

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมสำหรับหาระดับความเค้นของชิ้นงาน

Finite Element Program for Stress Testing



นางสาวจริณี บุญนำ

Miss Jarinee Bunnum

นางสาวนริศรา ธนาบุรณะสิริ

Miss Narisara Thanaburanasiri

4

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

ฟ.ท.  
๑๓๑๖พ  
๒๕๕๑

สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2544

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน 45799

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่กองฯ 2546 ให้บริการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
วัน, เดือน, ปี ๑๓๑๖พ ๒๕๕๑

b.....  
i.....

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรณีไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์      ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมสำหรับหาระดับความเค้นของชิ้นงาน  
Finite Element Program for Stress Testing

นักศึกษา                      นางสาวจาริณี บุญนำ

รหัสประจำตัว                41014583

นักศึกษา                      นางสาวนริศรา ธนาบุรณะศิริ

รหัสประจำตัว                41014642

ปริญญา                        วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชา                    วิศวกรรมอุตสาหการ

ปีการศึกษา                    2544

อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์  
นักศึกษา

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมสำหรับหาระดับความเค้นของชิ้นงาน  
นางสาวจริณี บุญนำ  
นางสาวนริศรา ธนาบุรณะศิริ

ระดับการศึกษา

วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา

2544

อาจารย์ผู้ควบคุมปริญญานิพนธ์

อ.พลชัย โชติปราชญกุล

## บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์หลักของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ คือ การออกแบบและพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับตรวจสอบคุณสมบัติด้านความเค้นของชิ้นงาน เพื่อความสะดวกในการตรวจสอบความเค้นของชิ้นงาน ทั้งยังช่วยประหยัดเวลาและลดค่าใช้จ่ายในการทดสอบกับชิ้นงานจริง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในการอุตสาหกรรม โดยนำความรู้ทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์เกี่ยวกับปัญหาของแข็ง 2 มิติ มาประยุกต์และพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถแสดงระดับความเค้น พร้อมทั้งแสดงผลออกมาเป็นรูปภาพฟิสิก 2 มิติของชิ้นงาน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<b>The Title</b>	Finite Element Program for Stress Testing
<b>Student</b>	Miss Jarinee Bunnum Miss Narisara Thanaburanasiri
<b>Degree</b>	Bachelor of Engineering in Industrial Engineer King Mongkut ' s Institute of Technology Ladkrabang
<b>Academic Year</b>	2001
<b>Advisor</b>	Pholchai Chotiprayanakul

## ABSTRACT

The purposes of this project are to design and develop computer program for the facilitation, the economical time and decreasing cost of Stress Testing. Besides it can apply to use in the industrial field. This project is based on the theory of Finite Element Method for Two – Dimensional Solid Problem and develop to be the computer problem. This program can show the level of stress and Two – Dimensional Graphic of problem.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## กิตติกรรมประกาศ

การจัดทำปฏิญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ด้วยการได้รับความกรุณาอย่างอเนกจากอาจารย์ผู้ควบคุมปฏิญานิพนธ์ อาจารย์พลชัย โชติปราชญ์กุล ในการให้คำแนะนำและช่วยเหลือปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนเป็นที่เรียบร้อย คณะผู้จัดทำรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้ความแนะนำที่ดีตลอดมา

นางสาวจริณี บุญนำ

นางสาวนริศรา ธนาบุรณะศิริ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญตาราง	VI
สารบัญภาพ	VII

## บทที่ 1 บทนำ

1.1 ที่มาของโครงการ	1
1.2 วัตถุประสงค์	1
1.3 ขอบเขตการศึกษา	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	1

## บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร	2
2.2 การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์	3
2.3 ขั้นตอนทั่วไปของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์	7
2.4 วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาของแข็ง	9
2.5 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ 2 มิติ	26
2.6 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์	27

## บทที่ 3 การออกแบบ / การดำเนินงาน

3.1 การวางแผนการดำเนินงาน	35
3.2 การออกแบบโปรแกรม	35
3.3 รายละเอียดการทำงาน	41

## บทที่ 4 ผลการดำเนินงาน

4.1 การวิเคราะห์หาค่าระดับความเค้นจากโปรแกรม	44
--	----

## บทที่ 5 สรุปและวิเคราะห์ผลการดำเนินงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ IV อ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1	สรุปผลการดำเนินงาน	83
5.2	วิเคราะห์ผลการดำเนินงาน	83
5.3	แนวทางการพัฒนา และปรับปรุง	85
บรรณานุกรม		86
ภาคผนวก		ผ 1-8



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และตั้งอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 4.1 แสดงพิกัด X-Y ของแต่ละเอลิเมนต์ที่แต่ละจุด node	48
ตารางที่ 4.2 แสดงพิกัดของจุดที่มีแรงกระทำ พร้อมขนาดและทิศทางของแรง	50
ตารางที่ 4.3 แสดงพิกัดของจุดยึดคิ	50
ตารางที่ 4.4 แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์	52
ตารางที่ 4.5 แสดงค่า Displacement ในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์	67
ตารางที่ 4.6 แสดงค่าแรงในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์	74
ตารางที่ 4.7 แสดงค่าความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์	81



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และ VI อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญภาพ

	หน้า
รูปที่ 2.1 การวิเคราะห์หาผลเฉลยบนแผ่นอะลูมิเนียมด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์	2
รูปที่ 2.2 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเพลาค้อเหวี่ยงเครื่องยนต์	3
รูปที่ 2.3 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับกระดูก	4
รูปที่ 2.4 การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณการยุบตัวของรถยนต์ในขณะที่เกิดการชน	5
รูปที่ 2.5 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเครื่องบินรบ	6
รูปที่ 2.6 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของสภาวะอากาศรอบกระสวยอวกาศทั้งก่อนและหลังการแยกตัวออกจากถังเชื้อเพลิงภายนอก	6
รูปที่ 2.7 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ	7
รูปที่ 2.8 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างประกอบด้วยสามจุดต่อ	7
รูปที่ 2.9 ความสัมพันธ์ระหว่างแกนย่อยและแกนหลัก	9
รูปที่ 2.10 คาน ได้รับแรงแบบกระจาย	12
รูปที่ 2.11 เอลิเมนต์คาน	13
รูปที่ 2.12 เอลิเมนต์เฟรม	16
รูปที่ 2.13 แรงบิดกระทำกับชิ้นงาน	18
รูปที่ 2.14 พิกัดของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม	19
รูปที่ 2.15 แสดงค่าความเค้น ในระนาบ	20
รูปที่ 2.16 แสดงทิศทางความเค้นในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมของระนาบ	22
รูปที่ 2.17 การกระจายของ โหลดที่กระทำที่ขอบ $k_i$ ของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม	23
รูปที่ 2.18 การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับปัญหาที่มีความสามารถรอบแกน	24
รูปที่ 2.19 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม	26
รูปที่ 3.1 รูปแสดงขั้นตอนการทำงานโดยรวมของโปรแกรม	36
รูปที่ 3.2 รูปแสดงขั้นตอนการรับค่า Input ส่วนที่ 1	37
รูปที่ 3.3 รูปแสดงขั้นตอนการรับ Input ส่วนที่ 2	38
รูปที่ 3.4 รูปแสดงขั้นตอนการรับ Input ส่วนที่ 3	39
รูปที่ 3.5 รูปแสดงขั้นตอนการแสดงผล Output	40
รูปที่ 3.6 รอบชิ้นงานถูกกำหนดด้วยจุดพิกัดซึ่งมีระยะห่างเท่าๆกัน	41
รูปที่ 3.7 การสร้างวงกลมที่จุดพิกัดรอบรูปชิ้นงาน	42
รูปที่ 3.8 แสดงการสร้างเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม	42
รูปที่ 3.9 แสดงการแบ่งเอลิเมนต์ในชั้นถัดมา	42
รูปที่ 4.1 แสดงรูปตัวอย่างของปัญหา	44
รูปที่ 4.2 แสดงหน้าจอเริ่มโปรแกรม	44
รูปที่ 4.3 แสดงหน้าจอรับรูปของชิ้นงาน	45
รูปที่ 4.4 แสดงการเปิดเพิ่มข้อมูลเพื่อรับรูปชิ้นงาน	45

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ VII อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.5 แสดงการเสร็จสิ้นการวาดรูป	46
รูปที่ 4.6 แสดงหน้าจอรับข้อมูลด้านคุณสมบัติของชิ้นงาน	46
รูปที่ 4.7 แสดงหน้าจอการแบ่งเอลิเมนต์	47
รูปที่ 4.8 แสดงรูปที่มีการแบ่งเอลิเมนต์เรียบร้อยแล้ว	47
รูปที่ 4.9 แสดงหน้าจอการรับตำแหน่งและขนาด – ทิศทางของแรงกระทำและจุดยึดติด	50
รูปที่ 4.10 แสดงกราฟที่กระชับความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์	82



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และ VIII อ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ที่มาของโครงการ

จากความสนใจในเทคโนโลยี Computer Aided Engineering :CAE อันเป็นเทคโนโลยีใหม่ในวงการอุตสาหกรรมไทย ซึ่งใช้ในการออกแบบชิ้นงานและโครงสร้างที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ช่วยลดค่าใช้จ่ายในการทดสอบกับชิ้นงานจริง โดยอาศัยความรู้วิเคราะห์เชิงตัวเลข ( Numerical Method ) และวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ ( Finite Element Method ) ทางกลุ่มเห็นว่าควรที่จะนำความรู้ในสาขาวิชาเหล่านี้ไปประยุกต์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเลือกที่จะทำการศึกษาเกี่ยวกับปัญหาของแข็งของ 2 มิติ ซึ่งเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องโดยตรงกับวิชาชีพวิศวกรรม ดังนั้น จึงได้มีการออกแบบและพัฒนาโปรแกรมเพื่อตรวจสอบคุณสมบัติด้านความเค้นของชิ้นงาน โดยใช้โปรแกรม Microsoft Visual Basic Version 6.0

### 1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาของแข็ง 2 มิติ
2. เพื่อออกแบบและพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับตรวจสอบคุณสมบัติ
3. ประหยัดเวลาและลดค่าใช้จ่ายในการทดสอบกับชิ้นงานจริง
4. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้จริงในวงการอุตสาหกรรม

### 1.3 ขอบเขตของโครงการ

1. พัฒนาโปรแกรมเพื่อสามารถคำนวณระดับความเค้นของชิ้นงาน โดยใช้โปรแกรม Microsoft Visual Basic Version 6.0 เป็นเครื่องมือในการพัฒนา
2. พัฒนาโปรแกรมเพื่อสามารถแสดงผลออกมาเป็นรูปภาพฟีก 2 มิติ
3. ออกแบบโปรแกรมเพื่อให้ง่ายต่อการใช้งาน

### 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. มีความรู้ความสามารถในการใช้โปรแกรม Microsoft Visual Basic Version 6.0 ได้เป็นอย่างดี
2. มีความสามารถในการออกแบบและพัฒนาโปรแกรม ให้เหมาะสมต่อการใช้งาน

## บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

### 2.1 วิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ [ 3 , p. 4 – 6 ]

ในการแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นจะประกอบด้วยสมการเชิงบวกอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ค่าผลเฉลยแม่นยำ ( Exact solution ) ของปัญหาดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าของตัวแปรต่างๆ กันตามตำแหน่งต่างๆ บนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าผลเฉลยแม่นยำจะประกอบด้วยค่าต่างๆ ทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ค่า แทนที่จะทำการหาค่าแม่นยำที่ประกอบด้วยค่าต่างๆ จำนวนมากมายเช่นนี้ซึ่งสำหรับปัญหาในทางปฏิบัติจะทำได้ หลักการก็คือทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่มีจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณที่มีจำนวนที่นับได้ ( Finite ) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ ( Elements ) ซึ่งมีขนาดต่างๆ กัน ดังเช่นแสดงในตัวอย่างของแผ่นอะลูมิเนียมในรูป 2.1



รูปที่ 2.1 การวิเคราะห์หาผลเฉลยบนแผ่นอะลูมิเนียมด้วยการใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ [ 3 , p.4 ]

วิธีการดังกล่าว ผลเฉลยของแต่ละเอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องสอดคล้อง ( Satisfy ) กับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ในปัญหานั้นๆ ซึ่งหมายความว่า หลักการของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มต้นจากการพิจารณาเอลิเมนต์ โดยทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่บนรากฐานที่ว่า สมการที่สร้างขึ้นมานั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ทำอยู่นั้น จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาได้มาประกอบกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการชุดใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพเหมือนกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกันก่อให้เกิดเป็นรูปร่างลักษณะทั้งหมดของปัญหาที่แท้จริง จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ให้ลงมาในระบบสมการชุดใหญ่แล้วจึงทำการแก้สมการดังกล่าว ซึ่งจะก่อให้เกิดผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการ ณ ตำแหน่งต่างๆ ของปัญหานั้น

จากคำอธิบายนี้จะเห็นได้ว่า ความแม่นยำของค่าผลโดยประมาณที่คำนวณออกมาได้นั้นจะขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหานั้นนอกจากนั้นยังขึ้นอยู่กับการสมมุติรูปแบบของฟังก์ชันประมาณภายใน ( Interpolation functions ) ที่ใช้กับแต่ละเอลิเมนต์นั้นกล่าวคือ ฟังก์ชันการประมาณภายในสมมุติขึ้นมานั้นมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำของปัญหานั้นมากน้อยเพียงใด ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์อาจสมมุติให้อยู่หลายรูปแบบ อาทิเช่น รูปแบบของการกระจายเชิงเส้นตรง ( Linear distribution ) เป็นต้น ส่วนขนาด ( Magnitude ) ของฟังก์ชันการประมาณภายในจะขึ้นอยู่กับค่าที่จุดต่อ ( Nodes ) ของเอลิเมนต์

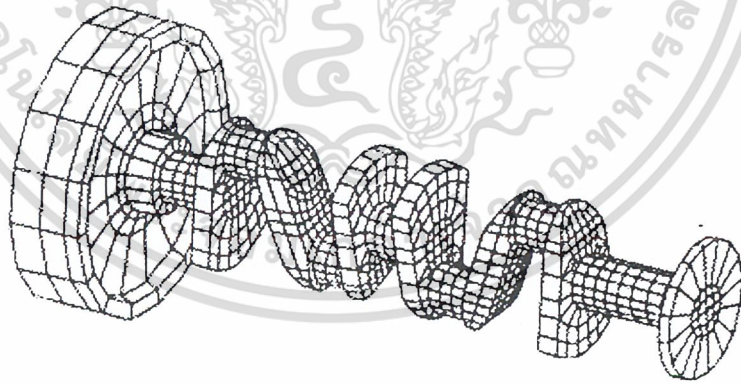
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.2 การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ [ 3 , p. 20-26 ]

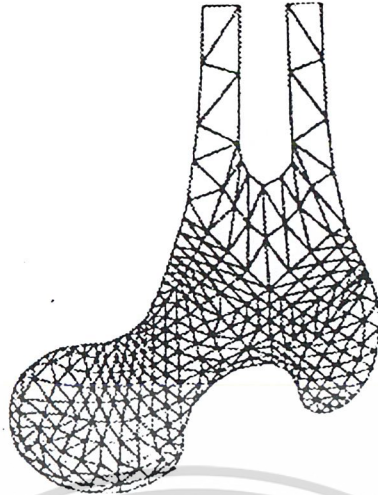
วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกนำมาใช้ในการออกแบบชิ้นงานและโครงสร้างที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ปัจจุบันนี้ วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เริ่มนำมาประยุกต์กับงานทางด้านอื่นๆ โดยมีจุดประสงค์หลักคือ เพื่อลดค่าใช้จ่ายที่ปกติจำเป็นต้องใช้ไปในการทดลอง หรือเพื่อใช้กับงานที่ไม่สามารถทำการทดลองอย่างสมบูรณ์ได้ อาทิเช่น การคำนวณสภาวะของอากาศผ่านลำตัวรถยนต์ เครื่องบิน และสถานีอวกาศ เป็นต้น

เนื่องจากรูปแบบของชิ้นงานต่างๆ ในทางวิศวกรรมโดยปกติจะมีความซับซ้อนวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จึงมีบทบาทเป็นอย่างมากในการช่วยแก้ปัญหาต่างๆ นับตั้งแต่ปัญหาการยึดหยุ่นของของแข็ง การถ่ายเทความร้อน ในวัสดุ ตลอดจนการไหลของของไหลซึ่งเราจะทำการศึกษากันโดยละเอียดต่อไป ความเข้าใจจากบทต่างๆ นี้จะช่วยทำให้เรามองเห็นภาพรวมและประสิทธิภาพของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถนำไปประยุกต์กับงานชนิดต่างๆ กันได้ หากปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นกับชิ้นงานนั้นๆ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ประสิทธิภาพของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ควบคู่ไปกับการวิวัฒนาการทางคอมพิวเตอร์ทำให้เราสามารถคำนวณหาปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้โดยสะดวกและในขณะเดียวกันช่วยลดค่าใช้จ่ายที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการทดลองดังที่เคยปฏิบัติมา

การแก้ปัญหาด้วยวิธีการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมัยแรกๆ เริ่มปรากฏให้เห็นในงานด้านกลศาสตร์ของแข็ง (Solid mechanics) และโครงสร้างเป็นส่วนใหญ่ เนื่องจากปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในงานทางด้านนี้สามารถทำความเข้าใจได้โดยไม่ต้องอาศัยการวิวัฒนาการของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ทางด้านของแข็งนี้ในปัจจุบันสามารถนำไปใช้กับการออกแบบชิ้นงานที่มีรูปร่างซับซ้อน เช่น เพลาข้อเหวี่ยงของเครื่องยนต์ซึ่งแสดงในรูป เพื่อการคำนวณหาความยึดหยุ่น ความเครียด และความเค้นที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งต่างๆ ของเพลาข้อเหวี่ยงนั้น รูปดังกล่าวแสดงการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสามมิติจำนวนมากที่มีขนาดต่างๆ กันประกอบขึ้นมา และสามารถจำลองรูปแบบของเพลาข้อเหวี่ยงได้อย่างเที่ยงตรง



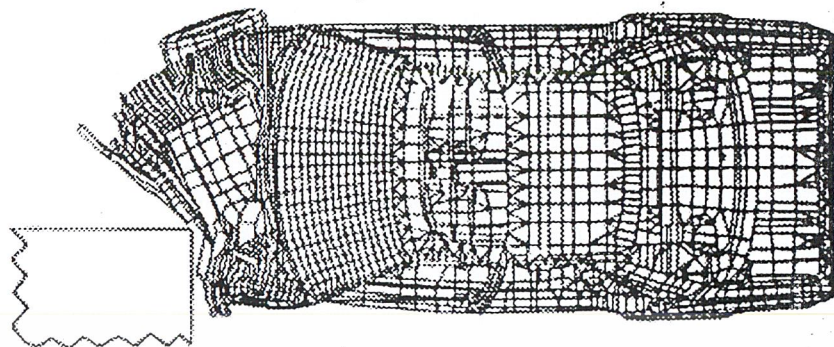
รูปที่ 2.2 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเพลาข้อเหวี่ยงเครื่องยนต์ [ 3 , p.21 ]



รูปที่ 2.3 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับกระดูก [ 3 , p.22 ]

เนื่องจากวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทำให้การประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ขยายวงกว้างออกไปในงานที่นอกเหนือจากงานทางด้านวิศวกรรม เช่น ในงานทางการแพทย์ เป็นต้น รูปที่ 2.3 แสดงรูปแบบจำลองของไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้หาการกระจายของความเค้นในกระดูก นอกเหนือจากนั้นวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ยังได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับงานทางการแพทย์ในรูปแบบอื่น อาทิเช่น การคำนวณหาลักษณะการไหลของเลือดในเส้นเลือดและในหัวใจ รวมทั้งความกดดันที่เกิดขึ้นตามตำแหน่งในเส้นเลือด เป็นต้น

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มีส่วนช่วยเป็นอย่างมากในการศึกษาและออกแบบยานพาหนะเพื่อก่อให้เกิดประสิทธิภาพที่สูงขึ้นรวมทั้งเพื่อความปลอดภัยที่สูงสุด และในขณะเดียวกันก็เพื่อช่วยลดค่าใช้จ่ายที่ต้องใช้ในการทำการทดลอง รูปที่ 2.4 แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และการยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ในขณะที่เกิดการชนขึ้นทางซีกหนึ่งของด้านหน้า การออกแบบโครงสร้างที่เหมาะสมเป็นสิ่งสำคัญต่อความปลอดภัยดังตัวอย่างเช่น คานที่วางตัวตามแนวยาวของตัวรถควรให้เกิดแต่การหดตัวที่สั้นลงในขณะที่เกิดการชน โดยให้มีการโก่งงอขึ้นน้อยที่สุด เป็นต้น การออกแบบด้วยการทดลองเพื่อให้เกิดปรากฏการณ์ที่ต้องการจะสิ้นเปลืองเวลาและค่าใช้จ่ายมากเมื่อเปรียบเทียบกับ การออกแบบด้วยการคำนวณซึ่งสามารถทำการเปลี่ยนรูปแบบได้โดยง่าย

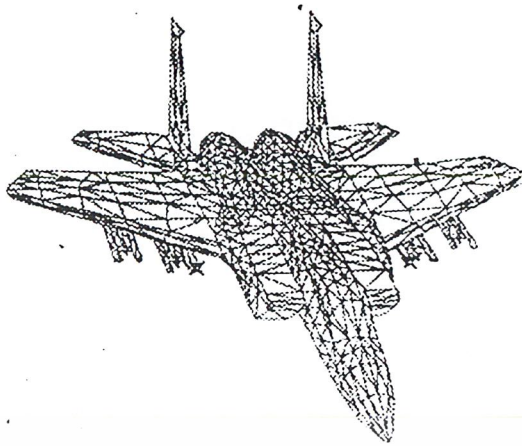


**รูปที่ 2.4 การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณการยุบตัวของรถยนต์ในขณะเกิดการชน [ 3 , p.23 ]**

การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์อีกแขนงหนึ่ง ซึ่งช่วยในการออกแบบยานพาหนะก็คือ การคำนวณลักษณะของอากาศที่ไหลผ่านยานพาหนะนั้น ตัวอย่างเช่น การออกแบบรถยนต์ที่รูปร่างลักษณะที่จะก่อให้เกิดแรงต้านทานจากอากาศต่ำที่สุด ในปัจจุบัน สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับการไหลและวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถนำมาใช้ช่วยในการคำนวณหาสภาวะของการไหลรวมทั้งความกดดันที่เกิดขึ้นตามตำแหน่งต่างๆ ของตัวรถได้ ผู้ออกแบบสามารถเปลี่ยนแปลงลักษณะรูปแบบตัวรถได้โดยง่ายและรวดเร็วเพื่อที่จะได้รูปแบบที่จะก่อให้เกิดประสิทธิภาพที่สูงสุดก่อนที่จะนำไปสร้างเป็นรูปแบบจริงเพื่อใช้ในการทดลองและการทำการผลิตต่อไป

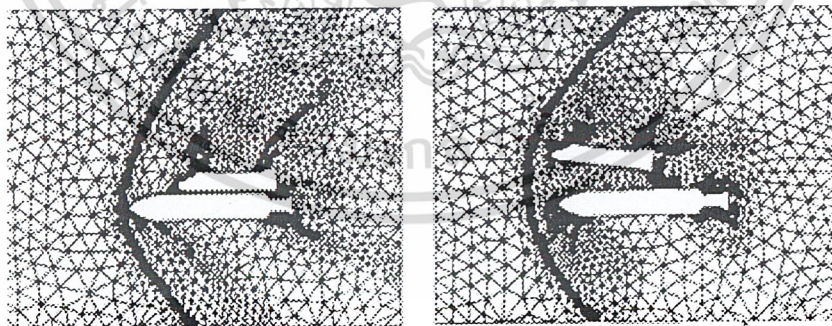
การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับทางด้านยานพาหนะอีกแขนงหนึ่งซึ่งเริ่มใช้กันมากในปัจจุบันก็คือ การคำนวณหาอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆบนเครื่องยนต์ อุณหภูมิสูงและมีการเปลี่ยนแปลงมากตามตำแหน่งต่างๆ บนเครื่องยนต์ที่จะก่อให้เกิดความเค้นที่สูงตามมา วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะช่วยในการคำนวณปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นได้เพื่อช่วยในการออกแบบเครื่องยนต์ซึ่งมีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนให้เกิดความเค้นที่ต่ำที่สุด

กระบวนการการคำนวณความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิต่อเครื่องยนต์ของรถยนต์เป็นการรวมสมการทางด้านกลศาสตร์ของแข็งและการถ่ายเทความร้อนภายในของแข็งนั้นเข้าด้วยกัน โดยการใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เพียงวิธีการเดียว กระบวนการดังกล่าวก่อให้เกิดประสิทธิภาพในการคำนวณสูงเนื่องจากสมการต่างๆ ที่ประคิษฐ์ขึ้นมาจากทั้งสองแขนงนั้นสอดคล้องกัน อีกทั้งการแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างปัญหาต่างแขนงกันนั้นสามารถทำได้โดยสะดวก หลักการดังกล่าวได้ถูกนำมาใช้ในการออกแบบเครื่องบินรบดังแสดงในรูปที่ 2.5 ซึ่งต้องทำการบินด้วยความเร็วสูงอันจะก่อให้เกิดผลกระทบซึ่งกันและกันระหว่างการไหลของอากาศกับโครงสร้างของเครื่องบิน ในขณะที่บินด้วยความเร็วสูงการไหลของอากาศก่อให้เกิดความกดดันสูงบนปีกของเครื่องบินทำให้ปีกเกิดการเสียรูปร่างดั้งเดิม การที่ปีกเกิดการเสียรูปร่างไปนั้นมีผลกระทบย้อนกลับไปทำให้สภาวะการไหลผ่านปีกนั้นเปลี่ยนแปลงไป การคำนวณหาปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นบนโครงสร้างและสภาวะการไหลของอากาศจึงต้องกระทำควบคู่กันไป การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาที่มีผลกระทบซึ่งกันและกันเช่นนี้จึงก่อให้เกิดความสะดวกเป็นอย่างมากในการลดขั้นตอนและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ



รูปที่ 2.5 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเครื่องบินรบ [ 3 , p.24 ]

