โปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัส

นายคมศักดิ์	ศรอากาศ	รหัสประจำตัว	38054108
นางสาวเทอดขวัญ	ช้างเผือก	รหัสประจำตัว	38054124
นางสาวธัญพร	แมนเมธี	รหัสประจำตัว	38054125

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2541

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN CALCULUS

BY

MR. KOMSAK SORNARGARD CODE 38054108

MISS. THURDKWAN CHANGPOEK CODE 38054124

MISS. THANYAPORN MANMAETEE CODE 38054125

A Special Project

Submitted in Partial Fulfillment of the

Requirement for the Degree of Bachelor of Science

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

1998

ชื่อหัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัส
โดย	นายคมศักดิ์ ศรอากาศ รหัสประจำตัว 38054108
	นางสาวเทอดขวัญ ช้างเผือก รหัสประจำตัว 38054124
	นางสาวธัญพร แมนเมธี รหัสประจำตัว 38054125
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ. อุบลวรรณา เงินวิจิตร

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ กรรมการสอบปัญหาพิเศษ ได้ตรวจพิจารณาแล้วจึงอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2541

______________________ หัวหน้าภาควิชา
(รศ. ภัคคินี ชิตสกุล)

______________________ ประธานกรรมการ
(ผศ. พัชรินทร์ เหมโชติ)

______________________ กรรมการ
(ผศ. กฤษฎา ไตรสุรัตน์)

______________________ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา
(รศ. อุบลวรรณา เงินวิจิตร)

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัส		
ชื่อนักศึกษา	นายคมศักดิ์ ศรอากาศ	รหัสประจำตัว	38054108
	นางสาวเทอดขวัญ ช้างเผือก	รหัสประจำตัว	38054124
	นางสาวธัญพร แมนเมธี	รหัสประจำตัว	38054125
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ. อุบลวรรณา เงินวิจิตร		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์		
ปีการศึกษา	2541		

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษหัวข้อเรื่องโปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัสนี้ เป็นการสร้างและพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อนำมาใช้ในการเรียนการสอน และใช้ในการทบทวนความรู้วิชาแคลคูลัส โดยโครงสร้างของโปรแกรมประกอบด้วยส่วนที่เป็นเนื้อหาวิชาเพื่อใช้ในการเรียนการสอน ส่วนของตัวอย่างโจทย์ที่อธิบายการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัสอย่างละเอียด โดยผู้เรียนสามารถโต้ตอบกับคอมพิวเตอร์ได้ และส่วนสุดท้ายเป็นแบบทดสอบเพื่อให้ผู้เรียนได้ประเมินผลความรู้ของตนเองหลังจากที่ได้เรียนเนื้อหาวิชา และฝึกฝนจากตัวอย่างโจทย์แล้ว

โปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัสนี้ ช่วยทำให้ผู้ใช้เกิดความสะดวก รวดเร็ว ในการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส อีกทั้งยังเป็นที่น่าสนใจมากกว่าการที่ผู้เรียนต้องเรียนจากหนังสืออย่างเดียว

Special Project Title	Computer Assisted Instruction in Calculus
Name	Mr. Komsak Sornargard Code 38054108
	Miss. Thurdkwan Changpoek Code 38054124
	Miss. Thanyaporn Manmaetee Code 38054125
Special Project Advisor	Assoc. Prof. Ubolwanna Ngernwichit
Department	Mathematics and Computer Science
Acadamic Year	1998

ABSTRACT

This special project, the calculus teaching programme, focuses on the invention and development of the computer programme which could facilitate calculus teaching, studying and revising. The structure of the programme could be divided into 3 parts. The first part consists of theorematic contents for both teaching and studying. The second part comprises detailed sample questions and answers which allows users to interact with the computer. The last part provides user a set of self-tests to evaluate users' understanding of calculus after their studies and practices.

The calculus teaching programme would ultimately provides users convenience and speed in both teaching and studying calculus. It is more interesting than studying from textbooks only.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี เพราะความช่วยเหลือ และเอื้อเฟื้อจากบุคคลต่อไปนี้

รศ. อุบลวรรณา เงินวิจิตร ที่ช่วยให้แนวทางในการพัฒนาโปรแกรม รวมถึงหนังสือ และอุปกรณ์ต่างๆ ในการทำปัญหาพิเศษ

ขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่าน ที่ได้ประสาทวิชา ความรู้ทั้งในภาคทฤษฎี ภาคปฏิบัติแก่ผู้จัดทำ จนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณ

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

แคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่ง ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อวิทยาการแขนงต่างๆมากมาย และเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง จึงเป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง นักเรียนนักศึกษารวมทั้งผู้ที่สนใจหลายท่านยังอาจมีความไม่เข้าใจ หรือต้องการทบทวนเรียนรู้เนื้อหาในวิชานี้เพิ่มเติม และปัจจุบันคอมพิวเตอร์ได้เข้ามามีบทบาทในวงการการศึกษาอย่างมาก เนื่องจากคอมพิวเตอร์เป็นสิ่งอำนวยความสะดวก รวดเร็ว และมีประสิทธิภาพต่อการใช้งานในด้านต่าง ๆ ดังนั้น เราจึงมีความต้องการที่จะพัฒนาโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส เพื่อช่วยเสริมสร้างความรู้ความเข้าใจ และใช้แก้ปัญหาวิชาแคลคูลัสได้ง่ายและสะดวกยิ่งขึ้น โดยโปรแกรมสำเร็จที่พัฒนาขึ้นนี้สามารถใช้เป็นสื่อในการเรียนการสอนแก่นักเรียนนักศึกษา อีกทั้งผู้ที่มีความสนใจยังสามารถศึกษาเรียนรู้ได้ด้วยตนเองโดยไม่ต้องไปนั่งเรียน

วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อความสะดวกและเกิดการคล่องตัวในการแก้ปัญหาวิชาแคลคูลัส
2. เพื่อให้ผู้ใช้สามารถศึกษาวิชาแคลคูลัสได้ด้วยตนเอง
3. ใช้เป็นสื่อในการสอนวิชาแคลคูลัส

ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

จัดทำสื่อการสอนวิชาแคลคูลัสโดย

1. ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของวิชาแคลคูลัส
2. จัดทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบเกี่ยวกับเนื้อหาบทเรียนต่างๆ
3. ศึกษาการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยโปรแกรม Toolbook

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ช่วยอำนวยความสะดวกในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับวิชาแคลคูลัสให้แก่ผู้เรียน
2. ช่วยฝึกฝนความชำนาญในการแก้ปัญหาวิชาแคลคูลัส
3. ได้โปรแกรมสำเร็จเพื่อความสะดวกและง่ายต่อการแก้ปัญหาวิชาแคลคูลัส
4. เพื่อพัฒนาระบบสื่อการสอน เป็นการเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น

ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษารายละเอียดวิชาแคลคูลัส ในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์ การอินทิเกรตและการประยุกต์
2. สร้างโปรแกรมงานสื่อการสอนวิชาแคลคูลัส
3. ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นให้มีประสิทธิภาพ
4. จัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

ตารางแผนการทำงาน

	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
ศึกษา รวบรวมเนื้อหา และแบบทดสอบวิชาแคลคูลัส					
เขียนรูปแบบผังงานโครงสร้างโปรแกรม					
พิมพ์เนื้อหาและแบบทดสอบ รวมทั้งสร้างโปรแกรม					
ทดสอบโปรแกรม และทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ					

บทที่ 2
คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

ความสำคัญในการพัฒนาคุณภาพการศึกษาก็คือ การประยุกต์เทคโนโลยีใหม่ ๆ ในด้านต่าง ๆ มาช่วยเสริมการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ปัจจุบันกล่าวได้ว่าคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนเป็นเทคโนโลยีหนึ่งที่ครูอาจารย์ให้ความสนใจ เนื่องจากคอมพิวเตอร์มีคุณสมบัติในการมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน ซึ่งสื่ออื่น ๆ ขาดคุณสมบัติข้อนี้

ในขณะนี้ประเทศไทย มีความตื่นตัวในการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอนเป็นอย่างมาก ดังจะเห็นได้จากการมีหลักสูตรวิชาคอมพิวเตอร์ในระดับโรงเรียนเพิ่มจากวิชาอื่น ๆ นอกจากนี้ยังได้มีการพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในวิชาต่าง ๆ เพิ่มมากขึ้น ดังจะเห็นได้จากการที่หน่วยงานภาครัฐและเอกชนมีการนำเสนอผลงานบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในการจัดประชุมทางวิชาการเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นประจำทุกปี นับแต่ปี พ.ศ. 2529 เป็นต้นมา แต่เป็นที่น่าสังเกตว่าในช่วงเวลาที่ผ่านมาดังกล่าว การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนยังมีไม่มากและแพร่หลายเท่าที่ควร ทั้งนี้อาจจะเนื่องมาจากระบบคอมพิวเตอร์มีพัฒนาการที่รวดเร็วมาก ทำให้บทเรียนที่พัฒนาขึ้นไม่สามารถไปด้วยกันกับระบบคอมพิวเตอร์ หรือใช้ด้วยกันไม่ได้ อีกทั้งราคายังอยู่ในระดับที่โรงเรียนทั่ว ๆ ไป ไม่สามารถจัดหามาใช้ได้

ปัจจุบันพัฒนาการของระบบคอมพิวเตอร์อยู่ในรูปของมัลติมีเดีย ที่มีการแสดงผลในรูปของแสง สี เสียง ภาพเคลื่อนไหว และการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับบทเรียน ทำให้มีความน่าสนใจมากขึ้นต่อการนำคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนมาประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอน ที่ผู้เรียนสามารถรับประสบการณ์ผ่านประสาทสัมผัสทั้ง 5 ซึ่งจะช่วยส่งผลต่อการเกิดความรู้ความเข้าใจในบทเรียนที่ศึกษา

ความเป็นมาของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

เมื่อพิจารณาถึงความเป็นมาของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน ในระยะเวลากว่า 20 ปีที่ผ่านมา การเรียนการสอนแบบโปรแกรม ได้รับความสนใจว่าเป็นวิธีการที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดีขึ้น เนื่องจากการเรียนการสอนวิธีนี้มีหลักการพื้นฐานของการใช้ทฤษฎีและหลักจิตวิทยาการเรียนรู้ที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล มีการให้แรงเสริม และการให้ข้อมูลป้อนกลับแก่ผู้เรียน การเรียนการสอนในลักษณะนี้ นอกจากจะใช้สื่อการเรียนการสอนในรูปเอกสารแล้ว ได้มีผู้พยายามสร้างเครื่องสอน (teaching machine) เพื่อนำเสนอบทเรียนแบบ

โปรแกรมอีกด้วย และเมื่อคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทในวงการศึกษา บทเรียนแบบโปรแกรมจึงมีการพัฒนามาอยู่บนจอคอมพิวเตอร์ ในลักษณะการเสนอบทเรียนในรูปของหนังสืออิเลคทรอนิคส์ (electronic book) และทำให้เกิดรูปแบบการเรียนการสอนที่เรียกว่าคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน (Computer Assisted Instruction) และเรียกย่อ ๆ ว่า CAI ขึ้น

รูปแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

CAI แบบฝึกฝนและฝึกหัด

CAI รูปแบบนี้เป็นรูปแบบที่พบเห็นกันทั่วไป ลักษณะของบทเรียนมักเป็นการให้โจทย์แล้วถามคำถาม ถ้าตอบผิดก็จะอธิบายการตอบผิดอย่างไร ให้ลองตอบดูใหม่ ถ้าตอบถูกก็จะเสริมแรงว่าทำถูก หรือให้คำชมเชย แล้วจึงขึ้นคำถามใหม่

CAI แบบทบทวนความรู้

เป็น CAI รูปแบบที่พยายามใช้คอมพิวเตอร์แทนครู ในการดำเนินการทบทวนเนื้อหาวิชาความรู้ที่ได้เรียนไปแล้ว ในลักษณะเช่นเดียวกับการเรียนพิเศษนอกเวลาชั่วโมงเรียนปกติ ลักษณะของบทเรียนมักเป็นการให้เนื้อหาและรูปภาพประกอบบนจอภาพ เมื่อให้เนื้อหาเป็นพื้นฐานแล้ว ก็จะมีคำถามเพื่อให้ผู้เรียนตอบ หรือให้โจทย์ผู้เรียนทำ ถ้าผู้เรียนตอบหรือทำได้ถูก คอมพิวเตอร์จะสอนเนื้อหาต่อไป แต่ถ้าผู้เรียนตอบหรือทำโจทย์ผิด คอมพิวเตอร์อาจจะย้อนกลับมายังเนื้อหาที่เรียนแล้ว หรือไปยังเนื้อหาที่เป็นส่วนซ่อมเสริม ขึ้นอยู่กับลักษณะการตอบผิดถูกในคำถามนั้น ๆ

CAI แบบสถานการณ์จำลอง

CAI รูปแบบนี้เป็นรูปแบบที่พยายามเลียนแบบกระบวนการที่จะเกิดขึ้นจริง โดยการจำลองสถานการณ์ที่จะเกิดขึ้นนั้นให้ปรากฏ เช่น จำลองการขับเครื่องบิน จำลองการประกอบธุรกิจขนาดเล็ก จำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคของอะตอม หรือจำลองการเคลื่อนที่ของกระแสประสาท เป็นต้น สถานการณ์จำลองดังกล่าวนี้ช่วยให้ผู้เรียนได้มีโอกาสรับประสบการณ์ในสิ่งที่จะเกิดขึ้นจริง หรือในสิ่งที่เป็นนามธรรม โดยปกติทั่วไปอธิบายให้เข้าใจได้ยาก และช่วยให้เกิดความปลอดภัยในกรณีที่เป็นการเรียนรู้หรือการให้ประสบการณ์ที่ต้องเสี่ยงภัยกับความเสียหายหรือความล้มเหลวที่จะเกิดขึ้น เป็นการช่วยลดค่าใช้จ่ายได้เป็นอย่างมาก นอกจากนี้ยังสามารถขยายหรือลดเวลาเรียนให้เหมาะกับผู้เรียนแต่ละคนด้วย

การจำลองสถานการณ์โดยใช้คอมพิวเตอร์จึงเป็นการเรียนการสอนที่ช่วยให้เข้าใจในสิ่งที่ยากต่อการเรียนรู้ การสร้างบทเรียนในลักษณะนี้จะต้องสะท้อนกระบวนการที่เกิดขึ้นอย่างถูกต้องตามหลักวิชา จึงจะเป็นบทเรียนที่มีประสิทธิภาพได้

CAI แบบเกม

CAI รูปแบบเกมมีพื้นฐานมาจากธรรมชาติของผู้เรียนที่ชอบการแข่งขัน เมื่อมีสิ่งท้าทายให้แข่งกันก็จะเป็นแรงจูงใจให้สนใจเรียนเพิ่มขึ้น เช่น เรียนพิมพ์ดีด โดยเล่นเกมยิงตัวอักษรที่พิมพ์ได้เพื่อเก็บคะแนน การสะกดคำพิมพ์ภาษาอังกฤษให้ถูกต้องก่อนเวลาหมด การตอบโจทย์ปัญหาแข่งขันกัน เป็นต้น

CAI แบบหนังสืออิเล็คทรอนิคส์

CAI รูปแบบหนังสืออิเล็คทรอนิคส์ มีพื้นฐานมาจากการจำลองบทเรียนในลักษณะที่ปรากฏในหนังสือแบบเรียน จึงมีส่วนประกอบที่คล้ายคลึงกับส่วนประกอบของหนังสือแบบเรียน คือ ปก คำนำ สารบัญ แบบฝึกหัด เป็นต้น

CAI แบบกำหนดสถานการณ์ให้แก้ปัญหา

CAI รูปแบบกำหนดสถานการณ์ให้แก้ปัญหา เป็นการนำเสนอสถานการณ์ให้ผู้เรียนศึกษาแล้วตอบคำถาม เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์นั้น ๆ

CAI แบบวินิจฉัยข้อบกพร่อง

CAI รูปแบบวินิจฉัยข้อบกพร่อง เป็นการถามคำถาม หรือทดสอบนักเรียน เพื่อดูว่าผู้เรียนยังมีจุดบกพร่องในมโนทัศน์นั้น ๆ อย่างไร แล้วดำเนินแก้ไขข้อบกพร่องที่พบนั้น

คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนสามารถนำไปใช้ช่วยการเรียนการสอนหลายรูปแบบ และในการนำไปใช้นั้นจะต้องมีส่วนประกอบสำคัญ คือ ระบบคอมพิวเตอร์ หรือฮาร์ดแวร์ และบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน สำหรับโปรแกรมประยุกต์ที่มีบทบาทเกี่ยวข้องกับการสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน คือ โปรแกรมระบบช่วยสร้างบทเรียน เช่น โปรแกรม Tool Book , Autoware Professional , Director , และ Hypercard เป็นต้น

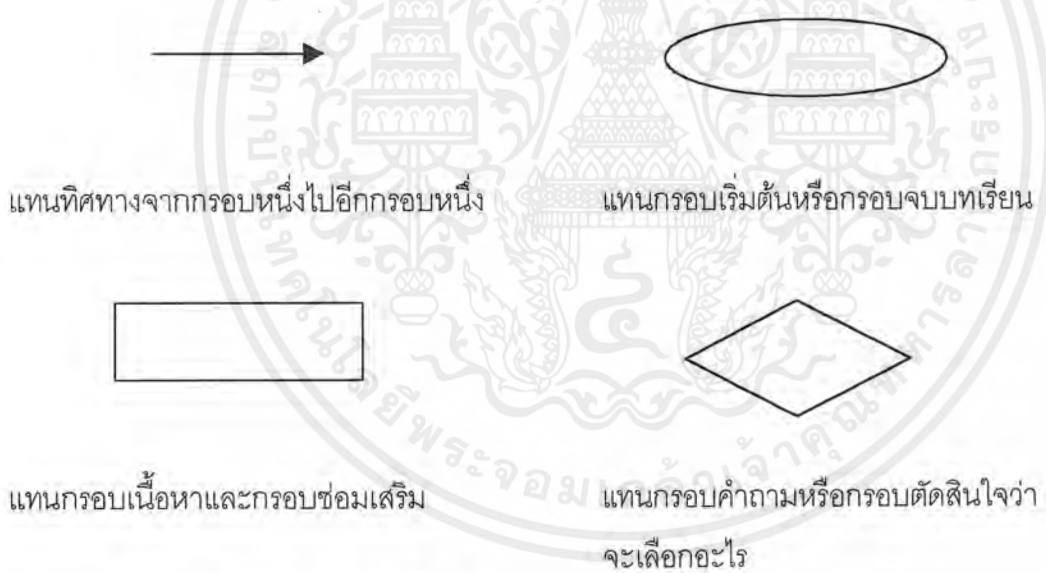
ผังโครงสร้างบทเรียน

การนำคอมพิวเตอร์ไปใช้ช่วยการเรียนการสอนจะต้องมีองค์ประกอบสำคัญ คือ ต้องมีฮาร์ดแวร์ หรือระบบคอมพิวเตอร์ และบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน ในที่นี้จะเรียกสั้น ๆ ว่า บทเรียน CAI

การสร้างบทเรียน CAI ควรดำเนินการโดยกำหนดผังโครงสร้างบทเรียน ซึ่งจะช่วยให้การสร้างบทเรียนเป็นไปตามรูปแบบที่ต้องการนำบทเรียน CAI ไปใช้

การออกแบบผังโครงสร้างบทเรียน

การออกแบบผังโครงสร้างบทเรียนวิธีหนึ่งคือ การเขียนผังการทำงานของบทเรียน จะช่วยให้ผู้สร้างบทเรียนมีความเข้าใจชัดเจนขึ้นว่าควรจะสร้างบทเรียนและเขียนผังการทำงานของบทเรียนอย่างไร โดยทั่วไปแล้วนิยมเขียนผังการทำงานของโปรแกรมบทเรียนโดยใช้รูปสัญลักษณ์แทนความหมายของแต่ละกรอบบทเรียน สัญลักษณ์ ที่ใช้มีดังแสดงในภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 แสดงสัญลักษณ์ในการวางผังโครงสร้างบทเรียน

รูปแบบผังโครงสร้างบทเรียน

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน มีลักษณะ 2 รูปแบบใหญ่ ๆ คือ

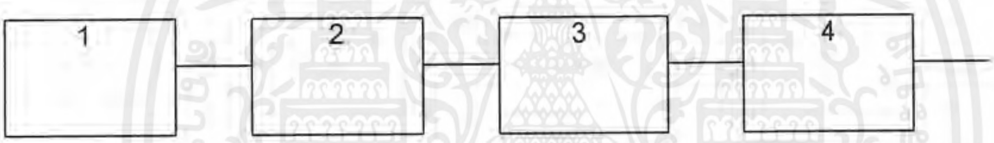
1. แบบเส้นทางเดียว (Linear program)
2. แบบแตกกิ่ง (Branching program)

แบบเส้นทางเดียว

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนลักษณะนี้ เป็นการสร้างกรอบบทเรียนที่มีลำดับการตอบสนองอย่างต่อเนื่อง เป็นเทคนิควิธีการที่สร้างได้ง่าย ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาหรือกรอบคำถามเรียงต่อกันไปในทิศทางเดินทางเดียว

ลักษณะผังโครงสร้างบทเรียนดังกล่าวข้างต้นไม่เป็นที่นิยมในปัจจุบันเพราะจัดเรียงเนื้อหาตายตัว ผู้เรียนได้รับหรือต้องเรียนเนื้อหาเหมือนกันหมด ไม่เอื้อต่อความแตกต่างระหว่างบุคคล หากบทเรียนตอบสนองต่อผู้เรียนโดยแตกย่อยเป็นขั้นตอนที่ค่อนข้างละเอียดก็อาจจะทำให้น่าเบื่อสำหรับผู้เรียนได้เร็ว จึงไม่เหมาะกับผู้เรียนที่มีความสามารถต่างกันซึ่งต้องเรียนผ่านกรอบบทเรียนทุกกรอบมาทีละกรอบเหมือนกันทุกคน

ปัจจุบันโปรแกรมระบบช่วยสร้างบทเรียน เอื้อต่อการสร้างบทเรียนทำให้บทเรียนแบบเส้นทางเดียวสามารถดำเนินบทเรียนในลักษณะเดินหน้าไปและย้อยกลับแบบพลิกหน้าได้ ทำให้การดำเนินบทเรียนมีประสิทธ์ภาพดีขึ้น



ภาพที่ 2.2 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบเส้นทางเดียว

แบบแตกกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ได้รับความนิยมจากผู้เรียนมากกว่าผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบเส้นทางเดียว เพราะมีลักษณะท้าทายและน่าสนใจกว่าเหมาะต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนเพราะจะทำให้ทางเลือกตามระดับความรู้ความเข้าใจและความสามารถของผู้เรียน

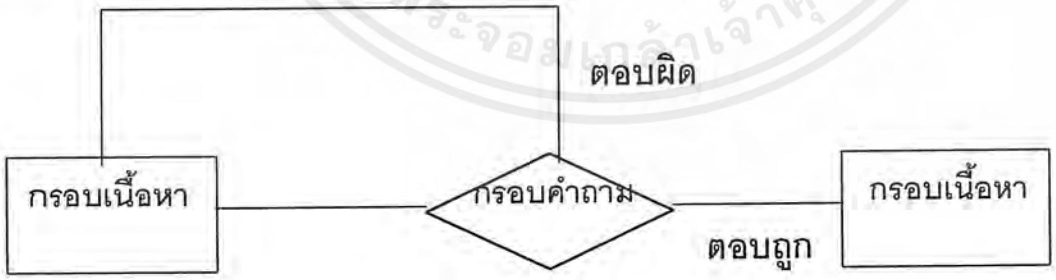
ภาพที่ 2.3 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบแตกกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบแตกกิ่งแยกออกได้หลายรูปแบบดังต่อไปนี้ คือ

1. แบบซ้ำกรอบเดิม (Linear format with repeatition)
2. แบบสอบก่อนข้ามกรอบ (Pretest and skip format)
3. แบบข้ามและย้อนกรอบ (Gate frames)
4. แบบทางเดินหลายเส้น (Multiple tracks)
5. แบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว (Single remedial branch)
6. แบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม (Remedial loops)
7. แบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง (Multiple remedial branches)
8. แบบแตกกิ่งคู่ (Branching frame sequence)
9. แบบกิ่งประกอบ (Compound branches)

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบซ้ำกรอบเดิม

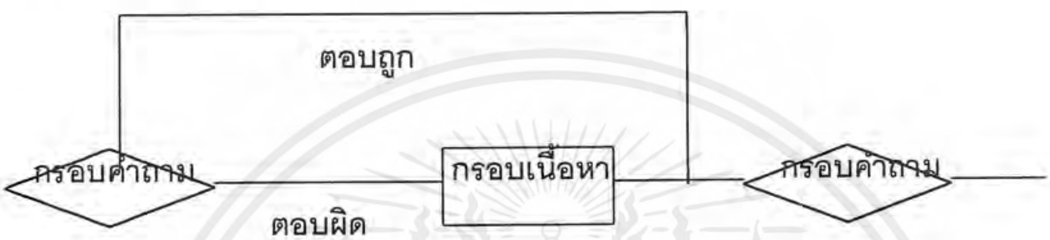
ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนลักษณะนี้คล้ายคลึงกับโครงสร้างแบบเส้นทางเดียวต่างกันตรงที่มีคำถามแทรกระหว่างกรอบเนื้อหา ถ้าผู้เรียนตอบคำถามถูกต้อง ผู้เรียนก็จะได้ผ่านไปยังกรอบเนื้อหาที่อยู่ถัดไป ถ้าตอบไม่ถูกโปรแกรมก็จะให้ผู้เรียนย้อนกลับมายังกรอบเนื้อหาเดิมอีกครั้งและถามคำถามเดิมซ้ำอีก ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะกับ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



ภาพที่ 2.4 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบซ้ำกรอบเดิม

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบทดสอบก่อนข้ามกรอบ

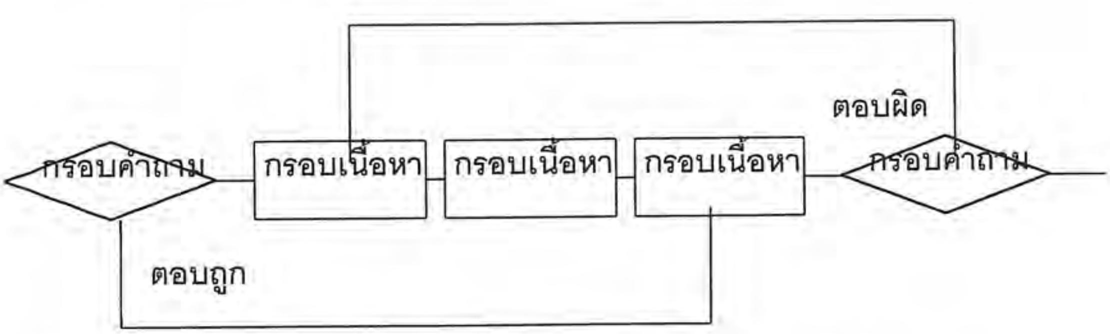
ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ บทเรียนจะทดสอบความรู้ของผู้เรียนก่อนเรียนเนื้อหา ถ้าทดสอบผ่านก็จะข้ามกรอบที่ผู้เรียนรู้เนื้อหานั้นไปยังกรอบเนื้อหาจุดประสงค์อื่น บทเรียนลักษณะนี้จึงมีประสิทธิภาพในการสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล ผังโครงสร้างรูปแบบนี้เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



ภาพที่ 2.5 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบทดสอบก่อนข้ามกรอบ

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบข้ามและย้อนกรอบ

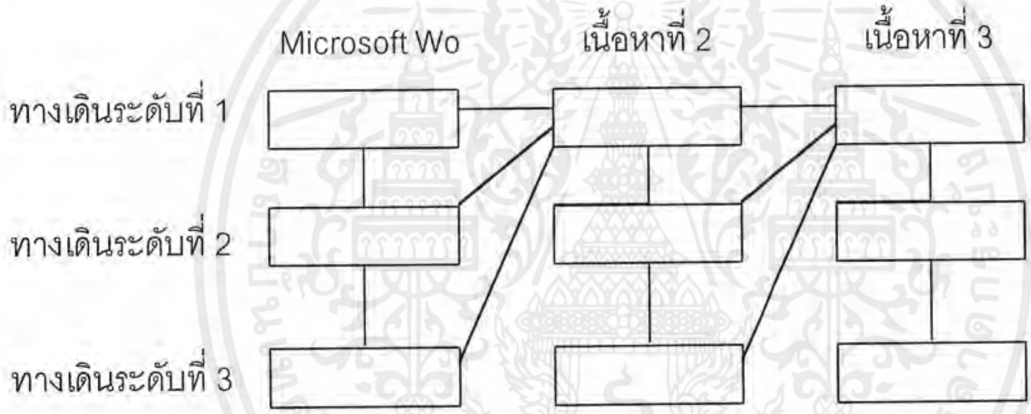
ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้กำหนดให้ผู้เรียนไปยังกรอบบทเรียนต่าง ๆ ตามระดับความสามารถและความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาที่ให้แก่ผู้เรียน มีลักษณะผังโครงสร้างแบบเดียวกับบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบเส้นทางเดียว ผู้เรียนอาจข้ามกรอบไปได้หลายกรอบบทเรียนและบทเรียนอาจส่งผู้เรียนกลับมากรอบที่ผ่านมาแล้วเพื่อทบทวนเนื้อหาบางส่วนใหม่ ถ้าผู้เรียนยังมีความเข้าใจคลาดเคลื่อน ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



ภาพที่ 2.6 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบข้ามกรอบและย้อนกรอบ

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบทางเดินหลายเส้น

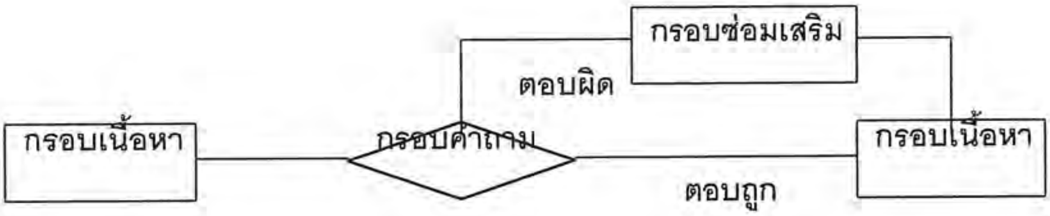
ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนลักษณะนี้ ประกอบด้วยกรอบบทเรียนในเส้นทางเดินหลายระดับ ทางเดินระดับที่ 1 เป็นเส้นทางเดินของกรอบบทเรียนเนื้อหาหลักที่ไม่มีคำอธิบายละเอียดมากมัก ส่วนทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 เป็นกรอบเนื้อหาที่เพิ่มเติมรายละเอียดมากกว่ากรอบที่อยู่ในทางเดินระดับที่ 1 นอกจากนี้ทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 ยังมีเส้นทางเดินมากกว่า 1 เส้นทาง ขึ้นอยู่กับว่าผู้เรียนสามารถเข้าใจเนื้อหาในกรอบทางเดินระดับที่ 1 มากน้อยเพียงใดหรือไม่ กรอบในทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 จะให้เนื้อหาละเอียดจากน้อยไปสู่มากตามลำดับ โดยเนื้อหาในกรอบส่วนนี้จะเป็นเนื้อหาเรื่องเดียวกันเพียงแต่ขยายความหมายของคำบางคำให้ชัดเจนขึ้น ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะต่อ CAI แบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



ภาพที่ 2.7 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบทางเดินหลายเส้น

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว

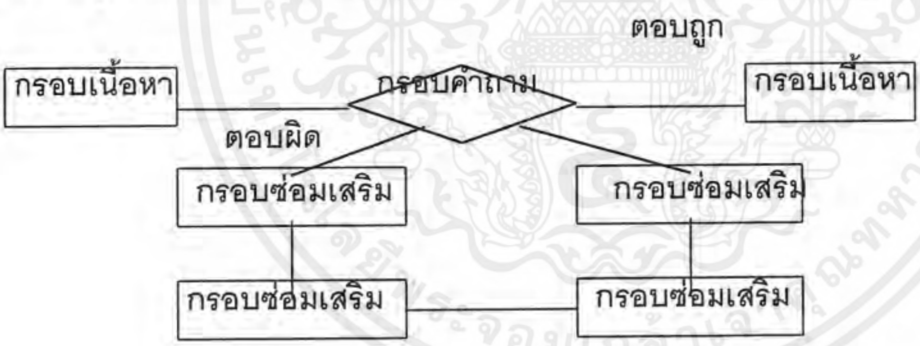
ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้เริ่มด้วยกรอบเนื้อหา ตามด้วยกรอบคำถาม ถ้าผู้เรียนตอบถูกจะได้รับข้อมูลป้อนกลับในทางบวก และเรียนเนื้อหาในกรอบต่อไป หากตอบผิดผู้เรียนก็จะได้รับการสอนซ่อมเสริมก่อนไปเนื้อหากรอบต่อไป ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ และแบบฝึกฝนและฝึกหัด



ภาพที่ 2.8 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม

ลักษณะของผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม มีลักษณะคล้ายคลึงกับบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยวต่างกันตรงที่แทนที่จะแตกออกเป็นกรอบซ่อมเสริมกรอบเดียวกลับมีลักษณะประกอบด้วยกรอบซ่อมเสริมหลายกรอบประกอบกับเป็นชุดบทเรียนย่อย 5 – 6 กรอบ เพื่อให้ความรู้และข้อมูลที่ผู้เรียนยังขาดอยู่ก่อนที่จะส่งผู้เรียนกลับกรอบเนื้อหาเดิม ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ และแบบฝึกฝนและฝึกหัด

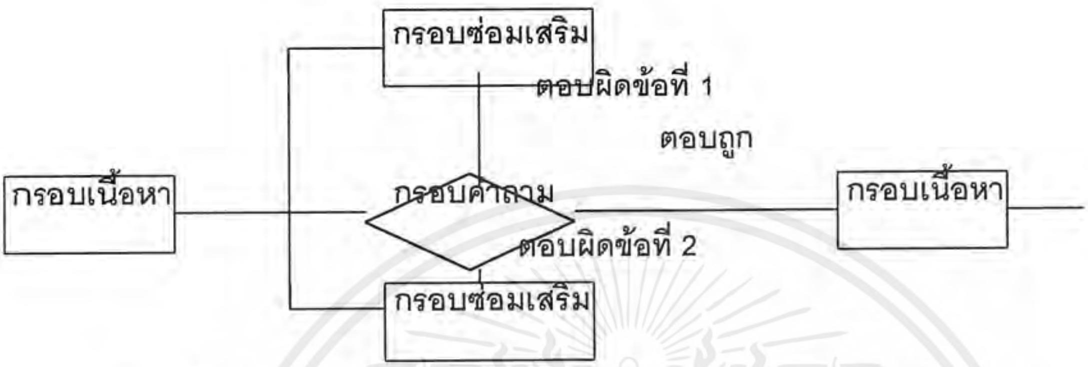


ภาพที่ 2.9 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาที่ให้ข้อมูล แล้วตามด้วยกรอบคำถามที่แตกเป็นกรอบซ่อมเสริมตั้งแต่ 2 กรอบขึ้นไป กรอบคำถามแต่ละกรอบจะมีกิ่งแยกออกมาตามจำนวนข้อของตัวเลือกในคำถามแบบเลือกตอบนั้นโดยแยกออกมาอย่างน้อย 2 กิ่ง เพื่อไปยังกรอบซ่อมเสริม แล้วจึงจะส่งผู้เรียนมายังกรอบคำถามเดิม เพื่อให้ผู้เรียนตอบคำถามในกรอบนั้นใหม่ และเลือกคำตอบอื่น ดังนั้นจะมีคำตอบที่ถูกต้องอยู่เพียง 1 คำตอบ คำตอบที่ผู้

เรียนเลือกจะเป็นตัวกำหนดบทเรียนว่าจะไปกรอบใดต่อไป นั่นคือถ้าผู้เรียนตอบถูกต้องก็จะไปยังกรอบเนื้อหาใหม่ต่อไป แต่ถ้าผู้เรียนตอบผิด บทเรียนก็จะไปยังกรอบซ่อมเสริมก่อนจะกลับมายังคำถามเดิมใหม่ ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ และแบบฝึกฝนและฝึกหัด



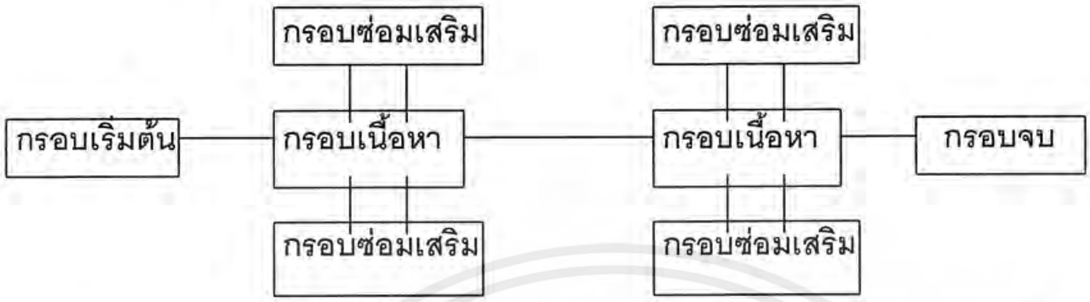
ภาพที่ 2.10 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบแตกกิ่งคู่

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาที่แตกเป็นกรอบซ่อมเสริมสองกรอบ ถ้าผู้เรียนตอบคำถามของกรอบเนื้อหาได้ถูกต้องจะทำให้ผู้เรียนผ่านจากกรอบเนื้อหาหนึ่งไปยังอีกกรอบเนื้อหาหนึ่ง กรอบเนื้อหาแต่ละกรอบจะแสดงข้อความ 1 – 2 ย่อหน้า ซึ่งจะเป็นข้อมูลที่ผู้เรียนนำมาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์การแก้ปัญหาและเลือกคำตอบที่มีอยู่ 3 คำตอบ โดยมีคำตอบที่ถูกต้องอยู่เพียง 1 คำตอบ คำตอบที่ผู้เรียนเลือกจะเป็นตัวกำหนดว่าจะให้กรอบใดเป็นกรอบต่อไป ถ้าผู้เรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้อง ก็จะไปยังเนื้อหากรอบต่อไป แต่ถ้าตอบผิดก็จะต้องไปยังกรอบซ่อมเสริมแล้วจึงกลับมายังกรอบเนื้อหาเดิมเพื่อศึกษาและตอบคำถามใหม่อีกครั้ง ดังนั้นการตอบสนองที่ถูกต้องของผู้เรียนขึ้นอยู่กับความรู้และความเข้าใจในเนื้อหาและความสามารถในการประยุกต์ข้อมูลที่ได้รับในกรอบนั้น ๆ ผู้เรียนบางคนอาจต้องผ่านทั้งกรอบเนื้อหาและกรอบซ่อมเสริมทุกกรอบ บางคนก็ผ่านกรอบเนื้อหาและกรอบซ่อมเสริมเพียงบางกรอบ

กรอบเนื้อหาควรมีข้อความที่แสดงให้ผู้เรียนทราบว่าผู้เรียนตอบถูกโดยให้คำชมเชย เช่น ดีมาก เยี่ยมมาก ก่อนที่จะเริ่มเข้าสู่ย่อหน้าของเนื้อหาต่อไป ตามด้วยคำถามจากสถานการณ์ที่เป็นปัญหา พร้อมให้เลือกตอบสนองจากตัวเลือก 3 ตัว ส่วนกรอบซ่อมเสริมควรมีข้อความเริ่มต้นที่แสดงให้ผู้เรียนทราบว่าตอบผิดในลักษณะที่ไม่ทำให้ผู้เรียนเสียกำลังใจ เช่น น่าเสียดายที่ตอบผิดไปนิดหนึ่ง เกือบถูก เป็นต้น ตามด้วยคำอธิบายว่าเหตุใดข้อนี้ไม่ใช่คำตอบที่ถูกและให้ข้อความเชิงชี้แนะว่าคำตอบที่ถูกควรเป็นอย่างไร แต่ไม่บอกให้ทราบคำตอบที่ถูกโดยตรง ประโยค

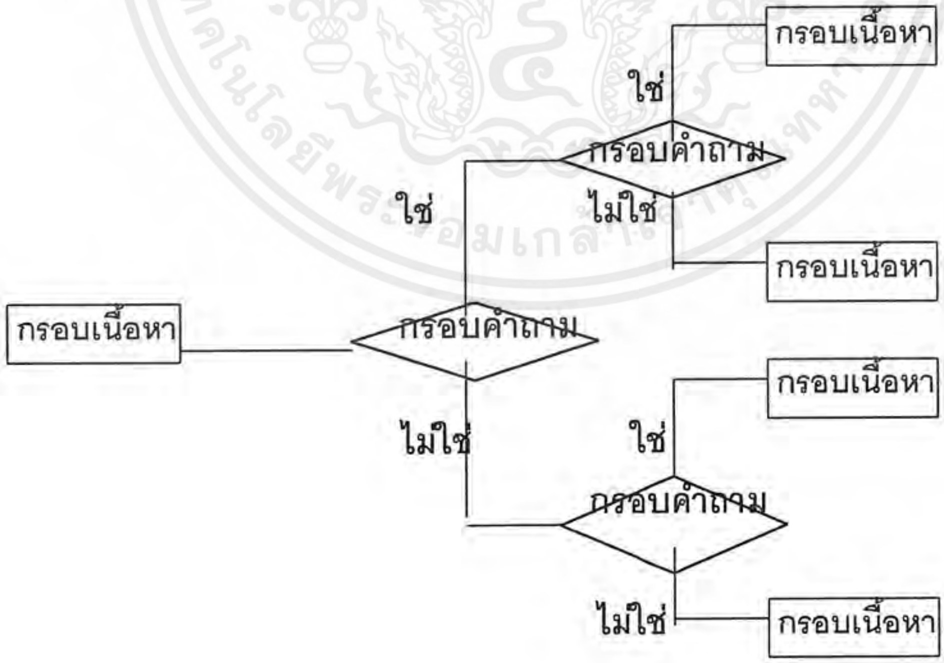
สุดท้ายในกรอบซ่อมเสริมควรเป็นข้อความที่ให้ผู้เรียนได้ทราบว่าจะกลับไปยังกรอบเนื้อหากรอบเดิมให้อ่านเนื้อหาใหม่อีกครั้ง ผังโครงสร้างรูปแบบนี้ เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



ภาพที่ 2.11 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบแตกกิ่งคู่

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบกิ่งประกอบ

ผังโครงสร้างบทเรียนรูปแบบนี้ใช้กันมากในการเรียนเพื่อวินิจฉัยข้อบกพร่องของผู้เรียน หรือในสถานการณ์การแก้ปัญหา คำถามอยู่ในรูปแบบที่มีคำตอบใช่หรือไม่ใช่ กิ่งที่แยกจากแต่ละกรอบคำถามจะแยกไปสู่กรอบเนื้อหาใหม่ตามพื้นฐานความรู้ความเข้าใจและความสามารถที่แตกต่างกันระหว่างบุคคล



ภาพที่ 2.12 แสดงผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนแบบกิ่งประกอบ

ผังโครงสร้างบทเรียนดังกล่าวข้างต้น จะสัมพันธ์กับรูปแบบของ CAI ที่นำไปใช้ ซึ่งสามารถเลือกได้หลายรูปแบบ และอาจประยุกต์โดยนำแบบต่าง ๆ มาประสมประสาน หรือกำหนดผังโครงสร้างเองใหม่ที่คิดว่าจะเหมาะต่อการเรียนรู้ของผู้เรียน

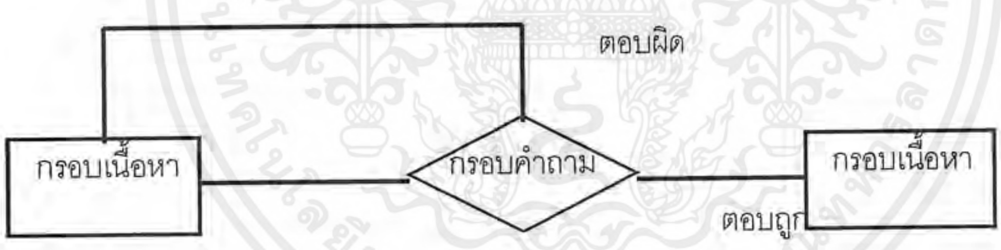
บทที่ 3
การสร้างและพัฒนาโปรแกรม

รูปแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

จากรูปแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอนที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 จะเห็นว่ามีรูปแบบให้เราสามารถเลือกนำมาใช้ได้อย่างมากมาย ส่วนในโปรแกรมนี้ได้ใช้รูปแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน***แบบทบทวนความรู้***

รูปแบบผังโครงสร้างบทเรียน

จากรูปแบบผังโครงสร้างบทเรียนที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 จะเห็นว่ามีรูปแบบให้เราสามารถเลือกนำมาใช้ได้อย่างมากมาย ส่วนในโปรแกรมนี้ได้ใช้รูปแบบผังโครงสร้างบทเรียน***แบบซ้ำกรอบเดิม*** เพื่อนำมาใช้ในการสร้างและพัฒนาโปรแกรม



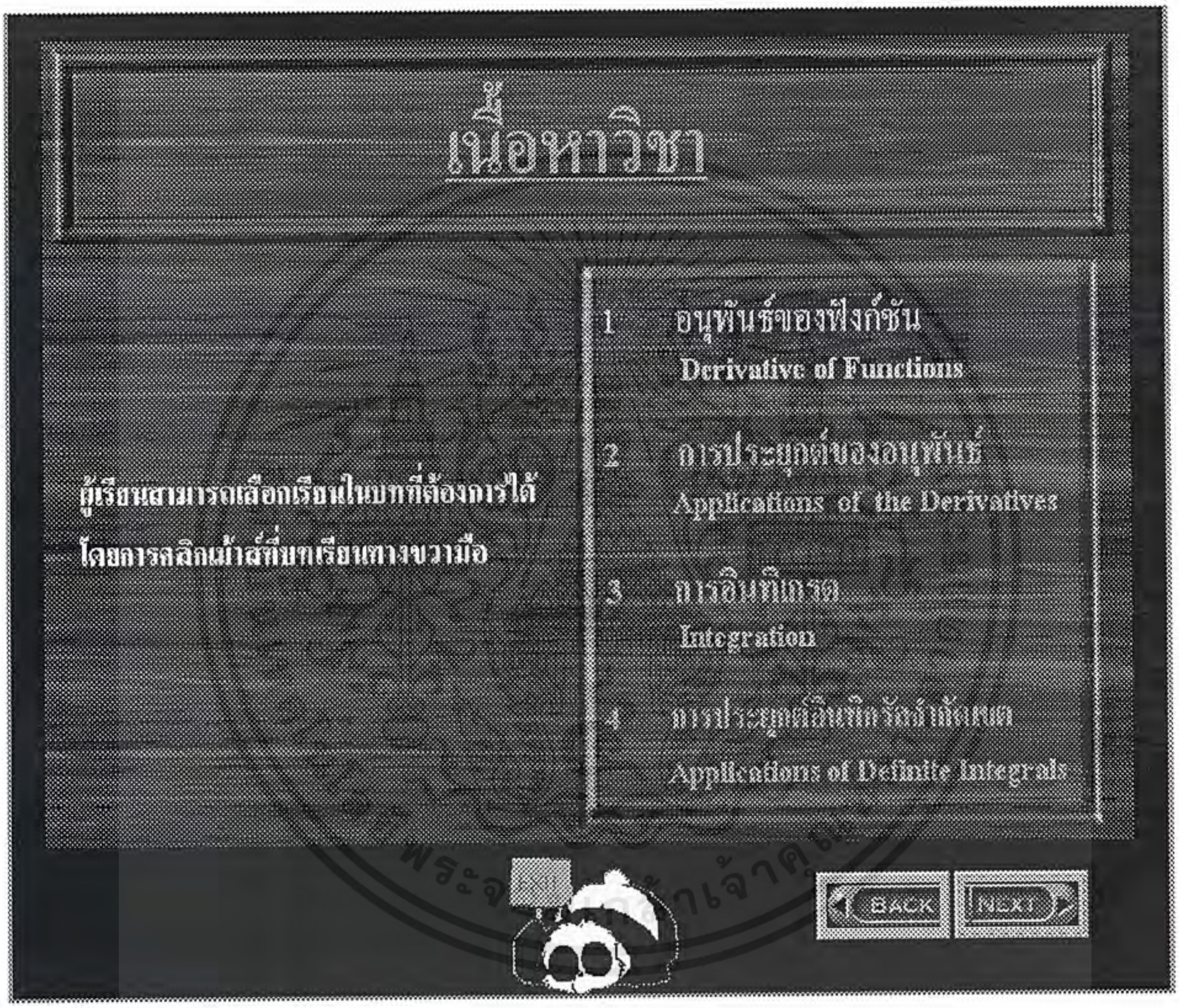
ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์แบบซ้ำกรอบเดิม

โครงสร้างของโปรแกรม

โปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัสประกอบด้วยโครงสร้างหลักต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ส่วนหน้าจอเมนูหลัก

สำหรับหน้าจอนี้จะสามารถให้ผู้เรียนใช้เม้าส์คลิกเลือกเรียนในเนื้อหาเรื่องที่ตนสนใจได้ หน้าจอนี้แสดงไว้ในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1

หลังจากที่เรียนในบทนั้น ๆ จบแล้ว จะต้องคลิกเม้าส์ที่ปุ่มเมนูเพื่อกลับมายังหน้าจอเมนูหลัก เพื่อเลือกเรียนในบทอื่น ๆต่อไป ดังแสดงในรูปที่ 3.2

รูปที่ 3.2

ส่วนแสดงข้อมูล

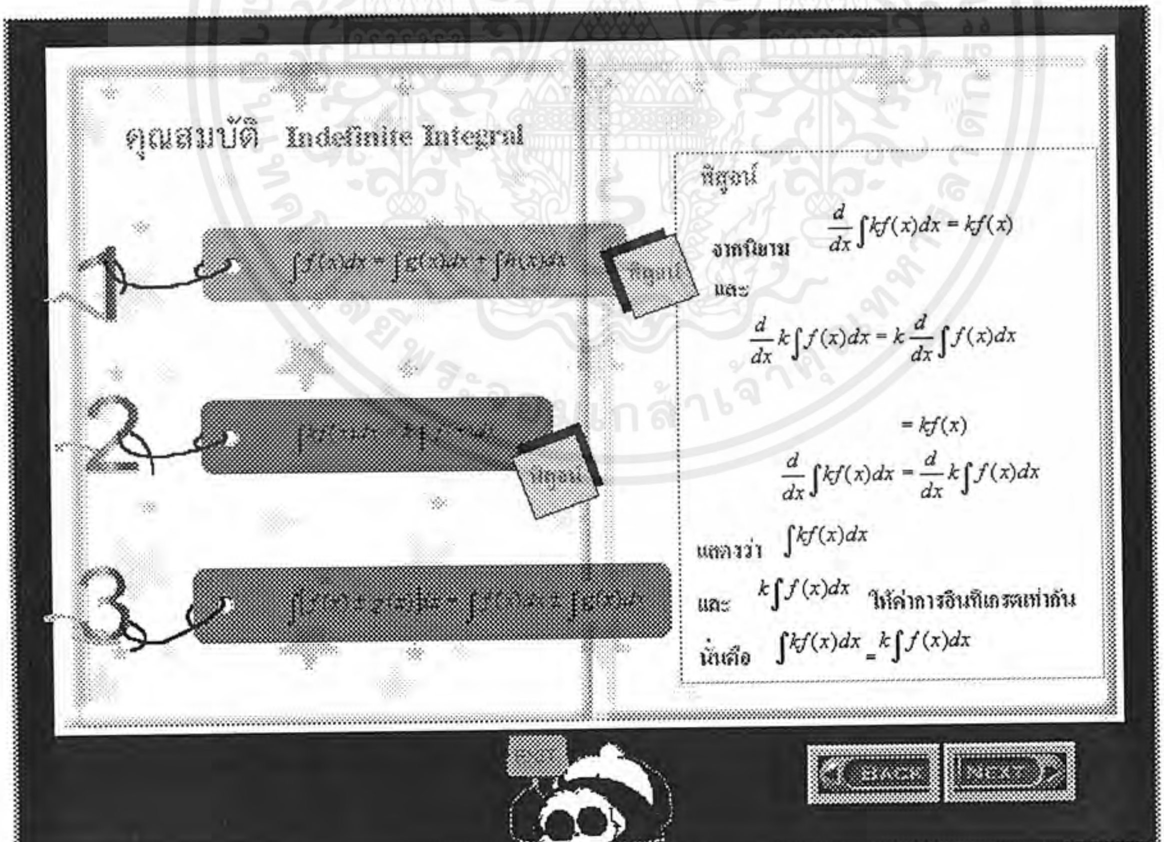
สำหรับส่วนนี้เป็นการแสดงข้อมูลของโปรแกรมออกทางหน้าจอคอมพิวเตอร์ ซึ่งข้อมูลนี้แบ่งย่อยได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. ข้อมูลที่เป็นเนื้อหาแคลคูลัส
2. ข้อมูลที่เป็นตัวอย่างโจทย์แบบฝึกหัด
3. ข้อมูลที่เป็นแบบทดสอบ

ข้อมูลที่เป็นเนื้อหาแคลคูลัส

ข้อมูลประเภทนี้จะแสดงเนื้อหาบทเรียนแยกในแต่ละบท และในแต่ละบทแบ่งเป็นเรื่องย่อย ๆ โดยจะแสดงทีละหน้าจอจนจบบทเรียนนั้น ๆ ซึ่งเนื้อหาในแต่ละบทจะประกอบไปด้วยนิยาม ทฤษฎีบท สูตรที่ใช้ และรูปภาพประกอบ

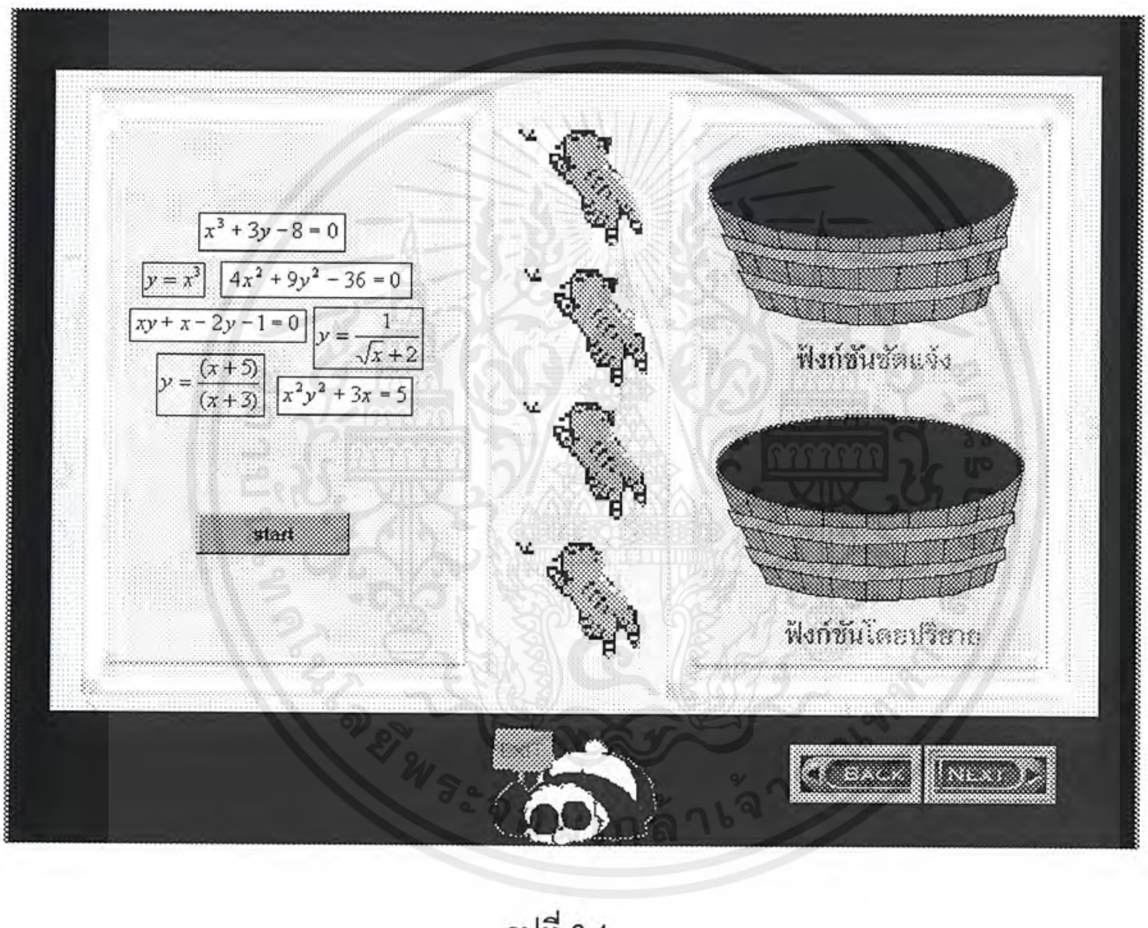
การตกแต่งหน้าจอนั้นใช้สีและภาพจากโปรแกรม Toolbook และนำภาพมาจากไฟล์อื่นด้วย เช่น ไฟล์ที่มีจุด bmp , จุด ico และจากเวบไซต์ทางอินเตอร์เนต ตัวอย่างหน้าจอนี้แสดงให้เห็นดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3

ข้อมูลที่เป็นตัวอย่างโจทย์แบบฝึกหัด

ข้อมูลประเภทนี้จะเน้นให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัสอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน โดยลักษณะของโจทย์แบบฝึกหัดในการถามตอบจะมีลักษณะแตกต่างกันออกไป ลักษณะพิเศษของข้อมูลส่วนนี้ คือ ผู้เรียนสามารถมีปฏิสัมพันธ์กับคอมพิวเตอร์ได้ ตัวอย่างหน้าจอนี้แสดงให้เห็นดังรูปที่ 3.4

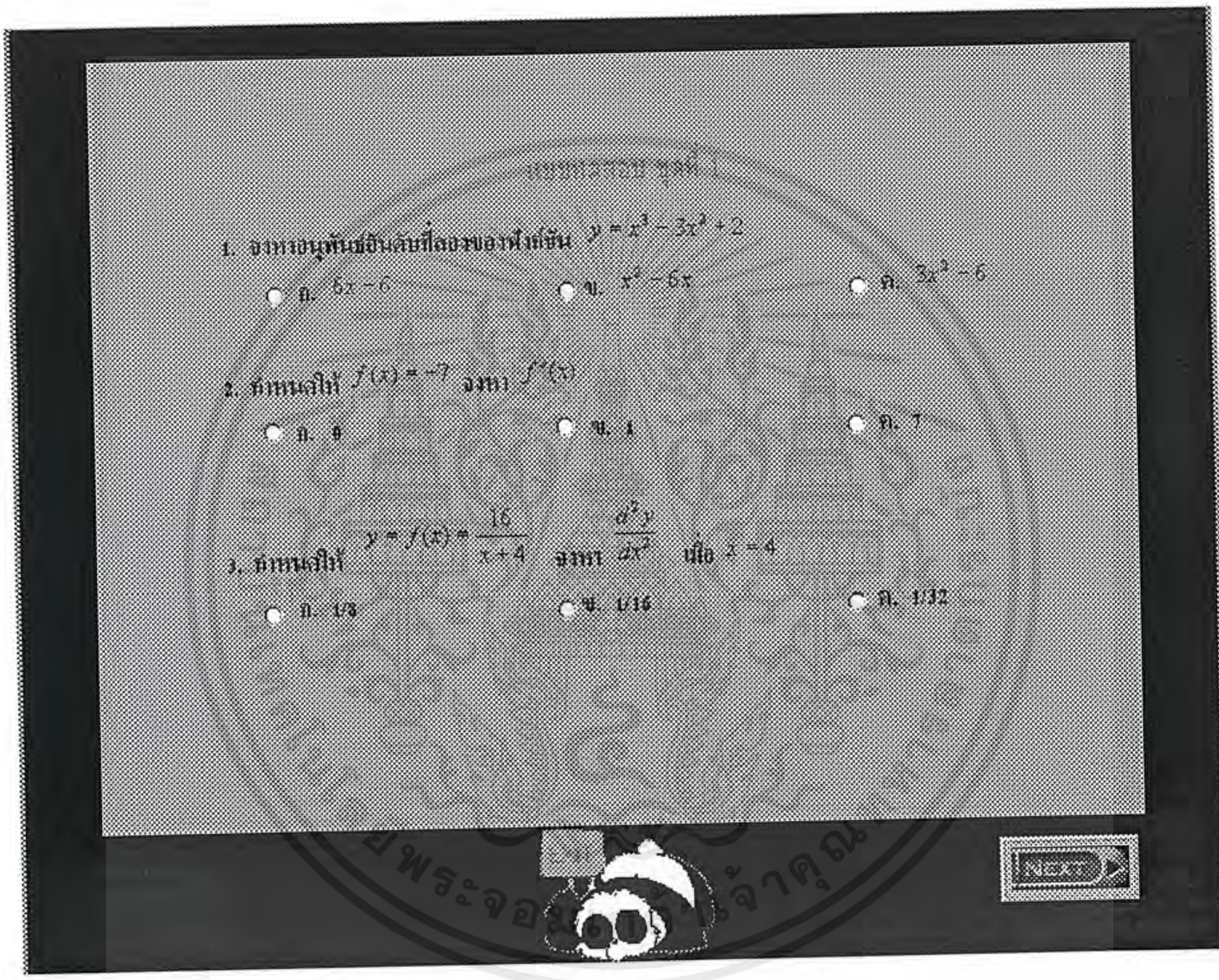


รูปที่ 3.4

การตกแต่งหน้าจอทำเช่นเดียวกับข้อมูลที่เป็นเนื้อหาแคลคูลัส แต่ส่วนที่แตกต่างและทำให้ดูน่าสนใจยิ่งขึ้น คือ การมีมัลติมีเดียประเภทเสียง

