โปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการเขียนกราฟ

PROGRAM FOR DIFFERENTIATION OF FUNCTION AND DRAWING GRAPH

วัลลภา ศรีสวกานต์ย์
ดลินธา แก้วโกมลมาลย์
สุพจน์ เฉลิมสุขศรี

ปัญหานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2544

PROGRAM FOR DIFFERENTIATION OF FUNCTION AND DRAWING GRAPH

WANLAPA SRISAWAKAAN
DALINTHA KAEWKOMONMAN
SUPOT CHLOEMSUKSRI

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2001

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการเขียนกราฟ PROGRAM FOR DIFFERENTIATION OF FUNCTION AND DRAWING GRAPH
ชื่อนักศึกษา	นางสาววัลลภา ศรีสวกานตย์ 41051045 นางสาวดลินธา แก้วโกมลมาลย์ 41051052 นายสุพจน์ เฉลิมสุขศรี 41051053
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2544

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์กฤษฎา ไตรสุรัตน์	
กรรมการ	อาจารย์พรชัย ชัยสนิท	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล	

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการเขียนกราฟ
ชื่อนักศึกษา	นางสาววัลลภา ศรีสวกานตย์ 41051045
	นางสาวดลินธา แก้วโกมลมาลย์ 41051052
	นายสุพจน์ เฉลิมสุขศรี 41051053
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2544
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันการศึกษาเรื่องการหาอนุพันธ์และการเขียนกราฟยังคงเป็นเรื่องที่ซับซ้อนและยากที่จะเข้าใจสำหรับผู้ที่ขาดความชำนาญ

ดังนั้นทางผู้จัดทำจึงได้ทำการเสนอโปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการเขียนกราฟขึ้นมา เพื่อให้ผู้ที่สนใจศึกษามีความเข้าใจในวิชาแคลคูลัสมากยิ่งขึ้น ซึ่งในโปรแกรมนี้ได้พัฒนาขึ้นมาเพื่อการหาอนุพันธ์ และการเขียนกราฟหลากหลายฟังก์ชัน อาทิ ฟังก์ชันพหุนาม การคูณกันของฟังก์ชันพหุนาม การหารกันของฟังก์ชันพหุนาม การซ้อนกันของฟังก์ชันลอการิทึมกับฟังก์ชันพหุนาม และการซ้อนกันของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลกับฟังก์ชันพหุนาม

ปัญหาพิเศษนี้เราได้นำคอมพิวเตอร์เข้ามาใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การเขียนกราฟ และยังทำให้ผู้ที่สนใจใช้งานได้อย่างสะดวกและมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

Special Project Title	Program for Differentiation of Function and Drawing Graph
Students	Miss Wanlapa Srisawakaan 41051045
	Miss Dalintha Kaewkomonman 41051052
	Mr. Supot Chloemsuksri 41051053
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2001
Special Project Advisor	Associate Professor Pakkinee Chitsakul

ABSTRACT

In the present, the education that concerns about the differentiation of function and drawing graph which complicate for the person who is not expert.

So we offer a program for differentiation of function and drawing graph for the interested person that can understand with the Calculus clearly. This program is development for differentiation of function and drawing graph such as Polynomials, Multiplication of Polynomials, Division of Polynomials, Logarithmic Functions, Exponential Functions.

In this project, we bring the computer to help for managing can be differential function , drawing graph and will make us so convenience and very efficacy .

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องโปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการเขียนกราฟสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์อุบลวรรณา เงินวิจิตร และรองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และอำนวยความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณ เพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2545

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วิชาคณิตศาสตร์ จัดว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญของสาขาวิชาต่างๆ สำหรับวิชาแคลคูลัสก็จัดเป็นหนึ่งในวิชานี้ด้วยเช่นกัน ซึ่งการศึกษาในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยการคำนวณ อาจทำให้นักเรียนและนักศึกษาไม่สามารถมองเห็นแนวโน้มของกราฟที่ถูกต้อง หรือในบางครั้งอาจวิเคราะห์คำนวณผิดพลาด ประกอบกับในปัจจุบันได้มีการนำเทคโนโลยีทางคอมพิวเตอร์เข้ามาประยุกต์ใช้ในเรื่องต่างๆกันมากขึ้น เพื่อเพิ่มความสะดวกรวดเร็วและความถูกต้องแม่นยำ ดังนั้นจึงได้จัดทำโปรแกรมการหาอนุพันธ์และการเขียนกราฟขึ้นมา เพื่อให้นักเรียนและนักศึกษาที่มีความสนใจที่จะศึกษาในเรื่องนี้มีความเข้าใจมากยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

