้ว่า GW-BASIC จะเป็นภาษาที่สามารถทำการคำนวณ และทำงานพื้นฐานง่าย ๆ ได้อย่างรวดเร็ว แต่อย่างไรก็ดี มันยังมีลักษณะรายละเอียดบางอย่างที่ดูคล้ายกับภาษาเด็กเล่นอยู่ดี มันมีลักษณะรายละเอียดบางอย่างที่ดูคล้ายกับภาษาเด็กเล่นอยู่ดี ซึ่งนักพัฒนาซอฟต์แวร์ที่ไม่สนใจจุดนี้จะนิยมเลือกใช้ภาษา GW-BASIC ในการผลิตซอฟต์แวร์ออกสู่ตลาดจึงทำให้ยูทิลิตี้บน MS-DOS ไม่ถูกเขียนขึ้นมาขายในรูปของแบตช์ไฟล์ เนื่องจากโปรแกรมจะทำงานช้าเกินไป ต้องมีโปรแกรมต้นแบบให้กับผู้ใช้ และยังเป็นการไม่จำเป็นเนื่องจากยังมีวิธีอื่น ๆ อีกหลายวิธีที่จะสร้างโปรแกรมเช่นนั้นขึ้นมา

ในปี ค.ศ.1982 การเกิดขึ้นของ Microsoft QuickBasic ทำให้เกิดการปฏิวัติ ภาษาเบสิกขึ้นมาและจะมีการจดลิขสิทธิ์ให้เป็นภาษาที่ใช้ในการพัฒนาบน MS-DOS ภาษา QuickBasic เป็นภาษาที่มีประสิทธิภาพในการตอบโต้กับผู้ใช้ และมีความรวดเร็วในการแปลชุดคำสั่งของโปรแกรม ซึ่งเป็นลักษณะเดิมของ GW-BASIC และมีการยกเลิกการใช้หมายเลขบรรทัดและเพิ่มลักษณะของโปรแกรมที่ทันสมัยเข้าไป อาทิเช่น มีโปรแกรมย่อย มีการกำหนดผู้ใช้ และชนิดของโครงสร้างข้อมูลมีกราฟิกที่ทันสมัยและจัดการเรื่องเสียงได้จนทำให้โปรแกรมเมอร์ภาษา QuickBasic มีความรู้สึกว่ากำลังใช้ภาษาที่ทันสมัยกว่า ภาษาซี ปาสคาล และฟอร์แทน ภาษา QuickBasic ยังมีข้อดีอื่น ๆ อีก เช่น สามารถเลือกที่จะรัดได้ทั้งแบบที่ทีละคำสั่ง หรือแบบแปลที่ละชุดคำสั่งได้โดยตัวมันเอง ซึ่งเป็นโปรแกรมที่เหมาะสมกับสภาพการตลาดในปัจจุบัน(ในปัจจุบันไมโครซอฟต์ก็ได้นำเอา QuickBasic ซึ่งเป็นเวอร์ชั่นที่รันแบบทีละคำสั่งของ QuickBasic มาเป็นส่วนหนึ่งของ MS-DOS)

Visual Basic

ในปัจจุบัน การปฏิวัติของไมโครซอฟต์วินโดวส์ ส่งผลดีทำให้เกิดความเป็นมาตรฐานในการจัดการสภาวะแวดล้อมของระบบในการดึงเอาความสามารถที่มีอยู่ในตัวไมโครโปรเซสเซอร์แบบล่าสุดของบริษัท Intel แต่สำหรับผู้ใช้งานแล้วล่ะก็ วินโดวส์ให้เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลมีความเป็นส่วนตัวและใช้งานง่ายมากขึ้น ในขณะเดียวกันนักเขียนโปรแกรมก็ต้องเรียนรู้หลักการเขียนโปรแกรมใหม่เข้ามา เพื่อจะสามารถพัฒนาโปรแกรมที่สามารถใช้งานบนวินโดวส์ได้และ Visual Basic ซึ่งเกิดจากการพัฒนาครั้งใหญ่ของภาษาเบสิกก็เป็นภาษาที่ทำให้การเรียนรู้ที่จะสร้างแอปพลิเคชั่นบนวินโดวส์กลายเป็นเรื่องง่าย

ภาษาเบสิกมีการเปลี่ยนแปลงไปมากในช่วง 2 ทศวรรษที่ผ่านมา ในขณะที่ภาษา Visual Basic สำหรับ Window เวอร์ชั่นภาษาไทย 5 ได้ถูกสร้างขึ้นมาโดยมีโปรแกรมประยุกต์บน Window เป็นพัน ๆโปรแกรมที่ถูกสร้างขึ้นมาโดยใช้ภาษา Visual Basic นี้และยังมีอีกหลายโปรแกรมที่กำลังจะถูกพัฒนาโดยภาษา Visual Basic 5 ซึ่งเป็นเวอร์ชั่นที่ทันสมัยมาก

คุณสมบัติและข้อดีของ Visual Basic for Windows

Visual Basic for Windows มีคุณสมบัติที่ดีหลายประการ เป็นภาษาในฝันสำหรับการพัฒนาโปรแกรมต่าง ๆ บนวินโดวส์ คุณสมบัติซึ่งช่วยให้การเขียนโปรแกรมง่ายขึ้นประกอบไปด้วยเครื่องมือ(Tools) หลากหลายอันจะช่วยในการเขียนโปรแกรมแบบซับซ้อนบนวินโดวส์ให้สำเร็จได้โดยง่ายและรวดเร็ว

Visual Basic for Windows ยังคงไว้ด้วยข้อดีต่าง ๆ ของ Microsoft QuickBasic และยังเพิ่มเติมคุณสมบัติอันหลากหลายที่จะสนับสนุนให้ตัวมันเองเป็นโปรแกรมพื้นฐานสำหรับการพัฒนาโปรแกรมบน Microsoft Windows อีกด้วย ตัวอย่างเช่น กราฟิกเอาต์พุตที่สามารถถูกส่งออกไปยัง ส่วนต่าง ๆ ของ วินโดวส์ หรือแม้กระทั่งไปยังเครื่องพิมพ์ คุณสามารถถกส่งออกไปยังส่วนต่าง ๆ ของวินโดวส์ หรือแม้กระทั่งไปยังเครื่องพิมพ์ คุณสามารถเลือกสีสำหรับทำงานกราฟิกได้มากกว่า 16 ล้านเฉดสี(โดย วินโดวส์จะจัดการแสดงผลกราฟิกนั้นตามที่คุณต้องการ หรือมันจะลดลงมาได้เท่าที่ฮาร์ดแวร์ของเครื่องนั้น ๆ จะสนับสนุนในการแสดงผลได้) โดยที่คุณไม่ต้องกังวลในส่วนนี้ว่ามีกระบวนในการจัดการอย่างไร ไม่ว่าในตอนนี้หรือต่อไปในอนาคต

ข้อดีเหนือ QuickBasic อีกอย่างก็คือการจัดการตัวแปรใน Visual Basic มีกฏเกณฑ์ซึ่งง่ายในการเข้าใจและจดจำ เพราะว่ามันถูกพัฒนาให้ง่าย และมีประสิทธิภาพ โดยที่โปรแกรมของ Visual Basic จ ะประกอบไปด้วย ไฟล์ 2 แบบ คือ Form และ Module ยกเว้นเมื่อ declare globally ที่ตัวแปรอื่น และค่าคงที่ในโปรแกรมย่อย และฟงก์ชันนั้นจะเป็น local สำหรับกระบวนการที่เกิดขึ้น(บทต่าง ๆ ตรงนี้คุณจะเข้าใจเองเมื่อคุณมีประสบการณ์ในการใช้งาน Visual Basic สักพัก) ข้อดีอีกอย่างของ Visual Basic สำหรับผู้ที่จะมาเป็นนักโปรแกรมผู้ยิ่งใหญ่ก็คือ ถ้าคุณมีความคุ้นเคยอยู่กับ QuickBasic อยู่แล้วก็ยิ่งจะง่ายต่อการใช้งาน Visual Basic และจะยิ่งดีขึ้นถ้าคุณมีความรู้เล็ก ๆ น้อย ๆ สำหรับการเขียนโปรแกรม Visual Basic ได้อย่างแท้จริง และ Visual Basic จะกลายเป็นเครื่องมือที่ดีที่สุดที่จะช่วยให้คุณวามารถเขียนโปรแกรมบนวินโดวส์ได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ และถึงแม้คุณจะมีความเชี่ยวชาในการใช้ภาษา C พัฒนาโปรแกรมบนวินโดวส์ก็ตาม คุณก็จะชอบการเรียกใช้งาน กระบวนการ interface-development ที่ Visual Basic มีให้

ภาษาเบสิกได้ถูกพัฒนามาให้เป็นภาษาสำหรับการพัฒนาโปรแกรมแบบตอบโต้ (interaction)ดังตัวอย่างเช่น เป็นการง่ายที่จะใช้ GW-Basic รันคำสั่งเพียง 2-3 คำสั่งเพื่อดูว่ามันทำงานอย่างไร มากกว่าที่จะเปิดตำราดูเอกสารมากมาย หลักการพัฒนางานแบบโต้ตอบนี้ ได้ถูกนำมาใช้ในการสร้างระบบงาน User interface สำหรับโปรแกรมของคุณบนวินโดวส์ โดยใช้ Visual Basic

คงจะไม่สามารถเปรียบเทียบได้ว่าการออกแบบโปรแกรมด้วย Visual Basic นั้นจะดีกว่าอย่างไร จนกว่าคุณจะลืมว่า interface design progress ของโปรแกรมเก่า ๆ ที่คุณเขียนมานานแล้วนั้นมีกระบวนการทำงานแต่ละส่วนอย่างไร เมื่อนั้นคุณจะพบว่าการใช้โปรแกรมแบบโต้ตอบของ Visual Basic นั้นดีกว่า ง่ายกว่าและดีกว่าอย่างไร

Dynamic Link Libraries ของ Windows

ข้อดีอีกข้อของ Visual Basic ก็คือความสามารถในการเพิ่มขยายของตัวมันเอง ถึงแม้ Visual Basic for Windows จะทำงานได้อย่างรวดเร็วเพียงใดก็ตาม แต่มนบางทีนั้น Optimized Code ของภาษา C นั้น จะสามารถทำงานได้เร็วกว่า ถ้าคุณมี C Compiler คุณก็จะสามารถสร้าง Dynamic Link Librariesใช้เองได้

ประโยชน์ของ DLL เหล่านี้จะ เกิดขึ้นกับคุณ เพราะมันเป็นส่วนเพิ่มประสิทธิภาพที่ระบบปฏิบัติการ Windows มีให้กับคุณอยู่แล้ว Microsoft Windows Software Development Kit (SDK) ได้อธิบายฟงัก์ชันต่าง ๆ เหล่านี้ไว้ถึงกระบวนการทำงาน และยังให้รูปแบบในการเรียกใช้ฟงัก์ชันเหล่านี้มาใช้งานจากภาษา C อีกด้วย นอกจากนี้ Visual Basic ในรุ่น Professional ยังได้รวม Special Help ซึ่งได้บรรจุการเรียกใช้ Standard DLLs ของ Windows ไว้ให้ด้วยแล้ว และเมื่อคุณลองใช้ Visual Basic เรียกเอาฟงัก์ชันเหล่านี้มาใช้งาน คุณก็จะเข้าใจว่า Visual Basic นั้นช่วยให้คุณประหยัดเวลาในการพัฒนาโปรแกรมเพียงใด

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 ระบบงาน

3.1.1 ส่วนนำเข้าข้อมูล

ข้อมูลที่นำเข้าคือ ฟังก์ชันของลำดับ อนันต์ ฟังก์ชันของอนุกรมอนันต์ ฟังก์ชันของอนุกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์ พร้อมทั้งดัชนีของฟังก์ชัน

3.1.2 ส่วนวิเคราะห์และการประมวลผล

จากส่วนนำเข้าข้อมูล นำข้อมูลมาทดสอบการลู่เข้าโดยใช้วิธีการทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล ก ารทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบอนุกรมสลับ ได้ผลเฉลยคือลำดับอนันต์หรืออนุกรมอนันต์นั้นลู่เข้าหรือลู่ออกและถ้าลำดับอนันต์หรืออนุกรมอนันต์ลู่เข้าจะลู่เข้าสู่ค่าที่ต้องการ