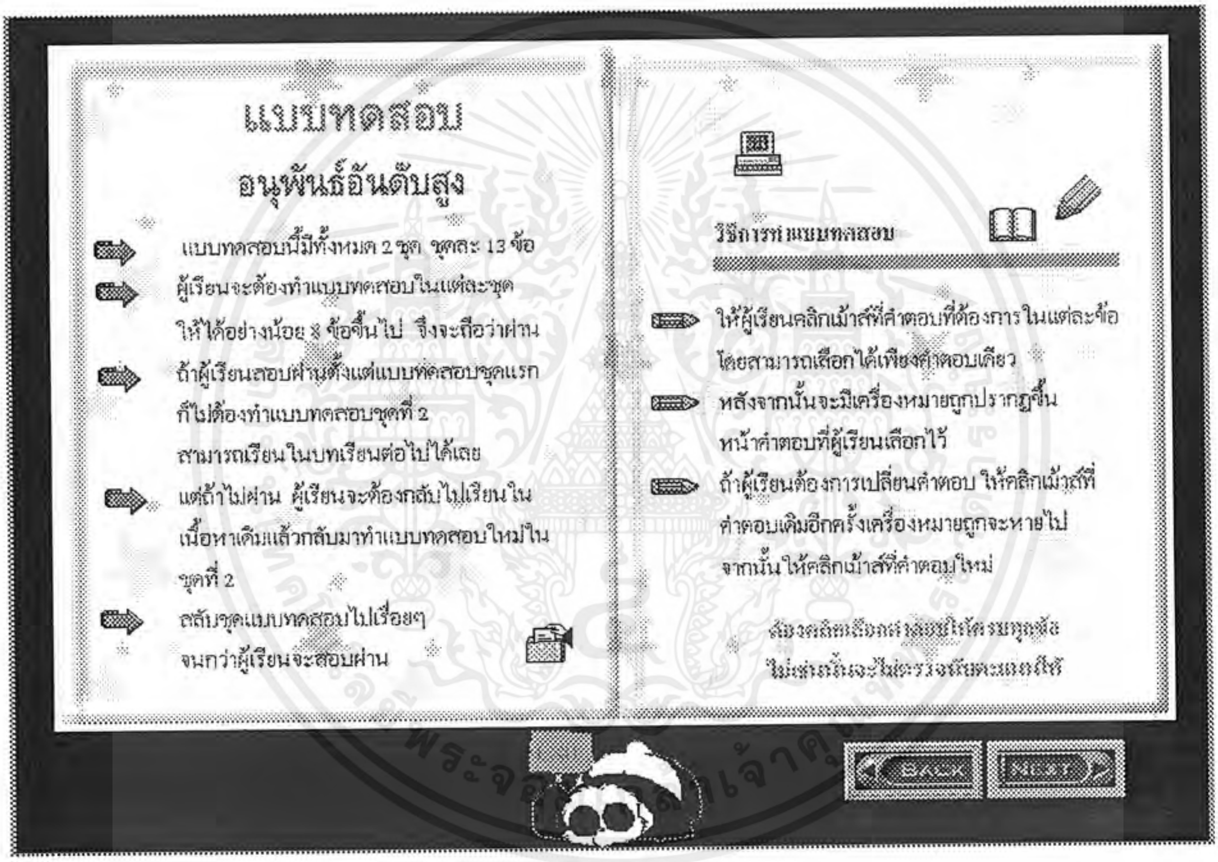
ข้อมูลที่เป็นแบบทดสอบ

ข้อมูลประเภทนี้จะเป็นโจทย์คำถามหลังจากที่ผู้เรียนเรียนเนื้อหาเสร็จแล้ว โดยผู้เรียนจะต้องใช้เม้าส์คลิกที่คำตอบที่ต้องการ หน้าจอนี้แสดงให้เห็นดังรูปที่ 3.5



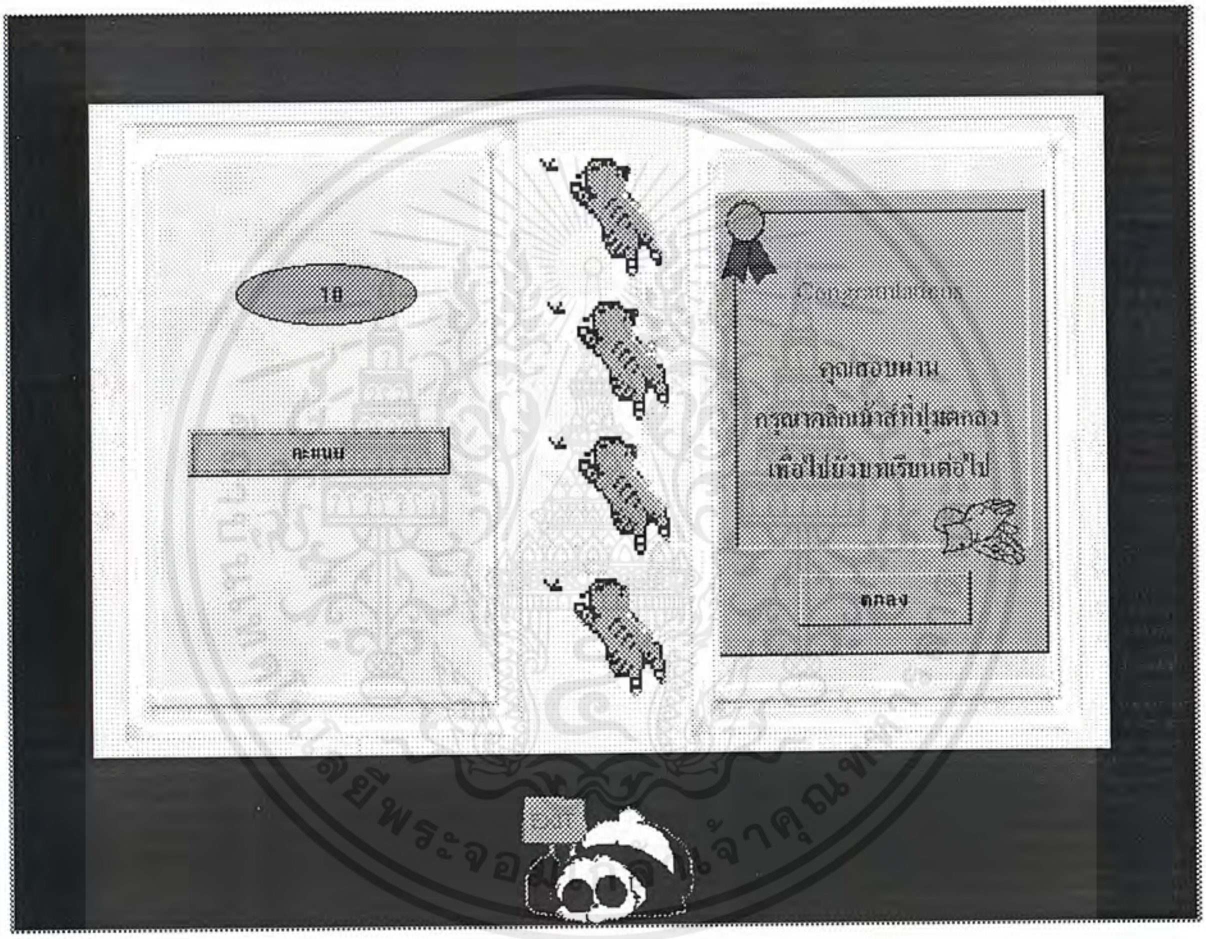
รูปที่ 3.5

แบบทดสอบที่ทำขึ้นนี้จะมีทุกเรื่องย่อยของแต่ละบท โดยในแต่ละเรื่องย่อยจะมีแบบทดสอบทั้งหมด 2 ชุด จำนวนข้อสอบในแต่ละชุดมีจำนวนเท่ากัน แต่จำนวนข้อสอบของแต่ละเรื่องย่อยมีไม่เท่ากัน ทั้งนี้ผู้เรียนจะต้องทำแบบทดสอบให้ผ่านตามจำนวนข้อที่ระบุไว้ในแต่ละเรื่องย่อย หน้าจอนี้แสดงให้เห็นดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6

ถ้าผู้เรียนทำคะแนนได้ถึงตามที่กำหนดไว้ถือว่าสอบผ่าน ดังนั้นจะสามารถเรียนในเรื่องย่อยต่อไปได้ หน้าจอนี้แสดงดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7

ถ้าทำคะแนนได้ไม่ถึงตามที่กำหนดไว้ผู้เรียนจะต้องกลับมาเรียนในเนื้อหาเดิม และต้องทำแบบทดสอบอีกครั้งโดยเปลี่ยนแบบทดสอบจากชุดที่ 1 เป็นชุดที่ 2 วนแบบนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าผู้เรียนจะสอบผ่าน หน้าจอนี้แสดงดังรูปที่ 3.8

รูปที่ 3.8

การตกแต่งสีและภาพทำเช่นเดียวกับข้อมูลที่เป็นเนื้อหาแคลคูลัส

ส่วนการเลือกคำตอบที่ต้องการนั้น ผู้เรียนสามารถคลิกเม้าส์เลือกได้เพียงคำตอบเดียว และจะมีเครื่องหมายปรากฏหน้าคำตอบนั้น และถ้าผู้เรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ก็ให้คลิกเม้าส์ที่คำตอบใหม่ได้เลย เครื่องหมายหน้าคำตอบเก่าก็จะหายไป

ส่วนคำนวณ

ส่วนนี้เป็นการคำนวณหรือรวมคะแนนหลังจากที่ผู้เรียนทำแบบทดสอบเสร็จ โดยข้อสอบ 1 ข้อ เท่ากับ 1 คะแนน การรวมคะแนนนี้เพื่อตรวจสอบว่าผู้เรียนสอบผ่านในเรื่องย่อยนั้น ๆ หรือไม่ หน้าจอนี้แสดงดังรูปที่ 3.9

รูปที่ 3.9

การคำนวณนี้ทำได้โดยการเขียนภาษาสคริปซึ่งเป็นภาษาที่ใช้ในโปรแกรม Toolbook

บทที่ 4
ข้อจำกัดของโปรแกรม

ถึงแม้ว่าโปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัสนี้จะสามารถช่วยให้เกิดความสะดวกในการเรียนรู้และทบทวนบทเรียนต่าง ๆ ของวิชาแคลคูลัส แต่ก็ยังมีข้อจำกัดบางอย่างที่เกิดขึ้นในโปรแกรมดังต่อไปนี้

1. โปรแกรมนี้สามารถติดต่อกับผู้ใช้ด้วยเม้าส์ได้เพียงอย่างเดียว ไม่สามารถทำงานด้วยคีย์บอร์ดได้
2. กราฟของสมการต่าง ๆ นั้นสร้างขึ้นแบบมิติเดียวไม่ได้เป็นกราฟสามมิติ ดังนั้นในกราฟบางรูปอาจมองเห็นไม่ชัดเจนและไม่สวยงาม
3. เนื่องจากอาจมีผู้เรียนที่ไม่ผ่านการประเมินผลจากแบบทดสอบ ดังนั้นแบบทดสอบที่จัดทำขึ้นจึงไม่มีการเฉลยคำตอบไว้ในตัวโปรแกรม เพราะผู้เรียนอาจจำคำตอบไว้เพื่อไปทำแบบทดสอบในครั้งต่อไป
4. เนื่องจากโปรแกรมถูกสร้างขึ้นด้วยข้อจำกัดของภาษาสคริปและการออกแบบโครงสร้างของโปรแกรม ดังนั้นก็จะไม่มีการเฉลยคำตอบสำหรับผู้ที่สอบผ่าน เพราะผู้เรียนจะไม่ทราบว่าคำตอบข้อนี้มีโจทย์ว่าอย่างไร

บทที่ 5
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

ข้อสรุป

สำหรับโปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัสนี้ เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นเพื่อช่วยในการสอนทำให้ผู้เรียนเกิดความสะดวก รวดเร็วในการเรียนรู้ และทำให้ดูน่าสนใจยิ่งขึ้นเมื่อได้เรียนจากคอมพิวเตอร์ อีกทั้งยังสามารถใช้ทบทวนความรู้ได้ด้วย

หลังจากได้เรียนในเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสแล้ว จะมีตัวอย่างโจทย์ที่แสดงขั้นตอนการหาคำตอบอย่างละเอียด พร้อมทั้งแบบทดสอบสำหรับผู้เรียนเพื่อประเมินผลในทุก ๆ บทเรียนย่อย ถ้าคะแนนสอบของผู้เรียนผ่านตามเกณฑ์ที่กำหนดผู้เรียนก็จะสามารถเรียนเนื้อหาในบทต่อไปได้ แต่ถ้าคะแนนสอบไม่ถึงตามเกณฑ์ที่กำหนดผู้เรียนจะต้องย้อนกลับไปเรียนในเนื้อหาเดิมแล้วทำแบบทดสอบใหม่อีกครั้ง โดยแบบทดสอบจะถูกเปลี่ยนชุดไป วนซ้ำในลักษณะนี้จนกว่าผู้เรียนจะสอบผ่าน

ข้อเสนอแนะ

โปรแกรมช่วยสอนวิชาแคลคูลัสนี้เป็นการนำเสนอเนื้อหาวิชาแคลคูลัสออกทางหน้าจอคอมพิวเตอร์ ดังนั้น เพื่อความสวยงามและทำให้ดูน่าสนใจยิ่งขึ้นนั้น ควรมีการเพิ่มสื่อต่าง ๆ เช่น ภาพเคลื่อนไหว เสียงให้มากยิ่งขึ้น

บทที่ 6
อนุพันธ์ (Derivatives)

6.1 นิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน (the Definition of Derivative)

นิยามที่ 1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และถ้า $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ หาค่าได้และเป็นจริง เราจะเรียกลิมิตนี้ว่าเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y เทียบกับตัวแปร x (derivative of y with respect to x) หรืออาจเขียนได้อีกรูปหนึ่ง คือ

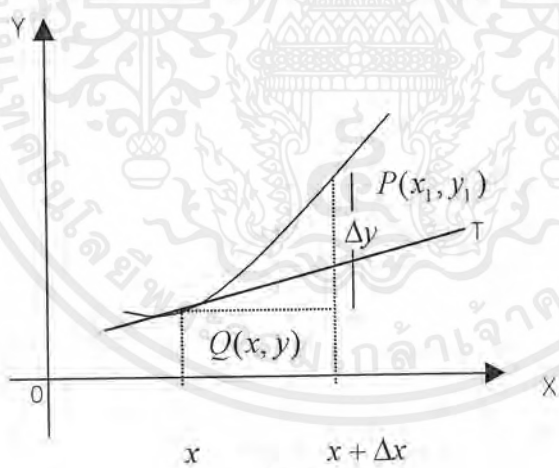
$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad \text{เมื่อ } x - x_1 = \Delta x \text{ และ } f(x) - f(x_1) = \Delta y$$

ในกรณีที่ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ หาค่าไม่ได้ ถือว่าฟังก์ชันไม่มีอนุพันธ์ที่จุด x

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ก็คือ ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ

ความชันของเส้นโค้งที่จุดใด ๆ

ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งใดๆ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x, y)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = f(x)$



รูปที่ 6.1

ถ้าจุด $P(x_1, y_1)$ เคลื่อนที่เข้าหาจุด $Q(x, y)$ ค่าของตัวแปรจะเปลี่ยนจาก y_1 เป็น y จะเรียก $y_1 - y$ ว่า เป็นส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน เขียนแทนด้วย Δy และ $x_1 - x$ ว่าเป็นส่วนเปลี่ยนแปลงของ x ในช่วง $[x, x_1]$ เขียนแทนด้วย Δx ถ้าลากเส้นตรง PQ ตัดส่วนโค้ง $y = f(x)$ ที่ P และ Q

ให้ m เป็นความชันของเส้นตรง PQ เราได้ $m = \dfrac{y1 - y}{x1 - x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

จาก $\Delta y = y_1 - y = f(x_1) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$

ดังนั้น $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ถ้าให้จุด Q อยู่กับที่ แล้วเลื่อนจุด P เข้าหาจุด Q ค่าความชันของ QP จะเปลี่ยนไป เมื่อ Δx มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ตำแหน่งของ QP จะอยู่ใกล้กับเส้นตรง QT ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสกราฟที่จุด Q ดังนั้น ความชันของ QP เมื่อจุด P เข้าใกล้จุด Q จะเรียกว่า ค่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด Q จะเห็นว่า ค่าความชันของเส้นโค้งที่จุดใดๆ หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดนั้น

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) คือ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน y เทียบกับ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$$f'(x), y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}, D_x y$$

ค่าอนุพันธ์ที่จุด $x = a$ เขียนแทนโดย $f'(a), y'|_{x=a}, \dfrac{dy}{dx}|_{x=a}$

จากนิยามจะเห็นว่า อนุพันธ์คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่างๆ

ถ้าให้ $f(x)$ แทนปริมาณบางอย่างที่จุด x แล้ว $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของปริมาณ $f(x)$ ในช่วง $[x, x+\Delta x]$ และ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงที่จุด x อัตราการเปลี่ยนแปลงจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน f ว่าอยู่ในรูปของฟังก์ชันแบบใด เช่น ถ้า $S(t)$ แทน ระยะทางในเวลา t ดังนั้น $S'(t)$ คือความเร็วชั่วขณะเมื่อเวลา t

ขั้นตอนการหา $f'(x)$ โดยใช้นิยามของอนุพันธ์ มีดังนี้

1. เขียนนิพจน์แสดงค่า $f(x)$ และ $f(x+\Delta x)$ โดย $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$
2. จัดให้อยู่ในรูปของผลต่างคือ Δy เพื่อให้คำนวณได้ง่าย

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

3. จัดให้อยู่ในรูปผลหารเชิงผลต่างเพื่อให้คำนวณได้ง่าย

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. คำนวณหา $f'(x)$ โดยใส่ลิมิตทั้งสองข้าง

$$\underset{\Delta x \to 0}{lix} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lix} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \sqrt{x}$

ก. ที่จุด x ใดๆ

ข. ที่จุด $x = 4$

วิธีทำ

ก.

$$y = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ข. เมื่อ $x = 4$ เราจะได้ $y'|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ ###

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ถ้าแทน Δx ด้วย h

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x - x - h}{x(x+h)}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{-1}{x(x+h)}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2} \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ที่จุด x ใดๆ และ $x = 2$ โดยใช้นิยาม

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x} \qquad , f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x) + \frac{1}{x+\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2(x+\Delta x) + \frac{1}{x+\Delta x} - (2x + \frac{1}{x})$$

$$= 2x + 2\Delta x - 2x + \frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$= 2\Delta x - \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x - \dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2 - \frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

$$= 2 - \frac{1}{x^2}$$

ดังนั้น $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ และ $f'(2) = 7/4$ ###

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x+\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + 2}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + 2} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 2 - \sqrt{x+\Delta x} - 2}{(\sqrt{x+\Delta x} + 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{(\sqrt{x+\Delta x} + 2)(\sqrt{x} + 2)} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x}}$$

$$= \frac{x - x - \Delta x}{(\sqrt{x+\Delta x}+2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$$

$$= \frac{-\Delta x}{(\sqrt{x+\Delta x}+2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(\sqrt{x+\Delta x}+2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$$

$$= \frac{-1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2} \qquad \# \# \#$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาความชันของ $f(x) = 3x^2$ ที่จุด (1,3)

<u>วิธีทำ</u>

$f(x) = 3x^2$ และ $f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 - 3x^2$$

$$= 3(x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2) - 3x^2$$

$$= 3x^2 + 6x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x^2$$

$$= 6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x = 6x$$

ความชันที่จุดใดๆ คือ $6x$ และ ความชันที่จุด (1,3) = 6(1) = 6 ###

6.2 กฎการหาอนุพันธ์ (Differentiation Rules)

กฎต่อไปนี้ช่วยให้เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

1. ถ้า $f(x)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ แล้ว $f'(x)=0$ ทุกๆค่าของ x
2. ถ้า $f(x)=x$ แล้ว $f'(x)=1$
3. ถ้า $f(x)=x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $f'(x)=nx^{n-1}$ หรือ

   ถ้า $F(x)=(f(x))^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $f(x)$ มีอนุพันธ์ แล้ว

   $F'(x)=n(f(x))^{n-1}f'(x)$
4. ถ้า $f(x)$ มีอนุพันธ์ และ $F(x)=cf(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ แล้ว $F'(x)=cf'(x)$
5. ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ มีอนุพันธ์ และ $F(x)=f(x)\pm g(x)$ แล้ว $F'(x)=f'(x)\pm g'(x)$
6. ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ มีอนุพันธ์ และ $F(x)=f(x)g(x)$ แล้ว

   $F'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$
7. ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ มีอนุพันธ์ และ $g(x)\neq 0$

   ให้ $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ แล้ว $F'(x)=\dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

ถ้า $u=f(x), v=g(x)$ **เราเขียนกฎต่างๆได้เป็น**

1. $\dfrac{dc}{dx}=0$
2. $\dfrac{dx}{dx}=1$
3. $\dfrac{dv^n}{dx}=nv^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
4. $\dfrac{d}{dx}cu=c\dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}(u\pm v)=\dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}u\cdot v=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{u}{v})=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = 3x - 2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(3x-2)\\ &= \frac{d}{dx}3x - \frac{d}{dx}2\\ &= 3\frac{d}{dx}x - 0\\ &= 3 \qquad \text{###}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = 4x^5 + 3x^2 + 2\sqrt{x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(4x^5 + 3x^2 + 2\sqrt{x})\\ &= \frac{d}{dx}(4x^5) + \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2\sqrt{x})\\ &= 4\frac{d}{dx}x^5 + 3\frac{d}{dx}x^2 + 2\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}\\ &= 4\cdot 5x^4 + 3\cdot 2x + 2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\\ &= 20x^4 + 6x + \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{###}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = (3x+1)(x^2+2x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(3x+1)(x^2+2x)\\ &= (3x+1)\frac{d}{dx}(x^2+2x) + (x^2+2x)\frac{d}{dx}(3x+1)\\ &= (3x+1)(2x+2) + (x^2+2x)(3)\\ &= 6x^2 + 2x + 6x + 2 + 3x^2 + 6x\\ &= 9x^2 + 14x + 2 \qquad \text{###}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=\dfrac{(x+5)}{(x+3)}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{(x+5)}{(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)\dfrac{d}{dx}(x+5)-(x+5)\dfrac{d}{dx}(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x+3-x-5}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{-2}{(x+3)^2}$$ ###

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $y=x^4-5x^3+6x-2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

เนื่องจาก $\dfrac{dx^4}{dx}=4x^3$

$$\frac{d}{dx}\left(5x^3\right)=5\frac{dx^3}{dx}=5\cdot 3x^2=15x^2$$

$$\frac{d}{dx}6x=6\frac{dx}{dx}=6$$

$$\frac{d}{dx}(2)=0$$

ฉะนั้น $\dfrac{dy}{dx}=4x^3-15x^2+6$ ###

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $y=\left(x^2+1\right)\left(x^2-x+5\right)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

สมมติให้

$$f(x)=x^2+1$$

$$g(x)=x^2-x+5$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$=\left(x^2+1\right)\left(2x-1\right)+\left(x^2-x+5\right)\left(2x\right)$$

$$=2x^3+2x-x^2-1+2x^3-2x^2-10x$$

$$=4x^3-3x^2-8x-1$$ ###

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+2}$ จงหาอนุพันธ์ของ y ที่ $x=1$ และ $x=-1$

วิธีทำ

สมมติให้

$$f(x)=3x^2-5x+1$$
$$g(x)=x^2+2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$
$$=\frac{(x^2+2)(6x-5)-(3x^2-5x+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{5x^2+10x-10}{(x^2+2)^2}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{5+10-10}{(1+2)^2}=\frac{5}{9}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}=\frac{5-10-10}{(1+2)^2}=-\frac{15}{9}$$

###

ตัวอย่างที่ 13 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=(x^2+2x-5)^5(x^3+2)^4$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+2x-5)^5(x^3+2)^4$$
$$=(x^2+2x-5)^5\frac{d}{dx}(x^3+2)^4+(x^3+2)^4\frac{d}{dx}(x^2+2x-5)^5$$
$$=(x^2+2x-5)^5\cdot 4(x^3+2)^3\frac{d}{dx}(x^3+2)+(x^3+2)^4\cdot 5(x^2+2x-5)^4\frac{d}{dx}(x^2+2x-5)$$
$$=(x^2+2x-5)^5\cdot 4(x^3+2)^3(3x^2)+(x^3+2)^4\cdot 5(x^2+2x-5)^4(2x+2)$$

###

ตัวอย่างที่ 14 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=(x^5+3x^4+2x^2+6)^3$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^5+3x^4+2x^2+6)^3$$
$$=3(x^5+3x^4+2x^2+6)^2\frac{d}{dx}(x^5+3x^4+2x^2+6)$$
$$=3(x^5+3x^4+2x^2+6)^2(5x^4+12x^3+4x+6)$$

###

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้ $y=\left(4x^3+x^2-2x+1\right)^{10}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

สมมติให้

$$g(x)=4x^3+x^2-2x+1$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=10\left(4x^3+x^2-2x+1\right)^9\frac{d}{dx}(4x^3+x^2-2x+1)\\&=10\left(4x^3+x^2-2x+1\right)^9\left(12x^2+2x-2\right)\end{aligned}$$ ###

ตัวอย่างที่ 16 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=\left(x^2+2x-3\right)^{16}(2x+5)^{13}$

วิธีทำ

ในที่นี้ให้

$$f(x)=x^2+2x-3$$

$$g(x)=2x+5$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\left(x^2+2x-3\right)^{16}\frac{d}{dx}(2x+5)^{13}+(2x+5)^{13}\frac{d}{dx}\left(x^2+2x-3\right)^{16}\\&=\left(x^2+2x-3\right)^{16}(13)(2x+5)^{12}(2)+(2x+5)^{13}(16)\left(x^2+2x-3\right)^{15}(2x+2)\\&=26\left(x^2+2x-3\right)^{16}(2x+5)^{12}+32(x+1)(2x+5)^{13}\left(x^2+2x-3\right)^{15}\\&=\left(x^2+2x-3\right)^{15}(2x+5)^{12}\left[26\left(x^2+2x-3\right)+32(x+1)(2x+5)\right]\\&=\left(x^2+2x-3\right)^{15}(2x+5)^{12}\left(90x^2+276x+82\right)\end{aligned}$$ ###

ตัวอย่างที่ 17 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=\left(\dfrac{3x-2}{2x-1}\right)^7$

วิธีทำ

สมมติให้

$$f(x)=\frac{3x-2}{2x-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=7\left(\frac{3x-2}{2x-1}\right)^6\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-2}{2x-1}\right)\\&=7\left(\frac{3x-2}{2x-1}\right)^6\frac{(2x-1)(3)-(3x-2)(2)}{(2x-1)^2}\\&=7\frac{(3x-2)^6}{(2x-1)^8}\end{aligned}$$ ###

ตัวอย่างที่ 18 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x^5} + \sqrt[3]{x^2+1}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-5} + (x^2+1)^{\frac{1}{3}})$$
$$= -5x^{-6} + \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{-2}{3}}\frac{d}{dx}(x^2+1)$$
$$= -\frac{5}{x^6} + \frac{2}{3}\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

###

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้ $y = x^2 + 2x - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ จงหา $f'(x), f'(-1)$

วิธีทำ

$$f(x) = x^2 + 2x - x^{-2}$$
$$f'(x) = 2x + 2 - (-2)x^{-3}$$
$$= 2x + 2 + 2x^{-3}$$
$$= 2x + 2 + \frac{2}{x^3}$$
$$f'(-1) = -2 + 2 - 2 = -2$$

###

6.3 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher Order Derivatives)

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้เทียบกับ x อนุพันธ์ที่หาได้เรียกว่า อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ซึ่งถ้าค่าของ $f'(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ต่อไปได้อีก จะเรียก อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) เขียนแทนด้วย $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'' หรือ $f''(x)$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f''(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ จะเรียกอนุพันธ์ของ $f''(x)$ ว่า อนุพันธ์อันดับสาม (third derivative) เขียนแทนด้วย $\frac{d^3y}{dx^3}$, y''' หรือ $f'''(x)$

อนุพันธ์อันดับที่ n จะใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^ny}{dx^n}, y^{(n)}$ หรือ $f^{(n)}(x)$

<u>ตัวอย่างที่ 20</u> จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ $y = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
y &= 4x^3 + 2x^2 - x + 1 \\
y' &= 12x^2 + 4x - 1 \\
y'' &= 24x + 4 \\
y''' &= 24 \qquad \#\#\#
\end{aligned}
$$

<u>ตัวอย่างที่ 21</u> กำหนดให้ $y = x^2 + \frac{3}{x^2}$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + \frac{3}{x^2} \\
&= x^2 + 3x^{-2} \\
\frac{dy}{dx} &= 2x + 3(-2)x^{-3} \\
&= 2x - 6x^{-3} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 2 - 6(-3)x^{-4} \\
&= 2 + 18x^{-4} \qquad \#\#\#
\end{aligned}
$$

<u>ตัวอย่างที่ 22</u> จงหาค่า y', y'', y''' ของ $y = 3x^4 - 2x^2 + x - 5$

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\, 3x^4 - 2x^2 + x - 5$$

$$= 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x + 1$$
$$= 12x^3 - 4x + 1$$
$$y'' = \frac{d}{dx}(12x^3 - 4x + 1)$$
$$= 36x^2 - 4$$
$$y''' = \frac{d}{dx}(36x^2 - 4)$$
$$= 72x \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 23</u> จงหาค่า $f''(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{2-3x^2})$$
$$= \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2-3x^2}\,\frac{d}{dx}(-3x) + 3x\,\frac{d}{dx}\sqrt{2-3x^2}}{(2-3x^2)}$$
$$= \frac{-3\sqrt{2-3x^2} + 3x \cdot \frac{(-3x)}{\sqrt{2-3x^2}}}{(2-3x^2)}$$
$$= \frac{-3(2-3x^2) - 9x^2}{(2-3x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{-6}{(2-3x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 24</u> กำหนดให้ $y = (x - x^2)^8$ จงหา y''

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = 8(x-x^2)^7(1-2x)$$
$$y'' = 8(x-x^2)^7 \frac{d}{dx}(1-2x) + 8(1-2x)\frac{d}{dx}(x-x^2)^7$$
$$= 8(x-x^2)^7(-2) + 8(1-2x)7(x-x^2)^6(1-2x)$$
$$= -16(x-x^2)^7 + 56(1-2x)^2(x-x^2)^6 \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 25</u> จงหาค่า y', y'', y''' ของ $x^2 - y^2 - x = 1$

<u>วิธีทำ</u>

จาก $x^2 - y^2 - x = 1$

เราได้ $2x - 2y\dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$ ...(1)

ดังนั้น $y' = \dfrac{2x-1}{2y}$

จาก (1) หาอนุพันธ์เทียบกับ x เราได้

$$\frac{d}{dx}(2x - 2yy' - 1) = 0$$

$$2 - 2y\frac{dy'}{dx} - 2y'\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots(2)$$

ดังนั้น $y'' = \dfrac{1-(y')^2}{y}$

จาก (2) หาอนุพันธ์เทียบกับ x เราได้

$$\frac{d}{dx}(2 - 2yy'' - 2(y')^2) = 0$$

$$-2yy''' - 2y'y'' - 2\cdot 2y'y'' = 0$$

ดังนั้น $y''' = -\dfrac{3y'\cdot y''}{y}$ ###

6.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Derivatives of Trigonometric Functions)

ให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้

1. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

<u>ตัวอย่างที่ 26</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = x^2 - \sin x$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - \sin x)$$
$$= \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}\sin x$$
$$= 2x - \cos x$$

###

<u>ตัวอย่างที่ 27</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = (x^3 + 1)\cos x$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 + 1\right)\cos x$$
$$= (x^3 + 1)\ \frac{d}{dx}\cos x + \cos x\ \frac{d}{dx}\ (x^3 + 1)$$
$$= 3x^2\cos x - (x^3 + 1)\sin x$$

###

<u>ตัวอย่างที่ 28</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \cos(3x + 6)$

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\cos(3x + 6)$$

$$y' = -\sin(3x+6)\ \frac{d}{dx}\ (3x+6)$$
$$y' = -3\sin(3x+6) \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 29</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \sec(3x) + \tan(2x^2+1)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\sec(3x) + \frac{d}{dx}(\tan(2x^2+1)) \\ &= \sec(3x)\tan(3x)\frac{d}{dx}(3x) + \sec^2(2x^2+1)\frac{d}{dx}(2x^2+1) \\ &= 3\sec(3x)\tan(3x) + 4x\sec^2(2x^2+1) \qquad \text{###} \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 30</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \tan^3 x$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} y' &= 3\tan^2 x\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= 3\tan^2 x\sec^2 x \qquad \text{###} \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 31</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \tan\sqrt{1-x^2}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} y' &= \sec^2\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} \\ &= \sec^2\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\sec^2(\sqrt{1-x^2}) \qquad \text{###} \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 32</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \sin(\tan x) + \cos^2\frac{x+1}{x-1}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\sin(\tan x) + \frac{d}{dx}\cos^2(\frac{x+1}{x-1}) \\ &= \cos(\tan x)\frac{d}{dx}(\tan x) + 2\cos(\frac{x+1}{x-1})\frac{d}{dx}\cos(\frac{x+1}{x-1}) \\ &= \cos(\tan x)\sec^2 x + 2\cos(\frac{x+1}{x-1})(-\sin(\frac{x+1}{x-1}))\frac{d}{dx}(\frac{x+1}{x-1}) \end{aligned}$$

$$= \cos(\tan x)\sec^2 x - 2\cos(\frac{x+1}{x-1})\sin(\frac{x+1}{x-1})\left[\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}\right]$$

$$= \cos(\tan x)\sec^2 x - 2\cos(\frac{x+1}{x-1})\sin(\frac{x+1}{x-1})\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right]$$

$$= \cos(\tan x)\sec^2 x + \frac{4}{(x-1)^2}\cos(\frac{x+1}{x-1})\sin(\frac{x+1}{x-1}) \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 33</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \csc^2 x - \csc x^2 + \cot^3 x$

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = 2\csc x \frac{d}{dx}(\csc x) - (-\csc x^2 \cot x^2)\frac{d}{dx}(x^2) + 3\cot^2 x \frac{d}{dx}(\cot x)$$

$$= -2\csc^2 x \cot x + 2x\csc x^2 \cot x^2 - 3\cot^2 x \csc^2 x \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 34</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \sin(x+y)$

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \cos(x+y)\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$= \cos(x+y)(1+y')$$

$$= \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)} \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 35</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\tan x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x) = \frac{\tan x \frac{d}{dx}(1-\cos 2x)^{\frac{1}{2}} - (1-\cos 2x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\tan x}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\tan x \cdot \frac{\sin 2x \cdot 2}{2\sqrt{1-\cos 2x}} - (\sqrt{1-\cos 2x})\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\tan x \cdot \sin 2x - (1-\cos 2x)\cdot \sec^2 x}{\sqrt{1-\cos 2x}\cdot \tan^2 x} \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 36 กำหนดให้ $y = \sec(3x)$ จงหา y'''

วิธีทำ

$$y' = \sec(3x)\tan(3x)(3)$$

$$y'' = 3\sec(3x)\frac{d}{dx}\tan(3x) + 3\tan(3x)\frac{d}{dx}\sec(3x)$$

$$= 3\sec(3x)\sec^2(3x)(3) + 3\tan(3x)\sec(3x)\tan(3x)(3)$$

$$= 9\sec^3(3x) + 9\tan^2(3x)\sec(3x)$$

$$y''' = 9\cdot 3\sec^2(3x)\frac{d}{dx}\sec(3x) + 9\tan^2(3x)\frac{d}{dx}\sec(3x) + 9\sec(3x)\frac{d}{dx}\tan^2(3x)$$

$$= 27\sec^2(3x)\sec(3x)\tan(3x)(3) + 9\tan^2(3x)\sec(3x)\tan(3x)(3)$$

$$+9\sec(3x)(2)\tan(3x)\sec^2(3x)(3)$$

$$= 81\sec^3(3x)\tan(3x) + 27\tan^3(3x)\sec(3x) + 54\sec^3(3x)\tan(3x)$$ ###

ตัวอย่างที่ 37 กำหนดให้ $x\tan y = y\cot x$ จงหา y'

วิธีทำ

$$x\frac{d}{dx}(\tan y) + \tan y\frac{d}{dx}x = \cot x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}(\cot x)$$

$$x\sec^2 yy' + \tan y = \cot xy' + y(-\csc^2 x)$$

$$y' = \frac{\tan y + y\csc^2 x}{\cot x - x\sec^2 y}$$ ###

6.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบหรือกฎลูกโซ่
(Derivative of the Composite Function or the Chain Rule)

กฎลูกโซ่เป็นกฎที่มีความสำคัญ และมีประโยชน์มากในเรื่องการหาอนุพันธ์ ลักษณะของฟังก์ชันที่จำเป็นต้องอาศัยกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์จะอยู่ในลักษณะของฟังก์ชันประกอบ (composite function)

ทฤษฎีบทกฎลูกโซ่

ให้ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ $y = f(u)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u ให้ $F(x) = f(g(x))$ จะได้ว่า $F(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x และ $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

<u>**ตัวอย่างที่ 38**</u> กำหนดให้ $y = 3u^2 + u^3$ และ $u = x^2 + 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

จาก กฎลูกโซ่ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = 6u + 3u^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = (6u + 3u^2)(2x)$$

$$= [6(x^2+1) + 3(x^2+1)^2](2x)$$

$$= [6(x^2+1) + 3(x^4 + 2x^2 + 1)](2x)$$

$$= (3x^4 + 12x^2 + 9)(2x)$$

$$= (6x^5 + 24x^3 + 18x)$$

หรือ ถ้าไม่ใช้กฎลูกโซ่

จาก $y = 3u^2 + u^3$

$$= 3(x^2+1)^2 + (x^2+1)^3$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 6(x^2+1)(2x) + 6x(x^2+1)^2$

$$= 12x(x^2+1) + 6x(x^2+1)^2$$

$$= 12x^3 + 12x + 6x(x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$= 12x^3 + 12x + 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

$$= 6x^5 + 24x^3 + 18x$$ ###

<u>ตัวอย่างที่ 39</u> กำหนดให้ $y=\sqrt{u}$ และ $u=x+\sqrt{x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}}$$
$$\frac{du}{dx}=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\frac{(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$ ###

<u>ตัวอย่างที่ 40</u> กำหนดให้ $y=3\left[u^7+u^5+3u^4\right]^3, u=x^2+2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

จากกฎลูกโซ่

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{du}=\frac{d}{du}3\left[u^7+u^5+3u^4\right]^3$$
$$=9\left[u^7+u^5+3u^4\right]^2\frac{d}{du}\left[u^7+u^5+3u^4\right]$$
$$=9\left[u^7+u^5+3u^4\right]^2\left[7u^6+5u^4+12u^3\right]$$
$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)$$
$$=2x$$
$$\frac{dy}{dx}=9\left[u^7+u^5+3u^4\right]^2\left(7u^6+5u^4+12u^3\right)(2x)$$
$$=18\left(u^7+u^5+3u^4\right)^2\left(7u^6+5u^4+12u^3\right)x, u=\left(x^2+2\right)$$ ###

ตัวอย่างที่ 41 จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x) = \left(x^2 + 4x + 2\right)^4$

วิธีทำ

ให้ $u = x^2 + 4x + 2$

ได้ $y = u^4$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 4$$

$$= 2(x+2)$$

จาก $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot 2(x+2)$$

$$= 8u^3(x+2)$$

$$= 8\left(x^2 + 4x + 2\right)^3(x+2) \qquad ###$$

ถ้ามี $F(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันประกอบที่เกิดจากฟังก์ชันมากกว่า 2 ฟังก์ชัน เราจะหาอนุพันธ์ของ $F(x)$ ได้ในทำนองเดียวกันโดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีที่ละขั้นตอน ซึ่งจะได้ว่าถ้า

$$y = f(u), u = g(v), v = h(w), w = p(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 42 กำหนดให้ $y = \dfrac{1+u}{1-u}, u = \dfrac{1}{v}, v = x^2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \cdot \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= \left(\frac{(1-u) - (1+u)(-1)}{(1-u)^2}\right)\left(\frac{-1}{v^2}\right)(2x)$$

$$= \frac{2}{(1-u)^2}\left(\frac{-2x}{v^2}\right) = \frac{-4x}{v^2(1-u)^2}$$

แทนค่า $u = \dfrac{1}{x^2}, v = x^2$

เราได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-4x^3}{\left(x^2-1\right)^2}$ ###

สำหรับการหาอนุพันธ์อันดับสูง เราสามารถประยุกต์ใช้กฎลูกโซ่ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 43</u> กำหนดให้ $y = u^5, u = x^3 - 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

<u>วิธีทำ</u>

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= 5u^4 \cdot 3x^2$$
$$= 15u^4x^2$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(15u^4x^2\right)$$
$$= 15\frac{d}{dx}\left(u^4x^2\right)$$
$$= 15\left(u^4\frac{dx^2}{dx} + x^2\frac{du^4}{dx}\right)$$
$$= 15\left(2u^4x + 4x^2u^3\frac{du}{dx.}\right)$$
$$= 15\left(2u^4x + 4x^2u^3 \cdot 3x^3\right)$$
$$= 30\left(u^4x + 6x^4u^3\right)$$
$$= 30u^3x\left(u + 6x^3\right), u = x^3 - 1$$
$$= 30x(7x^6 - 8x^3 + 1)$$

###

<u>ตัวอย่างที่ 44</u> กำหนดให้ $y = f(u), u = \frac{x}{x^2 - 1}$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

<u>วิธีทำ</u>

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u)\frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f'(u)\frac{d}{dx}\left(\frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2}\right) + \frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2}\frac{d}{dx}f'(u)$$

และ $$\frac{d}{dx}f'(u)=\frac{d}{du}f'(u)\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=f''(u)\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

ฉะนั้น $$\frac{d^2y}{dx^2}=f'(u)\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}+f''(u)\frac{\left(1-x^2\right)^2}{\left(x^2+1\right)^4}$$ ###

<u>ตัวอย่างที่ 45</u> กำหนดให้ $y=4u^{1/4}, u=g(x)$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

<u>วิธีทำ</u>

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{1}{4}u^{\frac{-3}{4}}\cdot g'(x)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\frac{d}{dx}u^{\frac{-3}{4}}\cdot g'(x)$$
$$=\frac{1}{4}\left(u^{\frac{-3}{4}}\cdot g''(x)+g'(x)\frac{d}{dx}u^{\frac{-3}{4}}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(u^{\frac{-3}{4}}\cdot g''(x)+g'(x)\left(\frac{-3}{4}u^{\frac{-7}{4}}\frac{du}{dx}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}u^{\frac{-3}{4}}\cdot g''(x)-\frac{3}{4}u^{\frac{-7}{4}}\left(g'(x)\right)^2, u=g(x)$$ ###

6.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย (Derivatives of the Implicit Functions)

ฟังก์ชันโดยปริยาย คือฟังก์ชันที่กำหนดโดยสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของ x และ y ซึ่งค่าของ y ไม่ได้แสดงออกมาชัดแจ้งในพจน์ของ x หรือค่าของ x ตัวอย่างเช่น

$$y-3x-1=0; x^2-y^2-1=0$$
$$x^2y^2-1=0; x^2+xy-2y^2-2x+5y-3=0$$

ฟังก์ชันส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของ $y=f(x)$ นั้น เราเรียกว่าฟังก์ชันชัดแจ้ง (explicit function) ตัวอย่างเช่น

$$y=3x+1$$
$$y=\sqrt{x^2-1}$$

ฟังก์ชันโดยปริยายบางฟังก์ชัน เช่น $y-3x-1=0$ นั้นเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันชัดแจ้งได้โดยง่ายคือ $y=3x+1$ ซึ่งสามารถทำให้หา $\frac{dy}{dx}$ ได้

แต่ฟังก์ชันโดยปริยายบางฟังก์ชัน เช่น $x^2+xy-2y^2-2x+5y-3=0$ ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่ชัดแจ้งได้ จึงทำให้เกิดความยุ่งยากถ้าต้องการหา $\frac{dy}{dx}$

ด้วยเหตุนี้จำเป็นที่จะต้องหาวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย โดยไม่ต้องเขียนฟังก์ชันนั้นให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่ชัดแจ้ง โดยเราจะหาอนุพันธ์ของแต่ละข้างสมการเทียบกับ x โดยถือว่า y เป็นฟังก์ชันของ x

ขั้นตอนการหาอนุพันธ์โดยปริยาย มีดังนี้

1. หาอนุพันธ์ของสมการทั้งสองด้าน อันเนื่องมาจาก x และพิจารณา y เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้
2. รวมพจน์ $\frac{dy}{dx}$ ไว้ทางด้านหนึ่งของสมการ และจัดพจน์ที่เหลือไว้อีกด้านหนึ่ง
3. แก้สมการเพื่อหาค่า $\frac{dy}{dx}$

<u>**ตัวอย่างที่ 46**</u> กำหนด $xy+x-2y-1=0$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

สามารถทำได้สองวิธี คือ

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของ $y=f(x)$

$$(x-2)y+x-1=0$$

$$y = \frac{1-x}{x-2}$$

ดังนั้น
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)\frac{d}{dx}(1-x) - (1-x)\frac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x-2)(-1)-(1-x)(1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-x+2-1+x}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-2)^2}$$

หรือ หาอนุพันธ์โดยคิดว่า y อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x

$$xy + x - 2y - 1 = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} + \frac{dx}{dx} - 2\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}1 = 0$$

$$xy' + y + 1 - 2y' - 0 = 0$$

$$(x-2)y' = -y - 1$$

$$y' = \frac{-y-1}{x-2} = \frac{\frac{x-1}{x-2} - 1}{x-2}$$

$$y' = \frac{x-1-x+2}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$ ###

<u>ตัวอย่างที่ 47</u> กำหนดให้ $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{d}{dx}(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$$

$$4 \cdot 2x\frac{dx}{dx} + 9 \cdot 2y\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}36 = 0$$

$$8x + 18yy' = 0$$

$$y' = \frac{-8x}{18y} = \frac{-4x}{9y}$$ ###

<u>ตัวอย่างที่ 48</u> กำหนดให้ $y = 3x^2 + 4xy + y^2 + x - 2y + 7$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + 4xy + y^2 + x - 2y + 7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6\frac{dx}{dx} + 4x\frac{dy}{dx} + 4y\frac{dx}{dx} + 4y\frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dx} - 2\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}7$$

$$-y' + 6x + 4xy' + 4y + 2yy' + 1 - 2y' = 0$$

$$(6x + 4y + 1) + (4x + 2y - 2)y' = 0$$

$$y' = \frac{-(6x + 4y + 1)}{4x + 2y - 3} \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 49 กำหนดให้ $xy = 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}1$$

$$x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 50 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $y^3 + xy^2 + x^2y = 2x^3$

วิธีทำ

จาก $y^3 + xy^2 + x^2y = 2x^3$

$$\frac{d}{dx}(y^3 + xy^2 + x^2y) = \frac{d}{dx}(2x^3)$$

$$\frac{d}{dx}y^3 + \frac{d}{dx}xy^2 + \frac{d}{dx}x^2y = \frac{d}{dx}2x^3$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + \left(x\frac{dy^2}{dx} + y^2\frac{dx}{dx}\right) + \left(x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{dx^2}{dx}\right) = 6x^2$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 2xy - y^2}{3y^2 + 2xy + x^2} \qquad \text{###}$$

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยที่ x เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ y นั่นคือ $x = g(y)$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ เราสามารถจะหา $g'(y)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ได้โดยไม่ต้องหาค่า x ในเทอมของ y แต่อย่างใด แต่หาได้ด้วยการหาอนุพันธ์อย่างโดยปริยายเทียบกับ y ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 51 กำหนดให้ $y = x^4 - 2x + 5$ จงหา $\dfrac{dx}{dy}$

วิธีทำ

หาอนุพันธ์เทียบกับ y จะได้

$$\frac{dy}{dy} = \frac{d}{dy}\left(x^4 - 2x + 5\right)$$

$$1 = \frac{d}{dy}\left(x^4\right) - 2\frac{dx}{dy} + 5\frac{d}{dy}$$

$$1 = 4x^3\,\frac{dx}{dy} - 2\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x^3 - 2} \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 52 จงหา y' เมื่อ $y = 2x^{3/4} + 4x^{-1/4}$

วิธีทำ

$$y = 2x^{3/4} + 4x^{-1/4}$$

$$y' = 2\cdot\frac{3}{4}x^{-1/4} + 4\left(\frac{-1}{4}\right)x^{\frac{-5}{4}}$$

$$= \frac{3}{2}x^{-1/4} - x^{-5/4} \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 53 จงหาอนุพันธ์ของ $s = 3\sqrt{\dfrac{2+3t}{2-3t}}$

วิธีทำ

$$s = 3\sqrt{\frac{2+3t}{2-3t}}$$

$$= \left(\frac{2+3t}{2-3t}\right)^{1/3}$$

$$s = u^{\frac{1}{3}}, u = \frac{2+3t}{2-3t}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{2+3t}{2-3t}\right)$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{12}{(2-3t)^2}$$

$$= 4\left(\frac{2+3t}{2-3t}\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{1}{(2-3t)^2} \qquad \#\#\#$$

สำหรับการหาอนุพันธ์อันดับสูง เราสามารถประยุกต์ใช้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 54 กำหนดสมการ $x^2 + y^2 = 25$ โดยให้ y เป็นฟังก์ชันของ x

จงหา $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ ที่จุด (3,4)

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{y}\right)$$

$$= \frac{-\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}{y^2}$$

$$= \frac{-\left(y + x \cdot \frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= \frac{-\left(x^2 + y^2\right)}{y^3}$$

ที่จุด (3,4) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{4}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(9+25)}{64} = \frac{-25}{64}$ ###

แบบทดสอบ
เรื่องอนุพันธ์

1. นิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ชุดที่ 1

1. กำหนดให้ $f(x)=x^2$ จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)$

ก. $2x^2$ ข. 2 ค. $2x$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=\sqrt{x}$

ก. $\frac{2}{\sqrt{x}}$ ข. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ค. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{x}{x-1}$

ก. $\frac{-1}{(x-1)^2}$ ข. $\frac{1}{(x-1)^2}$ ค. $\frac{1}{(x-1)}$

4. กำหนดให้ $f(x)=2x^2+2x+3$ จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่จุด $(1,7)$

ก. 5 ข. 6 ค. 7

5. กำหนดให้ $p=f(q)=\frac{1}{2q}$ จงหา $\frac{dp}{dq}$

ก. $-\frac{1}{4q}$ ข. $-\frac{1}{2q^2}$ ค. $-\frac{1}{4q^2}$

6. จงหาความชันของเส้นตรง $y=2x+3$ ที่ $x=6$

ก. 2 ข. 5 ค. 9

7. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $s=t^3-t^2$ แล้วหาความชันของเส้นสัมผัสที่ $t=-1$

ก. $3t^2-t,-2$ ข. $3t^2-t,4$ ค. $3t^2-2t,5$

8. จงหาค่าของ $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=-1}$ ถ้า $s=1-3t^2$

ก. –3 ข. –6 ค. 6

9. จงใช้นิยามหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $p(\theta)=\sqrt{3\theta}$ แล้วหาค่าของอนุพันธ์ที่ $p=2/3$

ก. $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}},\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ข. $\frac{2}{3\sqrt{3\theta}},\frac{2}{3\sqrt{2}}$ ค. $\frac{2}{2\sqrt{3\theta}},\frac{3}{2\sqrt{2}}$

10. กำหนดให้ $y=\frac{5x^4-6x+7}{2x^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $5x^2+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}$ ข. $5x+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}$ ค. $3x+\frac{4}{x^3}+\frac{7}{x^2}$

11. กำหนดให้ $y=5y(100-y)$ จงหา $\frac{dv}{dy}$

ก. $500-10y$ ข. $500-y^2$ ค. $500-2y$

12. กำหนดให้ $p=\frac{1}{\sqrt{q+1}}$ จงหา $\frac{dp}{dq}$

ก. $\frac{-1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$ ข. $\frac{1}{(2q-1)\sqrt{q+1}}$ ค. $\frac{-1}{(2q+1)\sqrt{q+1}}$

ชุดที่ 2

1. กำหนดให้ $y=2x^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $6x^2$ ข. $6x^3$ ค. $3x^2$

2. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x}$ จงหา $f'(x)$ ที่ $x=9$

ก. 1/3 ข. 1/6 ค. 1/9

3. กำหนดให้ $y=ax^2+bx+c$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $2x+b$ ข. $2a^2+b$ ค. $2ax+b$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{x}{x+3}$

ก. $\frac{1}{(x+3)^2}$ ข. $\frac{2}{(x+3)^2}$ ค. $\frac{3}{(x+3)^2}$

5. กำหนดให้ $y = 3x^2 - 4x + 5$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $6x - 4$ ข. $3x + 5$ ค. $6x + 5$

6. กำหนดให้ $s = \dfrac{t}{2t+1}$ จงหา $\dfrac{ds}{dt}$

ก. $\dfrac{1}{2(t+1)^2}$ ข. $\dfrac{1}{(2t+1)^2}$ ค. $\dfrac{2}{(t+1)^2}$

7. จงใช้นิยามหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 4 - x^2$ แล้วหาค่าของอนุพันธ์ที่ $x = -3$

ก. $-x,3$ ข. $2x,-6$ ค. $-2x,6$

8. จงหาค่าของ $\left.\dfrac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$ เมื่อ $r = \dfrac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

ก. 1/8 ข. 1/7 ค. 1/6

9. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ แล้วหาความชันของเส้นสัมผัสที่ $x = -3$

ก. $1 - \dfrac{9}{x},4$ ข. $1 - \dfrac{9}{x^2},0$ ค. $1 + \dfrac{9}{x^2},2$

10. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}}$ แล้วหาสมการของเส้นสัมผัสที่จุด $(x, y) = (6,4)$

ก. $\dfrac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}},\dfrac{-1}{2}$ ข. $\dfrac{-4}{(x+2)\sqrt{x-2}},\dfrac{1}{2}$ ค. $\dfrac{4}{(x-2)\sqrt{x-2}},\dfrac{1}{2}$

11. จงใช้นิยามหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ แล้วหาค่าของอนุพันธ์ที่ $g = \sqrt{3}$

ก. $\dfrac{-1}{t^3},\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}$ ข. $\dfrac{-2}{t^3},\dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$ ค. $\dfrac{-1}{t^3},\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$

12. กำหนดให้ $z = \dfrac{1-t^3}{1+t^4}$ จงหา $\dfrac{dz}{dt}$

ก. $\dfrac{t^4 - 3t^3 - 3t}{(1+t^2)^2}$ ข. $\dfrac{t^6 - 4t^3 - 3t^2}{(1+t^4)^2}$ ค. $\dfrac{t^7 - 6t^4 - 2t^2}{(1+t^4)^3}$

2. กฎการหาอนุพันธ์

ชุดที่ 1

1. จงหา $\frac{d}{dx}(8)$

   ก. 0 ข. 1 ค. X

2. จงหา $\frac{d}{dx}(1{,}938{,}623)^{807.4}$

   ก. 0 ข. 1 ค. X

3. กำหนดให้ $f(x)=x^{-27}$ จงหา $f'(x)$

   ก. $-27x^{-26}$ ข. $-27x^{26}$ ค. $-27x^{-28}$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$

   ก. $\frac{2}{3x^{3/2}}$ ข. $-\frac{3}{2x^{3/2}}$ ค. $\frac{3}{2x^{-1/2}}$

5. กำหนดให้ $f(x)=\frac{0.25}{\sqrt[5]{x^2}}$ จงหา $f'(x)$

   ก. $0.01x^{-2/5}$ ข. $-0.1x^{-7/5}$ ค. $-x^{-5/2}$

6. กำหนดให้ $f(x)=x^3+(4/3)x^2-5x+1$ จงหา $f'(x)$

   ก. $3x+(8/3)$ ข. $3x^2+(4/6)x-5$ ค. $3x^2+(8/3)x-5$

7. กำหนดให้ $f(x)=\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^3$ จงหา $f'(x)$

   ก. $\frac{3(2x+1)^2}{(3x+2)^2}$ ข. $\frac{2(2x+1)^2}{(3x+2)^3}$ ค. $\frac{3(2x+1)^2}{(3x+2)^4}$

8. กำหนดให้ $f(x)=x^2(2x+3)^5$ จงหา $f'(x)$

   ก. $2x(10x+3)(2x+3)^4$ ข. $2x(7x+3)(2x+3)^4$ ค. $10x(5x+2)(2x+3)^4$

9. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ จงหา $f'(x)$

ก. $-\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$ ข. $-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ ค. $-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

10. จงหาอนุพันธ์ของ $y=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}$

ก. $-\dfrac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$ ข. $\dfrac{x^2-5}{(x^2+2x-1)^3}$ ค. $-\dfrac{x^3+x}{(x^2+1)^2}$

11. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=x^3(\sqrt{x}+1)$

ก. $\dfrac{7}{2}x^{5/2}+3x^2$ ข. $\dfrac{5}{2}x^{1/2}+3x^2$ ค. $\dfrac{1}{2}x^{3/2}+3x^2$

12. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=6x^8-x^3+5x^2+\pi^3$

ก. $48x^7-3x^2+10x$ ข. $48x^7-3x^2+10x+3\pi^2$ ค. $48x^7-3x^2+10x+1$

13. จงหา $\dfrac{d}{dx}[(x^2+x^3)(x^4-\sqrt{x}+5)]$

ก. $(x^2+x^3)(4x^3-\dfrac{3}{2\sqrt{x}})+(x^4-\sqrt{x}+5)(5x)$

ข. $(x^2+x^3)(4x^3-\dfrac{1}{2\sqrt{x}})+(x^4-\sqrt{x}+5)(2x+3x^2)$

ค. $(x^2+x^3)(4x^4+\dfrac{1}{\sqrt{x}})+(x^4-\sqrt{x}+5)(2x+3x^2)$

14. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

ก. $\dfrac{-x}{2\sqrt{1-x^2}}$ ข. $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ ค. $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

15. จงหา $\dfrac{d}{dx}\left(3x^8-\sqrt{2}x^5+\dfrac{3}{2}x^3+20x+1\right)\Big|_{x=-1}$

ก. $\dfrac{1}{2}-5\sqrt{2}$ ข. $\dfrac{1}{3}-4\sqrt{2}$ ค. $\dfrac{1}{4}+3\sqrt{2}$

ชุดที่ 2

1. กำหนดให้ $f(x)=x^{-4}$ จงหา $f'(x)$

ก. $-4x^{3}$ ข. $-4x^{-5}$ ค. $-4x^{-3}$

2. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ จงหา $f'(x)$

ก. $-\dfrac{3}{2}x^{5/2}$ ข. $\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$ ค. $-\dfrac{3}{2}x^{-5/2}$

3. จงหา $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{3})$

ก. 0 ข. 1 ค. x

4. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{x^{10}}$ จงหา $f'(x)$

ก. $-10x^{-11}$ ข. $10x^{-11}$ ค. $-10x^{11}$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=(2x)(x^{2}-5x+2)$ เมื่อ $x=2$

ก. –12 ข. –10 ค. – 8

6. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{(4x^{2}-7)^{2}}$ จงหา $f'(x)$

ก. $\dfrac{16x}{(4x^{2}-7)^{-3}}$ ข. $-\dfrac{16x}{(4x^{2}-7)^{3}}$ ค. $\dfrac{8x}{(4x^{2}-7)}$

7. กำหนดให้ $G(x)=\sqrt{x^{2}+1}$ จงหา $G'(x)$

ก. $\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}$ ข. $\dfrac{2x}{\sqrt{x^{2}+1}}$ ค. $\dfrac{x}{2\sqrt{x^{2}+1}}$

8. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $s(t)=\dfrac{5t}{t^{2}+1}$

ก. $\dfrac{5(1-t^{2})}{(t^{2}+1)^{2}}$ ข. $\dfrac{5(1+t^{2})}{(t^{2}+1)^{2}}$ ค. $\dfrac{5(1-2t)}{(t^{2}+1)^{2}}$

9. จงหา y' เมื่อ $y = \dfrac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$

ก. $\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{6}{x^4}$ ข. $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{6}{x^4}$ ค. $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{5}{x^3}$

10. กำหนดให้ $y = (x+2)(x+3)(x+4)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $9x^2 + 12x$ ข. $3x^2 + 18x + 26$ ค. $x^2 + 34x + 29$

11. กำหนดให้ $y = (x^2-4)^5(3x+5)^4$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $6(x^2-4)^4(3x+5)^3(4x^2+21x+17)$

