สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

โดย

นายพรชัย ชัยสนิท

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2539

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน T033843
วัน, เดือน, ปี 17 ก.ย. 2542

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Solution of Nonlinear Differential Equation

By

Pornchai Chaisanit

A special Project Submitted in Partial Fulfillment of the
Requirement for the Degree of Bachelor of Science
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
King Monkut's Institute of Technology Ladkrabang
1996

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อหัวข้อปัญหาพิเศษ ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

โดย

นายพรชัย ชัยสนิท รหัส 36054121

ภาควิชา คณิศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ. ภัคคินี ชิตสกุล

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ กรรมการสอบปัญหาพิเศษ ได้ตรวจสอบพิจารณาแล้วจึงอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2539

..... หัวหน้าภาควิชา
(รศ. ภัคคินี ชิตสกุล)

..... ประธานกรรมการ
(อาจารย์สิริลักษณ์ เตียพิริยะกิจ)

..... กรรมการ
(อาจารย์กาญจนา คำนึงกิจ)

..... กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา
(รศ. ภัคคินี ชิตสกุล)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดีก็เพราะหลายเหตุปัจจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง รศ. ภัคคินี ชิตสกุล ที่ได้ให้แนวทางในการดำเนินการ ตลอดจนคำปรึกษาอันก่อให้เกิดแนวความคิดที่สามารถนำไปแก้ไขปัญหาต่างๆที่เกิดขึ้นในระหว่างการทำปัญหาพิเศษ นอกจากนี้ยังช่วยแนะนำแนวทางในการดำเนินงาน และตรวจทานแก้ไข ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างดียิ่ง

ขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ทุกท่านที่ประศาสน์วิชาความรู้แก่ผู้จัดทำ จนกระทั่งทำให้ปัญหาพิเศษสัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณ

ผู้จัดทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทคัดย่อ

สำหรับวิชาคณิตศาสตร์ในปัจจุบันนี้ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นยังเป็นสิ่งที่ยุ่งยากอยู่มาก บางครั้งต้องใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขมาแก้ปัญหา ซึ่งการใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขนี้มีอยู่หลายระเบียบวิธีด้วยกันปัญหาพิเศษนี้จะทำการวิเคราะห์การหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงแล้วกับระเบียบวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 เพื่อเปรียบเทียบผลโดยวิเคราะห์กับสมการที่สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Abstract

Nowaday , in mathematics , solving nonlinear differential equation is still very hard . Sometime we use numerical analysis . For this case , it has many methods . This special topic is analyze Euler's method and Rung-Kutta method order 4 to compare result with analytic method .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้าอนุมัติ

บทคัดย่อปัญหาพิเศษภาษาไทย

บทคัดย่อปัญหาพิเศษภาษาอังกฤษ

กิตติกรรมประกาศ

หน้า

บทที่ 1 - บทนำ 1

บทที่ 2 - สมการเชิงอนุพันธ์ 2

บทที่ 3 - การหาผลเฉลยของสมการ $y' = f(x,y)$ 9

บทที่ 4 - การหาผลเฉลยของสมการ $y' = f(x)$ 14

บทที่ 5 - การหาผลเฉลยของสมการ $y' = f(y)$ 17

บทที่ 6 - การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(x,y,y')$ 21

บทที่ 7 - การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(x,y)$ 25

บทที่ 8 - การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(x,y')$ 29

บทที่ 9 - การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(y,y')$ 34

บทที่ 10 - การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(x)$ 39

บทที่ 11 - การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(y)$ 43

บทที่ 12 - การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(y')$ 48

บทที่ 13 - สรุปผลการวิเคราะห์และข้อเสนอแนะ 53

ภาคผนวก

บรรณานุกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

ความสำคัญ/ที่มาของปัญหาพิเศษ

ในการศึกษาและการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นมีการศึกษากันอย่างมากมายหลายยุคหลายสมัย สำหรับในกรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการไม่เชิงเส้นจนถึงปัจจุบันนี้การหาผลเฉลยก็ยังเป็นสิ่งที่ยุ่งยากอยู่ ในปัญหาพิเศษนี้จึงจะทำการศึกษาถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น พร้อมทั้งหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1. ศึกษาที่มาของสมการเชิงอนุพันธ์
2. ศึกษาที่มาของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น
3. ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์
4. ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น
5. เปรียบเทียบผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์ และวิธีเชิงตัวเลข

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ขจัดความยุ่งยากในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาที่มาของสมการเชิงอนุพันธ์และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น
2. ค้นคว้าหาวิธีการหาผลเผลยของสมการเชิงอนุพันธ์และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นที่พบในหนังสืออ้างอิงทั่วไป และค้นหาวิธีการหาผลเฉลยแบบใหม่ๆจากวารสารต่างๆ
3. วิเคราะห์วิธีการหาผลเฉลยทุกวิธีที่ค้นคว้ามา

อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

ตำราอ้างอิงและวารสารต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ (derivative) หรือเชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าตัวแปรเดียวหรือหลายตัวแปร โดยจะแบ่งเป็น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรต้นตัวเดียว และ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรต้นตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป โดยในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเท่านั้น

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สามารถเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันนอลได้ดังนี้

$$G(x, y, y', y'', \ldots, y(n)) = 0$$

เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n
2. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับที่ n

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ n สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = G(x)$$

โดยที่ $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, … , $a_1(x)$, $a_0(x)$ ไม่มีพจน์ y และ $a_n(x) \neq 0$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่นอกเหนือรูปแบบข้างต้น จะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

ตัวอย่าง

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

(1) $y'' + 3xy' + 4y = 0$ (2) $6y'' + xy' - (\cos x)y = e^x$

สำหรับตัวอย่าง (1) เป็นสมการที่เรียกว่า สมการเอกพันธ์ คือ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่ $G(x) = 0$

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

(1) $y'' + yy' - 3xy = 0$ (2) $(y'')^2 + \cos y = e^x$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

กรณีที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง จะอยู่ในรูปแบบ

$A(x)y' + B(x)y = C(x)$

จะใช้วิธีการหาผลเฉลยแบบแม่นตรง โดยมีตัวประกอบอินทิเกรต คือ

$$e^{\int \rho(x)dx}$$

โดยที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

กรณีที่อันดับมีค่าสูงกว่าหนึ่ง จะใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยใช้สมการลักษณะเฉพาะ และการพิจารณาตัวกำหนดแบบวรอนสกี

<u>การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น</u>

สามารถทำได้หลายวิธี ดังนี้

1) ใช้วิธีแยกตัวแปร

<u>ตัวอย่าง</u> $2x\,(y^2+1)\,dx - y\,dy = 0$

$2x\,(y^2+1)\,dx - ydy = 0$

$2x\,(y^2+1)\,dx = y\,dy$

$$2x\,dx = \frac{y}{y^2+1}dy$$

$$\int 2xdx = \int \frac{y}{y^2+1}dy$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + c$$

---

2) แบบแม่นตรง อาจมีตัวประกอบอินทิเกรตหรือไม่มีก็ได้

<u>ตัวอย่าง</u> $(e^{-x} + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0$

$(e^{-x} + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0$

$$\frac{\partial(e^{-x}+\sin y)}{\partial y} = \cos y \quad , \quad \frac{\partial \cos y}{\partial x} = 0$$

$$(e^{\int \frac{(\cos - 0)}{\cos y}dx})(e^{-x} + \sin y)\,dx + (e^{\int \frac{(\cos - 0)}{\cos y}dx})\cos y\,dy = 0$$

$e^x(e^{-x} + \sin y)\,dx + e^x \cos y\,dy = 0$

$(1 + e^x \sin y)\,dx + e^x \cos y\,dy = 0$

$dx + e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy = 0$

$dx + d(e^x \sin y) = 0$

$$\int dx + \int d(e^x \sin y) = 0$$

$x + (e^x \sin y) + c = 0$

---

3) ฟังก์ชันเอกพันธ์ ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ในรูป

$A(x,y)y' + B(x,y) = 0$

โดยที่ $A(x,y)$ และ $B(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดว่า F(x,y) เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n เมื่อ $F(tx,ty) = t^nF(x,y)$

<u>ตัวอย่าง</u> $(x^2 - y^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$

$(x^2 - y^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{(x^2 - 2y^2)}$$

$$y = vx \quad , \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-2x(vx)}{(x^2 - 2(vx)^2)} = \frac{-2v}{(1-2v^2)}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-2v}{(1-2v^2)} - v = \frac{2v^3 - 3v}{(1-v^2)}$$

$$\frac{1-v^2}{2v^3 - 3v}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1-v^2}{2v^3 - 3v}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3}\ln|3 - 2v^2| - \frac{1}{3}\ln|v| = \ln|x| + \ln c_1$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + \ln c_1$$

$$y(3x^2 - 2y^2) = c$$

---

4) สมการริกคาตี คือ สมการที่อยู่ในรูป

$y' = A(x)y^2 + B(x)y + c(x)$; $A(x) , B(x) , C(x) \neq 0$

จะหาผลเฉลย โดยต้องหาผลเฉลยมา 1 ตัวก่อนสมมติให้เป็น f(x) แล้วจะได้ผลเฉลยทั่วไปในรูป $y = f(x) + 1/v(x)$ แล้วจึงหา v(x) ออกมา