ตัวอย่างของผลกระทบซึ่งขึ้นอยู่กับและกันระหว่างสภาวะของการไหลและลักษณะรูปแบบของโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงไปให้เห็นได้ชัดอีกตัวอย่างหนึ่งก็คือ ตัวอย่างของการแยกตัวของกระสวยอวกาศ ( Space Shuttle ) ออกจากถังเชื้อเพลิงภายนอก ( External fuel tank ) ดังแสดงในรูปที่ 2.6 การแยกตัวดังกล่าวจะเกิดขึ้นหลังจากที่ทั้งระบบได้ถูกยิงขึ้นไปจากพื้นดิน 8 นาทีครึ่ง ที่ความสูงประมาณ 110 กิโลเมตร และมีความเร็วประมาณ 2 เท่าของความเร็วเสียง ที่ความเร็วนี้จะเกิดสภาวะการเปลี่ยนแปลงของการไหลของอากาศที่ค่อนข้างจะซับซ้อนอันประกอบด้วยคลื่นช็อกในลักษณะต่างๆ เพื่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จึงจำเป็นต้องประกอบด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเป็นจำนวนมาก ในตำแหน่งของคลื่นช็อกและตามบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของสภาวะอากาศสูงดังแสดงในรูป 2.6 (ก) ในขณะที่เดียวกันเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นสามารถใช้ได้ในบริเวณที่สภาวะอากาศมีการเปลี่ยนแปลงน้อยเพื่อช่วยลดเวลาในการทำการคำนวณ การจัดเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างๆ กันตามตำแหน่งต่างๆ นั้นจำเป็นต้องทำโดยอัตโนมัติ เพราะลักษณะสภาวะของอากาศที่เกิดขึ้นกับปัญหาเช่นนี้จะมีลักษณะซับซ้อนและไม่สามารถทราบได้ล่วงหน้า



( ก )

( ข )

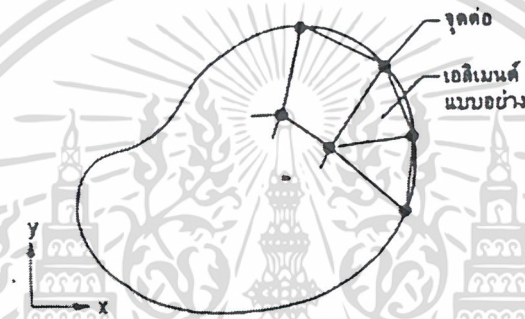
รูปที่ 2.6 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของสภาวะอากาศรอบกระสวยอวกาศ ทั้งก่อนและหลังการแยกตัวจากถังเชื้อเพลิงภายนอก [ 3 , p.25 ]

รูป 2.6 (ข) แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของสภาวะอากาศรอบกระสวยอวกาศหลังเกิดการแยกตัว จากถังเชื้อเพลิงภายนอก ตำแหน่งของเอลิเมนต์ขนาดเล็กนั้นแตกต่างไปจากรูป 2.6 (ก) โดยเปลี่ยนแปลงไปตามการเปลี่ยนแปลงของสภาวะอากาศที่เกิดขึ้น เพื่อที่จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่แม่นยำและในขณะเดียวกันเพื่อที่จะใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยที่สุด

### 2.3 ขั้นตอนทั่วไปของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ [ 3 , p.17 - 20 ]

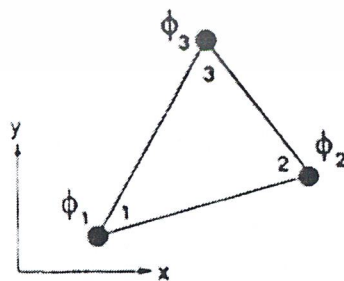
วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการที่จะหาคผลลัพธ์นั้นออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.7 ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาชนิดต่างๆ กัน เช่น ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง ( Elasticity problem ) ปัญหาที่เกี่ยวกับอุณหภูมิและความร้อน ( Thermal problem ) รวมทั้งปัญหาของการไหล ( Fluid problem )



รูปที่ 2.7 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ [ 3 , p.18 ]

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ ( Element interpolation functions ) เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม ( เอลิเมนต์แบบอย่างดังแสดงในรูปที่ 2.7 ) โดยที่จุดต่อ่นั้นเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า ( Nodal unknowns ) ซึ่งคือ  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  และ  $\phi_3$  ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านี้ อาจเป็นค่าการยืดหรือหดตัว ( Displacement ) หากเราทำปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรืออาจเป็นค่าอุณหภูมิหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรือไม่ก็อาจเป็นความเร็วของเหลวหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ ดังนี้



รูปที่ 2.8 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างประกอบด้วยสามจุดต่อ

โดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ [ 3 , p.18 ]

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \quad (2.1)$$

โดย  $N_i(x,y)$ ,  $i = 1, 2, 3$  คือ ฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์

สมการ (2.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= [N_1 N_2 N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N] \{\phi\} \\ &= (1 \times 3)(3 \times 1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

โดย  $[N]$  คือเมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ  $\{\phi\}$  คือ เวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น สัญลักษณ์  $[ ]$  แสดงถึงเมทริกซ์แถวอน (Row matrix) และ  $\{ \}$  แสดงถึงเมทริกซ์แถวตั้ง (Column matrix)

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (Element equations) ดังตัวอย่างเช่น สมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างดังแสดงในรูปที่ 2.7 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (2.4)$$

ขั้นตอนที่ 3 นี้ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (2.3) สามารถทำได้โดย

- (ก) วิธีการโดยตรง (Direct approach)
- (ข) วิธีการแปรผัน (Variational approach)
- (ค) วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals)

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการพร้อมกันขึ้น (System of Simultaneous Equations) ในรูปแบบดังนี้

$$\Sigma (\text{Element Equations}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (2.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

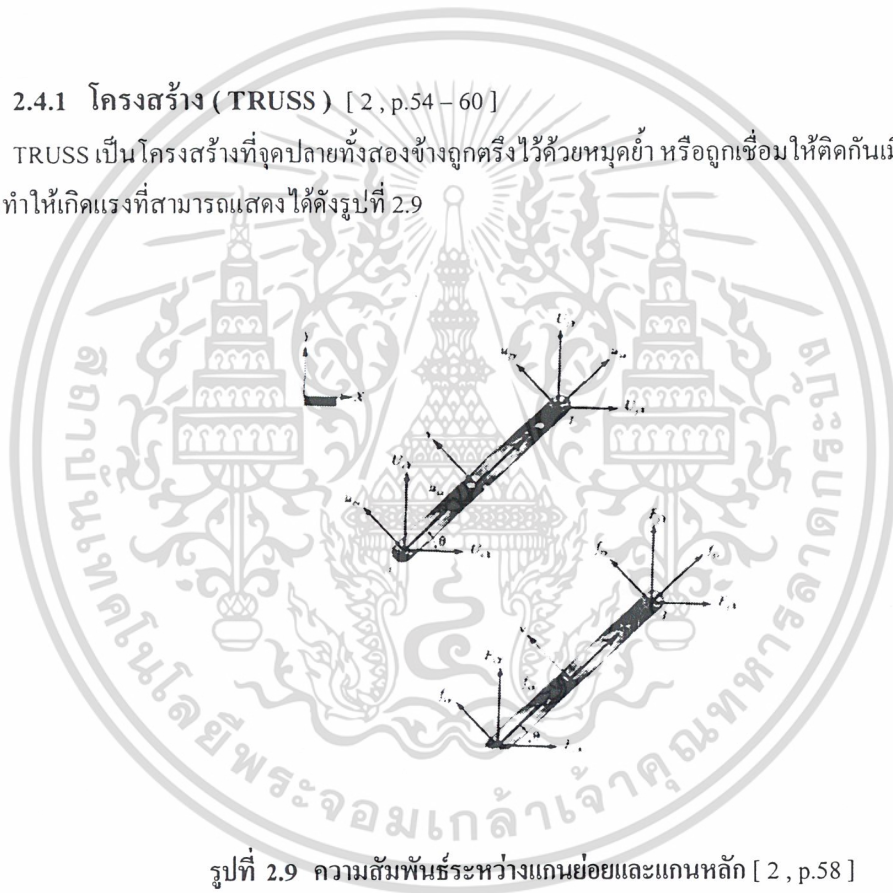
ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต ( Boundary Conditions ) ลงในสมการ (2.5) แล้วจึงแก้สมการนั้นเพื่อหา  $\{\phi\}_{yy}$  อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ( Nodal unknown ) ซึ่งอาจจะเป็นค่าของการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้าง หรือค่าของอุณหภูมิที่จุดต่างๆ หากเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นค่าของความเร็วของของไหลหากเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการไหล เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถทำการหาค่าอื่นๆ ที่ต้องการทราบต่อไปได้ เช่น เมื่อรู้ค่าการเคลื่อนตัว ( Displacement ) ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้างเราสามารถนำไปใช้ในการหาความเครียด ( Strain ) และความเค้น ( Stress ) ได้ต่อไป หรือเมื่อรู้ความเร็วของของไหลก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณอัตราการไหลทั้งหมดได้ เป็นต้น

## 2.4 วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาของแข็ง

### 2.4.1 โครงสร้าง ( TRUSS ) [ 2 , p.54 – 60 ]

TRUSS เป็นโครงสร้างที่จุดปลายทั้งสองข้างถูกตรึงไว้ด้วยหมุดยึด หรือถูกเชื่อมให้ติดกันเมื่อมีแรงมากระทำที่จุดต่อจะทำให้เกิดแรงที่สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ความสัมพันธ์ระหว่างแกนย่อยและแกนหลัก [ 2 , p.58 ]

จากรูปได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าเคลื่อนตัวในแนวแกนหลักและแกนย่อยดังนี้

$$U_{ix} = u_{ix} \cos \theta - u_{iy} \sin \theta$$

$$U_{iy} = u_{ix} \sin \theta + u_{iy} \cos \theta$$

$$U_{jx} = u_{jx} \cos \theta - u_{jy} \sin \theta$$

$$U_{jy} = u_{jx} \sin \theta + u_{jy} \cos \theta \quad (2.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้

$$\{U\} = [T] \{u\} \quad (2.7)$$

โดย  $\{U\} = \begin{Bmatrix} U_{iX} \\ U_{iY} \\ U_{jX} \\ U_{jY} \end{Bmatrix}$ ,  $[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , and  $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ u_{jX} \\ u_{jY} \end{Bmatrix}$  (2.8)

และแรงในแนวแกนหลักและแนวแกนย่อยแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F_{iX} &= f_{ix} \cos \theta - u_{iy} \sin \theta \\ F_{iY} &= f_{ix} \sin \theta + u_{iy} \cos \theta \\ F_{jX} &= f_{jx} \cos \theta - u_{jy} \sin \theta \\ F_{jY} &= f_{jx} \sin \theta + u_{jy} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

เขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้

$$\{F\} = [T] \{f\} \quad (2.10)$$

โดย

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ u_{jX} \\ u_{jY} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

ค่าเคลื่อนตัวในแนวแกน y เป็นศูนย์ เนื่องจากมีการยึดหัดตัวในแนวแกน x เท่านั้น ฉะนั้นสมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายใน ค่าเคลื่อนตัว และ Stiffness matrix คือ

$$\begin{Bmatrix} f_{iX} \\ f_{iY} \\ f_{jX} \\ f_{jY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ u_{jX} \\ u_{jY} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

เมื่อหา  $k = k_{eq} = \frac{AE}{L}$  และเขียนอยู่ในสมการรูปเมตริกซ์ได้

$$\{f\} = [K] \{u\} \quad (2.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อแทน  $\{f\}$  และ  $\{u\}$  ในเทอมของ  $\{f\}$  และ  $\{u\}$  ได้

$$[T]^{-1}\{F\} = [K][T]^{-1}\{U\} \quad (2.14)$$

เมื่อ  $[T]^{-1}$  คือ ค่า inverse ของเมทริกซ์  $[T]$  ได้

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{ฉะนั้นได้} \quad \{F\} = [T][K][T]^{-1}\{U\} \quad (2.15)$$

แทนค่า  $[T]$ ,  $[K]$ ,  $[T]^{-1}$  และ  $\{U\}$  ในสมการได้

$$\begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos^2 \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{iX} \\ U_{iY} \\ U_{jX} \\ U_{jY} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

สมการข้างต้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรง และ stiffness matrix ของแต่ละ element  $[K]^{(e)}$  ซึ่ง stiffness matrix ของแต่ละเอลิเมนต์ใน truss แทนด้วย

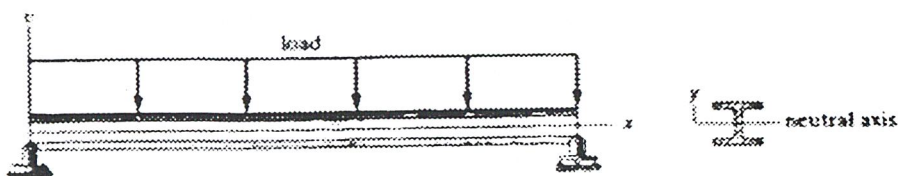
$$[K]^{(e)} = k \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos^2 \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ทำการรวมสมการของแต่ละ element ให้เป็นระบบรวม แก่สมการหาค่าของตัวไม่รู้ค่า  $\{U\}$  ออกมาได้ หาค่า Reaction force ได้

$$\{R\} = [K]_{\text{sys}} \{U\} - \{F\} \quad (2.18)$$

2.4.2 คาน ( BEAM ) [ 2 , p. 320 – 326 ; 3 , p. 220 – 226 ]

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการโค้งของคานอันเนื่องมาจากแรงแบบกระจาย คือ



รูปที่ 2.10 คานได้รับแรงแบบกระจาย [ 2 , p.320 ]

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - p(x) = 0 \quad (2.19)$$

- โดย E แทนค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุที่ใช้ทำคานนั้น
- I แทนโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัด ( Moment of inertia of area )
- p ( x ) แรงกระจาย ( Distributed load )

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

เราสามารถเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ และใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษคก้างเพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาการโค้งของคาน หรือเราอาจใช้วิธีการแปรผัน หากเราเลือกใช้วิธีการแปรผันเราจำเป็นต้องหาพลังงานศักย์รวมซึ่งประกอบด้วยพลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นจากความเครียดในวัตถุ (U\*) และที่เกิดขึ้นจากแรงภายนอก (V\*) ในที่นี้

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV \quad (2.20)$$

แทน  $\sigma_x = E \epsilon_x$  โดย  $\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2 w}{dx^2}$  จากสมมติฐานสมการ ดังนั้น

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V E z^2 \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dV \quad (2.21)$$

หากคานนั้นยาวเท่ากับ L และมีพื้นที่หน้าตัด A จะได้

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^L E z^2 \left[ \int_A E z^2 \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dA \right] dx \quad (2.22)$$

จากนั้นหากใช้สมมติฐานสมการพลังงานศักย์นี้จะกลายเป็น

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^L E \underbrace{\left[ \int_A z^2 dA \right]}_I \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.23)$$

หรือ

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.24)$$

โดย I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดรอบแกน ตัวอย่างเช่น หากคานามีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง b และสูง h ในทิศแกน y และ z ตามลำดับแล้ว  $I = bh^3 / 12$  เป็นต้น

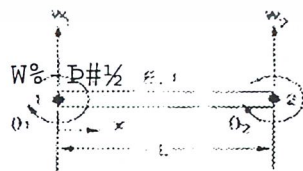
ส่วนพลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นจากแรงภายนอกคือ

$$V^* = - \text{Work} = - \int_0^L p(x) w(x) dx \quad (2.25)$$

ดังนั้น พลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นทั้งหมดคือ

$$J = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L p(x) w(x) dx \quad (2.26)$$

ก่อนที่จะเราสามารถสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ เราจำเป็นต้องทำการสมมุติลักษณะการกระจายของค่าเคลื่อนตัว w จากการโค้งของคานาก่อน ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะมุ่งเข้าหาผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ( Converged solution ) หลังจากที่ได้จากวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กขยับลงไปต่อเมื่อเราเลือกใช้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์นั้น ได้โดยถูกต้อง เนื่องจากพลังงานศักย์รวมดังแสดงในสมการ (2.26) นั้นประกอบด้วยพจน์ที่เป็นอนุพันธ์อันดับสองของค่าเคลื่อนตัว w จากการโค้งของคานา ดังนั้น ทั้งค่าเคลื่อนตัวและความชันของค่าเคลื่อนตัวจึงต้องถูกสมมุติให้มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ ผลลัพธ์ที่ได้จึงจะมุ่งเข้าหาผลลัพธ์ที่ถูกต้องหากเราใช้จำนวนเอลิเมนต์เพิ่มมากขึ้น รูป 2.11 แสดงเอลิเมนต์คานา ( beam element ) ที่ทำด้วยวัสดุที่ไม่มีจุดศกของความบิดหมุน E มีค่าโมเมนต์โดยแต่ละจุดต่อมีตัวไม่รู้จักค่า คือ การเคลื่อนตัว w และความชัน  $\theta$  ตามลำดับ



รูปที่ 2.11 เอลิเมนต์คานา [ 3 , p.223 ]



ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \int_0^L [\delta] \left\{ \frac{d^2 N}{dx^2} \right\} EI \left[ \frac{d^2 N}{dx^2} \right] \{\delta\} dx - \int_0^L p(x) w(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{[\delta]}_{(1 \times 4)} \underbrace{\int_0^L \left\{ \frac{d^2 N}{dx^2} \right\} EI \left[ \frac{d^2 N}{dx^2} \right] dx}_{[K]_{[4 \times 4]}} \underbrace{\{\delta\}}_{(4 \times 1)} - \underbrace{[\delta]}_{(1 \times 4)} \underbrace{\int_0^L p(x) \{N\} dx}_{\{F\}_{(4 \times 1)}} \\
 &= \frac{1}{2} [\delta] [K] \{\delta\} - [\delta] \{F\}
 \end{aligned}$$

จากนั้นเราสามารถทำการหาค่าต่ำสุด นั่นคือ

$$\frac{\partial J}{\partial \{\delta\}} = 0$$

ซึ่งก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์คานี้ ดังนี้

$$\underbrace{[K]}_{(4 \times 4)} \underbrace{\{\delta\}}_{(4 \times 1)} = \underbrace{\{F\}}_{(4 \times 1)} \quad (2.32)$$

โดย Stiffness Matrix ของเอลิเมนต์จะเป็น ดังนี้

$$[K] = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left\{ \frac{d^2 N}{dx^2} \right\} EI \left[ \frac{d^2 N}{dx^2} \right] dx \quad (2.33)$$

ซึ่งเมื่อแทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ N, จากสมการ (2.31) แล้วทำการอินทิเกรต จะได้

$$[K] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ & 2L^2 & 3L & L^2 \\ & & 6 & 3L \\ \text{Sym} & & & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

แล้วโหลดเวกเตอร์จากแรงภายนอกแบบกระจาย

$$\{F\} = \int_0^L p(x) \{N\} dx \quad (2.35)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งหาก  $p(x)$  นั้นคงที่ตลอดความยาวเอลิเมนต์ เช่น เท่ากับ  $p_0$  จะได้

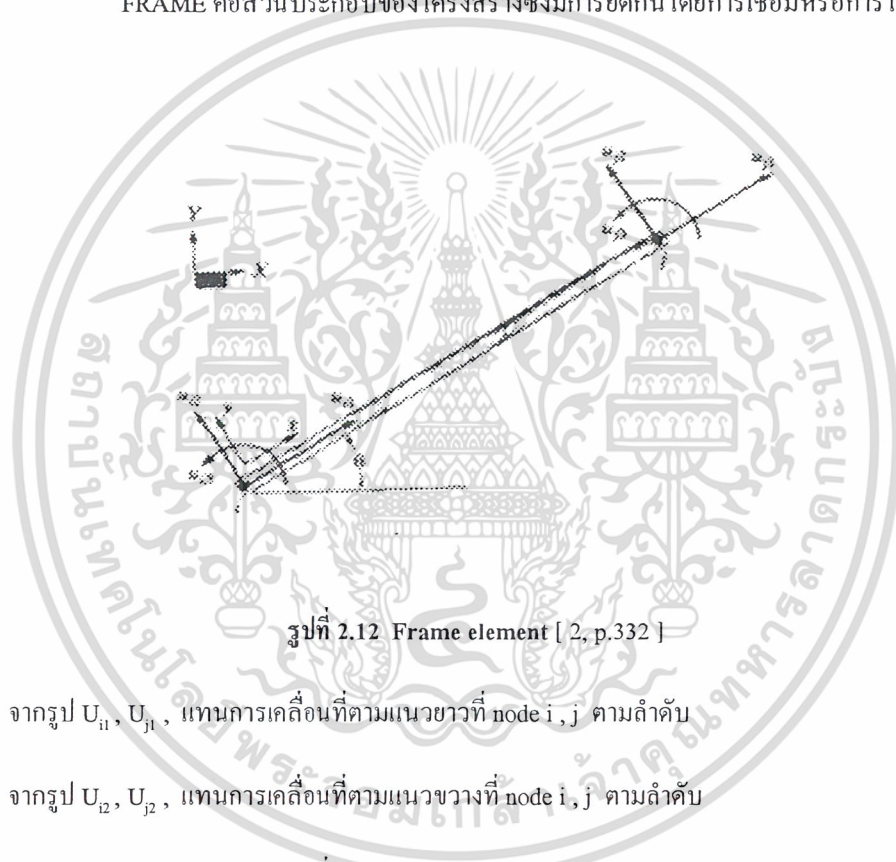
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} p_0 L/2 \\ -p_0 L^2/12 \\ p_0 L/2 \\ p_0 L^2/12 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

เป็นต้น

### 2.4.3 โครงกรอบ (FRAME) [ 2 ; p. 331 – 334 ]

FRAME คือส่วนประกอบของโครงสร้างซึ่งมีการยึดกันโดยการเชื่อมหรือการใช้สลักยึด ดังรูปที่

2.12



รูปที่ 2.12 Frame element [ 2, p.332 ]

จากรูป  $U_{i1}, U_{j1}$ , แทนการเคลื่อนที่ตามแนวยาวที่ node i, j ตามลำดับ

จากรูป  $U_{i2}, U_{j2}$ , แทนการเคลื่อนที่ตามแนวขวางที่ node i, j ตามลำดับ

จากรูป  $U_{i3}, U_{j3}$ , แทนการหมุนที่ node i, j ตามลำดับ

x-y ระบบแกนย่อย

X-Y ระบบแกนรวมใหญ่

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเคลื่อนที่ที่จุดต่อของระบบแกนย่อยและแกนรวมใหญ่คือ

$$u_{i1} = U_{ix} \cos \theta + U_{iy} \sin \theta$$

$$u_{i2} = -U_{ix} \sin \theta + U_{iy} \cos \theta$$

$$u_{i3} = U_{i\theta}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} u_{j1} &= U_{jx} \cos \theta + U_{jy} \sin \theta \\ u_{j2} &= -U_{jx} \sin \theta + U_{jy} \cos \theta \\ u_{j3} &= U_{j3} \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[u] = [T] [U] \tag{2.37}$$

โดย Transformation Matrix

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Stiffness matrix สำหรับการเคลื่อนที่ตามแนวขวางและการหมุนที่แต่ละจุดต่อของแต่ละ element

$$[K]^{(e)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \\ u_{j1} \\ u_{j2} \\ u_{j3} \end{matrix} \tag{2.39}$$

Stiffness matrix สำหรับการเคลื่อนที่ตามแนวยาวที่จุด node ของแต่ละ element

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

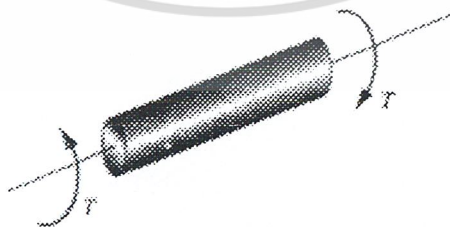
$$[K]_{\text{axial}}^{(e)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{i1} & u_{i2} & u_{i3} & u_{j1} & u_{j2} & u_{j3} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \\ u_{j1} \\ u_{j2} \\ u_{j3} \end{matrix} \end{matrix} \quad (2.40)$$

Stiffness matrix ของ element ของ frame

$$[K]_{\text{sv}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

#### 2.4.4 การบิด (TORSION) [ 2, p. 315 – 320 ]

TORSION เป็นเหล็กที่ถูกแรงบิดมากกระทำทำให้เกิดความเค้นภายในวัสดุ ดังรูป



รูปที่ 2.13 แรงบิดกระทำกับชิ้นงาน [ 3, p.316 ]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สามารถแสดงสมการเชิงอนุพันธ์ ในเทอมของฟังก์ชันความเค้น ( $\phi$ ) สำหรับ Torsion ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0 \quad (2.42)$$

ค่า  $G$  แทนด้วยค่า Shear modulus และค่า  $\phi$  แทนมุมบิดต่อความยาวความสัมพันธ์ระหว่างค่า Shear stress และค่าฟังก์ชันความเค้นคือ

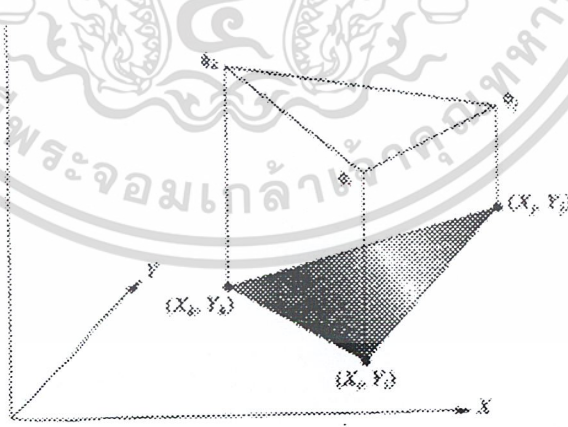
$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \tau_{yx} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.43)$$

นำค่าทอร์กแทนในฟังก์ชันความเค้นได้

$$T = 2 \int_A \phi \, dA \quad (2.44)$$

เปรียบเทียบค่าสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหา torsion ได้สมการ stiffness matrix ของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม ดังนี้

$$[K]^{(e)} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} \beta_i^2 & \beta_i \beta_j & \beta_i \beta_k \\ \beta_i \beta_j & \beta_j^2 & \beta_j \beta_k \\ \beta_i \beta_k & \beta_j \beta_k & \beta_k^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} \delta_i^2 & \delta_i \delta_j & \delta_i \delta_k \\ \delta_i \delta_j & \delta_j^2 & \delta_j \delta_k \\ \delta_i \delta_k & \delta_j \delta_k & \delta_k^2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$