ข. $20(x^2-4)^4(3x+5)^3(10x^2-3x+22)$

ค. $2(x^2-4)^4(3x+5)^3(21x^2+25x-24)$

12. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x}(x^2-2)(2x^3+1)$

ก. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-2)(2x^3+1) + \sqrt{x}(2x)(2x^3+1) + \sqrt{x}(x^2-2)(6x^2)$

ข. $\dfrac{x}{\sqrt{x}}(2x^3+1) + 2x\sqrt{x}(2x^3+1) + \sqrt{x}(x^2-2)(6x^2)$

ค. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}(x^2-2)(2x^3+1) + 2\sqrt{x}(2x^3+1) + \sqrt{x}(x^2-2)(6x^2)$

13. กำหนดให้ $f(x) = 6x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5$ จงหา $f'(x)$

ก. $30x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 8x - 6$

ข. $30x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 8x - 6$

ค. $30x^5 - 12x^4 + 6x^3 + 8x - 6$

14. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{(4x^2+3x-2)^2}$ เมื่อ $x = -2$

ก. $-\dfrac{11}{6}$ ข. $\dfrac{17}{4}$ ค. $-\dfrac{13}{3}$

15. กำหนดให้ $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ จงหา $h'(x)$

ก. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$ ข. $\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$ ค. $\dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

3. อนุพันธ์อันดับสูง

ชุดที่ 1

1. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชัน $y = x^3 - 3x^2 + 2$

   ก. $6x - 6$ ข. $x^2 - 6x$ ค. $3x^2 - 6$

2. กำหนดให้ $f(x) = -7$ จงหา $f''(x)$

   ก. 0 ข. 1 ค. 7

3. กำหนดให้ $y = f(x) = \dfrac{16}{x+4}$ จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ $x = 4$

   ก. 1/8 ข. 1/16 ค. 1/32

4. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สามของ $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$

   ก. $102x - 8$ ข. $72x - 12$ ค. $24x - 16$

5. กำหนดให้ $y = (2x^2 + 3)^{3/2}$ จงหา y''

   ก. $\dfrac{6(4x^2+3)}{\sqrt{2x^2+3}}$ ข. $\dfrac{8x^2+12}{\sqrt{7x^2+4}}$ ค. $\dfrac{24x^2+1}{\sqrt{3x^2+1}}$

6. กำหนดให้ $y = x^{2/3}$ จงหา y'''

   ก. $\dfrac{5}{7x^{4/3}}$ ข. $\dfrac{8}{27x^{7/3}}$ ค. $\dfrac{11}{25x^{8/3}}$

7. กำหนดให้ $s = t^3 - 2t^2 + 3t$ จงหา $\dfrac{d^2s}{dt^2}\Big|_{t=-2}$

   ก. -16 ข. -12 ค. -7

8. กำหนดให้ $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x - 1$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สี่

   ก. $70x - 6$ ข. $110x - 24$ ค. $120x - 72$

9. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สองของ $f(t) = t^{1/2} + t^{-1/2}$

   ก. $-\dfrac{1}{4}t^{-3/2} + \dfrac{3}{4}t^{-5/2}$ ข. $\dfrac{3}{4}t^{-1/2} + \dfrac{5}{4}t^{-3/2}$ ค. $\dfrac{5}{4}t^{-3/2} - \dfrac{7}{4}t^{5/2}$

10. กำหนดให้ $y=\frac{x^4}{2}-\frac{3}{2}x^2-x$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สอง

ก. $9x^3-5$ ข. $6x^2-3$ ค. $4x-1$

11. กำหนดให้ $y=\frac{x^3+7}{x}$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สอง

ก. $2+14x^{-3}$ ข. $2+11x^{-4}$ ค. $3+7x^{-4}$

12. กำหนดให้ $w=\left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สอง

ก. z^{-2} ข. $2z^{-3}$ ค. $5z^{-4}$

13. กำหนดให้ $f(x)=6x^3-12x^2+6x-2$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สาม

ก. 24 ข. 32 ค. 36

ชุดที่ 2

1. กำหนดให้ $f(x)=6x^3-12x^2+6x-2$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สอง

ก. $36x-24$ ข. $18x-24$ ค. $24x+6$

2. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สามของ $y=x^3-3x^2+2$

ก. $x-3$ ข. - 6 ค. 6

3. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สองของ $f(x)=2x+1$

ก. 0 ข. 1 ค. 2

4. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สี่ของ $f(x)=3x^4-2x^3+x^2-4x+2$

ก. 32 ข. 52 ค. 72

5. กำหนดให้ $f(x)=x^5-3x^4+2x-1$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สาม

ก. $30x^2-12x$ ข. $50x^2-42x$ ค. $60x^2-72x$

6. กำหนดให้ $y = x^4 - 5x^3 + 7$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=3}$

ก. 18 ข. 24 ค. 36

7. กำหนดให้ $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สอง

ก. $-12\theta^{-5}$ ข. $-10\theta^{-7}$ ค. $-8\theta^{-9}$

8. กำหนดให้ $p = \left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สอง

ก. $\frac{2}{3}q^{-3} - 2q$ ข. $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$ ค. $\frac{5}{2}q^4 + \frac{1}{6}q^{-5}$

9. กำหนดให้ $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่สาม

ก. $12x$ ข. $8x$ ค. $6x$

10. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ห้าของ $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$

ก. 2 ข. 1 ค. 0

11. กำหนดให้ $f(x) = 3x^{1/2}$ จงหา $f''(x)$

ก. $-\frac{1}{4}x^{5/2}$ ข. $-\frac{3}{4}x^{-3/2}$ ค. $-\frac{5}{4}x^{-1/2}$

12. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สี่ของ $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x^2} + 16x^{7/2}$

ก. $\frac{35}{x^4} + \frac{60}{x^2}$ ข. $\frac{90}{x^3} + \frac{115}{\sqrt{x^3}}$ ค. $\frac{120}{x^6} + \frac{105}{\sqrt{x}}$

13. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สองของ $f(x) = x^3 + (1/x)$

ก. $4x + x^{-5}$ ข. $6x + 2x^{-3}$ ค. $9x + 2x^{-1}$

4. อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ หรือกฎลูกโซ่

ชุดที่ 1

1. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x - \sin x \cos x$

   ก. $1+\sin^2 x - \cos^2 x$ ข. $2x^2 \sin x + \cos x$ ค. $2+\sin x - \cos^2 x$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^3 \sin x$

   ก. $3x^2 \cos x + x^3 \sin x$ ข. $3x^2 \sin x + x^3 \cos x$ ค. $x^2 \sin x - 3x^3 \cos x$

3. กำหนดให้ $y = \dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

   ก. $\dfrac{3\sin x}{4(2+\cos x)^2}$ ข. $\dfrac{2\sin x}{(2+\cos x)^2}$ ค. $\dfrac{4\sin x}{(2+\cos x)^2}$

4. กำหนดให้ $y = \tan x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

   ก. $\sec^2 x$ ข. $\csc^2 x$ ค. $\sec x \cot x$

5. กำหนดให้ $y = 2/\sin x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

   ก. $-\csc x \cot x$ ข. $-\cos x \sec x$ ค. $-2\csc x \cot x$

6. กำหนดให้ $y = 2u^2 - 3u - 2$ และ $u = x^2 + 4$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

   ก. $4x^2 - 5x$ ข. $8x^3 + 26x$ ค. $7x^4 + 2x^2 - 15$

7. กำหนดให้ $y = 4u^3 + 10u^2 - 3u - 7$ และ $u = \dfrac{4}{3x+5}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 1$

   ก. -15 ข. 17 ค. 25

8. กำหนดให้ $y = \sqrt{w}$ และ $w = 7 - t^3$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$

   ก. $-\dfrac{3t^2}{2\sqrt{7-t^3}}$ ข. $-\dfrac{2t}{\sqrt{5t+t^3}}$ ค. $-\dfrac{4t^3}{\sqrt{t^3+6}}$

9. กำหนดให้ $y = u^{12}$ และ $u = x^3 - 2x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $3x(4x^2 + x)^7 (3x^3 + 5)$

ข. $9(x^3 + 1)^{10}\left(5x^2 - 4x\right)$

ค. $12(x^3 - 2x)^{11}\left(3x^2 - 2\right)$

10. กำหนดให้ $y = \dfrac{1}{(6x^3 - x)^4}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $\dfrac{-4(6x^3 + 3)}{(18x^2 - x)^8}$ ข. $\dfrac{-4(18x^2 - 1)}{(6x^3 - x)^5}$ ค. $\dfrac{-4(18x^2 - 2)}{(18x^3 - x)^5}$

11. กำหนดให้ $y = \cos^3(x^2 + 1)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $\sin x - 3x\cos^2(x^2 + 1)\sin x$

ข. $-6x\cos^2(x^2 + 1)\sin(x^2 + 1)$

ค. $-3x\cos^2(x^2 + 1)\sin\left(x^2 + 1\right)$

12. กำหนดให้ $y = \sin\left(6x^2 - x\right)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $(6x - 1)\cos(6x^2 - x)$

ข. $(12x + 1)\cos(6x^2 - x)$

ค. $(12x - 1)\cos(6x^2 - x)$

13. กำหนดให้ $y = \tan^2(4x^3 - 1)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $2\left[\tan(4x^3 - 1)\right]\left[\csc(4x^3 - 1)\right](12x)$

ข. $2\left[\tan(4x^3 - 1)\right]\left[\sec(4x^3 - 1)\right](12x^2)$

ค. $2\left[\tan(4x^3 - 1)\right]\left[\sec(12x^2 - 1)\right]$

14. กำหนดให้ $y = \cos u$ และ $u = \sin x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $-\sin x\cos(\sin x)$ ข. $-\sin x(\cos x)\cos x$ ค. $-\sin(\sin x)\cos x$

15. กำหนดให้ $w = \tan x$ และ $x = 4t^3 + t$ จงหา $\dfrac{dw}{dt}$

ก. $(12t^2 + 1)\sec^2(4t^3 + t)$

ข. $t^2 \cot(2t - 3)$

ค. $5t\sec^2(3t^2)$

ชุดที่ 2

1. กำหนดให้ $y = 3x + \cot x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $3 + \sec^2 x$ ข. $3 - \csc^2 x$ ค. $3 - \tan^2 x$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \dfrac{\sin x}{x}$

ก. $\dfrac{-x\sin x + \cos x}{x^2}$ ข. $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ ค. $\dfrac{\cos x + x^2 \sin x}{x^2}$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \tan(x^2 + 1)$

ก. $2x\csc^2(x^2 + 1)$ ข. $2\sec^2(x^2 + 1)$ ค. $2x\sec^2(x^2 + 1)$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sin x \cos x$

ก. $\cos^2 x - \sin^2 x$ ข. $x\cos x + \sin^2 x$ ค. $\cos^2 x + \sin^2 x$

5. กำหนดให้ $y = x\sin x$ จงหาอนุพันธ์อันดับสองของ y

ก. $2\cos x - x\sin x$ ข. $3\sin x + x\cos x$ ค. $3x\cos x - x\sin x$

6. กำหนดให้ $y = u^5 - 2u^3 + 8$ และ $u = x^2 + 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $\left[8x^3 + (2x^2 - 4)^4\right] \cdot 5x$

ข. $\left[5(x^2 + 1)^4 - 6(x^2 + 1)^2\right] \cdot 2x$

ค. $\left[(x^3 - 4)^2 - (x + 6)^4\right] \cdot x$

7. กำหนดให้ $y = u^{100}$ และ $u = 1 + x^2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ก. $200x(1 + x^2)^{99}$ ข. $170x(1 + x^2)^{99}$ ค. $140x(1 + x^2)^{99}$

8. กำหนดให้ $y = \tan u$ และ $u = 10x - 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $10\sec^2(10x-5)$ ข. $10\sec(10x-5)$ ค. $10\csc(10x-5)$

9. กำหนดให้ $y = 4\cos u$ และ $u = x^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $-6x\sin x^2$ ข. $-10x\sin x^3$ ค. $-12x^2\sin x^3$

10. กำหนดให้ $y = \frac{1}{1+\sin^2 x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{2\sin x\cos 2x}{(1+2\sin x)^2}$ ข. $\frac{-2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^2}$ ค. $\frac{-\sin 2x\cos x}{(1+\sin^2 x)^2}$

11. จงหาอนุพันธ์ของ $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$

ก. $(\cot 2t)\csc^2(5-\sin 2t)$

ข. $-2(\cot 2t)\sec^2(5-\sin 2t)$

ค. $2(\cot t)\sec^2(5-\sin 2t)$

12. กำหนดให้ $y = \sqrt{(1+x^2)^5}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $5x(1+x^2)^{3/2}$ ข. $\frac{5}{2}(1+x^2)^{3/2}$ ค. $2x(1+x^2)^{3/2}$

13. กำหนดให้ $y = \sin^2 3x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $2\sin 3x\cos x$ ข. $2\sin 3x\cos 3x$ ค. $6\sin 3x\cos 3x$

14. กำหนดให้ $y = 6u - 9$ และ $u = \frac{1}{2}x^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $12x^3$ ข. $2x^3+6$ ค. $\frac{3}{2}x^3$

15. จงหา $\frac{d}{dx}(x^2\sin^5 2x)$

ก. $10x^2\sin^4 2x\cos 2x + 2x\sin^5 2x$

ข. $10x\sin^4 2x + 2x\sin^5 2x\cos 2x$

ค. $5x\sin^4 2x\cos 2x + 2x\sin^5 2x$

5. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ชุดที่ 1

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y + y^3 - x = 7$

ก. $\frac{1}{1+3y^2}$ ข. $\frac{2}{2+y^3}$ ค. $\frac{3}{3-4y^2}$

2. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$

ก. $\frac{4x^3 - 8xy^2}{3y^2 + 2x}$ ข. $\frac{3x^2 + 4y^2}{4y^3 - 8xy}$ ค. $\frac{8y^2 + 4x^2}{4x^3 - 3x^2 y}$

3. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $2y = x^2 + \sin y$

ก. $\frac{2x}{2 - \cos y}$ ข. $\frac{2}{2 + \cos xy}$ ค. $\frac{2}{2x + \cos y}$

4. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x^2 y^6 = 1$

ก. $-\frac{y}{3x}$ ข. $\frac{3x}{y}$ ค. $-\frac{3y}{2x}$

5. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $4x^2 y - 3y = x^3 - 1$

ก. $\frac{x^4 - 4x^2 + 6}{(4x^2 - 3)^3}$ ข. $\frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$ ค. $\frac{3x^2 - 3 + 8xy}{(4x^2 y - 3)}$

6. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x^2 + 5y^3 = x + 9$

ก. $\frac{1-2x}{15y^2}$ ข. $\frac{2x+1}{15y^2}$ ค. $\frac{15y^2}{1+2x}$

7. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y^3 - xy^2 + \cos(xy) = 2$

ก. $\frac{3y^2 + x\sin xy}{-2xy + y\sin xy}$ ข. $\frac{y^2 + y\sin xy}{3y^2 - 2xy - x\sin xy}$ ค. $\frac{3y^2 - 2xy}{y^2 - 2xy - x\sin xy}$

8. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x^2 + y^2 = 9$

ก. $\frac{-x}{y}$ ข. $\frac{y}{x}$ ค. $\frac{x}{y}$

9. กำหนดให้ $2xy + \pi \sin y = \pi$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 1$ และ $y = \frac{\pi}{2}$

ก. $-2/\pi$ ข. -2π ค. $-\pi/2$

10. กำหนดให้ $x^2 + y^2 = 4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 1$ และ $y = \sqrt{3}$

ก. $\sqrt{3}/2$ ข. $-1/\sqrt{3}$ ค. $-\sqrt{3}$

11. กำหนดให้ $x^3 = (y - x^2)^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 1$ และ $y = 2$

ก. 5/2 ข. 7/2 ค. 9/2

12. กำหนดให้ $x^2 + 4y^2 = 4$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

ก. $-\frac{8}{y^3}$ ข. $-\frac{1}{4y^3}$ ค. $-\frac{1}{16y^2}$

13. กำหนดให้ $2x^3 - 3y^2 = 7$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

ก. $\frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}$ ข. $\frac{6x^2}{y} - \frac{x^3}{6y}$ ค. $\frac{2x}{y^2} - \frac{x^3}{6y}$

14. กำหนดให้ $2xy + y^2 = x + y$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{1+2y}{2y-1}$ ข. $\frac{2y-1}{2x+2y}$ ค. $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

15. กำหนดให้ $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{1}{y(x+1)^2}$ ข. $\frac{x}{y(x+1)^2}$ ค. $\frac{y}{(x+1)^2}$

ชุดที่ 2

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $5y^2 + \sin y = x^2$

ก. $\frac{10y}{2x+\cos y}$ ข. $\frac{2x}{10y+\cos y}$ ค. $\frac{\cos y}{10y+2x}$

2. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $60x^{3/4}y^{1/4} = 324060$

ก. $\frac{-x}{3y}$ ข. $\frac{-3y}{4x^{-3}}$ ค. $\frac{-3y}{x}$

3. กำหนดให้ $x^2 + y^2 = 9$ จงหา $\frac{dy}{dt}$ ในพจน์ของ x, y

ก. $-2\frac{x}{y}\frac{dy}{dt}$ ข. $-\frac{2x}{y}\frac{dy}{dt}$ ค. $-\frac{x}{y}\frac{dy}{dt}$

4. กำหนดให้ $x^2 + y^2 = 25$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 3$ และ $y = 4$

ก. -4 / 3 ข. –3 / 4 ค. 4 / 3

5. กำหนดให้ $y^3 - y + 2x^3 - x = 8$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{1-6x^2}{3y^2-1}$ ข. $\frac{6x^2-1}{1+3y^2}$ ค. $\frac{1+6x^2}{1-3y^2}$

6. กำหนดให้ $x^2 + y^2 = 9$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

ก. $\frac{-9}{y^2}$ ข. $\frac{-3}{y}$ ค. $\frac{-9}{y^3}$

7. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x^3 + y^3 = 2xy$

ก. $\frac{2y-3x^2}{3y^2-2x}$ ข. $\frac{3y^2+3x^2}{2(y+x)}$ ค. $\frac{2x+3y^2}{3x^2+2y}$

8. กำหนดให้ $\sin(xy) = x^2 \cos y$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 2$ และ $y = \pi/2$

ก. $\pi/4$ ข. $3\pi/4$ ค. $5\pi/4$

9. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $x^2y + xy^3 - 3x = 5$

ก. $\frac{y^2+3xy}{2x+2xy^2}$ ข. $\frac{3-y^3-2xy}{x^2+3xy^2}$ ค. $\frac{y^3+2xy-3}{2x^2-3y^2}$

10. กำหนดให้ $x^2y^3 + 6x^2 = y + 12$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 1$ และ $y = 2$

ก. -11 / 10 ข. –18 / 7 ค. –28 / 11

11. กำหนดให้ $x^2y + xy^2 = 6$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{2xy+y^2}{x^2y+2xy}$ ข. $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$ ค. $\frac{2xy+y^2}{2x-2xy}$

12. กำหนดให้ $\sqrt{x^2+y^2} - x^2 = 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{2x-\sqrt{x^2+y^2}}{2y}$ ข. $\frac{-2x\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ ค. $\frac{2x\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$

13. กำหนดให้ $9x^2 + 4y^2 = 36$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

ก. $-\frac{25}{9y}$ ข. $-\frac{39}{6y^2}$ ค. $-\frac{81}{4y^3}$

14. กำหนดให้ $x + \tan(xy) = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{2\cos(xy)+1}{y}$ ข. $\frac{\cos^2(xy)-1}{y}$ ค. $\frac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

15. กำหนดให้ $x = \tan y$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\sin^2 y$ ข. $\cos^2 y$ ค. $\cot^2 y$

เฉลยแบบทดสอบ

1. นิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ชุดที่ 1

1.	ค	7.	ค
2.	ค	8.	ค
3.	ก	9.	ก
4.	ข	10.	ข
5.	ข	11.	ก
6.	ก	12.	ก

ชุดที่ 2

1.	ก	7.	ค
2.	ข	8.	ก
3.	ค	9.	ข
4.	ค	10.	ก
5.	ก	11.	ข
6.	ข	12.	ข

2. ทฤษฎีบทของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ชุดที่ 1

1. ก
2. ก
3. ค
4. ข
5. ข
6. ค
7. ค
8. ข
9. ค
10. ก
11. ก
12. ก
13. ข
14. ค
15. ก

ชุดที่ 2

1. ข
2. ค
3. ก
4. ก
5. ก
6. ข
7. ก
8. ก
9. ข
10. ข
11. ค
12. ก
13. ข
14. ค
15. ค

3. อนุพันธ์อันดับสูง

ชุดที่ 1

1. ก	8. ค
2. ก	9. ก
3. ข	10. ข
4. ข	11. ก
5. ก	12. ข
6. ข	13. ค
7. ก	

ชุดที่ 2

1. ก	8. ข
2. ค	9. ก
3. ก	10. ค
4. ค	11. ข
5. ค	12. ค
6. ก	13. ข
7. ก	

4. อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ หรือกฎลูกโซ่

ชุดที่ 1

1.	ก	9.	ค
2.	ข	10.	ข
3.	ค	11.	ข
4.	ก	12.	ค
5.	ค	13.	ข
6.	ข	14.	ค
7.	ก	15.	ก
8.	ก		

ชุดที่ 2

1.	ข	9.	ค
2.	ข	10.	ข
3.	ค	11.	ข
4.	ก	12.	ก
5.	ก	13.	ค
6.	ข	14.	ก
7.	ก	15.	ก
8.	ก		

5. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ชุดที่ 1

1. ก
2. ข
3. ก
4. ก
5. ข
6. ก
7. ข
8. ก
9. ค
10. ข
11. ข
12. ข
13. ก
14. ค
15. ก

ชุดที่ 2

1. ข
2. ค
3. ค
4. ข
5. ก
6. ค
7. ก
8. ก
9. ข
10. ค
11. ข
12. ค
13. ค
14. ค
15. ข

บทที่ 7
การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Application of Derivatives)

7.1 กราฟของฟังก์ชัน (Graph of Functions)

การเขียนกราฟของฟังก์ชันที่ยุ่งยากสับสนจะง่ายขึ้น เมื่อเราใช้ความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันเข้าไปประยุกต์ อนุพันธ์ทำให้เราทราบว่ากราฟของฟังก์ชันจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงเมื่อไร และเมื่อไรเส้นสัมผัสของกราฟจะมีความชันเป็นศูนย์

ทฤษฎีบทที่เป็นพื้นฐานสำคัญ

นิยามที่ 1 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $a \le x \le b$ แล้วจะมีจำนวน m และ M ที่ทำให้ $f(x_1) = m$ และ $f(x_2) = M$ สำหรับบางค่าของ x_1, x_2 ในช่วง $a \le x \le b$ นี้ที่ทำให้ $m \le f(x) \le M$ สำหรับ $a \le x \le b$ เรียกค่า m ว่าเป็นค่าต่ำสุด(ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์)ของ f และเรียกค่าM ว่าค่าสูงสุด(ค่าสูงสุดสัมบูรณ์)ของ f

นิยามที่ 2 (ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด) กำหนดฟังก์ชัน f ให้ในช่วงที่กำหนดจะเรียกชนิดของฟังก์ชัน f ได้ดังต่อไปนี้

1. ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุกค่าของ $x_1 < x_2$ ในช่วงที่กำหนดจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2. ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุกค่าของ $x_1 < x_2$ ในช่วงที่กำหนดจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันลดลง
3. ถ้า $f(x_1) \le f(x_2)$ สำหรับทุกค่าของ $x_1 < x_2$ ในช่วงที่กำหนดจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันไม่ลดลง
4. ถ้า $f(x_1) \ge f(x_2)$ สำหรับทุกค่าของ $x_1 < x_2$ ในช่วงที่กำหนดจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันไม่ขึ้นเพิ่ม

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $a \le x \le b$ และ f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่จุด x_0 ซึ่ง x_0 เป็นจุดจุดหนึ่งภายในช่วง $a \le x \le b$ (x_0 ไม่ใช่จุดปลายของช่วง) ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ x_0 แล้ว $f'(x_0) = 0$

<u>นิยามที่ 3</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าแน่นอนในช่วง I และมีจุด x_0 เป็นจุดภายในช่วงซึ่งทำให้มีช่วงย่อย I_h ของ I (I_h นี้จะเป็นช่วงปิด $[x_0 - h, x_0 + h]$ หรือช่วงเปิด $(x_0 - h, x_0 + h)$ ก็ได้) ถ้าในช่วงย่อย I_h นี้ทำให้ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดที่จุด x_0 เราเรียกฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (Relative Maximum)ที่จุด x_0 และถ้าในช่วงย่อย I_h ทำให้ f มีค่าต่ำสุดที่จุด x_0 เราเรียกฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์(Relative Minimum)ที่จุด x_0

จากทฤษฎีบทที่ 1 และ บทนิยาม สามารถสรุปได้ว่าจุดที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์แล้วอนุพันธ์ที่จุดนั้นมีค่าเป็นศูนย์ แต่บางครั้งพบว่าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่จุด x_0 แต่ $f'(x_0) \neq 0$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> **ทฤษฎีบทของโรลล์** (Rolle's Theorem) สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆจุดในช่วงปิด $[a,b]$ และ f มีอนุพันธ์ที่ทุกๆจุดในช่วงเปิด (a,b) และถ้า

$$f(a) = f(b) = 0$$

แล้วจะมีจุด x_0 อย่างน้อยหนึ่งจุดระหว่าง a และ b ที่ทำให้

$$f'(x_0) = 0$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาจำนวนของ x ที่ทำให้อนุพันธ์ของ $f(x)$ เป็น 0 เมื่อ $f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)$ ในช่วง $0 \leq x \leq 10$

<u>วิธีทำ</u>

จาก $f(x)$ ที่กำหนดให้จะเห็นว่า $f(x)$ มีกำลังสูงสุดของ x เป็น 4

ดังนั้น $f'(x)$ มีกำลังสูงสุดของ x เป็น 3

และ $f(x) = 0$ เมื่อ $x = 1, x = 2, x = 4, x = 7$

และจากทฤษฎีบทของโรลล์ เราพิจารณาแต่ละช่วงปิด $[1,2], [2,4], [4,7]$

จะได้ $f(1) = f(2) = 0, f(2) = f(4)0, f(4) = f(7) = 0$

ดังนั้นจะมีจุดภายในแต่ละช่วงย่อยอย่างน้อยหนึ่งจุดที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$

นั่นคือ $1 < x_1 < 2, 2 < x_2 < 4, 4 < x_3 < 7$

แสดงว่ามีจุด 3 จุดที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$

###

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f(x) = x^{1/2} - x^{-3/2}, x \in [0,1]$ จงหาค่าของ x ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์

<u>วิธีทำ</u>

จาก $f(x)$ ที่กำหนดให้จะเห็นว่า f มีความต่อเนื่องบน $[0,1]$

และมีอนุพันธ์บน $(0,1)$ และ $f(0)=f(1)=0$

และจากทฤษฎีบทของโรลล์ จะมี $x \in (0,1)$ ที่ทำให้ $f'(x_0)=0$

เนื่องจาก $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-3x)$

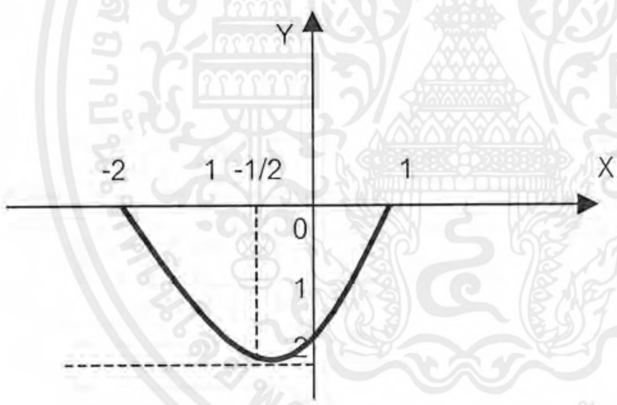
ดังนั้น $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-3x)=0$ เมื่อ $x=\frac{1}{3}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3</u> ทฤษฎีค่ามัชฌิม (Mean Value Theorem) ถ้า $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆจุดในช่วงปิด $[a,b]$ และมีอนุพันธ์ที่ทุกๆจุดในช่วงเปิด (a,b) แล้ว จะมีจุด x_0 อย่างน้อยหนึ่งจุดระหว่าง a และ b ที่ทำให้

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้ $f(x)=x^2+x-2$ จงหาจุด x_0 ที่อยู่ในช่วงเปิด $(-2,1)$ ที่ทำให้ $f'(x_0)=0$

<u>วิธีทำ</u>



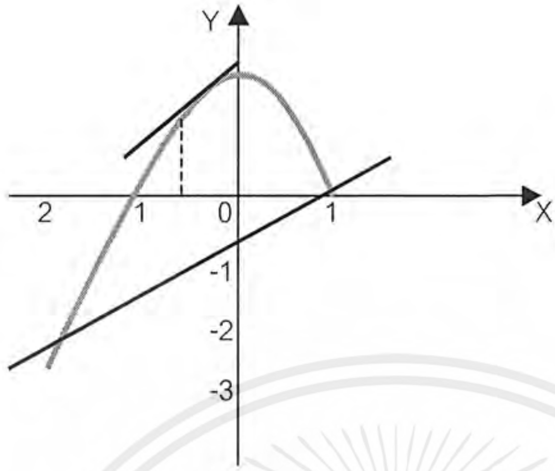
รูปที่ 7.1

จาก

$$f(x)=x^2+x-2$$
$$f(1)=1+1-2=0$$
$$f(-2)=4-2-2=0$$
$$f'(x)=2x+1$$
$$2x+1=0$$
$$x=\frac{-1}{2}$$
$$x_0=\frac{-1}{2} \qquad \#\#\#$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กำหนดให้ $f(x)=1-x^2, a=-2, b=1$ จงหาจุด x_0 ในช่วง (a,b) ที่ทำให้ $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 7.2

$$\text{จาก}\quad f(x)=1-x^2$$

$$f(1)=1-1=0$$

$$f(-2)=1-4=-3$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{0+3}{1-(-2)}$$

$$=\frac{3}{3}$$

$$f'(x)=-2x$$

$$-2x=\frac{3}{3}$$

$$x=\frac{-1}{2}$$

$$x_0=\frac{-1}{2}$$

นั่นคือ $f'\left(\dfrac{-1}{2}\right)=1$ ###

<u>นิยามที่ 4</u> ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f มีค่ามากกว่าศูนย์ $(f'(x)>0)$ ที่ทุกๆจุดของ x ในช่วงเปิด (a,b) แล้วฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นในช่วงเปิด (a,b)

นิยามที่ 5 ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f มีค่าน้อยกว่าศูนย์ $(f'(x) < 0)$ ที่ทุกๆจุดของ x ในช่วงเปิด (a,b) แล้วฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดลงในช่วงเปิด (a,b)

นิยามที่ 6 จุดวิกฤต (Critical point) ของฟังก์ชัน f คือจุด x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$

ดังนั้นถ้าเราต้องการจะทราบว่าจุดจุดหนึ่งเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์หรือไม่ จะต้องหาจุดวิกฤต แล้วต้องหาวิธีที่จะชี้หรือแสดงว่าจุดนั้นเป็นจุดที่ฟังก์ชันค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีสุดขีดที่จุด x_0

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น $(f' > 0)$ ในช่วงเปิด $(x_0 - h_1, x_0)$ และเป็นฟังก์ชันลดลง $(f' < 0)$ ในช่วงเปิด $(x_0, x_0 + h_2)$ โดยมี h_1, h_2 เป็นจำนวนจริงบวกอย่างน้อยอย่างละตัว จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด x_0
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันลดลง $(f' < 0)$ ในช่วงเปิด $(x_0 - h_1, x_0)$ และเป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น $(f' > 0)$ ในช่วงเปิด $(x_0, x_0 + h_2)$ โดยมี h_1, h_2 เป็นจำนวนจริงบวกอย่างน้อยอย่างละตัว จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด x_0

สรุป ขั้นตอนในการหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$

1. หาจุดวิกฤต a โดยหาค่า a ซึ่ง $f'(a) = 0$ หรือ $f'(a)$ หาค่าไม่ได้
2. ตรวจสอบจุดวิกฤต a ว่าให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์โดย

   2.1 ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบ เมื่อ x ผ่าน a จากน้อยไปหามาก $(x \neq a)$ จะได้ว่า $f(a)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

   2.2 ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากลบเป็นบวก เมื่อ x ผ่าน a จากมากไปหาน้อย $(x \neq a)$ จะได้ว่า $f(a)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

   2.3 ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย เมื่อ x ผ่าน a จากน้อยไปหามาก $(x \neq a)$ จะได้ว่า $f(a)$ ไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$ ว่ามีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดใด ในช่วงปิด $[-3,5]$ เมื่อไร f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและเมื่อไร f เป็นฟังก์ชันลด

<u>วิธีทำ</u>

จาก $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$

เราได้ $f'(x)=x^2-2x-3$

$=(x+1)(x-3)$

เราจะหาจุดวิกฤต โดยหาค่า x เมื่อ $f'(x)=0$

$$f'(x)=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
$$x=-1, x=3$$

จะหาว่าเมื่อไร $(x+1)(x-3)>0$ และ $(x+1)(x-3)<0$

จากเรื่องอสมการจะได้ว่า

ถ้า $x+1>0$ และ $x-3>0$

หรือ $x+1<0$ และ $x-3<0$

แล้ว $f'(x)>0$

ถ้า $x+1>0$ และ $x-3<0$

หรือ $x+1<0$ และ $x-3>0$

แล้ว $f'(x)<0$

ซึ่งจะได้ว่า

ถ้า $x<-1$ หรือ $x>3$ แล้ว $f'(x)>0$

ถ้า $-1<x<3$ แล้ว $f'(x)<0$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อ $x<-1$

f เป็นฟังก์ชันลดลงเมื่อ $-1<x<3$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อ $x>3$

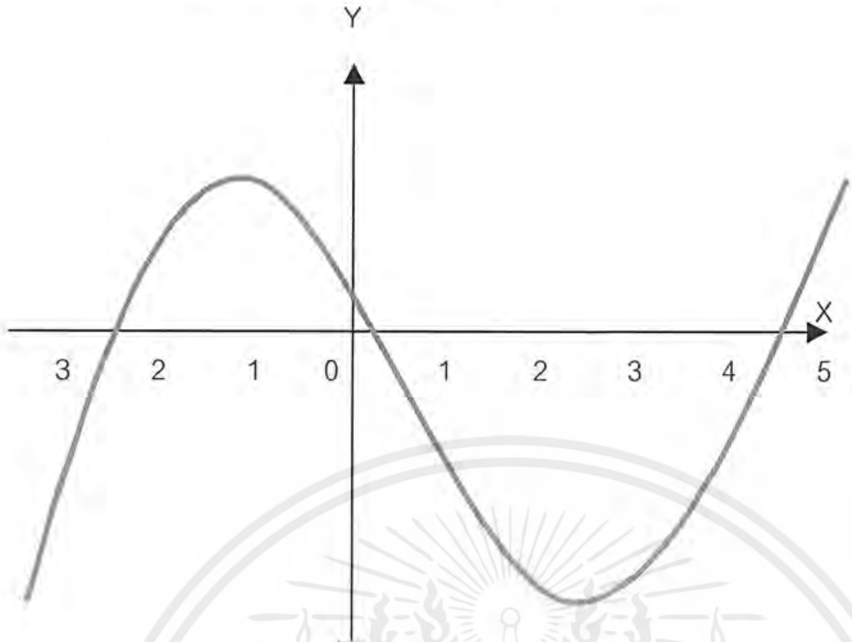
นั่นคือ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=3$

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=-1$

ซึ่งอาจจะเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $x, f(x), f'(x)$ ได้ดังนี้

x	-3	-1	0	3	5
$f(x)$	-6	5/3	3	-6	10/3
$f'(x)$	+	0	-	0	+

จากข้อมูลทั้งหมดที่ได้ทำให้เราเขียนกราฟได้ตามรูปดังนี้



รูปที่ 7.3

ตัวอย่างที่ 6 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ ว่ามีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดใด ในช่วงปิด $[-1,3]$ เมื่อไร f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและเมื่อไร f เป็นฟังก์ชันลด

วิธีทำ

จาก $\quad f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$

เราได้ $\quad f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$$= 4x(x^2 - 3x + 2)$$

$$= 4x(x-1)(x-2)$$

เราจะหาจุดวิกฤต โดยหาค่า x เมื่อ $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$4x(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 0, x = 1, x = 2$$

จุดวิกฤตอยู่ที่จุด $x = 0, x = 1, x = 2$

จะหาว่าเมื่อไร $4x(x-1)(x-2) > 0, 4x(x-1)(x-2) < 0$

เราจะเห็นว่า ถ้า $x < 0$ จะทำให้ $4x(x-1)(x-2) < 0$

ถ้า $0 < x < 1$ จะทำให้ $4x(x-1)(x-2) > 0$

ถ้า $1 < x < 2$ จะทำให้ $4x(x-1)(x-2) < 0$

ถ้า $x > 2$ จะทำให้ $4x(x-1)(x-2) > 0$

ได้ว่า ถ้า $x < 0$ หรือ $1 < x < 2$ แล้ว $f' < 0$

ถ้า $0 < x < 1$ หรือ $x > 2$ แล้ว $f' > 0$

f เป็นฟังก์ชันลดลงเมื่อ $x < 0$ หรือ $1 < x < 2$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อ $0 < x < 1$ หรือ $x > 2$

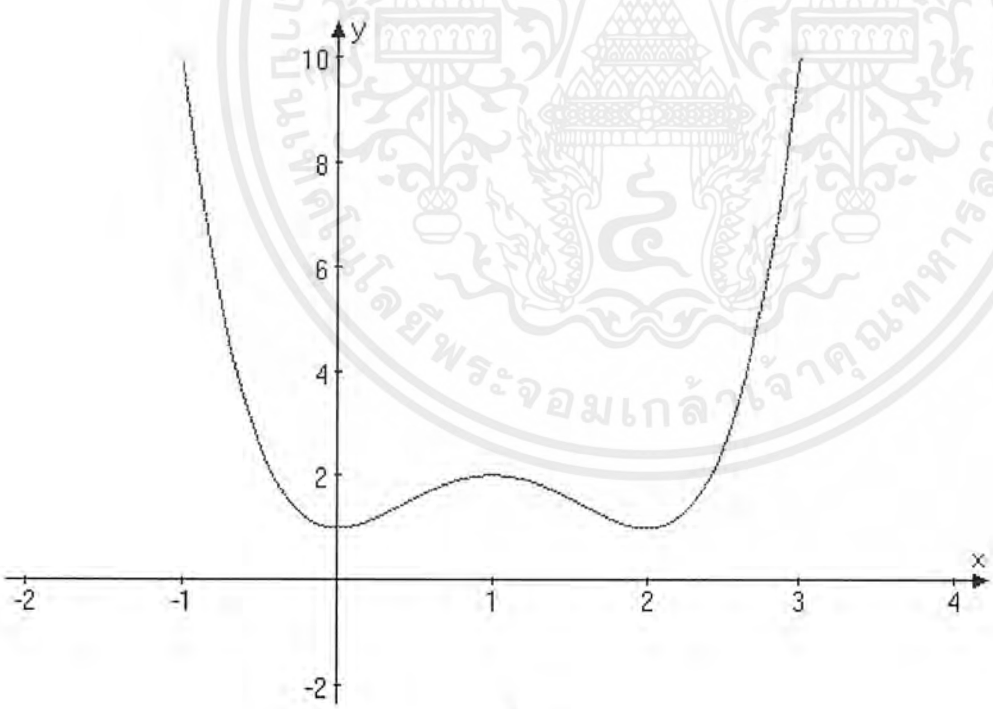
นั่นคือ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ และ $x = 2$

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$

ซึ่งอาจจะเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $x, f(x), f'(x)$ ได้ดังนี้

X	-2	-1	0	1/2	1	3/2	2	3	4
F(x)	65	10	1	1.56	2	1.56	1	10	65
F'(x)	-	-	0	+	0	-	0	+	+

จากข้อมูลทั้งหมดที่ได้ทำให้เราเขียนกราฟได้ตามรูปดังนี้



รูปที่ 7.4

นิยามที่ 7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง I ถ้ากราฟของ $y = f(x)$ อยู่เหนือเส้นสัมผัสของกราฟในช่วงนี้ เราเรียกกราฟของฟังก์ชัน f นี้ว่าเป็น "เว้าบน" (concave up) ในทางตรงกันข้าม ถ้ากราฟของ $y = f(x)$ อยู่ใต้เส้นสัมผัสของกราฟในช่วงนี้ เราเรียกกราฟของฟังก์ชันนี้ว่าเป็น "เว้าล่าง" (concave down)

นิยามที่ 8 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่ 2 ในช่วง I

1. ถ้า $f''(x) > 0$ ที่ทุกๆจุดของ x ภายในช่วง I แล้วกราฟของ $y = f(x)$ จะเป็นเว้าบนในช่วง I
2. ถ้า $f''(x) < 0$ ที่ทุกๆจุดของ x ภายในช่วง I แล้วกราฟของ $y = f(x)$ จะเป็นเว้าล่างในช่วง I

นิยามที่ 9 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่ 2 และ f'' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ x_0 เป็นจุดวิกฤต $(f'(x_0) = 0)$ แล้ว

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด x_0
2. ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด x_0

นิยามที่ 10 จุด x_0 เรียกว่าเป็นจุดเปลี่ยนเว้า (point of inflection) ถ้า $f''(x_0) = 0$ และที่จุด x_0 ของ $y = f(x)$ เป็นเว้าบนข้างหนึ่งเป็นเว้าล่างอีกข้างหนึ่ง

หมายเหตุ ถ้าจุด $(x_0, f(x_0)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าแล้วจะได้ว่า $f''(x_0) = 0$ แต่ในทางกลับกันไม่จริงเสมอไป กล่าวคือ ถ้า $f''(x_0) = 0$ แล้วไม่จำเป็นที่จุด $(x_0, f(x_0)$ จะเป็นจุดเปลี่ยนเว้า นอกเสียจากว่าเราต้องทำการตรวจสอบต่อไปว่าทางด้านทั้งสองของ x_0 ลักษณะกราฟเปลี่ยนจากเว้าบนเป็นเว้าล่างหรือเปลี่ยนจากเว้าล่างเป็นเว้าบนดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $f(x) = x^4$ จงแสดงว่าที่จุด (0,0) เป็นจุดเปลี่ยนเว้าหรือไม่

วิธีทำ

จาก $\qquad f(x) = x^4$

เราได้ $\qquad f'(x) = 4x^3$

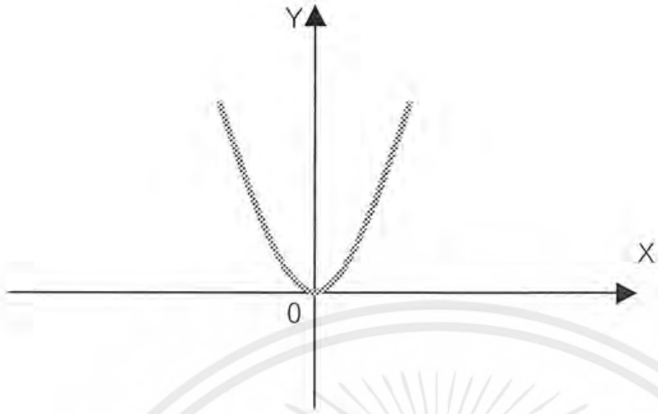
$\qquad f''(x) = 12x^2$

ถ้า $f'(x) = 12x^2 = 0$ จะได้ $x = 0$

แต่จุด (0,0) ไม่ได้เป็นจุดเปลี่ยนเว้าแต่อย่างใดดังรูป

พิจารณาลักษณะโค้ง ถ้า $x<0$ แล้ว $f''(x)>0$ $\therefore$ เว้าบนเมื่อ $x<0$

ถ้า $x>0$ แล้ว $f''(x)>0$ $\therefore$ เว้าบนเมื่อ $x>0$



รูปที่ 7.5

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=x^3-\frac{21}{4}x^2+9x-4$ และวาดกราฟของฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u>

จาก $$f(x)=x^3-\frac{21}{4}x^2+9x-4$$

เราได้ $$f'(x)=3x^2-\frac{21}{2}x+9$$

$$f''(x)=6x-\frac{21}{2}$$

หาจุดวิกฤตโดยให้ $f'(x)=0$

$$3x^2-\frac{21}{2}x+9=0$$

$$3\left(x^2-\frac{7}{2}x+3\right)=0$$

$$x^2-\frac{7}{2}x+3=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)=0$$

จุดวิกฤตคือ $x=\frac{3}{2}, x=2$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-3}{2}<0$$

$$f''(2)=\frac{3}{2}>0$$

$\therefore$ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\frac{3}{2}$

$\therefore$ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=2$

หาจุดเปลี่ยนเว้า โดยให้ $f''(x)=0$

$$6x-\frac{21}{2}=0$$

$$6(x-\frac{7}{4})=0$$

$\therefore$ f มีจุดเปลี่ยนเว้าคือ $x=\frac{7}{4}$

x	0	3/2	7/4	2	3
$f(x)$	-4	17/16	33/32	1	11/4
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	-	-	0	+	+

สามารถสรุปจากตารางนี้ได้ว่า

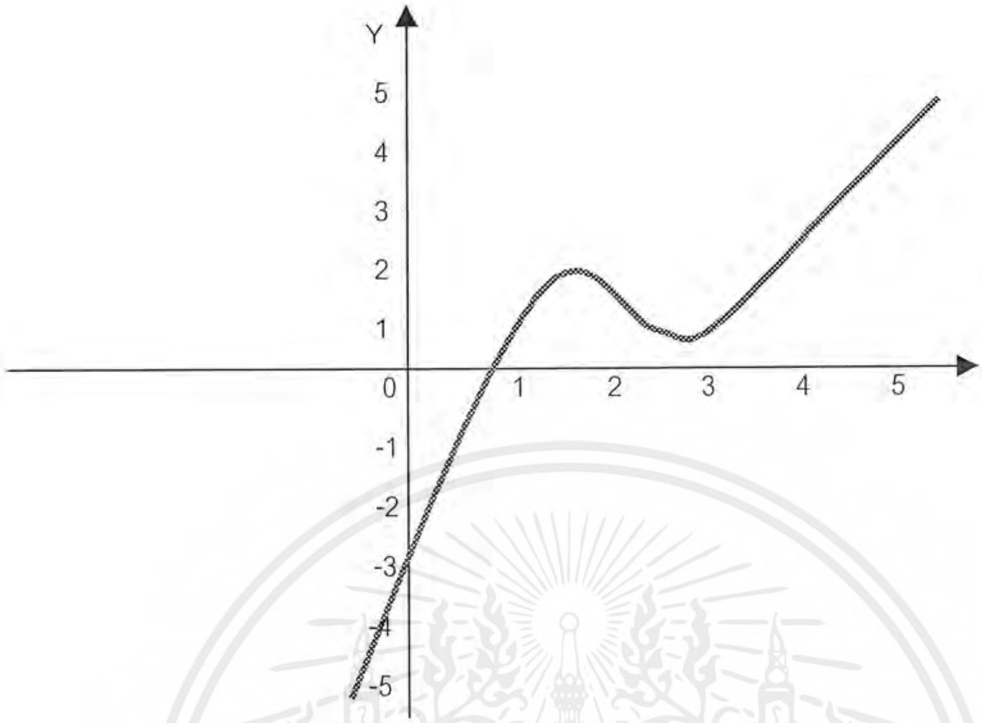
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อ $x<\frac{3}{2}$

f เป็นฟังก์ชันลดลงเมื่อ $\frac{3}{2}<x<2$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อ $x>2$

f มีเว้าล่างเมื่อ $x<\frac{7}{4}$

f มีเว้าบนเมื่อ $x>\frac{7}{4}$



รูปที่ 7.6

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$ พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชันด้วย

<u>วิธีทำ</u>

จาก $\quad f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$

เราได้ $\quad f'(x)=x^3-3x$

$f''(x)=3x^2-3$

หาจุดวิกฤตโดยให้ $f''(x)=0$

$x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

จุดวิกฤตคือ $x=0, x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$

$f''(0)=-3<0$

$f''(\sqrt{3})=6>0$

$f''(-\sqrt{3})=6>0$

ฉะนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$

ฉะนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$

หาจุดเปลี่ยนเว้าโดยให้ $f''(x) = 0$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x-1)(x+1) = 0$$

จุดเปลี่ยนเว้าคือ $x = 1, x = -1$

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
$f(x)$	-2	9/4	-5/4	0	-5/4	-9/4	-2
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f''(x)$	+	+	0	-	0	+	+

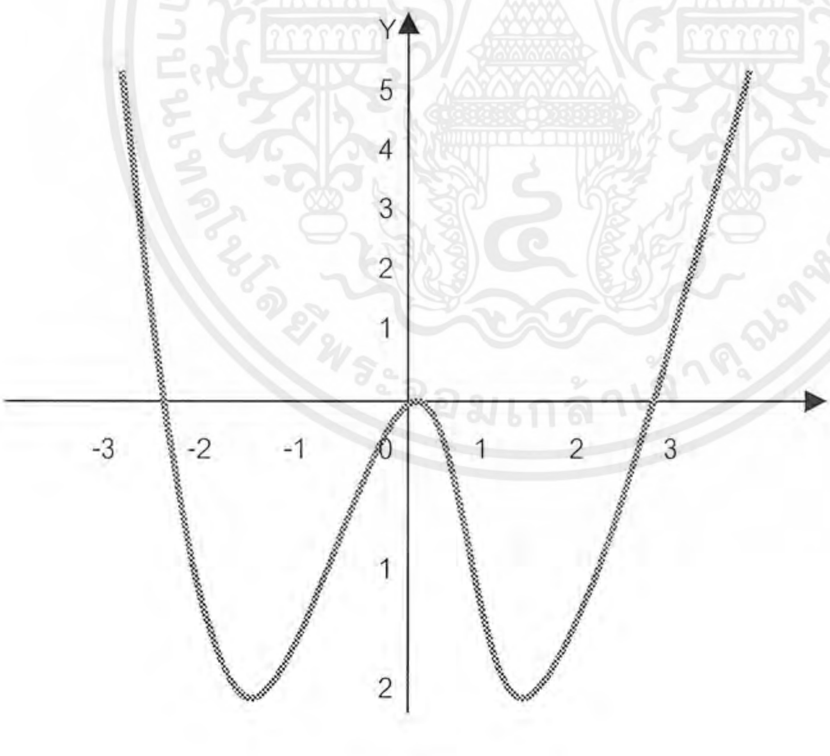
สามารถสรุปจากตารางนี้ได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อ $-\sqrt{3} < x < 0, x > \sqrt{3}$

f เป็นฟังก์ชันลดลงเมื่อ $x < -\sqrt{3}, 0 < x < \sqrt{3}$

f มีเว้าบนเมื่อ $-2 < x < 0$ และ $0 < x < 2$

f มีโค้งคว่ำเมื่อ $-1 < x < 1$



รูปที่ 7.7

<u>นิยามที่ 11</u> เรากล่าวว่า เส้นตรง $x = a$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ หรือ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

<u>นิยามที่ 12</u> เรากล่าวว่า เส้นตรง $y = L$ เป็นเส้นกำกับแนวราบของกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ หรือ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ และวาดกราฟของฟังก์ชันด้วย

<u>วิธีทำ</u>

กราฟไม่ตัดแกน x เพราะว่า $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆค่าของ x

$f(0) = 2$ ดังนั้นตัดแกน y ที่ 2

$f(-x) = f(x)$ แสดงว่ากราฟสมมาตรรอบแกน y

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ แสดงว่า $y = 0$ หรือ แกน x เป็นเส้นกำกับแนวราบ

จาก $$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

เราได้
$$f'(x) = \frac{-2(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{-4(1+x^2)^2 + 4x(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$
$$= \frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$
$$\frac{-4x}{(1+x^2)^2} = 0$$
$$4x = 0$$

จุดวิกฤตคือ $x = 0$

หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x) = 0$
$$\frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} = 0$$
$$4(3x^2-1) = 0$$

จุดเปลี่ยนเว้าคือ $x = \pm\dfrac{1}{3}$

เนื่องจาก $f''(0) = -4 < 0$

ฉะนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} > 0$$

$$3x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 > \frac{1}{3}$$

หรือ $x > \frac{1}{\sqrt{3}}, x < \frac{-1}{\sqrt{3}}$

กราฟมีเว้าบนเมื่อ $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $x < \frac{-1}{\sqrt{3}}$

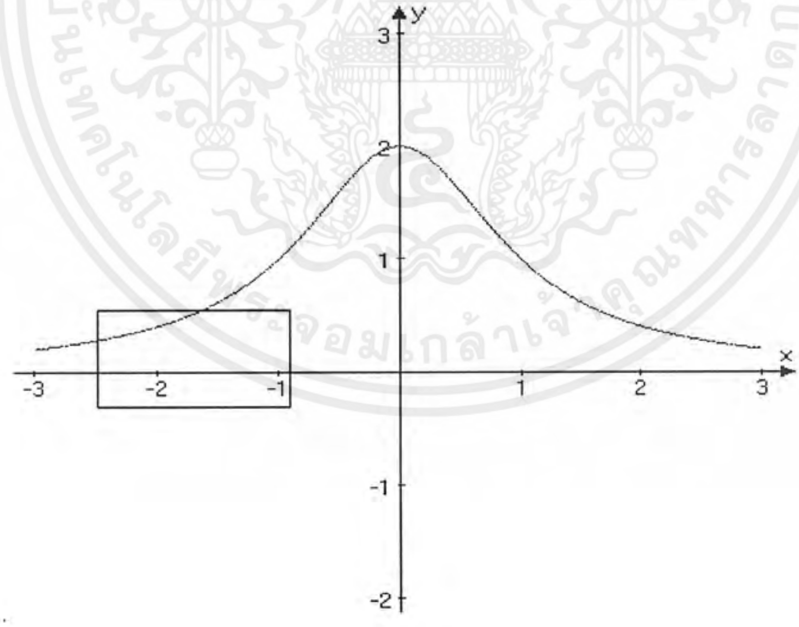
$$f''(x) < 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 < 0$$

$$x^2 < \frac{1}{3}$$

หรือ $\frac{-1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

กราฟมีเว้าล่างเมื่อ $\frac{-1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

เขียนกราฟได้ดังรูป



รูปที่ 7.8

เพราะ $f''(0) > 0$ เราได้ $x = 0$ เป็นจุดที่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

หาเส้นกำกับ เพราะ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

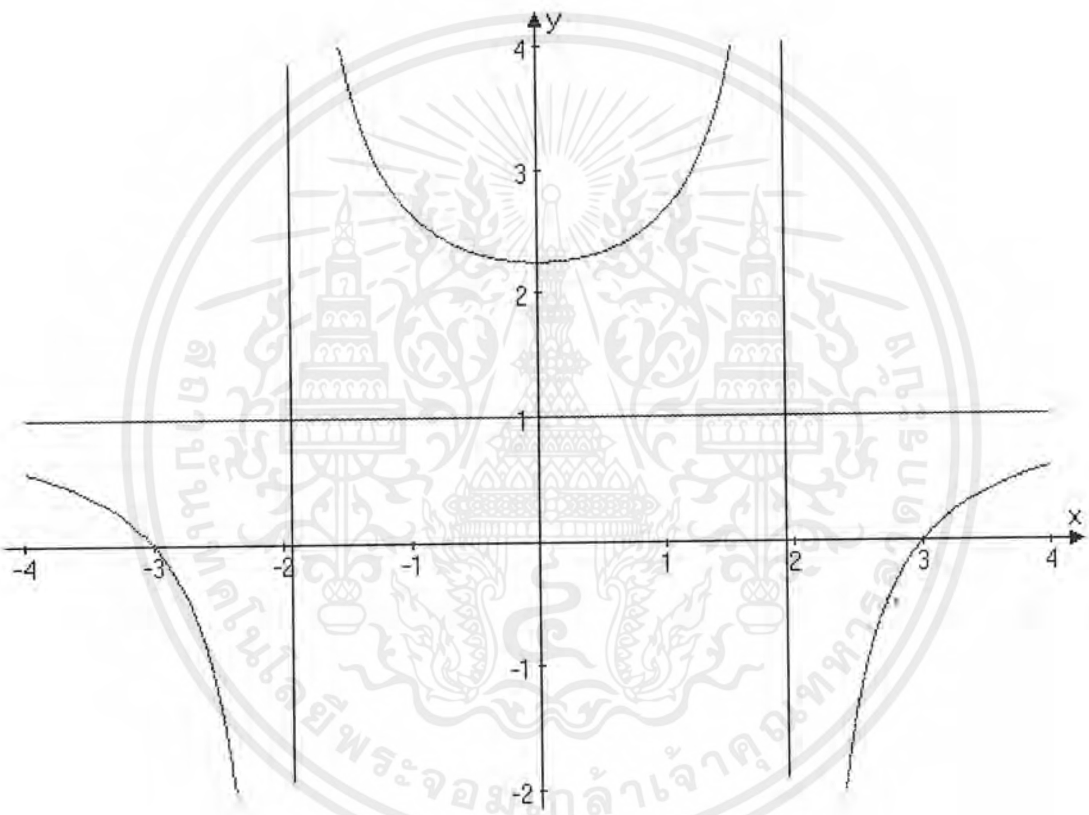
ฉะนั้นเส้น $y = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวราบ

เพราะ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$

ฉะนั้นเส้น $x = 2$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่ง

เพราะ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

ฉะนั้นเส้น $x = -2$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่ง



รูปที่ 7.9

ตัวอย่างที่ 12 จงพิจารณาและเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = x + \frac{1}{x}$

วิธีทำ

กราฟไม่ตัดแกน y เพราะที่จุด $x = 0$ หาค่า y ไม่ได้

หาเส้นกำกับ

เพราะ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

ฉะนั้น $x = 0$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่ง

และพบว่าไม่มีเส้นกำกับแนวราบเพราะกราฟไม่ตัดแกน y

หาจุดวิกฤตจาก

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

จุดวิกฤตคือ $x = \pm 1$

หาจุดเปลี่ยนเว้า

เพราะ $f''(x) = \frac{2}{x^2}$

ฉะนั้นกราฟรูปนี้ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

หาค่าสูงสุดต่ำสุด

เพราะ $f'(x) > 0, x < -1$

เพราะ $f'(x) < 0, -1 < x < 0$

ฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อ $x < -1$

ฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดลงเมื่อ $-1 < x < 0$

ฉะนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$

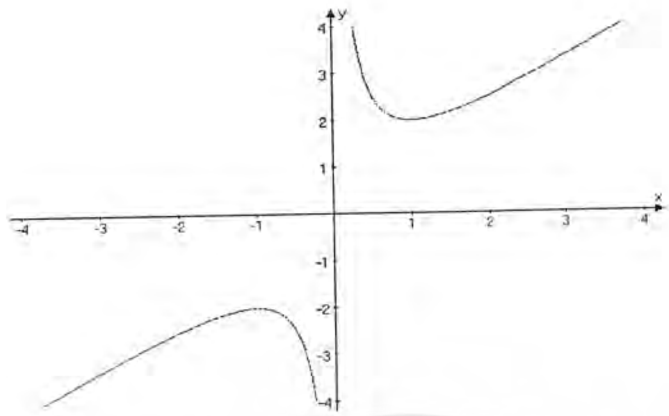
เพราะ $f'(x) > 0, x > 1$

เพราะ $f'(x) < 0, 0 < x < 1$

ฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อ $x > 1$

ฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดลงเมื่อ $0 < x < 1$

ฉะนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$



รูปที่ 7.10

<u>สรุป</u> การเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ อาจทำได้โดยการหาข้อมูลต่อไปนี้

1. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน
2. จุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y ของกราฟ (ถ้ามี)
3. แก้สมการ $f'(x) = 0$ และหาค่า x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ เพื่อหาจุดวิกฤต จุดสุดขีดสัมพัทธ์ จุดสุดขีดสัมบูรณ์
4. ช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด
5. แก้สมการ $f''(x) = 0$ และหาค่า x ที่ทำให้ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้ เพื่อหาจุดเปลี่ยนเว้าของกราฟ
6. ช่วงที่ f มีความเว้าอยู่ข้างบนและช่วงที่กราฟ f มีความเว้าอยู่ข้างล่าง
7. เส้นกำกับ (ถ้ามี) และ จุดที่ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่อง (ถ้ามี)
8. ลงจุดของกราฟที่ได้จากการพิจารณาหาข้อมูลใน 7 ข้อข้างต้น

7.2 การประยุกต์ปัญหาค่าสูงสุด – ค่าต่ำสุด (Applied Maximum – Minimum Problems)

เราจะศึกษาปัญหาของการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันใดๆในช่วงที่กำหนดให้ สมมติกำหนดให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ เราจะหาจุดที่ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ในช่วง $[a,b]$ และเปรียบเทียบกับค่า $f(a)$ และ $f(b)$ ทั้งนี้เนื่องจากที่จุดที่ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ f อาจจะไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุดนั้นก็ได้

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)=x^2+2x+4$ ในช่วงปิด $[-3,3]$