เพื่อให้นักเรียนและนักศึกษาเกิดความเข้าใจในการหาอนุพันธ์และการเขียนกราฟของฟังก์ชันโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1. สามารถรับสมการของฟังก์ชันได้หนึ่งตัวแปร และรับจำนวนพจน์ของฟังก์ชันได้ไม่เกิน 100 พจน์

2. สามารถรับสมการที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันในแบบต่างๆได้ ดังนี้

2.1 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ โดยที่ a_i เป็นจำนวนจริง เมื่อ i = 0,1,2, ... ,n เรียกว่า ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

2.2 การคูณกันของฟังก์ชันพหุนาม

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)\ (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)$$

2.3 การหารกันของฟังก์ชันพหุนาม

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) / (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)$$

2.4 การซ้อนกันของฟังก์ชันลอการิทึมกับฟังก์ชันพหุนาม

2.4.1 $\log(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$

2.4.2 $\ln(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$

2.5 การซ้อนกันของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลกับฟังก์ชันพหุนาม

$e^{(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)}$

3. การรับค่าเลขยกกำลังจะรับได้เฉพาะจำนวนเต็มบวกเท่านั้น

1.4 ขั้นตอนการศึกษา

1. กำหนดขอบเขตในเรื่องของการหาอนุพันธ์และการเขียนกราฟของฟังก์ชันที่ต้องการศึกษา
2. ค้นคว้าและรวบรวมเนื้อหาที่เกี่ยวข้องตามขอบเขตที่ได้กำหนดไว้ในขั้นต้น
3. ศึกษาทฤษฎีและเนื้อหาที่ได้รวบรวมมา
4. ทำการออกแบบและเขียนโปรแกรมโดยใช้เนื้อหาที่ได้ศึกษามาแล้ว เพื่อที่จะแสดงอนุพันธ์และกราฟของฟังก์ชัน
5. ทดสอบความถูกต้องการทำงานของโปรแกรม
6. สรุป ประเมินผลและจัดทำข้อเสนอแนะ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

นักเรียนและนักศึกษามีความเข้าใจในเรื่องของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและลักษณะกราฟได้อย่างถูกต้อง อันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการประยุกต์ใช้ในงานทางวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

บทที่2
ทฤษฎีบทและหลักการที่เกี่ยวข้อง

2.1 ฟังก์ชัน

ให้ A และ B เป็นเซต 2 เซตใดๆแล้ว ฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่งเขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$ คือ เซตของคู่อันดับใน $A \times B$ ซึ่งมีลักษณะสมบัติว่า ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

โดยทั่วไป $(x, y) \in f$ แล้วจะเขียนแทนด้วย $y = f(x)$ เรียก y ว่าค่าของฟังก์ชัน f ที่ x และค่าของ y นี้เปลี่ยนไปตามค่าของ x จึงเรียก x ว่า ตัวแปรอิสระ (Independent variable) และเรียก y ว่าตัวแปรตาม (Dependent variable)

2.2 ชนิดของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันสามารถแบ่งได้เป็น 2 ชนิดใหญ่ๆคือ

2.2.1 ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function)

ฟังก์ชันพีชคณิต ได้แก่ฟังก์ชันซึ่งเขียนอยู่ในรูปของตัวแปร และเครื่องหมายทางพีชคณิต ได้แก่ บวก ลบ คูณ หาร ยกกำลัง หรือ กรณฑ์ เช่น $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2}x$

หมายเหตุ

ฟังก์ชันพีชคณิตที่อยู่ใน $f(x) = a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ โดยที่ a_i เป็นจำนวนจริงเมื่อ $i = 0,1,2,\ldots\ldots,n$ เรียกว่า ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function)