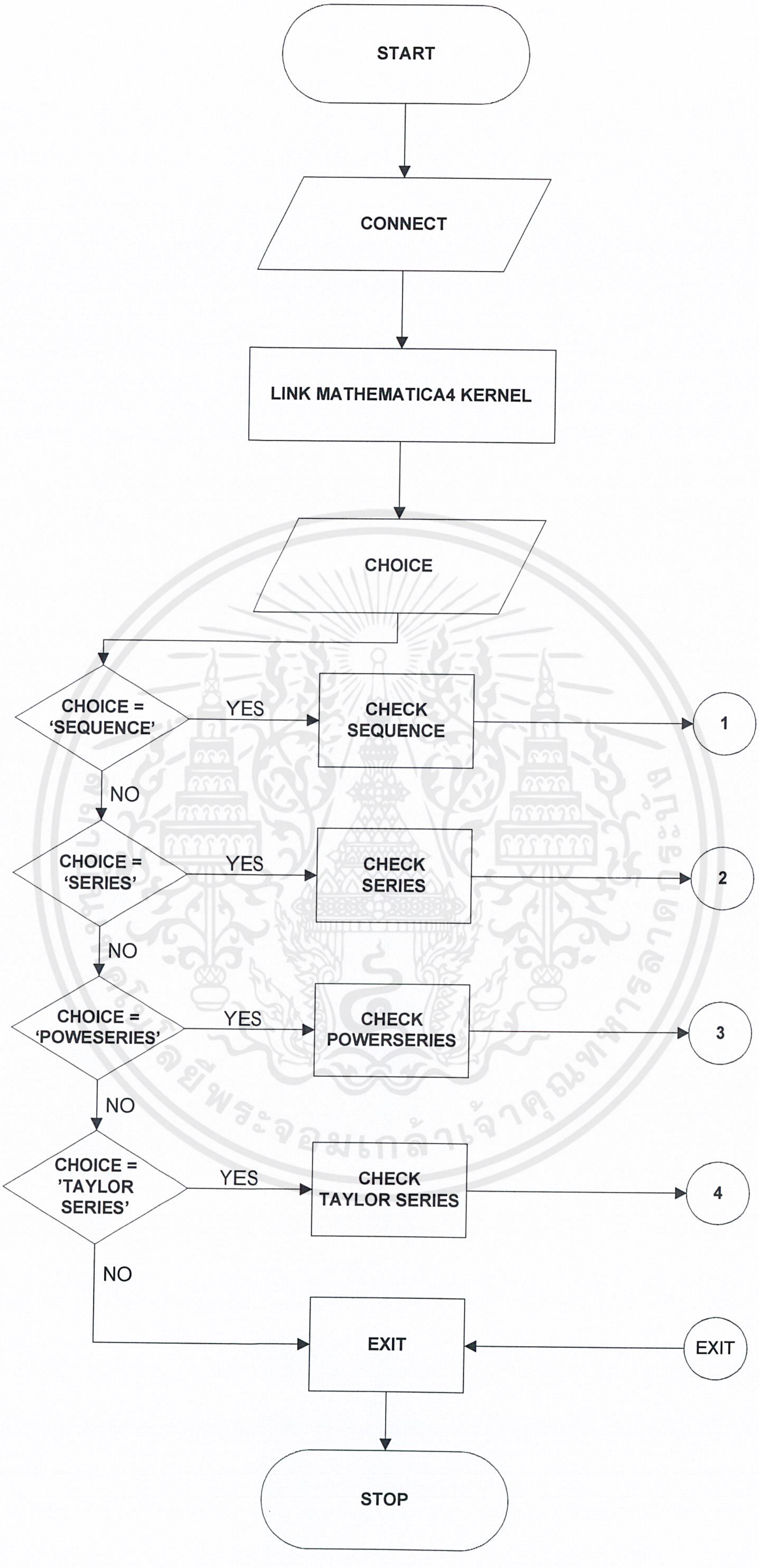
3.1.3 ส่วนแสดงผล

นำผลเฉลยที่ได้มาแสดงผลทางจอภาพ โดยจะมีผลเฉลยคือ ลำดับอนันต์หรืออนุกรมอนันต์ลู่เข้าหรือลู่ออก และถ้าลำดับอนันต์หรืออนุกรมอนันต์ลู่เข้าจะลู่เข้าสู่ค่าใด

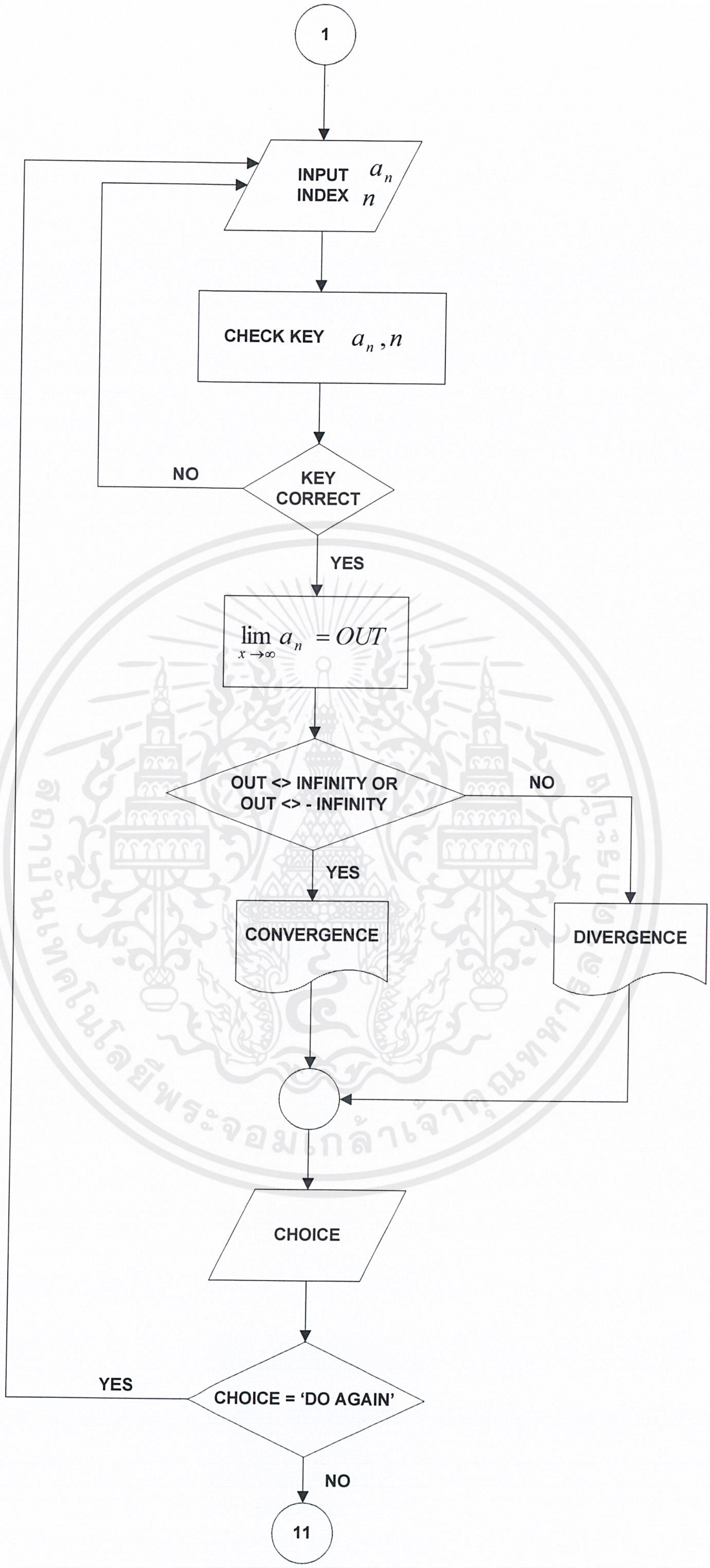
3.2 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. นำเข้าข้อมูล โดยข้อมูลที่นำเข้าจะเป็นลำดับอนันต์ อนุกรมอนันต์ อนุกรมกำลังและอนุกรมเทย์เลอร์ตามที่ต้องการ
2. นำเข้าข้อมูล โดยข้อมูลที่นำเข้าคือฟังก์ชันของลำดับอนันต์ ฟังก์ชันอนุกรมอนันต์ ฟังก์ชันของอนุกรมกำลัง ฟังก์ชันของอนุกรมเทย์เทอร์ และค่าดัชนีของฟังก์ชัน
3. ทำการทดสอบการลู่เข้าของลำดับอนันต์ อนุกรมอนันต์ อนุกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์ โดยจะผ่านกระบวนการทดสอบ วิธีการทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบอนุกรมสลับ แล้วแต่ลักษณะของฟังก์ชัน และถ้าลำดับอนันต์หรืออนุกรมอนันต์ลู่เข้าจะหาค่าการลู่เข้าสู่ค่าใด
4. นำผลเฉลยการลู่เข้าหรือลู่ออกของลำดับอนันต์ อนุกรมอนันต์ อนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์ มาแสดงผลทางจอภาพ
5. จบการทำงาน