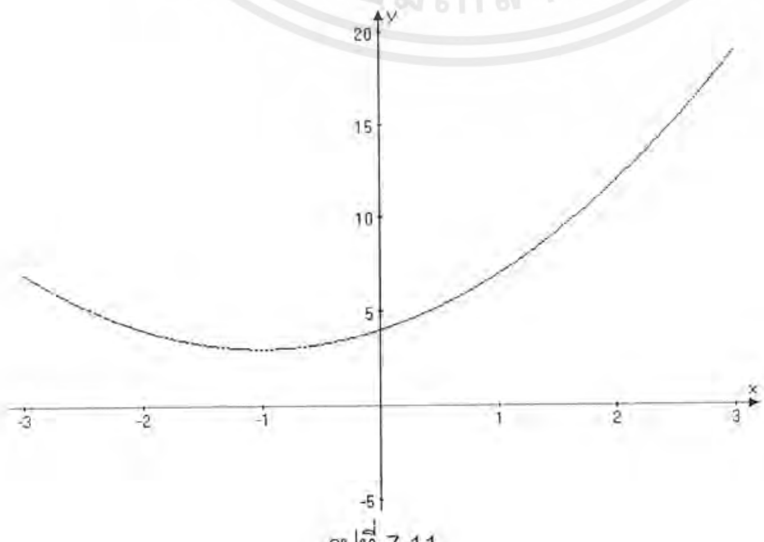
วิธีทำ

$$f(x)=x^2+2x+4$$
$$f'(x)=2x+2$$
$$=2(x+1)$$

จุดวิกฤตคือจุด $x=-1$

$$f(-1)=1-2+4$$
$$=3$$
$$f(3)=9+6+4$$
$$=19$$
$$f(-3)=9-6+4$$
$$=7$$

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน f คือ 3 อยู่ที่ $x=-1$ ซึ่งเป็นจุดวิกฤตและค่าสูงสุดของฟังก์ชัน f คือ 19 อยู่ที่ $x=3$



รูปที่ 7.11

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$ ในช่วงปิด $[-3,3]$

วิธีทำ

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$$
$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$
$$= 6(x^2 + x - 2)$$
$$= 6(x+2)(x-1)$$

จุดวิกฤตอยู่ที่ $x = -2$ และ $x = 1$

$$f''(x) = 12x + 6$$
$$= 6(2x+1)$$
$$f''(1) = 18$$
$$f''(-2) = -18$$

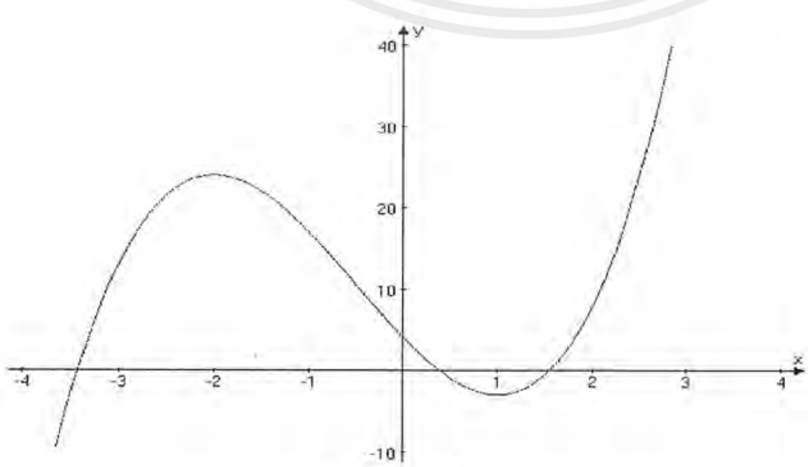
ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f อยู่ที่จุด $x = -2$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f อยู่ที่จุด $x = 1$

$$f(-2) = -16 + 12 + 24 + 4$$
$$= 24$$
$$f(1) = 2 + 3 - 12 + 4$$
$$= -3$$
$$f(-3) = -54 + 27 + 36 + 4$$
$$= 13$$
$$f(3) = 54 + 27 - 36 + 4$$
$$= 31$$

ค่าสูงสุดของ f เท่ากับ 31 อยู่ที่จุด $x = 3$

ค่าต่ำสุดของ f เท่ากับ –3 อยู่ที่จุด $x = 1$



รูปที่ 7.12

ตัวอย่างที่ 15 จงหาจำนวนเต็มบวก 2 จำนวน ที่ผลบวกของจำนวนทั้งสองเป็น 30 และผลคูณของจำนวนหนึ่งกับกำลังสองของอีกจำนวนหนึ่งได้ค่าสูงสุด

วิธีทำ

ให้จำนวนหนึ่งเป็น $x, 0 < x < 30$

อีกจำนวนหนึ่งเป็น $30 - x$

ผลคูณของจำนวนหนึ่งกับกำลังสองของอีกจำนวนหนึ่งได้ค่าสูงสุดคือ

$x^2(30 - x)$

$$f(x) = 30x^2 - x^3$$
$$f'(x) = 60x - 3x^3$$
$$= 3x(20 - x)$$

จุดวิกฤตคือ $x = 0$ และ $x = 20$

$$f''(x) = 60 - 6x$$
$$f''(0) = 60$$
$$f''(20) = 60 - 120 = -60$$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f อยู่ที่จุด $x = 20$

$$f(20) = (20^2)(30 - 20)$$
$$= 400(10)$$
$$= 4000$$

เราต้องการค่าตัวเลขที่อยู่ในช่วงเปิด (0,30)

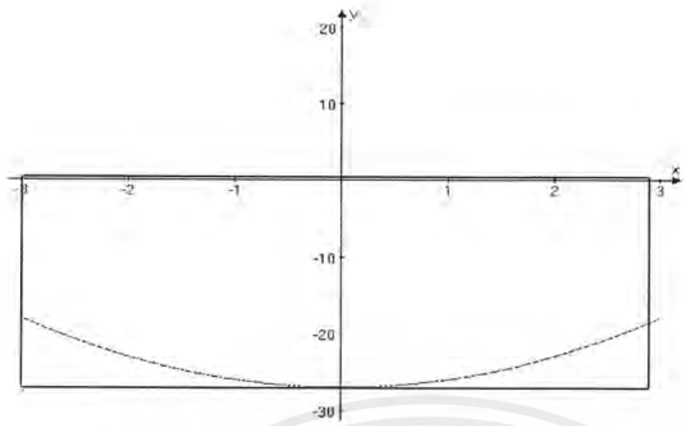
$$f(1) = 1(30 - 1)$$
$$= 29$$
$$f(29) = (29^2)(30 - 29)$$
$$= 841$$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน f อยู่ที่ $x = 20$

จำนวน 2 จำนวนนี้คือ 20 และ 10 ###

ตัวอย่างที่ 16 จงหาสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุด โดยมีมุมบนอยู่บนแกน x และมุมล่างอยู่ที่บนเส้นโค้งของ $y = x^2 - 27$

วิธีทำ



รูปที่ 7.13

สมมติว่ามุมบนของสี่เหลี่ยมผืนผ้าอยู่ที่จุด $(x,0),(-x,0)$

มุมล่างอยู่ที่จุด $(x,x^2-27),(-x,x^2-27)$

$\therefore$ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$= 2x(27-x^2)$$
$$= 54x-2x^3$$
$$f(x) = 54x-2x^3$$
$$f'(x) = 54-6x^2$$
$$f'(x) = 0$$
$$54-6x^2 = 0$$
$$6(9-x^2) = 0$$
$$x = \pm 3$$
$$f''(x) = -12x$$
$$f''(3) = -36$$
$$f''(-3) = 36$$

ที่ $x=3$ ให้ $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

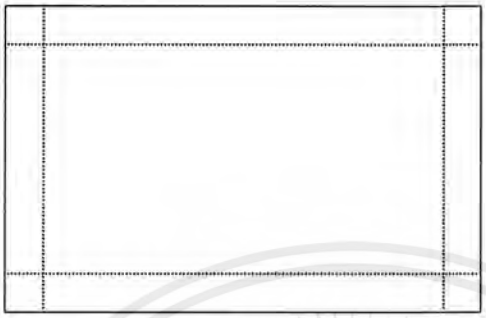
$$f(3) = 2\cdot 3(27-9)$$
$$= 6\cdot 18$$
$$= 108$$
$$f(0) = 0$$
$$f(27) = 0$$

สี่เหลี่ยมที่ต้องการมีมุมอยู่ที่ (-3,0),(3,0),(3,-18),(-3,-18)

และพื้นที่ 108 ตารางหน่วย ###

ตัวอย่างที่ 17 ถ้าต้องการทำกล่องไม่มีฝาที่มีปริมาตรมากที่สุดจากกระดาษแผ่นหนึ่งซึ่งเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 12 นิ้ว ยาว 18 นิ้ว โดยการตัดจัตุรัสเล็กๆที่มุมทั้งสี่ออกแล้วพับส่วนที่เหลือขึ้น ถามว่าจัตุรัสเล็กๆที่ตัดออกมีด้านยาวเท่าไร

วิธีทำ



สมมติให้ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดทิ้ง x หน่วย ในที่นี้ $0 \le x \le 6$

$\therefore 12-2x =$ ความกว้างของฐานของกล่อง

$18-2x =$ ความยาวของฐานของกล่อง

$x =$ ความสูงของกล่อง

ให้ v เป็นปริมาตรของกล่อง

$$\begin{aligned} v &= (12-2x)(18-2x)x \\ &= 4(6-x)(9-x)x \\ &= 4(54x-15x^2+x^3) \\ v' &= 4(54-30x+3x^2) \end{aligned}$$

ถ้า $v'=0$ จะได้ว่า

$$54-30x+3x^2=0$$

$$(3x-9)(x-7)=0$$

$$x=3,7$$

เพราะ $x=7$ อยู่ภายนอกช่วง (0,6) ที่ต้องการ เพราะฉะนั้นค่าวิกฤตในขณะนี้คือ $x=3$

เพราะ $v''=4(-30+6x)$

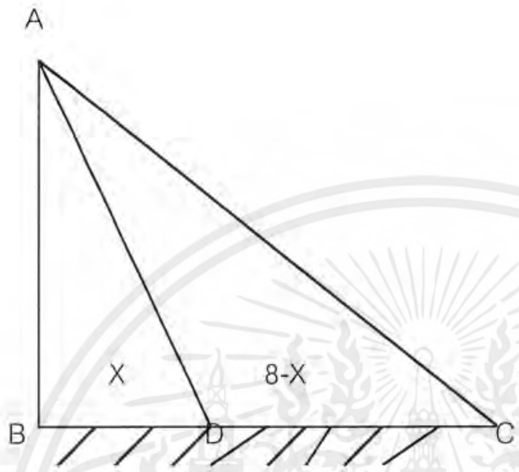
ฉะนั้นถ้า $x=3$ จะได้ $v''=4(-30-18)=-192$

แสดงว่า v จะมีค่ามากที่สุดสัมพัทธ์ที่ $x=3$ และเพราะว่า $x=0$ หรือ $x=6$ จะได้ $v=0$

ฉะนั้น v จะมีค่ามากที่สุดสัมพัทธ์ที่ $x=3$ และปริมาตรที่มากที่สุดคือ 108 ลูกบาศก์นิ้ว

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> จากรูป ชายผู้หนึ่งอยู่ที่ตำแหน่งจุด A บนเกาะแห่งหนึ่งจากจุด B ซึ่งเป็นจุดบนชายฝั่งที่ใกล้ที่สุด 8 ไมล์ ให้จุด C เป็นจุดที่อยู่บนชายฝั่งเช่นกันและอยู่ห่างจากจุด B 8 ไมล์ ถ้าชายผู้นี้ต้องการเดินทางไปที่จุด C โดยกำหนดว่าเขาพายเรือได้เร็วชั่วโมงละ 4 ไมล์ และเดินได้เร็วชั่วโมงละ 5 ไมล์ จงคำนวณดูว่าเขาควรจะพายเรือมาขึ้นฝั่งที่ตรงไหนจึงจะใช้เวลาเดินทางน้อยที่สุด

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 7.15

สมมติว่าให้ชายผู้นี้พายเรือมาขึ้นฝั่งที่จุด Dที่อยู่ระหว่างจุด B และ C แล้วจึงเดินไปยังจุดC

ให้ $x =$ ระยะทางระหว่าง BD

$8 - x =$ ระยะทางที่ต้องเดินจาก Dไป C

ให้ $T =$ เวลาที่ใช้ในการเดินทางทั้งหมด

$$T(x) = \frac{AD}{4} + \frac{DC}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{64+x^2}}{4} + \frac{8-x}{5}, 0 \le x \le 8$$

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{64+x^2}} - \frac{1}{5}$$

$$T'(x) = 0$$

$$\frac{x}{4\sqrt{64+x^2}} - \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{x}{4\sqrt{64+x^2}} = \frac{1}{5}$$

$$5x = 4\sqrt{64+x^2}$$
$$25x^2 = 16(64+x^2)$$
$$9x^2 = 1024$$
$$x^2 = \frac{1024}{9}$$
$$x = \pm\frac{32}{3}$$

จะเห็นว่าค่า x ที่ได้ทั้งสองข้างอยู่นอกช่วง $[0,8]$ แสดงว่าไม่มีค่าของ x ในช่วงเปิด (0,8) ที่ทำให้ T มีค่าน้อยที่สุดสัมพัทธ์

ดังนั้น T จะมีค่าน้อยที่สุดที่จุดปลายจุดใดจุดหนึ่งของช่วงดังกล่าว เพราะว่า

$$T(0) = 2+\frac{8}{5} = \frac{18}{5}$$
$$T(8) = \frac{8\sqrt{2}}{4}+0 = 2\sqrt{2}$$

ดังนั้นเขาควรพายเรือมาขึ้นฝั่งที่จุด c จึงจะใช้เวลาเดินทางน้อยที่สุด ###

<u>ตัวอย่างที่ 19</u> ต้นทุนในการผลิตโทรทัศน์ x เครื่องต่อวันเป็นเงิน $\left(\frac{1}{4}x^2+35x+25\right)20$ บาท และราคาขายต่อเครื่องมีค่าเท่ากับ $\left(50-\frac{1}{2}x\right)20$ บาท

ก. ควรจะผลิตวันละกี่เครื่องจึงจะมีกำไรมากที่สุดต่อวัน

ข. ให้แสดงว่าจำนวนผลิตต่อวันในข้อ ก. ทำให้ต้นทุนในการผลิตต่อเครื่องน้อยที่สุด

<u>วิธีทำ</u>

ก. ให้ P = กำไรในการขายโทรทัศน์ x เครื่องต่อวัน

$$P(x) = x\left(50-\frac{1}{2}x\right)20-\left(\frac{1}{4}x^2+35x+25\right)20$$
$$= \left(\frac{-3}{4}x^2+15x-25\right)20$$
$$P'(x) = \left(\frac{-3}{2}x+15\right)20$$

ถ้า $P'(x)=0$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{-3}{2}x+15\right)20 = 0$$

นั่นคือ $x=10$ เป็นค่าจุดวิกฤตและ $P''(x) = -30 < 0$ ทุกค่าของ x

ดังนั้นควรจะผลิตวันละ 10 เครื่องจึงจะมีกำไรมากที่สุดต่อวัน

ข. ให้ C = ต้นทุนในการผลิตต่อเครื่อง

$$C(x)=\frac{\left(\frac{1}{4}x^2+35x+25\right)20}{x}$$

$$=\left(\frac{1}{4}x+35+\frac{25}{x}\right)20$$

ถ้า $C'(x)=0$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{25}{x^2}\right)20=0$$

$x=10$ เป็นค่าวิกฤต

จาก $C''(x)=\frac{50}{x^3}$ แทนค่า $x=10$ ได้ $C''(x)>0$

ดังนั้น $x=10$ ให้ค่า C ต่ำสุด ###

7.3 อัตราสัมพัทธ์ (Related Rates)

ถ้าเรามีจำนวน 2 จำนวนโดยที่แต่ละจำนวนมีอัตราการเปลี่ยนแปลงและการเปลี่ยนแปลงของทั้งสองจำนวนนั้นสัมพันธ์กันด้วยเงื่อนไขบางอย่าง เช่น ถ้าเราเป่าลมเข้าไปในลูกโป่งรูปทรงกลม ก็จะเกิดอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีต่อเวลา t และในขณะเดียวกันปริมาตรและรัศมีของทรงกลมก็มีความสัมพันธ์ด้วยสูตร

$$\text{ปริมาตร} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรและรัศมีสัมพันธ์กันด้วยสูตรนี้ และลักษณะเช่นนี้เราเรียกว่า "**อัตราสัมพัทธ์**"

ในที่นี้เราพิจารณาจำนวนทุกจำนวนขึ้นอยู่กับเวลา t ทั้งสิ้น ดังนั้นคำว่าอัตราการเปลี่ยนแปลง หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนนั้นต่อเวลา t

สรุป แนวทางการแก้ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

1. เขียนแผนภาพแสดงเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นตามโจทย์พร้อมทั้งให้ตัวแปรที่ใช้แทนปริมาณต่างๆ
2. เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (เช่น บรรดาค่าตัวแปรที่โจทย์กำหนดให้ อัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่โจทย์กำหนดให้)
3. จากแผนภาพให้เขียนสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆที่มีในโจทย์
4. หาอนุพันธ์กับสมการที่ได้จากข้อ 3 เทียบกับเวลา t
5. แทนค่าตัวแปรต่างๆที่โจทย์กำหนดแล้วหาตัวแปรไม่ทราบค่าที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่างที่ 20 ถ้าเป่าลมเข้าไปในลูกโป่งรูปทรงกลมใบหนึ่ง โดยมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรลูกโป่งเท่ากับ $10\pi^2$ ลูกบาศก์/นิ้ว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีในขณะที่ $r = 3$ นิ้ว

วิธีทำ

สมมติให้ $V =$ ปริมาตรของลูกโป่งเมื่อเวลา t

$r =$ รัศมีของลูกโป่งเมื่อเวลา t

ในที่นี้

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}(3\pi r^2)\frac{dr}{dt}$$

$$=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

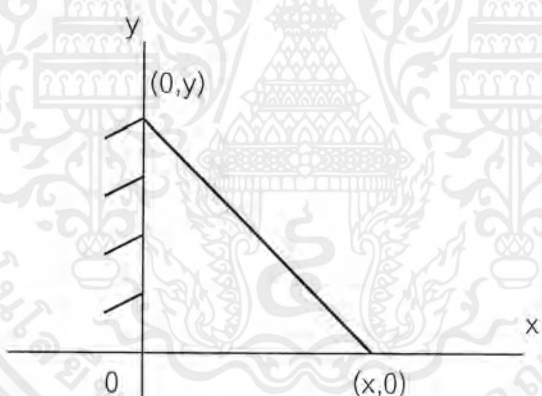
$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

$$=\frac{1}{4\pi(3)^2}10\pi^2$$

$$=\frac{5}{18}$$ ###

<u>ตัวอย่างที่ 21</u> บันไดยาว 10 ฟุต วางกำแพงตึก ปลายล่างของบันไดถูกผลักให้ห่างออกไปจากกำแพงในอัตรา 7 ฟุตต่อวินาที ส่วนบนของบันไดจะเลื่อนต่ำลงมาในอัตราเท่าใด ในขณะที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 6 ฟุต

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 7.16

จากรูปเราใช้พิกัด (x,y) ดังนั้นส่วนบนของบันไดอยู่ที่ $(0,y)$ และปลายล่างของบันไดอยู่ที่ $(x,0)$ เราวัดระยะ x,y เป็นฟุต

จากรูป $x^2+y^2=10^2 \qquad \ldots(1)$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \qquad \ldots(2)$$

เมื่อ $x=6$ หาค่า y

จาก (1) ได้ค่า $y=\sqrt{100-36}$

$=8$

แทนค่า $x = 6, y = 8, \dfrac{dx}{dt} = 7$ ในสมการที่ 2

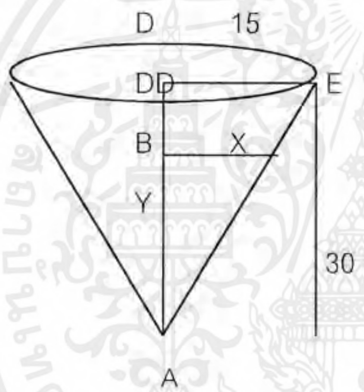
$$2(6)(7) + 2(8)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-84}{16} = \frac{-42}{8} = 5.25$$

ดังนั้นในขณะที่ปลายบันไดล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 6 ฟุต ส่วนบนของบันไดจะเลื่อนต่ำลงมาในอัตรา 5.25 ฟุตต่อวินาที ###

<u>ตัวอย่างที่ 22</u> กรวยกลมตรงดังรูป เส้นผ่าศูนย์กลางของปากกรวยเท่ากับ 30 เซนติเมตร และสูงเท่ากับ 30 เซนติเมตร ถ้าปล่อยน้ำออกจากภาชนะนี้โดยให้น้ำไหลออกด้วยอัตรา 5 ลบ.ซม./วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของระดับน้ำที่ลดลงในขณะที่ระดับน้ำอยู่ต่ำกว่าปากกรวย 6 เซนติเมตร

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 7.17

ให้ V เป็นปริมาตร , y เป็นส่วนสูงของระดับน้ำ , x เป็นรัศมีของผิวน้ำ

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

จากสามเหลี่ยมคล้าย ABC และ ADE ได้

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{30}$$

ดังนั้น

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 y$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{12}\pi 3y^2\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{4}\pi y^2\frac{dy}{dt}$$

ในขณะที่ $\frac{dV}{dt} = -5$ ลูกบาศก์เซนติเมตร/วินาที

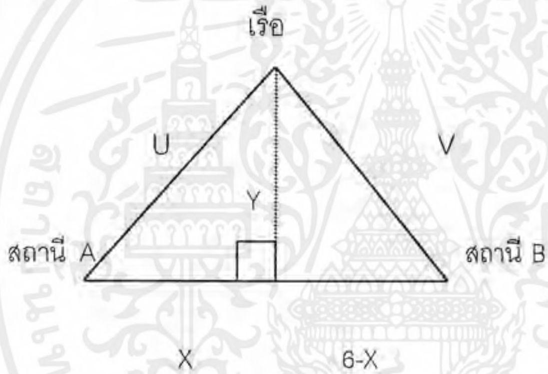
และ $y = 30 - 6 = 24$ เซนติเมตร

จะได้ว่า $\frac{dy}{dt} = \frac{(-5)4}{\pi(24)^2} = \frac{-5}{144\pi}$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของระดับที่ลดลงคือ $\frac{5}{144\pi}$ ลบ.ซม./วินาที

ตัวอย่างที่ 23 สถานีเรดาร์ 2 สถานีคือ สถานี A และสถานี B B อยู่ห่างไปทางทิศตะวันออกของ A เป็นระยะทาง 6 กิโลเมตร ทั้งสองสถานีกำลังสังเกตเรือลำหนึ่ง ขณะเวลาหนึ่งเรือลำนี้อยู่ห่างจาก A 5 กิโลเมตร และกำลังเคลื่อนที่ห่างจาก Aไปด้วยอัตราเร็ว 28 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ในเวลาเดียวกันนั้น เรือลำเดียวกันอยู่ห่างจาก B 5 กิโลเมตร และกำลังเคลื่อนที่ห่างจาก B ด้วยอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาอัตราเร็วและทิศทางของเรือลำนี้

วิธีทำ



รูปที่ 7.18

ให้ U = ระยะทางจากเรือถึงสถานี A

V = ระยะทางจากเรือถึงสถานี B

จากรูปจะได้

$$x^2 + y^2 = u^2 \qquad \ldots(1)$$

$$(6-x)^2 + y^2 = v^2 \qquad \ldots(2)$$

โจทย์กำหนดให้ $u = v = 5, \frac{du}{dt} = 28, \frac{dv}{dt} = 4$

เนื่องจาก $u = v = 5$ ดังนั้น $x = 3$ ซึ่งจะได้ $y = 4$

ดังนั้นเรืออยู่ห่างจาก Aไปทางทิศตะวันออก 3 กิโลเมตร และเหนือ A 4 กิโลเมตร

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (1) และ (2) จะได้ (3) และ (4) ตามลำดับ

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2u\frac{du}{dt}\dots(3)$$

$$-2(6-x)\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2v\frac{dv}{dt}\dots(4)$$

แทนค่า $x=3, u=v=5, y=4$ และ $\frac{du}{dt}=28, \frac{dv}{dt}=4$ ลงใน (3) และ (4)

เราได้

$$3\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}=140 \qquad \dots(5)$$

$$-3\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}=20 \qquad \dots(6)$$

จาก (5) และ (6) จะได้ $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=20$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้นอัตราเร็วของเรือคือ $\sqrt{20^2+20^2}=20\sqrt{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง ###

แบบทดสอบ
เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์

1. กราฟของฟังก์ชัน

ชุดที่ 1

1. จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x)=2x^2-7x-10$ บนช่วง[-1,3]

   ก. ค่าสูงสุด $=13$ ที่ $x=-2$ และ ค่าต่ำสุด $=-7$ ที่ $x=3$

   ข. ค่าสูงสุด $=-1$ ที่ $x=-1$ และ ค่าต่ำสุด $=\frac{-129}{8}$ ที่ $x=\frac{7}{4}$

   ค. ค่าสูงสุด $=99$ ที่ $x=4$ และ ค่าต่ำสุด $=-9$ ที่ $x=2$

2. กำหนดให้ $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+1$ จงหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด

   ก. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ [1,2] และ $[3,\infty)$
   ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดลงคือ $(-\infty,1]$ และ [2,3]

   ข. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ [0,1] และ $[2,\infty)$
   ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดลงคือ $(-\infty,0]$ และ [1,2]

   ค. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ [-2,0] และ $[1,\infty)$
   ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดลงคือ $(-\infty,-2]$ และ [0,1]

3. กำหนดให้ $f(x)=x^2-x+12$ จงหาช่วงที่ f เว้าขึ้น และ ช่วงที่ f เว้าลง และ จุดเปลี่ยนเว้า

   ก. เว้าขึ้นเมื่อ $x<3$ เว้าลงเมื่อ $x>3$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (3,162)

   ข. เว้าขึ้นสำหรับทุกค่าของ x

   ค. เว้าขึ้นเมื่อ $x>-4$ เว้าลงเมื่อ $-5<x<-4$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (-5,1371) และ (-4,1021)

4. กำหนดให้ $f(x)=\frac{x}{2x-1}$ จงหาช่วงที่ f เว้าขึ้น และ ช่วงที่ f เว้าลง และ จุดเปลี่ยนเว้า

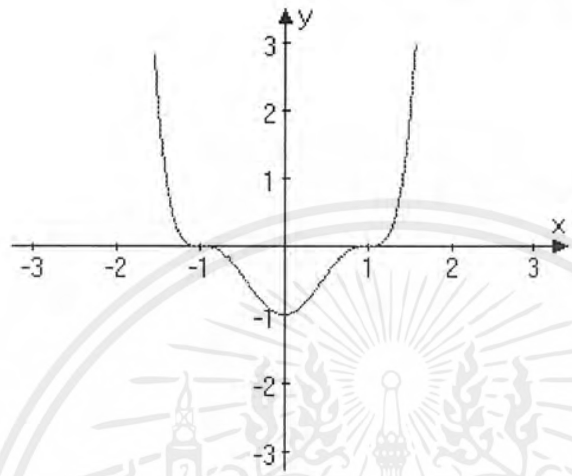
   ก. เว้าขึ้นเมื่อ $x>-5$ เว้าลงเมื่อ $x<-5$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (-5,221)

   ข. เว้าขึ้นสำหรับทุกค่าของ x

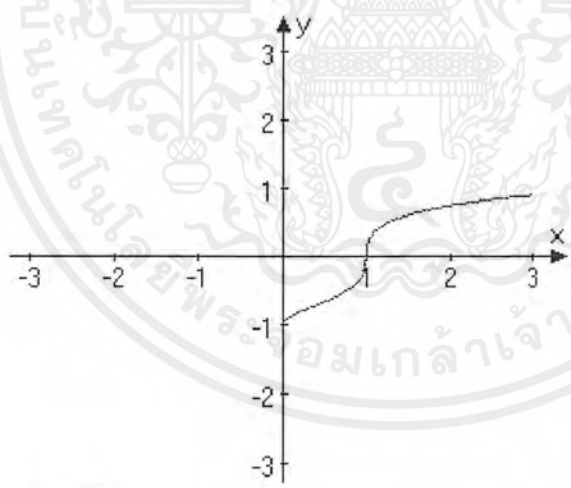
ค. เว้าขึ้นเมื่อ $x > 1/2$ เว้าลงเมื่อ $x < 1/2$ ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

5. ข้อใดคือกราฟของ $f(x) = (x^2 - 1)^3$

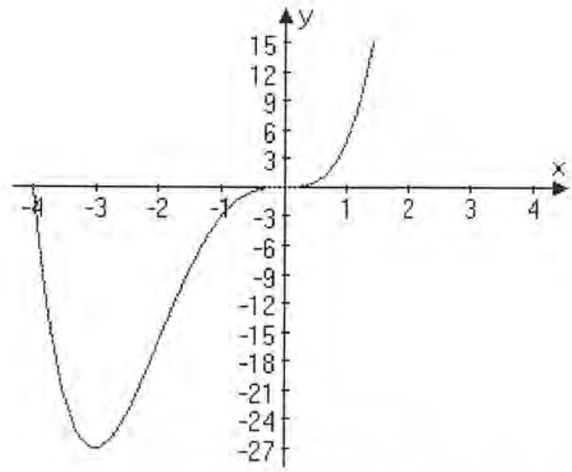
ก. จุดเปลี่ยนเว้าอยู่ที่ (-1,0),(1,0),$(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-64}{125})$, $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-64}{125})$



ข. จุดเปลี่ยนเว้าอยู่ที่ (1,0)



ค. จุดเปลี่ยนเว้าอยู่ที่ (-2,16) และ (0,0)



6. จงหาจุดวิกฤตและจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $\sin x\cos x - 3\sin x + 2x, 0 < x < \pi$

ก. จุดวิกฤตคือ $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4})$

จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ (0,0) และ $(\frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{4})$

ข. จุดวิกฤตคือ $0, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4})$

จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ (0,0) และ $(\frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{4})$

ค. จุดวิกฤตคือ $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{5\sqrt{7}}{4})$

จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ (0,0) และ $(\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} + \frac{5\sqrt{7}}{4})$

7. จงหาจุดสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - 3x + 2|, [-3,10]$

ก. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (-3,0) และ (3,0) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (15,45)

ข. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (1,0) และ (2,0) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (10,72)

ค. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (-2,0) และ (2,0) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (5,32)

8. จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{2 + x - x^2}{(x-1)^2}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 5$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(5, \frac{-9}{8})$

ข. ช่วงที่ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้น คือ $(-\infty, 2)$ และ $[4, +\infty)$

ค. ช่วงที่ฟังก์ชัน f มีค่าลดลง คือ [2,4]

9. จากฟังก์ชันในข้อ 8 ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก. จุดเปลี่ยนเว้าคือ (7, -10/9)

ข. ช่วงที่กราฟ f มีความเว้าอยู่ข้างบนคือ $(-\infty,7)$

ค. ช่วงที่กราฟ f มีความเว้าอยู่ข้างล่างคือ $[7,+\infty)$

10. ข้อใดถูก

ก. ถ้า $f''(a)=0$ ฟังก์ชันอาจไม่มีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x=a$ ก็ได้

ข. กราฟของฟังก์ชันอาจมีจุดเปลี่ยนเว้า แต่อนุพันธ์อันดับที่สองไม่มีค่าที่จุดนั้นก็ได้

ค. ถูกทั้งสองข้อ

11. จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

$$f(x)=\begin{cases} x^3-\frac{1}{3}x, 0\le x\le 1 \\ x^2+x-\frac{4}{3}, 1<x\le 2 \end{cases}$$

บนช่วง[0,2]

ก. ค่าสูงสุด $=\frac{14}{3}$ ที่ $x=2$ และ ค่าต่ำสุด $=\frac{-2}{27}$ ที่ $x=\frac{1}{3}$

ข. ค่าสูงสุด $=13$ ที่ $x=-2$ และ ค่าต่ำสุด $=-7$ ที่ $x=3$

ค. ค่าสูงสุด $=3$ ที่ $x=1$ และ ค่าต่ำสุด $=\frac{-31}{27}$ ที่ $x=\frac{-1}{3}$

12. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 4-x^2, x<1 \\ 7-2x, 1\le x<3 \\ 3x-10, 3\le x \end{cases}$ จงหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

และช่วงที่ f เป็น ฟังก์ชันลด

ก. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ $[-2,0]$ และ $[1,\infty)$

ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดลงคือ $(-\infty,-2]$ และ $[0,1]$

ข. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ $(-\infty,0]$ และ $[3,\infty)$

ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดคือ $[-4,-1]$ และ $[1,3)$

ค. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ$(-\infty,-3)$ และ $[-1,1)$

ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดลงคือ $[-3,-1]$ และ $[1,\infty)$

13. กำหนดให้ $f(x) = x^4 + 18x^3 + 120x^2 + x + 1$ จงหาช่วงที่ f เว้าขึ้น และ ช่วงที่ f เว้าลงและจุดเปลี่ยนเว้า

ก. เว้าขึ้นเมื่อ $x < 3$ เว้าลงเมื่อ $x > 3$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (3,162)

ข. เว้าขึ้นสำหรับทุกค่าของ x

ค. เว้าขึ้นเมื่อ $x < -5$ หรือ $x > -4$ เว้าลงเมื่อ $-5 < x < -4$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ(-5,1371) และ(-4,1021)

14. กำหนดให้ $f(x) = 4x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$ จงหาช่วงที่ f เว้าขึ้น และ ช่วงที่ f เว้าลงและจุดเปลี่ยนเว้า

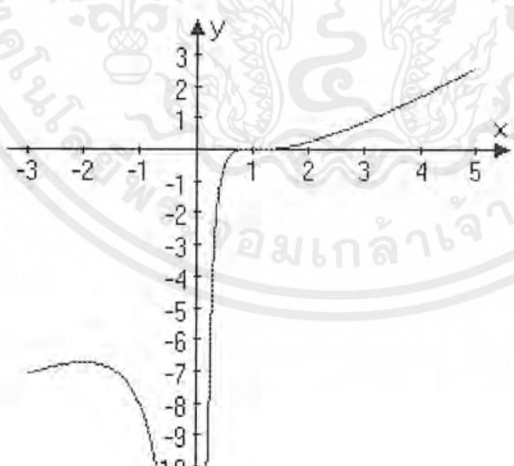
ก. เว้าขึ้นเมื่อ $x < 1$ เว้าลงเมื่อ $x > 1$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (1,1)

ข. เว้าขึ้นเมื่อ $x < -1$ เว้าลงเมื่อ $x > -1$ ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

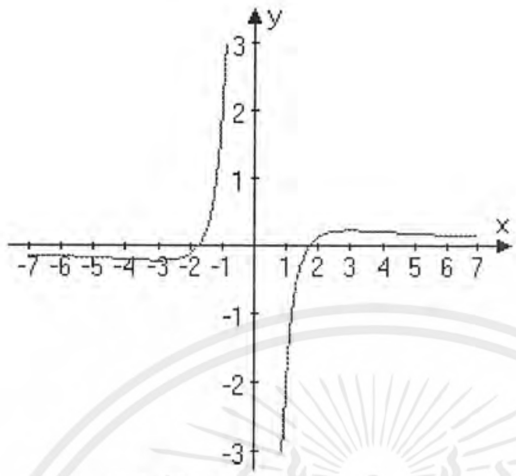
ค. เว้าขึ้นเมื่อ $x < 0$ และ $x > 2$ เว้าลงเมื่อ $0 < x < 2$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (0,0) และ $(2, 6\sqrt[3]{2})$

15. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$

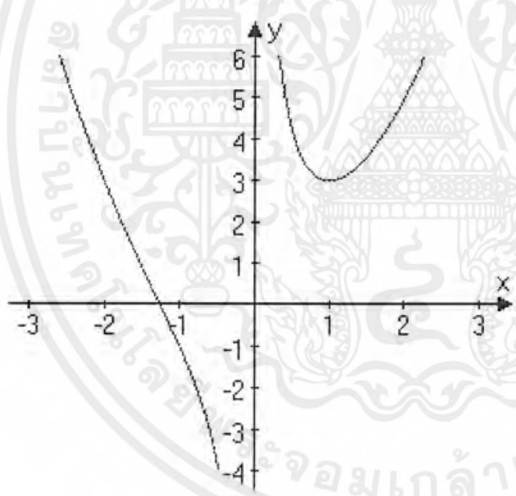
ก. จุดเปลี่ยนเว้าคือ (1,0)



ข. จุดเปลี่ยนเว้าคือ $\left(-3\sqrt{2},\frac{-5\sqrt{2}}{36}\right),\left(3\sqrt{2},\frac{5\sqrt{2}}{36}\right)$



ค. จุดเปลี่ยนเว้าคือ $\left(-2^{1/3},0\right)$



ชุดที่ 2

1. จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2-4}$ บนช่วง [-5,3]

   ก. ค่าสูงสุด $=\dfrac{5}{4}$ ที่ $x=4$ และ ค่าต่ำสุด $=\dfrac{3}{4}$ ที่ $x=2$

   ข. ค่าสูงสุด $=1$ ที่ $x=0$ และ ค่าต่ำสุด $=-11$ ที่ $x=-1$

   ค. ค่าสูงสุด $=\dfrac{-1}{5}$ ที่ $x=-3$ และ ค่าต่ำสุด $=\dfrac{-1}{4}$ ที่ $x=-4$

2. กำหนดให้ $f(x)=|x+1||x-2|$ จงหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด

   ก. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ [-1,0] และ [1, ∞)
      ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดลงคือ (-∞,-1] และ [0,1]

   ข. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ (-∞,∞)
      ไม่มีช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดลง

   ค. ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นคือ[-1,1/2] และ [2, ∞)
      ช่วงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันลดลงคือ [1/2,2] และ (-∞,-1]

3. กำหนดให้ $f(x)=x^3+15x^2+6x+1$ จงหาช่วงที่ f เว้าขึ้น และ ช่วงที่ f เว้าลง และ จุดเปลี่ยนเว้า

   ก. เว้าขึ้นเมื่อ $x>-5$ เว้าลงเมื่อ $x<-5$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (-5,221)

   ข. เว้าขึ้นสำหรับทุกค่าของ x

   ค. เว้าขึ้นเมื่อ $x>1/2$ เว้าลงเมื่อ $x<1/2$ ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

4. กำหนดให้ $f(x)=x^3+15x^2+6x+1$ จงหาช่วงที่ f เว้าขึ้น และ ช่วงที่ f เว้าลง และ จุดเปลี่ยนเว้า

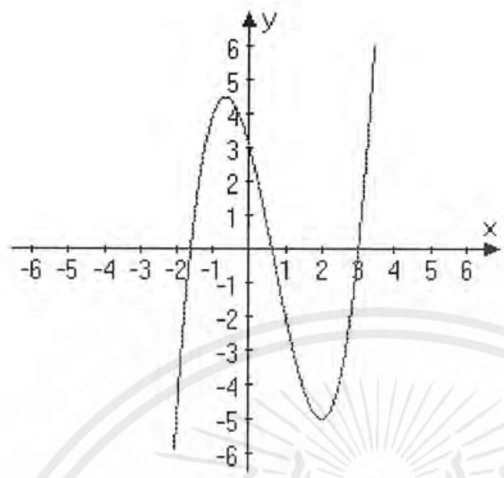
   ก. เว้าขึ้นเมื่อ $x<-5$ หรือ $x>-4$ เว้าลงเมื่อ $-5<x<-4$
      จุดเปลี่ยนเว้าคือ (- 5,1371) และ (-4,1021)

   ข. เว้าขึ้นเมื่อ $x<3$ เว้าลงเมื่อ $x>3$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (3,162)

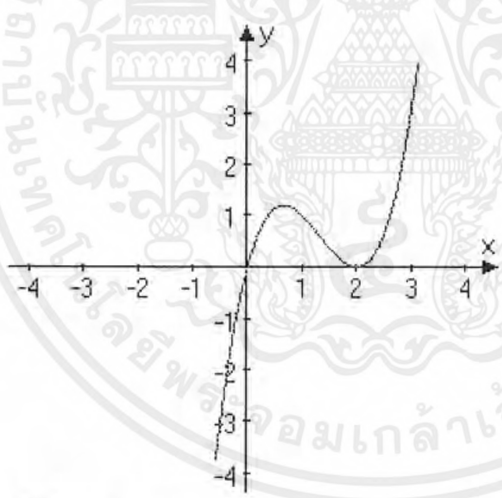
   ค. เว้าขึ้นเมื่อ $x>-5$ เว้าลงเมื่อ $x<-5$ จุดเปลี่ยนเว้าคือ (-5,221)

5. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

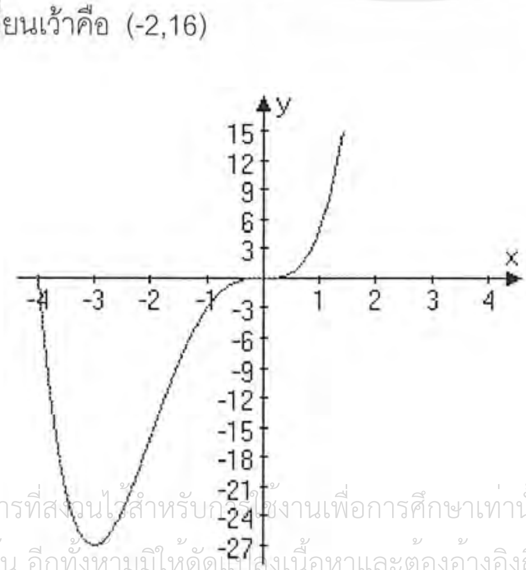
ก. จุดเปลี่ยนเว้า คือ$\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{27}\right)$



ข. จุดเปลี่ยนเว้าคือ $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$



ค. จุดเปลี่ยนเว้าคือ (-2,16)



6. จงหาจุดวิกฤตและจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $\dfrac{10}{1+\sin^2 x}$

   ก. จุดวิกฤตคือ $x=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(\dfrac{n\pi}{2},5)$

   จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $((n+1)\pi,10)$

   ข. จุดวิกฤตคือ $x=\dfrac{(n-1)\pi}{2}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $((2n-1)\dfrac{\pi}{2},5)$

   จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(n\pi,10)$

   ค. จุดวิกฤตคือ $x=\dfrac{n\pi}{2}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $((2n-1)\dfrac{\pi}{2},5)$

   จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(2n\pi,10)$

7. จงหาจุดสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x^2+100}{x^2-25},[-1,3]$

   ก. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (0,0) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (0,4)

   ข. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (-3,-109/16) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (0,4)

   ค. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (3,-109/16) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (0,-4)

8. จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=3x^{1/3}-2x$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   ก. $x=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

   ข. $x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

   ค. ถูกทั้งสองข้อ

9. จากฟังก์ชันในข้อ 8 ข้อใดต่อไปนี้ผิด

   ก. จุดเปลี่ยนเว้าคือ $x=0$

   ข. ช่วงที่กราฟ f มีความเว้าอยู่ข้างบนคือ $(0,\dfrac{1}{2\sqrt{2}})$

   ค. ช่วงที่กราฟ f มีความเว้าอยู่ข้างล่างคือ $(\dfrac{1}{2\sqrt{2}},+\infty)$

10. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   ก. เรากล่าวว่า เส้นตรง $x=a$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ หรือ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$

ข. เรากล่าวว่า เส้นตรง $y = mx + b$ เป็นเส้นกำกับสำหรับเส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ถ้า $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(mx+b)] \neq 0$

ค. ถูกทั้งสองข้อ

11. จงหาจุดวิกฤตและจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x$

ก. จุดวิกฤตคือ $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4})$ และ $(\frac{2\pi}{3},\frac{3}{4})$ จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{3},1-\sqrt{3})$

ข. จุดวิกฤตคือ $\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{4},\frac{-3}{4})$ และ $(\frac{\pi}{2},\frac{-3}{4})$ จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{2},1-\sqrt{3})$

ค. จุดวิกฤตคือ $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{3},\frac{-3}{4})$ และ $(\frac{2\pi}{3},\frac{-3}{4})$ จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(\frac{\pi}{2},1-\sqrt{3})$

12. จงหาจุดสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x + \frac{1}{x}, \left[\frac{1}{10},10\right]$

ก. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (-1,-1) และ (3,5) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (0.1,10.1)

ข. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (-1,0) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (0.1,10.1) และ(10,10.1)

ค. จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (0,1) จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (0,0.1) และ (10,10.1)

13. จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. $x = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟ

ข. $y = 2x+1$ เป็นเส้นกำกับเส้นโค้ง

ค. จุดวิกฤต คือ $x = -2,0$

14. จากฟังก์ชันในข้อ 8 ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก. ช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น คือ (1,2)

ข. ช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลดลง คือ (0,1)

ค. ช่วงที่กราฟ f มีความเว้าอยู่ข้างบนคือ $(2,+\infty)$

15. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. การทดสอบอนุพันธ์อันดับที่สองใช้ได้กับฟังก์ชันทุกฟังก์ชันและทุกกรณี

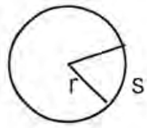
ข. สมมติให้ $f'(a)=0$ ถ้า $f''(a)>0$ แล้วจะได้ว่า $f(a)$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

ค. สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับสองได้บนช่วงเปิด I แล้ว ถ้า $f''(x)>0$ บน I จะได้ว่า f มีความเว้าอยู่ข้างบนที่ทุกจุดใน I

2. การประยุกต์ปัญหาค่าสูงสุด - ค่าต่ำสุด

ชุดที่ 1ก

1. ถ้าความยาวรอบรูปของภาคตัดวงกลมดังรูป เป็น 100 เมตร เมื่อค่าของ r และ s จะทำให้เกิดพื้นที่มากที่สุด จงหาพื้นที่ในพจน์ของ $rA(r)$



ก. $50r - r^2$ ข. $45 - r^2$ ค. $r^2 - 30r$

2. ให้ l และ w เป็นความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่ 16 ตารางนิ้ว จงหาเส้นรอบรูป P ของสี่เหลี่ยมในพจน์ของ l

ก. $4l + 13l^{-3}$ ข. $3l + 24l^{-2}$ ค. $2l + 32l^{-1}$

3. ถ้าเราสร้างกล่องซึ่งไม่มีฝาด้านบนจากกระดาษ 8 × 5 นิ้ว จงหาปริมาตร $V(x)$ เมื่อ x เป็นด้านของกล่อง

ก. $x(15 - 2x)(8 - 2x)$ ข. $3x(8 - x)$ ค. $(3x - 4)(14 - 5x)$

4. กำหนดให้ $S = 2x + y$ เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ค่า x และ y เป็นด้านของสามเหลี่ยมและด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น $\sqrt{5}$ จงหา $S(x)$

ก. $4x + (3 - x)^2$ ข. $3x + (4 - x^2)^2$ ค. $2x + (5 - x^2)^{1/2}$

5. จงหา $A'(r)$ จากข้อ 1

ก. $30 - 4r$ ข. $40 - 3r$ ค. $50 - 2r$

6. จงหารัศมี r จากข้อ 1

ก. 20 ข. 25 ค. 30

7. จงหาความยาวด้านที่สั้นที่สุดของสี่เหลี่ยมจากข้อ 2 (หน่วย)

ก. 2 ข. 4 ค. 6

8. จงหาปริมาตรที่ใหญ่ที่สุดของกล่องจากข้อ 3 (นิ้ว)

ก. $\frac{4}{3}\times\frac{35}{3}\times\frac{14}{3}$ ข. $\frac{4}{3}\times\frac{37}{3}\times\frac{10}{3}$ ค. $\frac{5}{3}\times\frac{35}{3}\times\frac{14}{3}$

9. จงหาด้านที่ยาวที่สุด จากข้อ 4 (หน่วย)

ก. 2 ข. 3 ค. 4

10. จงหาพื้นที่ที่มากที่สุดของสามเหลี่ยม จากข้อ 4 (ตารางหน่วย)

ก. 4 ข. 5 ค. 6

ชุดที่ 2ก

1. ถ้า x เป็นความยาวของฐานรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ h เป็นความสูง ถ้ากำหนดให้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 5 นิ้ว จงหา $A'(x)$

ก. $\dfrac{20-x^2}{2\sqrt{20-x^2}}$ ข. $\dfrac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$ ค. $\dfrac{30-3x^2}{2\sqrt{30-x^2}}$

2. สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีฐานอยู่บนแกน x มุมยอดทั้งสองอยู่ในรูปพาราโบลา $y=12-x^2$ จงหาพื้นที่ $A(x)$

ก. $2x(12-x^2)$, $0\le x\le\sqrt{12}$ ข. $3x(14-x^2)$, $0\le x\le\sqrt{12}$

ค. $4x(18-x^2)$, $0\le x\le\sqrt{12}$

3. ถ้าเราต้องการล้อมรั้วพื้นที่สี่เหลี่ยม 216 ตารางเมตร โดยแบ่งการล้อมรั้วด้านยาวเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน และแบ่งแต่ละด้านให้ขนานกันด้วย จงหาด้านกว้างของสี่เหลี่ยมนี้ (เมตร)

ก. 16 ข. 14 ค. 12

4. ถังน้ำเปิดฝาด้านบนมีปริมาตร 1125 ลูกบาศก์ฟุต ถ้า x เป็นด้านฐานของถังที่มีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและ y เป็นความสูงของถัง กำหนดให้ถังน้ำนี้สร้างด้วยราคา

$$c=5(x^2+4xy)+10xy$$

จงหาราคาถังน้ำในพจน์ของ x เมื่อ $x>0$

ก. $5x^2+30(\frac{1125}{x^2})$ ข. $6x^2+20(\frac{1125}{x^2})$ ค. $7x^2+10(\frac{1125}{x^2})$

5. จงหาด้านที่ยาวที่สุดของสามเหลี่ยม จากข้อ 1 (นิ้ว)

ก. 18/4 ข. 25/4 ค. 37/4

6. จงหาด้านที่ยาวที่สุดของสี่เหลี่ยม จากข้อ 2 (หน่วย)

ก. 4 ข. 8 ค. 12

7. จงหาพื้นที่ที่ใหญ่ที่สุดของสี่เหลี่ยม จากข้อ 2 (ตารางหน่วย)

ก. 32 ข. 24 ค. 18

8. จงหาความยาวรอบรูปสี่เหลี่ยม จากข้อ 3 (เมตร)

ก. 40 ข. 50 ค. 60

9. จงหาว่าความจำเป็นที่จะต้องล้อมรั้วเป็นเท่าใด จากข้อ 3 (เมตร)

ก. 72 ข. 82 ค. 92

10. จงหาค่า x และ y ที่ให้ค่าต่ำสุด จากข้อ 4 (ฟุต)

ก. $x = 15, y = 7$ ข. $x = 15, y = 5$ ค. $x = 12, y = 5$

ชุดที่ 1ข

1. ราคาของน้ำมันที่รถยนต์ใช้วิ่งเป็นสัดส่วนตรงกับกำลังสองของอัตราเร็ว ถ้าอัตราเร็วเป็น 40 กิโลเมตร/ชั่วโมง ราคาน้ำมันจะเป็น 25 บาทต่อชั่วโมง ค่าใช้จ่ายส่วนอื่นจะมีค่าประมาณ 100 บาทต่อชั่วโมง จงหาอัตราเร็วที่จะทำให้ค่าใช้จ่ายต่อกิโลเมตรมีค่าน้อยที่สุด

   ก. 80 ก.ม./ช.ม. ข. 40 ก.ม./ช.ม. ค. 120 ก.ม./ช.ม.

2. จงหาส่วนสูงและรัศมีของฐานของรูปทรงกระบอก ที่มีปริมาตรมากที่สุดที่สามารถบรรจุในกรวยกลมตรง ซึ่งรัศมีของฐาน 5 นิ้ว และสูง 12 นิ้ว โดยที่ฐานของทรงกระบอกอยู่บนฐานของกรวย

   ก. รัศมี $\frac{5}{3}$ นิ้ว สูง 4 นิ้ว

   ข. รัศมี $\frac{10}{3}$ นิ้ว สูง 2 นิ้ว

   ค. รัศมี $\frac{10}{3}$ นิ้ว สูง 4 นิ้ว

3. จงหาพื้นที่ที่มากที่สุดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าด้านที่เท่ากันสองด้านยาวด้านละ 4 นิ้ว

   ก. 4 ตารางนิ้ว ข. 8 ตารางนิ้ว ค. 16 ครางนิ้ว

4. ต้องการตัดลวดยาว L เป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งนำมางอเป็นวงกลม อีกส่วนหนึ่งนำมางอเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะต้องตัดลวดยาวเส้นละเท่าไร จึงจะทำให้ผลบวกของพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยลวดทั้งสองเส้นน้อยที่สุด

   ก. ตัดลวดเป็นสองท่อนส่วนหนึ่งยาว $\frac{\pi L}{4+\pi}$ นำมางอเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส อีกส่วนหนึ่งยาว $\frac{4L}{4+\pi}$ นำมางอเป็นวงกลม

   ข. ตัดลวดเป็นสองท่อนส่วนหนึ่งยาว $\frac{\pi L}{4+\pi}$ นำมางอเป็นวงกลม อีกส่วนหนึ่งยาว $\frac{4L}{4+\pi}$ นำมางอเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

   ค. ตัดลวดเป็นสองท่อนส่วนหนึ่งยาว $\frac{4\pi L}{4+\pi}$ นำมางอเป็นวงกลม อีกส่วนหนึ่งยาว $\frac{2L}{4+\pi}$ นำมางอเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

5. โรงงานแห่งหนึ่งตั้งอยู่บนฝั่งหนึ่งของแม่น้ำตรง (หมายถึง ชายฝั่งแม่น้ำขนานกันเป็นแนวเส้นตรง) สายหนึ่งแม่น้ำกว้าง 2000 เมตร บนชายฝั่งตรงข้ามกับโรงงานลงไปทางใต้ของแม่น้ำมีโรงไฟฟ้าตั้งอยู่ ห่างจากโรงงานตามแนวชายฝั่ง 4500 เมตร สมมติว่าราคาค่าติดตั้งสายไฟใต้แม่น้ำมีค่าเป็น 3 เท่าของราคาค่าติดตั้งสายไฟบนพื้นดินตามแนวชายฝั่ง จงพิจารณาว่าจะสร้างจุดเชื่อมสายไฟใต้แม่น้ำกับสายไฟบนพื้นดินที่ใดบนชายฝั่งจึงจะเสียค่าใช้จ่ายในการติดตั้งสายไฟน้อยที่สุด

   ก. $4500 - 500\sqrt{2}$ เมตร จากโรงงานมาทางใต้ของแม่น้ำ

   ข. $2250 - 500\sqrt{2}$ เมตร จากโรงงานมาทางใต้ของแม่น้ำ

   ค. $4500 - 250\sqrt{2}$ เมตร จากโรงงานมาทางใต้ของแม่น้ำ

6. ถ้าต้องการตัดท่อนไม้รูปทรงกระบอกกลม รัศมี r เป็นท่อนไม้ซึ่งมีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงหาขนาดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ทำให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีค่ามากที่สุด

   ก. กว้าง $2\sqrt{2}\,r$ ยาว $4\sqrt{2r}$

   ข. กว้าง $\sqrt{2}\,r$ ยาว $4\sqrt{2r}$

   ค. กว้าง $\sqrt{2}\,r$ ยาว $4\sqrt{2r}$

7. สำนักพิมพ์แห่งหนึ่งต้องการพิมพ์หนังสือเล่มใหม่ แต่ละหน้ามีเนื้อที่สำหรับพิมพ์ 40 ตารางนิ้ว มีที่ว่างด้านข้างด้านละ $\frac{1}{2}$ นิ้ว หัวท้ายเว้นไว้ด้านละ 2 นิ้ว เขาจะต้องใช้กระดาษกว้างยาวหน้าละเท่าไร จึงจะใช้กระดาษน้อยที่สุด

   ก. กว้าง $1+\sqrt{10}$ นิ้ว ยาว $2(1+\sqrt{10})$ นิ้ว

   ข. กว้าง $2(1+\sqrt{10})$ นิ้ว ยาว $4(1+\sqrt{10})$ นิ้ว

   ค. กว้าง $1+\sqrt{10}$ นิ้ว ยาว $4(1+\sqrt{10})$ นิ้ว

8. สโมสรเอกชนแห่งหนึ่งเก็บค่าสมาชิกปีละ 1000 บาทต่อคน และลดลง 5 บาท คูณด้วยจำนวนสมาชิกที่เกิน 600 คน และบวก 5 บาท คูณด้วยจำนวนสมาชิกที่น้อยกว่า 600 คน สโมสรแห่งนี้ควรมีสมาชิกกี่คน จึงจะเก็บเงินค่าสมาชิกได้มากที่สุด

   ก. 400 คน ข. 300 คน ค. 200 คน

9. ต้องการทำกล่องกระดาษให้มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและมีฝาเปิดให้มีปริมาตร 32 ลูกบาศก์นิ้ว โดยตัดมุมทั้งสี่ของแผ่นกระดาษเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเท่าๆกัน และพับขึ้น จงหาความกว้าง ความยาว และความสูงของกล่องที่จะทำให้ใช้วัสดุน้อยที่สุด สมมิว่าไม่คิดความหนาของแผ่นกระดาษและไม่เสียค่าใช้จ่ายในการทำกล่อง
   ก. กว้าง $4\sqrt[3]{2}$ นิ้ว ยาว $4\sqrt[3]{2}$ นิ้ว สูง $4\sqrt[3]{2}$ นิ้ว
   ข. กว้าง $2\sqrt[3]{2}$ นิ้ว ยาว $4\sqrt[3]{2}$ นิ้ว สูง $\sqrt[3]{2}$ นิ้ว
   ค. กว้าง $4\sqrt[3]{2}$ นิ้ว ยาว $4\sqrt[3]{2}$ นิ้ว สูง $\sqrt[3]{2}$ นิ้ว

10. ชาวนาคนหนึ่งต้องการล้อมรั้วสนามรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่ 10000 ตารางฟุต การทำรั้วด้านเหนือและด้านใต้ต้องเสียค่าใช้จ่าย 1.50 ดอลลาร์ต่อฟุต รั้วด้านตะวันออกและตะวันตกต้องเสียค่าใช้จ่าย 6.00 ดอลลาร์ต่อฟุต จงหาขนาดของสนามที่จะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด
   ก. ด้านเหนือและด้านใต้ยาว 150 ฟุต ด้านตะวันออกและตะวันตกยาว 50 ฟุต
   ข. ด้านเหนือและด้านใต้ยาว 200 ฟุต ด้านตะวันออกและตะวันตกยาว 50 ฟุต
   ค. ด้านเหนือและด้านใต้ยาว 200 ฟุต ด้านตะวันออกและตะวันตกยาว 100ฟุต

11. บนหน้ากระดาษที่ใช้พิมพ์ต้องบรรจุเนื้องานพิมพ์ 60 ตารางเซนติเมตร จะต้องมีขอบด้านข้างด้านละ 5 เซนติเมตร และขอบด้านบนและด้านล่างด้านละ 3 เซนติเมตร บรรทัดพิมพ์ควรยาวเท่าใด จึงจะใช้กระดาษน้อยที่สุด
   ก. 10 เซนติเมตร ข. 13 เซนติเมตร ค. 15 เซนติเมตร

ชุดที่ 2ข

1. ถังขยะทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ไม่มีฝาปิดด้านบน ต้องการให้มีความจุ 128 ลูกบาศก์เมตร ถ้าก้นถังเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในการทำก้นถังเสียค่าใช้จ่าย 2 ดอลลาร์ต่อตารางเมตร แต่ด้านข้างเสียค่าใช้จ่าย 0.50 ดอลลาร์ต่อตารางเมตร จงหาขนาดของถังที่เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด
   ก. ความสูง 6 เมตร ด้านฐานยาว 2 เมตร
   ข. ความสูง 8 เมตร ด้านฐานยาว 6 เมตร
   ค. ความสูง 8 เมตร ด้านฐานยาว 4 เมตร

2. ถ้าบริษัทหนึ่งขายเครื่องรับวิทยุได้ x เครื่องต่อสัปดาห์ ในราคาเครื่องละ $100 - 0.1x$ ดอลลาร์ ค่าใช้จ่ายในการผลิตเครื่องรับวิทยุ x เครื่องต่อสัปดาห์เท่ากับ $30x + 5000$ ดอลลาร์ จงหาจำนวนเครื่องรับวิทยุที่ควรผลิตเพื่อให้มีกำไรมากที่สุด และราคาขายของเครื่องรับวิทยุ

ก. จำนวนที่ควรผลิต 400 เครื่อง ราคาขาย 65 ดอลลาร์

ข. จำนวนที่ควรผลิต 350 เครื่อง ราคาขาย 65 ดอลลาร์

ค. จำนวนที่ควรผลิต 350 เครื่อง ราคาขาย 70 ดอลลาร์

3. กล่องใบหนึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและด้านข้างตั้งตรง ทำจากกระดาษแข็งขนาด 150 ตารางฟุต จงหาขนาดของกล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด ถ้า