รูปที่ 2.14 พิกัดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม [ 2 , p.319 ]

แทนค่าแรงภายในของเอลิเมนต์เท่ากับ

$$\{F\}^{(e)} = \frac{2G\theta A}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

โดยค่า A ของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม และเทอมของ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  หาค่าได้จาก

$$2A = X_i (Y_j - Y_k) + X_j (Y_k - Y_i) + X_k (Y_i - Y_j)$$

$$\alpha_i = X_j Y_k - X_k Y_j \quad \beta_i = Y_j - Y_k \quad \delta_i = X_k - X_j$$

$$\alpha_j = X_k Y_i - X_i Y_k \quad \beta_j = Y_k - Y_i \quad \delta_j = X_i - X_k$$

$$\alpha_k = X_i Y_j - X_j Y_i \quad \beta_k = Y_i - Y_j \quad \delta_k = X_j - X_i$$

รวมสมการแต่ละเอลิเมนต์เป็นสมการรวมได้ค่า  $[K]^{(e)}$  และ  $\{F\}^{(e)}$  แล้วนำไปแก้สมการหาค่าต่อไม่รู้ค่า

#### 2.4.5 แผ่นระนาบ ( PLANE ) [ 2 , p.338 - 349 ; 3 , p.210 - 216 ]



รูปที่ 2.15 แสดงค่าความเค้นในระนาบ [ 2 , p.339 ]

#### ลักษณะของปัญหา

1. ลักษณะของความเค้นในระนาบ ( plane stress )

ใช้กับปัญหาแผ่นระนาบบาง โดยอยู่บนสมมติฐานที่ว่าความเค้นในทิศทางผ่านความหนาของแผ่นนั้นน้อยมาก และกำหนดให้เท่ากับ 0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

state of stress

$$[\sigma]^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \tau_{xy}] \quad (2.47)$$

จากกฎของ Hooke จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma] = [V] \{\epsilon\} \quad (2.48)$$

$$[\sigma]^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \tau_{xy}] \quad (2.49)$$

$$[V] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

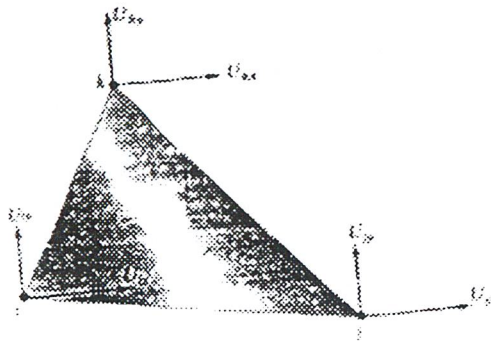
2. ลักษณะของความเครียดในระนาบ ( plane strain )

ใช้กับปัญหาที่มีความลึกมากโดยตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่า ค่าความเครียดในทิศทางผ่านความลึกนั้นไม่เกิดขึ้น คือ ให้เท่ากับ 0

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

นำเอลิเมนต์ สามเหลี่ยมมาใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับความเค้นในระนาบ



รูปที่ 2.16 แสดงทิศทางของความเค้นในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมของระนาบ [ 2 , p.342 ]

$$u = S_i U_{ix} + S_j U_{jx} + S_k U_{kx} \quad (2.53)$$

$$v = S_i U_{iy} + S_j U_{jy} + S_k U_{ky} \quad (2.54)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & 0 & S_j & 0 & S_k & 0 \\ 0 & S_i & 0 & S_j & 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \\ U_{kx} \\ U_{ky} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (S_i U_{ix} + S_j U_{jx} + S_k U_{kx}) = \frac{1}{2A} [\beta_i U_{ix} + \beta_j U_{jx} + \beta_k U_{kx}] \quad (2.55)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (S_i U_{iy} + S_j U_{jy} + S_k U_{ky}) = \frac{1}{2A} [\beta_i U_{iy} + \beta_j U_{jy} + \beta_k U_{ky}]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A} [\delta_i U_{ix} + \beta_i U_{jy} + \delta_j U_{jx} + \beta_j U_{ix} + \beta_j U_{jy} + \delta_k U_{kx} + \beta_k U_{ky}]$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \delta_i & 0 & \delta_j & 0 & \delta_k \\ \delta_i & \beta_i & \delta_j & \beta_j & \delta_k & \beta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \\ U_{kx} \\ U_{ky} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{U\} \quad (2.57)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \delta_i & 0 & \delta_j & 0 & \delta_k \\ \delta_i & \beta_i & \delta_j & \beta_j & \delta_k & \beta_k \end{bmatrix} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \\ U_{kx} \\ U_{ky} \end{Bmatrix}$$

$$[K]^{(e)} = \int_V [B]^T [v] [B] dV = V [B]^T [v] [B] \quad (2.58)$$

### เมตริกซ์ของแรงกระทำ (Load Matrix)

#### 1. แรงเฉพาะจุด (point load)

$$\{F\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} Q_{ix} \\ Q_{iy} \\ Q_{jx} \\ Q_{jy} \\ Q_{kx} \\ Q_{ky} \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

#### 2. แรงกระจาย (distributed load)



รูปที่ 2.17 การกระจายของโหลดที่กระทำที่ขอบ  $k_i$  ของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม [ 2 , p.345 ]

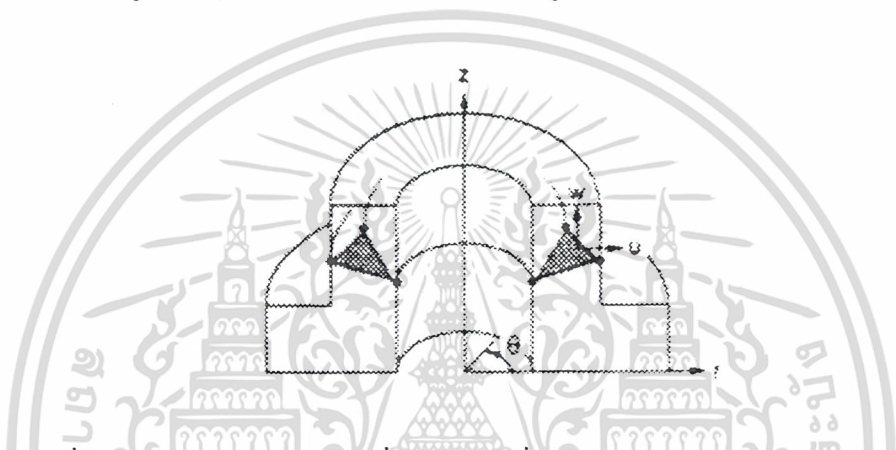
$$\{F\}^{(e)} = \int \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \\ S_j & 0 \\ 0 & S_j \\ S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dA = t \int_{\ell_{io}} \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \\ S_j & 0 \\ 0 & S_j \\ S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} d\ell = \frac{tL_{ik}}{2} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\{F\}^{(e)} = \frac{tL_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{F\}^{(e)} = \frac{tL_{ijk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

#### 2.4.6 ความสมมาตรรอบแกน (AXISYMMETRIC) [ 3 , p.217 - 220 ]

ปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน ดังแสดงในรูป



รูปที่ 2.18 การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมกับปัญหาที่มีความสามารถรอบแกน [ 3 , p.217 ]

ปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน เป็นรูปร่างวัตถุที่มีความสมมาตรรอบแกน z หากแรงภายนอกที่กระทำนั้นไม่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง  $\theta$  สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายความสมดุลของปัญหาคือ

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0 \quad (2.62)$$

หากเราเลือกเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 2.18 ซึ่งมีลักษณะการกระจายของค่าเคลื่อนตัว  $U$  และ  $W$  ในทิศทาง  $r$  และแกน  $z$  ตามลำดับ เป็นดังนี้

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดย  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  แทนฟังก์ชันการประมาณภายในของรูปสามเหลี่ยมในสมการ

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z) \quad (2.64)$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด และค่าเคลื่อนตัวบนเอลิเมนต์คือ

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 2AN_1 & 0 & 2AN_2 & 0 & 2AN_3 & 0 \\ r & 0 & r & 0 & r & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ 0 & b_1 & c_1 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \\ &= [B(r,z)] \{\delta\} \end{aligned} \quad (2.65)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในรูปแบบสมการ คือ

$$\{\sigma\} = [c] \{\varepsilon - \varepsilon_0\} \quad (2.66)$$

ซึ่งได้ค่า  $[c]$  เท่ากับ

$$[c] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ 0 & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

ฉะนั้น สมการรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งแรง  $[K]$  ของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน เป็นดังสมการ

$$[K] = 2\pi \int_A [B(r,z)]^T [c] [B(r,z)] r dr dz \quad (2.68)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

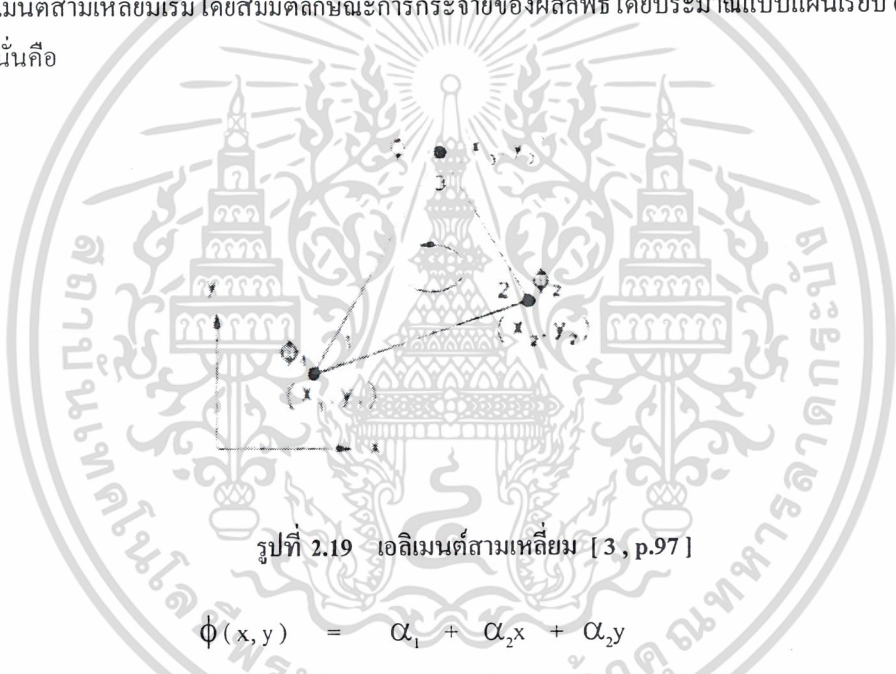
และโหลดเวกเตอร์ เนื่องจากแรงวัตถุ คือ

$$\{F\} = 2\pi \int_A [B(r, z)]^T \begin{Bmatrix} F_r \\ F_z \end{Bmatrix} r \, dr \, dz \quad (2.69)$$

## 2.5 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ 2 มิติ [3, p.96 - 99]

### เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

ปัญหาส่วนใหญ่ใน 2 มิติ จะใช้เอลิเมนต์ที่มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม (triangular element) ทั้งนี้ก็เพราะว่าลักษณะขอบเขตของปัญหา 2 มิติทั่วไป สามารถแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยๆ ได้โดยง่าย อีกทั้งสมการเอลิเมนต์ของรูปสามเหลี่ยมสามารถสร้างขึ้นได้ง่ายและนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมได้โดยสะดวกด้วย เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบที่ง่ายที่สุด ประกอบด้วย 3 จุดต่อ หมายถึง 1, 2, 3 ซึ่งงานในทศทวนเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 2.19 โดยที่จุดต่อซึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า  $\phi_i$  การสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเริ่ม โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณแบบแผ่นเรียบ (flat plane) บนเอลิเมนต์ นั่นคือ



รูปที่ 2.19 เอลิเมนต์สามเหลี่ยม [3, p.97]

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.70)$$

โดย  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  เป็นค่าคงตัว ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขที่จุดต่อทั้ง 3 ดังนี้

$$\text{จุดต่อ 1 : } \phi(x_1, y_1) = \phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1$$

$$\text{จุดต่อ 2 : } \phi(x_2, y_2) = \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2$$

$$\text{จุดต่อ 3 : } \phi(x_3, y_3) = \phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3$$

จาก 3 สมการนี้ เราสามารถหาค่า  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ให้อยู่ในรูปของค่าที่จุดต่อ  $\phi_i$  และตำแหน่งของจุดต่อ  $(x_i, y_i)$  ซึ่งหลังจากแทนกลับลงในสมการ (2.70) แล้ว ทำการจัดพจน์ต่างๆ เราจะได้ลักษณะของการกระจายของผลเฉลยสำหรับเอลิเมนต์ที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \phi(x_i, y_i) &= \begin{bmatrix} N_1(x,y) & N_2(x,y) & N_3(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{matrix} [N] \\ (1 \times 3) \end{matrix} \begin{matrix} \{\phi\} \\ (1 \times 3) \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.71)$$

โดย [N] เรียกว่า เมทริกซ์ของการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation matrix) และ  $\{\phi\}$  คือ เวกเตอร์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (vector of nodal unknowning) และในที่นี้

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), i = 1, 2, 3 \quad (2.72)$$

โดย A = พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} [x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \\ a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (2.73)$$

## 2.6 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ [4, p.78 - 94]

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีการแก้ระบบสมการที่ได้รับความนิยมมากระเบียบวิธีหนึ่ง เป็นระเบียบวิธีที่โดยปกติจะใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขนาดใหญ่ที่ใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์โดยทั่วไป ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ในภาพรวม สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

(ก) การกำจัดไปข้างหน้า (forward elimination) หากเรามีระบบสมการที่ประกอบด้วย 3 สมการที่ประกอบด้วย 3 สมการย่อยดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

การกำจัดไปข้างหน้าจะเปลี่ยนระบบสมการ (2.74) ให้อยู่ในรูปแบบซึ่งเมทริกซ์จัตุรัสทางด้านซ้ายของสมการ จะเป็นเมทริกซ์นั้นที่ประกอบด้วยค่าศูนย์ตลอดแถวล่างซ้ายของเมทริกซ์นั้น ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

โดยเครื่องหมายที่เป็นครุฑบนสัมประสิทธิ์แสดงถึงว่าสัมประสิทธิ์นั้นเป็นค่าใหม่ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปจากสัมประสิทธิ์เดิมในสมการ (2.74)

(ข) การแทนค่าย้อนกลับ (back substitution) เมื่อจัดระบบสมการให้อยู่ในรูปแบบของสมการ (2.74) ได้แล้วก็เป็นการง่ายที่จะคำนวณหาค่า  $x_i$  ที่ละสมการดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{23} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= b''_3 / a''_{33} \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23} x_3) / a''_{22} \\ x_1 &= (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3) / a_{11} \end{aligned} \quad (2.77)$$

ระเบียบวิธีเป็นขั้นตอนที่สามารถนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ได้โดยสะดวก ขั้นตอนนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่เป็นมาตรฐานสำหรับการแก้ระบบสมการ โดยทั่วไปที่ประกอบด้วย  $n$  สมการย่อยได้ดังต่อไปนี้

หากเราพิจารณาระบบสมการที่ประกอบด้วย  $n$  สมการย่อยในรูปแบบดังนี้

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \quad (2.78a)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \quad (2.78b)$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \quad (2.78c)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \quad (2.78n)$$

การกำจัดไปข้างหน้า เราจะเริ่มต้นจากการกำจัดไปข้างหน้า โดยเริ่มจากการหาสมการแรกนี้ด้วยสัมประสิทธิ์ของ  $x_1$

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (2.79)$$

จากนั้นจึงคูณสมการที่ได้ด้วยสัมประสิทธิ์ของ  $x_1$  ของสมการที่สอง (2.78b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ 28 อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a_{21}x_1 + a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + a_{21} \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = a_{21} \frac{b_1}{a_{11}} \quad (2.80)$$

แล้วจึงนำสมการที่ได้นี้ไปลบออกจากสมการ (2.78b) เดิมจะได้

$$\underbrace{\left(a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)}_{a'_{22}}x_2 + \underbrace{\left(a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)}_{a'_{23}}x_3 + \dots + \underbrace{\left(a_{2n} - a_{21} \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)}_{a'_{2n}}x_n = \underbrace{b_2 - a_{21} \frac{b_1}{a_{11}}}_{b'_2}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad (2.81)$$

แล้วทำเช่นเดียวกันนี้กับสมการที่ (2.78c) ไปจนถึง (2.78n) ทำให้ระบบสมการดั้งเดิม (2.78) เปลี่ยนมาอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (2.82a)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad (2.82b)$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \quad (2.82c)$$

$$\vdots$$

$$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n \quad (2.82n)$$

จะเห็นได้ว่าจากวิธีการกำจัดไปข้างหน้าหนึ่งรอบแรกทุกๆค่าในแนวแถวตั้งแรกของระบบสมการ (2.82) ยกเว้นในสมการแรกนั้นต่างมีค่าเท่ากับศูนย์

เราจะทำการกำจัดไปข้างหน้าซ้ำอีกรอบที่สอง แต่คราวนี้เราจะเริ่มจากสมการ (2.82b) ซึ่งเป็นสมการที่สอง โดยหารสมการนี้ตลอดด้วย  $a'_{32}$  ของ  $x_2$  จากสมการ (2.82c) แล้วเอาผลลัพธ์ที่ได้ไปลบออกจากสมการ (2.82c) เราก็จะได้สมการ (2.82c) ใหม่ที่ไม่ประกอบด้วยพจน์  $x_1$  และ  $x_2$  เลยจากนั้นก็ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนถึงสมการ (2.82n) สุดท้ายกระบวนการดังกล่าวทำให้ระบบสมการ (2.82) เปลี่ยนมาอยู่ในรูปแบบใหม่ ดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (2.83a)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad (2.83b)$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3 \quad (2.83c)$$

$$\vdots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a''_{n3} x_3 + \dots + a''_{nn} x_n = b''_n \quad (2.83n)$$

จากนั้นก็ทำการกำจัดซ้ำอีกเป็นรอบที่สาม สี่ ห้า เรื่อยไป จนถึงรอบที่  $n-1$  ซึ่งจะก่อให้เกิดระบบสมการในรูปแบบที่พร้อมที่จะทำการแทนค่าย้อนกลับเพื่อหาผลลัพธ์ดังนี้

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \quad (2.84a)$$

$$a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2 \quad (2.84b)$$

$$a''_{33} x_3 + \dots + a''_{3n} x_n = b''_3 \quad (2.84c)$$

$$a^{(n-1)}_{nn} x_n = b^{(n-1)}_{nn} \quad (2.84n)$$

หน้า

โดยจำนวนขีดเครื่องหมายของบรรทัดหรือค่าในวงเล็บของบรรทัดบนแสดงจำนวนรอบของการกำจัดไปข้าง

นั่นคือ

การแทนค่าย้อนกลับ จากระบบสมการ (2.84) ค่า  $x_n$  สามารถคำนวณได้โดยตรงจากสมการสุดท้าย (2.84n)

$$x_n = \frac{b^{(n-1)}_{nn}}{a^{(n-1)}_{nn}} \quad (2.85a)$$

สัมพันธ์ คือ

และจากนั้นก็สมารถหาค่า  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$  โดยการไล่แทนค่าย้อนกลับไปที่สมการ โดยใช้ความ

$$x_n = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad (2.85b)$$

โดยบรรทัดที่  $i$  แทนสมการอันดับที่  $i$  ในระบบสมการ (2.84)

## 2.6.1 ปัญหาที่อาจเกิดขึ้นจากระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ [ 4 , p.86 – 88 ]

1. ปัญหาจากการหารด้วยศูนย์ ระบบสมการที่เราใช้แสดงระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ในตัวอย่าง 3.4 คือ

$$4x_1 - 4x_2 = 400 \quad (2.86a)$$

$$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 400 \quad (2.86b)$$

$$-2x_2 + 4x_3 = 400 \quad (2.86c)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในขั้นตอนแรกของการกำจัดไปข้างหน้า เราทำการหารสมการ (2.86a) ตลอดด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของ  $x_1$  ซึ่งในที่นี้ก็คือหมายเลข 4 หากก่อนทำการแก้ระบบสมการนี้ สมการ (2.86a) และ (2.86c) นั้นเกิดสลับที่กัน นั่นคือ

$$-2x_2 + 4x_3 = 400 \quad (2.87a)$$

$$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 400 \quad (2.87b)$$

$$4x_1 + 4x_2 = 400 \quad (2.87c)$$

เช่นนี้แล้วในขั้นตอนแรกของการกำจัดไปข้างหน้าจะเกิดการหารด้วยหมายเลขศูนย์ปัญหาในทำนองเช่นนี้ อาจเกิดขึ้นเช่นกันในช่วงของกระบวนการกำจัดไปข้างหน้าซ้ำหลายรอบที่อาจทำให้ค่าสัมประสิทธิ์  $a_{ii}^{(i-1)}$  ดังแสดงในสมการ (2.84) มีค่าเป็นศูนย์หรือน้อยมากจนเกือบเท่ากับศูนย์ วิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวจะอธิบายในหัวข้อต่อไป และควรเป็นวิธีการที่ควรเพิ่มเติมลงในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อป้องกันปัญหาดังกล่าวที่อาจเกิดขึ้นได้

2. ปัญหาความผิดพลาดจากการปัดเศษ เครื่องคอมพิวเตอร์ต่างระดับกันจะมีความสามารถในการเก็บตัวเลขนัยสำคัญที่ไม่เท่ากัน เนื่องจากวิธีการกำจัดแบบเกาส์จะทำการคูณหารตัวเลขอยู่ตลอด ความผิดพลาดจากการปัดเศษที่เกิดขึ้นสามารถแพร่กระจายออกไปได้ ซึ่งอาจก่อความผิดพลาดต่อผลลัพธ์ที่คำนวณได้

### 3. ปัญหาระบบสมการในภาวะไม่เหมาะสม

#### 2.6.2 การปรับปรุงระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ [4, p.89 – 93]

จากหัวข้อที่แล้วซึ่งอธิบายปัญหาที่เกิดขึ้นจากขั้นตอนการใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ เราสามารถสรุปได้ว่าปัญหาในภาพรวมนั้นเกิดจากความผิดพลาดจากการปัดเศษและการหารด้วยศูนย์ ความผิดพลาดจากการปัดเศษสามารถแก้ไขให้ลดน้อยลงได้โดยการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่สามารถเก็บตัวเลขนัยสำคัญได้มากขึ้น ส่วนการหารด้วยศูนย์นั้นสามารถแก้ไขได้ดังนี้

##### 2.6.2.1 การเลือกตัวหลัก (Pivoting) [4, p.89 – 90]

หากค่าของสัมประสิทธิ์  $a_{ij}$  ใดๆ ในแนวแกนเฉียง (diagonal term) ของเมทริกซ์จัตุรัสมีค่าเป็นศูนย์แล้ว ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์จะไม่สามารถดำเนินต่อไปได้ และถึงแม้ค่าสัมประสิทธิ์ดังกล่าวจะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ก็ตามแต่หากมีค่าน้อยมาก ก็อาจก่อให้เกิดปัญหาเนื่องจากความผิดพลาดจากการปัดเศษขึ้นมาได้เช่นกัน ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงแก้สมการต่อไปนี้ด้วยวิธีการกำจัดแบบเกาส์

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0001 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

ค่าผลลัพธ์แน่นอนตรงของระบบสมการนี้คือ  $x_1 = 1/3$  และ  $x_2 = 2/3$  จะเห็นได้ว่าระบบสมการนี้มีค่าสัมประสิทธิ์ในแนวแกนเฉียงของเมทริกซ์จัตุรัสที่สอดคล้องกับสมการแรกนั้นน้อยมาก และเมื่อเราทำการกำจัดไปข้างหน้าโดยวิธีการกำจัดแบบเกาส์เราจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และผู้ดูแลอย่างถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 0 & -9999 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0001 \\ -6666 \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

เมื่อทำการแทนค่าย้อนกลับจะให้เกิดผลลัพธ์ ดังนี้

$$\begin{aligned} x_2 &= 2/3 \\ \text{และ} \quad x_1 &= (2.0001 - 3x_2)/0.0003 \end{aligned}$$

ซึ่งค่าของ  $x_1$  นี้ขึ้นอยู่กับจำนวนตัวนัยสำคัญที่ใช้ในการคำนวณ เช่น หากเราใช้ตัวนัยสำคัญ 5 ตัว เราจะได้

$$x_2 = 0.66667 \quad \text{และ} \quad x_1 = 0.30000 \quad (2.90)$$

ค่า  $x_1$  ที่ได้มีค่าความผิดพลาดจากค่าที่แท้จริงไปถึง 10% แต่ถ้าหากเราทำการสลับสมการย่อยในระบบสมการ (2.85) เสียใหม่ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.0003 & 3.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.0001 \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

แล้วทำการกำจัดไปข้างหน้าจะได้

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 2.9997 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.9998 \end{Bmatrix} \quad (2.92)$$

เมื่อทำการแทนค่าย้อนกลับโดยใช้ตัวนัยสำคัญ 5 ตัว เช่นเดิม จะได้

$$x_2 = 0.66667 \quad \text{และ} \quad x_1 = 0.33333 \quad (2.93)$$

คือ ค่า  $x_1$  ใหม่ ที่ได้จากการสลับสมการนี้มีค่าความผิดพลาดเพียง 0.001% เท่านั้น

จากตัวอย่างนี้เราจะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่อยู่ในแนวแกนเฉียงของเมทริกซ์จัตุรัสนั้นมีความสำคัญมากต่อความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากวิธีการกำจัดเกาส์ ดังนั้น เพื่อแก้ปัญหาที่อาจเกิดขึ้นดังเล่นแสดงในตัวอย่างนี้ หลักการขั้นตอนก็คือ ในขณะที่ทำการกำจัดไปข้างหน้าอยู่นั้น ก็ให้จัดเรียงอันดับสมการเสียใหม่ โดยการเลือกสมการที่มีค่าสัมประสิทธิ์มากที่สุดจากสมการที่เหลือทั้งหมดขึ้นมาใช้ก่อน ดังตัวอย่างเช่น ก่อนที่จะทำการกำจัดไปข้างหน้าเป็นรอบที่สามในระบบสมการ (2.80) ก็ให้ตรวจสอบว่าสมการใดในช่วงสมการ (2.80c) – (2.80n) ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของ  $x_3$  มากที่สุด เมื่อพบสมการนั้นแล้วก็ให้เลื่อนสมการที่อยู่ในแถวบนเพียงอย่างเดียวจึงเรียกกันโดยทั่วไปว่าเป็นการเลือกสมการหลักบางส่วน (partial pivoting) ซึ่งสามารถประดิษฐ์ขึ้นเป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยง่าย