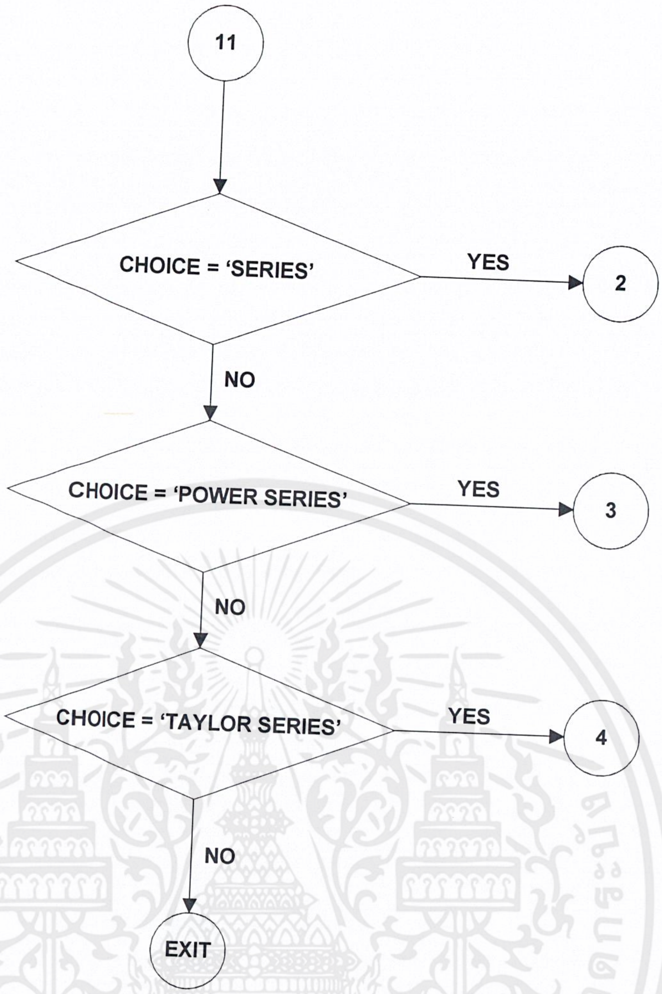
แสดงดังรูป Flow Chart ดังนี้



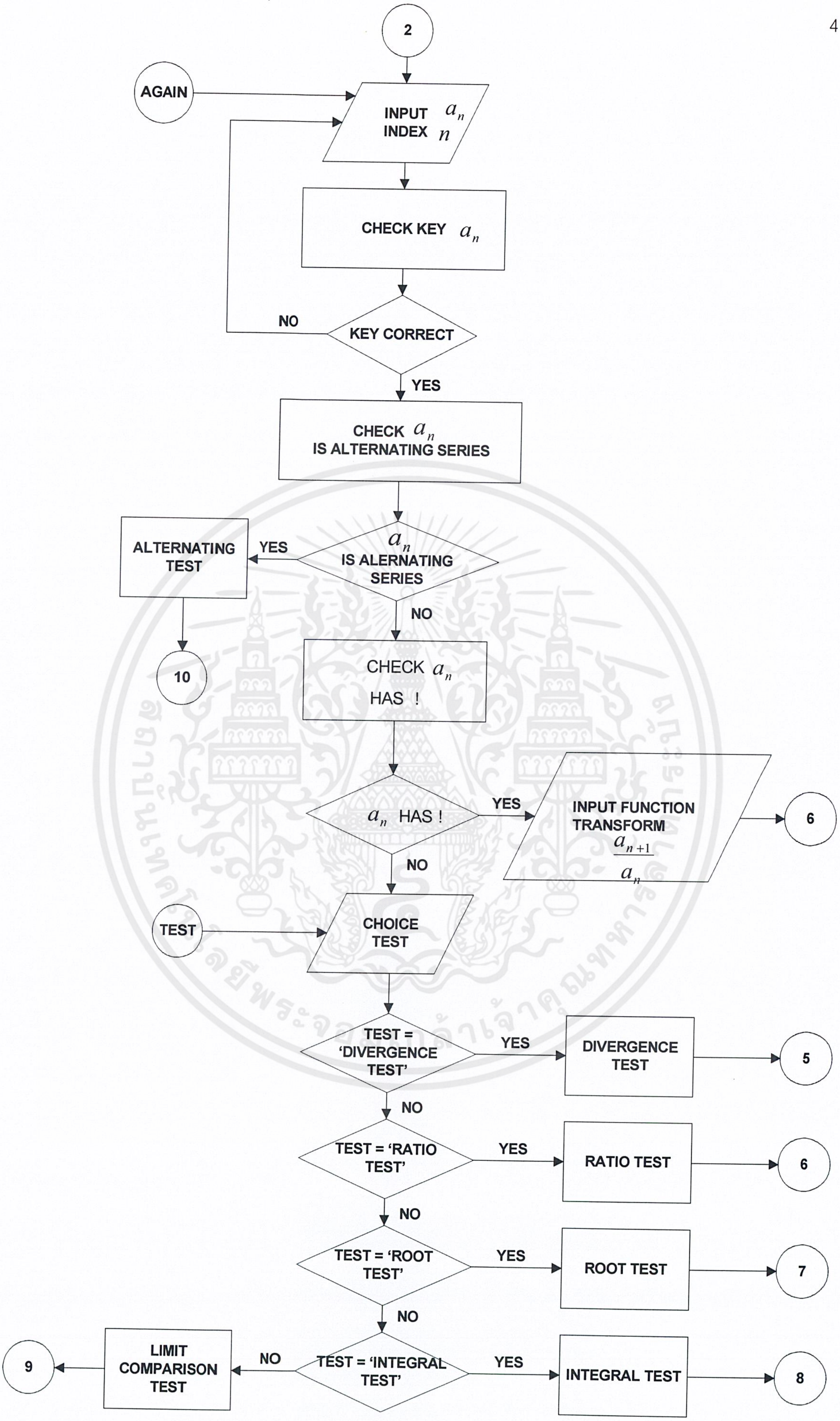
รูปที่ 3.1 Flow Chart **แสดงหน้าจอหลัก**



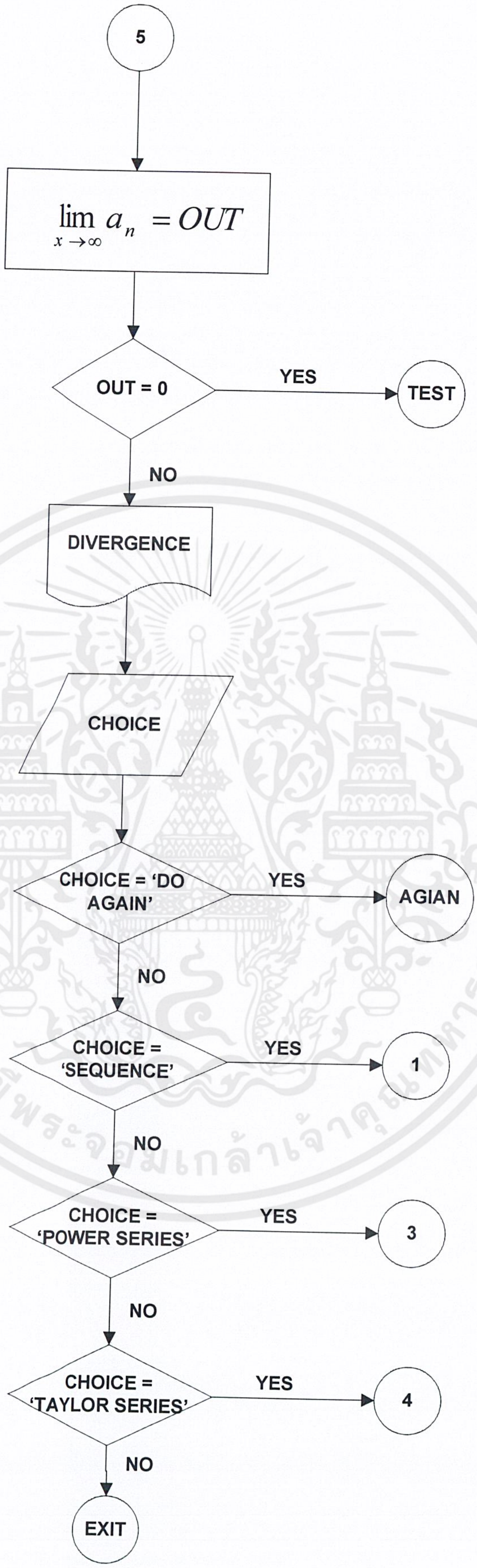
รูปที่ 3.2 Flow Chart **แสดง** Sequence



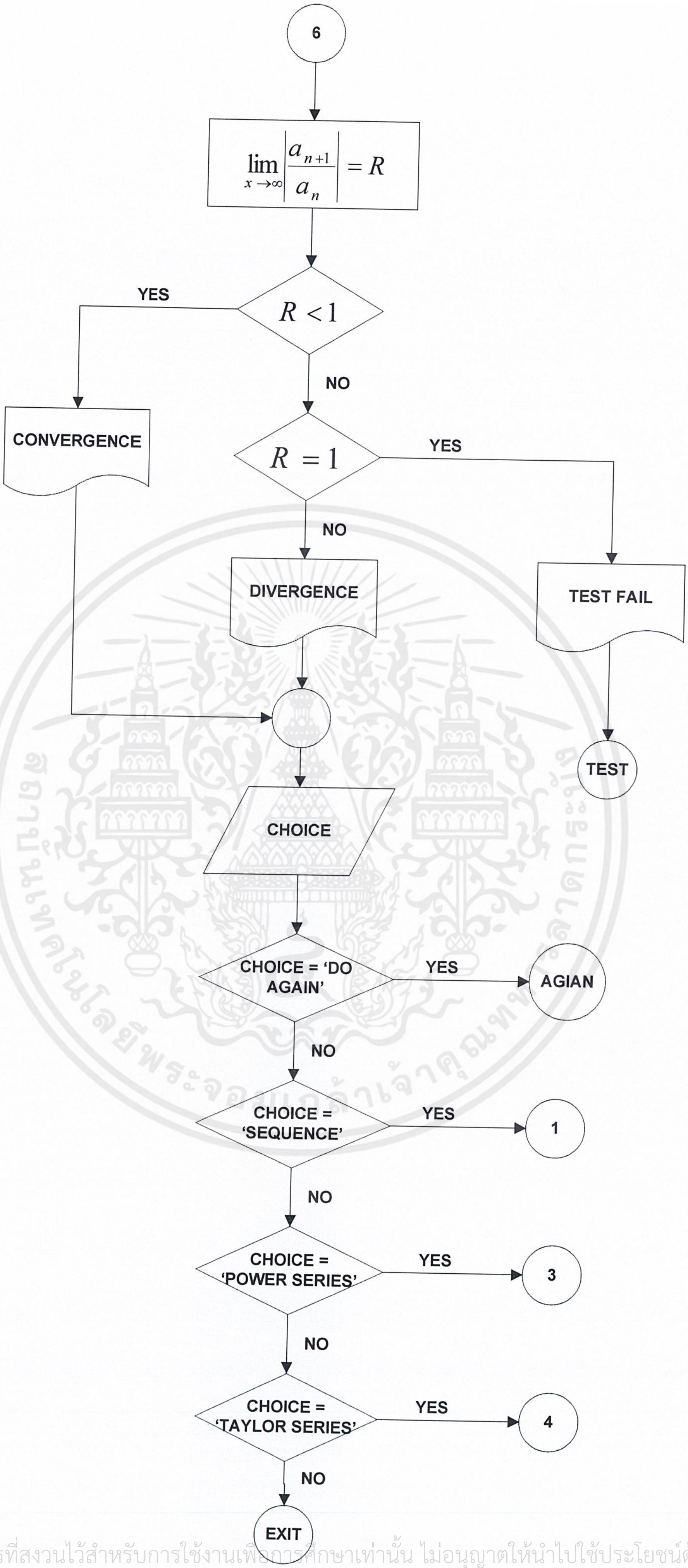
รูปที่ 3.3 Flowchart แสดง Sequence(ต่อ)