(1) กล่องมีฝาปิดด้านบน

(2) กล่องไม่มีฝาปิดด้านบน

ก. (1) ด้านฐานยาว 6 ฟุต ความสูง 6 ฟุต

(2) ด้านฐานยาว $6\sqrt{2}$ ฟุต ความสูง $6\sqrt{2}$ ฟุต

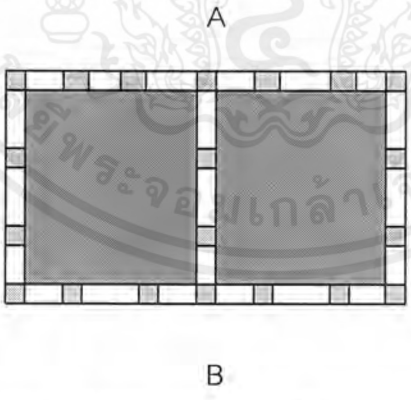
ข. (1) ด้านฐานยาว 5 ฟุต ความสูง 5 ฟุต

(2) ด้านฐานยาว $5\sqrt{2}$ ฟุต ความสูง $5\sqrt{2}$ ฟุต

ค. (1) ด้านฐานยาว 4 ฟุต ความสูง 4 ฟุต

(2) ด้านฐานยาว $4\sqrt{2}$ ฟุต ความสูง $4\sqrt{2}$ ฟุต

4. ชาวนาคนหนึ่งต้องการล้อมรั้วสนามรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้วทำรั้วแบ่งครึ่งด้วยด้านAB รั้วด้านนอกมีค่าใช้จ่าย 2 ดอลลาร์ต่อฟุต รั้วตรงกลางมีค่าใช้จ่าย 3 ดอลลาร์ต่อฟุต ถ้าชาวนามีงบประมาณค่าใช้จ่าย 840 ดอลลาร์แล้ว จงหาขนาดของสนามที่มีพื้นที่มากที่สุด



ก. ความยาว 124 ฟุต ความกว้าง(ขนานกับแนวเส้นแบ่ง) 75 ฟุต

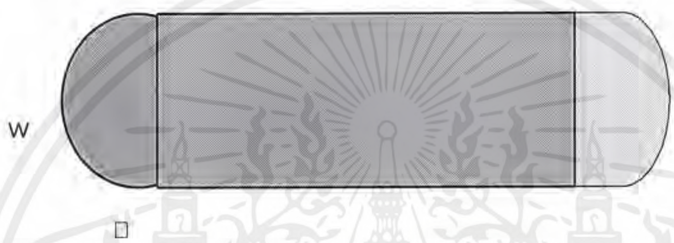
ข. ความยาว 105 ฟุต ความกว้าง(ขนานกับแนวเส้นแบ่ง) 60 ฟุต

ค. ความยาว 120 ฟุต ความกว้าง(ขนานกับแนวเส้นแบ่ง) 75 ฟุต

5. บนเส้นทางการบินเส้นทางหนึ่ง ค่าโดยสารต่อคนเท่ากับ 250 ดอลลาร์ เมื่อมีผู้โดยสารไม่เกิน 100 คน แต่จะงดเที่ยวบินถ้ามีผู้โดยสารน้อยกว่า 50 คน และถ้ามีผู้โดยสารเกิน 100 คนค่าโดยสารจะลดลง 1 ดอลลาร์สำหรับทุกๆคนที่เกินจาก 100 คน ถ้าจำนวนผู้โดยสารสูงสุดที่สามารถบรรทุกได้เท่ากับ 225 คน แล้ว จงหา จำนวนผู้โดยสารซึ่งทำให้มีรายได้มากที่สุด

   ก. 175 คน   ข. 150   ค. 125

6. ศูนย์กีฬาแห่งหนึ่งจะสร้างในรูปแบบของบริเวณสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยมีบริเวณรูปครึ่งวงกลมต่อกับด้านตรงข้ามคู่หนึ่งของบริเวณสี่เหลี่ยมมุมฉาก ถ้าขอบของศูนย์กีฬาทำเป็นลู่วิ่งยาว 1256 เมตร แล้ว จงหาขนาด ของศูนย์กีฬาซึ่งทำให้บริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีพื้นที่มากที่สุด



   ก. l = 314 เมตร , w = 185 เมตร

   ข. l = 278 เมตร , w = 200 เมตร

   ค. l = 314 เมตร , w = 200 เมตร

7. บริษัทแห่งหนึ่ง ขายทีวีได้กำไรเครื่องละ 40 ดอลลาร์ เมื่อผลิตไม่เกิน 1000 เครื่อง ถ้ากำไรต่อเครื่องลดลง 5 เปอร์เซนต์สำหรับทุกๆเครื่องที่เกินจาก 1000 เครื่อง จงหาระดับการผลิตที่ทำให้มีกำไรรวมมากที่สุด

   ก. 1000 เครื่อง   ข. 950 เครื่อง   ค. 800 เครื่อง

8. ชาวนาคนหนึ่งต้องการล้อมรั้วสนามสองแห่ง สนามที่หนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีความยาวเป็นสองเท่าของความกว้าง และสนามที่สองเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส สนามรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากต้องมีพื้นที่อย่างน้อย 882 ตารางเมตร และสนามรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสต้องมีพื้นที่อย่างน้อย 400 ตารางเมตร ถ้ามีวัสดุที่จะทำรั้วได้ 680 เมตร

   (1) จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ x เมื่อ x เป็นความกว้างของสนามรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

   (2) จงหา**<u>พื้นที่รวมสูงสุด</u>**ที่เป็นไปได้ของสนามทั้งสองแห่ง

ก. (1) $25 \le x \le 100$ เมตร (2) 19600 ตารางเมตร

ข. (1) $20 \le x \le 112$ เมตร (2) 18200 ตารางเมตร

ค. (1) $21 \le x \le 100$ เมตร (2) 20400 ตารางเมตร

9. บริษัทต้องเสียค่าใช้จ่าย $0.1x^2 + 4x + 3$ ดอลลาร์ในการผลิตทองคำ x ตัน ถ้าผลิต มากกว่า 10 ตัน ต้องเสียค่าใช้จ่ายด้านแรงงานเพิ่มขึ้นอีก 2(x -10) ดอลลาร์ ถ้าราคาขายต่อตันเท่ากับ 9 ดอลลาร์ (ไม่ขึ้นกับระดับการผลิต) และระดับการผลิตสูงสุดเท่ากับ 20 ตัน จงหาระดับการผลิตที่ทำให้มีกำไรมากที่สุด

ก. 45 ตัน ข. 30 ตัน ค. 15 ตัน

10. ระยะทางในการเดินทางโดยรถโดยสารจากนิวยอร์คถึงบอสตันเท่ากับ 225 ไมล์ พนักงานขับรถได้ค่าจ้าง 12.50 ดอลลาร์ต่อชั่วโมง ค่าใช้จ่ายได้อื่นๆในการเดินรถโดยสารด้วยอัตราเร็วสม่ำเสมอ x ไมล์ต่อชั่วโมงเท่ากับ $90 + 0.5x$ เซนต์ต่อไมล์ อัตราเร็วต่ำสุดและสูงสุดของรถโดยสารตามกฎหมายบนเส้นทางดังกล่าวคือ 40 และ 55 ไมล์ต่อชั่วโมง จงหาอัตราเร็วสม่ำเสมอของรถโดยสารที่จะทำให้มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ก. 35 ไมล์ต่อชั่วโมง ข. 50 ไมล์ต่อชั่วโมง ค. 65 ไมล์ต่อชั่วโมง

11. ชาวนาคนหนึ่งต้องการล้อมรั้วสนามรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากริมลำธารแนวตรง ถ้าชาวนามีวัสดุสำหรับล้อมรั้วได้ 120 หลา และด้านที่ติดลำธารไม่ต้องล้อมรั้ว จงหาขนาดของสนามที่มีพื้นที่มากที่สุด

ก. 50 หลา ด้านขนานลำธาร , 25 หลา ด้านตั้งฉากลำธาร

ข. 60 หลา ด้านขนานลำธาร , 30 หลา ด้านตั้งฉากลำธาร

ค. 80 หลา ด้านขนานลำธาร , 40 หลา ด้านตั้งฉากลำธาร

3. ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

ชุดที่ 1ก

1. สมมติให้รัศมี r และพื้นที่ $A=\pi r^2$ ของวงกลมที่มีอนุพันธ์ฟังก์ชันของ t
จงเขียนสมการความสัมพันธ์ $\frac{dA}{dt}$ กับ $\frac{dr}{dt}$

ก. $\frac{dA}{dt}=\pi r^2\frac{dr}{dt}$ ข. $\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$ ค. $\frac{dr}{dt}=2\pi r\frac{dA}{dt}$

2. สมมติให้ความยาว x และปริมาตร $V=x^3$ ของลูกบาศก์ที่มีอนุพันธ์ฟังก์ชันของ t
จงเขียนสมการความสัมพันธ์ $\frac{dV}{dt}$ กับ $\frac{dx}{dt}$

ก. $\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$ ข. $\frac{dV}{dt}=x^3\frac{dx}{dt}$ ค. $\frac{dx}{dt}=3x^2\frac{dV}{dt}$

3. สมมติให้ความสูง h และปริมาตร $V=\frac{\pi r^2}{3h}$ ของกรวยทรงกลม ที่มีอนุพันธ์ฟังก์ชัน
ของ t จงเขียนสมการความสัมพันธ์ $\frac{dV}{dt}$ กับ $\frac{dh}{dt}$ เมื่อ r เป็นค่าคงตัว

ก. $\frac{dV}{dt}=(1/3)\pi r^2\frac{dh}{dt}$ ข. $\frac{dV}{dt}=(2/3)\pi r\frac{dh}{dt}$ ค. $\frac{dV}{dt}=(2/3)\pi r^2\frac{dh}{dt}$

4. ความยาว l ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าลดลงด้วยอัตรา 2 ซม./วินาที ในขณะที่ความกว้าง w เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 ซม./วินาที กำหนดให้ $l=12$ ซม. และ $w=5$ ซม. จงหาอัตราการเปลี่ยนของ
a) พื้นที่ b) ความยาวรอบรูป c) ความยาวของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ก. a) $\frac{dA}{dt}=2l\frac{dw}{dt}+2w\frac{dl}{dt}$ b) $\frac{dP}{dt}=2\frac{dl}{dt}+2\frac{dw}{dt}$

c) $\frac{dD}{dt}=\frac{1}{2}(w^2+l^2)^{\frac{-1}{2}}[w\frac{dw}{dt}+l\frac{dl}{dt}]$

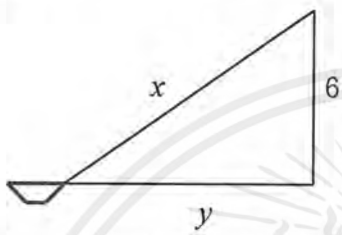
ข. a) $\frac{dA}{dt}=l\frac{dw}{dt}+w\frac{dl}{dt}$ b) $\frac{dP}{dt}=2\frac{dl}{dt}+2\frac{dw}{dt}$

c) $\frac{dD}{dt}=\frac{1}{2}(w^2+l^2)^{\frac{-1}{2}}[2w\frac{dw}{dt}+2l\frac{dl}{dt}]$

ค. a) $\dfrac{dA}{dt} = l\dfrac{dw}{dt} + 2w\dfrac{dl}{dt}$ b) $\dfrac{dP}{dt} = 2w\dfrac{dl}{dt} + 2l\dfrac{dw}{dt}$

c) $\dfrac{dD}{dt} = \dfrac{l}{2}(w^2 + l^2)^{\frac{-1}{2}}[w\dfrac{dw}{dt} + 2l\dfrac{dl}{dt}]$

5. สมมติให้ x เป็นความยาวของเชือกที่ผูกอยู่กับเรือบดกับปลายเสา และ y เป็นระยะห่างจากเรือบดกับโคนเสา ดังรูป จงเขียนความสัมพันธ์ของ $\dfrac{dy}{dt}$ กับ $\dfrac{dx}{dt}$



ก. $\dfrac{dy}{dt} = (1/y)\dfrac{dx}{dt}$ ข. $\dfrac{dy}{dt} = (y/x)\dfrac{dx}{dt}$ ค. $\dfrac{dy}{dt} = (x/y)\dfrac{dx}{dt}$

ชุดที่ 2ก

1. สมมติให้รัศมี r และพื้นผิว $s = 4\pi r^2$ ของทรงกลมที่มีอนุพันธ์ฟังก์ชันของ t จงเขียนสมการความสัมพันธ์ $\dfrac{dS}{dt}$ กับ $\dfrac{dr}{dt}$

ก. $\dfrac{dS}{dt} = 4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$ ข. $\dfrac{dS}{dt} = 8\pi r\dfrac{dr}{dt}$ ค. $\dfrac{dr}{dt} = 8\pi r\dfrac{dS}{dt}$

2. สมมติให้รัศมี r และปริมาตร $V = (1/3)\pi r^2 h$ ของกรวยทรงกลมที่มีอนุพันธ์ฟังก์ชันของ t จงเขียนสมการความสัมพันธ์ $\dfrac{dV}{dt}$ กับ $\dfrac{dr}{dt}$ เมื่อ h เป็นค่าคงตัว

ก. $\dfrac{dV}{dt} = (2/3)h\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$ ข. $\dfrac{dV}{dt} = (1/3)\pi hr\dfrac{dr}{dt}$ ค. $\dfrac{dV}{dt} = (2/3)\pi hr\dfrac{dr}{dt}$

3. ให้ x และ y เป็นอนุพันธ์ฟังก์ชันของ t และให้ $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ เป็นระยะทางระหว่างจุด $(x,0)$ กับ $(0,y)$ ในระนาบ x,y จงเขียนความสัมพันธ์ $\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dy}{dt}$

ก. $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dy}{dt}$

ข. $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dy}{dt}$

ค. $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{dy}{dt}$

4. ให้ A เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่เกิดจากบันไดยาว l ฟุต พิงพาดอยู่กับกำแพงสูง y ฟุต โดยที่เชิงบันไดอยู่ห่างจากกำแพง x ฟุต บันไดเลื่อนลงมาจากกำแพงด้วยความเร็ว $\dfrac{dx}{dt}$ ฟุต/วินาที จงเขียนความสัมพันธ์ $\dfrac{dA}{dt}$, $\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dy}{dt}$

ก. $\dfrac{dA}{dt} = (5/2)[y\dfrac{dy}{dt} + x\dfrac{dx}{dt}]$

ข. $\dfrac{dA}{dt} = (3/2)[(1/x)\dfrac{dy}{dt} + (1/y)\dfrac{dx}{dt}]$

ค. $\dfrac{dA}{dt} = (1/2)[x\dfrac{dy}{dt} + y\dfrac{dx}{dt}]$

5. ชายผู้หนึ่งสูง 6 ฟุต เดินด้วยความเร็ว 5 ฟุต/วินาที ตรงไปยังเสาไฟสูง 16 ฟุต ให้ s เป็นความยาวของเงา และ x เป็นระยะทางที่ชายผู้หนึ่งอยู่ห่างจากเสาไฟ ขณะที่ l เป็นระยะทางของการเคลื่อนของเงาจากเสาไฟ จงหาความเร็วการเคลื่อนที่ของเงา

ก. 8 ฟุต/วินาที ข. 12 ฟุต/วินาที ค. 16 ฟุต/วินาที

ชุดที่ 1ข

1. บันไดยาว 25 ฟุต วางพาดกับผนังกำแพง ถ้าปลายด้านบนของบันไดเลื่อนลงมาตามผนังกำแพง ในอัตรา 1 ฟุตต่อนาที เชิงบันไดจะเลื่อนห่างออกจากฐานกำแพงเร็วเท่าไร ขณะที่เชิงบันไดอยู่ห่างจากฐานกำแพง 7 ฟุต

   ก. 20/7 ฟุต ข. 24/7 ฟุต ค. 22/7 ฟุต

2. น้ำหยดจากภาชนะรูปกรวยใบเล็กๆใบหนึ่ง ในอัตรา 12 ลูกบาศก์มิลลิเมตรต่อวินาที ความสูงของภาชนะเท่ากับ 20 มิลลิเมตร และรัศมีของฐานเท่ากับ 4 มิลลิเมตร น้ำหยดออกจากภาชนะเร็วเท่าไร ในขณะที่ระดับน้ำอยู่สูงจากจุดยอดของกรวย 5 มิลลิเมตร (ปริมาตรของกรวยเท่ากับ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$)

   ก. $8/\pi$ มิลลิเมตรต่อวินาที

   ข. $6/\pi$ มิลลิเมตรต่อวินาที

   ค. $12/\pi$ มิลลิเมตรต่อวินาที

3. ความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่คงตัว 800 ตารางมิลลิเมตร เพิ่มขึ้นในอัตรา 4 มิลลิเมตรต่อวินาที จงหา (1) ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ในขณะที่ความกว้างลดลงในอัตรา 0.5 มิลลิเมตรต่อวินาที (2) ความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเปลี่ยนแปลงเร็วเท่าใด ในขณะที่ความกว้างเท่ากับ 20 มิลลิเมตร

   ก. 10 มิลลิเมตร ; เพิ่มขึ้น $6/\sqrt{5}$ มิลลิเมตรต่อวินาที

   ข. 10 มิลลิเมตร ; ลดลง $6/\sqrt{5}$ มิลลิเมตรต่อวินาที

   ค. 12 มิลลิเมตร ; เพิ่มขึ้น $8/\sqrt{5}$ มิลลิเมตรต่อวินาที

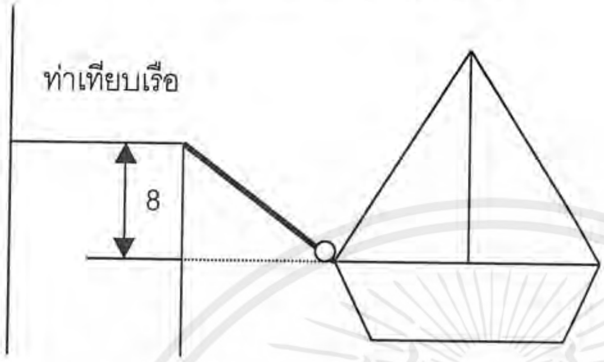
4. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง $y = 2x^3 - 3x^2 + 4$ ในขณะหนึ่ง เมื่อ $x = 2$ พิกัด x ของตำแหน่งของอนุภาคเพิ่มขึ้นในอัตรา 0.5 หน่วยต่อวินาที พิกัด y ของตำแหน่งของอนุภาคในขณะนั้นเปลี่ยนแปลงเร็วเท่าใด

   ก. เพิ่มขึ้น 4 หน่วย/วินาที

   ข. เพิ่มขึ้น 6 หน่วย/วินาที

   ค. ลดลง 5 หน่วย/วินาที

5. เรือลำหนึ่งถูกลากเข้ามายังท่าเทียบเรือโดยใช้เชือกร้อยผ่านห่วงที่หัวเรือดังรูป ท่าเทียบเรือสูงกว่าห่วงที่หัวเรือ 8 ฟุต เรือเคลื่อนที่เข้าใกล้ท่าเทียบเรือเร็วเท่าใด ในขณะที่เชือกระหว่างท่าเทียบเรือกับหัวเรือยาว 10 ฟุต ถ้าดึงเชือกในอัตรา 3 ฟุตต่อวินาที



ก. 15 ฟุต/วินาที ข. 10 ฟุต/วินาที ค. 5 ฟุต/วินาที

6. ชายคนหนึ่งสูง 5 ฟุต เดินด้วยอัตรา 4 ฟุตต่อวินาที ตรงออกไปจากหลอดไฟถนนซึ่งอยู่สูงจากถนน 20 ฟุต จงหา (1) จุดปลายเงาของชายคนนี้เคลื่อนที่ในอัตราใด (2) ความยาวของเงาของชายคนนี้เปลี่ยนแปลงในอัตราใด

ก. (1) 16/3 ฟุตต่อนาที (2) 4/3 ต่อนาที

ข. (1) 16/3 ฟุตต่อนาที (2) 8/3 ต่อนาที

ค. (1) 8/3 ฟุตต่อนาที (2) 4/3 ต่อนาที

7. บอลลูนลูกหนึ่งลอยขึ้นไปตรงๆเหนือจุด A บนพื้นในอัตรา 15 ฟุตต่อวินาที จุด B บนพื้นอยู่ในระดับเดียวกันกับจุด A และห่างจากจุด A 30 ฟุต เมื่อบอลลูนอยู่ห่างจากจุด A 40 ฟุต อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางระหว่างบอลลูนกับจุด B เป็นเท่าไร

ก. 12 ฟุตต่อวินาที ข. 18 ฟุตต่อวินาที ค. 24 ฟุตต่อวินาที

8. เด็กคนหนึ่งกำลังชักว่าวตัวหนึ่งซึ่งลอยอยู่สูง 150 ฟุต ถ้าว่าวลอยห่างจากตัวเขาออกไปในแนวนอนในอัตรา 20 ฟุตต่อวินาที เขาผ่อนสายป่านในอัตราเท่าไร เมื่อว่าวอยู่ห่างจากตัวเขา 250 ฟุต

ก. 14 ฟุตต่อวินาที ข. 16 ฟุตต่อวินาที ค. 20 ฟุตต่อวินาที

9. รถไฟขบวนหนึ่งเริ่มเดินทางเวลา 11.00 น. ไปทางทิศตะวันออกในอัตรา 45 ไมล์ต่อชั่วโมง ในขณะที่รถไฟอีกขบวนหนึ่งเริ่มเดินทางเวลา 12.00 น. จากจุดเดียวกันไปทางทิศใต้ในอัตรา 60 ไมล์ต่อชั่วโมง รถไฟทั้งสองขบวนแล่นแยกจากกันในอัตราใดเมื่อเวลา 15.00 น.
   ก. $115\sqrt{2}/2$ ไมล์ต่อชั่วโมง
   ข. $105\sqrt{2}/2$ ไมล์ต่อชั่วโมง
   ค. $125\sqrt{2}/2$ ไมล์ต่อชั่วโมง

10. ปล่อยน้ำในอัตรา 10 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที ลงไปในถังเก็บน้ำรูปทรงกรวยลึก 16 ฟุตและเส้นผ่านศูนย์กลางด้านบนยาว 8 ฟุต ในขณะที่น้ำลึก 12 ฟุต สังเกตพบว่าระดับน้ำสูงขึ้นในอัตรา 4 นิ้วต่อนาที และมีน้ำรั่วจากถัง จงหาอัตราที่น้ำรั่วจากถัง
   ก. $5-4\pi$ ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที
   ข. $10-4\pi$ ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที
   ค. $10-3\pi$ ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที

11. หญิงคนหนึ่งสูง 5 ฟุต เดินเข้าหาเสาโคมไฟสูง 20 ฟุต ในอัตรา 6 ฟุตต่อวินาที ปลายของเงาของหญิงคนนี้ที่เกิดจากโคมไฟเคลื่อนที่เร็วเท่าไร
   ก. 12 ฟุต/วินาที ข. 8 ฟุต/วินาที ค. 6 ฟุต/วินาที

12. น้ำมันจากบ่อน้ำมันในทะเลที่ลืมปิดปากหลุมไว้ แพร่กระจายในรูปของแผ่นฟิล์มกลมบนผิวน้ำ ถ้ารัศมีของแผ่นฟิล์มมีความยาวเพิ่มขึ้นในอัตรา 2 เมตรต่อนาที พื้นที่ของแผ่นฟิล์มจะเพิ่มขึ้นเร็วเท่าไร ในขณะที่รัศมีของแผ่นฟิล์มยาว 100 เมตร
   ก. 400π ตารางเมตร/นาที ข. 500π ตารางเมตร/นาที ค. 600π ตารางเมตรนาที

13. ถ้ารัศมีของทรงกลมมีความยาวเพิ่มขึ้นในอัตราคงตัว 3 มิลลิเมตรต่อวินาที ปริมาตรของทรงกลมเปลี่ยนแปลงเร็วเท่าใด ขณะที่พื้นที่ผิว $\left(4\pi r^2\right)$ เท่ากับ 10 ตารางมิลลิเมตร
   ก. 75 ลูกบาศก์มิลลิเมตร/วินาที
   ข. 50 ลูกบาศก์มิลลิเมตร/วินาที
   ค. 30 ลูกบาศก์มิลลิเมตร/วินาที

14. เรือลำหนึ่งเคลื่อนที่ผ่านทุ่นตรึงอยู่ในเวลา 09:00 น. ตรงไปทางทิศตะวันตกในอัตรา 3 ไมล์ต่อชั่วโมง เรืออีกลำหนึ่งผ่านทุ่นในเวลา 10:00 น. ตรงไปทางทิศเหนือในอัตรา 5 ไมล์ต่อชั่วโมง ระยะทางระหว่างเรือทั้งสองลำเปลี่ยนแปลงเร็วเท่าใด ในเวลา 11:30 น.

    ก. $7\sqrt{2}$ ไมล์/ชั่วโมง   ข. $3\sqrt{2}$ ไมล์/ชั่วโมง   ค. $4\sqrt{2}$ ไมล์/ชั่วโมง

15. เทน้ำลงในแท็งก์รูปกรวยกลับยอดในอัตรา 3.14 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ความสูงของแท็งก์เท่ากับ 10 เมตร และรัศมีของฐานยาว 5 เมตร ระดับน้ำสูงขึ้นเร็วเท่าใด ในขณะที่น้ำในแท็งก์สูง 7.5 เมตร

    ก. 0.64 เมตร/นาที   ข. 0.56 เมตร/นาที   ค. 0.72 เมตร/นาที

ชุดที่ 2ข

1. เทข้าวสารใส่แท็งก์ทรงกระบอกรัศมียาว 10 ฟุต ในอัตรา 314 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที ระดับความสูงของข้าวสาลีในถังสูงขึ้นเร็วเท่าไร (ปริมาตรทรงกระบอกเท่ากับ $\pi r^2 h$ เมื่อ r คือความยาวของรัศมี และ h คือความสูง)

    ก. $3.14/\pi$ ฟุต/นาที   ข. $2.73/\pi$ ฟุต/นาที   ค. 2.44 ฟุต/นาที

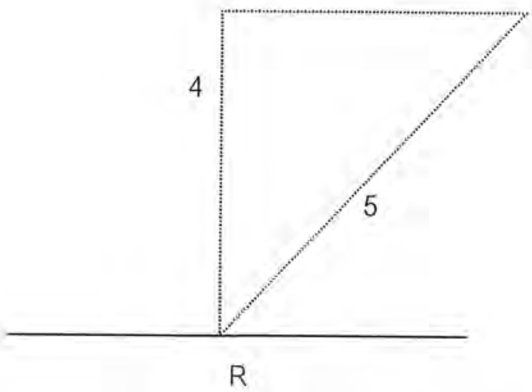
2. ปั๊มลมเข้าไปในลูกโป่งทรงกลมลูกหนึ่งในอัตรา 2 ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของลูกโป่งเพิ่มขึ้นเร็วเท่าไร ขณะที่รัศมียาวครึ่งนิ้ว

    ก. $12/\pi$ นิ้ว/วินาที   ข. $8/\pi$ นิ้ว/วินาที   ค. $4/\pi$ นิ้ว/วินาที

3. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่บนไฮเบอร์โบลา $x^2 - 18y^2 = 9$ ในลักษณะที่พิกัด y เพิ่มขึ้น ในอัตราคงตัว 9 หน่วยต่อวินาที พิกัด x เปลี่ยนแปลงเร็วเท่าใด ขณะที่ $x = 9$

    ก. 18 หน่วย/วินาที   ข. 36 หน่วย/วินาที   ค. 72 หน่วย/วินาที

4. เครื่องบินลำหนึ่งบินขนานกับพื้นดินที่ระดับความสูง 4 กิโลเมตร ผ่านสถานีเรดาร์ R ดังรูป เมื่อเวลาผ่านไปเล็กน้อย เครื่องเรดาร์รายงานว่าเครื่องบินอยู่ห่างออกไป 5 กิโลเมตร และระยะทางระหว่างเครื่องบินกับเรดาร์เพิ่มขึ้นในอัตรา 300 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ในขณะนั้นเครื่องบินเคลื่อนที่ในแนวนอนเร็วเท่าใด



ก. 500 กิโลเมตร/ชั่วโมง ข. 600 กิโลเมตร/ชั่วโมง ค. 750 กิโลเมตร/ชั่วโมง

5. เด็กหญิงคนหนึ่งเล่นชักว่าวซึ่งอยู่ที่ระดับความสูง 120 ฟุต ลมกำลังพัดพาว่าวให้ลอยออกไปจากเด็กหญิงในแนวนอนด้วยอัตราเร็ว 10 ฟุตต่อวินาที ต้องผ่อนเชือกออกไปเร็วเท่าใด ในขณะที่ว่าวอยู่ห่างจากเด็กหญิง 150 ฟุต

ก. 4ฟุต/วินาที ข. 6ฟุต/วินาที ค. 10 ฟุต/วินาที

6. บันไดยาว 20 ฟุตพาดไว้กับตัวบ้าน ถ้าเชิงบันไดอยู่ห่างจากตัวบ้าน 12 ฟุต และกำลังเลื่อนออกไปในอัตรา 2 ฟุตต่อวินาที จงหาอัตรา (1) การเลื่อนลงของปลายด้านบนของบันได (2) การลดลงของความชันของบันได

ก. 3/2 ฟุตต่อวินาที,25/72 ฟุตต่อวินาที

ข. 5/2 ฟุตต่อวินาที,45/72 ฟุตต่อวินาที

ค. 3/2 ฟุตต่อวินาที,50/72 ฟุตต่อวินาที

7. เรือลำหนึ่งมีดาดฟ้าต่ำกว่าท่าเรือ 10 ฟุต ถูกลากเข้ามายังท่าเรือโดยใช้สายเคเบิลตรึงกับดาดฟ้าเรือ เมื่อเรืออยู่ห่างจากท่าเรือ 24 ฟุตและเคลื่อนที่เข้ามายังท่าเรือในอัตรา ¾ ฟุตต่อวินาที สายเคเบิลถูกดึงเข้ามาในอัตราใด (สมมุติว่าสายเคเบิลไม่หย่อน)

ก. 7/13 ฟุตต่อวินาที ข. 8/13 ฟุตต่อวินาที ค. 9/13 ฟุตต่อวินาที

8. รางใส่อาหารสัตว์ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากยาว 8 ฟุต ด้านบนมีความกว้างตามขวาง 2 ฟุต และลึก 4 ฟุต ถ้าน้ำไหลเข้ารางในอัตรา 2 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินที แล้วระดับน้ำในรางจะสูงขึ้นในอัตราเท่าไร เมื่อระดับน้ำสูง 1 ฟุต

ก. 5/8 ฟุตต่อนาที ข.3/8 ฟุตต่อนาที ค. 1/8 ฟุตต่อนาที

9. ไฟดวงหนึ่งอยู่บนยอดเสาซึ่งสูง 80 ฟุต ลูกบอลลูกหนึ่งตกลงมาจากที่สูงระดับเดียวกันกับดวงไฟ และห่างจากเสาไฟ 20 ฟุต สมมติว่าลูกบอลตกลงมาตามกฎ $s = 16t^2$ ในหนึ่งวินาทีต่อมา เงาของลูกบอลบนพื้นดินเคลื่อนที่ในอัตราใด

ก. 100 ฟุตต่อวินาที ข. 200 ฟุตต่อวินาที ค. 300 ฟุตต่อวินาที

10. เรือ A อยู่ห่างจากจุด O ไปทางทิศตะวันออก 15 ไมล์ และกำลังแล่นไปทางทิศตะวันตกในอัตรา 20 ไมล์ต่อชั่วโมง เรือ B อยู่ห่างจากจุด O ไปทางทิศใต้ 60 ไมล์ และกำลังแล่นไปทางทิศเหนือในอัตรา 15 ไมล์ต่อชั่วโมง

(1) หลังจากนั้น 1 ชั่วโมง เรือทั้งสองกำลังแล่นเข้าใกล้กันมากขึ้น หรือกำลังแล่นแยกห่างจากกันด้วยอัตราใด

(2) เรือทั้งสองอยู่ใกล้กันที่สุดในเวลาใด

ก. ใกล้กันมากขึ้น, 115/$\sqrt{82}$ ไมล์ต่อชั่วโมง (2) 1 ชั่วโมง 55 นาที

ข. แยกจากกันมากขึ้น, 115/$\sqrt{82}$ ไมล์ต่อชั่วโมง (2) 1 ชั่วโมง 55 นาที

ค. ใกล้กันมากขึ้น, 100/$\sqrt{82}$ ไมล์ต่อชั่วโมง (2) 1 ชั่วโมง 45 นาที

11. ของเหลวชนิดหนึ่งไหลลงในแท็งก์รูปทรงกระบอกตั้งตรงรัศมี 6 ฟุตในอัตรา 8 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที ระดับน้ำในแท็งก์สูงขึ้นในอัตราใด

ก. 2/7 π ฟุตต่อนาที ข. 2/9 π ฟุตต่อนาที ค. 2/11 π ฟุตต่อนาที

12. สูบน้ำออกจากอ่างเก็บน้ำรูปทรงกรวยรัศมี 3 ฟุต และลึก 10 ฟุต ในอัตรา 4 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที

(1) ระดับน้ำลดลงในอัตราใด เมื่อความลึกของน้ำเท่ากับ 6 ฟุต

(2) พื้นผิวน้ำมีรัศมีลดลงในอัตราใด

ก. (1) 50/61 π ฟุตต่อนาที (2) 5/9 π ฟุตต่อนาที

ข. (1) 100/81 π ฟุตต่อนาที (2) 10/27 π ฟุตต่อนาที

ค. (1) 150/81 π ฟุตต่อนาที (2) 10/27 π ฟุตต่อนาที

13. ด้านที่ขนานกันอีกคู่หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากยืดให้ยาวขึ้นในอัตรา 2 นิ้วต่อวินาที ในขณะที่ด้าน ขนานกันอีกคู่หนึ่งหดสั้นลงในลักษณะที่ยังคงสภาพเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยมีพื้นที่คงตัว A = 50 ตารางนิ้ว

(1) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวรอบรูป P ขณะที่ความยาวของด้านที่ยาวขึ้นเป็น 10 นิ้ว

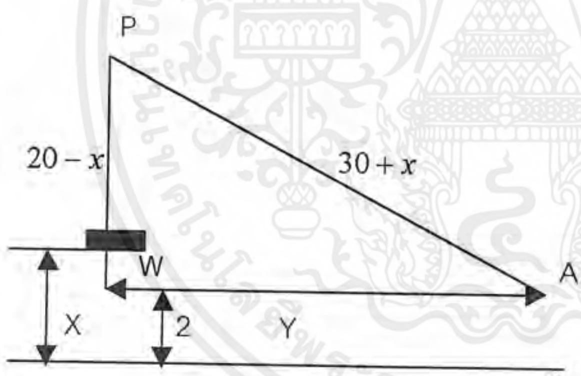
(2) จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขณะที่ความยาวรอบรูปหยุดลดขนาด (ความยาวกรอบรูปกำลังจะเพิ่มขึ้น)

ก. (1) 2 นิ้วต่อวินาที (2) ด้าน $x = y = 5\sqrt{2}$ นิ้ว

ข. (1) 4 นิ้วต่อวินาที (2) ด้าน $x = y = 5\sqrt{2}$ นิ้ว

ค. (1) 2 นิ้วต่อวินาที (2) ด้าน $x = y = 4\sqrt{2}$ นิ้ว

14. นำน้ำหนัก w ผูกติดกับเชือกยาว 50 ฟุต ซึ่งคล้องอยู่กับรอกตัวหนึ่งที่จุด P ซึ่งอยู่สูงจากพื้น 20 ฟุต ปลายเชือกอีกด้านหนึ่งผูกติดกับรถบรรทุกที่จุด A ซึ่งอยู่สูงจากพื้น 2 ฟุต ดังแสดงในรูป



ถ้ารถบรรทุกขับเคลื่อนออกไปในอัตรา 9 ฟุตต่อวินาที น้ำหนัก W จะถูกดึงขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใดในขณะที่น้ำหนักอยู่สูงจากพื้น 6 ฟุต

ก. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ฟุต　　ข. $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ ฟุต　　ค. $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ ฟุต

15. เรือ A กำลังแล่นไปทางทิศใต้ด้วยอัตราเร็ว 16 ไมล์ต่อชั่วโมง และเรือ B ซึ่งอยู่ห่างจากเรือ A ไปทางใต้ 32 ไมล์กำลังแล่นไปทางทิศตะวันออกด้วยอัตราเร็ว 12 ไมล์ต่อชั่วโมง

(1) เมื่อสิ้นเวลา 2 ชั่วโมง เรือทั้งสองลำกำลังแล่นเข้าใกล้กันมากขึ้นหรือแล่นแยกจากกันด้วยอัตราเร็วเท่าใด

(2) จงหาเวลาที่เรือทั้งสองลำหยุดแล่นเข้าหากันและในเวลานั้นเรืออยู่ห่างกันเท่าใด

ก. (1) แล่นแยกจากกันในอัตรา 12 ไมล์ต่อชั่วโมง

(2) หยุดแล่นเข้าหากันเมื่อเวลา 1.28 ชั่วโมงและในเวลานั้นเรืออยู่ห่างกัน 19.2 ไมล์

ข. (1) แล่นแยกจากกันในอัตรา 8 ไมล์ต่อชั่วโมง

(2) หยุดแล่นเข้าหากันเมื่อเวลา 1.28 ชั่วโมง และในเวลานั้นเรืออยู่ห่างกัน 15.2 ไมล์

ค. (1) แล่นแยกจากกันในอัตรา 12 ไมล์ต่อชั่วโมง

(2) หยุดแล่นเข้าหากันเมื่อเวลา 1.23 ชั่วโมงและในเวลานั้นเรืออยู่ห่างกัน 15.2 ไมล์

เฉลยแบบทดสอบ

1. กราฟของฟังก์ชัน

ชุดที่ 1

1. ข
2. ก
3. ค
4. ข
5. ก
6. ก
7. ข
8. ก
9. ค
10. ค
11. ก
12. ข
13. ค
14. ค
15. ข

ชุดที่ 2

1. ค
2. ค
3. ก
4. ข
5. ก
6. ค
7. ค
8. ค
9. ข
10. ก
11. ค
12. ข
13. ก
14. ก
15. ค

2. ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุด

ชุดที่ 1ก

1. ก
2. ค
3. ก
4. ค
5. ค
6. ข
7. ข
8. ค
9. ก
10. ข

ชุดที่ 2ก

1. ข
2. ก
3. ค
4. ก
5. ข
6. ข
7. ก
8. ค
9. ก
10. ข

ชุดที่ 1ข

1. ก
2. ค
3. ข
4. ข
5. ก
6. ค
7. ค
8. ก
9. ค
10. ข
11. ก

ชุดที่ 2ข

1. ค
2. ข
3. ข
4. ข
5. ก
6. ค
7. ก
8. ค
9. ค
10. ข
11. ข

3. ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

ชุดที่ 1ก

1. ข
2. ก
3. ก
4. ข
5. ค

ชุดที่ 2ก

1. ข
2. ค
3. ก
4. ค
5. ก

ชุดที่ 1ข

1. ข
2. ค
3. ก
4. ข
5. ค
6. ก
7. ก
8. ข
9. ข
10. ค
11. ข
12. ก
13. ค
14. ค
15. ก

ชุดที่ 2ข

1. ก
2. ค
3. ข
4. ก
5. ข
6. ก
7. ค
8. ค
9. ข
10. ก
11. ข
12. ข
13. ก
14. ค
15. ก

บทที่ 8

การอินทิเกรต (Integration)

<u>**นิยามที่ 1**</u> ถ้า $F(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนโดเมนเดียวกันแล้ว และ $F'(x) = f(x)$ จะเรียก $F(x)$ ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$

<u>**นิยามที่ 2**</u> ถ้า $F'(x) = f(x)$ เราแทนปฏิยานุพันธ์ของ f ด้วย $\int f(x)dx = F(x) + c$

เรียก $\int$ ว่าเครื่องหมายอินทิกรัล (integral sign)

และ $\int f(x)dx \Rightarrow$ เรียกว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

ซึ่งขบวนการนี้เรียกว่าปฏิยานุพันธ์หรือการอินทิเกรต

เรียก c ว่า ค่าคงตัวของการอินทิเกรต (constant of integration)

สัญลักษณ์ $\int (\ )dx$ เป็นการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x

8.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

<u>**ทฤษฎีบทที่ 1**</u> ถ้า $F(x)$ เป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $f(x)$ ในช่วงปิด I แล้ว สำหรับค่าคงตัว C ใดๆ $F(x)+C$ เป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $f(x)$ ในช่วง I

กฎของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
2. $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$
3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

สูตรการอินทิเกรต

1. $\int 0dx = c$
2. $\int 1dx = x + c$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, n เป็นจำนวนจริงที่ $\neq -1$
4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ใดๆ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่าของ $\int (9x^2+3)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\int (9x^2+3)dx &= \int 9x^2dx + \int 3dx \\ &= 9\int x^2dx + 3\int 1dx \\ &= 9\frac{x^3}{3} + 3x + c \\ &= 3x^3 + 3x + c \qquad \text{###}\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาค่าของ $\int (2\sqrt{x}-1)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\int (2\sqrt{x}-1)dx &= \int 2\sqrt{x}dx - \int 1dx \\ &= 2\int x^{1/2}dx - \int 1dx \\ &= 2\frac{x^{3/2}}{3/2} - x + c \\ &= \frac{4}{3}x^{3/2} - x + c \qquad \text{###}\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาค่าของ $\int (x^2+2)xdx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\int (x^2+2)xdx &= \int (x^3+2x)dx \\ &= \int x^3dx + 2\int xdx \\ &= \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + c \\ &= \frac{x^4}{4} + x^2 + c \qquad \text{###}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\int \frac{(3x^2+6x+4)}{\sqrt{x}}dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{(3x^2+6x+4)}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}}+\frac{6x}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$= \int\left(3x^{3/2}+6x^{1/2}+4x^{-1/2}\right)dx$$
$$= 3\frac{2x^{5/2}}{5}+6\frac{2x^{3/2}}{3}+4.2x^{1/2}+c$$
$$= \frac{6x^{5/2}}{5}+4x^{3/2}+8x^{1/2}+c \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\int x\sqrt{3x}dx$

วิธีทำ

$$\int x\sqrt{3x}dx = \sqrt{3}\int x^{3/2}dx$$
$$= \sqrt{3}.\frac{2}{5}x^{5/2}+c \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\int\left(4x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{5}{x^2}\right)dx$

$$\int\left(4x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{5}{x^2}\right)dx = 4\int xdx-2\int x^{-1/3}dx+5\int x^{-2}dx$$
$$= 4.\frac{x^2}{2}-2.\frac{x^{2/3}}{2/3}+5\frac{x^{-1}}{-1}+c$$
$$= 2x^2-3x^{2/3}-5x^{-1}+c \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\int \frac{(x^3-1)(4x^2-7)}{x-1}dx$

วิธีทำ

เนื่องจาก $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = (x^2+x+1)$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
\int \frac{(x^3-1)(4x^2-7)}{x-1} &= \int (x^2+x+1)(4x^2-7)dx \\
&= \int (4x^4+4x^3+4x^2-7x^2-7x-7)dx \\
&= \int (4x^4+4x^3-3x^2-7x-7)dx \\
&= \int 4x^4dx + \int 4x^3dx + \int -3x^2dx + \int -7xdx + \int -7dx \\
&= 4\int x^4dx + 4\int x^3dx - 3\int x^2dx - 7\int xdx - 7\int dx \\
&= \frac{4}{5}x^5 + c_1 + x^4 + c_2 - x^3 + c_3 - \frac{7}{2}x^2 + c_4 - 7x + c_5 \\
&= \frac{4}{5}x^5 + x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 7x + c
\end{aligned}
$$

เมื่อ $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$ ###

8.2 อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral)

ความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขต

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ถ้าต้องการหาพื้นที่ในโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x ในช่วง $x = a$ ถึง $x = b$ จะทำได้โดยการแบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วน ที่จุด $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ โดย $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ ดังนั้นช่วงปิด $[a,b]$ จะถูกแบ่งออกเป็น n ช่วง คือ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ... [x_{n-1}, x_n]$

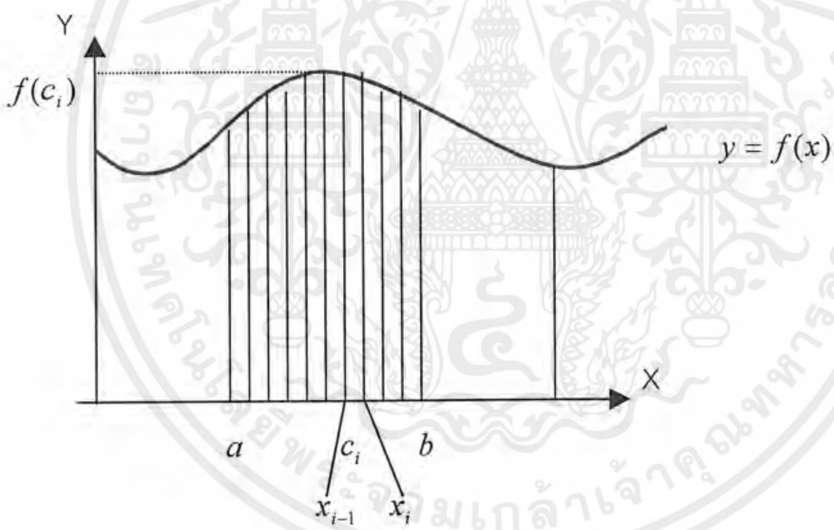
จากนั้นสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนแต่ละช่วงย่อยและเลือก $c_1, c_2, ..., c_n$ โดยที่ $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ เมื่อ $i = 1, 2, ..., n$

เราจะได้ว่า พื้นที่ทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูป คือ

$$f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + ... + f(c_n)(x_n - x_{x-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



รูปที่ 8.1

การแบ่งจำนวนสี่เหลี่ยมเล็กคือ n ให้มากขึ้น $(n \to \infty)$ หรือให้ช่วงย่อยมีความกว้างน้อยๆ $(\Delta x \to 0)$ จะทำให้การประมาณค่าพื้นที่ใต้กราฟใกล้เคียงมากยิ่งขึ้น

ถ้า Δx แทนความกว้างที่มากที่สุดในแต่ละช่วงย่อย พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x จาก $x = a$ ถึง $x = b$ คือ

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \quad \text{หรือ} \quad A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

<u>หมายเหตุ</u> เรียกผลบวก $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ ว่า **ผลบวกรีมันน์** (Riemann Sum) ของ f บนช่วง $[a,b]$

<u>**นิยามที่ 3**</u> ถ้า $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ หาค่าได้แล้ว จะเรียก $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ ว่า อินทิกรัลจำกัดเขต ของฟังก์ชัน f จาก a ถึง b และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$

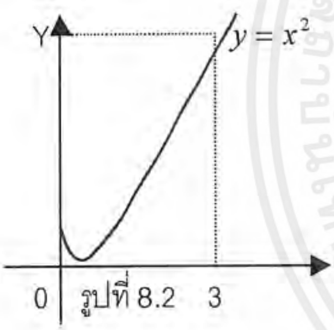
โดยเรียก a ว่า ลิมิตล่างของการอินทิเกรต หรือ ขีดจำกัดล่าง (lower limit)

b ว่า ลิมิตบนของการอินทิเกรต หรือ ขีดจำกัดบน (upper limit)

<u>หมายเหตุ</u> $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

<u>**ตัวอย่างที่ 8**</u> หาค่าของ $\int_0^3 x^2 dx$ โดยใช้ผลบวกรีมันน์

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 8.2

1) แบ่งช่วง $[0,3]$ ออกเป็น n ส่วนเท่าๆกัน ที่จุด

ดังนั้น $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

2) สร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ในแต่ละช่วงย่อย จะได้

จุด $x_0 = 0$

$$x_1 = 0 + \frac{3}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_2 = \frac{3}{n} + \frac{3}{n} = 2 \cdot \frac{3}{n}$$

$$x_3 = \left(2 \cdot \frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{3}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_i = i \cdot \frac{3}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_n = n \cdot \frac{3}{n} = 3 = b$$

3) จากนิยาม $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{3}{n}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[\left(\frac{3}{n}\right)^2+\left(2\cdot\frac{3}{n}\right)^2+......+\left(n\cdot\frac{3}{n}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)^2(1^2+2^2+.....+n^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{9}{2}\cdot 2 = 9 \quad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงหาค่าของ $\int_1^4 (3-2x)dx$ โดยใช้ผลบวกรีมันน์

<u>วิธีทำ</u>

1) แบ่งช่วง $[1,4]$ ออกเป็น n ส่วนเท่าๆกัน

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

ในแต่ละช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ เลือกจุด x_i ซึ่งเป็นจุดปลายของแต่ละช่วง

2) สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแต่ละช่วงย่อย

จะได้จุด $x_0 = 1$

$$x_1 = 1+\frac{3}{n}$$

$$x_2 = \left(1+\frac{3}{n}\right)+\frac{3}{n} = 1+2\cdot\frac{3}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_i = 1+i\cdot\frac{3}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_n = 1+n\cdot\frac{3}{n} = 4$$

3) จากนิยาม $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$$\int_1^4 (3-2x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(3-2x_i)\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}3 - 2\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+i\cdot\frac{3}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot 3n - 2\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot n - 2\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{(n+1)n}{2}$$

$$= 9-6-2\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n^2}\frac{(n^2+n)}{2} = -6 \qquad \#\#\#$$

กฎทางพีชคณิตสำหรับอินทิกรัลจำกัดเขต

ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$ เมื่อ $f(x)\ge g(x)$
6. $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ ทุก $x\in[a,b]$
7. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, เมื่อ $c\in[a,b]$
8. $\int_a^b kdx = k(b-a)$

<u>**ทฤษฎีบทที่ 2**</u> ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับอินทิกรัลจำกัดเขต (The Mean Value Theorem for Definite Integrals)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว ที่บางจุด c ในช่วง $[a,b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

นิยามที่ 4 ค่ามัชฌิมของอินทิกรัลฟังก์ชัน f บนช่วง $[a,b]$ เป็น

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าเฉลี่ยของ $f(x)=\sqrt{4-x^2}dx$ บนช่วง $[-2,2]$ จากนิยามที่ 4

วิธีทำ

จากนิยามที่ 4

$$\text{ค่าเฉลี่ยของ } f \text{ บนช่วง } [-2,2] = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{4}(2\pi)=\frac{\pi}{2}$$

ฉะนั้นค่าเฉลี่ยของ $f(x)=\sqrt{4-x^2}dx$ บนช่วง $[-2,2]$ คือ $\frac{\pi}{2}$

ทฤษฎีบทที่ 3 ทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ใดๆ ของ $f(x)$ แล้ว จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx=\big[F(x)\big]_a^b=F(b)-F(a)$$

พิสูจน์

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$G'(x)=f(x)$$

$$F(x)=G(x)+c, a\le x\le b$$

$$\begin{aligned}F(a)&=G(a)+C\\&=0+C\\&=C\end{aligned}$$

$$F(x)=G(x)+F(a)$$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+F(a)$$

ให้ $x=b$ ฉะนั้น $F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx$

ซึ่งเราเขียนเป็น $F(x)\big|_a^b$ แทนด้วย $F(b)-F(a)$ จะได้ $\int_a^b F'(x)dx=F(x)\big|_a^b$

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหาค่าของ $\int_0^2 (x^3+2x-3)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int_0^2 (x^3+2x-3)dx = \int_0^2 x^3dx + \int_0^2 2xdx - \int_0^2 3dx$$
$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 + x^2\Big|_0^2 - 3x\Big|_0^2$$
$$= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] + \left[2^2 - 0^2\right] - 3[2-0]$$
$$= 2 \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> จงหาค่าของ $\int_1^8 \left(\sqrt[3]{t} + 2t + t\sqrt{t}\right)dt$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int_1^8 \left(\sqrt[3]{t} + 2t + t\sqrt{t}\right)dt = \int_1^8 t^{1/3}dt + 2\int_1^8 tdt + \int_1^8 t^{3/2}dt$$
$$= \left.\frac{3}{4}t^{4/3}\right|_1^8 + t^2\Big|_1^8 + \left.\frac{2}{5}t^{5/2}\right|_1^8$$
$$= \frac{3}{4}\left[8^{4/3} - 1^{4/3}\right] + \left[8^2 - 1^2\right] + \frac{2}{5}\left[8^{5/2} - 1^{5/2}\right]$$
$$= \frac{3}{4}[16-1] + \left[6^4 - 1\right] + \frac{2}{5}\left[128\sqrt{2} - 1\right]$$
$$= \frac{45}{4} + 63 + \frac{2}{5}\left(128\sqrt{2} - 1\right) \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> จงหาค่าของ $\int_0^3 |x-2|dx$

<u>วิธีทำ</u>

จากนิยามของค่าสมบูรณ์ $|x-2| = \begin{cases} (x-2) & \text{เมื่อ} \quad x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{เมื่อ} \quad x-2 < 0 \end{cases}$

ดังนั้น
$$\int_0^3 |x-2|dx = \int_0^2 |x-2|dx + \int_2^3 |x-2|dx$$
$$= \int_0^2 -(x-2)dx + \int_2^3 (x-2)dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3$$
$$= 5/2 \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> จงหาค่าของ $\int_0^3 (x^2+1)^3 dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int_0^1 (x^2+1)^3 dx = \int_0^1 (x^6+3x^4+3x^2+1)dx$$
$$= \int_0^1 x^6 dx + 3\int_0^1 x^4 dx + 3\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx$$
$$= \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 + 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [x]_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{7} - 0\right] + 3\left[\frac{1}{5} - 0\right] + 3\left[\frac{1}{3} - 0\right] + [1-0]$$
$$= \frac{1}{7} + \frac{3}{5} + 1 + 1 = \frac{5+21+35+35}{35}$$
$$= \frac{96}{35} \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 (x-1)(x+2)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$
$$\int_{-1}^1 (x-1)(x+2)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^1$$
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right)$$
$$= \frac{-10}{3} \qquad \text{###}$$

8.3 การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration of Substitution)

ในการอินทิเกรตบางครั้ง ฟังก์ชันอาจอยู่ในรูปที่ยากแก่การอินทิเกรต จึงต้องมีการจัดรูปใหม่โดยสมมติให้อยู่ในรูปที่สามารถอินทิเกรตได้ เมื่ออินทิเกรตได้แล้วจึงเปลี่ยนกลับในรูปเดิม

โดยที่อินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ สามารถเขียนเป็น $\int f(u)du$ เมื่อ $u = g(x)$ ซึ่งจะได้ $du = g'(x)dx$

ถ้าเราให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f แล้ว จะได้ว่า

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int F'(g(x))\cdot g'(x)dx = \int F'(u)du$$

$$= F(u) + C = F(g(x)) + C \text{ เมื่อ } u = g(x)$$

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{(6x-5)^2}$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $u = 6x-5$ $\quad \frac{du}{dx} = 6 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{6}$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{(6x-5)^2} = \int \frac{1}{u^2}.\frac{du}{6} = \frac{1}{6}\frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{6u} + c$

$$= \frac{-1}{6(6x-5)} + c \qquad \#\#\#$$

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> จงหาค่าของ $\int \sqrt{5x+1}dx$

ให้ $u = 5x+1$ $\quad du = 5dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{5}$

ดังนั้น $\int \sqrt{5x+1}dx = \int \sqrt{u}.\frac{du}{5} = \frac{2}{3}u^{3/2}.\frac{1}{5} + c$

$$= \frac{2}{15}(5x+1)^{3/2} + c \qquad \#\#\#$$

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> จงหาค่าของ $\int 2x\sqrt{x^2+4}dx$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $u = x^2+4$ $\quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$

$$\int 2x\sqrt{x^2+4}dx = \int 2x\sqrt{u}.\frac{du}{2x}$$

$$= \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(x^2+4)^{3/2} + c$$

<u>ตัวอย่างที่ 19</u> จงหาค่าของ $\int (7-x)^{49}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $u = 7-x \qquad du = -dx$

$$\int (7-x)^{49}\,dx = \int u^{49}.(-du) = \frac{-u^{50}}{50} + c = \frac{-(7-x)^{50}}{50} + c \qquad \#\#\#$$

<u>ตัวอย่างที่ 20</u> จงหาค่าของ $\int \left(x^4 + x^3\right)^5 \left(16x^3 + 12x^2\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $u = x^4 + x^3 \qquad du = \left(4x^3 + 3x^2\right)dx$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{du}{4x^3 + 3x^2}$$

$$\int (x^4 + x^3)^5 (16x^3 + 12x^2)dx = \int u^5.4(4x^3 + 3x^2)\frac{du}{4x^3 + 3x^2}$$

$$= 4\int u^5 du = \frac{4}{6}u^2 + c = \frac{2}{3}(x^4 + x^3)^6 + c$$

ในการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปรของอินทิกรัลจำกัดเขต เมื่อตัวแปรเปลี่ยนไป ค่าขอบเขตของการอินทิเกรตจะต้องเปลี่ยนตามไปด้วย โดยใช้ความสัมพันธ์ของตัวแปรเดิมและตัวแปรที่กำหนดขึ้นใหม่

<u>ตัวอย่างที่ 21</u> จงหาค่าของ $\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}.xdx$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $u = 2x^2 + 1 \qquad du = 4xdx \Rightarrow dx = \frac{du}{dx}$

จากขอบเขตของการอินทิเกรต

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $u = 0 + 1 = 1$

$x = 2 \qquad u = 2.2^2 + 1 = 9$

ดังนั้น $$\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}.xdx = \int_1^9 \sqrt{u}.x\frac{du}{4^x} = \frac{1}{4}\int_1^9 u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^9$$

$$= \frac{1}{6}\left[9^{3/2} - 1^{3/2}\right]$$

$$= \frac{13}{3} \qquad \#\#\#$$

<u>ตัวอย่างที่ 22</u> จงหาค่าของ $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (1+\frac{1}{x})^3 . \frac{1}{x^2}\, dx$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $u = 1 + \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{du}{dx} = \frac{-1}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad dx = -x^{-2} du$

เมื่อ $x = \frac{1}{2}$ จะได้ $u = 3$

$x = 1 \qquad u = 2$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (1+\frac{1}{x})^3 . \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{3}^{2} u^3 . \frac{1}{x^2} . (-x^{-2}) du$$

$$= \int_{2}^{3} u^3 du$$

$$= \frac{u^4}{4}\bigg|_2^3$$

$$= \frac{65}{4}$$

###

<u>ตัวอย่างที่ 23</u> จงหาค่าของ $\int_{2}^{3} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$u = x^2 + 2x + 3$$

$$du = (2x+2)dx$$

ถ้า $x = 2$ แล้ว $u = 4 + 4 + 3 = 11$

ถ้า $x = 3$ แล้ว $u = 9 + 6 + 3 = 18$

$$\int_{2}^{3} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx = \frac{1}{2}\int_{11}^{18} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u}\Big|_{11}^{18}$$

$$= \sqrt{18} - \sqrt{11}$$

###

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าของ $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}dx$

วิธีทำ

ให้ $u = x^2+1$ ดังนั้น $du = 2xdx$

และ $x^5\sqrt{x^2+1} = x^4\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}(u-1)^2\sqrt{u}du$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $u = 1$ และเมื่อ $x = 3$ จะได้ $u = 4$ ดังนั้น

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 (u-1)^2\sqrt{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{1}{7}u^{7/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{1}{3}u^{3/2}\right]_1^4$$

$$= \frac{848}{105}$$ ###

แบบทดสอบ
เรื่องการอินทิเกรต

1. อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

ชุดที่ 1

1. จงหา $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

   ก. $4\sqrt{x}+c$ ข. $3\sqrt{x}+c$ ค. $2\sqrt{x}+c$

2. จงหา $\int \left(\sqrt[3]{x}+4\right)dx$

   ก. $\frac{2}{4}\sqrt[3]{x}+4x+c$ ข. $\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3}+x+c$ ค. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+4x+c$

3. จงหา $\int \left(5x^4-3x\right)dx$

   ก. $5x^5-3x^2+c$ ข. $x^5-\frac{3}{2}x^2+c$ ค. x^5-3x^2+c

4. จงหา $\int \left(x^2-4x+3\right)dx$

   ก. $\frac{x^3}{3}-4x^2+3x+c$ ข. $\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+c$ ค. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2+3x+c$

5. จงหา $\int \left(\sqrt{x}+4\right)^3 dx$

   ก. $\frac{2}{5}x^{5/2}+6x^2+32x^{3/2}+64x+c$

   ข. $\frac{3}{5}x^{3/2}+7x^3+28x^{5/2}+50x+c$

   ค. $\frac{2}{5}x^{5/2}+8x^2+24x^{5/2}+48x+c$

6. จงหา $\int \left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right)dx$

   ก. $\dfrac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 - 2x + c$

   ข. $\dfrac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 2x + c$

   ค. $\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^3 + 2x^2 - 2x + c$

7. จงหา $\int \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + 3\right)dx$

   ก. $\dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + 3x + c$ ข. $\dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + 3x + c$ ค. $\dfrac{-1}{2x} + \dfrac{1}{2x^2} + 3x + c$

8. จงหา $\int \left(4\sqrt[3]{x} - \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 1\right)dx$

   ก. $3\sqrt[4]{x^4} - 4\sqrt{x} + x + c$

   ข. $3\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt{x} + x + c$

   ค. $3\sqrt[3]{x^4} - 6\sqrt{x} + x + c$

9. จงหา $\int \dfrac{x^3 - 5x^2 - x + 1}{x\sqrt{x}}dx$

   ก. $\dfrac{2}{5}x^{5/2} - \dfrac{7}{3}x^{3/2} - \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + c$

   ข. $\dfrac{2}{5}x^{5/2} - \dfrac{10}{3}x^{3/2} - 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + c$

   ค. $\dfrac{2}{5}x^{5/2} - \dfrac{11}{3}x^{3/2} - 3\sqrt{x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}} + c$

10. จงหา $\int \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}dx$

   ก. $\dfrac{2}{5}x^{5/2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}x^{3/2} + x + c$