<u>ตัวอย่าง</u> $y' = -2 + 3y - y^2$

สมมติให้ $y = ax^b$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$\therefore\ y' = abx^{b-1}$

ถ้าให้ $b = 0$ จะได้ว่า $0 = -2 + 3a - a^2$ $\therefore\ a = 2, 1$

$\therefore\ y = 2 , y = 1$

<u>กรณีที่</u> $y = 2$

จะได้ผลเฉลยในรูปทั่วไป คือ $y = 2 + \frac{1}{v}$

$y' = -v^{-2}v'$

$$-v^{-2}v' = -2 + 3(2 + \frac{1}{v}) - (2 + \frac{1}{v})^2$$

$$-v^{-2}v' = -v^{-2} - v^{-1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{1}{1+v}dv = dx$$

$$\int\frac{1}{1+v}dv = \int dx$$

$$\ln|1+v| = x + c_1$$

$$v = c_2e^x - 1$$

$$y = 2 + \frac{1}{c_2e^x - 1}$$

<u>กรณีที่</u> $y = 1$

จะได้ผลเฉลยในรูปทั่วไป คือ $y = 1 + \frac{1}{v}$

$$y' = -v^{-2}v'$$

$$-v^{-2}v' = -2 + 3(1 + \frac{1}{v}) - (1 + \frac{1}{v})^2$$

$$-v^{-2}v' = -v^{-2} + v^{-1}$$

$$\frac{-1}{v-1}dv = dx$$

$$-\int\frac{1}{v-1}dv = \int dx$$

$$-\ln|v-1| = x + c_3$$

$$v = c_4e^x + 1$$

$$y = 1 + \frac{1}{c_4e^x + 1}$$

---

5) สมการแกลโรต์ คือ สมการที่มีฟังก์ชันของตัวแปรที่มีอนุพันธ์อยู่

<u>ตัวอย่าง</u> $2y + 2 = x^2(y'') + (y'')^2$, $y'(1) = 0$, $y(1) = 1$

$$2y + 2 = x^2(y'') + (y'')^2$$

$$k = y''(1)$$

$$2y + 2 = x^2k + k^2$$

$$y(1) = 2$$

$$2 = k + k^2$$

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$k = -2 , 1$$

$$k = -2$$

$$y = -x^2 + 1$$

$$k = 1$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} + 4$$

---

6) โดยการแปลง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.1) แปลงเป็นสมการเชิงเส้น คือ การแปลงสมการไม่เชิงเส้นให้กลายเป็นสมการเชิงเส้น

<u>ตัวอย่าง</u> $y' = e^{-y} - y$

$y' = e^{-y} - y$

$e^{y}y' + e^{y}y - 1 = 0$

$p = e^{y}y \qquad p' = e^{y}y'$

$p' + p - 1 = 0$

$e^{\int dx}p' + e^{\int dx}p - e^{\int dx} = 0$

$e^{x}\,dp + e^{x}p\,dx - e^{x}\,dx = 0$

$d(e^{x}p) - e^{x}\,dx = 0$

$\int d(e^{x}p) - \int e^{x}dx = 0$

$e^{x}p - e^{x} + c = 0$

$p = 1 - ce^{-x}$

$y = e^{-y} - ce^{-x-y}$

6.2) การแปลงเมื่อมีตัวแปรหาย เป็นการแปลง โดยลดอันดับของการอนุพันธ์

<u>ตัวอย่าง</u> $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$

$(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$

$p = y' \qquad p' = y''$

$(1 + x^2)p' + (p)^2 + 1 = 0$

$$-\frac{dp}{p^2+1} = \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int -\frac{dp}{p^2+1} = \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$\arctan p + \arctan x = k_1$

$$\tan(\arctan p + \arctan x) = \frac{1}{k_2}$$

$$\frac{p+x}{1-px} = \frac{1}{k_2}$$

$$p = \frac{1-k_2x}{x+k_2}$$

$$y' = \frac{1-k_2x}{x+k_2}$$

$y'(0) = 1$

$\therefore k_2 = 1$

$$y' = \frac{1-x}{x+1}$$

$$dy = \frac{1-x}{x+1}dx$$

$$\int dy = \int \frac{1-x}{x+1}dx$$

$y = 2\ln|x+1| - x + c$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$y(0) = 0$

$\therefore c = 0$

$y = 2\ln|x+1| - x$

7) การแยกตัวประกอบ

<u>ตัวอย่าง</u> $xy'' - yy'' - xy + y^2 = 0$, $y'(1) = 1$, $y(1) = 1$

$xy'' - yy'' - xy + y^2 = 0$

$(y'' - y)(x - y) = 0$

$y = x$

$y'' = y$

$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$

$p\frac{dp}{dy} = y$

$p^2 = y^2 + k$

$(y')^2 = y^2 + k$

$y'(1) = 1$, $y(1) = 1$

$\therefore k = 0$

$y' = \pm y$

$\frac{dy}{y} = \pm dx$

$\ln|y| = \pm x + c$

$y(1) = 1$

$\therefore c = -1$

$y = e^{\pm(x-1)}$

---

8) โดยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลข

8.1) โดยระเบียบวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงแล้ว

จะให้ $y' = f(x,y)$ และ h คือระยะของการแบ่งช่วง และ y_0 คือ จุดเริ่มต้น

โดยครั้งแรกจะใช้สูตร $y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0)$

และครั้งต่อๆไปจะใช้สูตร $y_1 = y_0 + h(f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1))/2$

8.2) โดยระเบียบรุงเงคุตตาอันดับที่ 4

จะให้ $y' = f(x,y)$ และ h คือระยะของการแบ่งช่วง และ y_0 คือ จุดเริ่มต้น

และใช้สูตร

$k_1 = hf(x_0,y_0)$

$k_2 = hf(x_0+h/2,y_0+k_1/2)$

$k_3 = hf(x_0+h/2,y_0+k_2/2)$

$k_4 = hf(x_0+h,y_0+k_3)$

$y_1 = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = 3y^3$ ที่ $x = 0.2$ เมื่อ $y(0) = 1$

โดยระเบียบวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงแล้ว

$f(x,y) = 3y^3$, $h = 0.2$, $y_0 = 1$, $x_0 = 0$

$y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0) = 1.6$

$y_1 = y_0 + h(f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1))/2 = 2.5288$

$y_1 = y_0 + h(f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1))/2 = 6.151373$

โดยระเบียบวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4

$k_1 = hf(x_0,y_0) = 0.6$

$k_2 = hf(x_0+h/2,y_0+k_1/2) = 0.4394$

$k_3 = hf(x_0+h/2,y_0+k_2/2) = 0.362902$

$k_4 = hf(x_0+h,y_0+k_3) = 0.506319$

$y_1 = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 1.454821$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การหาผลเฉลยของสมการ $y' = f(x,y)$

สำหรับโครงงานพิเศษนี้ จะทำการโดยเปรียบเทียบการหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีทั้งสองกับผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์ โดยแบ่งรูปแบบที่ศึกษาเป็น

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับที่ 1 แบ่งออกเป็น 3 รูปแบบ คือ

1) $y' = f(x,y)$ 2) $y' = f(x)$ 3) $y' = f(y)$

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับที่ 2 แบ่งออกเป็น 7 รูปแบบ คือ

1) $y'' = f(x,y,y')$
2) $y'' = f(x,y)$
3) $y'' = f(x,y')$
4) $y'' = f(y,y')$
5) $y'' = f(x)$
6) $y'' = f(y)$
7) $y'' = f(y')$

ตัวอย่างที่ 1 $2x(y^2+1)\,dx + y\,dy = 0$, $y(0) = 1$

$$2x(y^2+1)\,dx + y\,dy = 0$$

$$2x(y^2+1)\,dx = -y\,dy$$

$$2x\,dx = -\frac{y}{y^2+1}\,dy$$

$$\int 2x\,dx = -\int \frac{y}{y^2+1}\,dy$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + c$$

$$y(0) = 1$$

$$0 = \frac{1}{2}\ln(1+1) + c$$

$$0 = \frac{1}{2}\ln 2 + c$$

$$\therefore c = -\frac{1}{2}\ln 2$$

$$-x^2 = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\frac{y^2+1}{2} = e^{-2x^2}$$

$$y = \pm\sqrt{2e^{-2x^2} - 1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	±0.9800	1.0200	0.0400	1.0200	0.0400
y(0.2)	±0.9199	1.0801	0.1602	1.0801	0.1602
y(0.3)	±0.8189	1.1811	0.3622	1.1809	0.3620
y(0.4)	±0.6725	1.3251	0.6526	1.3245	0.6520
y(0.5)	±0.4616	1.5171	1.0555	1.5157	1.0541