### 2.6.2.2 การจัดสเกล (scaling) [ 4 , p.91 – 92 ]

ระบบสมการในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ อาจประกอบด้วยสมการย่อยต่างๆ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ที่แตกต่างกันมากยกตัวอย่างเช่น ในการคำนวณหาสภาวะของอากาศได้ห้องของกระสวยอวกาศ จำเป็นต้องแก้สมการของการไหลซึ่งตัวไม่รู้ค่าประกอบด้วยความหนาแน่นของอากาศ ความเร็วของอากาศ และอุณหภูมิของอากาศตามตำแหน่งต่างๆ กัน หากพิจารณาเพียงตัวเลขแล้ว ค่าตัวเลขของความหนาแน่นจะน้อยกว่าค่าของความเร็วมากก่อให้เกิดระบบสมการย่อยที่มีค่าสัมประสิทธิ์ที่แตกต่างกันมากซึ่งบางครั้งอาจก่อให้เกิดปัญหาดังที่จะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ด้วยวิธีการกำจัดแบบเกาส์

$$\begin{bmatrix} 2 & 100000 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100000 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (2.94)$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ถูกต้อง คือ  $x_1 = 1.00002$  และ  $x_2 = 0.99998$  และหากเราใช้ตัวเลขที่มีนัยสำคัญเพียง 3 ตัว ในการคำนวณผลลัพธ์นี้คือ  $x_1 = x_2 = 1.00$

หากเราใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา โดยทำการกำจัดไปข้างหน้าจะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 100000 \\ 0 & -49999 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100000 \\ -49999 \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

และเมื่อทำการแทนค่าย้อนกลับจะให้ผลลัพธ์ ดังนี้

$$x_2 = 1.00 \quad \text{และ} \quad x_1 = 0.00 \quad (2.96)$$

ซึ่งจะเห็นว่าค่า  $x_1$  ที่ได้ นั้นมีความผิดพลาดไปถึง 100%

หากเราแก้ปัญหาใหม่โดยการจัดสเกล กล่าวคือ ทำการหารตลอดทุกๆ สมการด้วยสัมประสิทธิ์ที่มีค่าสูงสุดของสมการนี้ ดังนั้นระบบสมการกลายเป็น

$$\begin{bmatrix} 0.00002 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

และในขณะเดียวกัน ทำการสลับสมการหลักดังเช่นที่อธิบายในหัวข้อที่แล้ว จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.00002 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้วจึงทำการกำจัดไปข้างหน้าจะได้

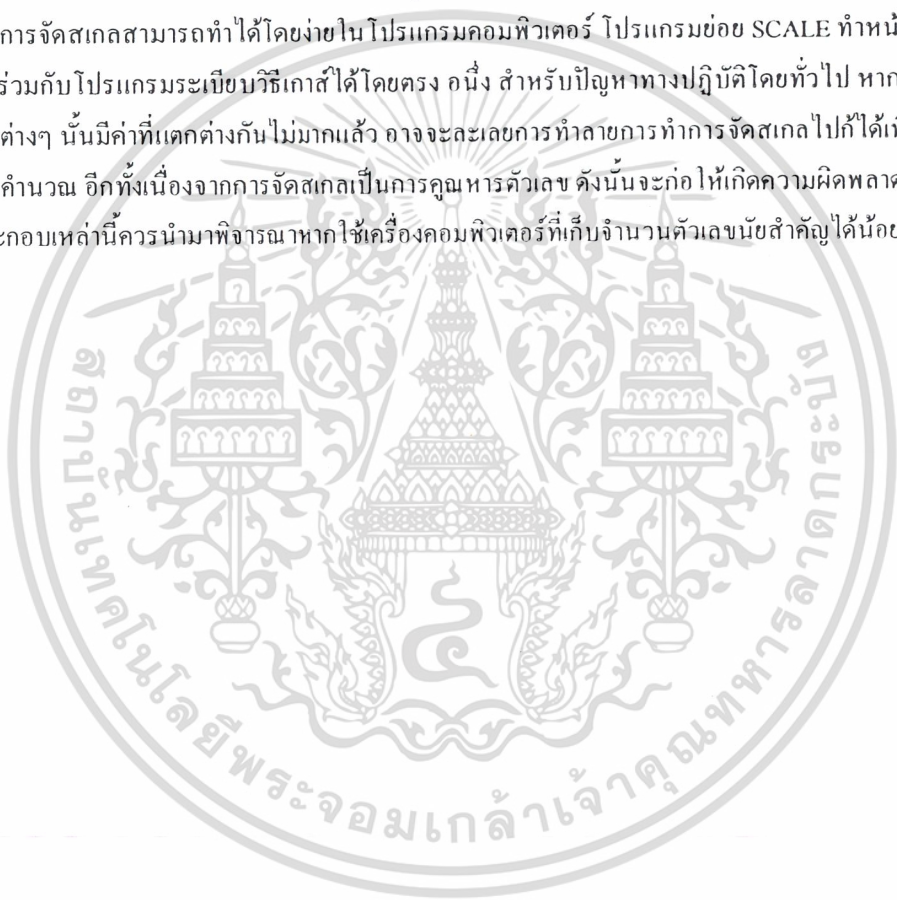
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.999998 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0.999996 \end{Bmatrix} \quad (2.99)$$

เมื่อทำการแทนค่าย้อนกลับจะให้ผลลัพธ์ คือ

$$x_2 = 1.00 \quad \text{และ} \quad x_1 = 1.00 \quad (2.100)$$

นั่นคือการจัดสเกลช่วยก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

การจัดสเกลสามารถทำได้โดยง่ายในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โปรแกรมย่อย SCALE ทำหน้าที่จัดสเกลโดยสามารถใช้ร่วมกับโปรแกรมระเบียบวิธีเกาส์ได้โดยตรง หนึ่ง สำหรับปัญหาทางปฏิบัติโดยทั่วไป หากค่าสัมประสิทธิ์ของสมการต่างๆ นั้นมีค่าที่แตกต่างกันไม่มากแล้ว อาจจะละเลยการทำลายการทำกรจัดสเกลไปก็ได้เพื่อช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณ อีกทั้งเนื่องจากการจัดสเกลเป็นการคูณหารตัวเลข ดังนั้นจะก่อให้เกิดความผิดพลาดจากการปัดเศษซึ่งส่วนประกอบเหล่านี้ควรนำมาพิจารณาหากใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่เก็บจำนวนตัวเลขน้อยสำคัญได้น้อย



## บทที่ 3

### การออกแบบ / การดำเนินงาน

#### 3.1 การวางแผนการดำเนินงาน

มีลำดับขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

1. ทำการศึกษาไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้แก่ การศึกษาขั้นตอนของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์, วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาของแข็งชนิดต่างๆ, และการหาฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สองมิติที่มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม รวมทั้งทำความเข้าใจกับโจทย์ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบต่างๆ
2. ทำการศึกษาโปรแกรม Microsoft Visual Basic Version 6.0
3. วางโครงสร้างโปรแกรมทั้งหมดคร่าวๆ
4. เริ่มทำการเขียนโปรแกรมส่วนที่ 1 ให้โปรแกรมสามารถรับข้อมูลเพื่อนำไปใช้ประมวลผล คือรับข้อมูลทั้งแบบรูปชิ้นงาน และคุณสมบัติของชิ้นงาน
5. ศึกษาวิธีการแบ่งเอลิเมนต์ โดยโครงงานนี้สนใจการแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยม
6. ทำการเขียนโปรแกรมส่วนที่ 2 คือ ให้โปรแกรมสามารถทำการแบ่งเอลิเมนต์ได้เป็นผลสำเร็จ
7. ทำการเขียนโปรแกรมส่วนที่ 3 คือ ให้โปรแกรมสามารถนำข้อมูลต่างๆ ไปประมวลผลคำนวณหาระดับความเค้นได้เป็นผลสำเร็จ
8. ศึกษาโปรแกรมกราฟฟิก และทำการเขียนโปรแกรมกราฟฟิก ให้สามารถแสดงผลระดับความเค้นออกมาเป็นรูปกราฟฟิกได้
9. ทำการวิเคราะห์ ประเมินผล และแก้ไขปรับปรุงให้โปรแกรมเสร็จสมบูรณ์
10. โปรแกรมเสร็จสมบูรณ์

#### 3.2 การออกแบบโปรแกรม

โปรแกรมประกอบด้วย 3 ส่วนหลัก ดังนี้

##### 3.2.1 ส่วนรับข้อมูล (input data)

Input ของโปรแกรมเรียงตามลำดับขั้นตอนการรับข้อมูลของโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

1. รูปชิ้นงานและพิกัดของตำแหน่งต่างๆ บนชิ้นงาน
2. ข้อมูลด้านคุณสมบัติของชิ้นงาน ได้แก่ ความหนาของชิ้นงาน ค่ายัง โมดูลัส ค่าอัตราส่วนพัชชอง เป็นต้น
3. ความยาวของเอลิเมนต์
4. ข้อมูลของแรงที่กระทำและตำแหน่งยึดคิบนชิ้นงาน

### 3.2.2 ส่วนประมวลผล

โปรแกรมจะนำค่าข้อมูลที่รับเข้ามาไปประมวลผลและแสดงค่า output โดยอาศัยวิธีการตามทฤษฎีของไฟไนต์เอลิเมนต์

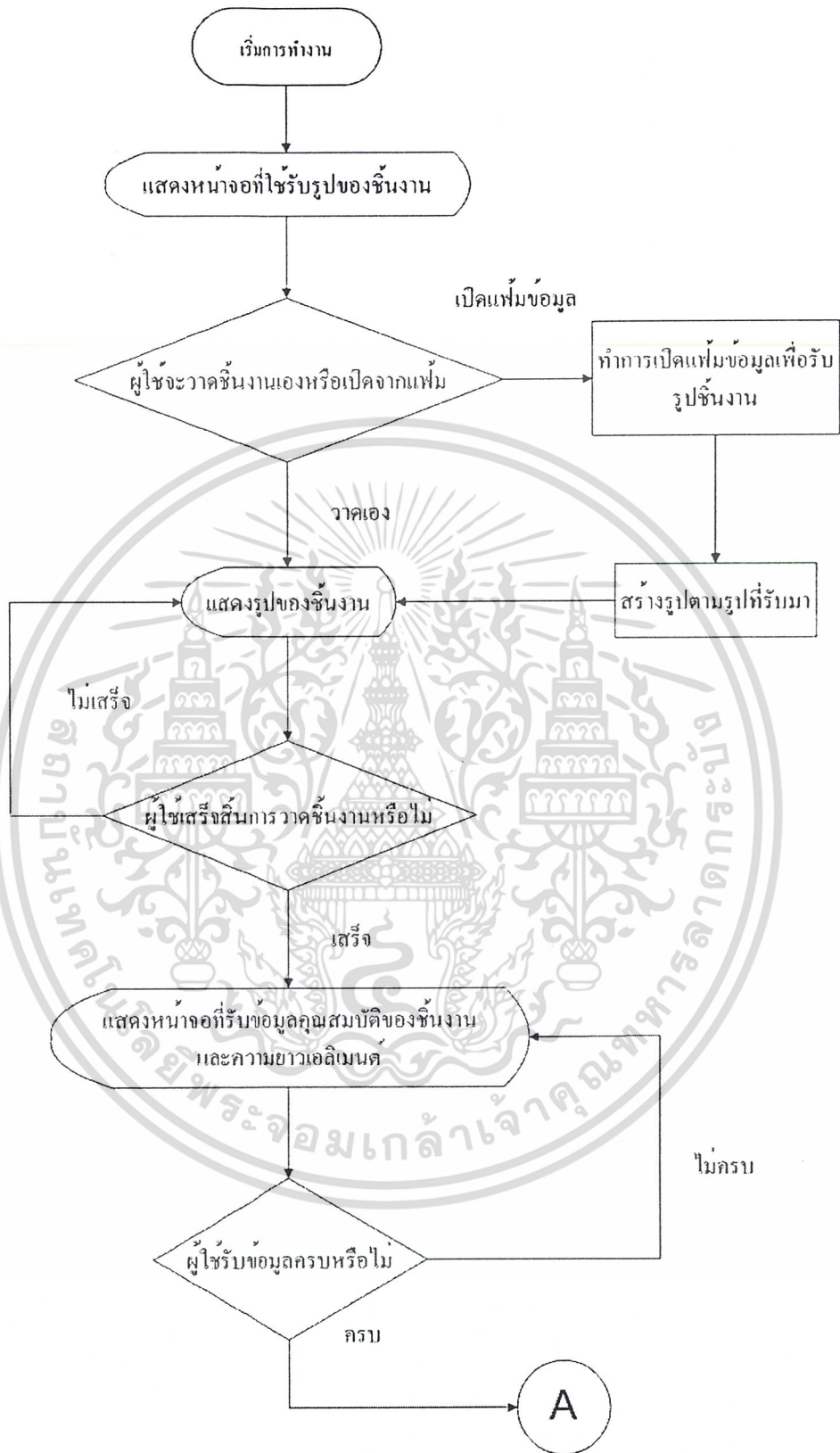
### 3.2.3 ส่วนแสดงผล ( output data )

Output ของโปรแกรมหมีดังต่อไปนี้

1. ค่าระดับความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์
2. รูปกราฟฟิกแสดงระดับความเค้นของชิ้นงาน



รูปที่ 3.1 รูปแสดงขั้นตอนการทำงานโดยรวมของโปรแกรม



รูปที่ 3.2 รูปแสดงขั้นตอนการรับค่า Input ส่วนที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ 37 อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.3 รูปแสดงขั้นตอนการรับ Input ส่วนที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4 รูปแสดงขั้นตอนการรับInput ส่วนที่3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.5 รูปแสดงขั้นตอนการแสดงผล Output

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.3 รายละเอียดการทำงาน

จากขั้นตอนการทำงานที่ได้กล่าวไปแล้ว ในส่วนของการศึกษาวิธีการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยม จัดเป็นขั้นตอนที่สำคัญขั้นตอนหนึ่งของโปรแกรม เพราะเป็นส่วนที่มีผลต่อการประมวลผลของโปรแกรม ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

#### 3.3.1 หลักการแบ่งเอลิเมนต์

การแบ่งเอลิเมนต์เป็นหัวใจสำคัญในการหาค่าความเค้นของชิ้นงาน โดยการแทนรูปร่างลักษณะของชิ้นงานด้วยเอลิเมนต์ซึ่งมีขนาดต่างๆ กัน ค่าความเค้นที่คำนวณได้นั้นจะมีความแม่นยำของผลเฉลยนั้นขึ้นอยู่กับ ขนาดและจำนวนเอลิเมนต์เป็นสำคัญ ซึ่งสามารถแบ่งเอลิเมนต์เป็นเอลิเมนต์ที่มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมหรือสามเหลี่ยมก็ได้ จากโครงการนี้สนใจการแบ่งเอลิเมนต์ที่มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม เพราะสามารถแบ่งชิ้นงานได้ละเอียดใกล้เคียงกับชิ้นงานจริงมากกว่าเอลิเมนต์ที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยม และเหมาะกับฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สองมิติ

จากการศึกษาการแบ่งเอลิเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยมเป็นการแบ่งที่ง่ายต่อการคำนวณและเข้าใจสำหรับ Finite Element Analysis : FEA สิ่งที่สำคัญในการแบ่งเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมก็คือ การกำหนดจุดพิคัด 3 จุดที่เชื่อมต่อกันทำให้เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะต้องกำหนดจุดพิคัดให้อยู่บนชิ้นงานที่สนใจศึกษา ซึ่งจะมีหลักการการกำหนดจุดบนชิ้นงาน 3 วิธีดังนี้

##### 3.3.1.1 การกำหนดจุดโดยใช้จุดตัดของวงกลม

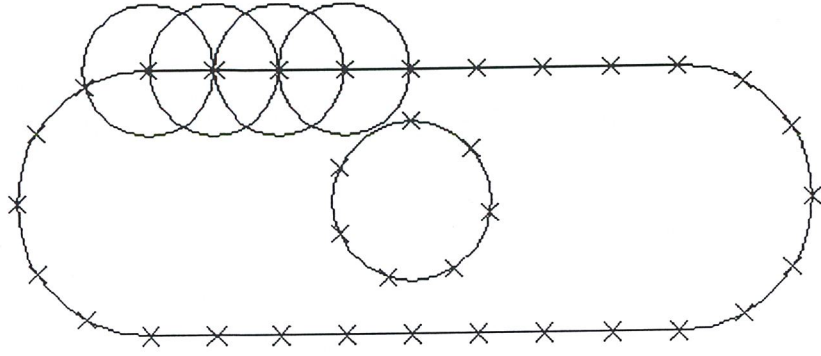
มีหลักการดังนี้

1. ทำการกำหนดจุดพิคัดขึ้นรอบรูปชิ้นงาน โดยแต่ละจุดมีระยะระหว่างจุดเท่าๆ กัน



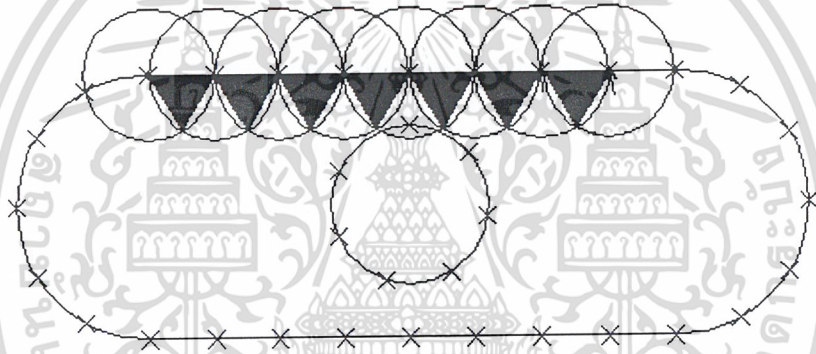
รูปที่ 3.6 รอบชิ้นงานถูกกำหนดด้วยจุดพิคัดซึ่งมีระยะห่างเท่าๆ กัน

2. วาดรูปวงกลม โดยใช้จุดพิคัดรอบรูปชิ้นงานที่กำหนดขึ้นเป็นจุดศูนย์กลางของแต่ละวงกลม และรัศมีของวงกลมเท่ากับระยะห่างระหว่างจุดที่กำหนดขึ้นดังรูป



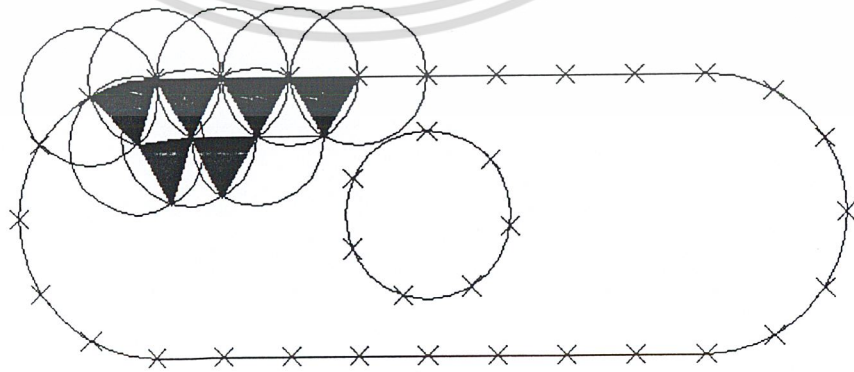
รูปที่ 3.7 การสร้างวงกลมที่จุดทึบรอบรูปชิ้นงาน

- ลากเส้นเชื่อมจุดระหว่างจุด 2 จุดที่อยู่บนเส้นรอบวง กับจุดที่เกิดจากวงกลม 2 วงตัดกัน เกิดเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม



รูปที่ 3.8 แสดงการสร้างเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

- นำจุดทึบที่วงกลมตัดกันมาสร้างวงกลมที่มีรัศมีเท่าเดิม เกิดเป็นวงกลมอีกชั้นหนึ่ง แล้วนำจุดทึบที่วงกลมตัดกันมาสร้างเป็นเอลิเมนต์ต่อไปเรื่อยๆ ดังรูป จนถึงส่วนในสุด



รูปที่ 3.9 แสดงการแบ่งเอลิเมนต์ในชั้นถัดมา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาที่พบกับการเขียน โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิธีนี้คือ

1. ไม่สามารถเขียน โปรแกรมให้วนซ้ำได้ เพราะเงื่อนไขที่เกิดแต่ละเอลิเมนต์ไม่เหมือนกัน เช่น เอลิเมนต์ บางเอลิเมนต์เกิดขึ้นซ้อนทับกัน ต้องเลือกจุดพิคคใหม่ที่อยู่ใกล้เคียงกัน หรือบางกรณีพิคควงกลมที่ตัดกันเกิดขึ้นที่นอก รูปชิ้นงาน จึงต้องมีการเลือกจุดพิคคใหม่ เป็นต้น

2. เมื่อถึงขั้นในสุดของรูปชิ้นงานเอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นทับกันจนเกิดปัญหาในการเลือกจุดพิคค

3. เกิดปัญหาต่าง ๆ ไม่ซ้ำกันจึงยากต่อการหาวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกกับปัญหา

### 3.3.1.2 การกำหนดจุดโดยวางรูปชิ้นงานบนแบบที่วางไว้

แบบที่วางไว้เป็นแบบที่มีการแบ่งช่องเป็นรูปสามเหลี่ยมไว้ให้อยู่แล้ว เพียงแต่นำรูปชิ้นงานวางลงบนแบบที่วางไว้ ชิ้นงานก็ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมตามแบบที่วางไว้ แต่จะมีบางส่วนที่ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม จึงต้องทำการแบ่งรูปนั้นให้เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะต้องทำการตรวจสอบว่ามีรูปใดบ้างที่ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม

### 3.3.1.3 การกำหนดจุดโดยให้ผู้ใช้ช่วยกำหนด

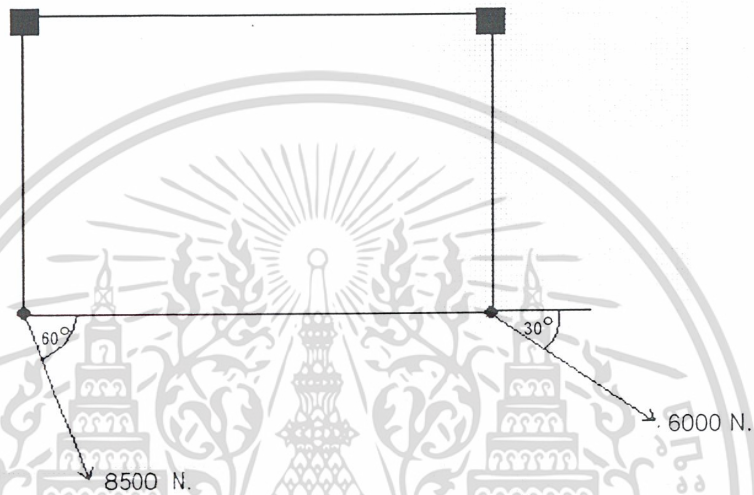
โปรแกรมไม่สามารถกำหนดเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมได้โดยอัตโนมัติ ต้องให้ผู้ใช้โปรแกรมทำการกำหนดจุด เอลิเมนต์ด้วยตนเอง โดยผู้ใช้ต้องทำการสร้างเอลิเมนต์ขึ้นทีละเอลิเมนต์ ตัวโปรแกรมจะนำค่าที่รับเข้ามาจากขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่ผู้ใช้เป็นผู้ป้อนมาเป็นตัวกำหนดระยะรอบนอกของชิ้นงาน และให้ผู้ใช้โปรแกรมจะทำการคลิกวน ตำแหน่งต่างๆ บนรูปชิ้นงาน เกิดเป็นเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ โดยผู้ใช้ต้องไม่เลือกจุดที่ทำให้เอลิเมนต์ทับกัน โปรแกรม จะทำการเก็บค่าพิคคของแต่ละเอลิเมนต์ไว้เพื่อนำไปใช้คำนวณหาค่าระดับความเค้นของเอลิเมนต์ต่อไป วิธีนี้เป็นวิธีที่ ถูกนำมาใช้ในการทำโครงการนี้

## บทที่ 4

### ผลการดำเนินงาน

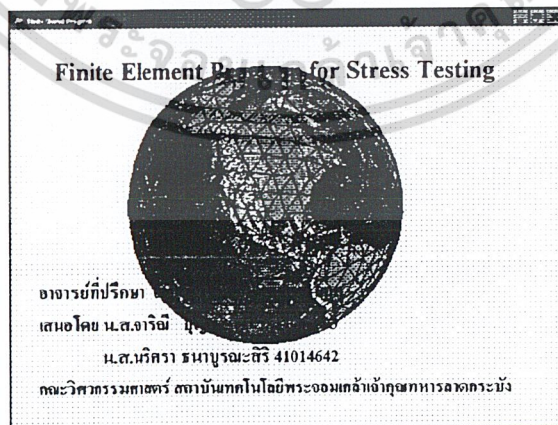
#### 4.1 การวิเคราะห์หาค่าระดับความเค้นจากโปรแกรม

ตัวอย่างที่ 1 ชิ้นงาน Steel Alloy รูปสี่เหลี่ยม ความหนา 5 cm. มีค่าYoung's Modulus = 20,000 N / m และค่าอัตราส่วนพัวซอง = 0.36 ที่จุดมุมด้านบนทั้ง 2 ข้างเป็นจุดยึดติด และจุดมุมด้านล่างจะมีแรง กระทำซึ่งมีขนาดและทิศทางดังรูป