   ข. $\dfrac{2}{5}x^{5/2} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{3}x^{3/2} + x + c$

   ค. $\dfrac{2}{5}x^{5/2} + \dfrac{x^2}{2} + 2x^{1/2} + x + c$

11. จงหา $\int \frac{1}{6x^3}dx$

ก. $\frac{-1}{12x^2}+c$ ข. $\frac{1}{10x^2}+c$ ค. $\frac{-3}{2x^4}+c$

12. จงหา $\int (x^2+2x)dx$

ก. $\frac{x^3}{3}+2x^2+c$ ข. $\frac{x^3}{3}+x^2+c$ ค. $2\frac{x^3}{3}+2x^2+c$

13. จงหา $\int (7x^2-2x^3)dx$

ก. $\frac{7}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+c$ ข. $\frac{7}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+c$ ค. $\frac{7}{3}x^3-2x^4+c$

14. จงหา $\int y^2\left(y+\frac{2}{3}\right)dy$

ก. $\frac{y^3}{3}+\frac{2y^2}{3}+c$ ข. $\frac{y^3}{3}+\frac{2y^3}{9}+c$ ค. $\frac{y^4}{4}+\frac{2y^3}{9}+c$

15. จงหา $\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}dx$

ก. $\frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{12}-\frac{x}{2}+c$ ข. $\frac{x^3}{6}-\frac{5x^2}{9}+\frac{x}{3}+c$ ค. $\frac{x^3}{5}-\frac{5x^2}{7}+\frac{x}{4}+c$

ชุดที่ 2

1. จงหา $\int \frac{x^3-1}{x^2}dx$

ก. $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+c$ ข. $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x}+c$ ค. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+c$

2. จงหา $\int (3x^6-2x^2+7x+1)dx$

ก. $\frac{3x^7}{7}-\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+1+c$

ข. $\frac{3x^7}{7}-\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+x+c$

ค. $\frac{3x^7}{7}+\frac{2x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+x+c$

3. จงหา $\int \left(3x^2 + 4x\right)dx$

ก. $3x^3 + 2x^2 + c$ ข. $x^3 + 2x^2 + c$ ค. $x^3 + 4x^2 + c$

4. จงหา $\int \left(u^{3/2} - 3u + 14\right)du$

ก. $\frac{3}{5}u^{3/2} - \frac{3}{2}u^2 + 14u + c$

ข. $\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^2 + 14u + c$

ค. $\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{3}{2}u^2 + 14u + c$

5. จงหา $\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right)dt$

ก. $\frac{-1}{t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + c$ ข. $\frac{1}{t} - \frac{2}{3}t^{3/2} + c$ ค. $\frac{1}{t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + c$

6. จงหา $\int \left(x^4 - 3x^2 + 4x - 2\right)dx$

ก. $\frac{1}{5}x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + c$

ข. $\frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + c$

ค. $\frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x^2 - x + c$

7. จงหา $\int (3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2})dx$

ก. $\frac{1}{2}x^6 + \frac{8}{5}x^{5/2} - 4x^{-1/2} + c$

ข. $\frac{1}{2}x^6 + \frac{8}{5}x^{5/2} + 4x^{1/2} + c$

ค. $\frac{1}{2}x^6 + \frac{8}{5}x^{5/2} - 4x^{1/2} + c$

8. จงหา $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right)dt$

ก. $t^3 + \frac{t^2}{4} + c$ ข. $t^3 + \frac{t^2}{2} + c$ ค. $t^3 + \frac{2t^2}{4} + c$

9. จงหา $\int \left(2x^3 - 5x + 7\right)dx$

ก. $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + c$ ข. $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + x + c$ ค. $\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 7x + c$

10. จงหา $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3})dx$

ก. $\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + c$ ข. $\frac{-1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + c$ ค. $\frac{-1}{2x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + c$

11. จงหา $\int x^{-1/3} dx$

ก. $-\frac{3}{2}x^{2/3} + c$ ข. $\frac{3}{2}x^{-2/3} + c$ ค. $\frac{3}{2}x^{2/3} + c$

12. จงหา $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$

ก. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + c$ ข. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{4}{3}x^{3/4} + c$ ค. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^{4/3} + c$

13. จงหา $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right)dy$

ก. $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + c$ ข. $4y^2 - \frac{4}{3}y^{3/4} + c$ ค. $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/8} + c$

14. จงหา $\int 2x\left(1 - x^{-3}\right)dx$

ก. $x^2 - \frac{4}{x} + c$ ข. $x^3 - \frac{3}{2x} + c$ ค. $x^2 + \frac{2}{x} + c$

15. จงหา $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$

ก. $2\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + c$ ข. $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + c$ ค. $2\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} + c$

2. อินทิกรัลจำกัดเขต

ชุดที่ 1

1. จงหา $\int_1^2 \frac{2-t}{t^3}dt$

   ก. 5/4 ข. 3/4 ค. 1/4

2. จงหา $\int_0^1 \left(x^{3/2} - x^{1/2}\right)dx$

   ก. -4/15 ข. -6/15 ค. -8/15

3. จงหา $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx$

   ก. 8 ข. 16 ค. 24

4. จงหา $\int_0^1 3x^2\left(x^3+1\right)dx$

   ก. 4/5 ข. 3/2 ค. 1/3

5. จงหา $\int_{-2}^2 |x+1|dx$

   ก. 3 ข. 4 ค. 5

6. จงหา $\int_{-3}^3 \left(|x| - |x+1|\right)dx$

   ก. 3 ข. 1 ค. 2

7. จงหา $\int_1^4 \sqrt{x}\left(1-x\right)dx$

   ก. 4 ข. 3 ค. 2

8. จงหา $\int_{1}^{4} \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

ก. 4/3 ข. 5/3 ค. 8/3

9. จงหา $\int_{1}^{2} (4x+6) dx$

ก. 4 ข. 12 ค. 16

10. จงหา $\int_{-1}^{3} (3x^2 - x + 6) dx$

ก. 12 ข. 48 ค. 24

11. จงหา $\int_{-2}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2x - 5) dx$

ก. -36 ข. -18 ค. –12

12. จงหา $\int_{1}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

ก. 14/3 ข. 17/3 ค. 20/3

13. จงหา $\int_{1}^{4} \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx$

ก. 8 ข. 6 ค. 4

14. จงหา $\int_{0}^{6} f(x) dx$ ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2, x < 2 \\ 3x-2, x \geq 2 \end{cases}$

ก. 128/3 ข. 112/3 ค. 104/3

15. จงหา $\int_{-1}^{2} |x| dx$

ก. 5/2 ข. 7/2 ค. 9/2

ชุดที่ 2

1. จงหา $\int_{-1}^{2}\left(4x-6x^{2}\right)dx$

ก. -8 ข. -12 ค. -16

2. จงหา $\int_{1}^{8}\left(x^{1/3}+x^{4/3}\right)dx$

ก. 47.28 ข. 56.74 ค. 65.68

3. จงหา $\int_{-2}^{0}(2x+5)dx$

ก. 6 ข. 12 ค. 18

4. จงหา $\int_{0}^{4}\left(3x-\frac{x^{3}}{4}\right)dx$

ก. 8 ข. 10 ค. 12

5. จงหา $\int_{0}^{1}\left(x^{2}+\sqrt{x}\right)dx$

ก. 3 ข. 1 ค. 2

6. จงหา $\int_{1}^{32}x^{-6/5}dx$

ก. 3/2 ข. 5/2 ค. 7/2

7. จงหา $\int_{-4}^{4}|x|dx$

ก. 4 ข. 8 ค. 16

8. จงหา $\int_0^1 \left(3x^2 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}\right)dx$

ก. 55/12 ข. 45/14 ค. 40/17

9. จงหา $\int_0^1 x^3(1+x)^2\,dx$

ก. 49/84 ข. 49/60 ค. 43/60

10. จงหา $\int_0^1 \left(x^4 - x^3\right)dx$

ก. -3/20 ข. -3/10 ค. -1/20

11. จงหา $\int_0^4 \sqrt{x}dx$

ก. 8/3 ข. 16/3 ค. 20/3

12. จงหา $\int_{-1}^1 x^{99}\,dx$

ก. 0 ข. 1 ค. 2

13. จงหา $\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

ก. 28/3 ข. 14/3 ค. 7/3

14. จงหา $\int_1^4 \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}dx$

ก. 13/5 ข. 26/5 ค. 52/5

15. จงหา $\int_4^7 \sqrt{3x+4}dx$

ก. 102/9 ข. 112/9 ค. 122/9

3. การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

ชุดที่ 1

1. จงหา $\int x(x^2+3)^7 dx$

   ก. $\dfrac{(x^3+3)^8}{8}+c$ ข. $\dfrac{(x^3+4)^4}{16}+c$ ค. $\dfrac{(x^2+3)^8}{16}+c$

2. จงหา $\int \sqrt{5+4x}dx$

   ก. $\dfrac{1}{6}(5+4x)^{3/2}+c$ ข. $\dfrac{5}{6}(5+4x)^{1/2}+c$ ค. $\dfrac{1}{6}(3+2x)^{4/5}+c$

3. จงหา $\int \dfrac{1}{\sqrt{7+2x}}dx$

   ก. $7+2\mathrm{x}+c$ ข. $\sqrt{7+2x}+c$ ค. $2\sqrt{7+2x}+c$

4. จงหา $\int x\sqrt{3+x}dx$

   ก. $\dfrac{2}{5}(3+x)^{2/5}-\dfrac{2}{3}(3+x)^{3/2}+c$

   ข. $\dfrac{2}{5}(2+x)^{5/2}-3(4+x)^{3/2}+c$

   ค. $\dfrac{2}{5}(3+x)^{5/2}-2(3+x)^{3/2}+c$

5. จงหา $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

   ก. $2-\sqrt{3}$ ข. $4-\sqrt{3}$ ค. $8-\sqrt{3}$

6. จงหา $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}dx$

   ก. $\dfrac{7}{112}$ ข. $\dfrac{7}{144}$ ค. $\dfrac{7}{248}$

7. จงหา $\int (4x+1)^{4/3} dx$

ก. $\frac{3}{26}(4x+1)^{5/3}+c$ ข. $\frac{3}{28}(2x+1)^{5/3}+c$ ค. $\frac{3}{28}(4x+1)^{7/3}+c$

8. จงหา $\int \sqrt[3]{1+5x}dx$

ก. $\frac{3}{20}(1+5x)^{4/3}+c$ ข. $\frac{7}{20}(1+3x)^{7/3}+c$ ค. $\frac{3}{20}(2+5x)^{5/3}+c$

9. จงหา $\sqrt{x}(\sqrt{x}+7)^5 dx$

ก. $\frac{1}{4}(\sqrt{x}+7)^5-2(\sqrt{x}+7)^4+\frac{49}{5}(\sqrt{x}+7)^3+c$

ข. $\frac{1}{4}(\sqrt{x}+7)^8-4(\sqrt{x}+7)^7+\frac{49}{3}(\sqrt{x}+7)^6+c$

ค. $\frac{5}{4}(\sqrt{x}+7)^8-8(\sqrt{x}+7)^7+\frac{49}{22}(\sqrt{x}+7)^6+c$

10. จงหา $\int \frac{t}{(9+t^2)^4}dt$

ก. $\frac{-1}{3(9+t^2)^3}+c$ ข. $\frac{-1}{3(9+t^2)^6}+c$ ค. $\frac{-1}{6(9+t^2)^3}+c$

11. จงหา $\int \frac{7u^3}{(1+2u^4)^2}du$

ก. $\frac{7}{16(1+2u^8)}+c$ ข. $\frac{-7}{4(1+2u^8)}+c$ ค. $\frac{-7}{8(1+2u^4)}+c$

12. จงหา $\int \frac{1+2x+2x^2}{\sqrt{x+4}}dx$

ก. $50\sqrt{4+x}-\frac{28}{3}(4+x)^{3/2}+\frac{4}{5}(4+x)^{5/2}+c$

ข. $25\sqrt{2+x}-\frac{7}{3}(4+x)^{5/3}+\frac{4}{7}(4+x)^{3/2}+c$

ค. $50\sqrt{4+x}-\frac{14}{3}(8+x)^{1/2}+\frac{5}{4}(2+x)^{5/2}+c$

13. จงหา $\int z^2(z-2)^{1/3}dz$

ก. $\frac{1}{10}(z-2)^{4/3}+\frac{5}{7}(z-4)^{7/3}+3(z-2)^{5/3}+c$

ข. $\frac{3}{10}(z-2)^{10/3}+\frac{12}{7}(z-2)^{7/3}+3(z-2)^{4/3}+c$

ค. $\frac{3}{5}(z-2)^{10/3}+\frac{12}{5}(z-2)^{8/3}+(z-2)^{4/3}+c$

14. จงหา $\int x^2(8x^3+27)^{2/3}dx$

ก. $\frac{1}{40}(8x^3+27)^{5/3}+c$ ข. $\frac{1}{20}(4x^3+21)^{4/3}+c$ ค. $\frac{7}{40}(5x^3+24)^{7/3}+c$

15. จงหา $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

ก. $2\sqrt{1+(1+x^2)}+c$ ข. $4\sqrt{1+\sqrt[3]{(1+x^2)}}+c$ ค. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+c$

ชุดที่ 2

1. จงหา $\int_{2}^{3} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

ก. $\sqrt{52}-\sqrt{17}$ ข. $\sqrt{26}-\sqrt{17}$ ค. $\sqrt{13}-\sqrt{8}$

2. จงหา $\int_{0}^{3} \frac{r}{\sqrt{r^2+16}}dr$

ก. 3 ข. 2 ค. 1

3. จงหา $\int_{1}^{4} \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

ก. 3/8 ข. 1/6 ค. 1/8

4. จงหา $\int_{0}^{1} \frac{x+3}{\sqrt{x+1}}dx$

ก. $\frac{2}{3}(8\sqrt{2}-7)$ ข. $\frac{2}{3}(4\sqrt{2}-5)$ ค. $\frac{4}{5}(8\sqrt{2}-5)$

5. จงหา $\int_{-1}^{0} x^3(x^2+1)^6 dx$

ก. 165/224 ข. 369/214 ค. 769/112

6. จงหา $\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3(x^2-1)^7 dx$

ก. 15/144 ข. 17/114 ค. 21/114

7. จงหา $\int_{0}^{1} \frac{x^8}{\sqrt{1+x^3}}dx$

ก. $\frac{14\sqrt{2}-31}{45}$ ข. $\frac{14\sqrt{2}-31}{15}$ ค. $\frac{7\sqrt{2}-31}{45}$

8. จงหา $\int 3x^2(x^3+7)^3 dx$

ก. $\frac{(x^3+7)^4}{8}+c$ ข. $\frac{(x^4+7)^4}{4}+c$ ค. $\frac{(x^3+7)^4}{4}+c$

9. จงหา $\int \frac{2x^3+3x}{(x^4+3x^2+7)^4}dx$

ก. $\frac{1}{8(x^4+3x^2+7)}+c$

ข. $\frac{-1}{6(x^5+3x^4+7)}+c$

ค. $\frac{-1}{6(x^4+3x^2+7)}+c$

10. จงหา $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

ก. $\frac{8\sqrt{2}}{5}$ ข. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ค. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$

11. จงหา $\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{(x^3+4)^2}dx$

ก. 7/12 ข. 5/12 ค. 1/12

12. จงหา $\int_{-1}^{3} \frac{x}{\sqrt{7+x^2}}dx$

ก. $4-2\sqrt{2}$ ข. $8-4\sqrt{2}$ ค. $12-2\sqrt{2}$

13. จงหา $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}dx$

ก. 1/36 ข. 5/36 ค. 1/18

14. จงหา $\int_{1}^{2} 3(1+x^3)^5 x^2 dx$

ก. 12475 ข. 57896 ค. 88563

15. จงหา $\int_{0}^{4} x\sqrt{9+x^2}dx$

ก. $16\frac{2}{3}$ ข. $32\frac{2}{3}$ ค. $40\frac{2}{3}$

เฉลยแบบทดสอบ

1. อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

ชุดที่ 1

1. ค
2. ค
3. ข
4. ข
5. ก
6. ก
7. ข
8. ค
9. ข
10. ข
11. ก
12. ข
13. ก
14. ค
15. ก

ชุดที่ 2

1. ค
2. ข
3. ข
4. ค
5. ก
6. ข
7. ค
8. ก
9. ก
10. ข
11. ค
12. ก
13. ก
14. ค
15. ข

2. อินทิกรัลจำกัดเขต

ชุดที่ 1

1. ค
2. ก
3. ก
4. ข
5. ค
6. ข
7. ก
8. ค
9. ข
10. ข
11. ก
12. ค
13. ค
14. ก
15. ก

ชุดที่ 2

1. ข
2. ค
3. ก
4. ก
5. ข
6. ข
7. ค
8. ก
9. ข
10. ค
11. ข
12. ก
13. ก
14. ค
15. ค

3. การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

ชุดที่ 1

1. ค
2. ก
3. ข
4. ค
5. ก
6. ข
7. ค
8. ก
9. ข
10. ค
11. ค
12. ก
13. ข
14. ก
15. ค

ชุดที่ 2

1. ข
2. ค
3. ข
4. ก
5. ค
6. ข
7. ก
8. ค
9. ค
10. ข
11. ค
12. ก
13. ก
14. ค
15. ข

บทที่ 9

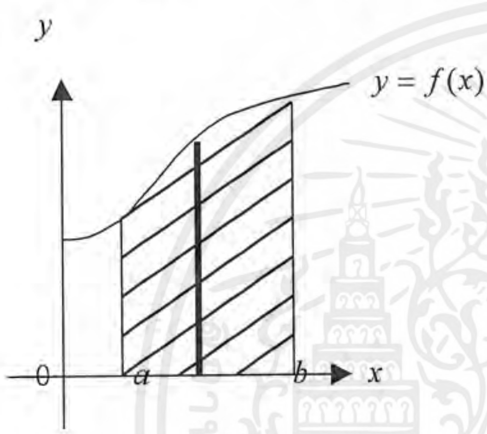
การประยุกต์อินทิกรัล (Application of Definite Integrals)

9.1. พื้นที่ของบริเวณระนาบ (Areas of Plane Regions)

9.1.1 พื้นที่ใต้โค้งกับแกน x

พื้นที่ใต้โค้ง $y = f(x)$ กับแกน x จาก $x = a$ ถึง $x = b$

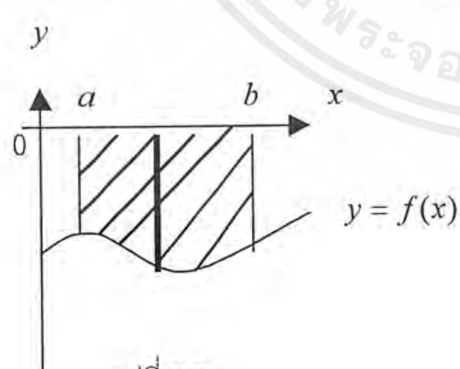
ถ้า $y = f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in [a,b]$ แล้วพื้นที่



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

รูปที่ 9.1

ถ้า $y = f(x) \leq 0$ ทุกค่า $x \in [a,b]$ แล้วพื้นที่



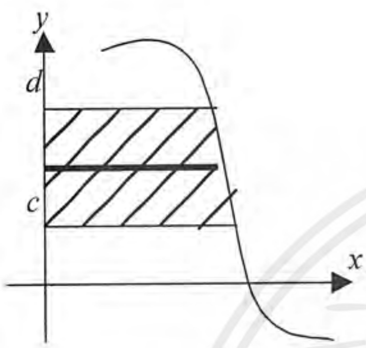
$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

รูปที่ 9.2

9.1.2 พื้นที่ใต้โค้งกับแกน y

พื้นที่ใต้โค้ง $x = f(y)$ กับแกน y จาก $y = c$ ถึง $y = d$

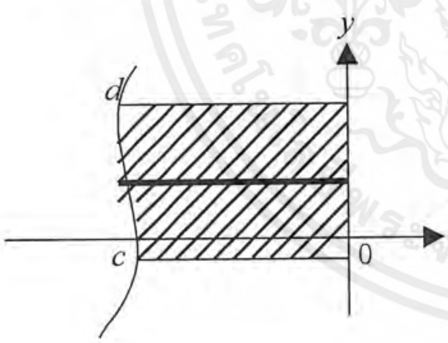
ถ้า $x = f(y) \geq 0$ ทุกค่า $y \in [c, d]$ แล้วพื้นที่



$$\boxed{A = \int_c^d f(y)dy}$$

รูปที่ 9.3

ถ้า $x = f(y) \leq 0$ ทุกค่า $y \in [c, d]$ แล้วพื้นที่

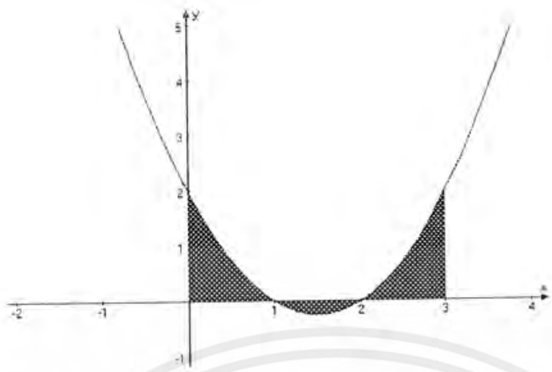


$$\boxed{A = -\int_c^d f(y)dy}$$

รูปที่ 9.4

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y = x^2 - 3x + 2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ



รูปที่ 9.5

จากรูป พบว่า $f(x) \geq 0$ เมื่อ $0 \leq x \leq 1$ และ $2 \leq x \leq 3$

$f(x) \leq 0$ เมื่อ $1 \leq x \leq 2$

ให้ R_1, R_2, R_3 เป็นพื้นที่ทั้งสามส่วนซึ่งจะพบว่า R_2 อยู่ใต้แกน x หรือ $f(x) \leq 0$ เมื่อ $1 \leq x \leq 2$

$$R_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{5}{6}$$

$$R_2 = \int_1^2 (-f(x))dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx = \frac{1}{6}$$

$$R_3 = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{5}{6}$$

นั่นคือพื้นที่ทั้งหมด

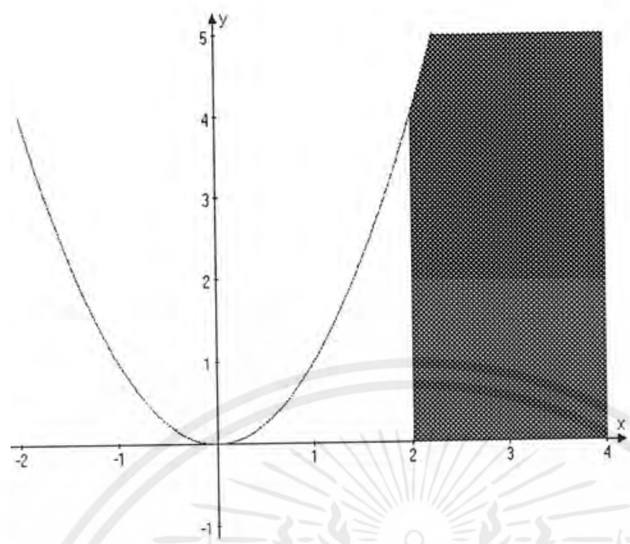
$$= R_1 + R_2 + R_3$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{11}{6}$$ ตารางหน่วย ###

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^2$ แกน x ,$2 \le x \le 4$

วิธีทำ

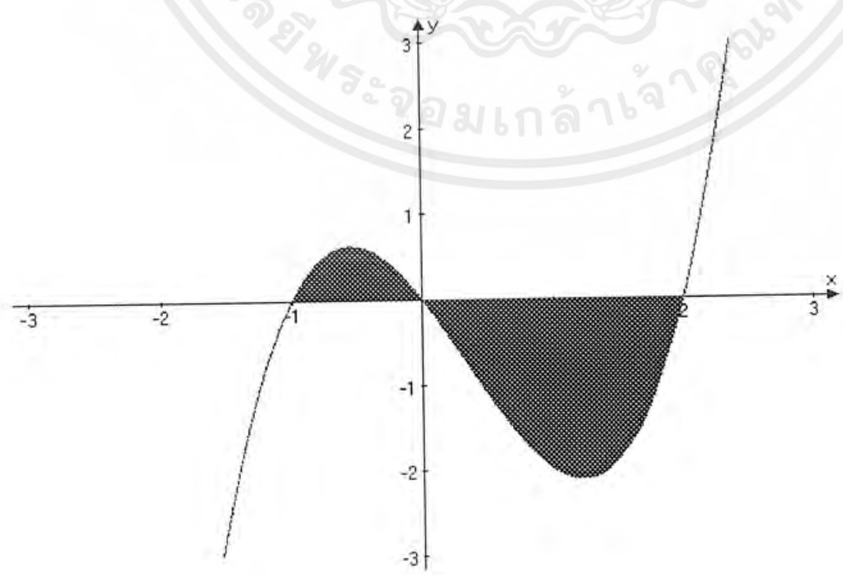


รูปที่ 9.6

$$A = \int_2^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{56}{3}$$ ตารางหน่วย ###

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^3 - x^2 - 2x, -1 \le x \le 2$

วิธีทำ



รูปที่ 9.7

หาจุดตัดบนแกน x

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = -1,0,2$$

จากความรู้เรื่องค่าสูงสุดและต่ำสุด จะได้ว่าโค้งคว่ำเมื่อ $-1 < x < 0$

โค้งหงายเมื่อ $0 < x < 2$

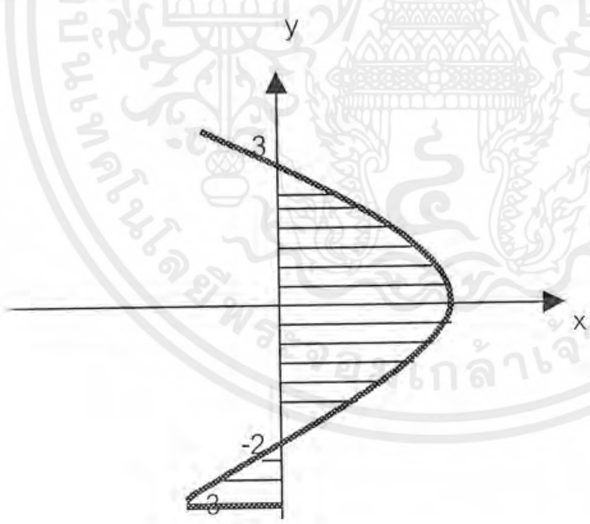
$$A = \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^3 - x^2 - 2x)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)_0^{-1} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)_0^{2}$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{13} = \frac{37}{12}$$ ตารางหน่วย ###

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $x = 8 + 2y - y^2, -3 \le y \le 3$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.8

หาจุดตัดบนแกน y

$$8+2y-y^2=0$$

$$y^2-2y-8=0$$

$$(y-4)(y+2)=0$$

$$y=-2,4$$

$$A=\int_{-3}^{-2}(8+2y-y^2)dy+\int_{-2}^{3}(8+2y-y^2)dy$$

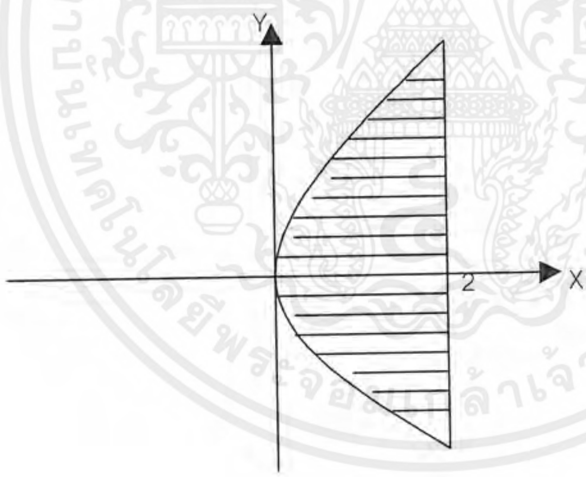
$$=-\left(8y+y^2-\frac{y^3}{3}\right)_{-3}^{-2}+\left(8y+y^2-\frac{y^3}{3}\right)_{-2}^{3}$$

$$=-\left[\left(-16+4+\frac{8}{3}\right)-(-24+9+9)\right]+\left[(24+9-9)-\left(-16+4+\frac{8}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{110}{3}$$ ตารางหน่วย ###

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y^2=4x, 0\le x\le 2$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.9

จะเห็นว่าพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y^2=4x$ มีอยู่ 2 ส่วน คือส่วนที่อยู่เหนือแกน x และใต้แกน x และพื้นที่ทั้งสองส่วนนี้สมมาตรกัน

ให้ A_1 เป็นพื้นที่ที่อยู่เหนือแกน x

A_2 เป็นพื้นที่ที่อยู่ใต้แกน x

$$A_1 = \int_0^2 \sqrt{4x}dx$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{x}dx$$

$$= 2 \cdot \frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_0^2$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$A_2 = \int_0^2 (-\sqrt{4x})dx$$

$$= -2\int_0^2 \sqrt{x}dx$$

$$= -2 \cdot \frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_0^2$$

$$= \frac{-8\sqrt{2}}{3}$$

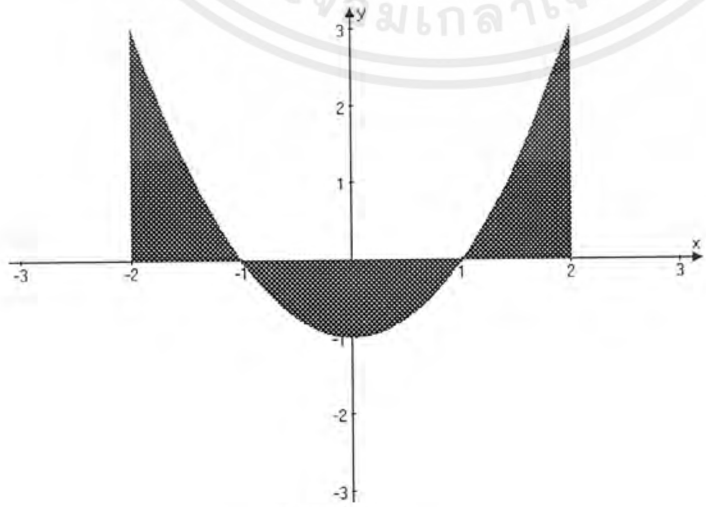
พื้นที่ที่ต้องการเท่ากับ $A_1 - A_2$

$$A_1 - A_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3} - \left(-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}$$ ตารางหน่วย ###

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = x^2 - 1, -2 \le x \le 2$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.10

พิจารณา $|f(x)| = \begin{cases} x^2 - 1, x \geq 1, x \leq -1 \\ -(x^2 - 1), -1 < x < 1 \end{cases}$

ให้ A เป็นพื้นที่ที่ต้องการหา

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2}$$

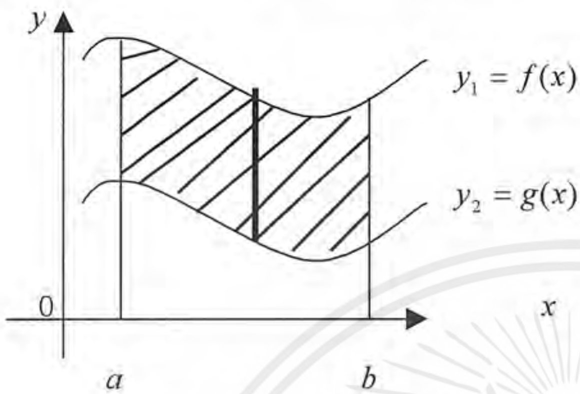
$$= \left[\left(\frac{-1}{3} + 1\right) - \left(\frac{-8}{3} + 2\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{4}{3}$$

$= 4$ ตารางหน่วย ###

9.2 พื้นที่ของบริเวณระหว่างเส้นโค้ง (Area of Regions Between Curves)

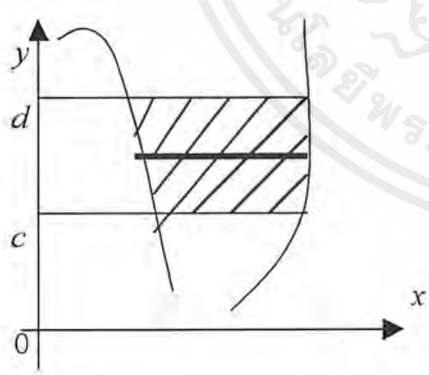
หาพื้นที่ระหว่างโค้ง $y_1 = f(x)$ และ $y_2 = g(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ เมื่อ $f(x) > g(x)$ ทุกค่าของ $x \in [a,b]$ แล้วพื้นที่



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

รูปที่ 9.11

หาพื้นที่ระหว่างโค้ง $x_1 = f(y)$ และ $x_2 = g(y)$ จาก $y = c$ ถึง $y = d$ เมื่อ $f(y) > g(y)$ ทุกค่าของ $y \in [c,d]$ แล้วพื้นที่

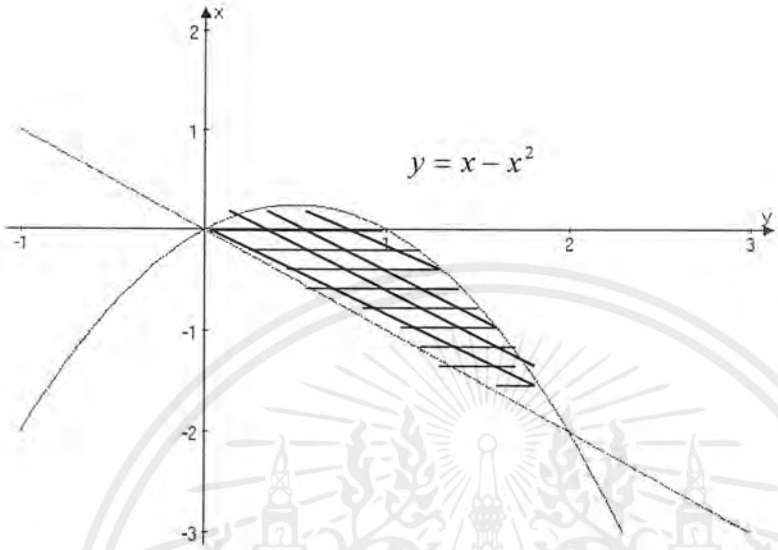


$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

รูปที่ 9.12

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^2 - x$ เส้นตรง $x + y = 0$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.13

หาจุดตัด

$$y = x - x^2 \quad \ldots(1)$$

$$= -x \quad \ldots(2)$$

จาก (1) และ (2) เราได้

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0,2$$

$$y = 0,-2$$

เส้นโค้งตัดกันที่ (0,0) และ (2,−2)

เนื่องจาก $y = x^2 - x \geq (y = -x)$ ทุกค่า $x \in [0,2]$

ดังนั้น

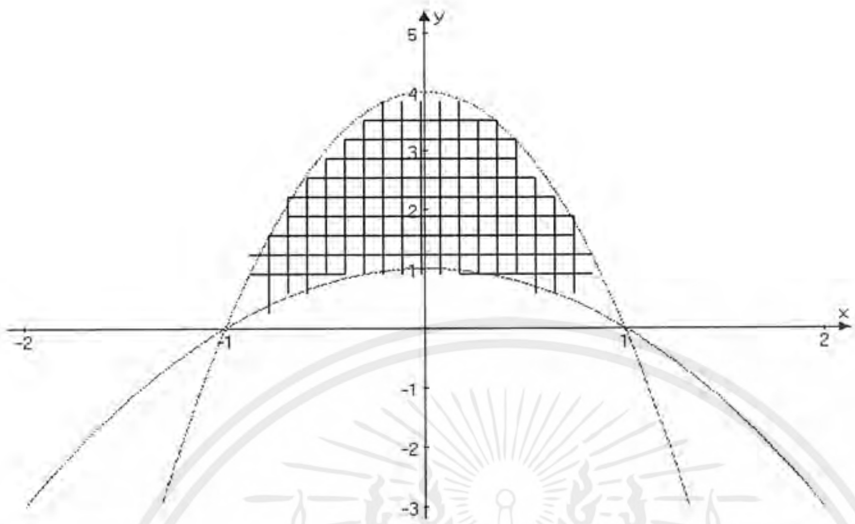
$$A = \int_0^2 \left[(x - x^2) - (-x)\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[(2x - x^2)\right] dx$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_0^2 = \frac{4}{3} \quad \text{ตารางหน่วย} \quad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = 4 - 4x^2$ และ $y = 1 - x^2$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.14

หาจุดตัด

$$y = 4 - 4x^2 \quad \ldots(1)$$

$$y = 1 - x^2 \quad \ldots(2)$$

จาก (1) และ (2) เราได้

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$x = -1,1$$

$$y = 0,0$$

เส้นโค้งตัดกันที่ $(-1,0)$ และ $(1,0)$

เนื่องจาก $y = 4 - 4x^2 \geq y = 1 - x^2$ ทุกค่า $x \in [-1,1]$

ดังนั้น

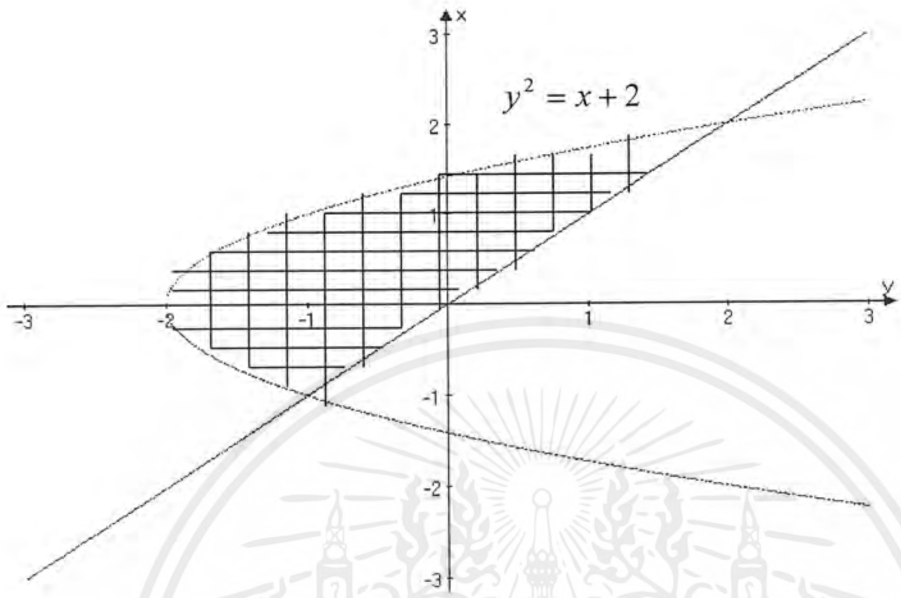
$$A = \int_{-1}^{1} \left[\left(4 - 4x^2\right) - \left(1 - x^2\right)\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (3 - 3x^2)\,dx$$

$$= \left(3x - x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = 4 \quad \text{ตารางหน่วย} \quad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y^2 = x+2$ และ $y = x$

วิธีทำ



รูปที่ 9.15

หาจุดตัด

$y^2 = x+2$ และ $y = x$

เราได้ $x = -1,2$ และ $y = -1,2$

เส้นโค้งตัดกันที่ $(-1,-1)$ และ $(2,2)$

เนื่องจาก $(x = y) \geq (x = y^2 - 2)$ ทุกค่า $y \in [-1,2]$

ดังนั้น $$A = \int_{-1}^{2} \left[y - \left(y^2 - 2\right)\right] dy$$

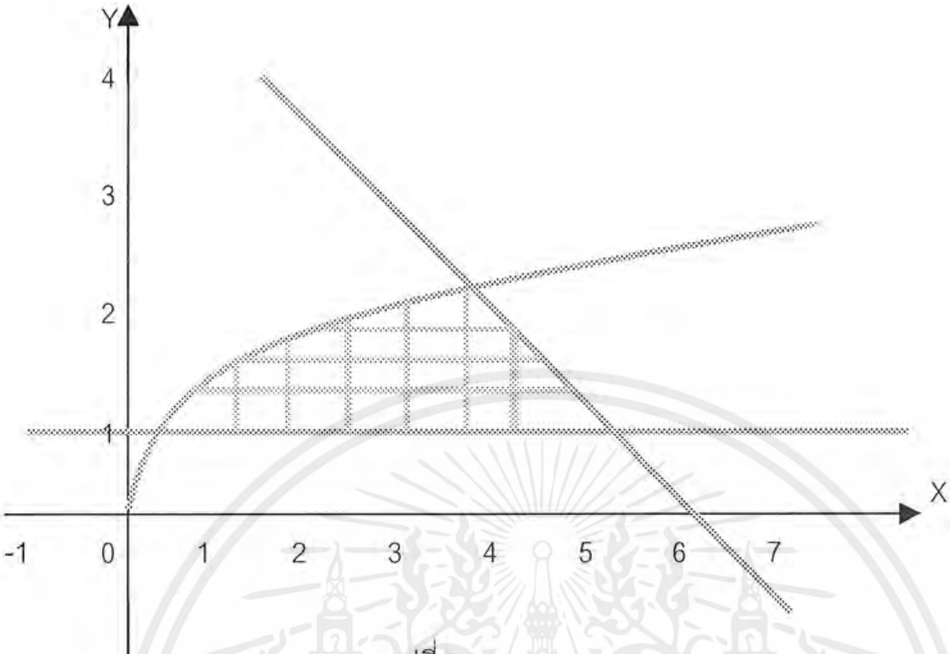
$$= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y\right)_{-1}^{2}$$

$$= \left(2 - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right)$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$$ ตารางหน่วย ###

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y=\sqrt{x}, y=1, y=-x+6$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.16

หาจุดตัด

$y=\sqrt{x}, y=1$ และ $y=-x+6$

เราได้ $x=4$ และ $y=2$

เส้นโค้งตัดกันที่ $(4,2)$

เนื่องจาก $x=6-y \geq x=y^2$ ทุกค่า $y \in [1,2]$

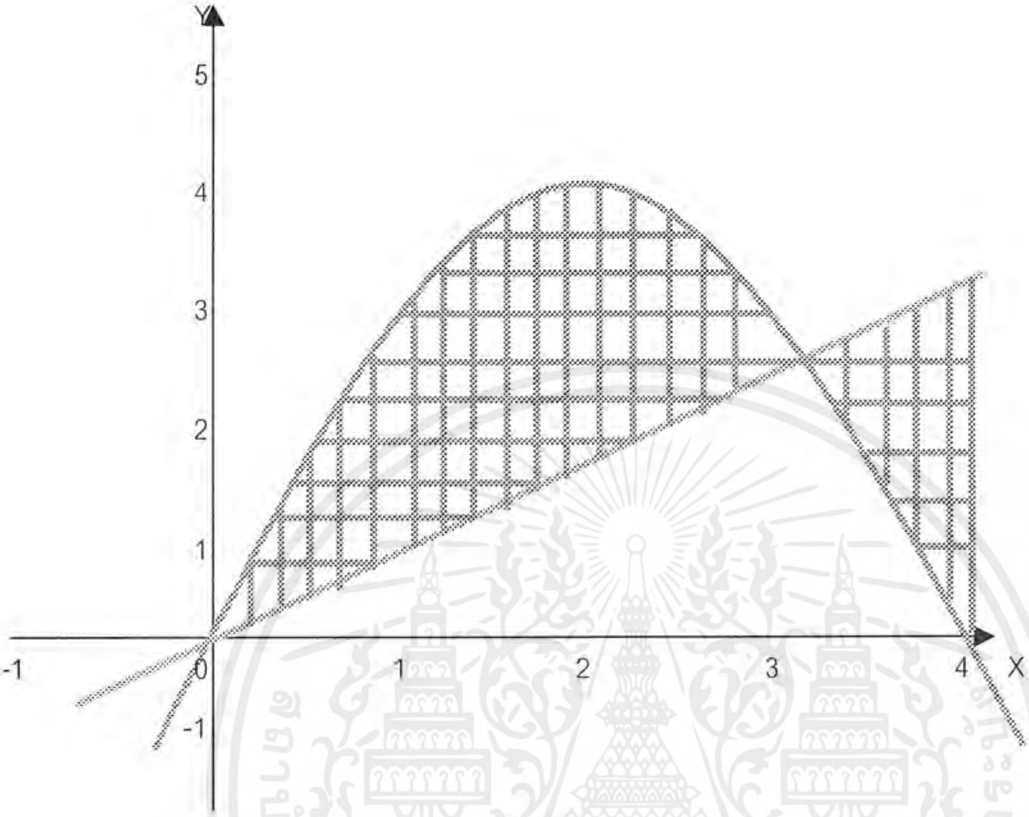
ดังนั้น $A=\int_1^2 \left[6-y-y^2\right] dy$

$$=\left(6y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)_1^2$$

$$=\frac{13}{6}$$ ตารางหน่วย ###

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = 4 - x^2$, $y = x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.17

หาจุดตัด

$y = 4 - x^2$ และ $y = x$

เราได้ $x = 0,3$ และ $y = 0,3$

จุดตัดคือ $(0,0),(0,3)$

เนื่องจาก $y = 4 - x^2 \geq y = x$ ในช่วง $x \in [0,3]$

และ $y = 4 - x^2 \geq y = x$ ในช่วง $x \in [3,4]$

ดังนั้น $$A = \int_0^3 \left[4x - x^2 - x\right]dx + \int_3^4 \left[x - \left(4x - x^2\right)\right]dx$$

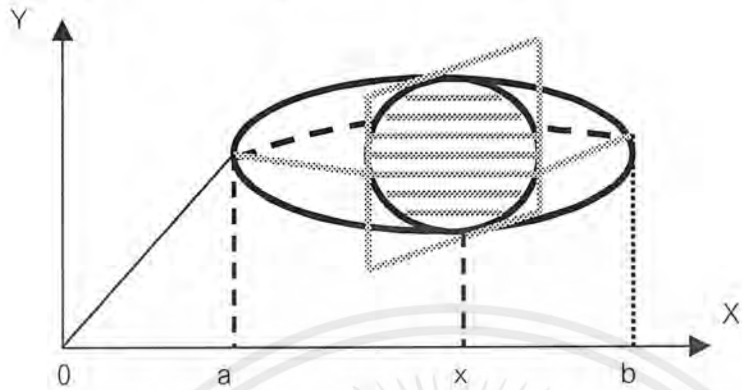
$$= \int_0^3 \left[3x - x^2\right]dx + \int_3^4 \left[x^2 - 3x\right]dx$$

$$= \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right)_3^4$$

$$= \frac{19}{3}$$ ตารางหน่วย ###

9.3 การหาปริมาตรจากภาคตัดขวาง (Volume by Cross Sections)

กำหนดรูปทรงตัน D ดังรูป



รูปที่ 9.18

เราหาปริมาตรของรูปทรงตัน D ซึ่งมีพื้นที่ภาคตัดขวาง $A(x)$ เมื่อ $a \le x \le b$ และ A ต่อเนื่องบน $[a,b]$ ได้ดังนี้

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นเซตของจุดแบ่งย่อยบนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

แบ่งรูปทรงตัน D ออกเป็นส่วนย่อย n ส่วนด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x ที่จุด $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$

ให้ ξ_1 เป็นจุดที่อยู่ในช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ ผลคูณของ $A(\xi_1)(x_i - x_{i-1})$ จะเท่ากับปริมาตรทรงกระบอกที่มีพื้นที่ภาคตัดขวาง $A(\xi_1)$ และหนา $x_i - x_{i-1}$ ถ้า $x_i - x_{i-1}$ มีขนาดเล็กเท่าไร $A(\xi_1)(x_i - x_{i-1})$ จะมีค่าใกล้เคียงกับปริมาตรของ D จาก $x = x_{i-1}$ ถึง $x = x_i$ ดังรูปที่ 9.18

กำหนดให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ เมื่อ $i = 1,2,3,...,n$ และ $\|\Delta\|$ เป็นค่ามากที่สุด Δx_i เมื่อ $i = 1,2,3,...,n$

ให้ V_i เป็นปริมาตรของแต่ละชิ้นเล็กๆ

$$\therefore V_i = A(\xi_i)\Delta x_i$$

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i$$

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

นิยามที่ 9.1 ถ้า S เป็นทรงสามมิติซึ่งถูกปิดล้อมด้วยระนาบสองระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x ที่ $x=a$ ถึง $x=b$ ถ้าตัดทรงสามมิติด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x จะได้ปริมาตรของทรงสามมิติ V คือ

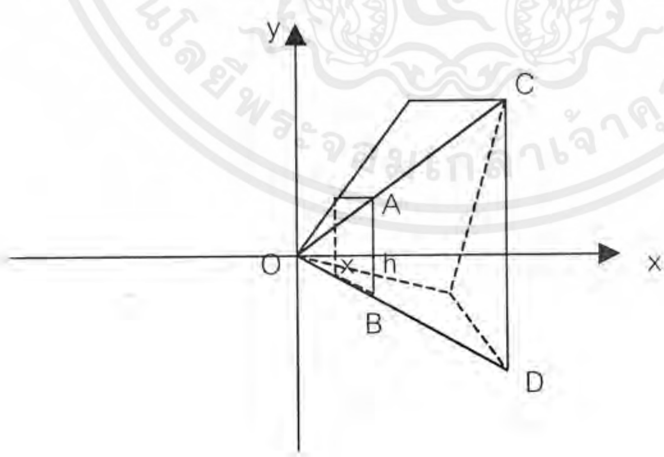
$$V=\int_a^b A(x)dx$$

นิยามที่ 9.2 ถ้า S เป็นทรงสามมิติซึ่งถูกปิดล้อมด้วยระนาบสองระนาบที่ตั้งได้ฉากกับแกน y ที่ $y=c$ ถึง $y=d$ ถ้าตัดทรงสามมิติด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y จะได้ปริมาตรของทรงสามมิติ V คือ

$$V=\int_c^d A(y)dy$$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาปริมาตรของรูปทรงปิรามิดที่มีความสูง h ฟุต และมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้างด้านละ a ฟุต

วิธีทำ เขียนรูปให้แกนของปิรามิดอยู่ตามแนวแกน x



รูปที่ 9.19

ให้ y เป็นความยาวของแต่ละด้านของพื้นที่ภาคตัดขวางที่จุด x จากสามเหลี่ยมคล้าย OAB และ OCD จะได้

$$\frac{y}{x}=\frac{a}{h}$$

ดังนั้น $$A(x)=y^2=\frac{a^2x^2}{h^2}$$

$$V=\int_0^h A(x)dx=\int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}dx$$

$$=\frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2dx$$

$$=\frac{a^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$=\frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}a^2h$$ หน่วยปริมาตร ###

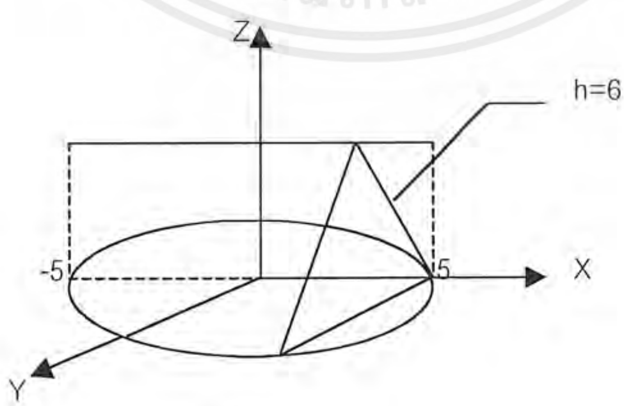
<u>**ตัวอย่างที่ 13**</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตัน ซึ่งมีฐานเป็นรูปวงรีที่มีแกนยาว 10 นิ้ว แกนสั้นยาว 8 นิ้ว และภาคตัดขวางที่ตั้งฉากกับแกนยาวเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสูง 6 นิ้ว

<u>วิธีทำ</u>

$\because$ รูปวงรีมีแกนยาว 10 นิ้ว แกนสั้นยาว 8 นิ้ว

$\therefore$ สมการของวงรีที่ได้ คือ $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ (บนระนาบ xy)

$$\therefore\ y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$$



รูปที่ 9.20

จากรูปที่ 9.20 ภาคตัดขวางเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2y$ นิ้ว สูง 6 นิ้ว
ให้ $A(x)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดขวาง

$$\therefore \quad A(x) = \frac{1}{2}(2y)(6)$$

$$= 6y$$

$$= 6\cdot\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2} = \frac{24}{5}\sqrt{25-x^2}$$

$$V = \int_{-5}^{5} A(x)dx$$

$$= \frac{24}{5}\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$$

$$= \frac{24}{5}\left[\frac{x}{2}\cdot 25-x^2+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_{-5}^{5}$$

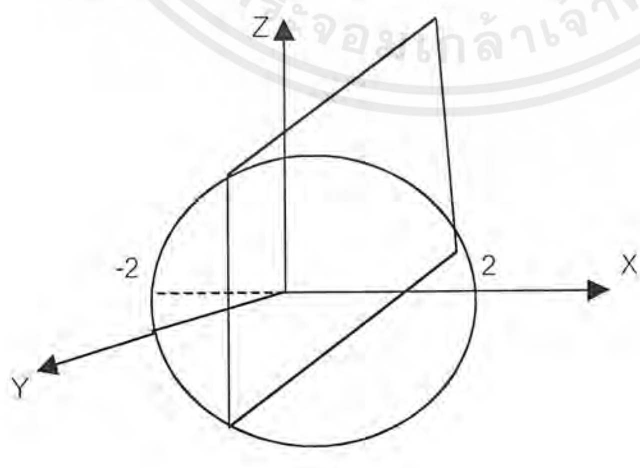
$$= \frac{24}{25}\left(\frac{25}{2}\circ\frac{\pi}{2}+\frac{25}{2}\circ\frac{\pi}{2}\right)$$

$V = 60\pi$ ลูกบาศก์นิ้ว ###

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตัน ซึ่งมีฐานเป็นวงกลม รัศมี 2 นิ้ว และภาคตัดขวางที่ตั้งฉากกับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

<u>วิธีทำ</u> $\because$ รูปวงกลมมีรัศมี 2 หน่วย

$\therefore$ วงกลมมีสมการเป็น $x^2+y^2=4$ (บนระนาบ xy)



รูปที่ 9.21

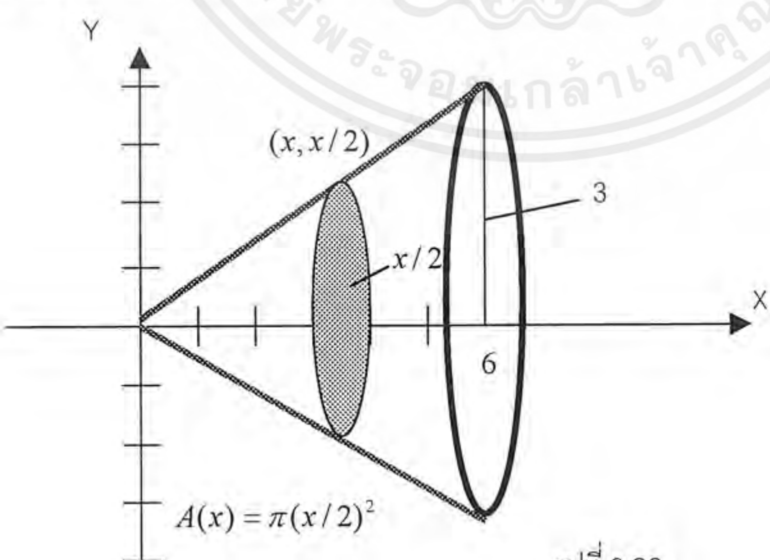
จากรูปที่ 9.21 ภาคตัดขวางเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งยาวด้านละ $2y$ นิ้ว ให้ $A(x)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดขวาง

$$\begin{aligned}A(x) &= (2y)^2\\ &= 4y^2\\ &= 4\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\\ &= 4\left(4-x^2\right)\\ V &= \int_{-2}^{2} A(x)dx\\ &= \int_{-2}^{2} 4\left(4-x^2\right)dx\\ &= 4\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}\\ &= 4\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right]\\ &= 4\left[16-\frac{16}{3}\right]=4\left(\frac{32}{3}\right)\\ &= \frac{128}{3}\end{aligned}$$

ลูกบาศก์นิ้ว ###

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> ให้ S เป็นทรงกรวยที่ถูกปิดล้อมด้วยระนาบ $x=0$ และ $x=6$ และทุกๆ ภาคตัดขวางของ S ซึ่งเป็นรูปวงกลมซึ่งตั้งได้ฉากกับแกน x มีรัศมีเป็น $x/2$ จงหาปริมาตร S

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.22

สำหรับทุกค่าของ x ในช่วง [0,6] จะได้ภาคตัดขวางของ S เป็นวงกลมซึ่งมีรัศมีเป็น $x/2$ ดังนั้นจะได้พื้นที่ภาคตัดขวางแต่ละรูปเป็น

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}$$

จากนิยามที่ 9.1

ได้ปริมาตรทรงกรวย $V = \int_0^6 A(x)dx$

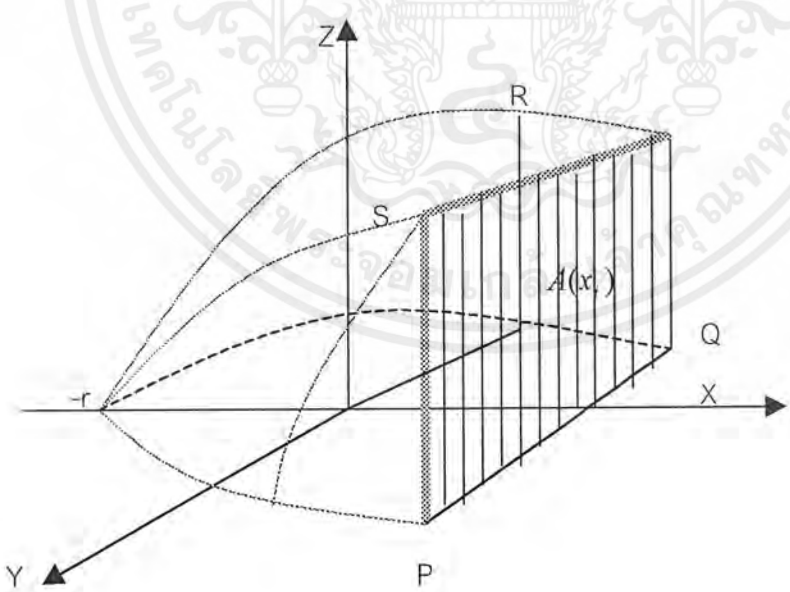
$$= \int_0^6 \frac{\pi x^2}{4}dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6$$

$= 18\pi$ หน่วยปริมาตร ###

ตัวอย่างที่ 16 ให้ฐานของทรงสามมิติเป็นวงกลมรัศมี r ทุกๆ ชิ้นภาคตัดขวางที่ตัดตั้งฉากกับเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงหาปริมาตรทรงสามมิติ

วิธีทำ



รูปที่ 9.23

ฐานของทรงสามมิติเป็นรูปวงกลมรัศมี r

ดังนั้น จะได้สมการที่เป็นฐาน $x^2 + y^2 = r^2$

ถ้าตัดทรงสามมิติด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x

ดังนั้น ปริมาตรส่วนที่ i คือ

$$\Delta V_i = A(x_i)\Delta x_i$$

และ $A(x_i) =$ พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส PQRS

$$= (2y)^2 = 4y^2 \quad \text{เมื่อ} \quad PQ = 2y$$

$$\Delta V_i = 4y^2 \Delta x_i \quad \text{และ} \quad y^2 = r^2 - x^2$$

นั่นคือ
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)dx$$
$$= \int_{-r}^{r} 4y^2 dx$$
$$= 4\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx$$

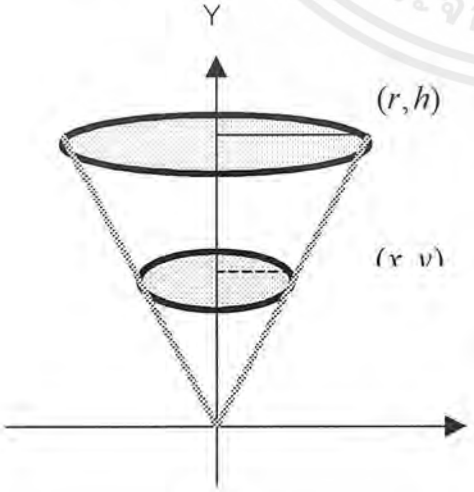
ปริมาตรทรงสามมิติ $= \dfrac{16r^3}{3}$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> จงหาปริมาตรของรูปกรวยตรง ซึ่งมีฐานเป็นวงกลมรัศมี r และสูง h นิ้ว

<u>วิธีทำ</u>

ให้จุดยอดของกรวยอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนของกรวยเทียบไปตามแกน Y ดังรูปที่ 9.24

ให้ $A(y)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกน Y ที่ y ใดๆ เป็นวงกลมรัศมีเท่ากับ $|x|$



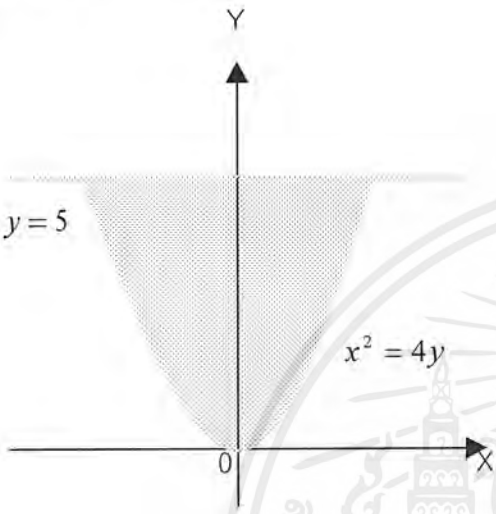
รูปที่ 9.24

เราได้ $A(y) = \pi|x|^2$
$$= \pi\left(\frac{ry}{h}\right)^2$$

และ
$$V = \int_0^h A(y)dy$$
$$= \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} y^2 dy$$
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad ###$$