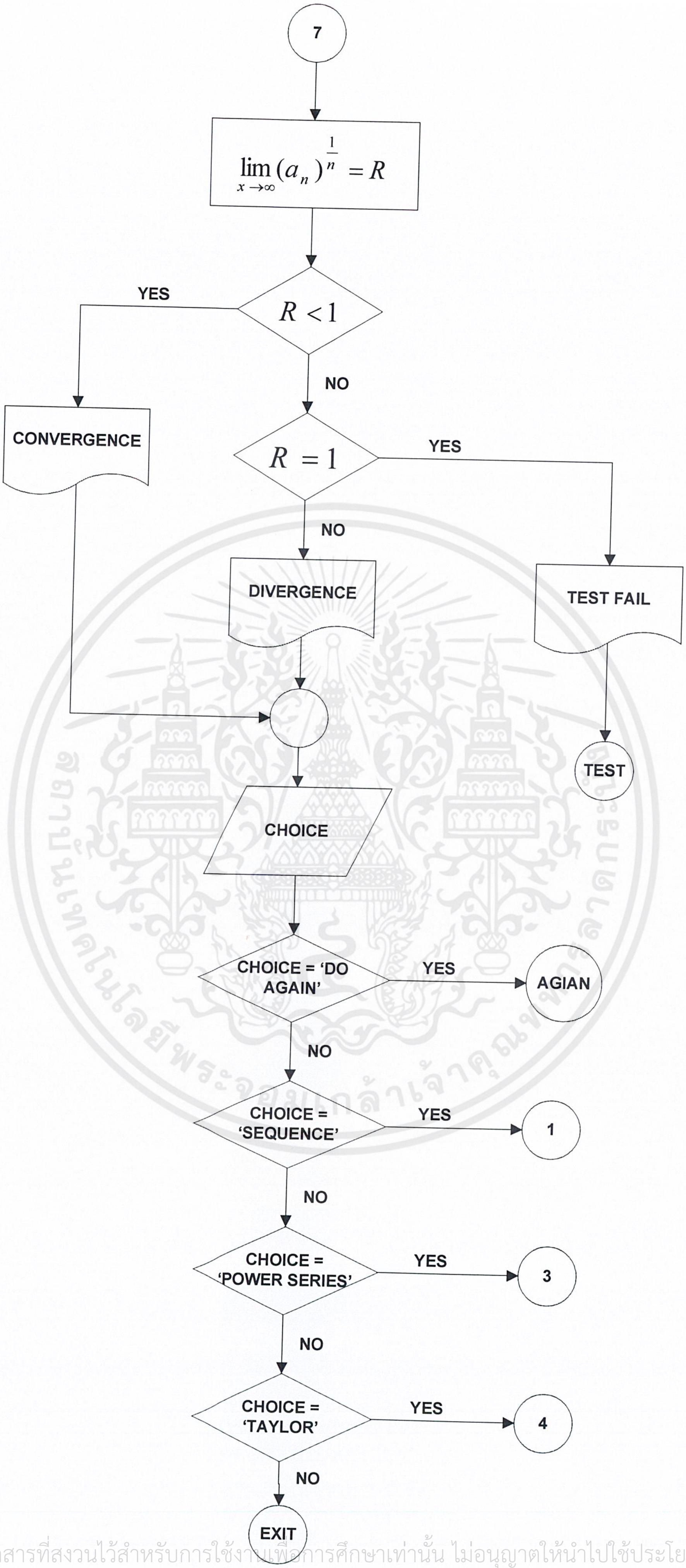
รูปที่ 3.4 Flow Chart แสดง Series



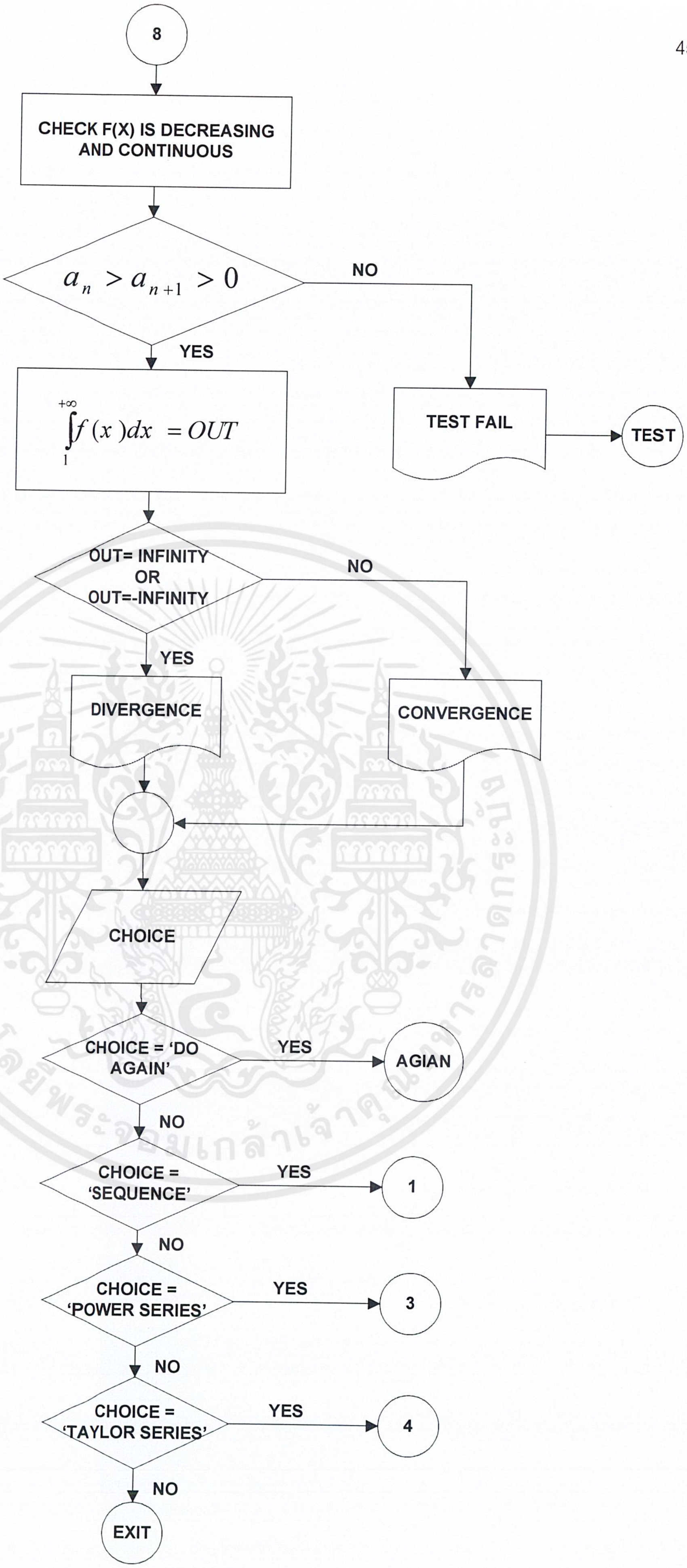
รูปที่ 3.5 Flow Chart **แสดง** Divergence test



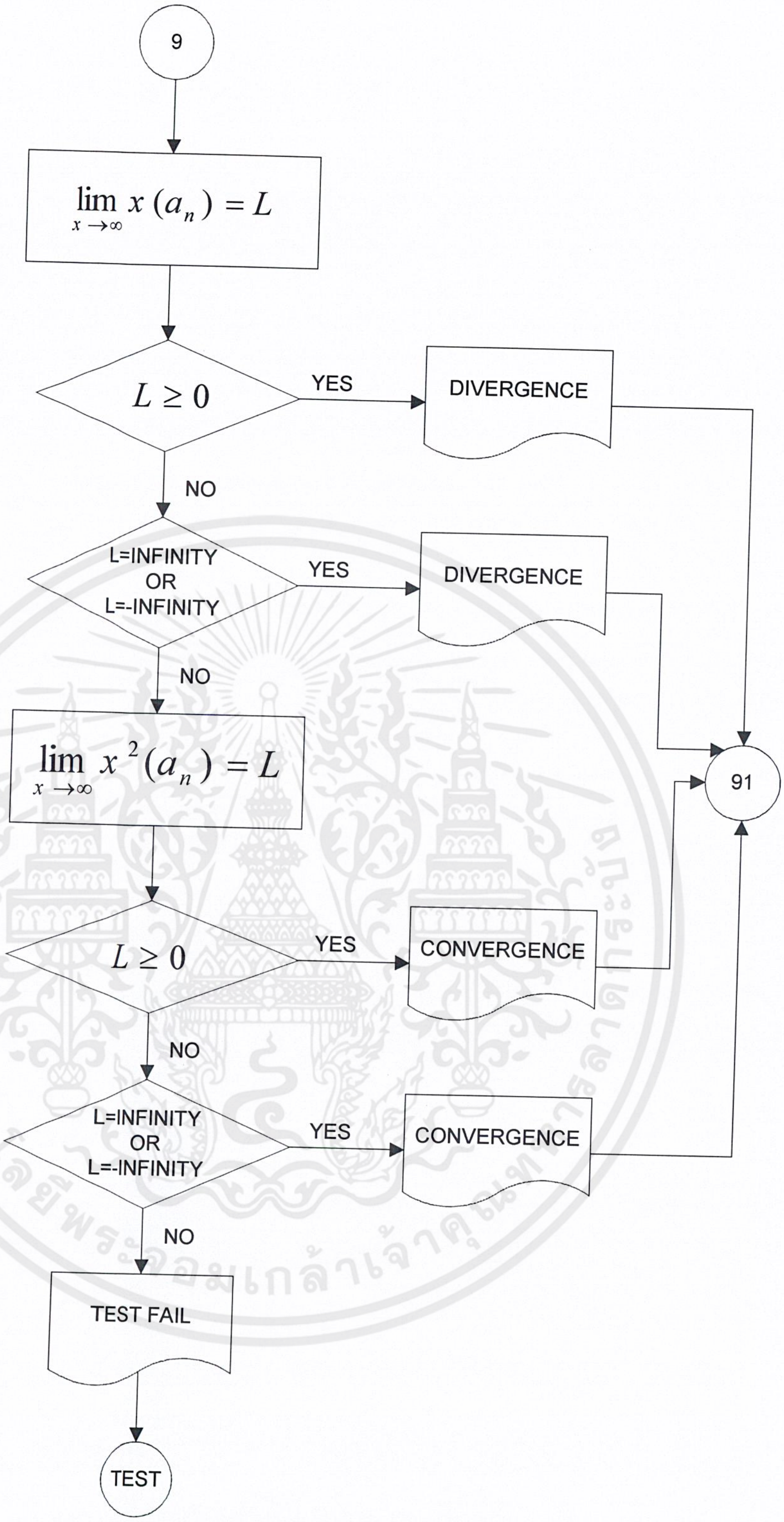
รูปที่ 3.6 Flow Chart **แสดง** Ratio Test



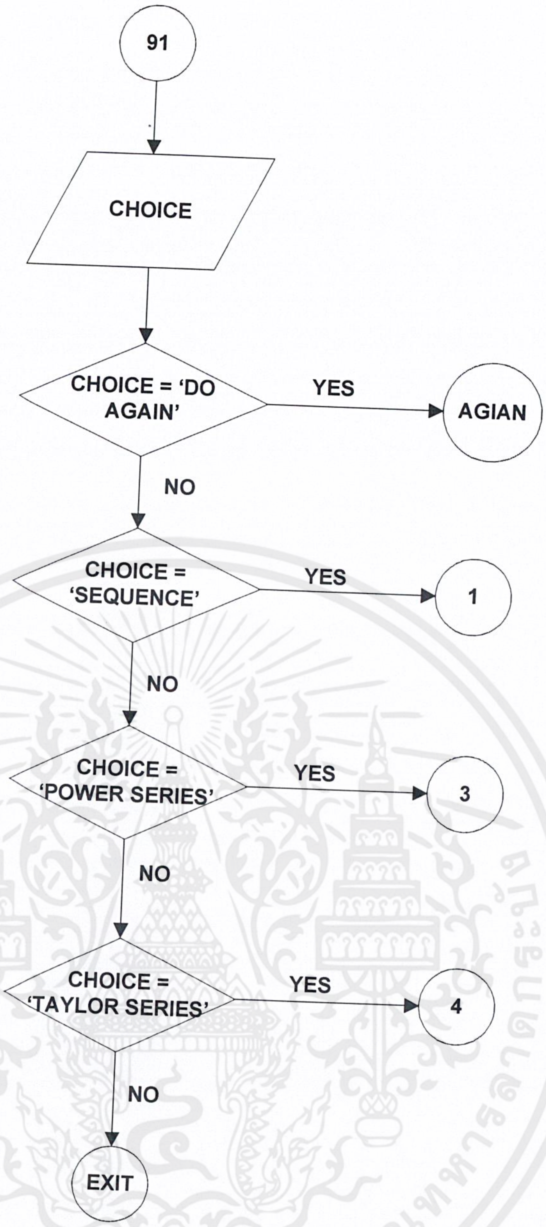
รูปที่ 3.7 Flow Chart แสดง Root Test



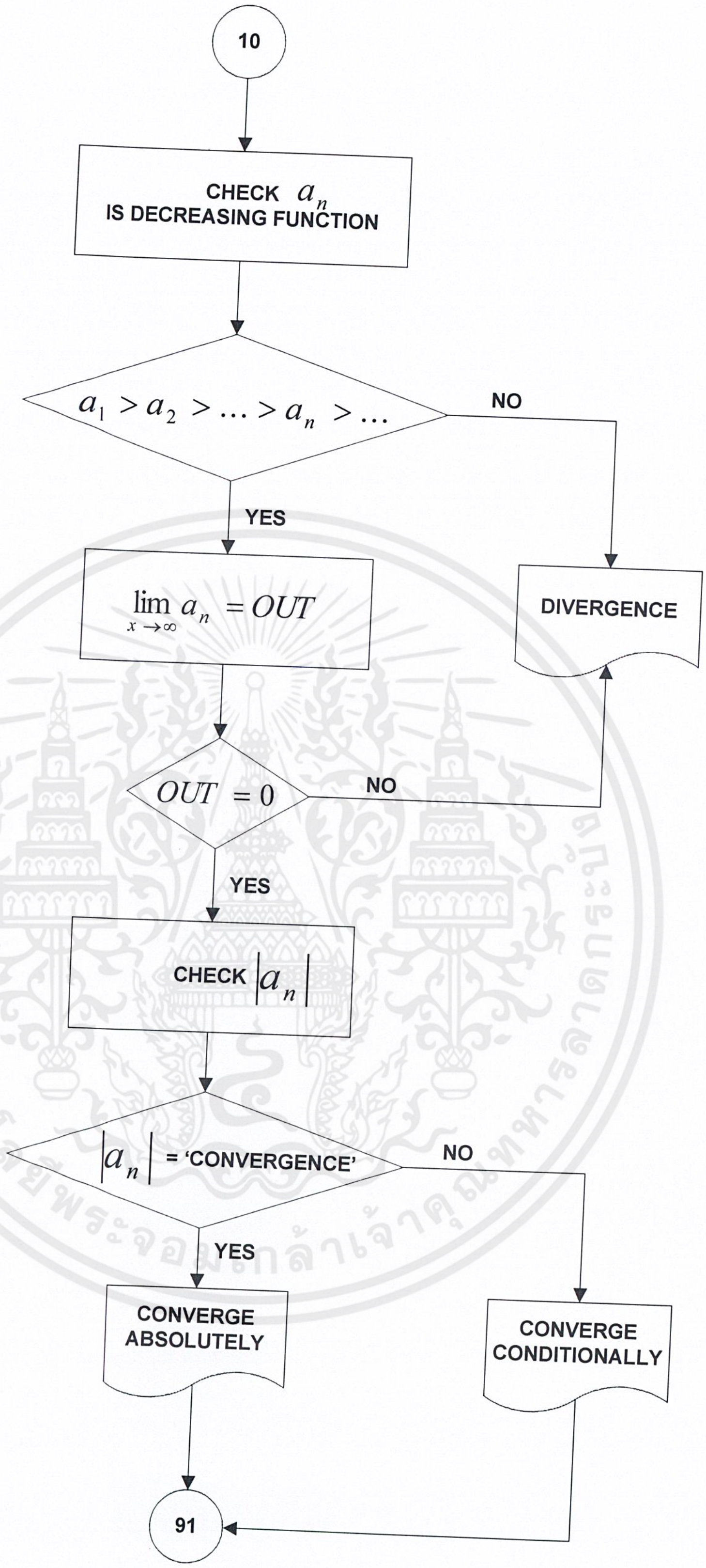
รูปที่ 3.8 Flow Chart แสดง Integral Test