*หมายเหตุ ค่าผิดพลาดเป็นค่าผิดพลาดที่น้อยที่สุด

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $(e^{-x} + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0$, $y(0) = 0$

$$(e^{-x} + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0$$

$$\frac{\partial(e^{-x} + \sin y)}{\partial y} = \cos y \quad , \quad \frac{\partial \cos y}{\partial x} = 0$$

$$(e^{\int \frac{(\cos - 0)}{\cos y} dx})(e^{-x} + \sin y)\,dx + (e^{\int \frac{(\cos - 0)}{\cos y} dx})\cos y\,dy = 0$$

$$e^{x}(e^{-x} + \sin y)\,dx + e^{x}\cos y\,dy = 0$$

$$(1 + e^{x}\sin y)\,dx + e^{x}\cos y\,dy = 0$$

$$dx + e^{x}\sin y\,dx + e^{x}\cos y\,dy = 0$$

$$dx + d(e^{x}\sin y) = 0$$

$$\int dx + \int d(e^{x}\sin y) = 0$$

$$x + (e^{x}\sin y) + c = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$0 + e^{0}\sin(0) + c = 0$$

$$0 + 0 + c = 0$$

$$\therefore c = 0$$

$$x + (e^{x}\sin y) = 0$$

$$\sin y = -xe^{-x}$$

$$y = \arcsin(-xe^{-x})$$

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	-0.0906	-0.1005	0.0099	--0.1003	0.0097
y(0.2)	-0.1645	-0.2031	0.0386	-0.2027	0.0382
y(0.3)	-0.2241	-0.3100	0.0859	-0.3094	0.0853
y(0.4)	-0.2714	-0.4241	0.1527	-0.4233	0.1519
y(0.5)	-0.3081	-0.5494	0.2413	-0.5481	0.2400

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $(x^2 - y^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$, $y(1) = 0$

$$(x^2 - y^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{(x^2 - 2y^2)}$$

$$y = vx \quad , \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-2x(vx)}{(x^2 - 2(vx)^2)} = \frac{-2v}{(1-2v^2)}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-2v}{(1-2v^2)} - v = \frac{2v^3 - 3v}{(1-v^2)}$$

$$\frac{1-v^2}{2v^3 - 3v}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1-v^2}{2v^3 - 3v}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3}\ln|3 - 2v^2| - \frac{1}{3}\ln|v| = \ln|x| + \ln c_1$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + \ln c_1$$

$$y(3x^2 - 2y^2) = c$$

$$y(1) = 0$$

$$\therefore c = 0$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(1.1) = \pm 1.2845$

$y(1.2) = \pm 1.3416$

$y(1.3) = \pm 1.3964$

$y(1.4) = \pm 1.4491$

$y(1.5) = \pm 1.5000$

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $y' + y = xy^3$, $y(0) = 1$

$$y' + y = xy^3$$

$$y^{-3}y' + y^{-2} = x$$

$$v = y^{-2} \qquad v' = -2y^{-3}y'$$

$$-\frac{1}{2}v' + v = x$$

$$e^{\int -2dx}dv - 2\,e^{\int -2dx}v\,dx + 2\,e^{\int -2dx}x\,dx = 0$$

$$d(ve^{-2x}) + 2\,e^{-2x}dx = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int d(ve^{-2x}) + \int 2e^{-2x}dx = 0$$

$$v = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$$

$$y^{-2} = \frac{2x+1}{2} + ce^{2x}$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$

$$y^{-2} = \frac{2x+1}{2} + \frac{e^{2x}}{2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{e^{2x}+2x+1}}$$

	ผลเฉลยโดย	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
	วิธีวิเคราะห์	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	±0.9088	0.9083	0.0005	0.9088	0.0000
y(0.2)	±0.8316	0.8308	0.0008	0.8316	0.0000
y(0.3)	±0.7645	0.7636	0.0009	0.7645	0.0000
y(0.4)	±0.7049	0.7038	0.0011	0.7049	0.0000
y(0.5)	±0.6511	0.6500	0.0011	0.6510	0.0001

***หมายเหตุ ค่าผิดพลาดเป็นค่าผิดพลาดที่น้อยที่สุด**

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $2xy\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$, $y(0) = 1$

$$2xy\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$$
$$2xy\,dx + x^2\,dy + dy = 0$$
$$d(x^2y) + dy = 0$$
$$\int d(x^2y) + \int dy = 0$$
$$x^2y + y + c = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$\therefore c = -1$$
$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	ผลเฉลยโดย	โดยวิธีออย์เลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
	วิธีวิเคราะห์	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.9901	0.9901	0.0000	0.9901	0.0000
y(0.2)	0.9615	0.9610	0.0005	0.9607	0.0008
y(0.3)	0.9174	0.9142	0.0032	0.9138	0.0036
y(0.4)	0.8621	0.8522	0.0099	0.8516	0.0105
y(0.5)	0.8000	0.7777	0.0223	0.7769	0.0231

ผลเฉลยโดยวิธีออย์เลอร์ที่ดัดแปลงแล้วให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

การหาผลเฉลยของสมการ $y' = f(x)$

ตัวอย่างที่ 1 $\frac{1}{y'} = x^2 + 1$, $y(0) = 0$

$$\frac{1}{y'} = x^2 + 1$$

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$dy = \frac{1}{x^2 + 1}dx$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x^2 + 1}dx$$

$$y = \arctan x + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = 0$$

$$y = \arctan x$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.0997	0.0995	0.0002	0.0997	0.0000
y(0.2)	0.1974	0.1971	0.0003	0.1974	0.0000
y(0.3)	0.2915	0.2910	0.0005	0.2915	0.0000
y(0.4)	0.3805	0.3800	0.0005	0.3805	0.0000
y(0.5)	0.4636	0.4631	0.0005	0.4637	0.0001

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

ตัวอย่างที่ 2 $\ln y' + 1 = x$, $y(0) = 1$

$$\ln y' + 1 = x$$

$$y' = e^{x-1}$$

$$dy = e^{x-1}dx$$

$$\int dy = \int e^{x-1}dx$$

$$y = ce^{x-1}$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c = e$$

$$y = e^x$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออย์เลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	1.1051	1.0387	0.0664	1.0387	0.0664
y(0.2)	1.2214	1.0815	0.1399	1.0815	0.1399
y(0.3)	1.3499	1.1288	0.2211	1.1287	0.2212
y(0.4)	1.4918	1.1811	0.3107	1.1809	0.3109
y(0.5)	1.6487	1.2389	0.4098	1.2387	0.4100

ผลเฉลยโดยวิธีออย์เลอร์ที่ดัดแปลงแล้วให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $(y')^2 - 2xy' + x^2 = 0 \, , y(0) = 0$

$$(y')^2 - 2xy' + x^2 = 0$$
$$(y' - x)^2 = 0$$
$$y' = x$$
$$dy = x\,dx$$
$$\int dy = \int x dx$$
$$y = \frac{x^2}{2} + c$$
$$y(0) = 0$$
$$\therefore c = 0$$
$$y = \frac{x^2}{2}$$

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออย์เลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.0050	0.0050	0.0000	0.0050	0.0000
y(0.2)	0.0200	0.0200	0.0000	0.0200	0.0000
y(0.3)	0.0450	0.0450	0.0000	0.0450	0.0000
y(0.4)	0.0800	0.0800	0.0000	0.0800	0.0000
y(0.5)	0.1250	0.1250	0.0000	0.1250	0.0000

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $\frac{y'+1}{y'} = x + 1 \, , y(1) = 1$

$$\frac{y'+1}{y'} = x + 1$$
$$y' + 1 = xy' + y'$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$xy' = 1$$

$$dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$y = \ln|x| + c$$

$$y(1) = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$y = \ln|x| + 1$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(1.1)	1.0953	1.0955	0.0002	1.0953	0.0000
y(1.2)	1.1823	1.1826	0.0003	1.1823	0.0000
y(1.3)	1.2624	1.2627	0.0003	1.2624	0.0000
y(1.4)	1.3365	1.3369	0.0004	1.3365	0.0000
y(1.5)	1.4055	1.4060	0.0005	1.4055	0.0000

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $\tan y' = x$, $y(0) = 0$

$$\tan y' = x$$

$$y' = \arctan x$$

$$dy = \arctan x\, dx$$

$$\int dy = \int \arctan x dx$$

$$y = x\arctan x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = -1$$

$$y = x\arctan x + \sqrt{1-x^2} - 1$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.0050	0.0050	0.0000	0.0050	0.0000
y(0.2)	0.0193	0.0198	0.0005	0.0199	0.0006
y(0.3)	0.0414	0.0443	0.0029	0.0444	0.0030
y(0.4)	0.0687	0.0779	0.0092	0.0780	0.0093
y(0.5)	0.0978	0.1201	0.0223	0.1203	0.0225

ผลเฉลยโดยวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงแล้วให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

การหาผลเฉลยของสมการ $y' = f(y)$

ตัวอย่างที่ 1 $y' = -3y^3$, $y(1) = 0$

$$y' = -3y^3$$

$$-\frac{1}{3}y^{-3}\,dy = dx$$

$$-\int\frac{1}{3}y^{-3}dy = \int dx$$

$$\frac{y^{-2}}{6} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(1) = 0$$

$$\therefore c = \frac{1}{6}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(1.1)	±0.7833	0.7790	0.0043	0.7904	0.0071
y(1.2)	±0.6565	0.6642	0.0077	0.6741	0.0176
y(1.3)	±0.5707	0.5895	0.0188	0.5976	0.0269
y(1.4)	±0.5077	0.5357	0.0280	0.5423	0.0346
y(1.5)	±0.4588	0.4945	0.0357	0.5000	0.0412