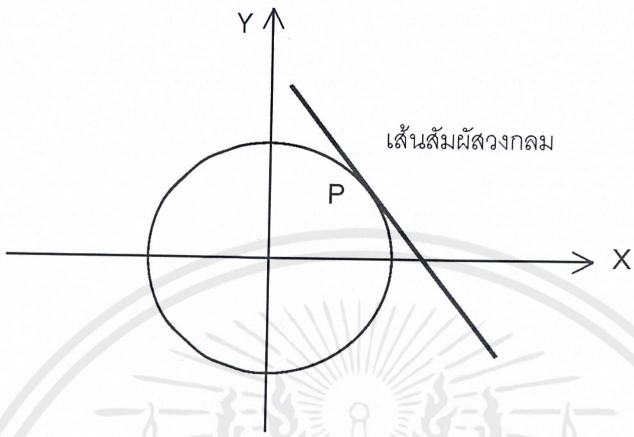
2.2.2 ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental function)

ฟังก์ชันอดิศัย ได้แก่ ฟังก์ชันที่ไม่ได้เป็นฟังก์ชันพีชคณิต เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ,ฟังก์ชันลอการิทึม , ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และ ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก

เช่น $f(x) = \sin x + \cosh x + \ln x + e^x$

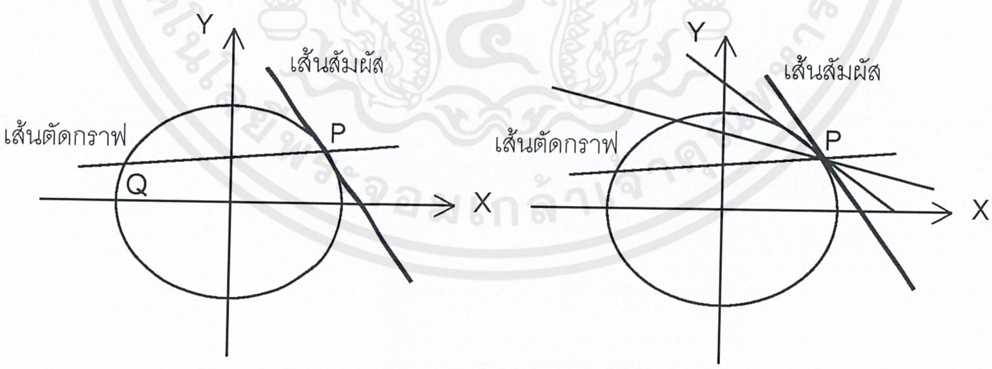
2.3 เส้นสัมผัสกราฟ

นักคณิตศาสตร์ยุคเริ่มแรกได้ศึกษาเส้นสัมผัสกราฟโดยให้แนวคิดเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมว่าคือเส้นที่สัมผัสวงกลมที่จุดเพียงจุดเดียว



รูปที่ 2.1 กราฟแสดงเส้นสัมผัสของวงกลม

แต่จากความคิดนี้ ไม่สามารถใช้หาสมการเส้นสัมผัสได้ จึงได้มีการนำความคิดเกี่ยวกับลิมิตมาใช้ในการอธิบายเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด P ว่าเป็นลิมิตของเส้นตัดกราฟที่ผ่าน P โดยความชันของเส้นกราฟ จะเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัส ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 กราฟแสดงเส้นสัมผัสและเส้นตัดกราฟ

Q เป็นจุดใดๆบนวงกลม PQ เป็นเส้นตัดกราฟ เลื่อนจุด Q ให้เข้าใกล้ P ความชันของเส้น PQ จะเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ และจะใช้แนวความคิดนี้ ในการหาสมการเส้นสัมผัสกราฟ

สำหรับกรณีทั่วไป ถ้า f เป็นฟังก์ชันใดๆแล้ว ความชันของเส้นตัดกราฟซึ่งผ่าน $(a, f(a))$ และจุดใดๆ $(x, f(x))$ บนกราฟ f คือ

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ในกรณีที่ลิมิตของ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ f ที่ $(a, f(a))$ คือ เส้นตรงที่ผ่าน $(a, f(a))$ ที่มีความชัน

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

นิยาม ให้ a เป็นจำนวนหนึ่งในโดเมนของฟังก์ชัน f ถ้า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้ เรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ $f'(a)$ ของ f ที่ a และเขียนแทนด้วย