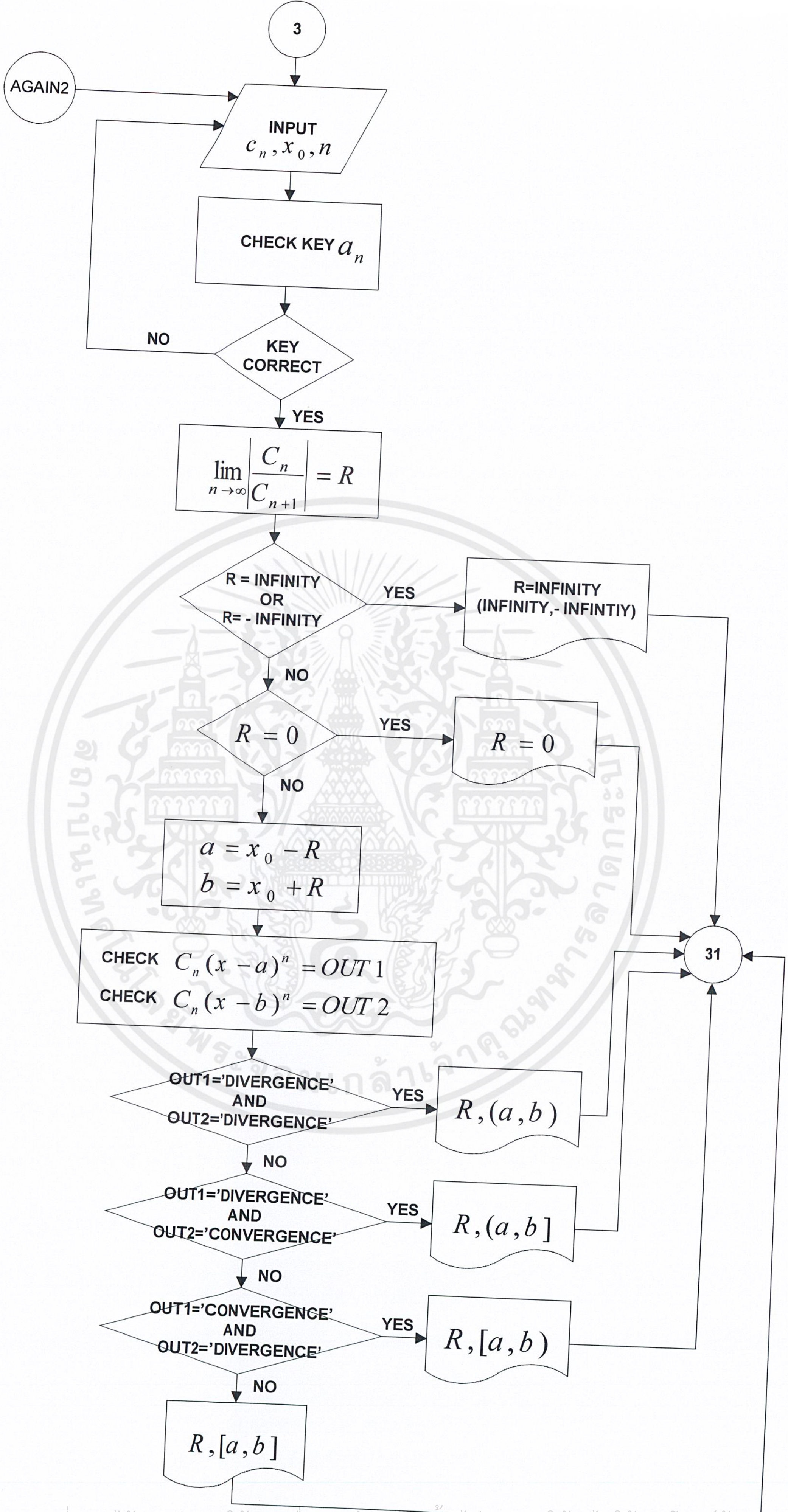
รูปที่ 3.9 Flow Chart **แสดง** Comparison Test



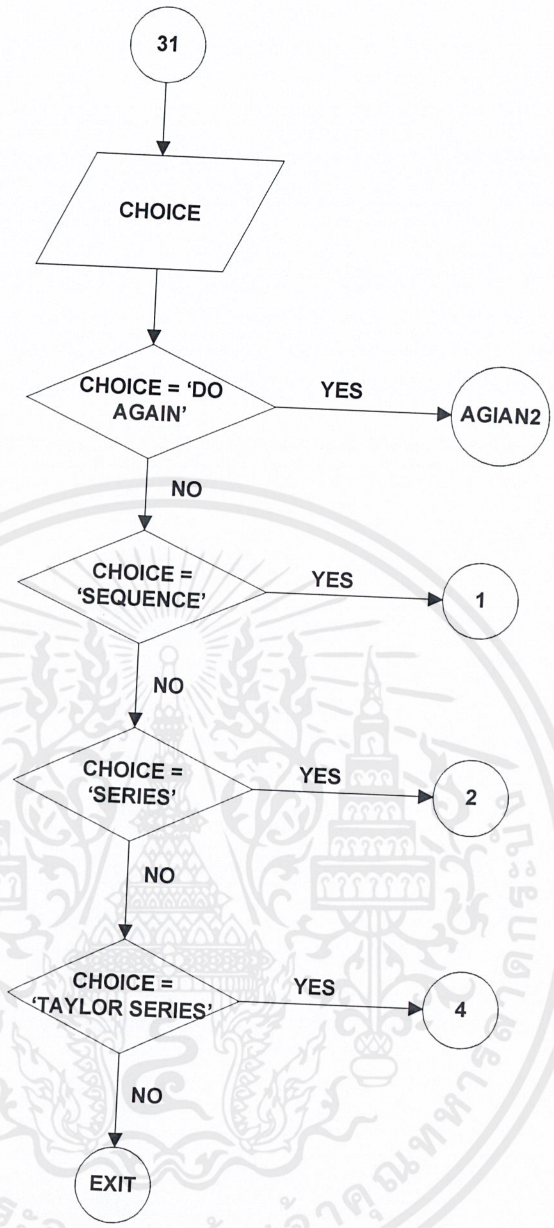
รูปที่ 3.10 Flow Chart **แสดง** Comparison Test(ต่อ)



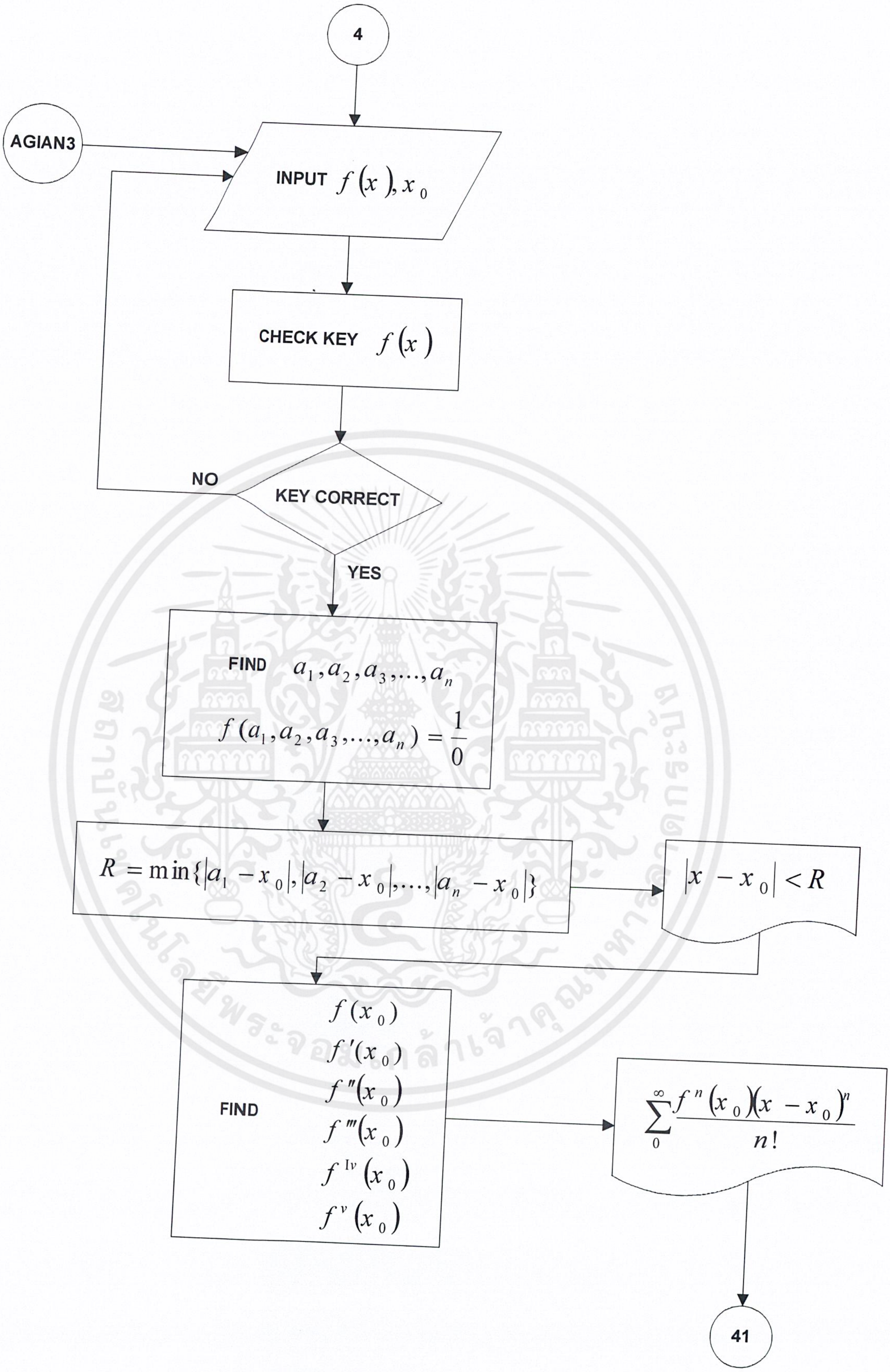
รูปที่ 3.11 Flow Chart **แสดง** Alternating Series Test



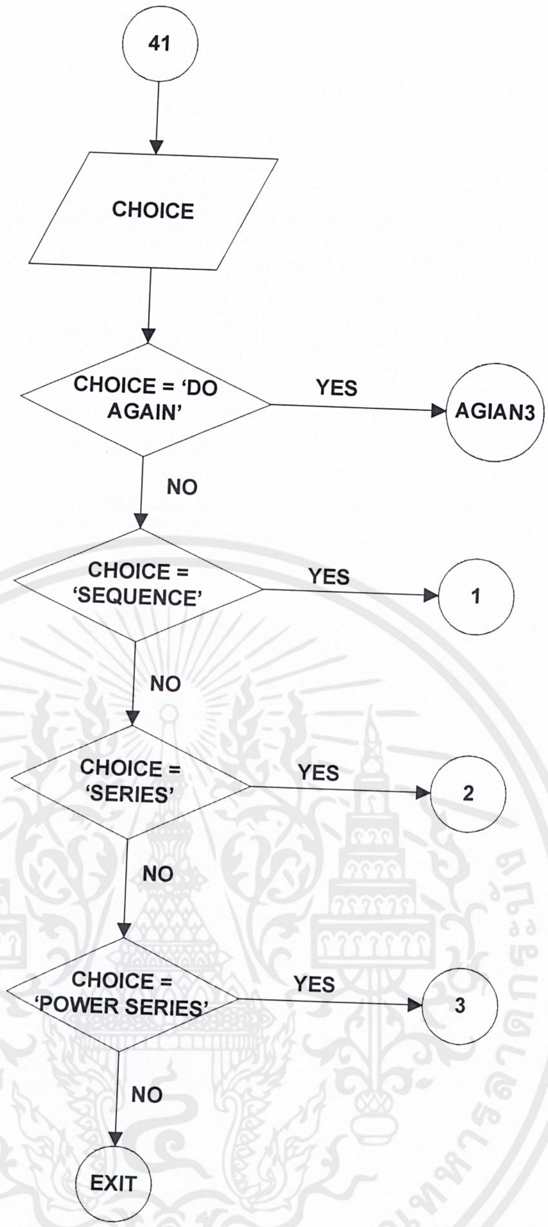
รูปที่ 3.12 Flow Chart **แสดง** Power Series