*หมายเหตุ ค่าผิดพลาดเป็นค่าผิดพลาดที่น้อยที่สุด

ผลเฉลยโดยวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงแล้วให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

ตัวอย่างที่ 2 $y' = e^y$, $y(0) = 0$

$$y' = e^y$$

$$e^{-y}\,dy = dx$$

$$-e^{-y} = x + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = -1$$

$$y = -\ln(1 - x)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

33843

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.1054	0.1056	0.0002	0.1054	0.0000
y(0.2)	0.2231	0.2237	0.0006	0.2231	0.0000
y(0.3)	0.3567	0.3578	0.0011	0.3567	0.0000
y(0.4)	0.5108	0.5127	0.0019	0.5108	0.0000
y(0.5)	0.6931	0.6965	0.0034	0.6932	0.0001

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

ตัวอย่างที่ 3 $y' = \sec y$, $y(0) = 0$

$$y' = \sec y$$
$$\cos y \, dy = dx$$
$$\int \cos y dy = \int dx$$
$$\sin y = \frac{x^2}{2} + c$$
$$y(0) = 0$$
$$\therefore c = 0$$
$$\sin y = \frac{x^2}{2}$$
$$y = \arcsin \frac{x^2}{2}$$

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.0050	0.1003	0.0953	0.1002	0.0952
y(0.2)	0.0200	0.2015	0.1815	0.2014	0.1814
y(0.3)	0.0450	0.3050	0.2600	0.3047	0.2597
y(0.4)	0.0801	0.4120	0.3319	0.4115	0.3314
y(0.5)	0.1253	0.5243	0.3990	0.5236	0.3983

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

ตัวอย่างที่ 4 $y' = \sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 0$

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = dx$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int dx$$

$$\arcsin y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = 0$$

$$\arcsin y = \frac{x^2}{2}$$

$$y = \sin\frac{x^2}{2}$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.0050	0.0998	0.0948	0.0998	0.0948
y(0.2)	0.0200	0.1985	0.1785	0.1987	0.1787
y(0.3)	0.0450	0.2953	0.2503	0.2955	0.2505
y(0.4)	0.0800	0.3891	0.3091	0.3894	0.3094
y(0.5)	0.1247	0.4791	0.3544	0.4794	0.3547

ผลเฉลยโดยวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงแล้วให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $y' = 2 + 3y + y^2$, $y(0) = 0$

$$y' = 2 + 3y + y^2$$

$$y' = (y+2)(y+1)$$

$$\frac{dy}{(y+1)(y+2)} = dx$$

$$\frac{dy}{y+1} - \frac{dy}{y+2} = dx$$

$$\int\frac{dy}{y+1} - \int\frac{dy}{y+2} = \int dx$$

$$\ln\left|\frac{y+1}{y+2}\right| + c_1 = x$$

$$c(y+1) = e^x(y+2)$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = 2$$

$$2(y+1) = e^x(y+2)$$

$$y = \frac{2e^x - 2}{2 - e^x}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.2351	0.2386	0.0035	0.2351	0.0000
y(0.2)	0.5687	0.5814	0.0127	0.5687	0.0000
y(0.3)	1.0763	1.1148	0.0385	1.0761	0.0002
y(0.4)	1.9356	2.0678	0.1322	1.9351	0.0005
y(0.5)	3.6935	4.4080	0.7145	3.6994	0.0059

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6

การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(x,y,y')$

ตัวอย่างที่ 1 $y'' + 2y' + e^{-y}x = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$

$y'' + 2y' + e^{-y}x = 0$

$e^{y}y'' + 2e^{y}y' + x = 0$

$u = e^{y}y'$ $\qquad u' = e^{y}y'' + e^{y}y'$

$u' + u + x = 0$

$e^{x}\,du + e^{x}u\,dx + dx = 0$

$d(e^{x}u) + dx = 0$

$\int d(e^{x}u) + \int dx = 0$

$e^{x}u + x = k$

$y'(0) = 0$

$\therefore k = 0$

$u = -xe^{-x}$

$y' = -xe^{-x}$

$dy = -xe^{-x}\,dx$

$\int dy = \int -xe^{-x}dx$

$y = xe^{-x} + e^{-x} + c$

$y(0) = 0$

$\therefore c = -1$

$y = xe^{-x} + e^{-x} - 1$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = -0.0047$

$y(0.2) = -0.0175$

$y(0.3) = -0.0369$

$y(0.4) = -0.0616$

$y(0.5) = -0.0902$

ไม่มีผล

ตัวอย่างที่ 2 $y'y'' - 2(y')^2 + yy' + xy'' - 2xy' + xy = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y(2) = -2$

$y'y'' - 2(y')^2 + yy' + xy'' - 2xy' + xy = 0$

$(y'' - 2y' + y)(y' + x) = 0$

$y' = -x$

$dy = -x\,dx$

$\int dy = \int -x\,dx$

$y = -\frac{x^2}{2} + k$

$y(0) = 0$ $\qquad y(2) = -2$

$\therefore k = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

$y'' - y' + y = 0$

$y = (c_1 + c_2x)e^x$

$y(0) = 0 \qquad y(2) = -2$

$\therefore c_1 = 0 , c_2 = -e^{-2}$

$y = -xe^{x-2}$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = -0.0050$ หรือ -0.0149

$y(0.2) = -0.0200$ หรือ -0.0331

$y(0.3) = -0.0450$ หรือ -0.0548

$y(0.4) = -0.0800$ หรือ -0.0808

$y(0.5) = -0.1250$ หรือ -0.1116

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $yy'' + (y')^2 + yy' + e^{-x} = 0 , y'(0) = 0 , y(0) = 0$

$yy'' + (y')^2 + yy' + e^{-x} = 0$

$u = yy' \qquad u' = yy'' + (y')^2$

$u' + u + e^{-x} = 0$

$e^x du + e^x u\,dx + dx = 0$

$d(e^x u) + dx = 0$

$\int d(e^x u) + \int dx = 0$

$e^x u + x = k$

$e^x yy' + x = k$

$y'(0) = 0 , y(0) = 0$

$\therefore k = 0$

$yy' = -xe^{-x}$

$y\,dy = -xe^{-x}dx$

$\int ydy = \int -xe^{-x}dx$

$$\frac{y^2}{2} = xe^{-x} + e^{-x} + c$$

$y(0) = 0$

$\therefore c = 1$

$$y = \pm\sqrt{2(xe^{-x} + e^{-x} + 1)}$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = \pm 1.9977$

$y(0.2) = \pm 1.9912$

$y(0.3) = \pm 1.9814$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$y(0.4) = \pm 1.9690$

$y(0.5) = \pm 1.9544$

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $y'' = (x \sec y \tan y)\, y' + \sec y$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$

$$y'' = (x \sec y \tan y)\, y' + \sec y$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dx \sec y}{dx}$$

$$y' = x \sec y + k(y)$$

$$y'' = (x \sec y \tan y)\, y' + \sec y + k'(y)$$

$$\therefore\ k'(y) = 0 \text{ , } k(y) = 0$$

$$y' = x \sec y$$

$$\cos y\, dy = x\, dx$$

$$\int \cos y\, dy = \int x\, dx$$

$$-\sin y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore\ c = 0$$

$$y = \arcsin\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = -0.0050$

$y(0.2) = -0.0200$

$y(0.3) = -0.0450$

$y(0.4) = -0.0801$

$y(0.5) = -0.1253$

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $y'' = 2xyy' + y^2$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$$y'' = 2xyy' + y^2$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d(xy^2)}{dx}$$

$$y' = xy^2 + k(y)$$

$$y'' = 2xyy' + y^2 + k'(y)$$

$$\therefore\ k'(y) = 0 \text{ , } k(y) = 0$$

$$y' = xy^2$$

$$y^{-2}\, dy = x\, dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int y^{-2}dy = \int x dx$$

$$-y^{-1} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c = -1$$

$$y = \frac{2}{1-x^2}$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

y(0.1) = 2.0202

y(0.2) = 2.0833

y(0.3) = 2.1978

y(0.4) = 2.3810

y(0.5) = 2.6667

ไม่มีผล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 7

การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(x,y)$

ตัวอย่างที่ 1 $xy'' - yy'' - xy + y^2 = 0$, $y'(1) = 1$, $y(1) = 1$

$$xy'' - yy'' - xy + y^2 = 0$$
$$(y'' - y)(x - y) = 0$$
$$y = x$$
$$y'' = y$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = y$$
$$p^2 = y^2 + k$$
$$(y')^2 = y^2 + k$$
$$y'(1) = 1 \text{ , } y(1) = 1$$
$$\therefore k = 0$$
$$y' = \pm y$$
$$\frac{dy}{y} = \pm dx$$
$$\ln|y| = \pm x + c$$
$$y(1) = 1$$
$$\therefore c = -1$$
$$y = e^{\pm(x-1)}$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.1000หรือ 0.4066 หรือ 2.4596	1.1053	0.6987	1.1053	0.6987
y(0.2)	0.2000หรือ 0.4493 หรือ 2.2255	1.2216	0.7723	1.2216	0.7723
y(0.3)	0.3000หรือ 0.4966 หรือ 2.0138	1.3052	0.7086	1.3052	0.7086
y(0.4)	0.4000หรือ 0.5488 หรือ 1.8221	1.4923	0.3298	1.4923	0.3298
y(0.5)	0.5000หรือ 0.6065 หรือ 1.6487	1.6494	0.0007	1.6494	0.0007