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้ จะกล่าวว่า f มีอนุพันธ์ที่ a หรือ f หาอนุพันธ์ได้ที่ a หรือ $f'(a)$ หาค่าได้ ถ้า $f'(a)$ หาค่าได้แล้ว สัญลักษณ์ x ในนิยาม อาจแทนได้ด้วยตัวอักษรตัวอื่นๆ เช่น

$$f'(a) = \lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

จากนิยามความชันของเส้นสัมผัสกราฟ f ที่ $(a, f(a))$ คือ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ดังนั้น $f'(a)$ แทนความชันของเส้นสัมผัสกราฟ f ที่ $(a, f(a))$ สมการเส้นสัมผัสกราฟ คือ

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

รูปทั่วไปของอนุพันธ์ที่ทุกๆค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ คือ

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

เรียก f' ว่า อนุพันธ์ของ f

ถ้าแทน t ด้วย $x + h$ จะได้ $t - x = h$ เมื่อ $t \to x$ แล้ว $h \to 0$ จะได้

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ คือ

$$m_x = f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

ให้ $t = x + \Delta x$ ถ้า $t \to x$ แล้ว $\Delta x \to 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

หมายเหตุ

(i) การเขียนสัญลักษณ์แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับ x เขียนได้หลายแบบ เช่น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = y' = D_x y$$

(ii) $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \frac{dy}{dx}$ ถ้า $\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx} = \varepsilon$ แล้ว $\Delta y = (\frac{dy}{dx} \times \Delta x) + (\varepsilon \times \Delta x)$

(iii) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เป็นค่าเฉลี่ยอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ส่วน $\frac{dy}{dx}$ เป็นอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง

2.5 ทฤษฎีบทของการหาค่าอนุพันธ์

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า $f(x) = c$ และ c เป็นค่าคงที่ แล้ว $f'(x) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า $f(x) = x^n$ และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้าอนุพันธ์ $f'(x)$ หาได้ และ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $f(x) = u(x) \pm v(x)$ และถ้า $u'(x)$ และ $v'(x)$ หาได้แล้ว

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[f(x) \times g(x)] = [f(x) \times g'(x)] + [g(x) \times f'(x)]$$

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และ $g(x) \neq 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{[g(x) \times f'(x)] - [f(x) \times g'(x)]}{[g(x)]^2}$$

ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้า $u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$$

2.6 การหาอนุพันธ์อันดับสูง

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

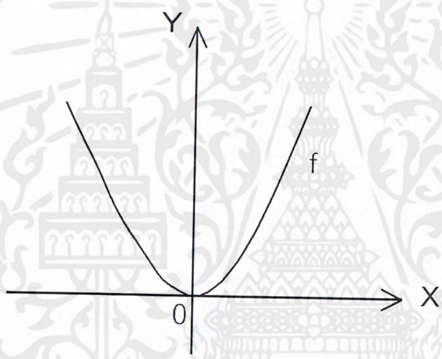
อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ y คือ $y' = \frac{dy}{dx}$

อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ y คือ $y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ y คือ $y''' = \frac{d}{dx}y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ y คือ $y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)}$,เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

2.7 ฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและฟังก์ชันลดลง



รูปที่ 2.3 กราฟของฟังก์ชัน f

จากรูปที่ 2.3 ทางซ้ายของแกน y กราฟของฟังก์ชัน f จะลดลง ในขณะที่ทางขวาของแกน y กราฟของ f เพิ่มขึ้น กล่าวได้ว่า f ลดลงบน $(-\infty,0]$ และเพิ่มขึ้นบน $[0,\infty)$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I แล้ว f จะกล่าวได้ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น (Increasing Function) บน I ถ้า $f(x) < f(z)$ เมื่อ x และ z อยู่ใน I โดยที่ $x < z$ และ f จะเป็นฟังก์ชันลด (Decreasing Function) บน I ถ้า $f(x) > f(z)$ เมื่อ x และ z อยู่ใน I และ $x < z$

ถ้า $x < z$ และ $f(x) > f(z)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง I ดังนั้น $z - x$ และ $f(x) - f(z)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้บน I แล้วสำหรับ x ใดๆใน I

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \geq 0$$

สรุปได้ว่า ถ้า f หาอนุพันธ์ได้และเพิ่มขึ้นบน I แล้ว $f'(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ x ใน I

ถ้า $x < z$ และ $f(x) > f(z)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง I ดังนั้น $x - z$ และ $f(x) - f(z)$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้บน I แล้วสำหรับ x ใดๆใน I