รูปที่ 3.13 Flow Chart **แสดง** Power Series(ต่อ)



รูปที่ 3.14 Flowchart **แสดง** Taylor Series



รูปที่ 3.15 Flow Chart **แสดง** Taylor Series(**ต่อ**)

บทที่ 4

การอภิปรายผล

คุณสมบัติและความสามารถของโปรแกรม

1.โปรแกรมสามารถทดสอบการลู่เข้าของลำดับอนันต์ อนุกรม อนันต์ อนุกรมกำลัง และ อนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งแสดงผลออกมาให้ผู้ใช้โปรแกรมทราบว่าอนุกรมนั้นลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าอนุกรมนั้นลู่เข้า โปรแกรมสามารถแสดงผลอีกด้วยว่าจะลู่เข้าสู่ค่าใดโดยถ้าเป็นลำดับอนันต์ลู่เข้า โปรแกรมแสดง ลิมิตของลำดับอนันต์ หรือถ้าอนุกรมอนันต์ลู่เข้าโปรแกรมแสดงผลบวกของอนุกรมอนันต์ และในส่วนของอนุกรมกำลังและอนุกรมเทย์เลอร์ ถ้าอนุกรมกำลังหรืออนุกรมเทย์เลอร์ลู่เข้า โปรแกรมจะแสดง รัศมีของการลู่เข้า และช่วงของการลู่เข้า

2.โปรแกรมสามารถรับฟังก์ชันของลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ในรูปแบบทั่วไปรวมทั้ง แฟคทอเรียล ตรีโกณมิติ ลอกาลิทึม(Log) เอ็กซ์โปเนนเชียล และโปรแกรมยังสามารถรับค่าดัชนีของฟังก์ชันได้ โดยการรับฟังก์ชันขงอนุกรมนั้นจะใช้วิธีคีย์จากคีย์บอร์ด หรือจะใช้ Mouse คลิ๊กที่เครื่องมือการช่วยคีย์ซึ่งแทรกอยู่ในฟอร์มของโปรแกรมก็ได้

3.ในการทดสอบการลู่เข้าของลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ โปรแกรมทดสอบโดยใช้วิธีวิธีการทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบอนุกรมสลับ

ข้อจำกัดของโปรแกรม

1.โปรแกรมจะทำงานได้ถูกต้องก็ต่อเมื่อผู้ใช้คีย์ฟังก์ชันของอนุกรมอนันต์เข้าไปในตัวโปรแกรมถูกต้องตามรูปแบบของการคีย์ใน Software Mathematica ซึ่งแทรกไว้ในบทที่ 3 หรือถ้าต้องการการคีย์ฟังก์ชันในโปรแกรมสามารถศึกษาได้ในส่วนของภาคผนวก

2.โปรแกรมการทดสอบในกรณีการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมกำลังที่มีรูปแบบฟังก์ชันอนุกรมสลับที่มี แฟคทอเรียลรวมอยู่ด้วย โปรแกรมจะไม่สามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้

3.โปรแกรมการทดสอบในกรณีการทดสอบอนุกรมสลับ การคีย์ฟังก์ชันจะต้องคีย์ส่วนที่แสดงว่าเป็นอนุกรมสลับก่อน ยกตัวอย่างเช่นถ้าต้องการทดสอบการลู่เข้าของ $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^x x + 3}{x(x+1)}$

ก็ต้องคีย์ (-1)^x ก่อน แล้วจึงคีย์ (x+3)/(x(x+1)) เป็นต้น โปรแกรมจะไม่สามารถทราบได้ว่าเป็นอนุกรมสลับถ้าคีย์ (x+3)/(x(x+1)) ก่อนที่จะคีย์ (-1)^x

4.การคีย์ฟังก์ชันของลำดับอนันต์ อนุกรมอนันต์ อนุกกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์สามารถศึกษาได้ในส่วนของภาคผนวก

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

ผลที่ได้จากการศึกษาและจัดทำโปรแกรมการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยใช้โปรแกรม Visual Basic และมีการติดต่อกับ Software Mathematica เพื่อใช้ในการหาต่าง ๆ ที่ใช้ในการทดสอบเงื่อนไขของการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ซึ่งได้แบ่งประเภทของอนุกรมไว้ดังนี้ ลำดับอนันต์ อนุกรมอนันต์ อนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์ โดยในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมใช้วิธี วิธีการทดสอบการลู่ออก การทดสอบอินทิกรัล การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต การทดสอบอัตราส่วน การทดสอบราก การทดสอบอนุกรมสลับ โดยแสดงผลว่าออกมาทางหน้าจอให้ผู้ใช้ทราบว่าอนุกรมที่ผู้ใช้ต้องการทดสอบนั้นลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าอนุกรมลู่เข้าจะแสดงผลว่าด้วยว่าลู่เข้าสู่ค่าใด พร้อมทั้งคำตอบอื่น ๆ ที่สำคัญ และจะแสดงค่าที่จำเป็นของเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ใช้ในวิธีการทดสอบนั้น ๆ ในการคีย์ฟังก์ชันของอนุกรมอนันต์นั้นจะต้องคีย์ให้ถูกต้องตามรูปแบบของการคีย์ฟังก์ชันใน Software Mathematica ถึงจะได้ผลที่ถูกต้องตามต้องการ โดยรูปแบบของฟังก์ชันที่สามารถคีย์ได้ในโปรแกรมนั้นใช้ได้ทุกรูปแบบรวมถึงแฟคทอเรียล ตรีโกณมิติ ลอกาลิทึม(Log) เอ็กซ์โปเนนเชียล

ข้อเสนอแนะ

ผู้จัดทำมีความเห็นว่าน่าจะได้ศึกษาและเขียนโปรแกรมเพื่อทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ทุกรูปแบบซึ่งรวมทั้งรูปแบบฟังก์ชันอนุกรมสลับที่มีแฟคทอเรียลรวมอยู่ด้วย

ภาคผนวก ก
การคีย์ฟังก์ชัน

1. การคีย์ฟังก์ชันทั่วไป
1.1 การคีย์เกี่ยวกับเลขคณิต

1. x+y	การบวก
2. x-y	การลบ
3. xyz หรือ x*y*z	การคูณ
4. x/y	การหาร
5.x^y	การยกกำลัง

การคีย์เกี่ยวกับเลขคณิต จะถูกจับกลุ่มตามแบบมาตรฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น 5^4+3 หมายถึง (5^4)+3 ไม่ใช่ 5^(4+3) เราสามารถควบคุมการจับกลุ่มได้โดยใช้เครื่องหมาย()

1.2 ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์

Sqrt[x] หรือ x^(1/2)	รากที่2ของ $x\ (\sqrt{x}\,)$
Exp[x] หรือ E^x	เอ็กซ์โปเนนเชียล (e^{x})
Log[x]	ลอการิทึมธรรมชาติ $(\log_e x)$ หรือ $(\ln x)$
Sin[x],Cos[x],Tan[x]	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
$n!$	แฟคทอเรียล (n เป็นจำนวนเต็ม)
Pi	$\pi = 3.14159$

สิ่งสำคัญ 2 สิ่งที่เกี่ยวข้องกับการใช้ฟังก์ชันคณิตศาสตร์ในโปรแกรมการดทสอบการลู่เข้าโดยใช้คอมพิวเตอร์คือ

1. Arguments ของฟังก์ชันจะต้องอยู่ภายในเครื่องหมาย [ ]
2. ชื่อของฟังก์ชันจะต้องขึ้นต้นด้วยตัวอักษรตัวพิมพ์ใหญ่

2. การคีย์ฟังก์ชันของลำดับอนันต์

การคีย์ฟังชันของลำดับ a_n ให้ใช้ตัวอักษร x (x เล็ก) เช่น ถ้าต้องการทดสอบการลู่เข้าของลำดับ $\left\{\frac{1}{x}\right\}$ ให้คีย์ 1/x โปรแกรมจะไม่สามารถทำงานได้ถูกต้องถ้าผู้ใช้คีย์ 1/n

3. **การคีย์ฟังก์ชันของอนุกรมอนันต์**

การคีย์ฟังก์ชันของอนุกรม a_n ให้ใช้ตัวอักษร x(x เล็ก) เช่น ถ้าต้องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{x+1}}{2x+1}$ ให้คีย์ (-1)^(x+1)/(2x+1)

4. **การคีย์ฟังก์ชันของอนุกรมกำลัง**

การคีย์ฟังก์ชันของอนุกรมกำลังในส่วนของ c_n ให้ใช้ตัวอักษร n(n เล็ก) เช่น ถ้าต้องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{0}^{\infty} n!(x-5)^n$ ให้คีย์ n! ที่ text a_n และคีย์ 5 ที่ text x_0

ข้อสังเกต

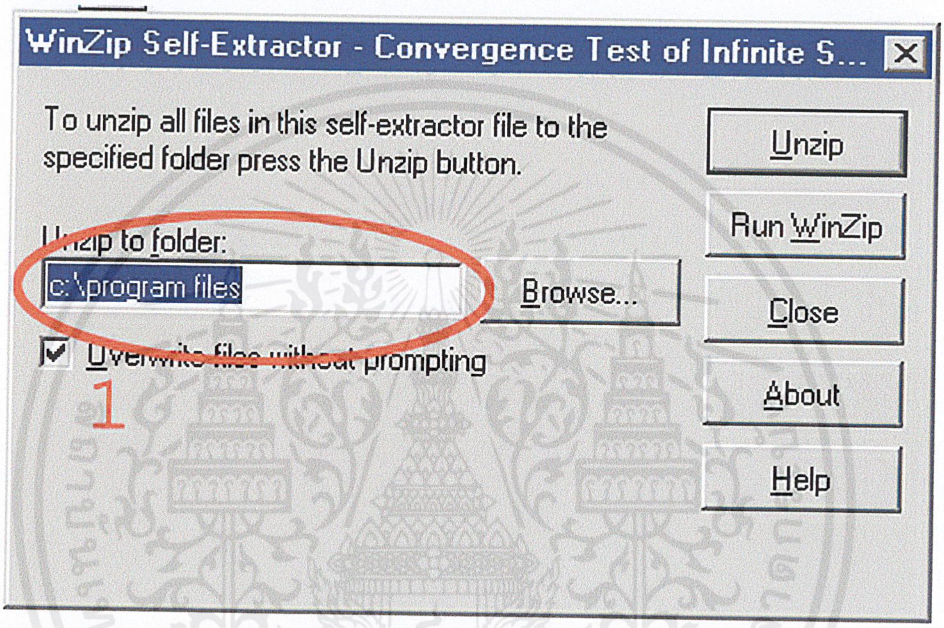
1. ถ้าต้องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ที่มีรูปที่ซับซ้อนแล้วโปรแกรมไม่สามารถทำงานได้ถูกต้อง ให้ผู้ใช้จัดรูปของฟังก์ชันให้เป็นรูปแบบที่ง่ายก่อนคีย์ฟังก์ชันลงไปในโปรแกรม

2. ถ้าผู้ใช้เกิดความสับสนในการคีย์ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ คณะผู้จัดทำได้สร้างเครื่องมือการช่วยคีย์ขึ้นมาให้ใช้เพื่อความสะดวกสบายและความถูกต้อง เมื่อต้องการใช้เครื่องมือการช่วยคีย์ ให้คลิ๊กที่ปุ่มเครื่องมือการช่วยคีย์ที่มีอยู่ทุก Form และสามารถใช้งานได้โดยการคลิ๊ก