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> ถ้าฐานของรูปทรงตันอยู่บนระนาบ XY ล้อมรอบด้วยพาราโบลา $x^2 = 4y$ และเส้นตรง $y = 5$ จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งทุกภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกน y เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

<u>วิธีทำ</u>



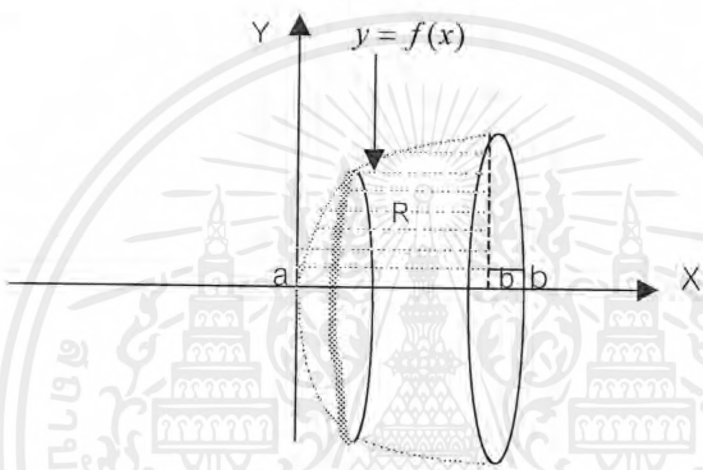
รูปที่ 9.25

ให้ $A(y)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกน Y ที่ y ใดๆ ซึ่งเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ความยาวด้านละ $2|x|$ เราได้ $A(y) = (2|x|)^2 = 4x^2 = 16y$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} V &= \int_0^5 A(y)dy \\ &= \int_0^5 16y\,dy \\ &= \left[8y^2\right]_0^5 \\ &= 200 \end{aligned}$$
ลูกบาศก์หน่วย ###

9.4 การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีตัดขวาง (Volume of a Solid of Revolution by Cross-Section Method) หรือ วิธีจาน(Disk Method)

ในกรณีนี้เราหาปริมาตรของรูปทรงตันได้โดยการตัดรูปทรงตันออกมาเป็นชิ้นบางๆ แล้วหาปริมาตร ของแต่ละชิ้น ผลรวมของปริมาตรของชิ้นทั้งหมดที่ตัดออกมานั้น จะเป็นปริมาตรของรูปทรงที่ต้องการ



รูปที่ 9.26

ให้ R เป็นปริมาตรที่เกิดจาก $y = f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แกน x และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ การหมุนบริเวณ R รอบแกน x พิจารณาได้ดังนี้ แบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วนโดยให้ $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ เมื่อ $i = 1,2,...,n$ และ $\|\Delta\|$ เป็นค่ามากที่สุดของ Δx_i และ v_i เป็นปริมาตรของ แต่ละชิ้นเล็กๆ

$$v_i = \pi[f(\xi_i)]^2 \Delta x_i \quad \text{เมื่อ} \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

$$v = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i$$

$$= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

$$= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $F(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน $[c,d]$ ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณในระนาบที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x=F(y)$ แกน y เส้นตรง $y=c$ และ $y=d$ เท่ากับ

$$v=\pi\int_{c}^{d}[F(y)]^2\,dy$$

<u>นิยามที่ 9.3</u> กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบและต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง f และแกน x จาก $x=a$ ถึง $x=b$ ถ้า V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน x (แบ่งตามแนวตั้งฉากกับแกน x) แล้ว

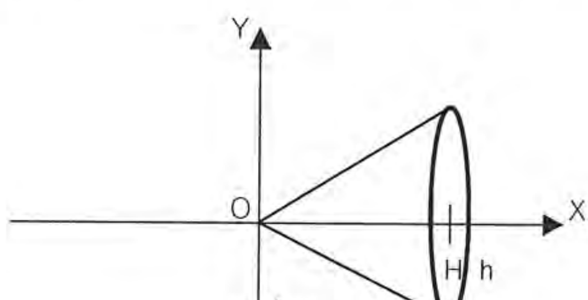
$$V=\pi\int_{a}^{b}[f(x)]^2\,dx=\pi\int_{a}^{b}y^2\,dx$$

<u>นิยามที่ 9.4</u> กำหนดให้ $x=g(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบและต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ ให้ R แทนบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง g และแกน y จาก $y=c$ ถึง $y=d$ ถ้า V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน y (แบ่งตามแนวตั้งฉากกับแกน y) แล้ว

$$V=\pi\int_{c}^{d}[g(y)]^2\,dy=\pi\int_{c}^{d}x^2\,dy$$

<u>ตัวอย่างที่ 19</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y=kx$ แกน x และ $0\le x\le n$ รอบแกน x

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.27

$$v = \pi \int_0^h [f(x)]^2\, dx$$

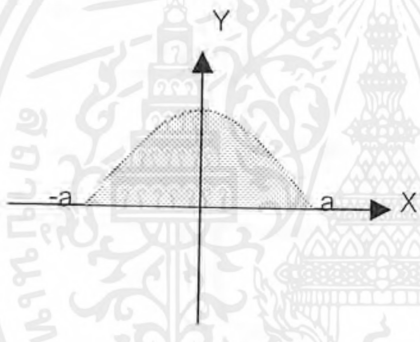
$$= \pi \int_0^h (kx)^2\, dx$$

$$= \pi k^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

$$= \pi k^2 \frac{h^3}{3}$$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 20</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ และ $-a \le x \le a$ รอบแกน x

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.28

$$\frac{v}{2} = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^3$$

$$v = 2.\frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$$ หน่วยปริมาตร ###

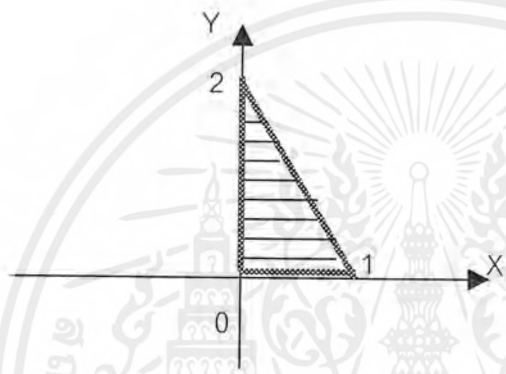
<u>ตัวอย่างที่ 21</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = 2 - 2x$ แกน y และแกน x รอบเส้นตรง $x = 0$

<u>วิธีทำ</u>

เส้นตรง $x = 0$ คือแกน y ดังนั้น จึงต้องอินทิเกรตตามแนวแกน y

จาก $y = 2 - 2x$

$$\therefore \quad x = \frac{2-y}{2} = 1 - \frac{y}{2}$$



รูปที่ 9.29

$$v = \pi \int_0^2 [F(y)]^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 \left(1 - y + \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \pi \left[\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{12}\right)\right]_0^2$$

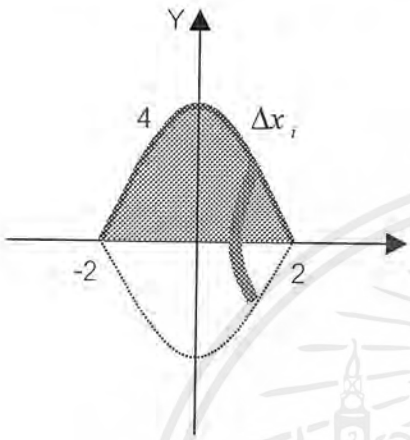
$$= \pi \left(2 - \frac{4}{2} + \frac{8}{12}\right)$$

$$= \pi \left(2 - 2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 22</u> จงหาปริมาตรของทรงสามมิติอันเกิดจากการหมุนรอบแกน x ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = x^2 + 4$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ ตัดแกน x ที่จุด $x = -2$ และ $x = 2$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากหมุนบริเวณดังกล่าว รอบแกน x



รูปที่ 9.30

$$V = \pi \int_{-2}^{2} y^2 dx$$

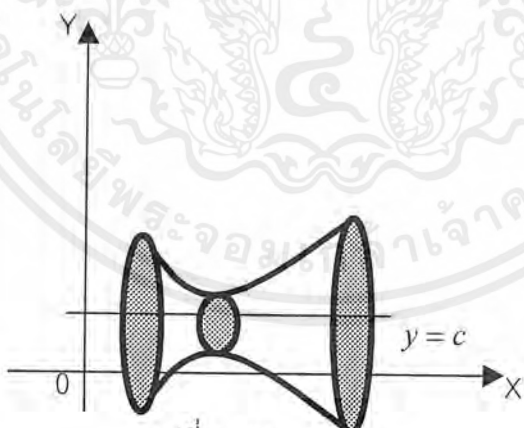
$$V = \pi \int_{-2}^{2} [-x^2 + 4]dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 8x^2 + 16\right)dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^{2}$$

$$V = \frac{512\pi}{15}$$ หน่วยปริมาตร ###

สำหรับในกรณีที่หา v ซึ่งเป็นปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ เส้นตรง $y = c$ และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 19.31



รูปที่ 19.31

พื้นที่ภาคตัดขวางที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = c$ ของรูปทรงตันเท่ากับ

$$\pi\left(f(x) - c\right)^2$$

ดังนั้น

$$\boxed{V = \pi \int_{a}^{b} \left(f(x) - c\right)^2 dx}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 23**</u> จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ ที่เกิดจากการหมุนรอบแกน y ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y^2 = 2x$ และเส้นตรง $y = -2, y = 2$ และ แกน y

<u>วิธีทำ</u>

ให้ R แทนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y^2 = 2x, y = -2, y = 2$ และแกน y

V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน y

เราได้

$$V = \pi \int_{-2}^{2} x^2 dy$$

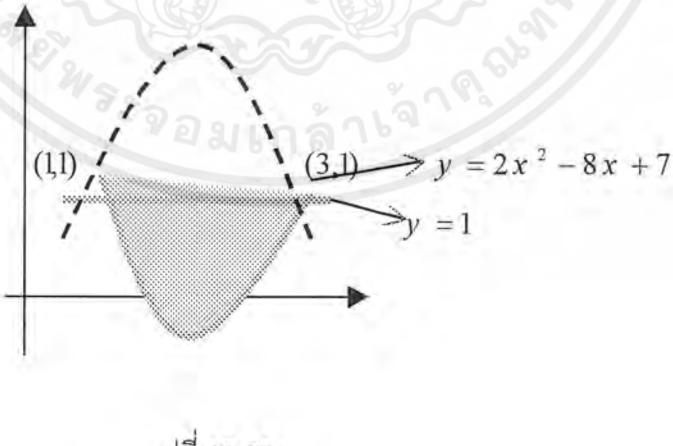
$$= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^{2} y^4 dy$$

$$= \frac{\pi}{20} y^5 \Big|_{-2}^{2}$$

$$V = \frac{16\pi}{5} \quad \text{หน่วยปริมาตร} \qquad \#\#\#$$

<u>**ตัวอย่างที่ 24**</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = 2x^2 - 8x + 7$ และ $y = 1$ รอบเส้นตรง $y = 1$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 19.32

เส้นโค้ง $y = 2x^2 - 8x + 7$ เป็นพาราโบลาหงาย ดังรูปที่ 19.32

จากรูปเส้นโค้ง ตัดกับเส้นตรง $y = 1$ ที่จุด (1,1) และ (3,1)

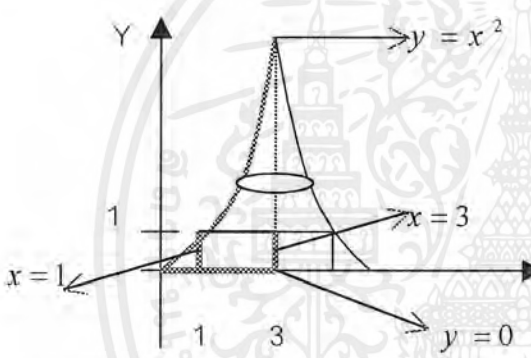
ในที่นี้ พื้นที่ภาคตัดขวางเท่ากับ $\left[\left(2x^2 - 8x + 7\right) - 1\right]^2$

ฉะนั้น $V = \pi \int_1^3 \left[\left(2x^2 - 8x + 7\right) - 1\right]^2 dx$

$= \pi \int_1^3 \left(2x^2 - 8x + 6\right)^2 dx = \frac{64}{15}\pi$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 25</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = x^2, y = 0,$ $x = 1$ และ $x = 3$ รอบเส้นตรง $x = 3$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.33

$V = v_1 + v_2$

$V_1 = \pi \int_1^9 \left(3 - \sqrt{y}\right)^2 dy$

$= \pi \int_1^9 \left(9 - 6\sqrt{y} + y\right) dy$

$= \pi \left(9y - 4y^{3/2} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^9$

$= \pi \left[\left(81 - 108 + \frac{81}{2}\right) - \left(9 - 4 + \frac{1}{2}\right)\right]$

$= \pi \left(-27 + \frac{81}{2} - 5 - \frac{1}{2}\right)$

$= \pi(-32 + 40) = 8\pi$

$$V_2 = \pi\int_0^1 2^2\,dx$$
$$= \pi 4x\Big|_0^1 = 4\pi$$
$$V = 8\pi + 4\pi$$
$$= 12\pi$$ หน่วยปริมาตร ###

สำหรับในกรณี R เป็นบริเวณระหว่างกราฟ

<u>นิยามที่ 9.5</u> ถ้า f และ g ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $0 \le g(x) \le f(x)$ แล้วปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน x ซึ่งมีพื้นที่ภาคตัดขวาง $A(x) = \pi\left[f^2(x) - g^2(x)\right.$ คือ

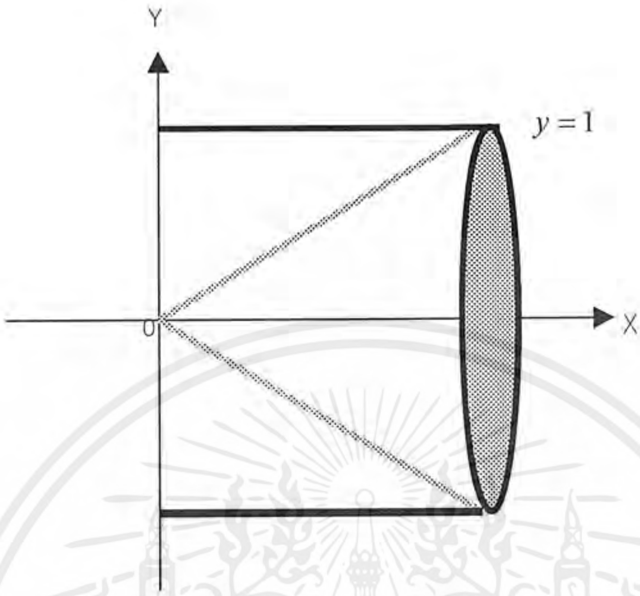
$$V = \pi\int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]dx$$

<u>นิยามที่ 9.6</u> ถ้า F และ G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ และ $0 \le G(y) \le F(y)$ แล้วปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน y ซึ่งมีพื้นที่ภาคตัดขวาง $A(x) = \pi\left[F^2(y) - G^2(y)\right]$ คือ

$$v = \pi\int_c^d \left[(F(y))^2 - (G(y))^2\right]dy$$

<u>ตัวอย่างที่ 26</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = x, y = 1$ และ $x = 0$ รอบแกน x

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.34

จากรูป จุดตัดของ $y = x$ และ $y = 1$ คือ (0,0) และ (1,1)

$$V = \pi \int_0^1 \left(1^2 - x^2\right) dx$$

$$= \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1$$

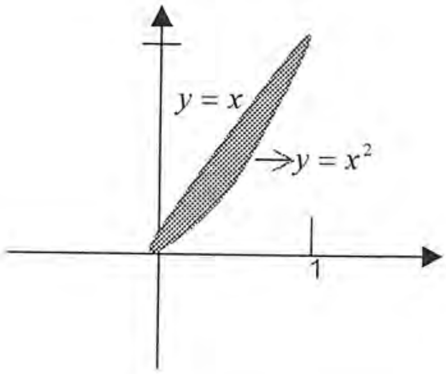
$$= \pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2\pi}{3}$$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 27</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = x^2$ และ $y = x$

ก. รอบแกน x

ข. รอบแกน y

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.35

ก. หมุนรอบแกน x

$$V = \pi\int_0^1 \left[x^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{15} \qquad \text{หน่วยปริมาตร}$$

ข. หมุนรอบแกน y

$$V = \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - y^2\right]dy$$

$$= \pi\int_0^1 \left(y - y^2\right)dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} \qquad \text{หน่วยปริมาตร}$$

###

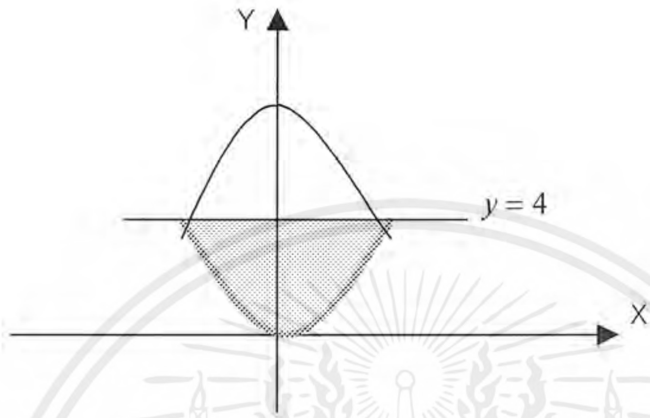
<u>ตัวอย่างที่ 28</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย

$y = x^2, y = 4$

ก. รอบแกน $y = 4$

ข. รอบแกน $y = -1$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.36

ก. หมุนรอบแกน $y = 4$

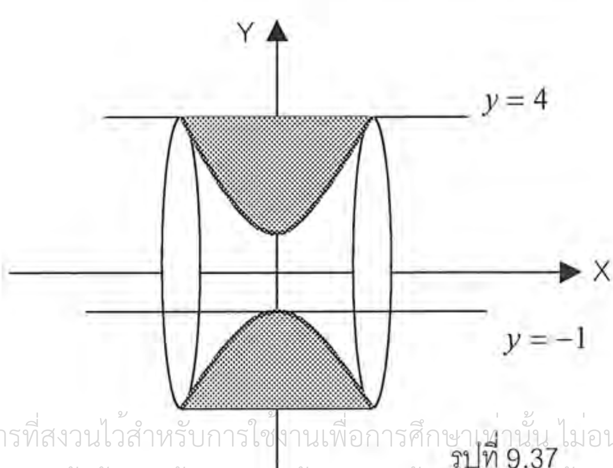
$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 8x^2 + 16\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^{2}$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 + \frac{32}{5} - \frac{64}{2} + 32 \right)$$

$$= \frac{512\pi}{15}$$ หน่วยปริมาตร



รูปที่ 9.37

ข. หมุนรอบแกน $y=-1$

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left[(4-(-1))^2-\left(x^2-(-1)\right)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}\left[5^2-\left(x^2+1\right)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}\left(25-x^4-2x^2-1\right)dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}\left(24-2x^2-x^4\right)dx$$

$$=\pi\left(24x-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$=\pi\left(48-\frac{16}{3}-\frac{32}{5}+48-\frac{16}{3}-\frac{32}{5}\right)$$

$$=\pi\left(96-\frac{32}{3}-\frac{64}{5}\right)$$

$$=\frac{1088\pi}{15}$$ หน่วยปริมาตร ###

<u>**ตัวอย่างที่ 29**</u> ให้ R แทนบริเวณที่อยู่ในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x+1$ และ $y=x^3+1$ จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ได้จากการหมุน R รอบแกน x

<u>วิธีทำ</u>

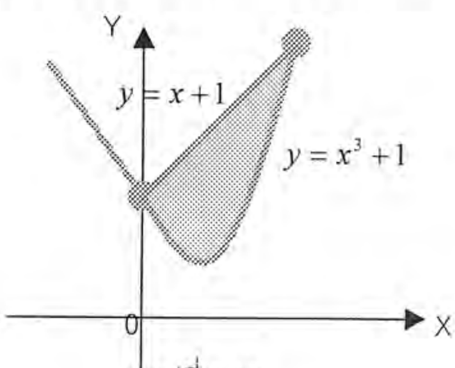
หาช่วงปิดที่เกิดขึ้นระหว่างกราฟ $y=x+1$ และ $y=x^3+1$ โดยการหาจุดตัดระหว่างกราฟทั้งสองนี้

ดังนั้น $x+1=x^3+1$

$x(x-1)(x+1)=0$

นั่นคือ $x=-1$ หรือ $x=0$ หรือ $x=1$

แต่บริเวณ R อยู่ในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น $x\in[0,1]$ โดยแสดงในรูป



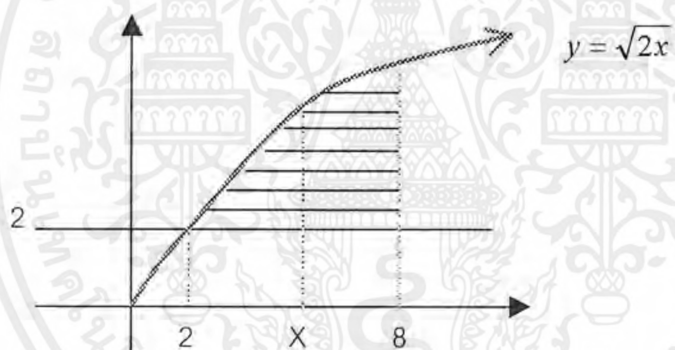
รูปที่ 9.38

ให้ V แทนปริมาตรที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน x
จากรูปที่ 9.38 จะพบว่า $x+1 \ge x^3+1$ สำหรับ $x \in [0,1]$

$$V = \pi\int_0^1 \left[(x+1)^2 - (x^3+1)^2\right]dx$$
$$= \pi\int_0^1 (x+1)^2\,dx - \pi\int_0^1 \left(x^6+2x^3+1\right)dx$$
$$= \pi\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_0^1 - \pi\left[\frac{x^7}{7}+\frac{2x^4}{4}+x\right]_0^1$$
$$V = \frac{29\pi}{42} \quad \text{หน่วยปริมาตร} \qquad \text{###}$$

<u>ตัวอย่างที่ 30</u> จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนรอบเส้นตรง $y=2$ ของบริเวณ R ซึ่งถูกปิดล้อมด้วย $y^2 = 2x, x = 8$ และ $y = 2$

<u>วิธีทำ</u>



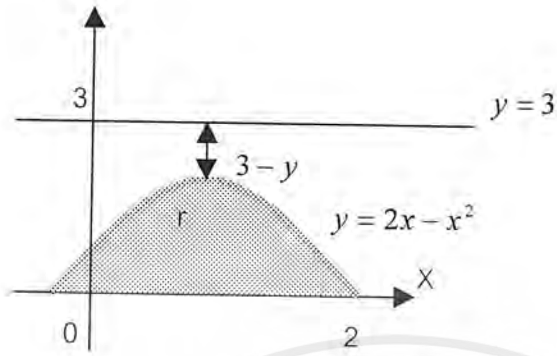
รูปที่ 9.39

จุดตัดของกราฟ $y=2$ และ $y^2=2x$ และ $y=\sqrt{2x}$ คือจุด $(2,2)$
ดังนั้น สำหรับทุกค่าของ $x \in [2,8]$ จะได้ว่า $\sqrt{2x} \ge 2$
ดังนั้น $\sqrt{2x} - 2 \ge 0$

$$V = \pi\int_2^8 \left[\sqrt{2x}-2\right]^2 dx$$
$$= \pi\int_2^8 \left(2x - 4\sqrt{2}\sqrt{x}+4\right)dx$$
$$= \pi\left[x^2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+4x\right]_2^8$$
$$V = \frac{28\pi}{3} \quad \text{หน่วยปริมาตร} \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 31 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนรอบเส้นตรง $y=3$ ของบริเวณ R ที่ล้อมรอบด้วยพาราโบลา $y=2x-x^2$ และแกน x

วิธีทำ



รูปที่ 9.40

จากรูป รัศมีของการหมุนคือ $3-y$ และ $3-y \geq 0$

ให้ $R_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2 และ 0 \leq y \leq 3\}$

$R_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2 และ 2x-x^2 \leq y \leq 3\}$

และ V_1 = ปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R_1 รอบ $y=3$

V_2 = ปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R_2 รอบ $y=3$

V = ปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบ $y=3$

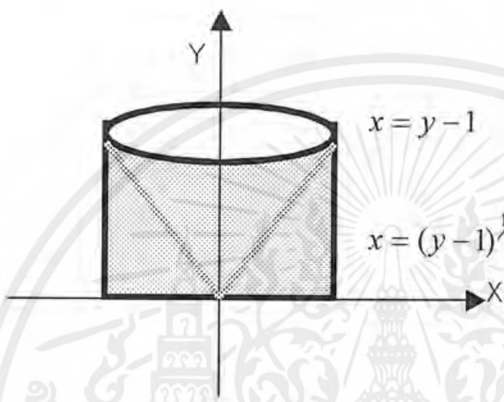
ดังนั้น
$$V = V_1 - V_2$$
$$= \pi\int_0^2 3^2\,dx - \int_0^2 (3-y)^2\,dx$$
$$= \pi\int_0^2 \left[6y - y^2\right]dx$$
$$= \pi\int_0^2 \left[6(2x-x^2) - (2x-x^2)^2\right]dx$$
$$= \pi\int_0^2 \left[12x - 10x^2 + 4x^3 - x^4\right]dx$$
$$= \pi\left[6x^2 - \frac{10x^3}{3} + x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$
$$V = \frac{104\pi}{15}$$ หน่วยปริมาตร ###

ตัวอย่างที่ 32 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ได้จากการนำบริเวณ R ในตัวอย่างที่ 11 หมุนรอบแกน y

วิธีทำ

บริเวณ R ในตัวอย่างที่ 29 ถ้านำมาหมุนรอบแกน y ขั้นแรกจะต้องปรับสมการ $y = x^3 + 1$ และ $y = x + 1$ ใหม่ ได้ดังนี้

เนื่องด้วย $y = x^3 + 1$ แล้วจะได้ $x = (y-1)^{1/3}$ และ $y = x + 1$ แล้ว $x = y - 1$ ดูรูป 9.41



รูปที่ 9.41

กราฟ $y = x^3 + 1$ และ $y = x + 1$ ตัดกันที่จุด $(0,1)$ และ $(1,2)$

สำหรับ $y \in [1,2]$ จะได้ $y - 1 \le (y-1)^{1/3}$

$$\text{ดังนั้น } V = \pi \int_1^2 \left\{ \left[(y-1)^{1/3} \right]^2 - (y-1)^2 \right\} dy$$

$$= \pi \left[\frac{3}{5}(y-1)^{5/3} - \frac{(y-1)^3}{3} \right]_1^2$$

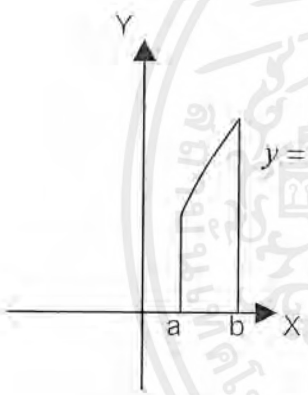
$$= \pi \left[\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right]$$

$$V = \frac{4\pi}{15}$$ หน่วยปริมาตร ###

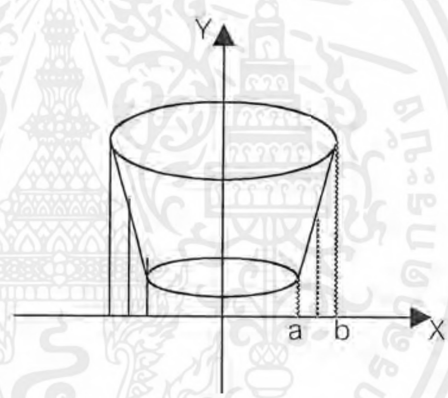
9.5 การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีวงแหวนเปลือกทรงกระบอก (Volume of a Solid of Revolution by Cylindrical Shells Method)

การหาปริมาตรโดยวิธีวงแหวนเป็นการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่กำหนดให้ รอบแกนใดๆ หรือ รอบเส้นตรง แต่วิธีนี้แตกต่างจากวิธีตัดขวางคือ เราจะแบ่งบริเวณในระนาบออกเป็นชิ้นบางๆ ตามแนวขนานกับแกนหมุน ถ้าพิจารณาแต่ละชิ้น จะพบว่ามีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ถ้าหมุนสี่เหลี่ยม ผืนผ้า นี้รอบแกนหมุนจะได้รูปทรงกระบอกกลวง ซึ่งสามารถหาปริมาตรได้

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และให้ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆค่าของ x บนช่วง $[a,b]$ ให้ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 9.42 ให้ V เป็นปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน y ดังรูปที่ 9.43



รูปที่ 9.42



รูปที่ 9.43

แบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วนดังนี้

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$$

ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ เมื่อ $i = 1,2,3,\dots,n$

$\|\Delta\|$ เท่ากับค่ามากที่สุดของ Δx_i

$$\xi_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$$

V_i เป็นปริมาตรของรูปทรงกระบอกกลวงชิ้นเล็กๆ

$$\begin{aligned} \therefore \quad V_i &= \pi x_i^{\,2} f(\xi_i) - \pi x_{i-1}^{\,2} f(\xi_1), x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ &= \pi f(\xi_i)\left(x_i^{\,2} - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) \end{aligned}$$

$$= 2\pi f(\xi_i)\frac{(x_i + x_{i-1})}{2}\Delta x_i$$
$$= 2\pi \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

จะเห็นว่า V_i เป็นปริมาตรโดยประมาณที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วย $y = f(x)$, $x = x_{i-1}, x = x_i$ และ $y = 0$ รอบแกน y

$$\therefore \quad V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$= \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$
$$= 2\pi\int_a^b x f(x)dx$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $x = F(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ และ $F(y) \geq 0$ ทุกๆ y บนช่วง $[c,d]$ และ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $x = F(y)$, $y = c, y = d$ และ $x = 0$ ปริมาตรของรูปทรงตันที่ได้จากการหมุนบริเวณ R รอบแกน x คือ

$$V = 2\pi\int_c^d yF(y)dy$$

<u>นิยามที่ 9.7</u> กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบและต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ให้ R แทนบริเวณที่ถูกปิดล้อมโดยเส้นโค้ง f และแกน x จาก $x = a$ ถึง $x = b$ เมื่อ $0 \leq a \leq b$ ถ้า V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน y (แบ่งตามแนวขนานกับแกน y)

แล้ว $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

หรือ $$V = 2\pi\int_a^b xydx$$

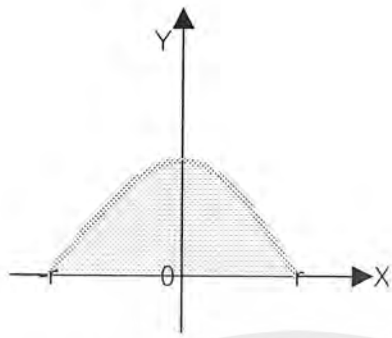
<u>นิยามที่ 9.8</u> กำหนดให้ $x = g(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบและต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ ให้ R แทนบริเวณที่ถูกปิดล้อมโดยเส้นโค้ง g และแกน y จาก $y = c$ ถึง $y = d$ เมื่อ $0 \leq c \leq d$ ถ้า V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน x (แบ่งตามแนวขนานกับแกน x)

แล้ว $V = 2\pi\int_c^d yg(y)dy$

หรือ $$V = 2\pi\int_c^d yxdy$$

<u>ตัวอย่างที่ 33</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $x^2+y^2=r^2$, $y=0$ และ $0\le x\le r$ รอบแกน y

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.44

$$v = 2\pi\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

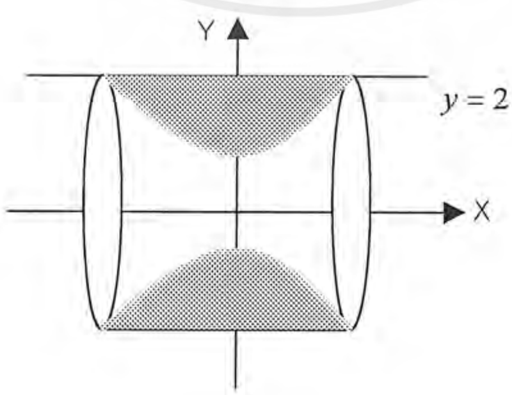
$$= -\frac{2\pi}{2}\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,d\left(r^2-x^2\right)$$

$$= -\pi\left[\frac{2}{3}\left(r^2-x^2\right)^{3/2}\right]_0^r$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 34</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y=1+x^2$, $y=2$ รอบแกน x

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.45

จาก $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left[2^2 - \left(1 + x^2\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left[4 - \left(1 + 2x^2 + x^4\right)\right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(3 - 2x^2 - x^4\right) dx$$

$$= \pi \left(3x - \frac{2x}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

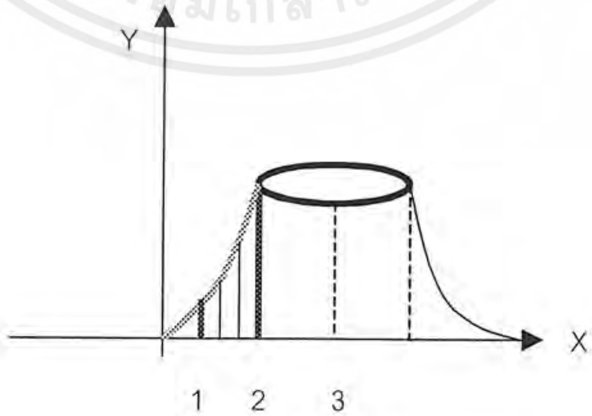
$$= \pi \left[\left(3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(-3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \pi \left(6 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = \left(90 - \frac{20}{15} - 6\right)\pi$$

$$= \frac{64\pi}{15}$$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 35</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = x^3$, $x = 1,\ x = 2$ และ $y = 0$ รอบเส้นตรง $x = 3$

<u>วิธีทำ</u>

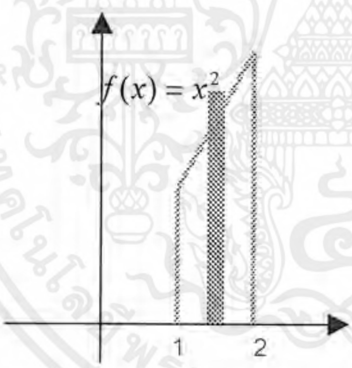


รูปที่ 9.46

$$V = 2\pi\int_1^2 (3-x)x^3\,dx$$
$$= 2\pi\int_1^2 \left(3x^3 - x^4\right)dx$$
$$= 2\pi\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2$$
$$= 2\pi\left(\frac{48}{4} - \frac{32}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right)$$
$$= 2\pi\left(\frac{45}{4} - \frac{31}{5}\right)$$
$$= \frac{101}{20}.2\pi \;= 10.1\pi$$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 36</u> กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $f(x) = x^2, y = 0$ และ $x = 1, x = 2$ จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน y

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.47

ให้ V แทนปริมาตรทรงสามมิติจากการหมุน R รอบแกน y

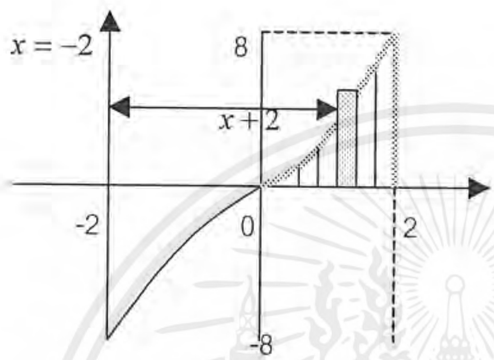
จะได้ $V = 2\pi\int_1^2 xf(x)dx$

$$= 2\pi\int_1^2 x^3\,dx$$
$$= 2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2$$
$$V = \frac{15\pi}{2}$$ หน่วยปริมาตร ###

ตัวอย่างที่ 37 ให้ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = x^3, y = 0$ และเส้นตรง $x = 2$ จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากหมุน R รอบเส้นตรง $x = -2$

วิธีทำ

เราพบว่าตัวอย่างนี้ ผิดไปจากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วตรงที่ว่า แกนของการหมุนมิใช่แกน y แต่เป็นเส้นตรง $x = -2$ ซึ่งขนานกับแกน y เราหาปริมาตรโดยใช้หลักเหมือนเดิม เพียงแต่เปลี่ยนรัศมีของ การหมุนรอบแกน $x = -2$ ดังรูป



รูปที่ 9.48

สำหรับ $x \in [0,2]$ รัศมีการหมุนรอบเส้นตรง $x = -2$ เท่ากับ $x + 2$

ให้ V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบเส้นตรง $x = -2$

ดังนั้น
$$V = 2\pi \int_0^2 (x+2) y dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 (x+2) x^3 dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left(x^4 + 2x^3\right) dx$$
$$= 2\pi \left[\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2}\right)\right]_0^2$$
$$V = \frac{144\pi}{5}$$ หน่วยปริมาตร ###

ตัวอย่างที่ 38 กำหนดให้ R แทนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยแกน x แกน y เส้นตรง $y=1$ และพาราโบลา $y^2=3-x$ จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากหมุน R รอบแกน x

วิธีทำ

กำหนดให้ V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน x

จากนิยามที่ 9.8 จะได้ $V = 2\pi\int_0^1 yx\,dy$

พาราโบลา $y^2 = 3-x$ จะได้ $x = 3-y^2$

ดังนั้น

$$V = 2\pi\int_0^1 y(3-y^2)dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 (3y-y^3)dy$$

$$= 2\pi\left[\frac{3y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$V = \frac{5\pi}{2}$$ หน่วยปริมาตร ###

นิยามที่ 9.9 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $f(x)\ge g(x)\ge 0$ สำหรับทุกๆค่า x ในช่วง $[a,b]$ เมื่อ $a\ge 0$ ให้ R แทนบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง f, g และแกน x จาก $x=a$ ถึง $x=b$ ถ้า V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน y (แบ่งตามแนวขนานกับแกน y) แล้ว

$$V = 2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx$$

นิยามที่ 9.10 ให้ h และ k เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $h(y)\ge k(y)\ge 0$ สำหรับทุกๆ y ในช่วง $[c,d]$ เมื่อ $c\ge 0$ ให้ R แทนบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง h, k และแกน y จาก $y=c$ ถึง $y=d$ ถ้า V แทนปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน x (แบ่งตามแนวขนานกับแกน x) แล้ว

$$V = 2\pi\int_c^d y[h(y)-k(y)]dy$$

ตัวอย่างที่ 39 จงหาปริมาตรทรงสามมิติที่ได้จากการหมุนบริเวณ R ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x+1$ และ $y = x^3+1$ โดยหมุนรอบแกน y

วิธีทำ

$$V = 2\pi\int_0^1 x\left[(x+1)-(x^3+1)\right]dx$$

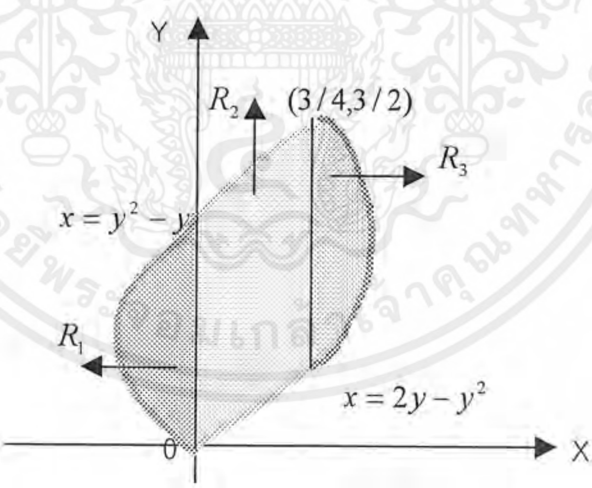
$$= 2\pi\int_0^1 (x^2 - x^4)dx$$

$$V = 2\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$V = \frac{4\pi}{15} \quad \text{หน่วยปริมาตร} \qquad \text{###}$$

ตัวอย่างที่ 40 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ ซึ่งได้จากการหมุนบริเวณ R รอบแกน x โดยที่บริเวณ R ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = 2y - y^2$ และ $x = y^2 - y$

วิธีทำ



รูปที่ 9.49

หาจุดตัดระหว่าง $x = 2y - y^2$ และ $x = y^2 - y$

จะได้ $2y^2 - 3y = 0$ หรือ $y = 0$ หรือ $y = 1.5$

สำหรับทุกๆ y ใช่วง [0,1.5] จะได้ $y^2 - y \le 2y - y^2$

ถ้าให้ V แทนปริมาตรของทรงสามมิติในรูป 9.49

ดังนั้น $$V = 2\pi\int_0^{1.5} y[(2y-y^2)-(y^2-y)]dy$$

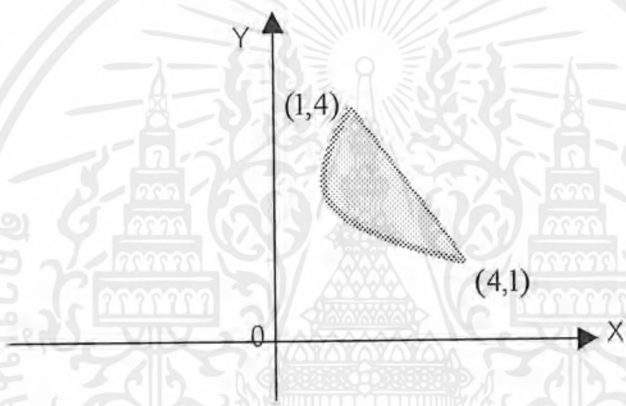
$$= 2\pi\int_0^{1.5} (3y^2-2y^3)dy$$

$$= 2\pi\left[y^3-\frac{y^4}{2}\right]_0^{1.5}$$

$$V = \frac{27\pi}{16}$$ หน่วยปริมาตร ###

ตัวอย่างที่ 41 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $xy = 4$ และเส้นตรง $x + y = 5$ รอบแกน y

วิธีทำ



รูปที่ 9.50

จุดตัดของ $xy = 4$ และ $x + y = 5$ คือ (1,4) และ (4,1)

$$V = 2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx$$

$$= 2\pi\int_1^4 x\left[(5-x)-\frac{4}{x}\right]dx$$

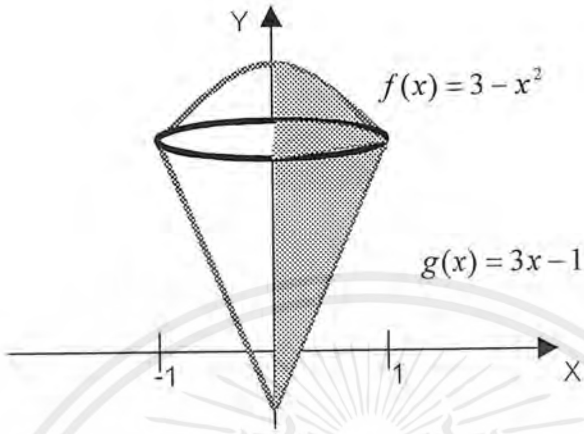
$$= 2\pi\int_1^4 (5x-x^2-4)dx$$

$$= 2\pi\left(5\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_1^4$$

$$= 9\pi$$ หน่วยปริมาตร ###

<u>ตัวอย่างที่ 42</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ซึ่งเป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างกราฟ f และ g บน $[0,1]$ เมื่อ $f(x) = 3 - x^2$ และ $g(x) = 3x - 1$ รอบแกน y

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.51

$$V = 2\pi \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x(3 - x^2) - (3x - 1)dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x(3 - x^2 - 3x + 1)dx$$

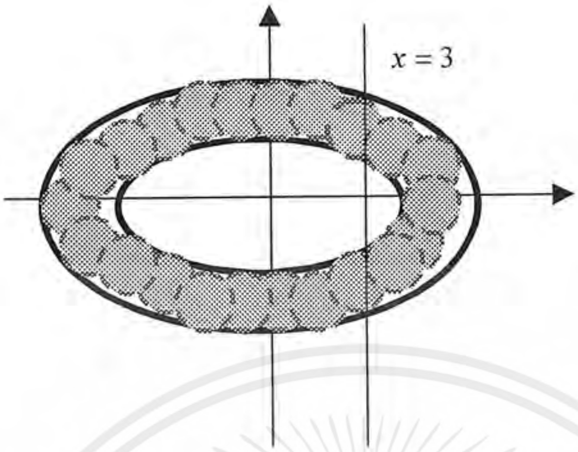
$$= 2\pi \int_0^1 (-x^3 - 3x^2 + 4x)dx$$

$$= 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$ หน่วยปริมาตร ###

ตัวอย่างที่ 43 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ รอบเส้นตรง $x = 3$

วิธีทำ



รูปที่ 9.52

$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (3 - x)(2y)dx$$

$$= 4\pi \int_{-2}^{2} (3 - x)\sqrt{4 - x^2}\, dx$$

$$= 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx - 4\pi \int_{-2}^{2} x\sqrt{4 - x^2}\, dx$$

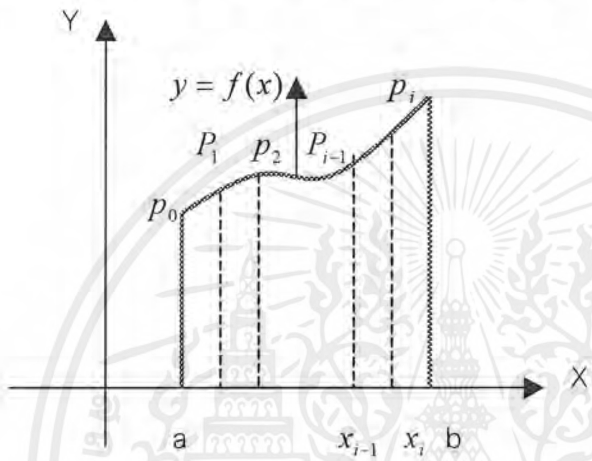
$$= 12\pi \left(\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{2} \right)\Bigg|_{-2}^{2} + \frac{4\pi}{3}(4 - x)^{3/2}\Bigg|_{-2}^{2}$$

$= 24\pi^2$ หน่วยปริมาตร ###

9.6 ความยาวส่วนโค้ง (Arc Length)

ในที่นี้พิจารณาเส้นโค้งที่ต่อเนื่อง หรือเส้นโค้งที่เกิดจากฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้าเราสามารถดึงเส้นโค้งระหว่าง จุด 2 จุดให้เป็นเส้นตรงได้ ความยาวของเส้นตรงที่วัดได้คือ ความยาวของเส้นโค้งระหว่าง 2 จุดนั้น

สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ดังรูปที่ 25 เมื่อต้องการหาความยาวของส่วนโค้ง ที่เกิดจากฟังก์ชัน f จากจุด $(a,f(a))$ ถึงจุด $(b,f(b))$ พิจารณาได้ดังนี้



รูปที่ 9.53

แบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วนดังนี้ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

P_i คือจุด $(x_i, f(x_i))$ L_i เป็นความยาวระหว่างจุด P_{i-1} ถึง P_i และ L เป็นความยาวของส่วนโค้ง ที่ต้องการหา

จากรูปจะเห็นว่า $\sum_{i=1}^{n} L_i$ ยาวกว่าความยาวของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $(a,f(a))$ และจุด $(b,f(b))$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$\|\Delta\|$ เป็นค่าที่มากที่สุดของ Δx_i เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots,n$

$$\therefore \quad L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

จากทฤษฎีค่ามิชฌิม จะได้ว่ามี ξ_i บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ที่ทำให้

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$$

$$L_i = \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$$

$$L = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

<u>นิยามที่ 9.11</u> ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ และ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ความยาวของส่วนโค้งของ $y=f(x)$ จากจุด $(a,f(a))$ ถึงจุด $(b,f(b))$ แล้ว

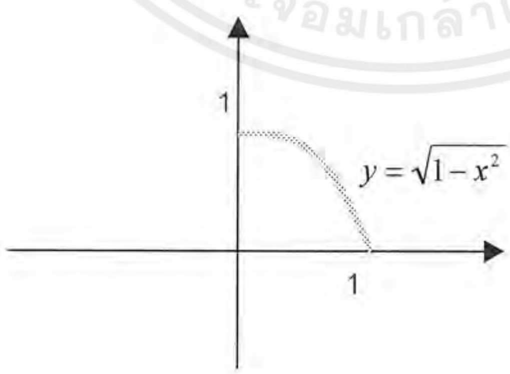
$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

<u>นิยามที่ 9.12</u> ถ้าฟังก์ชัน $g(y)$ และ $g'(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[c,d]$ ความยาวของส่วนโค้งของ $x=g(y)$ จากจุด $(g(c),c)$ ถ้าจุด $(g(d),d)$ แล้ว

$$L = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

<u>ตัวอย่างที่ 44</u> จงหาความยาวของส่วนโค้งของ $y=\sqrt{1-x^2}$ จาก $x=0$ ถึง $x=1$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.54

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

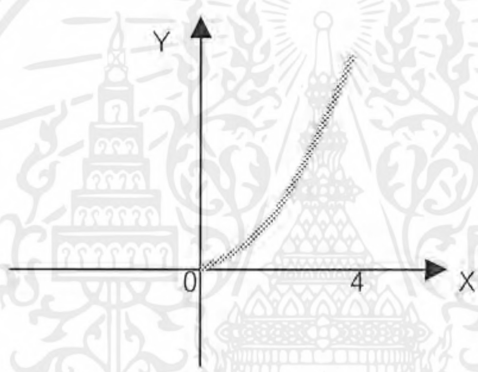
$$= \int_0^1 \sqrt{1+\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right]^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = sin^{-1}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$ หน่วย ###

ตัวอย่างที่ 45 จงหาความยาวของส่วนโค้งของ $y = x^{3/2}$ จากจุด $x = 0$ ถึง $x = 4$

วิธีทำ



รูปที่ 9.55

$$y = x^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}x^{1/2}\right]^2}\,dx$$

$$= \int_0^4 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2} d\left(1+\frac{9}{4}x\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left[10\sqrt{10}-1\right]$$ หน่วย ###

<u>ตัวอย่างที่ 46</u> จงหาความยาวของครึ่งวงกลม เมื่อกำหนด $y=\sqrt{a^2-x^2}$ และ $-a \le x \le a$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2-x^2}$$

ฉะนั้น
$$L = \int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$= \int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dx$$
$$= a\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

พิจารณา $a\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ต้องอาศัยการอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$a\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{h\to 0} a\int_{-a+h}^{0}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \lim_{k\to 0} a\int_{0}^{a+k}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$= \lim_{h\to 0} a\sin^{-1}\frac{x}{a}\Big|_{-a+h}^{0} + \lim_{k\to 0} a\sin^{-1}\frac{x}{a}\Big|_{0}^{a+k}$$
$$= a\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+a\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$
$$= a\frac{\pi}{2}+a\frac{\pi}{2}$$
$$= a\pi$$

ฉะนั้น $L = a\pi$ หน่วย ###

ถ้ากำหนดส่วนโค้งให้อยู่ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x=f(t), y=g(t); a\le t\le b$$

ซึ่ง f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่ต่อเนื่องตลอดช่วงปิด $[a,b]$ แล้วความยาวของส่วนโค้งหาได้ดังนี้

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$
$$= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

จากทฤษฎีค่ามัชฌิมของอนุพันธ์ จะได้

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \qquad \text{เมื่อ} \quad t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$$
$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(n_i)(t_i - t_{i-1}) \qquad \text{เมื่อ} \quad t_{i-1} \le n_i \le t_i$$

$$L_i = \sqrt{[f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})]^2 + [g'(n_i)(t_i - t_{i-1})]^2}$$
$$= \sqrt{[f'(\xi_i)]^2 + [g'(n_i)]^2}\,(t_i - t_{i-1})$$
$$\therefore \quad L = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(\xi_i)]^2 + [g'(n_i)]^2}\,(t_i - t_{i-1})$$
$$= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

นิยามที่ 9.13 ถ้ากำหนดส่วนโค้งให้อยู่ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม $x = f(t), y = g(t); a \le t \le b$ ซึ่ง f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่ต่อเนื่องตลอดช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว ความยาวของส่วนโค้งหาได้ดังนี้

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

ตัวอย่างที่ 47 จงหาความยาวของส่วนโค้ง $f(t) = 3\cos t, g(t) = 3\sin t; 0 \le t \le \pi$

วิธีทำ

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$
$$f'(t) = -3\sin t$$
$$g'(t) = 3\cos t$$
$$L = \int_0^\pi \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt$$
$$= \int_0^\pi 3\,dt = 3t\Big|_0^\pi = 3\pi \qquad \text{หน่วย}$$

###

ตัวอย่างที่ 48 จงหาความยาวของส่วนโค้ง $f(t) = \cos^2 t, g(t) = \sin^2 t, 0 \le t \le \pi$

วิธีทำ

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

$$f'(t) = -2\cos t \sin t$$

$$g'(t) = 2\sin t \cos t$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2 t \sin^2 t + 4\sin^2 t \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{8\cos^2 t \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{8\cos^2 t \sin^2 t}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{8\cos^2 t \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{2} \sin t \cos t\, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} 2\sqrt{2} \sin t \cos t\, dt$$

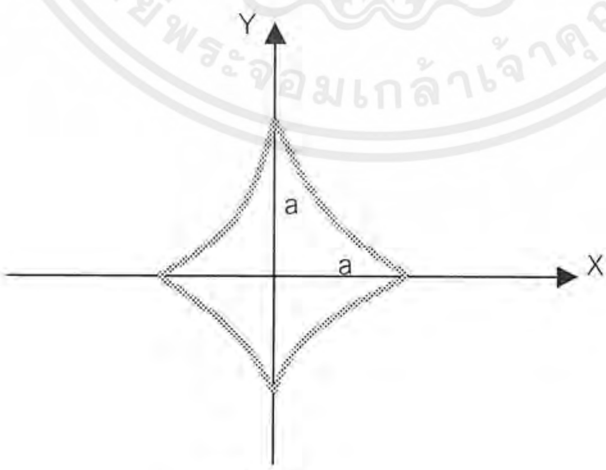
(เพราะ $\cos t$ ในจตุภาคที่ 2 เป็นลบ)

ฉะนั้น $L = \sqrt{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} - \sqrt{2}\sin^2 t\Big|_{\pi/2}^{\pi}$

$= 2\sqrt{2}$ หน่วย ###

ตัวอย่างที่ 49 จงหาความยาวของส่วนโค้งของแอสทรอยด์ (astroid) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

วิธีทำ



รูปที่ 9.56

จาก $x = a\cos^3 t$ และ $y = a\sin^3 t$ จะได้

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$$

$$= a^{\frac{2}{3}}(1) = a^{\frac{2}{3}}$$

จากรูป $$\frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = 3a\cos^2 t(-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$$

ฉะนั้น $$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt$$

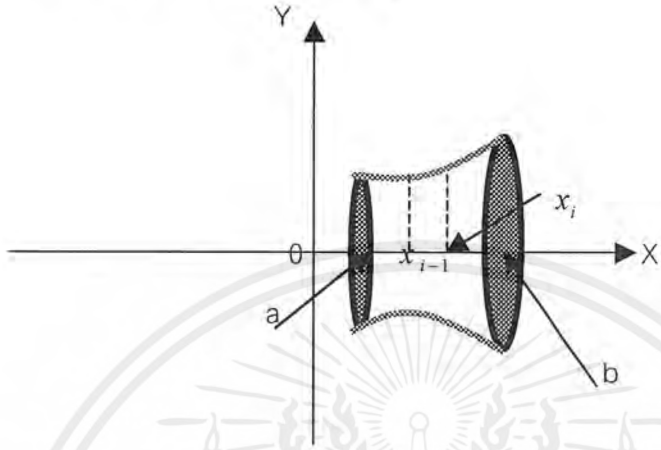
$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} a\sin t\cos t\, dt$$

$$= 12a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2} = 6a$$ หน่วย ###

9.7 พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน (Surface Area of Revolution)

สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันบวก และต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ เมื่อต้องการหาพื้นที่เกิดจากการหมุน $y = f(x), x = a, x = b$ และ $y = 0$ รอบแกน x ดังรูป



รูปที่ 9.57

แบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วนดังนี้ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

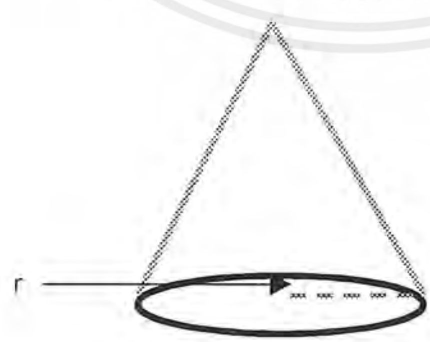
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n)$$

$\|\Delta x\|$ เป็นค่ามากที่สุดของ Δx_i

ในการหาพื้นที่ผิวของการหมุนหาได้โดยการอินทิเกรต ซึ่งอาศัยหลักของพื้นที่ผิวเอียงของกรวยกลม ไม่มียอด (frustum of cone)

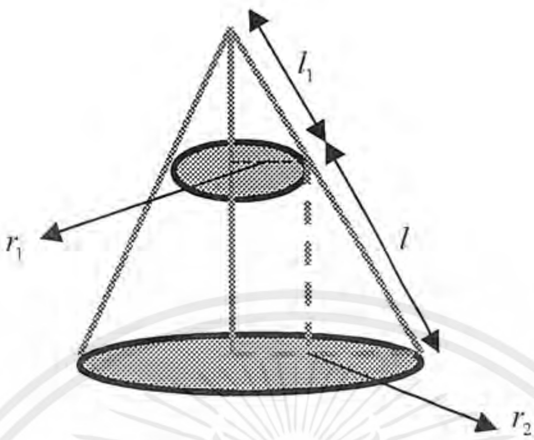
พื้นที่ผิวเอียง A ของกรวยกลม ซึ่งมีรัศมี r และความสูงเอียง l ดังรูป หาได้จากสูตร

$$A = \pi r l$$



รูปที่ 9.58

ส่วนการหาพื้นที่ผิวของกรวยกลมที่ไม่มียอด ซึ่งมีรัศมีสั้นคือ r_1 และรัศมียาวคือ r_2 สูงเอียงคือ l ดังรูป นั้นหาได้จาก



รูปที่ 9.59

$$
\begin{aligned}
S &= \pi r_2(l+l_1) - r_1 l_1 \\
&= \pi r_2 l + \pi r_2 l_1 - \pi r_1 l_1 \\
&= \pi r_2 l + \pi(r_2 - r_1)l_1
\end{aligned}
$$

จาก $\dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{l}{r_2 - r_1}$ ดังนั้น $(r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$

ฉะนั้น $S = \pi r_2 l + \pi r_1 l$

$$= \pi(r_1 + r_2)l$$

จากรูป เมื่อ S_i เป็นพื้นที่ผิวของรูปทรงกรวยที่ไม่มียอดรัศมี $f(x_{i-1})$ และ $f(x_i)$ ความยาวของคอร์ดที่เชื่อมระหว่างจุด $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ และจุด $(x_i, f(x_i))$ คือสูงเอียง l แล้ว

$$
\begin{aligned}
S_i &= \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})]l \\
&= \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})]\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \\
&= \pi(y_{i-1} + y_i)\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\
&= 2\pi\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\,\frac{(y_{i-1} + y_i)}{2} \\
&= 2\pi\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i\,\frac{(y_{i-1} + y_i)}{2}
\end{aligned}
$$

จากทฤษฎีค่ามัชฌิมสำหรับอนุพันธ์ จะได้ว่ามี c_i ใน $[x_{i-1}, x_i]$ ซึ่ง $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$

$$S_i = 2\pi\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i \frac{(y_{i-1}+y_i)}{2}$$

จากทฤษฎีค่าตัวกลาง จะได้ว่า $\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$ เป็นจำนวนที่อยู่ระหว่าง y_{i-1} กับ y_i และ $\frac{y_{i-1}+y_1}{2} = f(d_i)$ เมื่อ $x_{i-1} < d_i < x_i$

ฉะนั้น $S_i = 2\pi\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,f(d_i)\Delta x_i$

$$S = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(d_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

ถ้าในกรณีที่ $c_i = d_i$ แล้ว จะได้อินทิกรัลจำกัดเขตซึ่ง

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

นิยามที่ 9.14 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบและต่อเนื่องบนช่วง $a \le x \le b$ แล้ว พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $y = f(x)$ รอบแกน x คือ

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

นิยามที่ 9.15 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบและต่อเนื่องบนช่วง $c \le y \le d$ แล้ว พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $x = g(y)$ รอบแกน y คือ

$$S = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

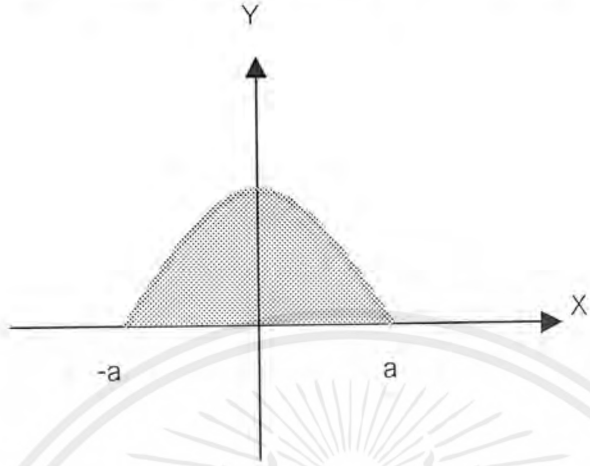
นิยามที่ 9.16 ถ้าฟังก์ชัน $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบและ $f'(t), g'(t)$ ต่อเนื่อง สำหรับ $a \le t \le b$ แล้วพื้นที่ผิว S ที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้งรอบแกนเป็นดังนี้