*หมายเหตุ ค่าผิดพลาดเป็นค่าผิดพลาดที่น้อยที่สุด

ไม่มีผล

ตัวอย่างที่ 2 $yy'' - xy'' - 2xy + 2x^2 = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$

$$yy'' - xy'' - 2xy + 2x^2 = 0$$
$$(y'' - 2x)(y - x) = 0$$
$$y = x$$
$$y'' = 2x$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y' = p$$

$$\frac{dp}{dx} = 2x$$

$$dp = 2x\,dx$$

$$\int dp = \int 2x dx$$

$$p = x^2 + k$$

$$y' = x^2 + k$$

$$y'(0) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

$$dy = x^2\,dx$$

$$\int dy = \int x^2 dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = 0$$

$$y = \frac{x^3}{3}$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

y(0.1) = 0.1000 หรือ 0.0003

y(0.2) = 0.2000 หรือ 0.0027

y(0.3) = 0.3000 หรือ 0.0090

y(0.4) = 0.4000 หรือ 0.0213

y90.5) = 0.5000 หรือ 0.0417

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $2y + 2 = x^2(y'') + (y'')^2$, $y'(1) = 0$, $y(1) = 1$

$$2y + 2 = x^2(y'') + (y'')^2$$

$$k = y''(1)$$

$$2y + 2 = x^2k + k^2$$

$$y(1) = 2$$

$$2 = k + k^2$$

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$k = -2 , 1$$

$$k = -2$$

$$y = -x^2 + 1$$

$$k = 1$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} + 4$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

y(1.1) = - 0.2100 หรือ 4.1050

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

y(1.2) = - 0.4400 หรือ 4.2200

y(1.3) = - 0.6900 หรือ 4.3450

y(1.4) = - 0.9600 หรือ 4.4800

y(1.5) = - 1.2500 หรือ 4.6250

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $x^2(y'')^2 = 4y$, $y'(1) = 2$, $y(1) = 1$

$x^2(y'')^2 = 4y$

$k = y''(1)$

$k^2 = 4y$

$y(1) = 1$

$k^2 = 4$

$k = \pm 2$

$y = x^2$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(1.1)	1.2100	2.2105	1.0005	2.2103	1.0003
y(1.2)	1.4400	2.4432	1.0032	2.4428	1.0028
y(1.3)	1.6900	2.7004	1.0104	2.6997	1.0097
y(1.4)	1.9600	2.9847	1.0247	2.9837	1.0237
y(1.5)	2.2500	3.2988	1.0488	3.2974	1.0474

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $2y = x(y'') - x^2$, $y'(1) = \frac{3}{2}$, $y(1) = 1$

$2y = x(y'') - x^2$

$k = y''(1)$

$2y = xk - x^2$

$y(1) = 1$

$k = 1$

$2y = x + x^2$

$y = \frac{x + x^2}{2}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออย์เลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(1.1)	1.1550	1.6579	0.5029	1.6578	0.5028
y(1.2)	1.3200	1.8324	0.5124	1.8321	0.5121
y(1.3)	1.4950	2.0253	0.5303	2.0248	0.5298
y(1.4)	1.6800	2.2385	0.5585	2.2377	0.5577
y(1.5)	1.8750	2.4741	0.5991	2.4731	0.5981

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 8

การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(x,y')$

ตัวอย่างที่ 1 $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$

$$(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

$$p = y' \qquad p' = y''$$

$$(1 + x^2)p' + (p)^2 + 1 = 0$$

$$-\frac{dp}{p^2+1} = \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int -\frac{dp}{p^2+1} = \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\arctan p + \arctan x = k_1$$

$$\tan(\arctan p + \arctan x) = \frac{1}{k_2}$$

$$\frac{p+x}{1-px} = \frac{1}{k_2}$$

$$p = \frac{1-k_2x}{x+k_2}$$

$$y' = \frac{1-k_2x}{x+k_2}$$

$$y'(0) = 1$$

$$\therefore k_2 = 1$$

$$y' = \frac{1-x}{x+1}$$

$$dy = \frac{1-x}{x+1}dx$$

$$\int dy = \int \frac{1-x}{x+1}dx$$

$$y = 2\ln|x+1| - x + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = 0$$

$$y = 2\ln|x+1| - x$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	-0.0047	1.1053	1.1100	1.1052	1.1099
y(0.2)	-0.0177	1.2216	1.2393	1.2214	1.2391
y(0.3)	-0.0376	1.3502	1.3878	1.3500	1.3876
y(0.4)	-0.0635	1.4923	1.5538	1.4918	1.5533
y(0.5)	-0.0945	1.6494	1.7439	1.6494	1.7439

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $xy'' - (y')^3 - y' = 0 \, , \, y'(1) = 1 \, , \, y(0) = 0$

$$xy'' - (y')^3 - y' = 0$$

$$p = y' \quad p' = y''$$

$$xp' - p^3 - p = 0$$

$$\frac{dp}{p(p^2+1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)dp = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|p| - \frac{1}{2}\ln|p^2+1| + k = \ln|x|$$

$$p^2 = \frac{x^2}{k-x^2}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{k-x^2}$$

$$y'(1) = 1$$

$$\therefore k = 2$$

$$y' = \pm\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$dy = \pm\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx$$

$$\int dy = \pm\int\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx$$

$$y = \pm 2\sqrt{2-x^2} + c$$

$$y(0) = 0$$

$$y = \pm 2(\sqrt{2-x^2} - \sqrt{2})$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	±0.0071	1.1053	1.0982	1.1052	1.0981
y(0.2)	±0.0284	1.2216	1.1932	1.2214	1.1930
y(0.3)	±0.0644	1.3502	1.2858	1.3500	1.2856
y(0.4)	±0.1155	1.4923	1.3768	1.4918	1.3763
y(0.5)	±0.1827	1.6494	1.4667	1.6494	1.4667

*หมายเหตุ ค่าผิดพลาดเป็นค่าผิดพลาดที่น้อยที่สุด

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $y' = xy'' + (y'')^2 \, , \, y'(-1) = 2 \, , \, y(-1) = 0$

$$y' = xy'' + (y'')^2$$

$$p = y' \qquad k = y''(-1)$$

$$p = kx + k^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y'(-1) = 2$$

$$2 = -k + k^2$$

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$$k = 2, -1$$

$$y' = 2x + 4$$

$$\int dy = \int (2x+4)dx$$

$$y = x^2 + 4x + c_1$$

$$y(-1) = 0$$

$$\therefore c_1 = 3$$

$$y = x^2 + 4x + 3$$

$$y' = -x + 1$$

$$dy = (1 - x)dx$$

$$\int dy = \int (1-x)dx$$

$$y = \frac{-x^2}{2} + x + c_2$$

$$y(-1) = 0$$

$$\therefore c_2 = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{-x^2}{2} + x + \frac{3}{2}$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(-0.9)	0.2100 หรือ 0.1950	2.2105	2.0005	2.2103	2.0003
y(-0.8)	0.4400 หรือ 0.3800	2.4432	2.0032	2.4428	2.0028
y(-0.7)	0.6900 หรือ 0.5550	2.7004	2.0104	2.6997	2.0097
y(-0.6)	0.9600 หรือ 0.7200	2.9847	2.0247	2.9837	2.0237
y(-0.5)	1.2500 หรือ 0.8750	3.2988	2.0488	3.2974	2.0474

*หมายเหตุ ค่าผิดพลาดเป็นค่าผิดพลาดที่น้อยที่สุด

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $xy'' + y' + xy' = 1$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$

$$xy'' + y' + xy' = 1$$

$$u = xy' \qquad u' = xy'' + y'$$

$$u' + u = 1$$

$$e^x du + e^x u\, dx = 1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$d(e^x u) = dx$

$e^x u = x + k$

$e^x y' = x + k$

$y'(0) = 0$

$\therefore k = 0$

$y' = xe^{-x}$

$dy = xe^{-x}\,dx$

$\int dy = \int xe^{-x} dx$

$y = -e^{-x}(x + 1) + c$

$y(0) = 0$

$\therefore c = 1$

$y = -e^{-x}(x + 1) + 1$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = 0.0047$

$y(0.2) = 0.0175$

$y(0.3) = 0.0369$

$y(0.4) = 0.0616$

$y(0.5) = 0.0902$

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $y' - 3 = x - (y'')^2$, $y'(2) = 1$, $y(2) = 1$

$y' - 3 = x - (y'')^2$

$k = y''(2)$

$y' - 3 = x - k^2$

$y'(2) = 1$

$k^2 = 4$

$k = \pm 2$

$y' - 3 = x - 4$

$dy = x\,dx - dx$

$y = \frac{x^2}{2} - x + c$

$y(2) = 1$

$\therefore c = 1$

$y = \frac{x^2}{2} - x + 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	ผลเฉลยโดย	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
	วิธีวิเคราะห์	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(2.1)	1.1050	1.1053	0.0003	1.1052	0.0002
y(2.2)	1.2200	1.2216	0.0016	1.2214	0.0014
y(2.3)	1.3450	1.3502	0.0052	1.3500	0.0050
y(2.4)	1.4800	1.4923	0.0123	1.4918	0.0118
y(2.5)	1.6250	1.6494	0.0244	1.6494	0.0244