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \leq 0$$

สรุปได้ว่า ถ้า f หาอนุพันธ์ได้และลดลงบน I แล้ว $f'(x) \leq 0$ สำหรับทุก x ใน I

2.8 การประมาณค่า

จากนิยามของอนุพันธ์

$$f'(a) \quad = \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

เมื่อ $x \to a$ แล้ว $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \to f'(a)$

หรือ $f'(a) \quad \approx \quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

จัดสมการใหม่จะได้

$$f(x) \quad \approx \quad f(a) + f'(a)(x - a)$$

จากสมการเส้นสัมผัสกราฟ f ที่ $(a, f(a))$ คือ

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

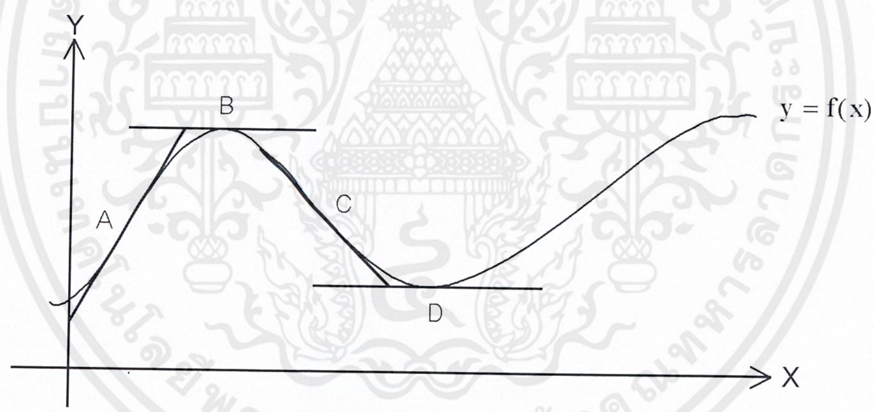
หรือ

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ดังนั้น $y \approx f(x)$ จะเป็นการประมาณค่าของ f ที่ x เมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ a เรียก a ว่าศูนย์กลางการหาค่าประมาณ และเนื่องจากสูตรการประมาณค่าแบบนี้ สมนัยกับสมการเส้นสัมผัสกราฟ จึงเรียกการประมาณเชิงเส้น

2.9 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เครื่องหมายของความชันของเส้นสัมผัสที่จุดต่าง ๆ สำหรับเส้นโค้ง $y = f(x)$ อาจมีทั้งเครื่องหมายบวก ลบ และศูนย์ ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 กราฟแสดงจุดวิกฤต

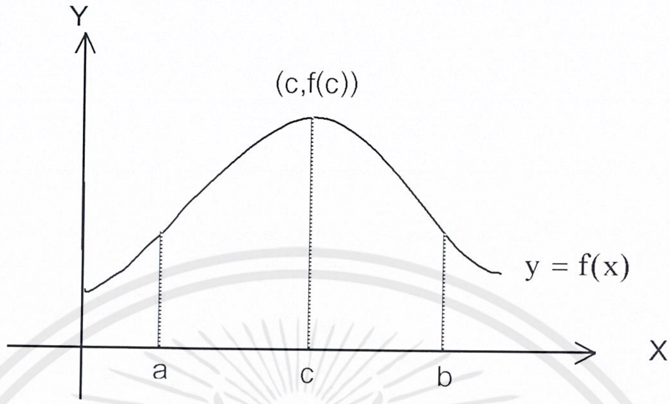
ที่จุด A เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันมากกว่าศูนย์

ที่จุด B เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเท่ากับศูนย์ และลักษณะของเส้นโค้งที่จุดนี้ จะเปลี่ยนจากโค้งขึ้นเป็นโค้งลง เรียกจุดนี้ว่า จุดวิกฤต (Critical point)