1. หมุนรอบแกน $x\,(y \ge 0)$ $\qquad S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

2. หมุนรอบแกน $y(x \ge 0)$ $\qquad S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

ตัวอย่างที่ 50 จงหาพื้นที่ผิวของรูปทรงที่เกิดจากการหมุน $y=\sqrt{a^2-x^2}; -a \le x \le a$ รอบแกน x

วิธีทำ



รูปที่ 9.60

วิธีที่ 1 จากสูตร $S = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, f(x)dx$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} a\,dx = 2\pi ax\Big|_{-a}^{a}$$

$= 4\pi a^2$ หน่วย

วิธีที่ 2 ให้ $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}$$

$$= a$$

จากสูตร $S = 2\pi \int_{0}^{\pi} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} a \sin\theta a d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} a^2 \sin\theta d\theta$$

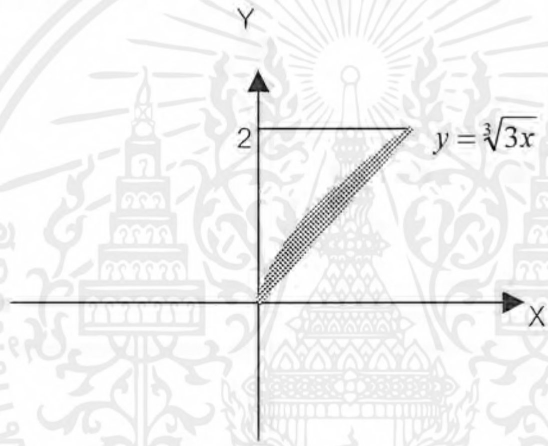
$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$$

$$= 2\pi a^2 [-\cos\theta]_0^{\pi}$$

$$= 4\pi a^2$$ หน่วยพื้นที่ ###

<u>ตัวอย่างที่ 51</u> จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน $y = \sqrt[3]{3x}; 0 \le y \le 2$ รอบแกน y

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.61

จาก $y = \sqrt[3]{3x}$

ฉะนั้น $x = g(y) = \frac{1}{3}y^3$

$$g'(y) = y^2$$

$$S = 2\pi \int_0^2 g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(\frac{1}{3}y^3\right)\sqrt{1 + y^4}\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int_0^2 y^3 \sqrt{1 + y^4}\, dy$$

$$= \frac{2\pi}{3.4}\int_0^2 \sqrt{1+y^4}\, d\left(1+y^4\right)$$

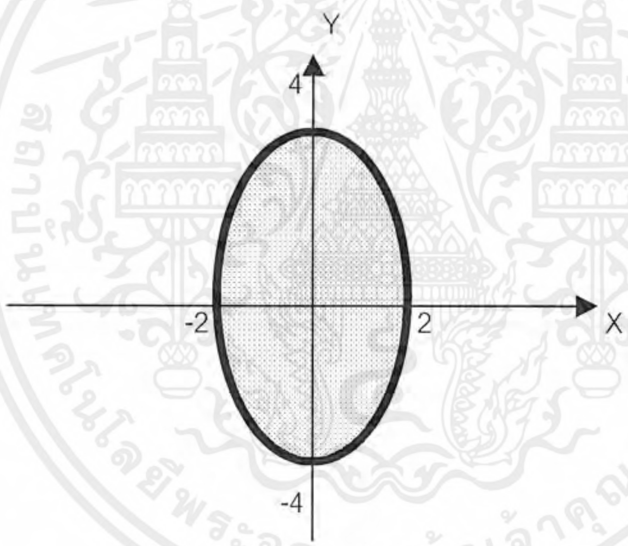
$$= \frac{\pi}{6} \circ \left. \frac{\left(1+y^4\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right|_0^2$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(1+y^4\right)^{3/2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(17^{3/2}-1\right)$$ หน่วยพื้นที่ ###

<u>ตัวอย่างที่ 52</u> จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากหมุนวงรี $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ รอบแกน y

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 9.62

สูตร $$S = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

จาก $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

$$x^2 = 4\left(1-\frac{y^2}{16}\right) = \frac{4\left(16-y^2\right)}{16}$$

$$2x\frac{dx}{dy}=-\frac{2}{4}y$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{1}{16}\frac{y^2}{x^2}$$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=1+\frac{y^2}{16x^2}=\frac{16x^2+y^2}{16x^2}$$

$$S=2\pi\int_{-4}^{4}x\sqrt{\frac{16x^2+y^2}{16x^2}}dy$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-4}^{4}\sqrt{64-3y^2}\,dy$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\frac{y\sqrt{3}}{2}\sqrt{64-3y^2}+32\sin^{-1}\frac{y\sqrt{3}}{8}\right]_{-4}^{4}$$

$$=8\pi\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\right)$$ หน่วยพื้นที่ ###

<u>ตัวอย่างที่ 53</u> จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน $x=a\cos^3\theta, y=a\sin^3\theta$ จาก 0 ถึง π รอบแกน x

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dx}{d\theta}=-3a\cos^2\theta\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\left[9a^2\cos^4\theta\sin^2\theta+9a^2\sin^4\theta\cos^2\theta\right]^{1/2}$$

$$=[9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]]^{1/2}$$

$$=\left(9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right)^{1/2}$$

$$=3a\cos\theta\sin\theta$$

$$S=2\int_0^{\pi/2}2\pi y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=4\pi\int_0^{\pi/2}a\sin^3\theta\circ 3a\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos\theta d\theta$$

$$= 12\pi a^2 \left. \frac{\sin^2 \theta}{5} \right|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{12a^2}{5}\pi$$ หน่วยพื้นที่ ###

แบบทดสอบ
เรื่องการประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขต

1. พื้นที่ของบริเวณระนาบและพื้นที่ของบริเวณระหว่างเส้นโค้ง

จงหาพื้นที่

ชุดที่ 1ก

1. $A=\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)dx$

   ก. $\pi/2$ ข. π ค. $3\pi/2$

2. $A=\int_0^{1}(1-2x^{1/2}+x)dx$

   ก. 1/3 ข. 1/6 ค. 1/9

3. $A=\int_0^{1}(x^{1/3}-x^{1/2})dx$

   ก. 1/4 ข. 1/8 ค. 1/12

4. $A=\int_1^{2}[2-(x-2)^2-x]dx$

   ก. 1/6 ข. 1/12 ค. 1/18

5. $A=\int_{-2}^{1}[(4-y^2)-(y+2)]dy$

   ก. 9/2 ข. 7/2 ค. 5/2

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ล้อมรอบด้วยเส้น $y=x$ เส้น $x=2$ ส่วนโค้ง $y=\frac{1}{x^2}$ และแกน x

$$A=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^{-2}dx$$

ก. 1 ข. 2 ค. 3

ชุดที่ 2ก

1. $A=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)dx$

   ก. $2\sqrt{2}$ ข. $3\sqrt{2}$ ค. $4\sqrt{2}$

2. $A=2\int_0^2[2x^2-(x^4-2x^2)]dx$

   ก. 84/9 ข. 105/13 ค. 128/15

3. $A=\int_0^1 12(y^2-y^3)dy$

   ก. 1 ข. 2 ค. 3

4. $A=\int_0^3[(x-3)-(x^2-2x-3)]dx$

   ก. 7/2 ข. 9/2 ค. 11/2

5. $A=\int_1^3[(3y-y^2)-(3-y)]dx$

   ก. 2/3 ข. 4/3 ค. 6/5

6. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่ล้อมรอบด้วยแกน y ส่วนโค้ง $y=\sin x$ และ $y=\cos x$ ในจตุภาคที่หนึ่ง

$$A=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx$$

   ก. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ข. $2\sqrt{3}-2$ ค. $\sqrt{2}-1$

ชุดที่ 1ข

1. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $f(x)=\sqrt{x}+2$ กับแกน x ตั้งแต่ $x=1$ ถึง $x=4$

   ก. 16/3 ข. 32/3 ค. 48/3

2. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $f(x)=2+x+x^2$ กับแกน x

   ก. 5/2 ข. 7/2 ค. 9/2

3. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y=4-x^2, 0\le x\le 3$ และ แกน x

   ก. 17/3 ข. 23/3 ค. 29/3

4. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y=-x^2+4x-8$ กับแกน x ตั้งแต่ $x=-1$ และ $x=4$

   ก. $31\frac{2}{3}$ ข. $27\frac{2}{3}$ ค. $29\frac{2}{3}$

5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y=x^4+1$ และ $y=2x^2$

   ก. 8/15 ข. 16/15 ค. 32/15

6. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y=x^4$ และ $y=2x-x^2$ ตั้งแต่ $x=0$ ถึง $x=1$

   ก. 4/15 ข. 7/15 ค. 8/15

7. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y=x+6$ และ $y=x^2$ ตั้งแต่ $x=0$ ถึง $x=2$

   ก. 17/3 ข. 34/3 ค. 48/3

8. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $f(x)=2x-1$ และ $g(x)=x^2-4$ ตั้งแต่ $x=1$ ถึง $x=2$

   ก. 7/3 ข. 10/3 ค. 11/3

9. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^3$ และ แกน x ตั้งแต่ $x = -1$ ถึง $x = 1$

ก. 5/2 ข. 3/2 ค. $1/2$

10. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2 - 3x + 3$ และ $y = x + 3$

ก. 8 ข. 16 ค. 24

11. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2$ และ $y = x^2 - 4x + 4$ ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง $x = 3$

ก. 10 ข. 15 ค. 20

12. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $4x^2 + y = 4$ และ $x^4 - y = 1$

ก. 98/15 ข. 102/15 ค. 104/15

13. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y^2 - 4x = 4$ และ $4x - y = 6$

ก. 189/8 ข. 215/8 ค. 243/8

14. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^4 - 4x^2 + 4$ และ $y = x^2$

ก. 8 ข. 16 ค. 24

15. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = \sqrt{|x|}$ และ $5y = x + 6$

ก. 2/3 ข. 5/3 ค. 7/3

16. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x + y^2 = 0$ และ $x + 3y^2 = 2$

ก. 4/3 ข. 8/3 ค. 16/3

17. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x = y^2 - 1$ และ $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

ก. 2 ข. 4 ค. 8

18. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^3 + 8$ และ $y = 4x + 8$

ก. 2 ข. 4 ค. 8

19. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = \sqrt{x+4}$ และ $y = \frac{(x+4)^2}{8}$

ก. 2/3 ข. 4/3 ค. 8/3

20. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2 - x, y = x^2 - 9x + 16$ และ $y = -x$

ก. 26/3 ข. 40/3 ค. 52/3

ชุดที่ 2ข

1. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = 6 - x - x^2$ กับแกน x

ก. 125/6 ข. 105/6 ค. 75/6

2. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2 + 2x + 2,$ แกน x ,เส้น x = -2 ,เส้น $x = 1$

ก. 2 ข. 3 ค. 6

3. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2 - 4x + 5$ ตั้งแต่ x = -1 และ $x = 3$

ก. 20/3 ข. 40/3 ค. 70/3

4. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^3 - x^2 - 2x, -1 \le x \le 2$

ก. 37/12 ข. 37/6 ค. 43/12

5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = 2x^2 - 4x + 6$ และ $y = -x^2 + 2x + 1$ ตั้งแต่ $x = 1$ ถึง $x = 2$

ก. 9 ข. 6 ค. 3

6. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = 2 - x^2$ และ $y = -x$

ก. 9/2 ข. 7/2 ค. 5/2

7. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = -x^2 + 5x - 4$ และ $y = -x - 4$ ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง $x = 6$

ก. 36 ข. 24 ค. 12

8. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = -x^2 + 6x + 5$ และ $y = x^2 + 5$

ก. 9 ข. 6 ค. 3

9. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = 9 - x^2$ และ $y = x^2 + 1$ ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง $x = 3$

ก. 13/3 ข. 23/3 ค. 46/3

10. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x = y - y^2$ และ $y = x + 2$

ก. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ข. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ค. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

11. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x = y(y-2)$ และ $x + y = 12$

ก. 343/6 ข. 274/3 ค. 227/3

12. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x = y^3 + 1$ และ $x = 3y - 1$

ก. 9/4 ข. 15/4 ค. 27/4

13. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $x + y = 1, x + y = 5, y = 2x + 1$ และ $y = 2x + 6$

ก. 10/3 ข. 20/3 ค. 40/3

14. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^3 - x, x + y + 1 = 0$ และ $x = \sqrt{y+1}$

ก. 1/6 ข. 5/6 ค. 7/6

15. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2 + 4$ และ $y = 9 - x^2$

ก. $\frac{10\sqrt{10}}{3}$ ข. $\frac{8\sqrt{10}}{3}$ ค. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$

16. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^3 - x$ และ $y = 2x^3 - 2x$

ก. 5/2 ข. 3/2 ค. ½

17. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^3$ และ $y = \frac{16x + 8x^2 - 3x^3}{5}$

ก. 48/15 ข. 52/15 ค. 74/15

18. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = |x|, y = x + 2$ และ $y = 2 - x$

ก. 3 ข. 2 ค. 1

19. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^3$ และ $y = x^2$

ก. 1/12 ข. 5/12 ค. 7/12

20. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยกราฟ $y = 1 - x^2$ และ $y = x^2 - 1$

ก. 4/3 ข. 8/3 ค. 16/3

2. ปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนด้วยวิธีแบบจาน

จงใช้วิธีจานหาปริมาตรของทรงตันที่หมุนรอบแกน x และแกน y ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นและส่วนโค้ง

ชุดที่ 1ก

1. $V = \pi\int_0^2 (x^2)^2\,dx$

   ก. $(32/5)\pi$ ข. $(28/5)\pi$ ค. $(19/5)\pi$

2. $V = \pi\int_0^1 (x - x^2)^2\,dx$

   ก. $\pi/10$ ข. $\pi/20$ ค. $\pi/30$

3. $V = \pi\int_0^{\pi/2} (\sqrt{\cos x})^2\,dx$

   ก. $\pi/2$ ข. π ค. $3\pi/2$

4. $V = \pi\int_0^4 (4 - y)\,dy$

   ก. 6π ข. 8π ค. 10π

5. $V = 2\pi\int_0^1 (1 - y^2)^2\,dy$

   ก. $16\pi/15$ ข. $17\pi/14$ ค. $18\pi/13$

6. $V = \pi\int_0^{\pi/2} 2\sin 2y\,dy$

   ก. 3π ข. 2π ค. π

ชุดที่ 2ก

1. $V = 2\pi\int_{0}^{3}(\sqrt{9-x^2})^2\,dx$

   ก. 40π ข. 38π ค. 36π

2. $V = \pi\int_{0}^{2}(x^3)^2\,dx$

   ก. $(132/5)\pi$ ข. $(128/7)\pi$ ค. $(119/9)\pi$

3. $V = 2\pi\int_{0}^{\pi/4}\sec^2 x dx$

   ก. π ข. 2π ค. 3π

4. $V = 2\pi\int_{0}^{1}(\sqrt{5}y^2)^2\,dy$

   ก. π ข. 2π ค. 3π

5. $V = \pi\int_{0}^{2}(y^{3/2})^2\,dy$

   ก. 2π ข. 3π ค. 4π

6. $V = \pi\int_{0}^{1}(\frac{2}{y+1})^2\,dy$

   ก. π ข. 2π ค. 3π

ชุดที่ 1ข

1. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง แกน x กับกราฟ $y=\sqrt{x}$ เมื่อ $0 \le x \le 4$ รอบแกน x

   ก. 4π　　ข. 6π　　ค. 8π

2. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง แกน x กับกราฟของ $f(x)=x/3$ เมื่อ $0 \le x \le 3$ รอบแกน x

   ก. $\frac{\pi}{2}$　　ข. π　　ค. 2π

3. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง กราฟ $y=\sqrt{x}$,เส้น $y=1$ และ $x=4$ รอบเส้น $y=1$

   ก. $\frac{\pi}{6}$　　ข. $\frac{5\pi}{6}$　　ค. $\frac{7\pi}{6}$

4. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง แกน x กับกราฟของ $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ในช่วง $[-r,r]$ รอบแกน x

   ก. $\frac{4}{3}\pi r^3$　　ข. $2\pi r^3$　　ค. $\frac{8}{3}\pi r^3$

5. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง แกน x กับกราฟของ $y=\sqrt{x}$ ในช่วง $[1,4]$ รอบแกน x

   ก. $\frac{11\pi}{2}$　　ข. $\frac{13\pi}{2}$　　ค. $\frac{15\pi}{2}$

6. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง แกน y กับกราฟ $x=2/y, 1 \le y \le 4$ รอบแกน y

   ก. π　　ข. 2π　　ค. 3π

7. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง พาราโบลา $x = y^2 + 1$ กับเส้น $x = 3$ รอบเส้น $x = 3$

ก. $\dfrac{51\pi\sqrt{2}}{15}$ ข. $\dfrac{64\pi\sqrt{2}}{15}$ ค. $\dfrac{83\pi\sqrt{2}}{15}$

8. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง แกน y และกราฟ $y = x, 0 \le y \le 3$ รอบแกน y

ก. 6π ข. 12π ค. 15π

9. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง แกน y และกราฟ $y = \sqrt{x}$ $0 \le y \le 2$ รอบแกน y

ก. $\dfrac{24\pi}{5}$ ข. $\dfrac{29\pi}{5}$ ค. $\dfrac{32\pi}{5}$

10. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = x^2 + 1$ กับ $y = -x + 3$ รอบแกน x

ก. $\dfrac{102\pi}{5}$ ข. $\dfrac{109\pi}{5}$ ค. $\dfrac{117\pi}{5}$

11. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = \dfrac{1}{2} + x^2$ และ $y = x$ ในช่วง $[0,2]$ รอบแกน x

ก. $\dfrac{59\pi}{10}$ ข. $\dfrac{69\pi}{10}$ ค. $\dfrac{79\pi}{10}$

12. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = 5x$ และ $y = x^2$ ในช่วง รอบแกน x

ก. $\dfrac{682\pi}{5}$ ข. $\dfrac{782\pi}{5}$ ค. $\dfrac{882\pi}{5}$

13. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง กราฟ $y = 2\sqrt{x}, y = 2, x = 0$

ก. $\dfrac{\pi}{2}$ ข. π ค. 2π

14. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง กราฟ $y = x^2 + 1, y = x + 3$

ก. $\frac{112\pi}{5}$ ข. $\frac{117\pi}{5}$ ค. $\frac{124\pi}{5}$

15. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่างกราฟ $y = x^2 + 2x + 1, x = 1, y = 0$ รอบแกน x

ก. $\frac{32\pi}{5}$ ข. $\frac{41\pi}{5}$ ค. $\frac{52\pi}{5}$

ชุดที่ 2ข

1. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่างกราฟ $y = 2x^2, y = 3 - x^2$ รอบแกน x

ก. $\frac{44\pi}{5}$ ข. $\frac{64\pi}{5}$ ค. $\frac{71\pi}{5}$

2. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง กราฟ $y = 1/x, y = x, x = 2, y = 0$ รอบแกน x

ก. π ข. $\frac{\pi}{6}$ ค. $\frac{5\pi}{6}$

3. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = x + 1, y = 3x - 5, y = 1$ รอบแกน x

ก. 12π ข. 13π ค. 15π

4. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = {}^{1}\!/_{x}, y = 1, y = 2, x = 0$ รอบแกน y

ก. $\frac{\pi}{2}$ ข. 2π ค. $\frac{\pi}{5}$

5. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = x^2 - 2x + 1, y = x + 1$ รอบแกน y

ก. 10π ข. $\frac{20\pi}{3}$ ค. $\frac{27\pi}{2}$

6. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = 2x - 1, y = -2x + 7, y = x$ รอบแกน y

ก. $\frac{64\pi}{27}$ ข. $\frac{75\pi}{31}$ ค. $\frac{81\pi}{42}$

7. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y^2 = 8x$ และเส้นตรง $y = -4, y = 4$ และแกน y รอบแกน y

ก. $\frac{32\pi}{5}$ ข. $\frac{23\pi}{3}$ ค. $\frac{41\pi}{2}$

8. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง เส้นตรง $y = x + 2$ และพาราโบลา $y = x^2$ รอบแกน x

ก. $\frac{30\pi}{4}$ ข. $\frac{50\pi}{4}$ ค. $\frac{72\pi}{5}$

9. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = x^2, x = 2, y = 0$ หมุนรอบแกน $x = 2$

ก. $\frac{8\pi}{3}$ ข. $\frac{10\pi}{3}$ ค. $\frac{14\pi}{3}$

10. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่างกราฟ $y = x^2 - 4x, y = 0$ รอบ แกน x

ก. $\frac{412\pi}{15}$ ข. $\frac{502\pi}{15}$ ค. $\frac{512\pi}{15}$

11. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่างกราฟ $x + y + 1 = 0, 2y = x - 2$ และ $y = 0$ รอบแกน x

ก. π ข. 2π ค. 3π

12. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง กราฟ $y = x^2, y = 4 - x^2$ รอบแกน x

ก. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$ ข. $\frac{65\sqrt{3}\pi}{4}$ ค. $\frac{70\sqrt{5}\pi}{5}$

13. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง กราฟ $y = x^2, y = 0, x = 1$ รอบเส้นตรง $x = 1$

ก. $\frac{\pi}{6}$ ข. $\frac{\pi}{4}$ ค. $\frac{\pi}{2}$

14. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง กราฟ $y = x^2 - x, y = 2x - x^2$ รอบเส้นตรง $y = 2$

ก. $\frac{15\pi}{2}$ ข. $\frac{23\pi}{2}$ ค. $\frac{32\pi}{3}$

15. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง กราฟ $x = 2y - y^2 - 2, x = -5$ รอบแกน y

ก. $\frac{1001\pi}{13}$ ข. $\frac{1050\pi}{14}$ ค. $\frac{1088\pi}{15}$

3. การหาปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีวงแหวนทรงกระบอก

จงใช้วิธีวงแหวนหาปริมาตรของรูปทรงตันที่หมุนรอบแกน x และแกน y ซึ่งอาณาบริเวณปิดล้อมด้วยส่วนโค้งและเส้น

ชุดที่ 1ก

1. $V = 2\pi\int_0^2 [x-(-x/2)][x]dx$

   ก. 8π ข. 7π ค. 6π

2. $V = 2\pi\int_0^4 x(\sqrt{x})dx$

   ก. $\frac{42\pi}{5}$ ข. $\frac{86\pi}{5}$ ค. $\frac{128\pi}{5}$

3. $V = 2\pi\int_0^1 (x^2+1)xdx$

   ก. $\frac{\pi}{3}$ ข. $\frac{3\pi}{2}$ ค. $\frac{4\pi}{3}$

4. $V = 2\pi\int_0^1 (2y)(y)dy$

   ก. $\frac{\pi}{3}$ ข. $\frac{3\pi}{2}$ ค. $\frac{4\pi}{3}$

5. $V = 2\pi\int_1^2 y(2-y)dy$

   ก. $\frac{\pi}{3}$ ข. $\frac{3\pi}{2}$ ค. $\frac{4\pi}{3}$

6. $V = 2\pi\int_0^2 [(y+2)-y^2]ydy$

   ก. $\frac{16\pi}{3}$ ข. $\frac{15\pi}{2}$ ค. $\frac{14\pi}{3}$

7. $V = 2\pi \int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx$

ก. $\frac{16\pi}{3}$ ข. $\frac{15\pi}{2}$ ค. $\frac{14\pi}{3}$

8. a) $V = 2\pi \int_{0}^{1} 12(y^2 - y^3)dy$ b) $V = 2\pi \int_{0}^{1} (1-y)(12)(y^2 - y^3)dy$

ก. a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$

ข. a) $\frac{6\pi}{5}$ b) $\frac{4\pi}{5}$

ค. a) $\frac{9\pi}{7}$ b) $\frac{6\pi}{7}$

9. a) $V = 2\pi \int_{0}^{2} y[\frac{y^2}{2} - (\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2})]dy$ b) $V = 2\pi \int_{0}^{2} (2-y)[\frac{y^2}{2} - (\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2})]dy$

c) $V = 2\pi \int_{0}^{2} (5-y)(y^2 - \frac{y^4}{4})dy$ d) $V = 2\pi \int_{0}^{1} (y+\frac{5}{8})(y^2 - \frac{y^4}{4})dy$

ก. a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{5}$ c) 9π d) $\frac{321\pi}{11}$

ข. a) $\frac{7\pi}{3}$ b) $\frac{4\pi}{5}$ c) $\frac{9\pi}{7}$ d) $\frac{156\pi}{37}$

ค. a) $\frac{8\pi}{3}$ b) $\frac{8\pi}{5}$ c) 8π d) $\frac{283\pi}{48}$

10. จงหาปริมาตรของทรงตันที่หมุนรอบอาณาบริเวณรูปสามเหลี่ยมที่จุดยอด (1,1) , (1,2) และ (2,2) รอบ

a) แกน x $V = 2\pi \int_{1}^{2} y(y-1)dy$

b) แกน y $V = 2\pi \int_{1}^{2} x(2-x)dx$

c) เส้น x = 10/3 $V = 2\pi \int_{1}^{2} (\frac{10}{3} - x)(2-x)dx$

d) เส้น y = 1 $V = 2\pi \int_{1}^{2} (y-1)^2 dy$

ก.	a) $\frac{4\pi}{3}$	b) $\frac{2\pi}{5}$	c) 9π	d) $\frac{4\pi}{11}$
ข.	a) $\frac{5\pi}{3}$	b) $\frac{4\pi}{3}$	c) 2π	d) $\frac{2\pi}{9}$
ค.	a) $\frac{4\pi}{3}$	b) $\frac{8\pi}{5}$	c) 8π	d) $\frac{\pi}{4}$

ชุดที่ 2ก

1. $V = 2\pi\int_0^1 x[\sqrt{x}-(2x-1)]dx$

ก. $\frac{7\pi}{15}$ ข. $\frac{6\pi}{11}$ ค. $\frac{5\pi}{9}$

2. $V = 2\pi\int_{1/2}^2 (1/x)(x)dx$

ก. 2π ข. 3π ค. 4π

3. $V = 2\pi\int_0^4 (x)(3/2)(x^{-1/2})dx$

ก. 8π ข. 14π ค. 22π

4. $V = 2\pi\int_0^2 y(\sqrt{y}+y)dy$

ก. $\frac{16\pi(3\sqrt{2}+5)}{15}$ ข. $\frac{14\pi(2\sqrt{2}-3)}{11}$ ค. $\frac{12\pi(\sqrt{2}+7)}{7}$

5. $V = 2\pi\int_0^2 (2y-y^2)ydy$

ก. $\frac{7\pi}{15}$ ข. $\frac{8\pi}{3}$ ค. $\frac{5\pi}{9}$

6. $V = 2\pi\int_0^1 y[(2y-y^2)-y]dy$

ก. $\frac{\pi}{4}$ ข. $\frac{\pi}{5}$ ค. $\frac{\pi}{6}$

7. $V = 2\pi\int_0^3 \frac{9x^2}{\sqrt{x^3+9}}dx$

ก. 18π ข. 27π ค. 36π

8. a) $V = 2\pi\int_0^1 (\frac{8}{5} - y)(12)(y^2 - y^3)dy$ b) $V = 2\pi\int_0^1 (y + \frac{2}{5})(12)(y^2 - y^3)dy$

ก. a) 2π b) 2π

ข. a) 4π b) 2π

ค. a) 4π b) π

9. จงหาปริมาตรของทรงตันที่หมุนรอบอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $x = y - y^3$, $x = 1$ และ $y = 1$ รอบ

a) แกน x $V = 2\pi\int_0^1 y[1-(y-y^3)]dy$

b) แกน y $V = \pi - \pi\int_0^1 (y-y^3)^2 dy$

c) เส้น x = 1 $V = \pi\int_0^1 [1-(y-y^3)]^2 dy$

d) เส้น y = 1 $V = 2\pi\int_0^1 (1-y)(1-y+y^3)dy$

ก. a) $\frac{11\pi}{15}$ b) $\frac{97\pi}{105}$ c) $\frac{121\pi}{210}$ d) $\frac{23\pi}{30}$

ข. a) $\frac{5\pi}{13}$ b) $\frac{87\pi}{105}$ c) $\frac{23\pi}{30}$ d) $\frac{2\pi}{9}$

ค. a) $\frac{14\pi}{13}$ b) $\frac{77\pi}{105}$ c) 8π d) $\frac{11\pi}{24}$

10. จงหาปริมาตรของทรงตันที่หมุนรอบอาณาบริเวณรูปสามเหลี่ยมที่ล้อมรอบด้วยเส้น $2y = x + 4$, $y = x$ และ $x = 0$ รอบ

a) แกน x $V = \pi\int_0^4 [(\frac{x}{2}+2)^2 - x^2]dx$

b) แกน y $V = 2\pi\int_0^4 x(\frac{x}{2}+2-x)dx$

c) เส้น $x = 4$ $V = 2\pi\int_0^4 (4-x)(\frac{x}{2}+2-x)dx$

d) เส้น $y = 8$ $V = \pi\int_0^4 (8-x)^2 - (8-\frac{x}{2}-2)^2 dx$

ก.	a) 48π	b) $\frac{17\pi}{5}$	c) $\frac{13\pi}{4}$	d) 16π
ข.	a) 16π	b) $\frac{25\pi}{4}$	c) $\frac{23\pi}{3}$	d) 16π
ค.	a) 16π	b) $\frac{32\pi}{3}$	c) $\frac{64\pi}{3}$	d) 48π

ชุดที่ 1ข

1. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=\sqrt{x}, x=4, y=0$ รอบแกน y

    ก. $\frac{42\pi}{5}$ ข. $\frac{86\pi}{5}$ ค. $\frac{128\pi}{5}$

2. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=x, xy=9, x+y=10$ $(x \geq y)$ รอบแกน y

    ก. $\frac{125\pi}{3}$ ข. $\frac{259\pi}{3}$ ค. $\frac{344\pi}{3}$

3. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=x^2, y=x$ รอบแกน y

    ก. $\frac{\pi}{3}$ ข. $\frac{\pi}{6}$ ค. $\frac{\pi}{12}$

4. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=x^2-x^3, y=0$ รอบแกน y

    ก. $\frac{\pi}{2}$ ข. $\frac{\pi}{5}$ ค. $\frac{\pi}{10}$

5. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $x=\sqrt{9-y^2}, y=0$ รอบแกน y

    ก. 18π ข. 36π ค. 42π

6. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $x^2=4y, y=4$ รอบแกน x

    ก. $\frac{512\pi}{5}$ ข. $\frac{256\pi}{5}$ ค. $\frac{128\pi}{5}$

7. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=2x, y=6, x=0$ รอบแกน x

    ก. 72π ข. 36π ค. 18π

8. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $x+y=4, y=2\sqrt{x-1}, y=0$ รอบแกน x

    ก. $\frac{14\pi}{3}$ ข. $\frac{10\pi}{3}$ ค. $\frac{7\pi}{3}$

9. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=x^2, x=0, x=1, y=0$ รอบเส้นตรง $x=1$

ก. $\frac{\pi}{2}$ ข. $\frac{\pi}{6}$ ค. $\frac{\pi}{8}$

10. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=x-x^2, y=0$ รอบเส้นตรง $x=2$

ก. $\frac{\pi}{2}$ ข. $\frac{\pi}{6}$ ค. $\frac{\pi}{8}$

11. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=x^2, y=-x^2, x=-1$ รอบเส้นตรง $x=-1$

ก. $\frac{\pi}{5}$ ข. $\frac{\pi}{4}$ ค. $\frac{\pi}{3}$

12. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=2-|x|, y=0$ รอบเส้นตรง $y=-1$

ก. $\frac{20\pi}{3}$ ข. $\frac{30\pi}{3}$ ค. $\frac{40\pi}{3}$

13. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y^2=x, x=1$ รอบเส้นตรง $y=-2$

ก. $\frac{16\pi}{3}$ ข. $\frac{15\pi}{3}$ ค. $\frac{14\pi}{3}$

14. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $x=y^2, x=0, x+y=2$ รอบเส้นตรง $y=-3$

ก. $\frac{51\pi}{6}$ ข. $\frac{41\pi}{6}$ ค. $\frac{31\pi}{6}$

15. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y=x^3, x=1, x=2, y=0$ รอบแกน y

ก. $\frac{62\pi}{5}$ ข. $\frac{52\pi}{5}$ ค. $\frac{42\pi}{5}$

ชุดที่ 2ข

1. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = x^2, y = \sqrt[3]{x}$ รอบแกน y

   ก. $\frac{5\pi}{14}$ ข. $\frac{6\pi}{14}$ ค. $\frac{7\pi}{14}$

2. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = \frac{1}{2}x + 1, x + y = 4, y = 1$ รอบแกน y

   ก. 4π ข. 5π ค. 6π

3. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = x + \frac{2}{x}, x = 1, y = \frac{11}{6}(x-1)$ รอบแกน y

   ก. $\frac{64\pi}{11}$ ข. $\frac{74\pi}{9}$ ค. $\frac{84\pi}{7}$

4. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = \sqrt{x+1}, 3y = 2x, x = 0$ รอบแกน y

   ก. $\frac{52\pi}{15}$ ข. $\frac{62\pi}{15}$ ค. $\frac{72\pi}{15}$

5. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = \frac{3}{\sqrt{x^2+1}}, x = 1, x = 2, y = 0$ รอบแกน y

   ก. $6\pi(7 - \sqrt{5})$ ข. $6\pi(\sqrt{7} - \sqrt{3})$ ค. $6\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

6. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $x = y - y^2, x = y^2 - y$ รอบแกน x

   ก. $\frac{\pi}{2}$ ข. $\frac{\pi}{3}$ ค. $\frac{\pi}{4}$

7. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $x = 1-\sqrt{1-y}, x = 0, x + y = 2$ รอบแกน x

ก. $\dfrac{9\pi}{3}$ ข. $\dfrac{7\pi}{4}$ ค. $\dfrac{9\pi}{5}$

8. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = x^2 - 4x + 5, y = 5 - x^2 + 4x$ รอบแกน x และ รอบแกน y

ก. $\dfrac{640\pi}{3}, \dfrac{256\pi}{3}$ ข. $\dfrac{650\pi}{3}, \dfrac{156\pi}{3}$ ค. $\dfrac{670\pi}{3}, \dfrac{56\pi}{3}$

9. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = 1 + \sqrt{x}, x = 2y - 2$ รอบแกน x และรอบแกน y

ก. $\dfrac{11\pi}{3}, \dfrac{54\pi}{13}$ ข. $\dfrac{16\pi}{3}, \dfrac{64\pi}{15}$ ค. $\dfrac{19\pi}{3}, \dfrac{74\pi}{17}$

10. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $x = y^2 - 2y$ และ $x = y - y^2$ รอบแกน x

ก. $\dfrac{47\pi}{16}$ ข. $\dfrac{37\pi}{16}$ ค. $\dfrac{27\pi}{16}$

11. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = -2x^2 + 8x - 6$ และแกน x หมุนรอบแกน y

ก. $\dfrac{32\pi}{3}$ ข. $\dfrac{42\pi}{3}$ ค. $\dfrac{52\pi}{3}$

12. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่างพาราโบลา $y = x^2$,แกน y และเส้น $y = 1$ รอบเส้น $x = 2$

ก. $\dfrac{11\pi}{6}$ ข. $\dfrac{13\pi}{6}$ ค. $\dfrac{15\pi}{6}$

13. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = 3 - x^2, y = 3x - 1$ ในช่วง $[0,1]$

ก. $\dfrac{3\pi}{2}$ ข. $\dfrac{5\pi}{2}$ ค. $\dfrac{7\pi}{2}$

14. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y = 1 + x + x^2$ และแกน x ในช่วง $[0,1]$ รอบแกน y

ก. $\frac{51\pi}{21}$ ข. $\frac{41\pi}{21}$ ค. $\frac{31\pi}{21}$

15. จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของบริเวณที่อยู่ระหว่าง $y^2 = x, y = x^3$ รอบแกน x

ก. $\frac{6\pi}{15}$ ข. $\frac{7\pi}{16}$ ค. $\frac{5\pi}{14}$

4. ความยาวส่วนโค้งและพื้นที่ผิวของการหมุน

ชุดที่ 1

1. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y = x^{3/2}$ ตั้งแต่ $(1,1)$ ถึง $(4,8)$

ก. 4 ข. 6 ค. 8

2. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, 0 \le x \le 1$

ก. 13/6 ข. 25/7 ค. 11/8

3. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y = \frac{12}{5}x + 1$ ตั้งแต่ $(0,1)$ ถึง $(5,13)$

ก. 13 ข. 14 ค. 15

4. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง $x = 2$

ก. 4 ข. 3 ค. 2

5. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $6xy - y^4 - 3 = 0$ ตั้งแต่ $(19/12,2)$ ถึง $(14/3,3)$

ก. 12/3 ข. 13/4 ค. 14/5

6. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $y = 2\sqrt{x}, 1 \le x \le 2$ รอบแกน x

ก. $\frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$ ข. $\frac{4\pi}{3}\left(3 - 3\sqrt{2}\right)$ ค. $\frac{7\pi}{4}\left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

7. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $y = \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le 1/2$ รอบแกน x

ก. 3π ข. 2π ค. π

8. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 4$ รอบแกน x

ก. 18 ข. 27 ค. 36

9. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $y = x^3, 0 \le x \le 1$ รอบแกน x

ก. $\frac{\pi}{27}\left(9^{3/2} - 1\right)$ ข. $\frac{\pi}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$ ค. $\frac{\pi}{27}\left(11^{3/2} - 1\right)$

10. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $x = 1 - y$ เมื่อ $0 \le y \le 1$ รอบแกน y

ก. $3\pi\sqrt{2}$ ข. $\pi\sqrt{2}$ ค. $2\pi\sqrt{2}$

11. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $y = \frac{x^3}{9}, 0 \le x \le 2$ รอบแกน x

ก. $\frac{98\pi}{81}$ ข. $\frac{88\pi}{71}$ ค. $\frac{78\pi}{61}$

12. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $y = \sqrt{2x - x^2}, 0.5 \le x \le 1.5$ รอบแกน x

ก. $2\,2\pi$ ข. $1\,2\pi$ ค. 2π

13. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $x = \frac{y^3}{3}, 0 \le y \le 1$ รอบแกน y

ก. $\frac{\pi\left(1 + \sqrt{8}\right)}{9}$ ข. $\frac{\pi\left(\sqrt{8} - 1\right)}{9}$ ค. $\frac{\pi\left(\sqrt{8} + 1\right)}{9}$

14. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $x = 2\sqrt{4 - y}, 0 \le y \le 15/4$ รอบแกน y

ก. $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$ ข. $\frac{35\pi\sqrt{7}}{3}$ ค. $\frac{35\pi\sqrt{13}}{3}$

15. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}, 1 \le y \le 2$ รอบแกน x

ก. $\frac{233\pi}{18}$ ข. $\frac{243\pi}{19}$ ค. $\frac{253\pi}{20}$

<u>ชุดที่ 2</u>

1. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y = x^{3/2} + 1$ เมื่อ $0 \le x \le 4/3$

ก. 56/27 ข. 56/25 ค. 56/23

2. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}, 1 \le y \le 2$

ก. 13/12 ข. 15/12 ค. 17/12

3. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$

ก. 7 ข. 12 ค. 29

4. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $x = \left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{1}{4y}$ จาก $y = 1$ ถึง $y = 3$

ก. 53/6 ข. 38/5 ค. 19/7

5. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y = \frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{3}{8}x^{2/3} + 5, 1 \le x \le 8$

ก. 99/8 ข. 105/8 ค. 129/8

6. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง พาราโบลา $y = x^2$ เมื่อ $0 \le x \le \sqrt{2}$ หมุนรอบแกน y

ก. $\frac{10\pi}{3}$ ข. $\frac{13\pi}{3}$ ค. $\frac{16\pi}{3}$

7. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $y = \sqrt[3]{3x}, 0 \le y \le 2$

ก. $\frac{\pi}{9}\left(17^{3/2} - 3\right)$ ข. $\frac{\pi}{9}\left(17^{3/2} + 5\right)$ ค. $\frac{\pi}{9}\left(17^{3/2} - 1\right)$

8. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $xy = 1, 1 \le y \le 2$ หมุนรอบแกน y

ก. 3 ข. 4 ค. 5

9. จงหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนส่วนโค้ง $x^{1/2}+y^{1/2}=3$ ตั้งแต่ $(4,1)$ ถึง $(1,4)$ รอบแกน x

ก. 85 ข. 63 ค. 41

10. จงหาพื้นที่ผิวส่วนข้างของกรวยที่เกิดจากการหมุนองค์ประกอบของเส้น $y=x/2, 0\le x\le 4$ รอบแกน x

ก. $4\pi\sqrt{3}$ ข. $4\pi\sqrt{5}$ ค. $4\pi\sqrt{7}$

11. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $x=\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{1}{8y^2}$ จาก $y=1$ ถึง $y=2$

ก. 123/32 ข. 123/28 ค. 123/20

12. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y=2x+3$ เมื่อ $1\le x\le 3$

ก. $2\sqrt{3}$ ข. $3\sqrt{3}$ ค. $4\sqrt{5}$

13. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y=x^4+\dfrac{1}{32x^2}$ เมื่อ $1\le x\le 2$

ก. 974/483 ข. 1923/128 ค. 2834/315

14. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y=2x^{3/2}+3$ เมื่อ $1\le x\le 4$

ก. 14 ข. 15 ค. 16

15. จงหาความยาวของส่วนโค้ง $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ เมื่อ $2\le x\le 4$

ก. 225/24 ข. 227/24 ค. 229/24

เฉลยแบบทดสอบ

1. พื้นที่ใต้เส้นโค้ง และพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ชุดที่ 1ก

1. ก	4. ก
2. ข	5. ก
3. ค	6. ก

ชุดที่ 2ก

1. ก	4. ข
2. ค	5. ข
3. ก	6. ค

ชุดที่ 1ข

1. ข	11. ก
2. ค	12. ค
3. ข	13. ค
4. ก	14. ก
5. ข	15. ข
6. ข	16. ข
7. ข	17. ก
8. ค	18. ค
9. ค	19. ค
10. ก	20. ข

ชุดที่ 2ข

1. ก
2. ค
3. ข
4. ก
5. ค
6. ก
7. ก
8. ก
9. ค
10. ก
11. ก
12. ค
13. ข
14. ค
15. ก
16. ค
17. ค
18. ข
19. ก
20. ข

2. ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนด้วยวิธีแบบจาน

ชุดที่ 1ก

1. ก
2. ค
3. ข
4. ข
5. ก
6. ข

ชุดที่ 2ก

1. ค
2. ข
3. ข
4. ข
5. ค
6. ข

ชุดที่ 1ข

1. ค
2. ข
3. ค
4. ก
5. ค
6. ค
7. ข
8. ข
9. ค
10. ค
11. ข
12. ค
13. ค
14. ข
15. ก

ชุดที่ 2ข

1. ข
2. ค
3. ก
4. ก
5. ค
6. ก
7. ก
8. ค
9. ก
10. ค
11. ก
12. ก
13. ก
14. ค
15. ค

3. การหาปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีวงแหวน

ชุดที่ 1ก

1. ก
2. ค
3. ข
4. ค
5. ค
6. ก
7. ค
8. ข
9. ค
10. ข

ชุดที่ 2ก

1. ก
2. ข
3. ข
4. ก
5. ข
6. ค
7. ค
8. ก
9. ก
10. ค

ชุดที่ 1ข

1. ค
2. ค
3. ข
4. ค
5. ข
6. ก
7. ก
8. ก
9. ข
10. ก
11. ค
12. ค
13. ก
14. ข
15. ก

ชุดที่ 2ข

1. ก
2. ข
3. ข
4. ก
5. ค
6. ข
7. ค
8. ก
9. ข
10. ค
11. ก
12. ข
13. ก
14. ข
15. ค

4. ความยาวของส่วนโค้ง และพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน

ชุดที่ 1

1.	ค	9.	ข
2.	ก	10.	ข
3.	ก	11.	ก
4.	ค	12.	ค
5.	ข	13.	ข
6.	ก	14.	ก
7.	ค	15.	ค
8.	ค		

ชุดที่ 2

1.	ก	9.	ข
2.	ค	10.	ข
3.	ข	11.	ก
4.	ก	12.	ค
5.	ก	13.	ข
6.	ข	14.	ก
7.	ค	15.	ข
8.	ค		

ภาคผนวก

โปรแกรม Toolbook

ชุดโปรแกรม Toolbook

บริษัท Asymetrix ได้พัฒนาชุดโปรแกรมของ Toolbook ออกเป็น 3 ชุด ดังนี้

- Toolbook
- Multimedia Toolbook
- Multimedia Toolbook CBT

ชุดโปรแกรม Toolbook เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับ สร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์เฉพาะงาน เช่น งาน Simulation บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน หรือแม้แต่การนำเสนอผลงาน (Presentation)

ชุดโปรแกรม Multimedia Toolbook มีลักษณะเช่นเดียวกับ Toolbook แต่รวมเอาความสามารถในเรื่องการใช้เสียง ใช้ภาพเคลื่อนไหวให้ใช้ง่ายขึ้นกว่า Toolbook

ชุดโปรแกรม Multimedia Toolbook CBT edition (CBT: Computer Based Training) มีลักษณะเช่นเดียวกับชุดโปรแกรม Multimedia Toolbook แต่ได้พัฒนาคำสั่งที่ใช้สำหรับการสร้างแบบฝึกหัด การสร้างคำถามตอบ เหมาะสำหรับการสร้างบทเรียนช่วยสอนที่มีแบบฝึกหัด

จะเห็นได้ว่าถ้าต้องการสร้างโปรแกรมเฉพาะงานเช่นโปรแกรมระบบฐานข้อมูล โปรแกรม Simulation ทางคณิตศาสตร์ อาจใช้ชุดโปรแกรม Toolbook ก็น่าจะเพียงพอแล้ว ถ้าผู้ใช้มีความต้องการใช้เสียงและภาพเคลื่อนไหว ก็อาจจะใช้ Multimedia Toolbook แทน แต่นั่นมิได้หมายความว่า Toolbook ชุดธรรมดาไม่สามารถทำภาพเคลื่อนไหวมิได้ ถ้าจะทำจริงๆแล้วย่อมทำได้ แต่ต้องอาศัยความรู้เรื่องการเขียนคำสั่งมาชดเชย (ซึ่งอาจจะเป็นจุดนี้ที่ทำให้ผู้ใช้ทั่วไปคิดว่ายากเมื่อเทียบกับโปรแกรมอื่นๆที่คล้ายกัน) ถ้าเป็น Multimedia Toolbook แล้วเพียงแค่เลือกเมนูก็จะสามารถใช้คำสั่งเหล่านี้ได้อย่างง่ายดาย ถ้าต้องการใช้ความสามารถในเรื่องของคำถาม-ตอบแล้ว Multimedia Toolbook CBT Edition สามารถช่วยทำให้งานเสร็จเร็วขึ้นกว่าเดิม

เมื่อเริ่มใช้โปรแกรม Toolbook ใหม่ๆจะมีความรู้สึกว่ายาก เพราะตัวโปรแกรมเองแม้ว่าจะเป็นโปรแกรมสำเร็จรูปแต่ก็ต้องเขียนคำสั่งควบคุมการทำงาน สำหรับในเวอร์ชั่นตั้งแต่ 3.0 ขึ้นไปจะมีเครื่องมือช่วยเขียนคำสั่งมากมาย แต่ถ้าผู้ใช้ไม่เข้าใจหลักการทำงานก็ย่อมทำให้เกิดความสับสนได้

หลักการทำงานของ Toolbook

มีผู้ใช้หลายท่านกล่าวว่า โปรแกรม Toolbook ใช้ยาก เมื่อเทียบกับโปรแกรมประเภทเดียวกัน ซึ่งอันที่จริงถ้าผู้ใช้เข้าใจหลักการทำงานของโปรแกรม Toolbook แล้วจะบอกว่าการใช้ Toolbook ง่ายมาก และยังสามารถพัฒนางานของตนให้มีความยืดหยุ่นมากกว่าโปรแกรมประเภทเดียวกัน อีกทั้งไฟล์ที่สร้างยังมีขนาดเล็ก ดังนั้นก่อนที่จะลงมือใช้ Toolbook จึงควรเข้าใจหลักการต่อไปนี้

- หลักการเคลื่อนไหว/การกระทำ
- Visual Programming
- แสดงทีละหน้า/เฟรม
- ลำดับการทำงาน

หลักการเคลื่อนไหว/การกระทำ

ในโปรแกรมที่ใช้ภายใต้ Windows จะต้องใช้หลักการ Event and driven หรือที่เรียกว่า หลักการเคลื่อนไหว/การกระทำ นั่นก็คือโปรแกรมจะตอบสนองต่อการเคลื่อนไหว/การกระทำ (ยกเว้นถ้าผู้ใช้เขียนคำสั่งกำหนดไว้) ถ้าผู้ใช้หยุดนิ่งโปรแกรม Toolbook ก็จะไม่ตอบสนอง ในทางตรงกันข้ามถ้าผู้ใช้เคลื่อนเม้าส์ไปยังส่วนที่กำหนดโปรแกรมก็จะมีการตอบสนองต่อเม้าส์ทันที

Visual Programing

การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ 70-80% ของงานจะอยู่ที่การแสดงผลบนหน้าจอและ Output การเขียนโปรแกรมแบบเดิมจึงเสียเวลาไปกับการตกแต่งหน้าจอ หลักการของ Visual Programming จะช่วยลดงานเขียนคำสั่งในส่วนนี้ กล่าวคือจะเขียนคำสั่งก็เฉพาะส่วนที่จำเป็นจริงๆ เท่านั้น ในส่วนของหน้าจอจะใช้เครื่องมือที่มากับโปรแกรมคล้ายๆกับเครื่องมือวาดรูปใน PaintBrush วาดเฉพาะหน้าจอในส่วนที่ต้องการโดยตรง หลักการนี้บริษัท Asymetrix นำมาใช้บน Windows ก่อน ภายหลังไมโครซอร์ฟจึงพัฒนาโปรแกรม Visual Basic ตามมาในภายหลัง

แสดงทีละหน้า/เฟรม

โปรแกรม Toolbook จะประกอบจากภาพกราฟฟิกส์ ข้อมูล และอื่นๆ ขึ้นเป็นหน้า และจากหน้าหลายๆหน้าจะรวมเป็นไฟล์ คล้ายกับหนังสือที่ประกอบจากหลายๆหน้าเป็นหัวข้อ จากหลายๆหัวข้อเป็นบท จากหลายๆบทรวมกันเป็นภาค และเป็นหนังสือในที่สุด ดังนั้นการทำงานของ Toolbook

จึงสะดวกต่อการสร้างบทเรียนด้วยคอมพิวเตอร์ที่แสดงข้อมูลทีละหน้า เนื่องจากโครงสร้างพื้นฐานของ Toolbook สอดคล้องกับลักษณะของการสร้างบทเรียนช่วยสอน

ในหนึ่งหน้าของโปรแกรม Toolbook จะมีองค์ประกอบของตัวหนังสือ ของลายเส้นกราฟฟิกส์ที่จำเป็นตามแต่ผู้ออกแบบจะกำหนด ไม่จำกัดจำนวน ซึ่งองค์ประกอบดังกล่าวจะสร้างจากเครื่องมือส่วนใหญ่ใน Tool platte

องค์ประกอบของหน้าใน Toolbook จะแบ่งการทำงานออกเป็น Book ซึ่งในแต่ละ Book จะประกอบไปด้วย Background, Page, Record Field, Field, Button, Combobox, OLE, Stage, Hotword, Graphies โดยที่แต่ละ Page อาจจะใช้ Background ร่วมกัน และในแต่ละ Page ก็อาจจะประกอบไปด้วย Record Field, Field, Button, Hotword, OLE และอื่นๆตามที่ผู้ใช้ออกแบบ อย่างละไม่จำกัดจำนวน เช่นเดียวกับ Background ที่ผู้ออกแบบสามารถจะใช้ได้ตามต้องการ

ลำดับการทำงาน

ในภาษา RPG จะมีวงรอบของการทำงานเพื่อกำหนดว่าช่วงใดจะเป็นการอ่านข้อมูลเข้า ช่วงใดจะคำนวณ ถ้าผู้เขียนคำสั่งไม่สามารถเข้าใจหลักดังกล่าวได้ ก็จะเขียนคำสั่งภาษา RPG ได้อย่างไม่มีประสิทธิภาพ ในทำนองเดียวกันลำดับการทำงานใน Toolbook ก็เช่นเดียวกัน ถ้าผู้ใช้ไม่เข้าใจลำดับการทำงานก็จะเขียนคำสั่งหรือสร้างโปรแกรมได้เพียงผิวเผินเท่านั้น

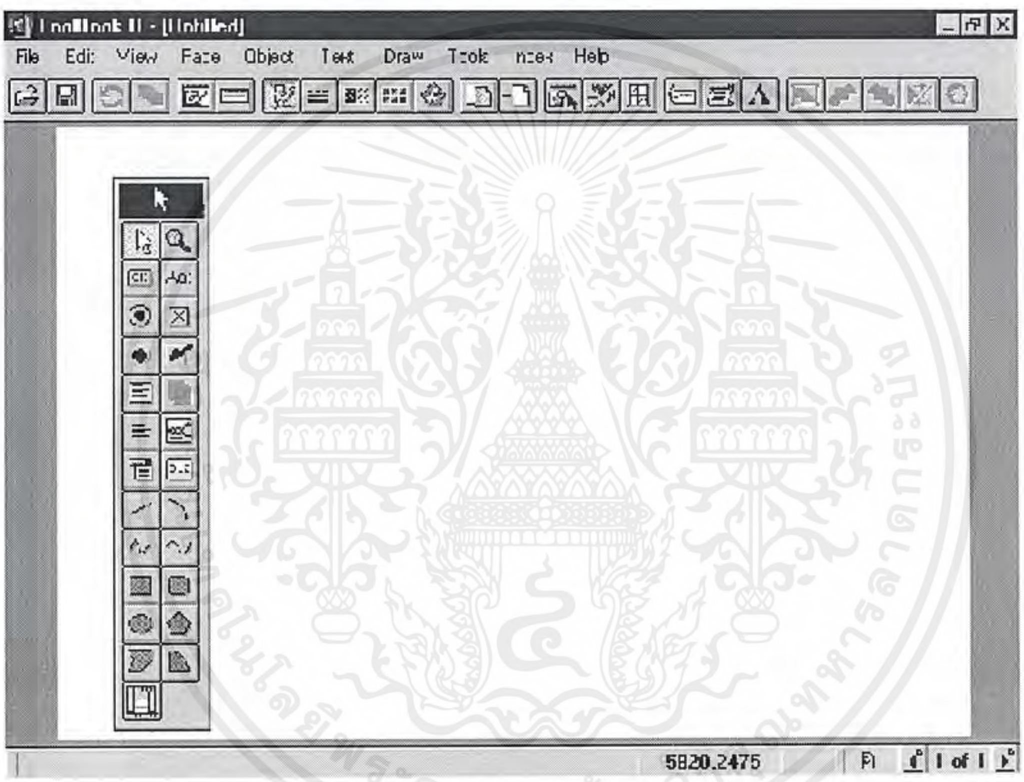
หลักการทำงานของ Toolbook จะถูกกำหนดโดยชุดของคำสั่งที่เรียกว่า สคริป (Script) ซึ่งอาจซ่อนไว้ที่ส่วนใดๆของ Toolbook ก็ได้ โปรแกรม Toolbook จะทำการประมวลผลเมื่อผู้ใช้เคลื่อนเม้าส์มาที่ Object (Object : ปุ่ม Hotword, Field และอื่นๆ) แล้วกดคลิกส์ที่เม้าส์ โปรแกรมก็จะส่งสัญญาณจาก Object นั้นๆไปสู่ Group และจาก Group ไปสู่ Page และจาก Page ไปสู่ Background จนกระทั่งไปถึง ตัวโปรแกรม Toolbook System

ในกรณีที่ผู้ใช้สร้าง Object ไว้ที่ Background เมื่อ Object ถูกกระทำก็จะส่งสัญญาณไปสู่ Book แล้วส่งต่อไปจนกระทั่งถึง Toolbook System

ตั้งแต่ Toolbook เวอร์ชั่น 3.0 ขึ้นไป จะมีส่วนของ Viewer ซึ่งเปรียบเสมือนหน้าต่างที่ผู้ใช้มองผ่าน ดังนั้น ถ้าต้องการให้ผู้ใช้มองภาพของ Toolbook ที่ปรากฏบนจอภาพอย่างไร (มีเมนูหรือไม่มี ต้องการตัดบางคำสั่งของเมนูออกไปเป็นต้น) ผู้ใช้สามารถกำหนดได้ที่นี่

โหมดผู้แต่งและผู้เรียน (Author and Reader Mode)

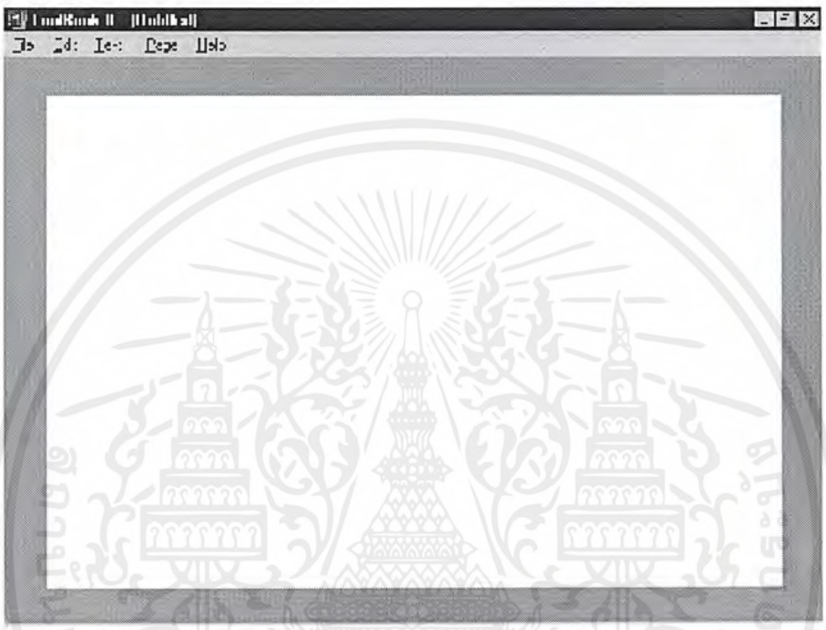
โหมดในโปรแกรม Toolbook มีอยู่ด้วยกัน 2 โหมดคือ โหมดผู้แต่ง (Author Mode) และโหมดผู้เรียนหรือผู้อ่าน (Reader Mode) ปกติแล้วผู้แต่งหรือผู้สร้างจะใช้โปรแกรม Toolbook สร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน งาน Presentation หรือแม้แต่งานฐานข้อมูล โดยเมื่อเข้าไปในโปรแกรม Toolbook ก็จะอยู่ที่โหมดผู้แต่ง ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงลักษณะของโหมดผู้แต่ง

ในโหมดผู้แต่งจะมีเครื่องมือช่วยในการสร้างงานที่ต้องการ ไม่ว่าจะเป็นงานประเภท CAI งาน Multimedia หรืองานอื่นๆ นอกจากนี้ยังมีเครื่องมือที่ช่วยในการวาดรูป พิมพ์ข้อความ

ส่วนในโหมดของผู้เรียนก็มีไว้สำหรับอ่านหรือเรียนได้อย่างเดียว มิสามารถแก้ไขข้อความได้ (ถ้ามิได้สั่งหรือกำหนดให้สามารถแก้ไขข้อมูลได้) ลักษณะของการแสดงผลก็จะปรากฏดังรูปที่ 2 ซึ่งจะมีเมนู File Edit Text Page และ Help



รูปที่ 2 แสดงลักษณะของโหมดผู้เรียน

บรรณานุกรม

1. ธวัชชัย งามสันติวงศ์ , ***มัลติมีเดีย Toolbook หลักการพัฒนางานคอมพิวเตอร์ระบบมัลติมีเดีย*** , กรุงเทพฯ : 21 เซ็นจูรี่ , 2540.
2. มงคล ทองสงคราม , ***ตัวอย่างและแบบฝึกหัดแคลคูลัส***, บริษัท รามาการพิมพ์ จำกัด , 2536.
3. สมบัติ เครือทอง , ***คู่มือการใช้โปรแกรม Multimedia Toolbook 4.0 สำหรับ Windows*** , กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น , 2540.
4. สุรวิทย์ ตันเต่งผล และ อาจารย์ อนุสรณ์ ชนวีระยุทธ , ***แคลคูลัส 1***, โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2537.
5. C.H.Edwards, Jr AND David E Penny, *Calculus With Analytic Geomatry* (4 th ed.). New Jersey : Prentice Hall International, 1994.
6. George B. Thomas, Jr. and Ross L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry* (8 th ed.). Singapore : Addision – Wesley Publishing Company , 1992.