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 9

การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(y,y')$

ตัวอย่างที่ 1 $2yy'' = (y')^2 + 1$, $y'(-1) = 0$, $y(-1) = 1$

$$2yy'' = (y')^2 + 1$$

$$p = y' \qquad p' = p\frac{dp}{dy}$$

$$2y\,p\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$$

$$\frac{2p}{p^2+1}dp = \frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{2p}{p^2+1}dp = \int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|p^2+1| = \ln|ky|$$

$$p^2 = ky - 1$$

$$y' = \pm\sqrt{ky-1}$$

$$y'(-1) = 0 \text{ , } y(-1) = 1$$

$$\therefore k = 1$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \pm dx$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \pm\int dx$$

$$4(y-1) = (x+c)^2$$

$$y(-1) = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$y = \frac{(x+1)^2+4}{4}$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(-0.9) = 1.0025$

$y(-0.8) = 1.0100$

$y(-0.7) = 1.0225$

$y(-0.6) = 1.0400$

$y(-0.5) = 1.0625$

ไม่มีผล

ตัวอย่างที่ 2 $2yy'' = (y')^2$, $y'(-1) = 1$, $y(-1) = 1$

$$2yy'' = (y')^2$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$2y\,p\frac{dp}{dy} = p^2$$

$$2\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\int 2\frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|p| = \frac{1}{2}\ln|ky|$$

$$p = \sqrt{ky}$$

$$y' = \sqrt{ky}$$

$$y'(-1) = 1 \text{ , } y(-1) = 1$$

$$\therefore k = 1$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

$$2\sqrt{y} = x + c$$

$$y(-1) = 1$$

$$\therefore c = 3$$

$$y = 4(x + 3)^2$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(-0.9)	17.2600	1.1053	16.1547	1.1052	16.1548
y(-0.8)	19.3600	1.2216	18.1384	1.2214	18.1386
y(-0.7)	21.1600	1.3502	19.8098	1.3500	19.8100
y(-0.6)	23.0400	1.4923	21.5472	1.4918	21.5477
y(-0.5)	25.0000	1.6494	23.3506	1.6494	23.3506

ผลเฉลยโดยวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงแล้วให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $y'' = y'e^y$, $y'(0) = 0$, $y(0) = -1$

$$y'' = y'e^y$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = pe^y$$

$$dp = e^y\,dy$$

$$\int dp = \int e^y dy$$

$$p = e^y + k$$

$$y' = e^y + k$$

$$y'(0) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\therefore k = -1$

$y' = e^y - 1$

$$\frac{dy}{e^y - 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{e^y - 1} = \int dx$$

$1 - e^{-y} = ce^x$

$y(0) = -1$

$\therefore c = 1 - e$

$y = -\ln\left|1 - (1-e)e^x\right|$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = -1.0644$

$y(0.2) = -1.1310$

$y(0.3) = -1.1998$

$y(0.4) = -1.2707$

$y(0.5) = -1.3436$

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$

$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$

$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0$$

$$\frac{pdp}{p^2 + 1} = -\frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{pdp}{p^2 + 1} = -\int \frac{dy}{y}$$

$$p^2 = \frac{k - y^2}{y^2}$$

$y'(0) = 1 \qquad y(0) = 1$

$\therefore k = 2$

$$p = \pm\frac{\sqrt{2 - y^2}}{y}$$

$$y' = \pm\frac{\sqrt{2 - y^2}}{y}$$

$$\frac{y}{\sqrt{2 - y^2}}\,dy = \pm\,dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int \frac{y}{\sqrt{2-y^2}}\,dy = \pm\int dx$$

$$-\sqrt{2-y^2} = \pm x + c$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore\ c = -1$$

$$y = \pm\sqrt{2-(x-1)^2}$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	±1.0909	1.1053	0.0144	1.1053	0.0144
y(0.2)	±1.1662	1.2216	0.0554	1.2216	0.0554
y(0.3)	±1.2288	1.3052	0.0764	1.3052	0.0764
y(0.4)	±1.2806	1.4923	0.2117	1.4923	0.2117
y(0.5)	±1.3229	1.6494	0.3265	1.6494	0.3265

*หมายเหตุ ค่าผิดพลาดเป็นค่าผิดพลาดที่น้อยที่สุด

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $yy'' = (y')^2$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$

$$yy'' = (y')^2$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|p| = \ln|ky|$$

$$p = ky$$

$$y' = ky$$

$$y'(0) = 1\ ,y(0) = 1$$

$$\therefore\ k = 1$$

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + c$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore\ c = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$y = e^x$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	1.1052	1.1053	0.0001	1.1053	0.0001
y(0.2)	1.2214	1.2216	0.0002	1.2216	0.0002
y(0.3)	1.3499	1.3052	0.0447	1.3052	0.0447
y(0.4)	1.4918	1.4923	0.0005	1.4923	0.0005
y(0.5)	1.6487	1.6494	0.0007	1.6494	0.0007

ไม่มีผล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 10

การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(x)$

ตัวอย่างที่ 1 $(y'' - 3x^2)^2 = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$$y'' = 3x^2$$

$$p = y'$$

$$\frac{dp}{dx} = 3x^2$$

$$dp = 3x^2\,dx$$

$$\int dp = \int 3x^2 dx$$

$$p = x^3 + k$$

$$y' = x^3 + k$$

$$y'(0) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

$$y' = x^3$$

$$dy = x^3\,dx$$

$$\int dy = \int x^3 dx$$

$$y = \frac{x^4}{4} + c$$

$$y(0) = 1$$

$$y = \frac{x^4}{4} + 1$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = 1.0000$

$y(0.2) = 1.0004$

$y(0.3) = 1.0020$

$y(0.4) = 1.0064$

$y(0.5) = 1.0156$

ไม่มีผล

ตัวอย่างที่ 2 $(y'')^2 = \frac{x^2}{x^2+1}$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$$y'' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$p = y'$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$dp = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int dp = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$p = \sqrt{x^2+1} + k$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} + k$$

$$y'(0) = 0$$

$$\therefore k = -1$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} - 1$$

$$dy = (\sqrt{x^2+1} - 1)\,dx$$

$$\int dy = \int (\sqrt{x^2+1} - 1)dx$$

$$y = \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 - x + c$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 - x + \frac{1}{3}$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = 0.9100$

$y(0.2) = 0.8404$

$y(0.3) = 0.7920$

$y(0.4) = 0.7662$

$y(0.5) = 0.7650$

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $\arcsin(y'') = x$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$$y'' = \sin x$$

$$p = y'$$

$$\frac{dp}{dx} = \sin x$$

$$dp = \sin x\,dx$$

$$\int dp = \int \sin x dx$$

$$p = -\cos x + k$$

$$y' = -\cos x + k$$

$$y'(0) = 0$$

$$\therefore k = 1$$

$$y' = -\cos x + 1$$

$$dy = (-\cos x + 1)\,dx$$

$$\int dy = \int (-\cos x + 1)dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y = -\sin x + x + c$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$y = -\sin x + x + 1$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = 1.0001$

$y(0.2) = 1.0013$

$y(0.3) = 1.0045$

$y(0.4) = 1.0106$

$y(0.5) = 1.0206$

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $\sqrt{y''+1} = x$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$$\sqrt{y''+1} = x$$

$$y'' = x^2 - 1$$

$$p = y'$$

$$\frac{dp}{dx} = x^2 - 1$$

$$dp = (x^2 - 1)\,dx$$

$$\int dp = \int (x^2 - 1)dx$$

$$p = \frac{x^3}{3} - x + k$$

$$y' = \frac{x^3}{3} - x + k$$

$$y'(0) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

$$y' = \frac{x^3}{3} - x$$

$$dy = (\frac{x^3}{3} - x)\,dx$$

$$\int dy = \int (\frac{x^3}{3} - x)dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + 1$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

y(0.1) = 0.9950

y(0.2) = 0.9801

y(0.3) = 0.9557

y(0.4) = 0.9221

y(0.5) = 0.9252

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $y'' = e^{x+1}$, $y'(-1) = 0$, $y(-1) = 1$

$$y'' = e^{x+1}$$

$$p = y'$$

$$\frac{dp}{dx} = e^{x+1}$$

$$dp = e^{x+1}\,dx$$

$$\int dp = \int e^{x+1} dx$$

$$p = e^{x+1} + k$$

$$y' = e^{x+1} + k$$

$$y'(-1) = 0$$

$$\therefore k = -1$$

$$y' = e^{x+1} - 1$$

$$dy = (e^{x+1} - 1)\,dx$$

$$\int dy = \int (e^{x+1} - 1) dx$$

$$y = e^{x+1} - x + c$$

$$y(-1) = 1$$

$$y = e^{x+1} - x + 1$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

y(- 0.9) = 1.2052

y(- 0.8) = 1.4214

y(- 0.7) = 1.6499

y(- 0.6) = 1.8918

y(- 0.5) = 2.1487

ไม่มีผล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 11

การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(y)$

ตัวอย่างที่ 1 $y'' = y + 1 , y'(0) = 1 , y(0) = 0$

$$y'' = y + 1$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = y + 1$$

$$p\,dp = (y + 1)\,dy$$

$$\int p\,dp = \int (y+1)\,dy$$

$$p^2 = y^2 + 2y + k$$

$$y'(0) = 1$$

$$\therefore k = 1$$

$$p^2 = (y + 1)^2$$

$$p = \pm(y + 1)$$

$$y' = \pm(y + 1)$$

$$\frac{dy}{y+1} = \pm dx$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \pm \int dx$$

$$\ln |y+1| = \pm(x + c)$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = 0$$

$$y = e^{\pm x} - 1$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตต้า	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	-0.0952 หรือ 0.1052	1.1053	1.0001	1.1053	1.0001
y90.2)	-0.1813 หรือ 0.2214	1.2216	1.0002	1.2216	1.0002
y(0.3)	-0.2592 หรือ 0.3499	1.3052	0.9553	1.3052	0.9553
y(0.4)	-0.3297 หรือ 0.4918	1.4923	1.0005	1.4923	1.0005
y(0.5)	-0.3935 หรือ 0.6487	1.6494	1.0007	1.6494	1.0007