รูปที่ 4.1 แสดงรูปตัวอย่างของปัญหา

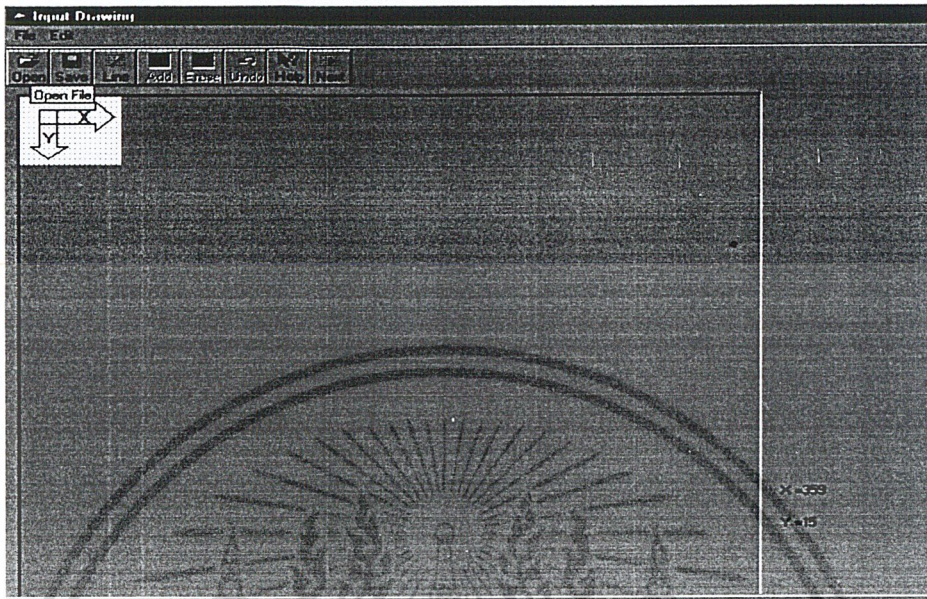
ทำการเข้าสู่โปรแกรมเพื่อวิเคราะห์หาค่าระดับความเค้นของโครงตัวอย่าง โดยเมื่อเริ่มเข้าโปรแกรมจะแสดงหน้าจอ ดังนี้



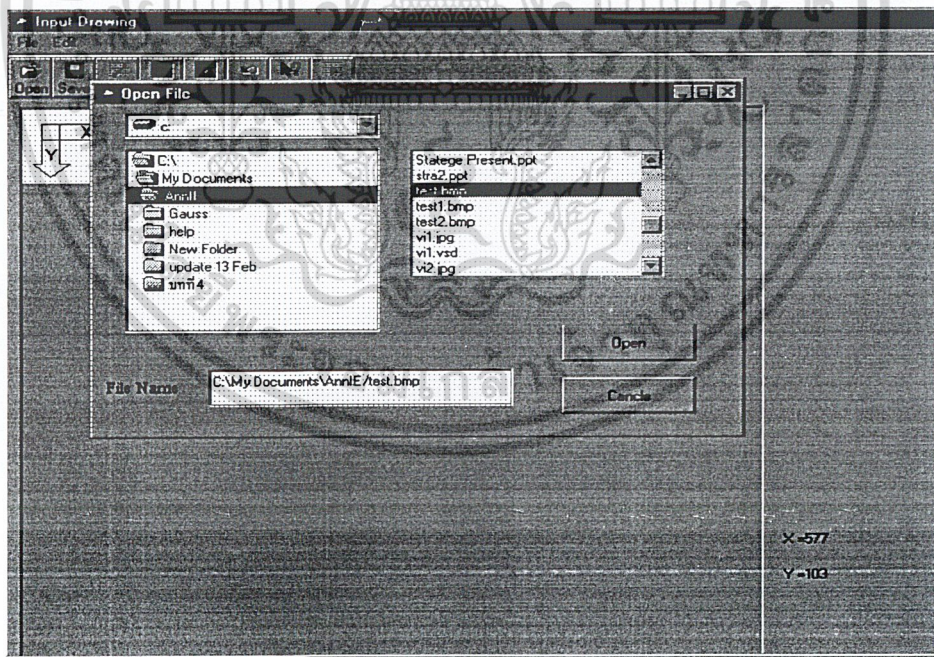
รูปที่ 4.2 แสดงหน้าจอเริ่มโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นเข้าสู่หน้าจอรับข้อมูลรูปชิ้นงานของปัญหา ทำการเปิดเพิ่มข้อมูลเพื่อรับรูปชิ้นงานของปัญหา



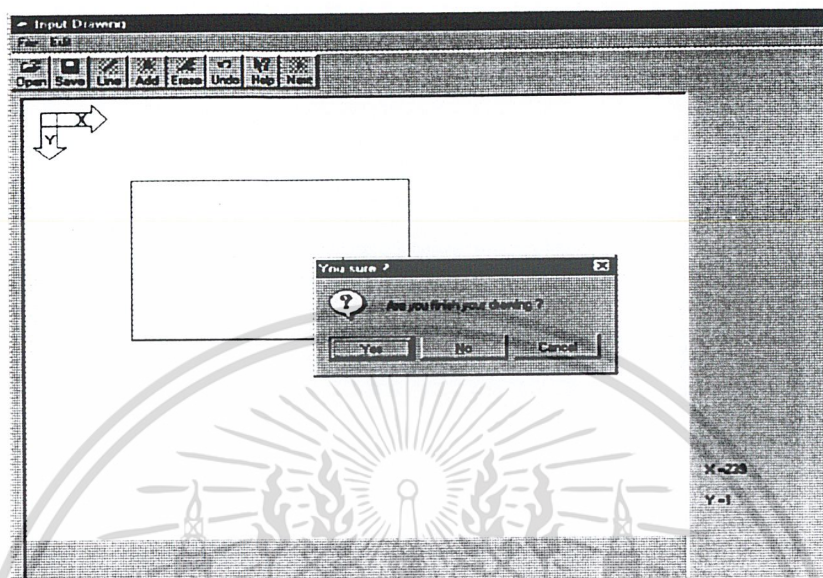
รูปที่ 4.3 แสดงหน้าจอรับรูปของชิ้นงาน



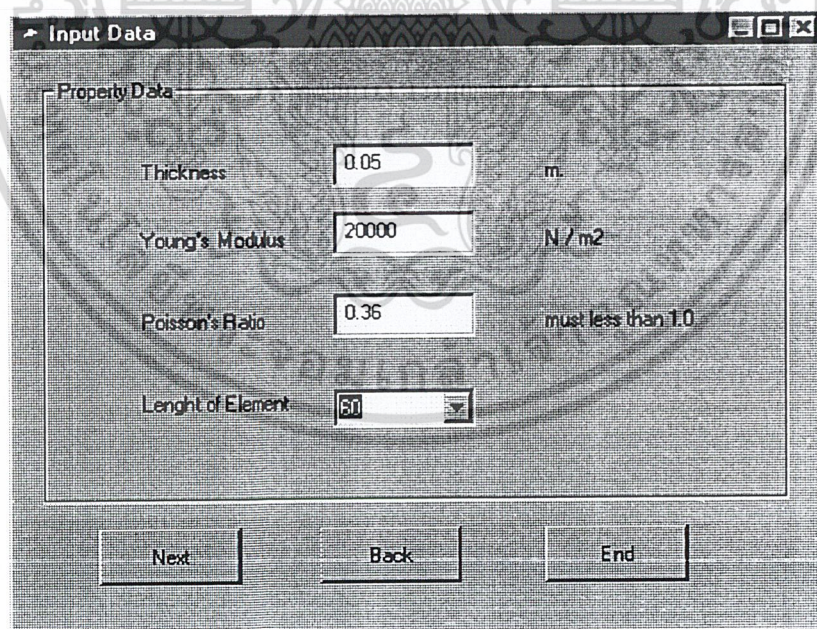
รูปที่ 4.4 แสดงการเปิดเพิ่มข้อมูลเพื่อรับรูปชิ้นงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการวาดรูปของชิ้นงานตามรูปที่รับเข้ามา เมื่อทำการวาดเสร็จ โปรแกรมจะถามว่าวาดเสร็จหรือยัง ถ้าเสร็จแล้วคลิกปุ่ม Yes และปุ่ม Next จะแสดงหน้าจอสำหรับรับข้อมูลด้านคุณสมบัติของชิ้นงาน ( ความหนา , ค่า Young's Modulus , ค่าอัตราส่วนตัวของและความยาวเอลิเมนต์ )



รูปที่ 4.5 แสดงการเสร็จสิ้นการวาดรูป



รูปที่ 4.6 แสดงหน้าจอรับข้อมูลด้านคุณสมบัติของชิ้นงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อป้อนข้อมูลด้านคุณสมบัติของชิ้นงานตามที่โจทย์ให้มาเรียบร้อยแล้ว ต่อไปจะเป็นหน้าจอสำหรับการแบ่ง  
 เอลิเมนต์ ทำการกดปุ่ม Draw โปรแกรมจะขึ้นรูปชิ้นงานที่มีจุดสีแดงตามความยาวเอลิเมนต์ที่เลือก ( ในที่นี้คือ 60 ) จาก  
 นั้นให้ Click ลงบนรูปวนจากจุดแดงซ้าย ไปขวา ก็จะเกิดเอลิเมนต์ขึ้น



รูปที่ 4.7 แสดงหน้าจอการแบ่งเอลิเมนต์

รูปที่ 4.8 แสดงรูปที่มีการแบ่งเอลิเมนต์เรียบร้อยแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และห้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 แสดงพิกัด X-Y ของแต่ละเอลิเมนต์ที่แต่ละจุด node

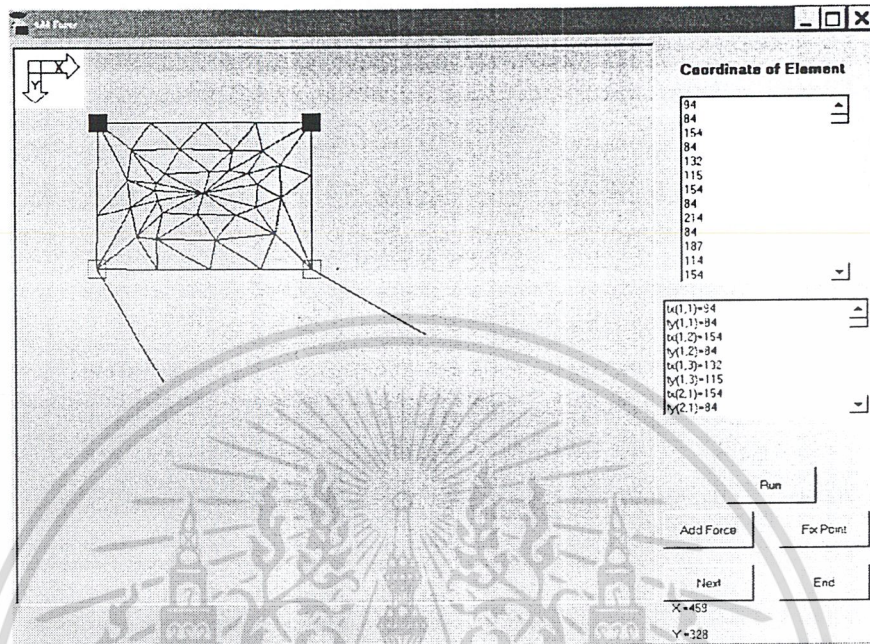
ลำดับของเอลิเมนต์	พิกัด X			พิกัด Y		
	node ที่ 1	node ที่ 2	node ที่ 3	node ที่ 1	node ที่ 2	node ที่ 3
1	94	154	132	84	84	115
2	154	214	187	84	84	114
3	154	132	187	84	115	114
4	214	274	248	84	84	116
5	214	187	248	84	114	116
6	274	340	283	84	84	116
7	274	248	283	84	116	116
8	340	340	304	84	144	132
9	340	283	304	84	116	132
10	340	340	305	144	250	169
11	340	304	305	144	132	169
12	340	280	298	250	250	210
13	340	305	298	250	169	210
14	280	220	227	250	250	217
15	280	298	227	250	210	217
16	220	160	159	250	250	216
17	220	227	159	250	217	216
18	160	92	138	250	249	213
19	160	159	138	250	216	213
20	92	93	131	249	189	180
21	92	138	131	249	213	180
22	93	94	127	189	44	149
23	93	131	127	189	180	149
24	94	127	132	84	149	115
25	132	187	169	115	114	142
26	187	248	220	114	116	140
27	187	169	220	114	142	140
28	248	283	244	116	116	139
29	248	220	244	116	140	139
30	183	304	264	116	132	142

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 (ต่อ) แสดงพิกัด X-Y ของแต่ละเอลิเมนต์ที่แต่ละจุด node

ลำดับของเอลิเมนต์	พิกัด X			พิกัด Y		
	node ที่ 1	node ที่ 2	node ที่ 3	node ที่ 1	node ที่ 2	node ที่ 3
31	283	244	264	116	139	142
32	304	305	276	132	169	154
33	304	264	276	132	142	154
34	305	298	274	169	210	180
35	305	276	274	169	154	180
36	298	227	251	210	217	189
37	298	274	251	210	180	189
38	227	159	216	217	216	188
39	227	251	206	217	189	188
40	159	138	166	216	213	186
41	159	206	166	216	188	186
42	138	131	161	213	180	172
43	138	166	161	213	186	172
44	131	127	158	180	149	161
45	131	161	158	180	172	161
46	127	132	159	149	115	153
47	127	158	159	149	161	153
48	132	159	169	115	153	142
49	169	220	213	142	140	164
50	220	244	213	140	139	164
51	244	264	213	139	142	164
52	264	276	213	142	154	164
53	276	274	213	154	180	164
54	274	251	213	180	189	164
55	251	206	213	189	188	164
56	206	166	213	188	186	164
57	166	161	213	186	172	164
58	161	158	213	172	161	164
59	158	159	213	161	153	164
60	159	169	213	153	142	164

ต่อไปจะเป็นขั้นตอนการใส่ตำแหน่ง ขนาดและทิศทางของแรงกระทำ พร้อมทั้งตำแหน่งของจุดยึด คัด กดปุ่ม Add Force และ click ณ ตำแหน่งของแรงกระทำ ป้อนขนาดทิศทางและทิศทางของแรงกระทำ กดปุ่ม Fix Point และ click ตำแหน่งของจุดยึดคิต



รูปที่ 4.9 แสดงหน้าจอการรับตำแหน่งและขนาด - ทิศทางของแรงกระทำและจุดยึดคิต

ตารางที่ 4.2 แสดงพิกัดของจุดที่มีแรงกระทำ พร้อมขนาดและทิศทางของแรง

จุดที่	พิกัด X	พิกัด Y	ขนาดของแรง (N.)	ทิศทางของแรง ( $^{\circ}$ )
1	340	250	6000	30
2	92	249	8500	60

ตารางที่ 4.3 แสดงพิกัดของจุดยึดคิต

จุดที่	พิกัด X	พิกัด Y
1	340	84
2	94	84

จากขั้นตอนที่ผ่านมาจะเป็นการรับข้อมูลเพื่อนำไปใช้ในการประมวลผล สามารถนำไปหาค่า Stiffness Matrix [ K ], Force Matrix {F} และ Displacement Matrix {U} ตามสมการที่ (2.4)

$$[K]_e \{U\}_e = \{F\}_e$$

จากนั้นแทนค่าลงในสมการ (2.57) และสมการ (2.48) ตามลำดับ เพื่อหาค่าความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์

$$\{\epsilon\} = [B] \{U\}$$

$$\{\sigma\} = [V] \{\epsilon\}$$

จากการประมวลผลของโปรแกรมจะได้ค่าต่างๆ ดังนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
1	1	344.6321	143.2292	-214.1767	63.57233	-130.4554	-206.8015
	2	143.2292	244.4556	40.59436	163.2175	-183.8235	-407.6731
	3	-214.1767	40.59436	439.5088	-247.3959	-225.332	206.8015
	4	63.57233	163.2175	-247.3959	540.9453	183.8235	-704.1627
	5	-130.4554	-183.8235	-225.3321	183.8235	355.7874	0
	6	-206.8015	-407.6731	206.8015	-704.1627	0	1111.836
2	1	361.6729	175.7813	-196.2316	31.02023	-165.4412	-206.8015
	2	175.7813	324.5634	8.042271	192.4403	-183.8235	-517.0037
	3	-196.2316	8.042271	398.4376	-214.8438	-202.2059	206.8015
	4	31.02024	192.4403	-214.8438	439.4532	183.8235	-631.8935
	5	-165.4412	-183.8235	-202.2059	183.8235	367.6471	0
	6	-206.8015	-517.0037	206.8015	-631.8934	0	1148.897
3	1	-330.743	-12.76552	188.0013	-176.1642	142.7417	188.9297
	2	-12.76552	-1032.615	-199.1422	616.2266	211.9077	416.3881
	3	188.0013	-199.1422	-426.1364	229.7794	238.135	-30.63725
	4	-176.1642	616.2266	229.7794	-470.0033	-53.61521	-146.2232
	5	142.7417	211.9077	238.135	-53.61522	-380.8768	-158.2925
	6	188.9297	416.3881	-30.63725	-146.2232	-158.2925	-270.1649
4	1	371.0938	169.2709	-221.7372	37.53065	-149.3566	-206.8015
	2	169.2709	300.293	14.55269	166.4465	-183.8235	-466.7394
	3	-221.7372	14.55269	417.0497	-221.3542	-195.3125	206.8015
	4	37.53066	166.4465	-221.3542	443.9052	183.8235	-610.3516
	5	-149.3566	-183.8235	-195.3125	183.8235	344.6691	0
	6	-206.8015	-466.7394	206.8015	-610.3516	0	1077.091

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
5	1	-364.2809	25.29525	221.8762	-197.9225	142.4047	172.6273
	2	25.29525	-1134.957	-220.9005	638.6259	195.6053	496.3309
	3	221.8762	-220.9005	-425.0188	225.5839	203.1426	-4.683393
	4	-197.9225	638.6259	225.5839	-452.3874	-27.66135	-186.2385
	5	142.4047	195.6053	203.1425	-27.66137	-345.5473	-167.9439
	6	172.6273	496.3309	-4.683382	-186.2384	-167.9439	-310.0924
6	1	561.3058	337.358	-233.8702	-130.5565	-327.4356	-206.8015
	2	337.358	972.8308	-153.5345	50.40569	-183.8235	-1023.236
	3	-233.8702	-153.5344	285.5706	-53.26704	-51.70037	206.8015
	4	-130.5565	50.40569	-53.26705	111.158	183.8235	-161.5636
	5	-327.4356	-183.8235	-51.70037	183.8235	379.136	0
	6	-206.8015	-1023.236	206.8015	-161.5636	0	1184.8
7	1	-201.057	0	51.70037	-183.8235	149.3566	183.8235
	2	0	-628.3031	-206.8015	161.5637	206.8015	466.7394
	3	51.70037	-206.8015	-538.5045	100.4464	486.8041	106.3551
	4	-183.8235	161.5637	100.4464	-209.6122	83.3771	48.04851
	5	149.3566	206.8015	486.8041	83.37709	-636.1607	-290.1786
	6	183.8235	466.7394	106.355	48.04851	-290.1786	-514.788
8	1	148.5907	-78.125	42.89215	-105.6985	-191.4828	183.8235
	2	-78.12499	356.924	-128.6765	-295.6494	206.8015	-61.27451
	3	42.89215	-128.6765	723.0391	312.5	-765.9313	-183.8235
	4	-105.6985	-295.6494	312.5	540.7474	-206.8015	-245.098
	5	-191.4828	206.8015	-765.9314	-206.8015	957.4143	0
	6	183.8235	-61.27451	-183.8235	-245.098	0	306.3726

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
9	1	-144.0183	82.85985	190.7865	-41.77807	-46.76822	-41.08178
	2	82.85985	-189.6405	-64.75603	-185.0421	-18.10382	374.6826
	3	190.7865	-64.75603	-985.9625	-426.1364	795.176	490.8924
	4	-41.77806	-185.0421	-426.1364	-737.3831	467.9144	922.425
	5	-46.76823	-18.10381	795.176	467.9144	-748.4077	-449.8106
	6	-41.08178	374.6826	490.8924	922.425	-449.8106	-1297.108
10	1	1076.588	-298.4965	252.8502	114.6729	-1329.438	183.8235
	2	-298.4965	514.7617	91.69498	-89.34148	206.8015	-425.4201
	3	252.8502	91.69499	157.4701	92.12854	-410.3204	-183.8235
	4	114.6729	-89.34148	92.12854	220.644	-206.8015	-131.3025
	5	-1329.438	206.8015	-410.3204	-206.8015	1739.758	0
	6	183.8235	-425.4201	-183.8235	-131.3025	0	556.7227
11	1	-595.912	10.94934	397.675	199.4033	198.237	-210.3526
	2	10.94934	-191.0825	176.4253	113.5841	-187.3747	77.49832
	3	397.675	176.4253	-442.5865	-258.937	44.91143	82.51172
	4	199.4033	113.5841	-258.937	-620.1432	59.53375	506.5591
	5	198.237	-187.3747	44.91144	59.53375	-243.1484	127.8409
	6	-210.3526	77.49832	82.5117	506.5591	127.8409	-584.0576
12	1	407.7819	117.1875	-325.0613	89.61398	-82.72059	-206.8015
	2	117.1875	200.0996	66.63602	58.40226	-183.8235	-258.5019
	3	-325.0613	66.63603	518.076	-273.4375	-193.0147	206.8015
	4	89.61399	58.40228	-273.4375	544.7687	183.8235	-603.171
	5	-82.72059	-183.8235	-193.0147	183.8235	275.7353	0
	6	-206.8015	-258.5019	206.8015	-603.171	0	861.6729

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
13	1	-486.8409	-55.99869	-443.5822	152.1686	930.423	-96.16994
	2	-55.99869	-168.4093	129.1907	-66.22511	-73.19196	234.6344
	3	-443.5821	129.1907	-621.0701	327.7972	1064.652	-456.9879
	4	152.1686	-66.22511	327.7972	-653.0693	-479.9658	719.2945
	5	930.423	-73.19196	1064.652	-479.9658	-1995.075	553.1578
	6	-96.16993	234.6344	-456.9879	719.2944	553.1578	-953.9288
14	1	320.4959	45.57292	-281.503	161.2286	-38.99287	-206.8015
	2	45.57292	115.3191	138.2506	6.533621	-183.8235	-121.8527
	3	-281.503	138.2506	576.7347	-345.0521	-295.2317	206.8015
	4	161.2286	6.533633	-345.0521	916.0657	183.8235	-922.5992
	5	-38.99287	-183.8235	-295.2318	183.8235	334.2246	0
	6	-206.8015	-121.8527	206.8015	-922.5992	0	1044.452
15	1	-351.8063	-71.53303	205.9802	-130.4256	145.8261	201.9587
	2	-71.53303	-1070.303	-153.4036	780.8352	224.9366	289.4679
	3	205.9803	-153.4036	-420.7571	251.7329	214.7769	-98.32934
	4	-130.4256	780.8353	251.7329	-668.316	-121.3073	-112.5191
	5	145.8261	224.9366	214.7769	-121.3073	-360.603	-103.6293
	6	201.9587	289.4679	-98.32932	-112.5191	-103.6293	-176.9488
16	1	325.611	-6.510417	-331.0175	213.3119	5.406575	-206.8015
	2	-6.510417	104.4483	190.334	-121.3438	-183.8235	16.89555
	3	-331.0175	190.334	660.8186	-397.1355	-329.8011	206.8015
	4	213.3119	-121.3438	-397.1355	1151.972	183.8235	-1030.628
	5	5.406575	-183.8235	-329.8011	183.8235	324.3945	0
	6	-206.8015	16.89555	206.8015	-1030.628	0	1013.733

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
17	1	-377.8651	11.80031	347.415	-194.4091	30.45011	182.6088
	2	11.80031	-1180.113	-217.3871	1061.334	205.5868	118.7789
	3	347.415	-217.3871	-598.876	359.9095	251.461	-142.5224
	4	-194.4091	1061.334	359.9095	-1043.991	-165.5004	-17.3432
	5	30.45011	205.5868	251.461	-165.5004	-281.9111	-40.08636
	6	182.6088	118.7789	-142.5224	-17.3432	-40.08636	-101.4357
18	1	454.4731	259.3725	-232.2117	-59.7758	-222.2614	-199.5967
	2	259.3725	582.9063	-82.75377	134.9194	-176.6187	-717.8257
	3	-232.2117	-82.75377	350.9987	-127.4935	-118.7869	210.2472
	4	-59.7758	134.9194	-127.4935	212.3847	187.2693	-347.3041
	5	-222.2613	-176.6187	-118.7869	187.2693	341.0483	-10.65056
	6	-199.5967	-717.8257	210.2472	-347.3041	-10.65056	1065.13
19	1	-121.2886	34.61234	209.1283	-220.0841	-87.83972	185.4717
	2	34.61234	-358.6303	-243.062	401.9685	208.4497	-43.33814
	3	209.1283	-243.062	-1231.21	447.2134	1022.082	-204.1514
	4	-220.084	401.9685	447.2134	-744.9894	-227.1293	343.0209
	5	-87.83972	208.4497	1022.082	-227.1294	-934.2424	18.67968
	6	185.4717	-43.33814	-204.1514	343.0209	18.67967	-299.6827
20	1	137.3719	58.82597	-277.0406	-244.1975	139.6687	185.3716
	2	58.82597	371.8157	-267.1755	-425.1375	208.3495	53.32178
	3	-277.0405	-267.1755	1327.409	462.8675	-1050.368	-195.6919
	4	-244.1975	-425.1375	462.8674	770.1102	-218.6699	-344.9727
	5	139.6687	208.3495	-1050.368	-218.6699	910.6995	10.32034
	6	185.3716	53.32178	-195.6919	-344.9726	10.32034	291.6508

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
21	1	-358.5208	50.97987	710.6415	100.2072	-352.1208	-151.1871
	2	50.97987	-129.001	77.22924	147.8767	-128.2091	-18.87566
	3	710.6415	77.22924	-1703.133	-593.8824	992.4914	516.6533
	4	100.2072	147.8767	-593.8824	-988.0905	493.6752	840.2137
	5	-352.1208	-128.2091	992.4914	493.6752	-640.3707	-365.4662
	6	-151.1871	-18.87566	516.6533	840.2137	-365.4662	-821.3381
22	1	744.2575	-237.3628	364.6788	60.73208	-1108.936	176.6307
	2	-237.3628	397.232	37.75411	-47.19267	199.6087	-350.0393
	3	364.6788	37.75411	320.5716	150.4957	-685.2504	-188.2499
	4	60.73208	-47.19265	150.4957	271.4391	-211.2278	224.2465
	5	-1108.936	199.6087	-685.2504	-211.2278	1794.187	11.61916
	6	176.6307	-350.0393	-188.2499	-224.2465	11.61916	574.2858
23	1	-457.155	39.89909	566.1583	155.3188	-109.0033	-195.2179
	2	39.89909	-153.0853	132.3408	123.4071	-172.2399	29.67827
	3	566.1583	132.3408	-932.1398	-437.603	365.9814	305.2622
	4	155.3188	123.4071	-437.603	-789.2752	282.2842	665.8682
	5	-109.0033	-172.2399	365.9814	282.2842	-256.9782	-110.0443
	6	-195.2179	29.67827	305.2622	665.8682	-110.0443	-695.5464
24	1	-462.0996	-45.89236	-394.2932	164.9585	856.3928	-119.0661
	2	-45.89237	-156.7804	141.9805	-58.46908	-96.08811	215.2495
	3	-394.2932	141.9805	-564.9525	318.0071	959.2457	-459.9876
	4	164.9585	-58.46909	318.0071	-695.3408	-482.9655	753.8099
	5	856.3928	-96.08812	959.2457	-482.9655	-1815.639	579.0536
	6	-119.0661	215.2495	-459.9876	753.8099	579.0536	-969.0593