ภาคผนวก ข
ขั้นตอนการติดตั้งและวิธีใช้โปรแกรม

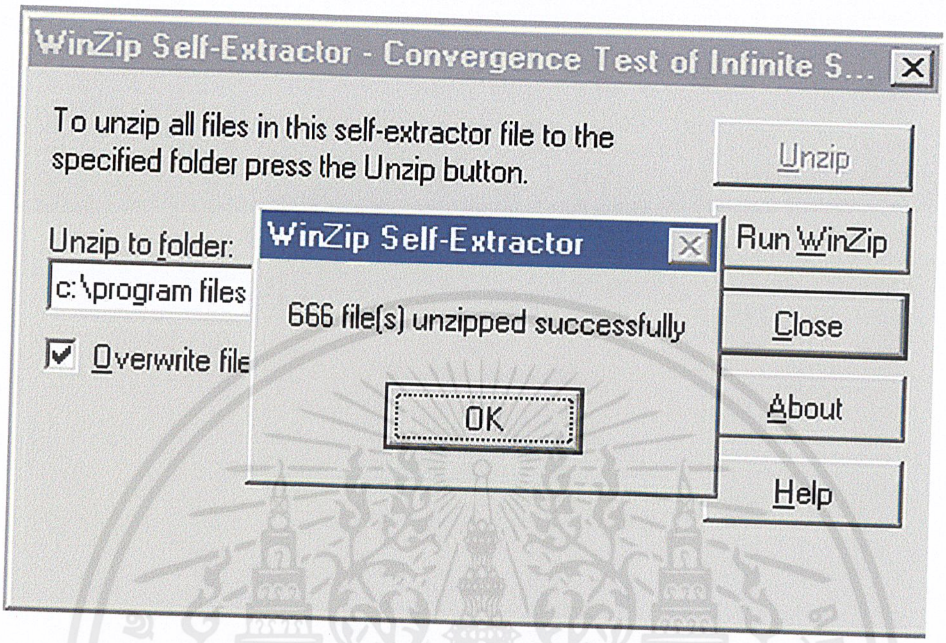
ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรม

1. ดับเบิ้ลคลิ๊กไฟล์ Convergence Test of Infinite Series by Computer.exe เพื่อติดตั้งตัวโปรแกรมจะได้ดังภาพ



รูปที่ ผ. 1 **แสดงวิธีการติดตั้ง**

2. ในวงหมายเลข1ใช้สำหรับระบุเลือกdirectoryที่ต้องการจะติดตั้งโปรแกรม จากนั้นเลือกปุ่มUnzip



รูปที่ ผ. 2 แสดงการติดตั้งเรียบร้อย

3. คลิ๊ก OK เพื่อเสร็จสิ้นการติดตั้งโปรแกรม

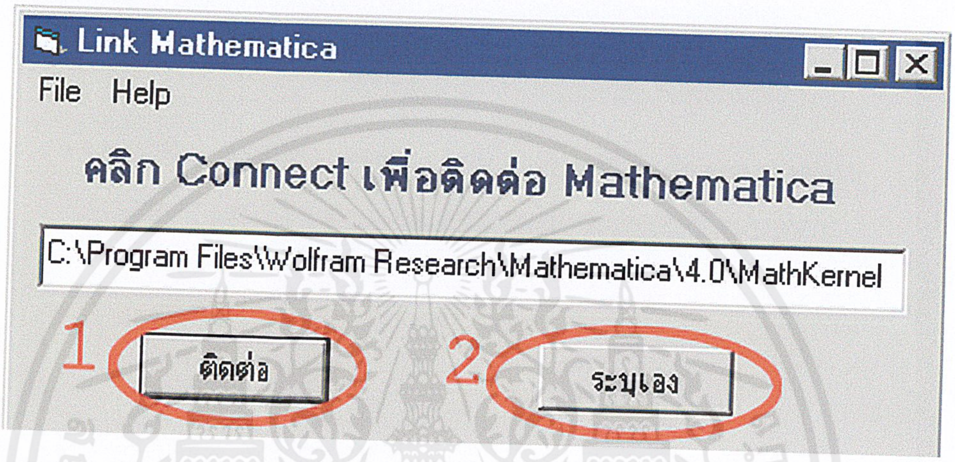
วิธีใช้โปรแกรม

1.เมื่อเรียกใช้โปรแกรมหน้าจอจะแสดงภาพดังรูป

รูป ผ. 3 หน้าจอแรกของโปรแกรม

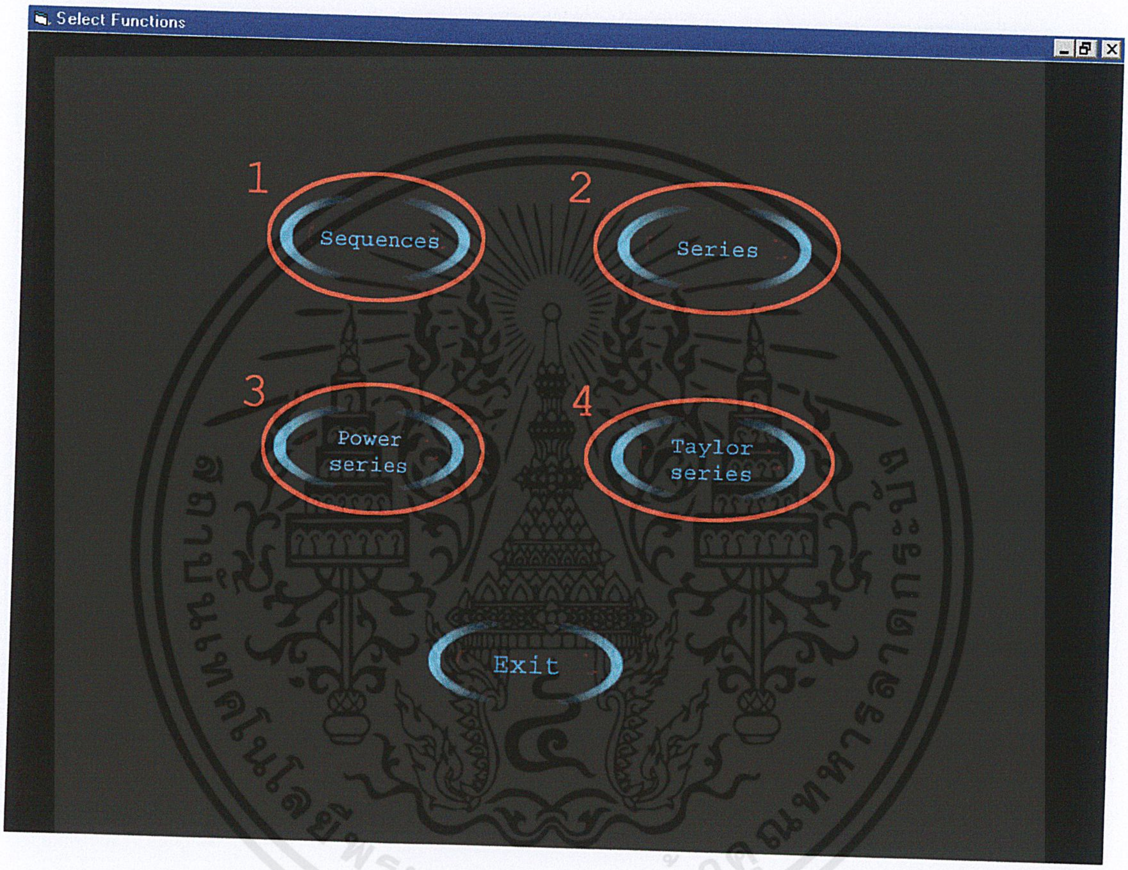
2. คลิ๊กEnterเพื่อเข้าสู่การใช้งานโปรแกรมจะปรากฏหน้าจอการติดต่อโปรแกรม Mathametica

3. วงที่1เป็นการเลือกติดต่อโปรแกรมMathematicaตามdirectoryที่ได้ระบุไว้อยู่แล้ว วงที่2เป็นการติดต่อโปรแกรมMathematicaโดยสามารถระบุdirectoryได้ใหม่ หลังจากที่ได้ทำการติดต่อโปรแกรมMathematicaแล้วโปรแกรมจะขึ้นหน้าจอใหม่เป็นหน้าจอเลือกการทำงานของโปรแกรม



รูป ผ. 4 หน้าจอการติดต่อ Mathematica

4. หน้าจอแสดงการเลือกการทดสอบ คลิ๊กวงที่1จะเป็นการเลือกการทดสอบลำดับอนันต์ คลิ๊กวงที่2จะเป็นการเลือกการทดสอบอนุกรมอนันต์ คลิ๊กวงที่3จะเป็นการเลือกการทดสอบอนุกรมอนันต์ คลิ๊กวงที่จะเป็นกการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์



รูป ผ. 5 **หน้าจอการเลือกการทดสอบ**

5. หน้าจอการทำงานการทดสอบลำดับอนันต์

5.1 วงที่1เป็นส่วนที่ให้คีย์ฟังก์ชัน

5.2 วงที่2เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าของดัชนี

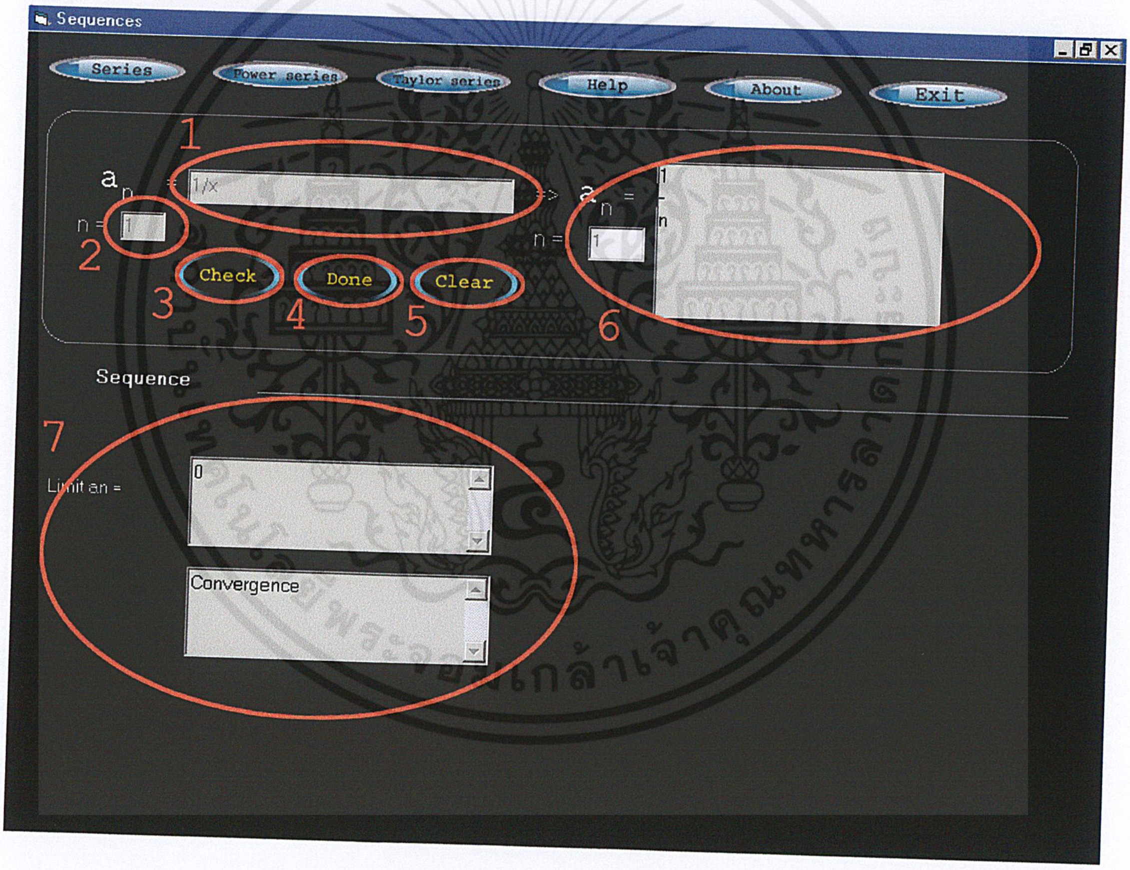
5.3 วงที่3คลิ๊กเพื่อตรวจสอบการคีย์ฟังก์ชันว่าถูกต้องหรือไม่