*หมายเหตุ ค่าผิดพลาดเป็นค่าผิดพลาดที่น้อยที่สุด

ไม่มีผล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $y'' = 2y^3$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$

$$y'' = 2y^3$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = 2y^3$$

$$p\,dp = 2y^3\,dy$$

$$\int p\,dp = \int 2y^3 dy$$

$$p^2 = y^4 + k$$

$$y'(0) = 1 \qquad y(0) = 1$$

$$\therefore k = 0$$

$$p = \pm y^2$$

$$y^{-2}\,dy = \pm dx$$

$$\int y^{-2} dy = \pm \int dx$$

$$-y^{-1} = \pm(x + c)$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore \frac{1}{y} = \pm x + 1$$

$$y = \frac{1}{\pm x + 1}$$

	ผลเฉลยโดย	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
	วิธีวิเคราะห์	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.9091 หรือ 1.1111	1.1053	0.0058	1.1053	0.0058
y(0.2)	0.8333 หรือ 1.2500	1.2216	0.0284	1.2216	0.0284
y(0.3)	0.7692 หรือ 1.4286	1.3052	0.1234	1.3052	0.1234
y(0.4)	0.7143 หรือ 1.6667	1.4923	0.1744	1.4923	0.1744
y(0.5)	0.6667 หรือ 2.0000	1.6494	0.3506	1.6494	0.3506

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $y'' = e^{2y}$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$

$$y'' = e^{2y}$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$p\frac{dp}{dy} = e^{2y}$$

$$p\,dp = e^{2y}\,dy$$

$$\int p\,dp = \int e^{2y}\,dy$$

$$p^2 = e^{2y} + k$$

$$y'(0) = 1 \text{ , } y(0) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

$$p = \pm e^{y}$$

$$y' = \pm e^{y}$$

$$e^{-y}\,dy = \pm dx$$

$$\int e^{-y}dy = \pm \int dx$$

$$-e^{-y} = \pm x + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = -1$$

$$e^{-y} = \pm x + 1$$

$$y = -\ln(1 - x)$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.1054	1.1053	1.0001	1.1053	1.0001
y(0.2)	0.2231	1.2216	1.0015	1.2216	1.0015
y(0.3)	0.3566	1.3052	0.9486	1.3052	0.9486
y(0.4)	0.5128	1.4923	0.9795	1.4923	0.9795
y(0.5)	0.6931	1.6494	0.9563	1.6494	0.9563

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $y'' = y$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$

$$y'' = y$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = y$$

$$\int p\,dp = \int y\,dy$$

$$p^2 = y^2 + k$$

$$y'(0) = 1 \text{ , } y(0) = 1$$

$$\therefore k = 0$$

$$p = \pm y$$

$$y' = \pm y$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int \frac{1}{y} dy = \pm \int dx$$

$$\ln|y| = \pm x + c$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c = 0$$

$$y = e^{\pm x}$$

	ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	1.0151 หรือ 0.9048	1.1053	0.0002	1.1053	0.0002
y(0.2)	1.2214 หรือ 0.8187	1.2216	0.0002	1.2216	0.0002
y(0.3)	1.3499 หรือ 0.7408	1.3052	0.0447	1.3052	0.0447
y(0.4)	1.4918 หรือ 0.6703	1.4923	0.0005	1.4923	0.0005
y(0.5)	1.6487 หรือ 0.6065	1.6494	0.0007	1.6494	0.0007

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $y'' = \frac{\cos y}{2}$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$

$$y'' = \frac{\cos y}{2}$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{\cos y}{2}$$

$$p\,dp = \frac{\cos y}{2}\,dy$$

$$\int p dp = \int \frac{\cos y}{2} dy$$

$$p^2 = \sin y + k$$

$$y'(0) = 0 , y(0) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

$$p = \pm\sqrt{\sin y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\sin y}} = \pm dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- $$\int \frac{dy}{\sqrt{\sin y}} = \pm \int dx$$

$$2 \arcsin (\sqrt{\sin y}) = \pm x + c$$

$$y(0) = 0$$

$$\therefore c = 0$$

$$y = \arcsin (\sin^2(\pm \frac{x}{2}))$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = 0.0025$

$y(0.2) = 0.0100$

$y(0.3) = 0.0225$

$y(0.4) = 0.0400$

$y(0.5) = 0.0625$

ไม่มีผล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 12

การหาผลเฉลยของสมการ $y'' = f(y')$

ตัวอย่างที่ 1 $y' = 2y'' - (y'')^2$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$

$$y' = 2y'' - (y'')^2$$
$$k = y''(0)$$
$$y' = 2k - k^2$$
$$y'(0) = 1$$
$$1 = 2k - k^2$$
$$\therefore k = 1$$
$$y' = 1$$
$$dy = dx$$
$$\int dy = \int dx$$
$$y = x + c$$
$$y(0) = 1$$
$$\therefore c = 1$$
$$y = x + 1$$

	ผลเฉลยโดย	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
	วิธีวิเคราะห์	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	1.1000	1.1053	0.0053	1.1053	0.0053
y(0.2)	1.2000	1.2216	0.0216	1.2216	0.0216
y(0.3)	1.3000	1.3052	0.0052	1.3052	0.0052
y(0.4)	1.4000	1.4923	0.0923	1.4923	0.0923
y(0.5)	1.5000	1.6494	0.1494	1.6494	0.1494

ไม่มีผล

ตัวอย่าง 2 $y'' = \sqrt{2y'y'' - (y'')^2}$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$$y'' = \sqrt{2y'y'' - (y'')^2}$$
$$(y'')^2 - 2y'y'' + (y')^2 = 0$$
$$(y'' - y')^2 = 0$$
$$y'' = y'$$
$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$
$$p\frac{dp}{dy} = p$$
$$dp = dy$$
$$\int dp = \int dy$$
$$p = y + k$$
$$y'(0) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\therefore k = 0$

$y' = y$

$\frac{1}{y}dy = dx$

$\int\frac{1}{y}dy = \int dx$

$\ln|y| = x + c$

$y(0) = 1$

$\therefore c = 0$

$y = e^x$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

$y(0.1) = 1.0151$

$y(0.2) = 1.2214$

$y(0.3) = 1.3499$

$y(0.4) = 1.4918$

$y(0.5) = 1.6487$

ไม่มีผล

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $y'' = -(y')^2$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$

$y'' = -(y')^2$

$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$

$p\frac{dp}{dy} = -p^2$

$-\frac{1}{p}dp = dy$

$\int-\frac{1}{p}dp = \int dy$

$-\ln|p| = y + k$

$y'(0) = 1$, $y(0) = 0$

$\therefore k = 0$

$p = e^{-y}$

$e^y dy = dx$

$\int e^y dy = \int dx$

$e^y = x + c$

$y(0) = 0$

$\therefore c = 1$

$e^y = x + 1$

$y = \ln(x + 1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.09531	1.1053	1.0010	1.1053	1.0010
y(0.2)	0.1823	1.2216	1.0393	1.2216	1.0393
y(0.3)	0.2624	1.3052	1.0428	1.3052	1.0428
y(0.4)	0.3365	1.4923	1.1558	1.4923	1.1558
y90.5)	0.4055	1.6494	1.2439	1.6494	1.2439

ไม่มีผล

ตัวอย่างที่ 4 $(y')^2 = 2y'y'' - (y'')^2$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$

$$(y')^2 = 2y'y'' - (y'')^2$$
$$k = y''(0)$$
$$(y')^2 = 2y'k - k^2$$
$$y'(0) = 1$$
$$1 = 2k - k^2$$
$$k = 1$$
$$(y')^2 = 2y' - 1$$
$$y' = 1$$
$$dy = dx$$
$$\int dy = \int dx$$
$$y = x + c$$
$$y(0) = 0$$
$$\therefore c = 0$$
$$y = x$$

	ผลเฉลยโดย วิธีวิเคราะห์	โดยวิธีออยเลอร์		โดยวิธีรุงเงคุตตา	
		ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด	ผลเฉลย	ค่าผิดพลาด
y(0.1)	0.1000	1.1053	1.0053	1.1053	1.0053
y(0.2)	0.2000	1.2216	1.0216	1.2216	1.0216
y(0.3)	0.3000	1.3052	1.0052	1.3052	1.0052
y(0.4)	0.4000	1.4923	1.0923	1.4923	1.0923
y(0.5)	0.5000	1.6494	1.1494	1.6494	1.1494