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	ศดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
25	1	335.0371	129.3528	-204.8992	82.06839	-130.1379	-211.4212
	2	129.3528	216.977	59.09043	160.0605	-188.4433	-377.0375
	3	-204.8992	59.09042	440.491	-256.3958	-235.5918	197.3053
	4	82.06839	160.0605	-256.3958	604.7485	174.3274	-764.8091
	5	-130.1379	-188.4432	-235.5918	174.3274	365.7296	14.11588
	6	-211.4212	-377.0375	197.3054	-764.8091	14.11588	1141.847
26	1	312.5	172.6974	-124.0809	19.71268	-188.4191	-192.4101
	2	172.6974	365.954	-3.265299	273.7399	-169.4321	-639.6938
	3	-124.0809	-3.265299	387.1783	-220.4976	-263.0974	223.7629
	4	19.71266	273.7399	-220.4976	493.3153	200.7849	-767.0552
	5	-188.4191	-169.4321	-263.0974	200.7849	451.5165	-31.3528
	6	-192.4101	-639.6938	223.7629	-767.0552	-31.3528	1406.749
27	1	-345.1313	-28.62338	200.7929	-165.3025	144.3384	193.9259
	2	-28.62338	-1073.905	-188.2805	687.671	216.9039	386.2341
	3	200.7929	-188.2805	-422.7809	240.7731	221.988	-52.49271
	4	-165.3025	687.671	240.7732	-538.6776	-75.47066	-148.9934
	5	144.3384	216.9039	221.988	-75.47067	-366.3265	-141.4332
	6	193.9259	386.2341	-52.49271	-148.9934	-141.4332	-237.2406
28	1	724.8184	435.2679	-413.1177	-228.4664	-311.7007	-206.8015
	2	435.2679	1206.185	-251.4443	-232.12	-183.8235	-974.0649
	3	-413.1177	-251.4443	381.1484	44.64286	31.96931	206.8015
	4	-228.4664	-232.12	44.64286	132.2159	183.8235	99.90409
	5	-311.7007	-183.8235	31.96931	183.8235	279.7314	0
	6	-206.8015	-974.0649	206.8015	99.90409	0	874.1609

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	ศกมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
29	1	-194.2642	-17.10767	-56.31273	-186.6748	250.577	203.7825
	2	-17.10766	-604.1354	-209.6528	-108.3485	226.7604	712.4839
	3	-56.31273	-209.6528	-559.8986	-65.57938	616.2114	275.2321
	4	-186.6748	-108.3485	-65.57938	-194.2223	252.2542	302.5708
	5	250.5769	226.7604	616.2114	252.2542	-866.7883	-479.0146
	6	203.7825	712.4839	275.2321	302.5709	-479.0146	-1015.055
30	1	413.6029	183.8235	-340.0735	-271.1397	-73.5294	87.31615
	2	183.8235	1102.941	-294.1176	-569.8528	110.2941	-533.0882
	3	-340.0735	-294.1176	534.9264	-227.022	-194.8529	67.0956
	4	-271.1397	-569.8528	227.022	390.1654	44.11764	179.6875
	5	-73.5294	110.2941	-194.8529	44.11764	268.3823	154.4118
	6	87.31615	-533.0882	67.09559	179.6875	154.4118	353.4007
31	1	-136.3942	40.61958	-43.40721	-145.2349	179.8014	104.6153
	2	40.61959	-401.0985	-168.2129	-353.4701	127.5933	754.5686
	3	-43.40721	-168.2129	-788.0199	-334.4346	831.4271	502.6475
	4	-145.2349	-353.4701	-334.4346	-574.7672	479.6695	928.2372
	5	179.8014	127.5933	831.4272	479.6695	1011.228	-607.2628
	6	104.6153	754.5686	502.6475	928.2372	-607.2628	-1682.806
32	1	268.2859	-160.6067	38.09388	-28.75501	-306.3798	189.3617
	2	-160.6067	495.7198	-51.73297	-383.5449	212.3397	-112.1749
	3	38.09388	-51.73297	399.0083	227.4339	-437.1022	-175.7009
	4	-28.755	-383.5449	227.4338	509.7715	-198.6789	-126.2267
	5	-306.3798	212.3397	-437.1022	-198.6789	743.4821	-13.6608
	6	189.3617	-112.1749	-175.7009	-126.2267	-13.6608	238.4016

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
33	1	-181.9853	93.75	149.8162	34.92648	32.16912	-128.6765
	2	93.75	-181.9853	11.94852	-240.8088	-105.6985	422.7941
	3	149.8162	11.94851	-703.5846	-401.0417	553.7684	389.0932
	4	34.92648	-240.8088	-401.0417	-898.8972	366.1152	1139.706
	5	32.16912	-105.6985	553.7684	366.1152	-585.9376	-260.4167
	6	-128.6765	422.7941	389.0932	1139.706	-260.4167	-1562.5
34	1	521.6801	-235.5528	44.2239	120.4321	-565.904	115.1206
	2	-235.5528	415.6813	97.45417	-307.1423	138.0986	-108.539
	3	44.22388	97.45417	206.1664	111.5604	-250.3903	-209.0146
	4	120.4321	-307.1423	111.5604	480.9779	-231.9926	-173.8356
	5	-565.904	138.0986	-250.3903	-231.9926	816.2943	93.89396
	6	115.1206	-108.539	-209.0146	-173.8356	93.89396	282.3747
35	1	-496.2532	-25.9088	224.0936	217.7629	272.1597	-191.8541
	2	-25.9088	-161.4317	194.7849	112.4864	-168.8761	48.94535
	3	224.0936	194.7849	-313.983	-169.9019	89.88945	-24.88299
	4	217.7629	112.4864	-169.9019	-732.5098	-47.86096	620.0234
	5	272.1597	-168.8761	89.88947	-47.86095	-362.0491	216.7371
	6	-191.8541	48.94535	-24.88299	620.0234	216.7371	-668.9688
36	1	305.6319	144.2308	-71.66087	98.62841	-233.971	-242.8592
	2	144.2308	260.9891	75.65045	296.6428	-219.8812	-557.6318
	3	-71.66089	75.65044	362.3066	-211.839	-290.6457	136.1885
	4	98.62841	296.6427	-211.839	741.7709	113.2105	-1038.414
	5	-233.971	-219.8812	-290.6457	113.2105	524.6167	106.6707
	6	-242.8592	-557.6318	136.1885	-1038.414	106.6707	1596.046

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สคมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
37	1	-158.6898	-89.24876	99.495	-1.445618	59.19484	90.69437
	2	-89.24876	-351.8466	-24.42358	647.0598	113.6723	-295.2133
	3	99.49498	-24.42358	-727.8123	425.5485	628.3173	-401.1248
	4	-1.445607	647.0599	425.5485	-1490.092	-424.1028	843.0317
	5	59.19484	113.6723	628.3173	-424.1028	-687.5121	310.4305
	6	90.69437	-295.2133	-401.1248	843.0317	310.4305	-547.8184
38	1	438.9718	263.4868	-146.0884	-66.09545	-292.8834	-197.3913
	2	263.4867	724.2822	-89.0734	214.1035	-174.4133	-938.3858
	3	-146.0884	-89.0734	289.1735	-121.9327	-143.0851	211.0061
	4	-66.09545	214.1036	-121.9327	209.0863	188.0281	-423.1899
	5	-292.8834	-174.4133	-143.0851	188.0281	435.9685	-13.61482
	6	-197.3913	-938.3858	211.0061	-423.1899	-13.61482	1361.576
39	1	-290.3559	13.69013	148.265	-190.2122	142.091	176.5221
	2	13.69013	-906.1074	-213.1902	426.9351	199.5001	479.1723
	3	148.265	-213.1902	-439.3904	185.2731	291.1255	27.91713
	4	-190.2122	426.9351	185.2731	-317.7005	4.939169	-109.2347
	5	142.091	199.5001	291.1255	4.939169	-433.2165	-204.4392
	6	176.5221	479.1724	27.91714	-109.2347	-204.4392	-369.9377
40	1	864.6553	453.6291	-770.0964	-297.2308	-94.55898	-156.3983
	2	453.6291	897.6575	-320.2087	-401.6728	-133.4203	-495.9847
	3	-770.0964	-320.2087	808.0047	126.0081	-37.90831	194.2007
	4	-297.2308	-401.6728	126.0081	297.372	171.2227	104.3008
	5	-94.55898	-133.4203	-37.90831	171.2227	132.4673	-37.80242
	6	-156.3983	-495.9846	194.2007	104.3008	-37.80242	391.6839

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
41	1	-244.1643	25.74135	-14.00632	-179.3188	258.1706	153.5774
	2	25.74135	-757.7043	-202.2968	-123.4071	176.5554	881.1113
	3	-14.00632	-202.2968	-433.2875	-67.57105	447.2938	269.8678
	4	-179.3188	-123.4071	-67.57105	-159.4639	246.8898	282.8709
	5	258.1706	176.5554	447.2938	246.8898	-705.4644	-423.4452
	6	153.5774	881.1113	269.8678	282.8709	-423.4452	-1163.982
42	1	193.3134	89.62714	-301.3932	-252.5377	108.0798	162.9105
	2	89.62714	505.5147	-275.5156	-436.5809	185.8885	-68.93382
	3	-301.3932	-275.5156	1016.148	352.16	-714.7546	-76.64439
	4	-252.5377	-436.5809	352.16	585.9375	-99.62234	-149.3566
	5	108.0798	185.8885	-714.7546	-99.62236	606.6747	-86.26614
	6	162.9105	-68.93381	-76.64439	-149.3566	-86.26613	218.2904
43	1	-222.3672	51.88568	585.5669	54.85057	-363.1997	-106.7363
	2	51.88567	-95.61788	31.87261	74.86361	-83.75829	20.75428
	3	585.5668	31.87263	-2016.87	-698.9741	1431.303	667.1015
	4	54.85057	74.86359	-698.9741	-1162.98	644.1235	1088.117
	5	-363.1997	-83.75829	1431.303	644.1235	-1068.104	-560.3653
	6	-106.7363	20.75428	667.1015	1088.117	-560.3653	-1108.871
44	1	284.0909	-159.1594	-25.06684	-45.20085	-259.0241	204.3602
	2	-159.1594	633.6426	-68.17882	-480.7248	227.3382	-152.9178
	3	-25.06684	-68.1788	373.9138	219.4859	-348.8469	-151.3071
	4	-45.20084	-480.7247	219.4859	531.3617	-174.2851	-50.63703
	5	-259.0241	227.3382	-348.8469	-174.2851	607.871	-53.05313
	6	204.3602	-152.9178	-151.3071	-50.63704	-53.05312	203.5549

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
45	1	-201.0246	36.4142	297.0905	143.9043	-96.06597	-180.3185
	2	36.4142	-77.43697	120.9263	-22.91303	-157.3405	100.35
	3	297.0905	120.9263	-964.3596	-566.0753	667.269	445.149
	4	143.9043	-22.91303	-566.0753	-1370.433	422.171	1393.346
	5	-96.06599	-157.3405	667.269	422.171	-571.2031	-264.8305
	6	-180.3185	100.35	445.149	1393.346	-264.8305	-1493.696
46	1	869.5948	-361.7159	-222.1477	244.8769	-647.447	116.8391
	2	-361.7159	617.5218	221.8989	-473.1631	139.817	-144.3587
	3	-222.1477	221.8989	178.1827	-45.12636	43.96502	-176.7725
	4	244.8769	-473.1631	-45.12636	533.5528	-199.7505	-60.38968
	5	-647.4471	139.817	43.96502	-199.7505	603.4821	59.93344
	6	116.8391	-144.3587	-176.7725	-60.38969	59.93344	204.7484
47	1	-142.1097	-12.01923	-48.07693	200.7919	190.1867	-188.7726
	2	-12.01923	-47.45829	177.8139	48.07693	-165.7947	-0.6186423
	3	-48.07693	177.8139	-759.3326	192.3077	807.4095	-370.1216
	4	200.7919	48.07693	192.3077	-2273.756	-393.0996	2225.679
	5	190.1867	-165.7947	807.4094	-393.0996	-997.5961	558.8943
	6	-188.7726	-0.6186361	-370.1216	2225.679	558.8943	-2225.06
48	1	-129.8237	-63.46935	-151.5458	51.01309	281.3694	12.45626
	2	-63.46935	-117.7068	28.03512	233.3092	35.43423	-115.6024
	3	-151.5458	28.03512	-990.2914	576.4171	1141.837	-604.4522
	4	51.01308	233.3092	576.4171	-1359.568	-627.4301	1126.258
	5	281.3694	35.43423	1141.837	-627.4301	-1423.207	591.9959
	6	12.45627	-115.6024	-604.4522	1126.258	591.9958	1010.656

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สคมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
49	1	280.9006	54.23554	-203.877	157.0856	-77.02357	-211.3211
	2	54.23554	110.7689	134.1076	66.00935	-188.3432	-176.7782
	3	-203.877	134.1076	523.897	-312.5	-320.0201	178.3924
	4	157.0856	66.00935	-312.5	992.647	155.4144	-1058.656
	5	-77.02358	-188.3432	-320.0201	155.4144	397.0436	32.92872
	6	-211.3211	-176.7782	178.3924	-1058.656	32.92872	1235.435
50	1	941.4495	532.0464	-675.8504	-303.9631	-265.5992	-228.0834
	2	532.0464	1172.117	-326.941	-412.9165	-205.1054	-759.2009
	3	-675.8504	-326.941	597.3458	115.3339	78.50461	211.6071
	4	-303.963	-412.9165	115.3339	235.5542	188.6291	177.3623
	5	-265.5992	-205.1054	78.5046	188.6291	187.0946	16.47628
	6	-228.0834	-759.2009	211.6071	177.3623	16.47628	581.8387
51	1	1275.14	739.0916	-1022.887	-633.0753	-252.2536	-106.0163
	2	739.0915	2669.665	-656.0532	-1702.034	-83.03833	-967.6309
	3	-1022.887	-656.0532	903.347	510.5133	119.5395	145.5399
	4	-633.0753	-1702.034	510.5133	1124.679	122.5619	577.3547
	5	-252.2536	-83.03833	119.5395	122.5619	132.7141	-39.52361
	6	-106.0163	-967.631	145.5399	577.3547	-39.52361	390.2762
52	1	898.4478	280.9289	-818.4973	-411.2422	-79.95064	130.3132
	2	280.9289	2623.708	-434.2201	-2153.133	153.2912	-470.5756
	3	-818.4972	-434.2201	863.1941	500.321	-44.69683	-66.10091
	4	-411.2421	-2153.133	500.321	1807.204	-89.07888	345.9282
	5	-79.95063	153.2912	-44.69683	-89.07888	124.6475	-64.21233
	6	130.3132	-470.5756	-66.10091	345.9282	-64.21233	124.6475

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สดมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
53	1	513.6379	-235.6304	-379.8035	59.53247	-133.8344	176.0979
	2	-235.6304	1350.174	36.5545	-1346.226	199.0759	-3.947997
	3	-379.8035	36.5545	486.4279	152.0975	-106.6245	-188.652
	4	59.53247	-1346.226	152.0975	1420.5	-211.63	-74.27357
	5	-133.8344	199.0759	-106.6245	-211.63	240.4589	12.55408
	6	176.0979	-3.947997	-188.652	-74.27356	12.55408	78.22157
54	1	680.9939	-404.6823	-715.2479	465.7982	34.25391	-61.11583
	2	-404.6823	1029.873	442.8202	-1532.28	-38.13786	502.4075
	3	-715.2479	442.8202	906.288	-415.7579	-191.0401	-27.06235
	4	465.7982	-1532.28	-415.7578	2382.314	-50.04032	-850.0334
	5	34.25391	-38.13785	-191.0401	-50.04031	156.7862	88.17815
	6	-61.11582	502.4075	-27.06235	-850.0334	88.17815	347.6259
55	1	312.686	60.37258	-272.0994	143.9134	-40.58661	-204.2859
	2	60.37258	123.303	120.9354	39.10689	-181.308	-162.4099
	3	-272.0994	120.9354	574.4908	-341.3925	-302.3914	220.4572
	4	143.9134	39.10689	-341.3926	868.8071	197.4792	-907.9139
	5	-40.5866	-181.308	-302.3914	197.4792	342.978	-16.17123
	6	-204.2859	-162.4099	220.4572	-907.914	-16.17123	1070.324
56	1	702.3607	414.6882	-373.4977	-245.5856	-328.8629	-169.1026
	2	414.6882	1394.176	-268.5636	-293.6883	-146.1246	-1100.488
	3	-373.4977	-268.5635	348.9628	67.3768	24.53497	201.1868
	4	-245.5856	-293.6883	67.3768	137.6081	178.2088	156.0802
	5	-328.8629	-146.1246	24.53497	178.2088	304.328	-32.08419
	6	-169.1026	-1100.488	201.1868	156.0802	-32.08419	944.4076

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) แสดงค่า Stiffness Matrix ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	สคมภ์	1	2	3	4	5	6
	แถว						
57	1	695.0828	211.5886	-716.6246	-375.0671	21.54183	163.4785
	2	211.5886	2037.856	-398.045	-1870.189	186.4565	-167.6672
	3	-716.6246	-398.045	890.7543	525.9197	-174.1298	-127.8746
	4	-375.067	-1870.189	525.9197	1768.135	-150.8526	102.0544
	5	21.54183	186.4565	-174.1297	-150.8526	152.5879	-35.60385
	6	163.4785	-167.6672	-127.8746	102.0544	-35.60385	65.6128
58	1	941.6714	-108.1428	-858.9741	-81.57938	-82.69746	189.7222
	2	-108.1428	2918.391	-104.5574	-2749.179	212.7002	-169.2117
	3	-858.9741	-104.5574	895.6771	272.651	-36.70301	-168.0937
	4	-81.57939	-2749.179	272.651	2625.962	-191.0716	123.2173
	5	-82.69745	212.7002	-36.70302	-191.0716	119.4005	-21.62857
	6	189.7222	-169.2117	-168.0936	123.2173	-21.62857	45.99443
59	1	1366.902	-523.7726	-1275.198	349.6486	-91.7043	174.124
	2	-523.7726	3831.455	326.6706	-3864.962	197.102	33.50734
	3	-1275.198	326.6706	1266.899	-145.4924	8.299033	-181.1782
	4	349.6486	-3864.962	-145.4924	3926.324	-204.1562	-61.36097
	5	-91.70429	197.102	8.299033	-204.1562	83.40526	7.054176
	6	174.124	33.50734	-181.1782	-61.36096	7.054176	27.85362
60	1	900.4481	-537.1094	-817.8711	475.3562	-82.57699	61.75321
	2	-537.1094	1706.112	452.3782	-2001.953	84.73117	295.841
	3	-817.8711	452.3782	860.1388	-329.5898	-42.26767	-122.7884
	4	475.3562	-2001.953	-329.5898	2410.987	-145.7663	-409.0335
	5	-82.57699	84.73117	-42.26765	-145.7663	124.8446	61.03516
	6	61.75321	295.841	-122.7884	-409.0335	61.03516	113.1925

ตารางที่ 4.5 แสดงค่า Displacement ในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุดnode ที่	Displacement ในแกน	
		X	Y
1	1	0	0
	2	-6.523571597	-2.272486995
	3	-5.107882581	-0.188265293
2	1	67.64261681	176.2857917
	2	83.39297079	-13.85209028
	3	177.4654389	44.96151977
3	1	-11.67584649	11.95226247
	2	-23.3482757	-5.27830803
	3	-22.45663795	15.64618241
4	1	-28.87961348	-64.92095426
	2	-37.23075682	5.319983119
	3	-70.92991097	-12.84958481
5	1	-9.804734534	14.1197074
	2	-23.11480812	-7.497679945
	3	-20.72395398	15.44955934
6	1	-62.52658959	56.05717489
	2	0	0
	3	23.42015634	110.1992245
7	1	-225.000276	77.02185088
	2	56.78054372	283.1357249
	3	-9.384287513	28.69689047
8	1	0	0
	2	-2528.291927	1304.742959
	3	-607.5585345	-1108.811657
9	1	0	0
	2	1083.066809	-868.647736
	3	-494.6582781	484.0144475

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.5 (ต่อ) แสดงค่า Displacement ในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุดnode ที่	Displacement ในแกน	
		X	Y
10	1	-50040.5805	-7545.37893
	2	175648.8038	-56164.47373
	3	-4320.585504	39822.66188
11	1	12966.19642	10432.5333
	2	17345.16311	677.5149942
	3	8454.461124	7989.256046
12	1	-6921.629573	-51194.50023
	2	-5067.847032	-6803.776772
	3	-35870.65416	-19701.52585
13	1	10672.75818	-12337.0051
	2	-3313.019573	-7688.769053
	3	3443.376492	-2693.122725
14	1	-26921.00901	-39585.17487
	2	-18764.8308	-3197.518788
	3	-35016.18868	-24383.5541
15	1	232996.0055	-135916.0888
	2	189551.9331	-123497.0757
	3	304252.5542	-131360.7678
16	1	8.87981E+11	4.72745E+12
	2	-8773682544	3.77055E+11
	3	2.35943E+12	1.71396E+12
17	1	-8.89088E+12	-1.97946E+13
	2	2.65249E+12	-2.52393E+13
	3	2.84212E+13	-5.37743E+13
18	1	-53914797810	-7.80672E+11
	2	-1.40799E+12	-3.05278E+12
	3	1.33131E+12	-2.25906E+11

ตารางที่ 4.5 (ต่อ) แสดงค่า Displacement ในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุดnode ที่	Displacement ในแกน	
		X	Y
19	1	-1.35067E+13	7.05407E+12
	2	-3.00257E+12	3.40332E+12
	3	-4.33739E+12	-4.60869E+12
20	1	-1924.68853	-530.4704236
	2	-366.838427	-484.2512316
	3	-637.5936896	500.9314563
21	1	5.35841E+12	8.22323E+12
	2	5.65472E+11	2.57801E+12
	3	-5.59319E+12	7.45949E+12
22	1	-8.67551E+11	-4.11958E+12
	2	0	0
	3	1.06665E+12	-2.28142E+12
23	1	-1.65964E+12	-5.79873E+12
	2	-9.64624E+11	9.14455E+11
	3	4.61538E+12	-1.94573E+12
24	1	0	0
	2	-2.43988E+12	-1.97616E+12
	3	2.73566E+12	3.24129E+12
25	1	3.10937E+13	2.81782E+13
	2	3.52769E+13	1.26299E+13
	3	3.52805E+13	1.53619E+13
26	1	-4.37101E+12	-4.21359E+13
	2	-1.01354E+13	9.11673E+12
	3	-2.86212E+13	-9.42047E+12
27	1	-3.27349E+13	1.81179E+13
	2	-5.98426E+13	-1.39443E+13
	3	-5.79183E+13	3.75997E+13

ตารางที่ 4.5 (ต่อ) แสดงค่า Displacement ในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุดnode ที่	Displacement ในแกน	
		X	Y
28	1	-3.85389E+13	1.02E+15
	2	4.16945E+13	7.65541E+13
	3	1.38E+15	-2.50169E+14
29	1	-2.09225E+12	1.84812E+13
	2	1.01077E+13	2.07192E+13
	3	1.36299E+12	1.98092E+13
30	1	-9.80916E+13	-6.77737E+13
	2	-1.38019E+14	2.58634E+12
	3	-1.17144E+14	-2.08395E+13
31	1	-3.98935E+12	1.1681E+13
	2	7244768127	1.23541E+13
	3	-2.83516E+12	1.22901E+13
32	1	2.07043E+14	-3.52831E+14
	2	1.92711E+14	-1.81521E+14
	3	2.06772E+14	-3.24204E+14
33	1	7.15237E+12	2.72567E+13
	2	1.45086E+12	1.71543E+13
	3	4.94755E+12	1.70794E+13
34	1	7.55486E+13	2.74079E+14
	2	-2.75477E+14	1.69853E+14
	3	-2.56583E+13	2.0453E+13
35	1	-5.35709E+14	-1.31E+15
	2	-1.50E+15	6.50753E+14
	3	1.72991E+14	7.90829E+14
36	1	-4.19E+15	-6.39617E+14
	2	-4.65E+15	-6.59E+14
	3	-3.84E+15	-8.48861E+14

ตารางที่ 4.5 (ต่อ) แสดงค่า Displacement ในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุดnode ที่	Displacement ในแกน	
		X	Y
37	1	2.77512E+13	4.82758E+13
	2	3.28635E+13	3.47148E+13
	3	3.1961E+13	4.00524E+13
38	1	-3.66191E+13	-2.25472E+14
	2	-1.00418E+13	8.45547E+13
	3	-2.03997E+14	-1.00602E+14
39	1	5.71249E+13	1.54718E+14
	2	-9.53501E+13	-6.61115E+13
	3	-1.34695E+14	1.99235E+14
40	1	2.83438E+14	4.23557E+13
	2	3.50279E+14	1.12433E+14
	3	-2.23631E+14	-1.13573E+14
41	1	4.19503E+12	1.02269E+14
	2	1.21666E+14	1.817E+14
	3	4.94304E+13	1.29891E+14
42	1	2.97404E+14	-4.7744E+13
	2	-3.56638E+14	7.5548E+13
	3	-4.977E+14	-1.72148E+14
43	1	2.36724E+13	-5.11078E+13
	2	7.41119E+13	1.3407E+14
	3	2.19621E+14	-5.7569E+13
44	1	3.04255E+13	1.06E+15
	2	-5.69E+15	2.09E+15
	3	-2.89E+15	-3.11E+15
45	1	-1.56722E+13	6.29252E+14
	2	-9.15902E+13	2.36304E+14
	3	-2.02941E+14	2.90344E+14