ที่จุด C เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันน้อยกว่าศูนย์

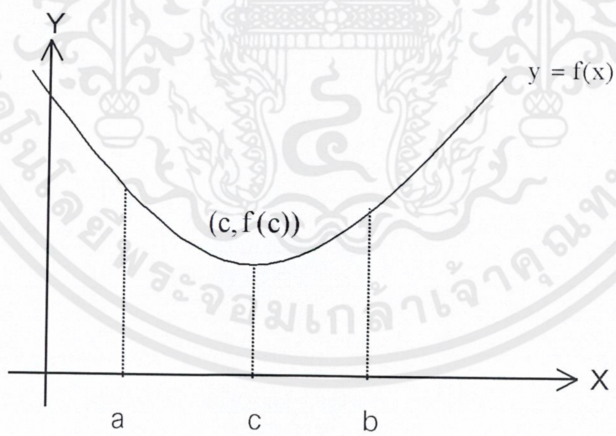
ที่จุด D เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเท่ากับศูนย์ และลักษณะของเส้นโค้งที่จุดนี้ จะเปลี่ยนจากโค้งลงเป็นโค้งขึ้น เรียกจุดนี้ว่า จุดวิกฤต (Critical point)

นิยาม ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (Relative Maximum) ที่จุด $x = c$ ซึ่ง $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $f(c) \geq f(x)$ ทุกค่า x จะเรียก $(c, f(c))$ ว่าเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน โดยมีค่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ในช่วงเปิด (a,b) ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 กราฟแสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์

นิยาม ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (Relative Minimum) ที่จุด $x = c$ ซึ่ง $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x จะเรียก $(c, f(c))$ ว่าเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันโดยมีค่า $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ในช่วงเปิด (a,b) ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 กราฟแสดงจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ทฤษฎีบท ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x \in (a, b)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $y = c$ เมื่อ $c \in (a, b)$ และฟังก์ชันมีอนุพันธ์ที่ $x = c$ จะได้ว่า $f'(x) = 0$

นิยาม จุดวิกฤต (Critical point) ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x = c$ เมื่อ

1. $f'(c) = 0$
2. $f'(c)$ หาค่าไม่ได้
3. $f(c)$ เรียกว่า ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)$

2.10 การทดสอบอนุพันธ์อันดับ 1

ให้ c เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f (กล่าวคือ $f'(x) = 0$ หรือไม่มีจริง) ซึ่ง c อยู่ในช่วง (a, b) และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง (a, b)

1. $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (a, c)$ และ $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (c, b)$

2. $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (a, c)$ และ $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (c, b)$

2.11 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

นิยาม ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $a \le x \le b$ มี $c \in [a, b]$

$f(c)$ จะถูกเรียกว่าเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน ถ้า $f(x) \le f(c)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ และ $f(c)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน ถ้า $f(x) \ge f(c)$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$

การหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์

สำหรับฟังก์ชัน f ที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ มีขั้นตอนการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ดังนี้

1. หาค่าวิกฤตทั้งหมดสำหรับฟังก์ชัน f ในช่วง (a, b)
2. คำนวณค่า f สำหรับค่าวิกฤตทั้งหมดในช่วง (a, b)
3. คำนวณค่า f สำหรับจุดปลาย a และ b ของช่วง $[a, b]$
4. ค่าที่มากที่สุดซึ่งได้จากการคำนวณในข้อ 2 และ 3 จัดเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ และค่าที่น้อยที่สุด จัดเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์สำหรับฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$

2.12 ลอการิทึมธรรมชาติ

จากทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

เช่น $f(t) = t^x \Rightarrow F(x) = \int_a^x t^x dt$

$$= \left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_a^x$$

$$= \frac{x^{x+1}}{x+1} - \frac{a^{x+1}}{x+1}$$

$$= \frac{x^{x+1}}{x+1} + c \quad ; c = \frac{-a^{x+1}}{x+1}$$

$$f(t) = t^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ; n \neq -1$$

พิจารณา $f(t) = t^{-1} = \frac{1}{t}$

จะพบว่า ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $f = \frac{1}{t}$ หาค่าไม่ได้ จึงมีการนิยามเป็นลอการิทึมธรรมชาติ

นิยาม ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติของ x เขียนแสดงโดย $\ln x$ นิยามสำหรับ x ที่มีค่าเป็นบวกโดย

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad ; x > 0$$

อนุพันธ์และการหาปริพันธ์ของ $\ln x$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