5.4 วงที่4คลิ๊กเพื่อทำการทดสอบลำดับอนันต์

5.5 วงที่5คลิ๊กเพื่อทำการลบหน้าจอและทำเพื่อคีย์ฟังก์ชันใหม่

5.6 วงที่6แสดงฟังก์ชันที่คีย์เข้าไป

5.7 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบลำดับอนันต์



รูป ผ. 6 หน้าจอการทดสอบลำดับอนันต์

6. หน้าจอการทำงานการทดสอบอนุกรมอนันต์

6.1 วงที่1เป็นส่วนที่ให้คีย์ฟังก์ชัน

6.2 วงที่2เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าของดัชนี

6.3 วงที่3คลิ๊กเพื่อตรวจสอบการคีย์ฟังก์ชันว่าถูกต้องหรือไม่หรือเป็นอนุกรมสลับ

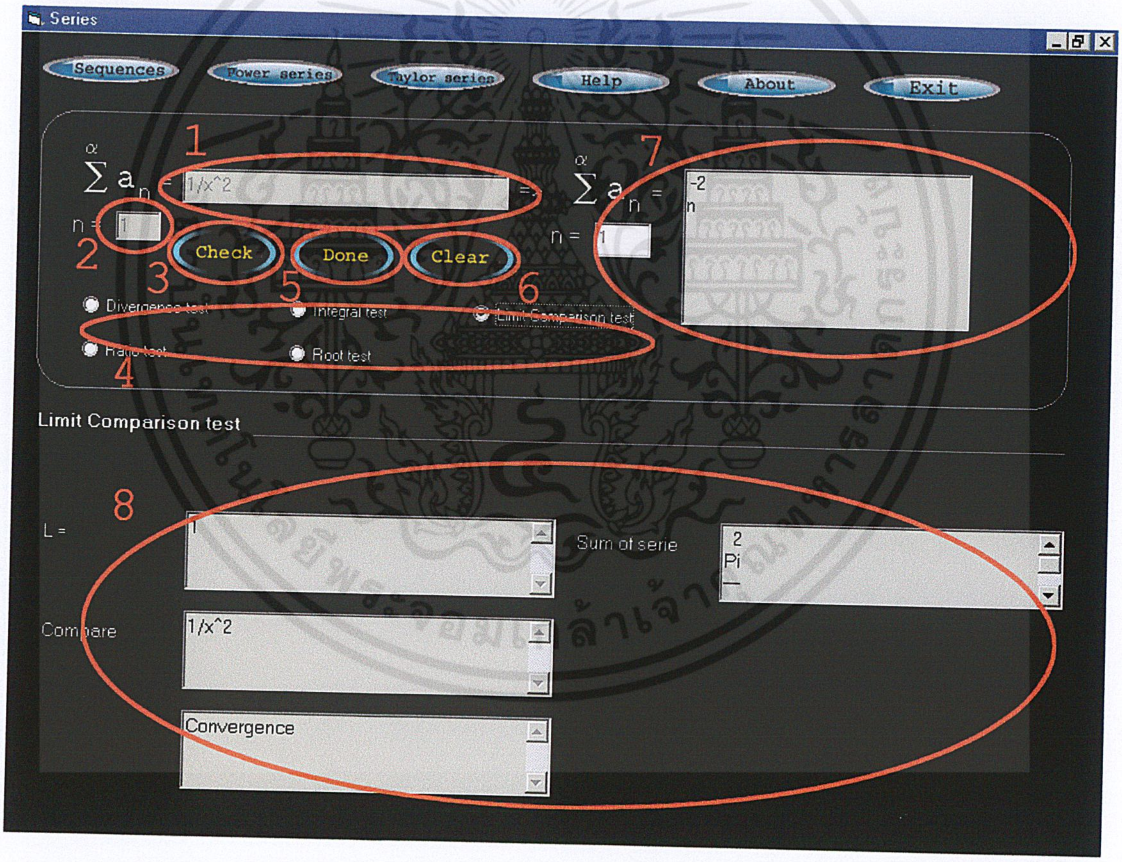
6.4 วงที่4เลือกวิธีที่ต้องการทดสอบอนุกรม

6.5 วงที่5คลิ๊กเพื่อทำการทดสอบลำดับอนันต์

6.6 วงที่6คลิ๊กเพื่อทำการลบหน้าจอและทำเพื่อคีย์ฟังก์ชันใหม่

6.7 วงที่7แสดงฟังก์ชันที่คีย์เข้าไป

6.8 วงที่8แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบอนุกรมอนันต์



รูป ผ. 7 หน้าจอการทดสอบอนุกรมอนันต์

7. หน้าจอการทำงานการทดสอบอนุกรมกำลัง

7.1 วงที่1เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าของตัวชี้กำลัง

7.2 วงที่2เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าดัชนี

7.3 วงที่3เป็นส่วนที่ให้คีย์ฟังก์ชัน C_n

7.4 วงที่4เป็นส่วนที่ให้คีย์ x_0

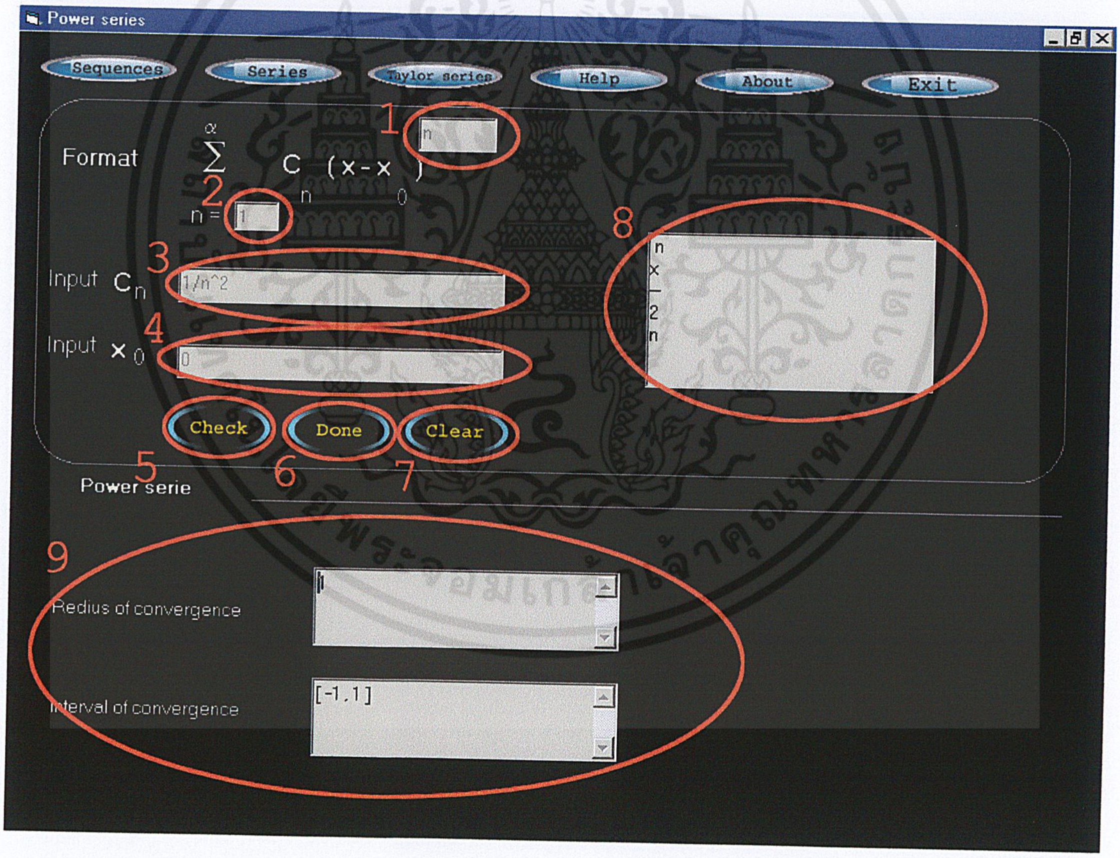
7.5 วงที่5คลิ๊กเพื่อตรวจสอบการคีย์ฟังก์ชันว่าถูกต้องหรือไม่

7.6 วงที่6คลิ๊กเพื่อทำการทดสอบอนุกรมกำลัง

7.7 วงที่7คลิ๊กเพื่อทำการลบหน้าจอและทำเพื่อคีย์ฟังก์ชันใหม่

7.8 วงที่8แสดงฟังก์ชันที่คีย์เข้าไป

7.9 วงที่9แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบอนุกรมกำลัง



รูป ผ. 8 หน้าจอการทดสอบอนุกรมกำลัง

8. หน้าจอการทำงานการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์

8.1 วงที่1เป็นส่วนที่ให้คีย์ส่วนที่เป็นเศษของฟังก์ชัน

8.2 วงที่2เป็นส่วนที่ให้คีย์ส่วนที่เป็นส่วนของฟังก์ชัน

8.3 วงที่3เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าดัชนี

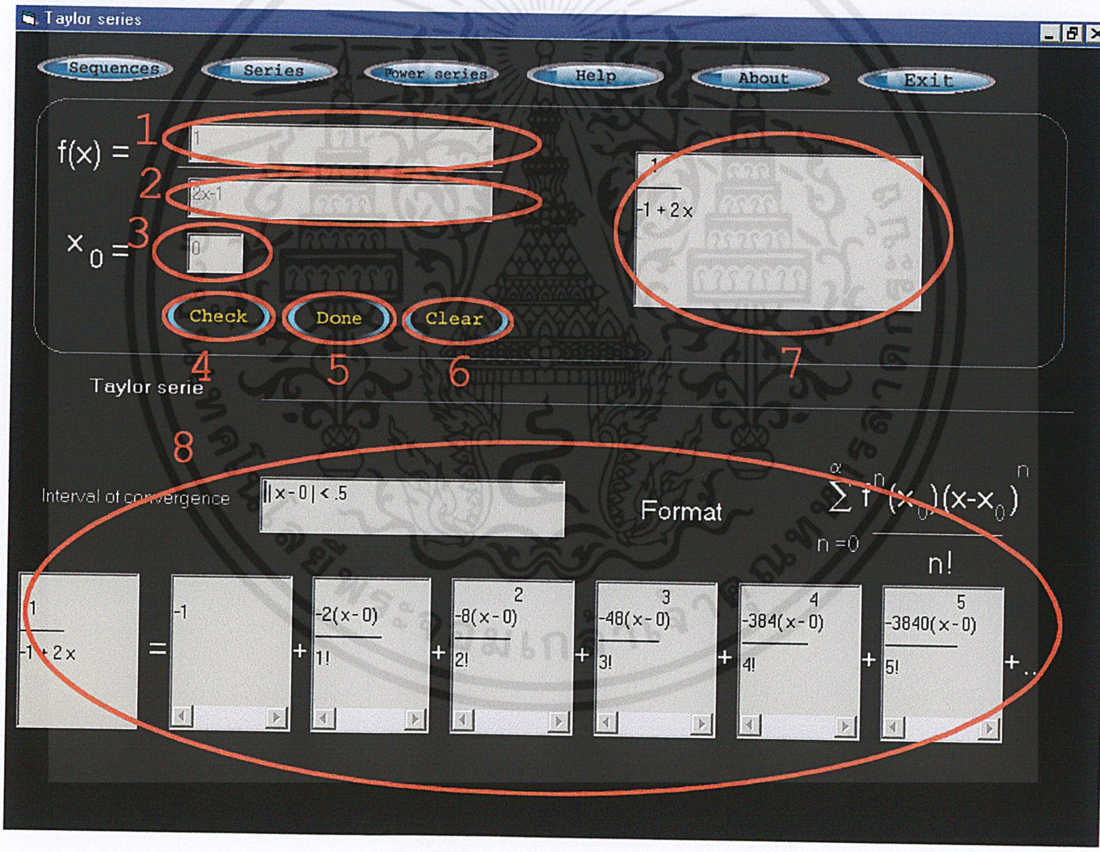
8.4 วงที่4คลิ๊กเพื่อตรวจสอบการคีย์ฟังก์ชันว่าถูกต้องหรือไม่

8.5 วงที่5คลิ๊กเพื่อทำการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์

8.6 วงที่6คลิ๊กเพื่อทำการลบหน้าจอและทำเพื่อคีย์ฟังก์ชันใหม่

8.7 วงที่7แสดงฟังก์ชันที่คีย์เข้าไป

8.8 วงที่8แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์



รูป ผ. 9 หน้าจอแสดงการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์

บรรณานุกรม

กิตติ ภัคดีวัฒนะกุล และ จำลอง ครูอุตสาหะ. 2542. Visual Basic 6 **ฉบับโปรแกรมเมอร์**. พิมพ์ ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ : หจก.ไทยเจริญ การพิมพ์.

สัจจะ จรัสรุ่งรวีวร. 2544. **คู่มือการเขียนโปรแกรมและใช้งานVisual Basic 6.0**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : บริษัท ด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด.

วิชัย ทิพณีย์ และ รัชเมธี รัชนิพนธ์. 2538. **1234 แบบฝึกหัดและเทคนิคการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัส**. พิมพ์ครั้งที่ 1 . กรุงเทพฯ : บริษัท ที.พี.พริ้นท์ จำกัด.

ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์. แคลคูลัส2. **โครงการตำราสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง**.

Howard Anton, 1995, **Calculus With Analytic Geometry**, 5th ed., Anton Textbook,Inc.

Stephen Wolfram, **The Mathematica Book**, 3 ed., Addision-Wesley Publishing Company.