ตารางที่ 4.5 (ต่อ) แสดงค่า Displacement ในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุดnode ที่	Displacement ในแกน	
		X	Y
46	1	-3.60981E+14	1.36E+15
	2	-6.22119E+13	-8.56379E+14
	3	-1.27E+15	1.57E+15
47	1	1.61069E+14	-3.57253E+14
	2	-5.44307E+13	2.26814E+14
	3	1.12963E+14	2.70251E+14
48	1	-1.05E+15	4.52568E+14
	2	-1.41612E+14	1.48253E+14
	3	-4.74321E+14	-2.10417E+14
49	1	-6.63726E+13	6.97408E+13
	2	-1.00958E+14	-2.17485E+14
	3	3.22894E+13	-1.46512E+14
50	1	-2.49689E+14	-2.2439E+14
	2	-4.62099E+14	2.14442E+14
	3	-7.59165E+14	4.1333E+14
51	1	5.47983E+13	1.19554E+14
	2	1.79817E+14	1.66743E+14
	3	-5.52725E+14	7.6764E+13
52	1	-4.54E+15	-1.13E+15
	2	-5.20E+15	3.16001E+13
	3	-2.22E+15	-2.13429E+14
53	1	-2.19496E+14	4.24916E+14
	2	-8.90986E+14	5.01433E+14
	3	2.53244E+14	-6.89923E+14
54	1	2.09729E+14	-1.37604E+14
	2	2.28936E+14	-1.20758E+14
	3	3.16859E+14	-1.74467E+14

ตารางที่ 4.5 (ต่อ) แสดงค่า Displacement ในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุดnode ที่	Displacement ในแกน	
		X	Y
55	1	-9.72078E+13	9.54548E+13
	2	-1.19278E+14	-2.33766E+14
	3	5.85341E+13	-1.38172E+14
56	1	-1.59E+15	-4.82E+15
	2	-3.12E+15	2.99E+15
	3	-8.92E+15	1.47E+15
57	1	2.08E+15	-2.32E+15
	2	2.53E+15	-3.51E+15
	3	-3.19E+15	-5.91817E+14
58	1	-4.97591E+14	2.50658E+13
	2	-5.95747E+14	1.28425E+14
	3	-1.16062E+13	-1.62892E+14
59	1	-5.17614E+14	1.41E+15
	2	-1.04E+15	1.68E+15
	3	5.23E+15	6.06947E+12
60	1	-8.27E+14	-1.69597E+14
	2	-7.12688E+14	-2.28483E+14
	3	-1.57E+15	7.55743E+14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 แสดงค่าแรงในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุด node ที่	แรงในแนวแกน	
		X	Y
1	1	0	-1064.098145
	2	-7.40E-05	-1837.987864
	3	7.40E-05	2902.086008
2	1	-7.40E-05	-1837.987864
	2	-1.63E-04	-2246.429518
	3	2.37E-04	4084.417433
3	1	-7.40E-05	-1837.987864
	2	7.40E-05	2902.086008
	3	2.37E-04	4084.417433
4	1	-1.63E-04	-2246.429518
	2	-9.98E-04	-2937.637035
	3	1.16E-03	5184.066479
5	1	-1.63E-04	-2246.429518
	2	2.37E-04	4084.417433
	3	1.16E-03	5184.066479
6	1	-9.98E-04	-2937.637035
	2	-9446.160156	-9297.112305
	3	14642.31513	18663.50851
7	1	-9.98E-04	-2937.637035
	2	1.16E-03	5184.066479
	3	14642.31513	18663.50851
8	1	-9446.160156	-9297.112305
	2	-584220.2885	191442.3338
	3	593666.4487	-182145.2215
9	1	-9446.160156	-9297.112305
	2	14642.31513	18663.50851
	3	593666.4487	-182145.2215

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 (ต่อ) แสดงค่าแรงในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุด node ที่	แรงในแนวแกน	
		X	Y
10	1	-584220.2885	191442.3338
	2	-742677.7138	1110025.924
	3	1326898.026	-1301468.252
11	1	-584220.2885	191442.3338
	2	593666.4487	-182145.2215
	3	1326898.026	-1301468.252
12	1	-742677.7138	1110025.924
	2	742677.673	2590060.644
	3	1.45E-02	-3700086.519
13	1	-742677.7138	1110025.924
	2	1326898.026	-1301468.252
	3	1.45E-02	-3700086.519
14	1	742677.673	2590060.644
	2	-742677.237	19610455.46
	3	-0.450511702	-22200516.21
15	1	742677.673	2590060.644
	2	1.45E-02	-3700086.519
	3	-0.450511702	-22200516.21
16	1	-742677.237	19610455.46
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.16387E+13	1.08E+15
17	1	-742677.237	19610455.46
	2	-0.450511702	-22200516.21
	3	-3.16387E+13	1.08E+15
18	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	4250.006511	7361.212173
	3	-3.16387E+13	1.08E+15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ 75 อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 (ต่อ) แสดงค่าแรงในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุด node ที่	แรงในแนวแกน	
		X	Y
19	1	3.16387E+13	1.08E+15
	2	-3.16387E+13	1.08E+15
	3	-3.16387E+13	1.08E+15
20	1	4250.006511	7361.212173
	2	-3432.094289	-650.6759794
	3	-817.9120588	-6710.536423
21	1	4250.006511	7361.212173
	2	-3.16387E+13	1.08E+15
	3	-817.9120588	-6710.536423
22	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	-9.98E-04	-2937.637035
	3	-3.16387E+13	1.08E+15
23	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	-817.9120588	-6710.536423
	3	-3.16387E+13	1.08E+15
24	1	-9.98E-04	-2937.637035
	2	-3.16387E+13	1.08E+15
	3	3.16387E+13	-1.08E+15
25	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-3432.094289	-650.6759794
	3	-9.4916E+13	3.23E+15
26	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-1.89832E+14	6.45E+15
27	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	-9.4916E+13	3.23E+15
	3	-1.89832E+14	3.16E+13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ 76 อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 (ต่อ) แสดงค่าแรงในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุด node ที่	แรงในแนวแกน	
		X	Y
28	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-3432.094289	-650.6759794
	3	-3.16387E+14	1.08E+16
29	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-1.89832E+14	6.45E+15
	3	-3.16387E+14	1.08E+16
30	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-4.7458E+14	1.61E+16
31	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	-3.16387E+14	1.08E+16
	3	-4.7458E+14	1.61E+16
32	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-3432.094289	-650.6759794
	3	-6.64412E+14	2.26E+16
33	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-4.7458E+14	1.61E+16
	3	-6.64412E+14	2.26E+16
34	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-8.85883E+14	3.01E+16
35	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	-6.64412E+14	2.26E+16
	3	-8.85883E+14	3.01E+16
36	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-3432.094289	-650.6759794
	3	-1.14E+15	3.87E+16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ 77 อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 (ต่อ) แสดงค่าแรงในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุด node ที่	แรงในแนวแกน	
		X	Y
37	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-8.85883E+14	3.01E+16
	3	-1.14E+15	3.87E+16
38	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-1.42E+15	4.84E+16
39	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	-1.14E+15	3.87E+16
	3	-1.42E+15	4.84E+16
40	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-1.77E+15	6.02E+16
41	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-1.42E+15	4.84E+16
	3	-1.77E+15	6.02E+16
42	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-3432.094289	-650.6759794
	3	-2.15E+15	7.31E+16
43	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-1.77E+15	6.02E+16
	3	-2.15E+15	7.31E+16
44	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-2.56E+15	8.71E+16
45	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	-2.15E+15	7.31E+16
	3	-2.56E+15	8.71E+16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ 78 อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 (ต่อ) แสดงค่าแรงในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	จุด node ที่	แรงในแนวแกน	
		X	Y
46	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.04E+15	1.03E+17
47	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-2.56E+15	8.71E+16
	3	-3.04E+15	1.03E+17
48	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-3.04E+15	1.03E+17
	3	3.16387E+13	-1.08E+15
49	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.58E+15	1.22E+17
50	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.58E+15	1.22E+17
51	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-3432.094289	-650.6759794
	3	-3.58E+15	1.22E+17
52	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	-3432.094289	-650.6759794
	3	-3.58E+15	1.22E+17
53	1	-3432.094289	-650.6759794
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.58E+15	1.22E+17
54	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.58E+15	1.22E+17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 (ต่อ) แสดงค่าแรงในแนวแกน x และ y ของแต่ละเอลิเมนต์

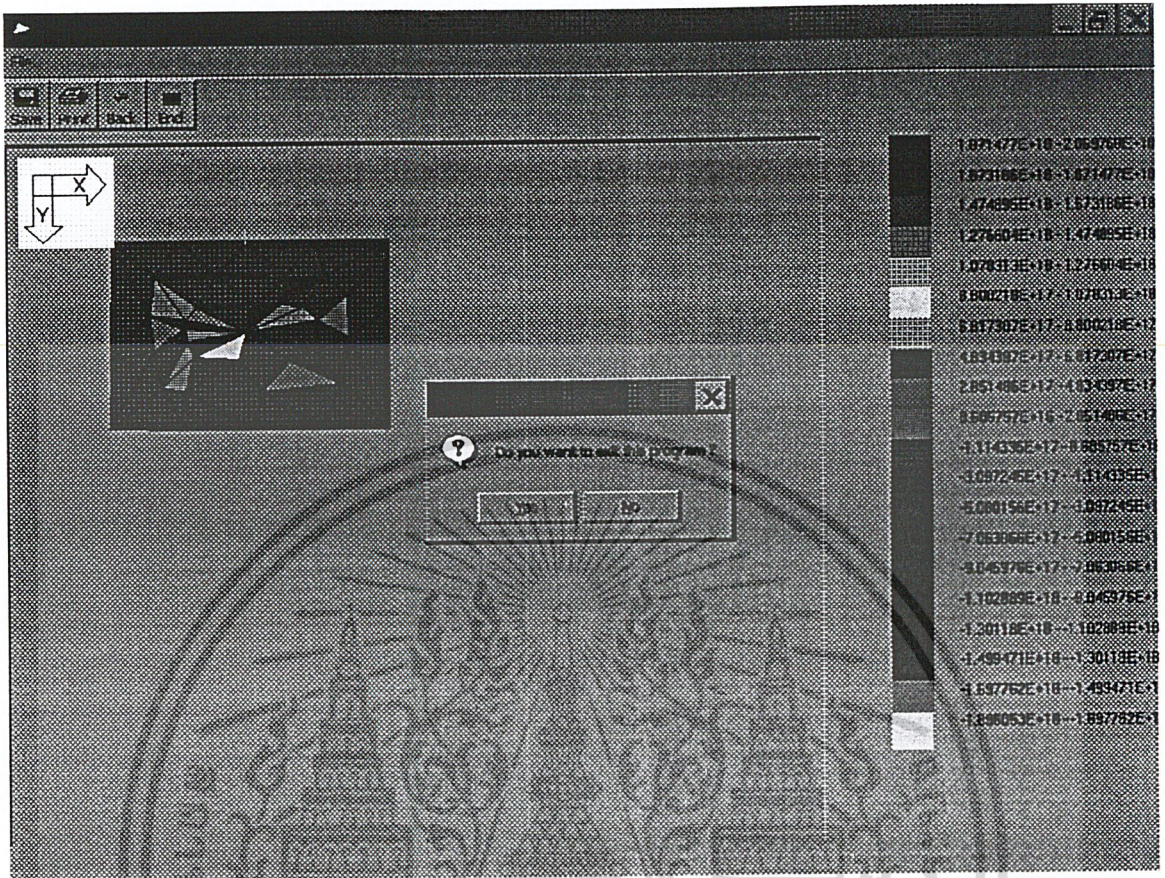
เอลิเมนต์ที่	จุด node ที่	แรงในแนวแกน	
		X	Y
55	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.58E+15	1.22E+17
56	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.58E+15	1.22E+17
57	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.58E+15	1.22E+17
58	1	3.16387E+13	-1.08E+15
	2	-2.56E+15	8.71E+16
	3	-3.58E+15	1.22E+17
59	1	-2.56E+15	8.71E+16
	2	-3.04E+15	1.03E+17
	3	-3.58E+15	1.22E+17
60	1	-3.04E+15	1.03E+17
	2	3.16387E+13	-1.08E+15
	3	-3.58E+15	1.22E+17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ 80 อังอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.7 แสดงค่าความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์

เอลิเมนต์ที่	Stress (Pa.)	เอลิเมนต์ที่	Stress (Pa.)
1	140.7211	31	-5.90E+14
2	-1213.322	32	1.06E+17
3	-2176.951	33	3.11E+15
4	7658.082	34	-3.13E+15
5	-1869.402	35	2.74E+16
6	58593.91	36	3.63E+17
7	-3357.301	37	1.13E+16
8	192912.4	38	-1.11E+16
9	501517.6	39	7.00E+16
10	2131871	40	9.38E+16
11	4081697	41	3.78E+16
12	-454455.2	42	6.17E+16
13	2363522	43	1.53E+17
14	1.08E+07	44	3.94E+17
15	-1.87E+07	45	9.66E+15
16	9.02E+11	46	1.28E+18
17	2.74E+15	47	1.50E+15
18	2.00E+14	48	1.93E+17
19	3.62E+15	49	2.68E+16
20	-118012.6	50	6.62E+17
21	-2.29E+13	51	2.48E+17
22	7.72E+14	52	1.44E+18
23	1.36E+15	53	1.79E+16
24	3.03E+15	54	3.74E+16
25	1.97E+15	55	-2.15E+14
26	4.05E+15	56	-1.90E+18
27	-4.21E+15	57	6.30E+17
28	-3.73E+17	58	1.70E+17
29	-1.78E+15	59	2.07E+18
30	5.57E+16	60	3.29E+17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.10 แสดงกราฟที่กระดับความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

### สรุปและวิเคราะห์ผลการดำเนินงาน

#### 5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมสำหรับหาระดับความเค้นของชิ้นงาน สามารถช่วยประหยัดเวลาและลดค่าใช้จ่ายในการทดสอบกับชิ้นงานจริง นอกจากนี้ยังสามารถนำไปปรับปรุงและประยุกต์ใช้ได้ ในแวดวงอุตสาหกรรม โดยโปรแกรมจะทำการรับข้อมูลรูปของชิ้นงาน ข้อมูลด้านคุณสมบัติของชิ้นงาน ความยาวเอลิเมนต์ที่ต้องการแบ่ง ขนาดและทิศทางของแรงกระทำ ตำแหน่งของจุดยึดติด จากนั้นได้นำข้อมูลทั้งหมดไปคำนวณตามทฤษฎีวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยผลลัพธ์จะอยู่ในรูปของค่าระดับความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์และรูปกราฟฟิคแสดงระดับความเค้น ซึ่งพบว่าเมื่อทำการวิเคราะห์กับปัญหาบางรูปแบบ ผลลัพธ์ที่ได้ยังไม่ถูกต้อง โดยเฉพาะผลลัพธ์ในส่วนที่มีการประมวลผลโดยใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ จึงมีผลทำให้รูปกราฟฟิคมีความผิดพลาดไปด้วย

#### 5.2 วิเคราะห์ผลการดำเนินงาน

จากผลการดำเนินงาน จะพบข้อผิดพลาดและปัญหาต่างๆ ดังนี้

1. โปรแกรมไม่สามารถใช้กับปัญหาในบางรูปแบบได้ เช่น ชิ้นงานที่มีรูเจาะ และชิ้นงานที่มีรูปร่างซับซ้อน
2. โปรแกรมไม่สามารถแบ่งเอลิเมนต์ได้อัตโนมัติ
3. ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมไม่มีความถูกต้องสมบูรณ์ ซึ่งจากการตรวจสอบพบว่า เกิดปัญหาจาก สมการที่นำมาสร้างเป็นเมทริกซ์ ไม่สามารถหาผลเฉลยที่ถูกต้องออกมาได้ เช่น

$$[MK][MU] = [MFF]$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 96 & 24 & 254 & 64 \\ 96 & 24 & 0 & 0 & 158 & 40 \\ 254 & 64 & 158 & 40 & 0 & 0 \\ 109 & 403 & 205 & 427 & 363 & 467 \end{bmatrix} [MU] = \begin{bmatrix} -1294.101 \\ -4829.628 \\ -1516435 \\ -1650464 \\ -2048117 \\ 677077.9 \end{bmatrix}$$

เมื่อทำการหาค่าเมทริกซ์  $[MU]$  ด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ ตามขั้นตอนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.38 & 0.094 & 1 & 0.252 \\ 0 & 0.152 & -0.61 & 0 & 0.39 & 0.253 \\ 0 & 0.252 & -0.38 & 0.16 & -1 & 0 \\ 0 & 0.86 & 0.21 & 0.91 & 0.54 & 1 \end{bmatrix} [MU] = \begin{bmatrix} -1294.101 \\ -4829.628 \\ -5910.218 \\ -9659.684 \\ -6769.351 \\ -1147.796 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.38 & 0.094 & 1 & 0.252 \\ 0 & 0 & -0.61 & -0.152 & 0.39 & 0.253 \\ 0 & 0 & -0.38 & -0.09 & -1 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.21 & 5.139 \times 10^{-2} & 0.54 & 0.137 \end{bmatrix} [MU] = \begin{bmatrix} -1294.101 \\ -4829.628 \\ -5970.218 \\ -8926.069 \\ -5552.437 \\ 3019.955 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.308 & 0.094 & 1 & 0.252 \\ 0 & 0 & 0 & -1.38 \times 10^{-17} & 1.24 & 0.315 \\ 0 & 0 & 0 & 1.38 \times 10^{-17} & -1.24 & -0.315 \\ 0 & 0 & 0 & -2.67 \times 10^{-8} & 0.68 & 0.17 \end{bmatrix} [MU] = \begin{bmatrix} -1294.101 \\ -4829.628 \\ -5970.218 \\ -11522.66 \\ 6.75 \times 10^{-5} \\ 5.77 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.38 & 0.094 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -1.38 \times 10^{-17} & 1.24 & 0.315 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.24 & -0.315 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.24 & 0.315 \end{bmatrix} [MU] = \begin{bmatrix} -1294.101 \\ -4829.628 \\ -5970.218 \\ -11522.66 \\ 6.75 \times 10^{-5} \\ -11522.66 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0.38 & 0.094 & 1 & 0.25 \\
 0 & 0 & 0 & -1.38 \times 10^{-17} & 1.24 & 0.315 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1.24 & -0.315 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 [MU] =
 \begin{bmatrix}
 -1294.101 \\
 -4829.628 \\
 -5970.218 \\
 -11522.66 \\
 6.75 \times 10^{-5} \\
 -11522.66
 \end{bmatrix}$$

เมื่อทำการกำจัดไปข้างหน้าตามระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ และทำการแทนค่าย้อนกลับ ซึ่งไม่สามารถหาค่า  $x_6$  ได้ จึงไม่สามารถหาค่าเมตริกซ์ MU ได้เช่นกัน

### 5.3 แนวทางพัฒนา และปรับปรุง

1. ปรับปรุงโปรแกรมให้สามารถหาคำตอบได้ถูกต้องแม่นยำ
2. ปรับปรุงโปรแกรมให้สามารถรับรูปชิ้นงาน ได้หลากหลายรูปแบบมากยิ่งขึ้น
3. โปรแกรม Finite Element Program for Stress Testing นี้ สามารถคำนวณหาค่าระดับความเค้นได้เฉพาะชิ้นงานแผ่นระนาบเท่านั้น ควรที่จะพัฒนาไปสู่การคำนวณหาค่าระดับความเค้นในชิ้นงานในรูปแบบปัญหาของของแข็งอย่างอื่นได้อีก ดังที่ได้ศึกษามาบ้างแล้ว เช่น ปัญหาของแข็งประเภท Truss, Beam, Frame, Torsion และ Axisymmetric เพื่อให้ครอบคลุมปัญหาเกี่ยวกับของแข็งทั้งหมด
4. ในส่วนของการใส่แรงกระทำและจุดยึดติด ควรให้มีการเพิ่มแรงในลักษณะอื่นได้ เช่น แรงกระจายกระทำบนชิ้นงาน และมีการยึดติดในลักษณะอื่นๆ เป็นต้น
5. ส่วนของการแสดงผลรูปภาพฟิสิก ควรเพิ่มเติมการแสดงลักษณะของชิ้นงานก่อน – หลังได้รับแรงกระทำว่าเมื่อชิ้นงานได้รับแรงกระทำแล้วจะทำให้ชิ้นงานเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างไร แสดงรูปภาพฟิสิกได้อย่างสวยงามและมีความกลมกลืนต่อเนื่องกันของสี
6. ควรเพิ่มความสะดวกในการใช้งาน ให้สามารถใช้งานได้ง่ายและสะดวกมากยิ่งขึ้น

## บรรณานุกรม

1. Knight , Charles E. “*The Finite Element Method in Mechanical Design*”. ? Edition. PWS – KENT Publishing Company, 1993
2. Saeed Moaveni. “*Finite Element Analysis : Theory and Application with ANSYS*”. ? Edition. Prentice – Hall, Inc, 1999
3. ศ.ดร.ปราโมทย์ เตชะอำไพ. “ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม”. พิมพ์ครั้งที่ 2. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
4. ศ.ดร.ปราโมทย์ เตชะอำไพ. “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม”. พิมพ์ครั้งที่ 2. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.
5. กิตติ ภัคดีวัฒนะกุล, จำลอง ครูอุสาหะ. “*Visual Basic 6 ฉบับโปรแกรมเมอร์*”. พิมพ์ครั้งที่ 9. หจก. ไทยเจริญการพิมพ์, 2543

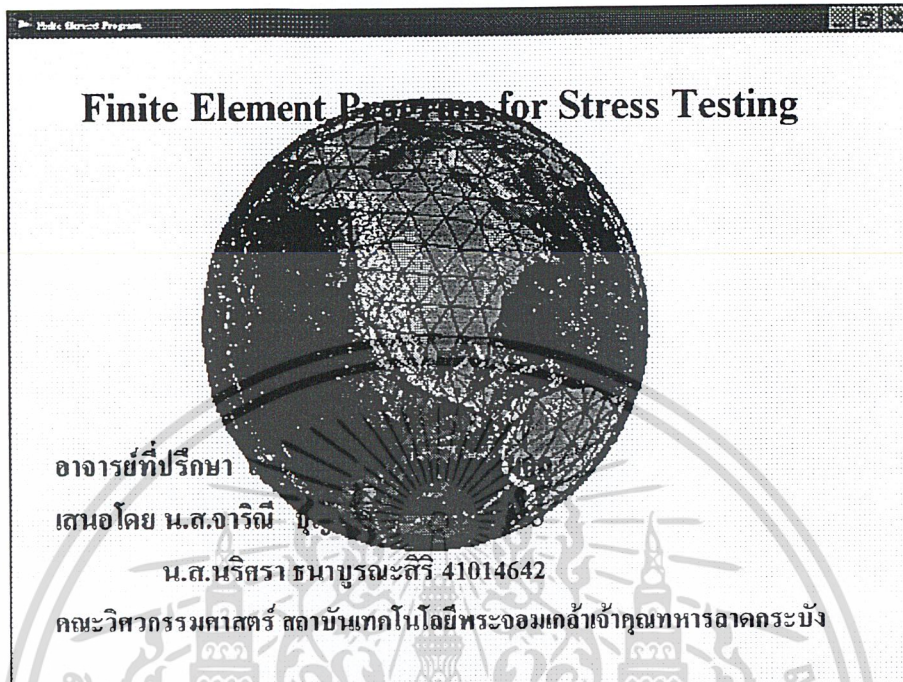




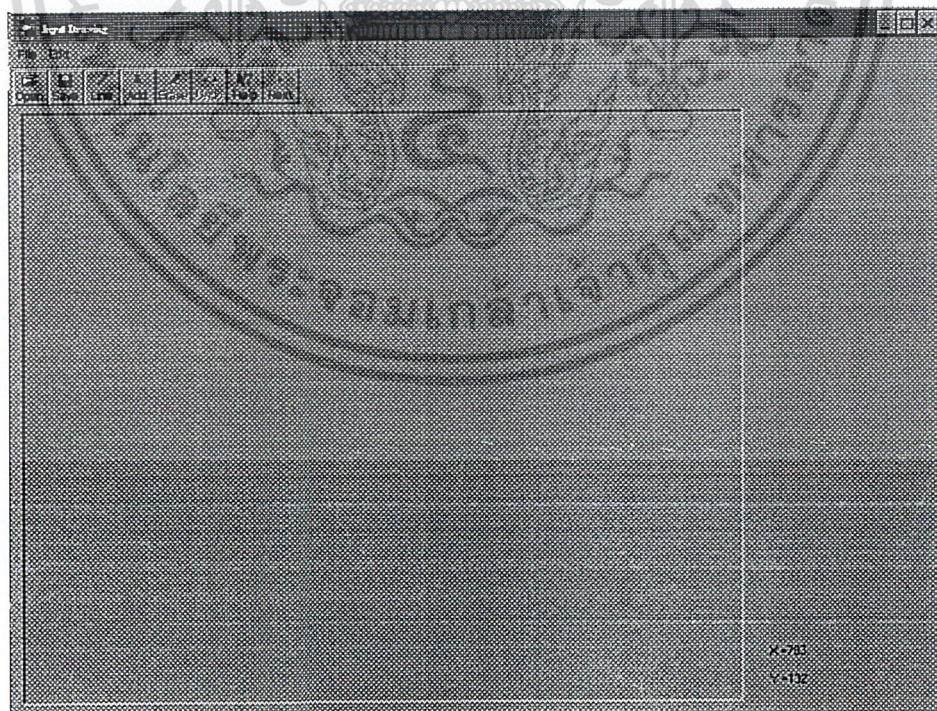
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ขั้นตอนการใช้โปรแกรม

1. เริ่มเข้าสู่โปรแกรม Finite Element Program for Stress Testing

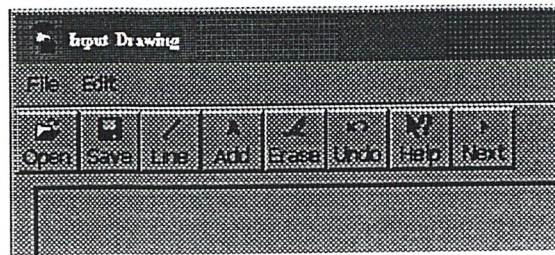


2. เมื่อเข้าสู่โปรแกรม เริ่มต้นจากการวาดรูปชิ้นงานที่ต้องการศึกษา (Input Drawing)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และผู้ 1 อ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