ไม่มีผล

ตัวอย่างที่ 5 $(y'')^2 - yy'' - 3y'' + 3y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$$(y'')^2 - yy'' - 3y'' + 3y = 0$$
$$(y'' - y)(y'' - 3) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y'' = y$$

$$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = p$$

$$dp = dy$$

$$\int dp = \int dy$$

$$p = y + k_1$$

$$y'(0) = 0$$

$$\therefore k_1 = 0$$

$$y' = y$$

$$\frac{1}{y}dy = dx$$

$$\int\frac{1}{y}dy = \int dx$$

$$\ln|y| = x + c_1$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c_1 = 0$$

$$y = e^x$$

$$y'' = 3$$

$$y' = p$$

$$\frac{dp}{dx} = 3$$

$$\int dp = \int 3dx$$

$$p = 3x + k_2$$

$$y'(0) = 0$$

$$\therefore k_2 = 0$$

$$y' = 3x$$

$$\int dy = \int 3xdx$$

$$y = \frac{3x^2}{2} + c_2$$

$$y(0) = 1$$

$$\therefore c_2 = 1$$

$$y = \frac{3x^2}{2} + 1$$

ผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์

y(0.1) = 1.0151 หรือ 1.0150

y(0.2) = 1.2214 หรือ 1.0600

y(0.3) = 1.3499 หรือ 1.1350

y(0.4) = 1.4918 หรือ 1.2400

y(0.5) = 1.6487 หรือ 1.3750

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ไม่มีผล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 13

สรุปผลการวิเคราะห์และข้อเสนอแนะ

ผลการวิเคราะห์

	ผลเฉลยโดยวิธีออย์เลอร์ที่ดัดแปลงแล้ว	ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4
1. $y' = f(x,y)$	1	3
2. $y' = f(x)$	2	2
3. $y' = f(y)$	2	3
4. $y'' = f(x,y,y')$	-	-
5. $y'' = f(x,y)$	0	2
6. $y'' = f(x,y')$	0	4
7. $y'' = f(y,y')$	1	0
8. $y'' = f(x)$	-	-
9. $y'' = f(y)$	-	-
10. $y'' = f(y')$	-	-

สรุปผลการวิเคราะห์

ผลเฉลยโดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 ให้ผลที่ดีกว่าในสมการรูปแบบ $y' = f(x,y)$, $y' = f(y)$, $y'' = f(x,y)$, $y'' = f(x,y')$

ผลเฉลยโดยวิธีออย์เลอร์ที่ดัดแปลงแล้วให้ผลที่ดีกว่าในสมการรูปแบบ $y'' = f(y,y')$

สำหรับสมการ $y' = f(x)$ ผลออกมาใกล้เคียงอย่างละ 2 ข้อเท่ากัน เนื่องจากมีอยู่ 1 ข้อที่ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขออกมาเป็น 0 ทั้ง 2 ระเบียบวิธี แต่ถ้าเทียบผลของข้อที่ให้ผลที่ใกล้เคียงแล้วระเบียบวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4 จะให้ผลที่ใกล้เคียงกว่า

ส่วนสมการ $y'' = f(x,y,y')$, $y'' = f(x)$, $y'' = f(y)$, $y'' = f(y')$ ไม่มีข้อใดสามารถสรุปผลได้เลย

การวิเคราะห์นี้ใช้ตัวอย่างในการวิเคราะห์รูปแบบละ 5 ข้อ แต่ถ้าดูจากตารางผลการวิเคราะห์จะพบว่าผลรวมจำนวนข้อในแต่ละรูปแบบส่วนมากจะน้อยกว่า 5 ข้อ เนื่องจากผลที่ได้จากระเบียบวิธีทั้งสองออกมาเป็น 0 เท่ากันจึงทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ผลที่ออกมาได้ ซึ่งส่วนมากจะเกิดกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 เนื่องจากการประมาณค่า y ณ จุดต่างๆ จะใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชันในการคำนวณหาในรูปของ y' เพียงตัวเดียว ซึ่งถ้าค่าเริ่มต้นของ y' นี้เป็น 0 จะส่งผลให้ค่า ณ จุดต่างๆ เป็น 0 ตามไปด้วย

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 นั้นถึงแม้จะหาค่าได้ในบางข้อแต่ผลที่ออกมาก็ยังไม่ใกล้เคียงเท่าที่ควร

จึงสรุปได้ว่า สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 และ อันดับที่ 2 ควรหาผลเฉลยด้วยวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โปรแกรมการคำนวณระเบียบวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงแล้วและระเบียบวิธีรุงเงคุตตาอันดับที่ 4

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include "numeric.h"

extern char choice;

float ODEFunc(float x,float y)
{
        return x;
}

void ELInput(float &a,float &b,float &y,unsigned &N)
{
        clrscr();
        printf("*****************************\n");
        printf(" Euler's method Input Value\n");
        printf("*****************************\n\n");
        printf(" dy/dx = f(t,y), a <= t <= b, y(a) = i\n");
        printf("Enter a : "); scanf("%f",&a);
        printf("Enter x to estimate : "); scanf("%f",&b);
        printf("Enter y(%1.1f) : ",a); scanf("%f",&y);
        printf("Enter N : "); scanf("%d",&N);
        printf("\n");
}

void ELCal(float a,float b,float y,unsigned N)
{
        float ODEFunc(float x,float y);

        float h=(b-a)/N;
        float t0=a, w0=y, w, t, temp;
        int i, j;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
        printf("*******************\n");
        printf(" By Euler's method\n");
        printf("*******************\n\n");
        printf("t = %1.5f\n",t0);
        printf("y0 = %1.5f\n",w0);
        for (i=1;i<=N;i++)
        {
                w = w0 + h*ODEFunc(t0,w0);
                t = a + i*h;
                for (j=1;j<=6;j++)
        {
        w = w0 + h*(ODEFunc(t0,w0)+ODEFunc(t,w))/2;
        }
        scrcheck();
        printf("t = %1.5f\n",t);
        scrcheck();
        printf("y%d = %1.5f\n",i,w);
        w0 = w;
        t0 = t;
}
getch();
}

void RKInput(float &a,float &b,float &y,unsigned &N)
{
        clrscr();
        printf("***********************************\n");
        printf(" Runge-Kutta's method Input Value\n");
        printf("***********************************\n\n");
        printf(" dy/dx = f(t,y), a <= t <= b, y(a) = \n");
        printf("Enter a : "); scanf("%f",&a);
        printf("Enter x to estimate : "); scanf("%f",&b);
        printf("Enter y(%1.1f) : ",a); scanf("%f",&y);
        printf("Enter N : "); scanf("%d",&N);
}
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
void RKCal(float a,float b,float y,unsigned N)
{
        float h=(b-a)/N;
        float t=a, w=y, K1,K2,K3,K4;
        printf("************************\n");
        printf(" By Runge-Kutta method\n");
        printf("************************\n\n");
        printf("t = %1.5f\n",a);
        printf("y0 = %1.5f\n",w);
        for (int i=1;i<=N;i++)
        {
                K1 = h * ODEFunc(t,w);
                K2 = h * ODEFunc(t+h/2,w+K1/2);
                K3 = h * ODEFunc(t+h/2,w+K2/2);
                K4 = h * ODEFunc(t+h,w+K3);
                w = w + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6;
                t = a + i*h;
                scrcheck();
                printf("t = %1.5f\n",t);
                scrcheck();
                printf("y%d = %1.5f\n",i,w);
        }
        getch();
}

char ODEmenu(void)
{
        void ELInput(float &a,float &b,float &y,unsigned &N);
        void ELCal(float a,float b,float y,unsigned N);
        void RKInput(float &a,float &b,float &y,unsigned &N);
        void RKCal(float a,float b,float y,unsigned N);

        float a,b,y;
        unsigned N;

        clrscr();
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
        printf("\nSelect choices : \n\n");
        printf("\t[0] Quit.\n");
        printf("\t[1] Euler's Method.\n");
        printf("\t[2] Runge-Kutta Method.\n");
        printf("\nYou choose : ");
        scanf("%c",&choice);
        switch (choice)
        {
                case '0' : break;
                case '1' : ELInput(a,b,y,N); ELCal(a,b,y,N); break;
                case '2' : RKInput(a,b,y,N); RKCal(a,b,y,N); break;
                default  : choice = ODEmenu();
        }
        if (choice != '0') choice = ODEmenu();
return choice;
}

void ODEmain(void)
{
        char ODEmenu(void);

        clrscr();
        writecenter(12,"(Chapter 7) Differential Equation Solving",YELLOW);
        getch();
        /* MENU */
        do
        { } while (ODEmenu() != '0');
}
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

1. ภัคคินี ยิมเรวัต , คณิตศาสตร์ประยุกต์ 2 : สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ , สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

2. ภัคคินี ยิมเรวัต , การวิเคราะห์เชิงตัวเลข , สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

3. HOROLD T. DAVIS , INTRODUCTION TO NONLINEAR DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATION , DOVER PULICATIONS,INC,NEWYORK

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้