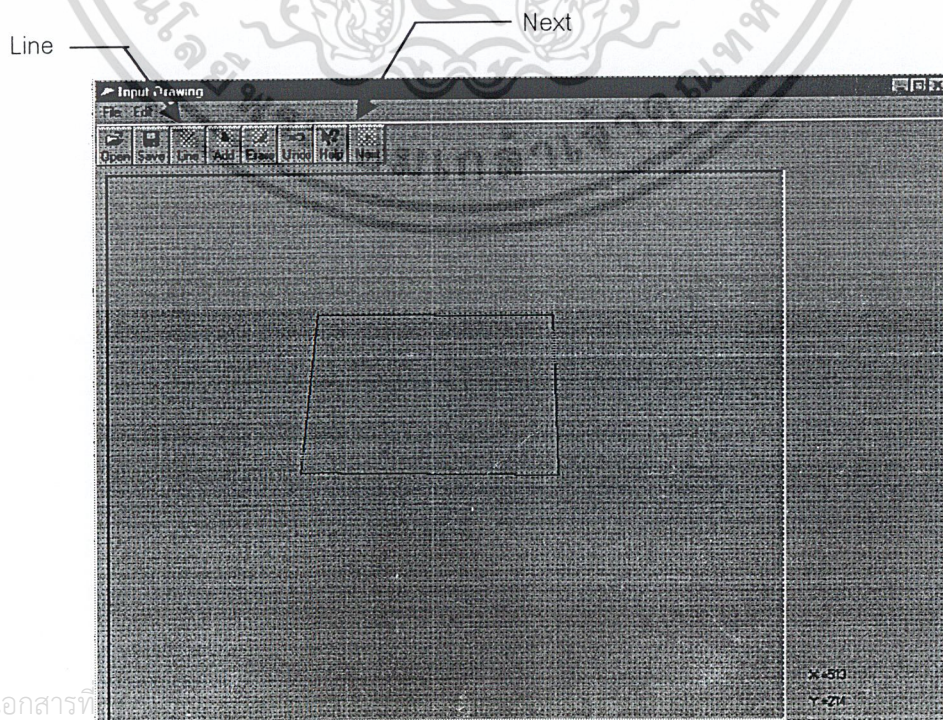
โดยมีแถบเครื่องมือที่ประกอบด้วย Icon ต่างๆ ดังนี้



เมื่อเลื่อนเมาส์ไปชี้ยัง Icon ใด ก็จะปรากฏหน้าต่างที่อยู่ใต้ Icon นั้น แต่ละ Icon จะมีหน้าที่ต่างกัน ไปด้วยดังนี้

รูป Icon	ชื่อเรียก	รายละเอียดการใช้งาน
	Open File	ใช้สำหรับเปิด File ใหม่ (รูปที่มีอยู่แล้ว สามารถเปิดขึ้นมาใช้ได้)
	Save File	ใช้สำหรับบันทึกรูปที่วาดขึ้นมาใหม่
	Drawing Line	ใช้สำหรับวาดรูปชิ้นงานที่ต้องการศึกษา
	Add Drawing	ใช้สำหรับเพิ่มรูปที่ 2, 3 หรือ 4 เป็นต้นไป
	Erase	ใช้สำหรับลบรูปต่างๆ บน Picture ที่ไม่ต้องการ
	Undo Typing	ใช้สำหรับยกเลิกเส้นรูปที่เพิ่งวาด
	Help	ใช้สำหรับช่วยในการทำงานโปรแกรม
	Next From	ใช้สำหรับเปลี่ยนไปในฟอร์มถัดไปเมื่อวาดรูปเสร็จแล้ว

3. ทำการวาดรูปชิ้นงาน โดยคลิกที่ปุ่ม Line และเมื่อวาดรูปเสร็จแล้วให้คลิกที่ปุ่ม Next

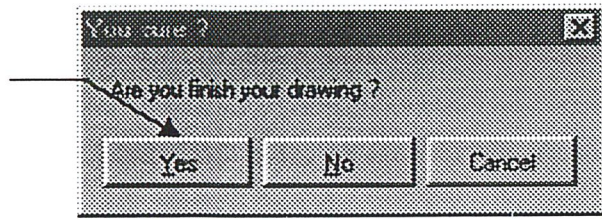


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่

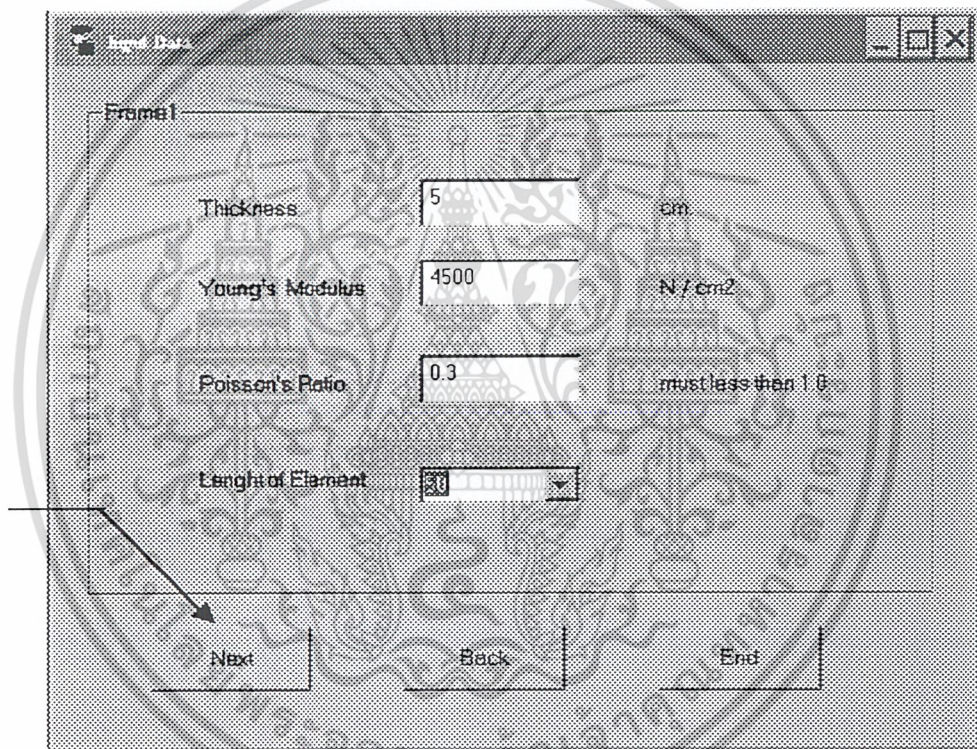
ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ

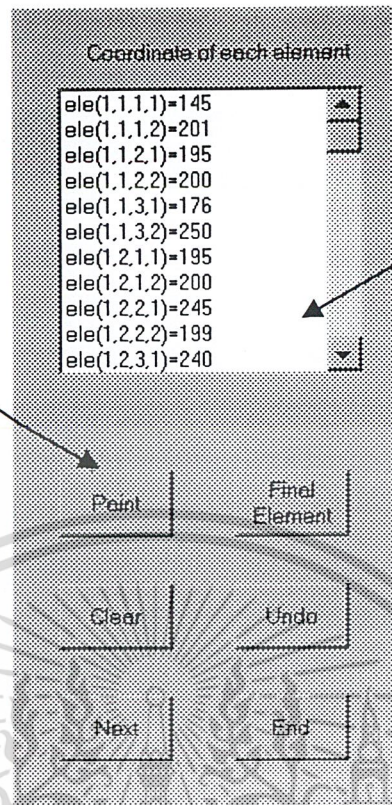
เมื่อคลิกปุ่ม Next จะมี Message Box ถามว่าคุณวาดรูปเสร็จเรียบร้อยแล้วหรือไม่ ให้คุณคลิก “Yes” เมื่อคุณวาดรูปเสร็จ



4. โปรแกรมมายังฟอร์ม Input Data ป้อนข้อมูลเกี่ยวกับคุณสมบัติของชิ้นงาน ได้แก่ ค่าความหนาของชิ้นงาน, ค่ายังโมดูลัส, ค่าอัตราส่วนพัวซอง, และค่าความยาวเอลิเมนต์ที่ต้องการสร้าง ใส่ข้อมูลให้เรียบร้อยแล้วคลิกปุ่ม Next

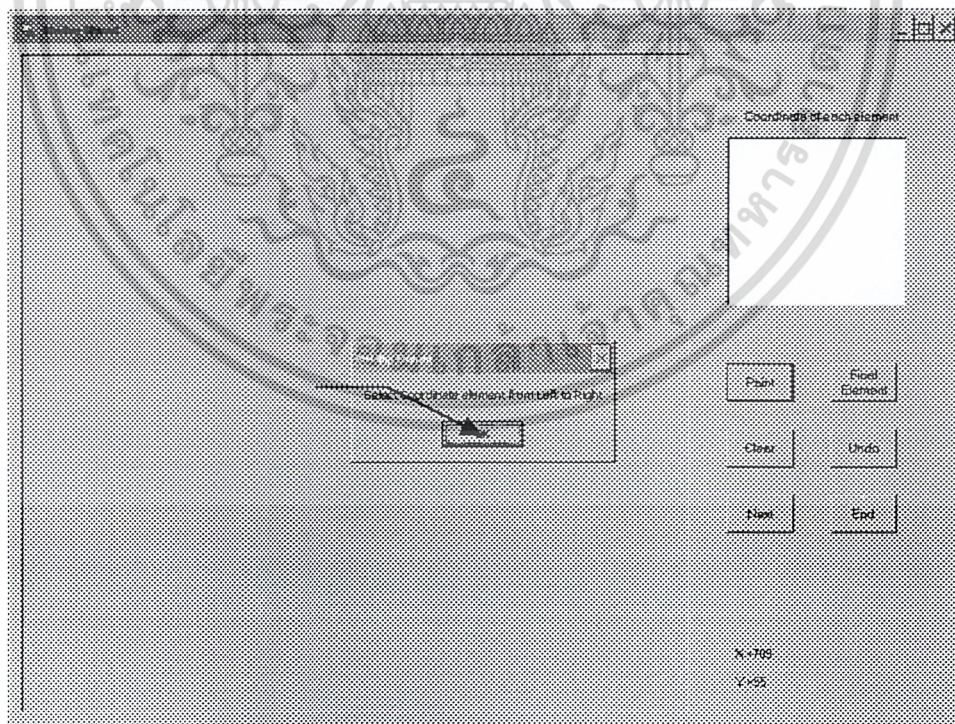


5. หลังจากนั้นมายังฟอร์ม Divering Element เพื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม



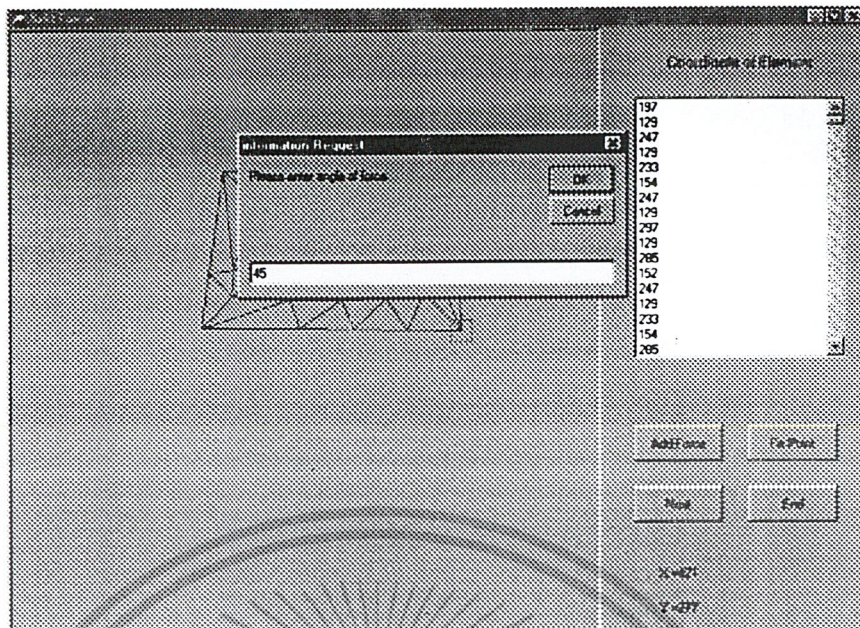
แสดงพิกัดของ  
Element

เริ่มคลิกที่ปุ่ม Paint คือเริ่มทำการวาดเอลิเมนต์ ซึ่งจะขึ้น Message Box ขึ้นมาบอกจุดเริ่มต้นของการวาดเอลิเมนต์

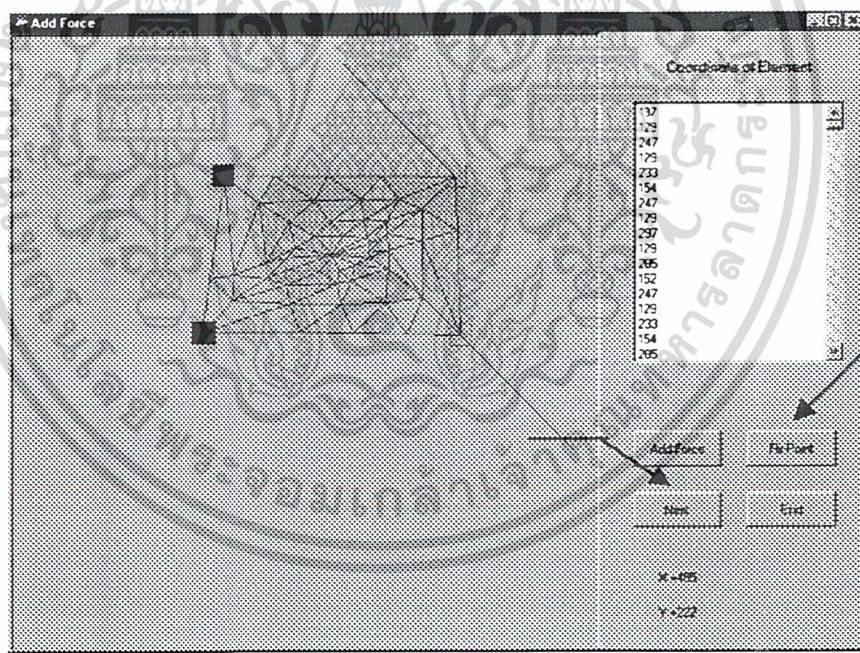


คลิกปุ่ม Ok เกิดรูปที่เราวาดไว้ และมีวงกลมสีแดงบอกตำแหน่งของจุดที่เริ่มสร้างเอลิเมนต์

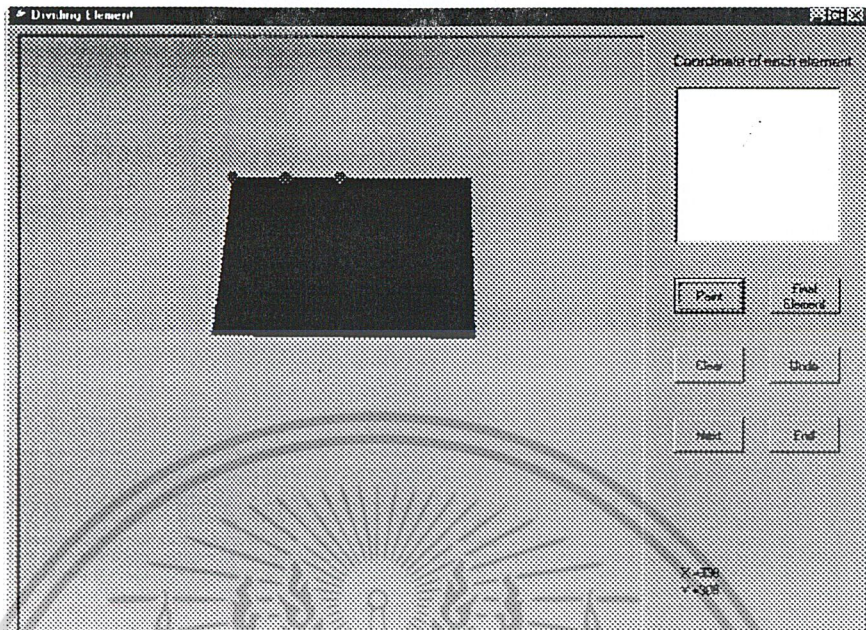
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ ๗4 อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



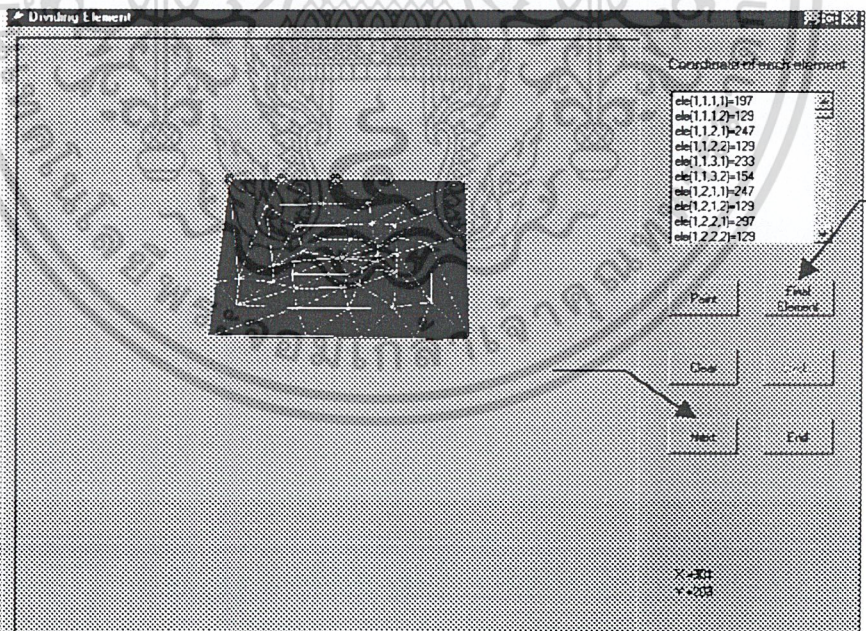
มีเส้นแสดงแรงกระทำให้เห็น ดังรูป หลังจากนั้นคลิกปุ่ม Fix Point แล้วนำมาคลิกตำแหน่งที่ต้องการ Fix ได้ดังรูป แล้วคลิกปุ่ม Next



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

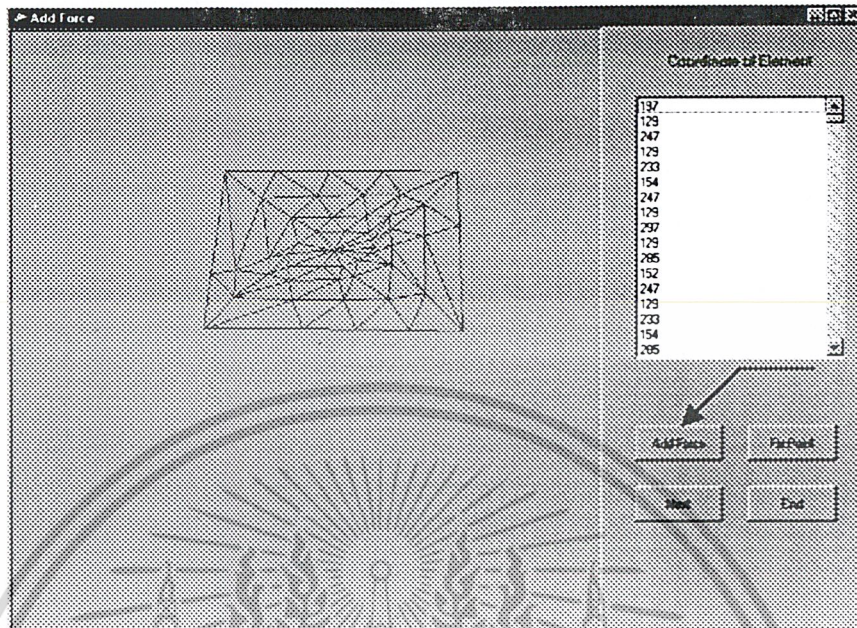


คลิกปุ่ม Final Element เพื่อทำการวาดเอลิเมนต์ขั้นสุดท้าย หลังจากนั้นคลิกปุ่ม Next

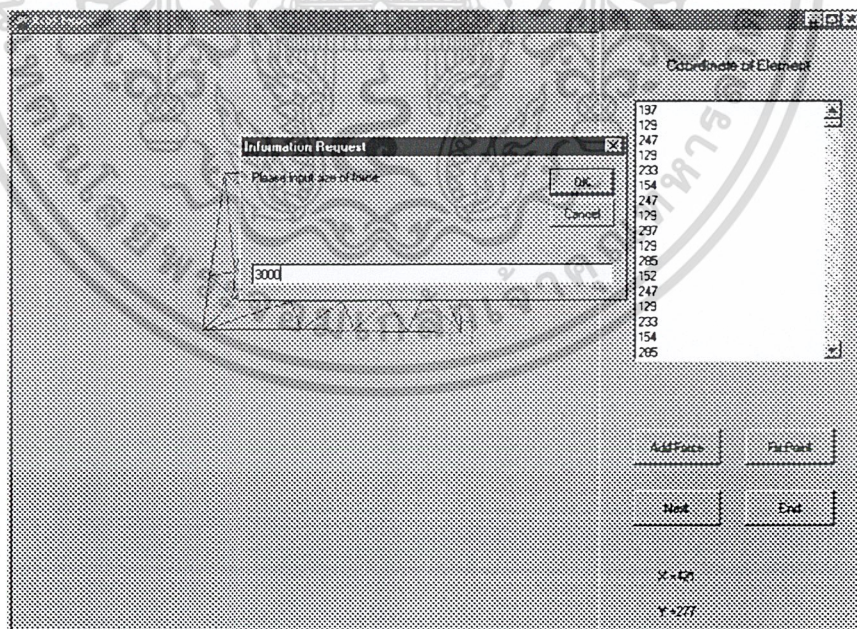


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และห้ามอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. โปรแกรมมายังฟอร์ม Add Force เพื่อทำการใส่แรงที่กระทำกับชิ้นงาน โดยคลิกที่ปุ่ม Add Force

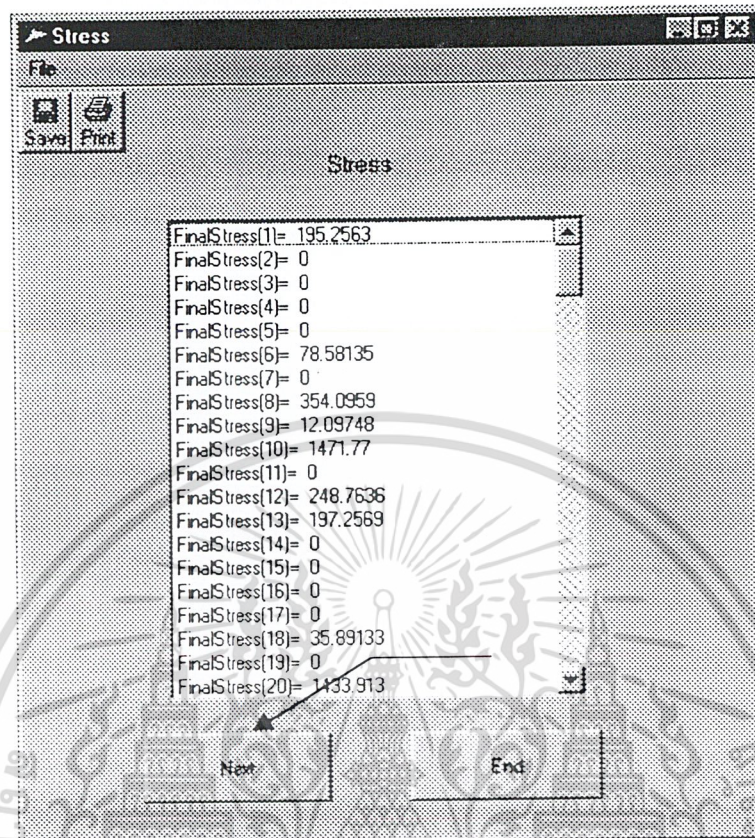


ใส่ข้อมูลค่าแรงและทิศทางที่มากระทำกับชิ้นงานใน Message Box ดังรูป

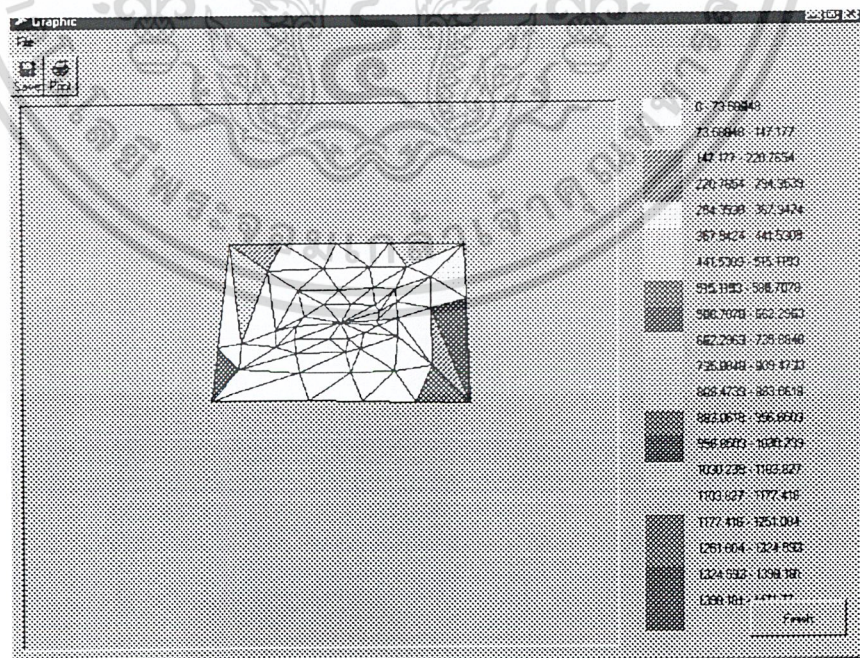


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และ ๗7 งดอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7. ขั้นตอนต่อไปโปรแกรมจะทำการประมวลผลหาค่าระดับความเค้น แสดงด้วย Form ดังนี้ แล้วคลิกปุ่ม Next



8. และสามารถแสดงผลด้วยรูปกราฟิก ตาม Form 9 ต่อไปนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และเผยแพร่อย่างถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้