จะได้ $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

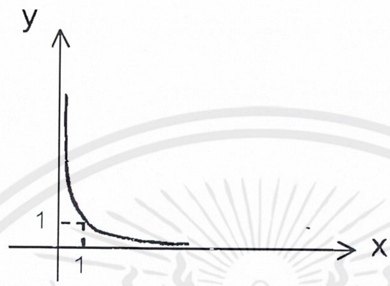
หรือ $d \ln u = \frac{1}{u}du$

และ $$d\ \ln(-u) = \frac{1}{(-u)}d(-u) = \frac{1}{u}du$$

ดังนั้น $$\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c$$

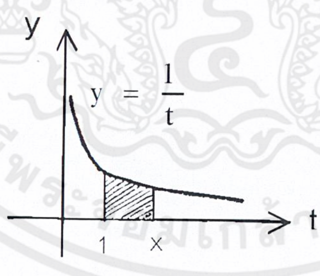
2.12.1 กราฟของ $y = \ln x$

กราฟของ $y = \frac{1}{x}$ แสดงดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 กราฟของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x}$

$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ เป็นพื้นที่บริเวณใต้กราฟ $y = \frac{1}{t}$ เหนือ แกน x บนช่วง $t = 1$ และ $t = x$ ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 กราฟของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{t}$

เนื่องจาก $$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

จะได้ $$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt$$

แต่ $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

ดังนั้น $\ln 1 = 0$

เนื่องจาก $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad ; x > 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln x = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\ln x\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)$$

$$= -1x^{-1-1}\frac{dx}{dx} = \frac{-1}{x^2}$$

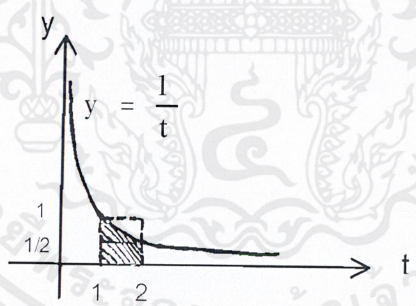
เมื่อ $x > 0$ $\quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} > 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln x = \frac{-1}{x^2} < 0$$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$

โดย $\ln 2$ คือ พื้นที่ของบริเวณใต้กราฟ $y = \frac{1}{t}$ บนช่วง $t = 1$ และ $t = 2$ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 กราฟของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{t}$

พื้นที่บริเวณที่แรเงามีค่ามากกว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแนบใน

(พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแนบใน คือ $1 \times \frac{1}{2} = 0.5$)

พื้นที่บริเวณที่แรเงามีค่าน้อยกว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแนบนอก

(พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแนบนอก คือ $1 \times 1 = 1.0$)

ดังนั้น $0.5 < \ln 2 < 1.0$

ในความเป็นจริง ค่าของ $\ln 2$ สำหรับทศนิยม 5 ตำแหน่ง คือ $\ln 2 \approx 0.69315$

$$\ln 2 \approx 0.69315$$

$$\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2 \approx 1.38630$$

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2 \approx 2.07945$$

$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \ln x \to \infty$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln\left(2^{-1}\right) = -\ln 2 \approx -0.69315$$

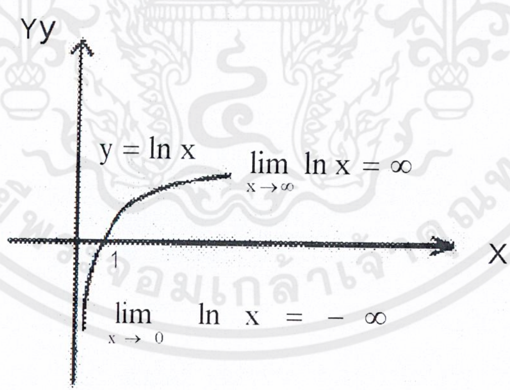
$$\ln \frac{1}{4} = \ln\left(2^{-2}\right) = -2\ln 2 \approx -1.38630$$

$$\ln \frac{1}{8} = \ln\left(2^{-3}\right) = -3\ln 2 \approx -2.07945$$

$$x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad \ln x \to -\infty$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\ln x$ มีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น $\ln x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $(0,\infty)$ อนุพันธ์อันดับที่สองของ $\ln x$ มีค่าน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้น $\ln x$ มีกราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำบนช่วง $(0,\infty)$ กราฟของ $\ln x$ แสดงดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 กราฟของฟังก์ชัน $\ln x$

จาก $\ln 1 = 0$ และ $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$ และจากทฤษฎีบท ค่าระหว่างกลางได้ว่ามีจำนวน(เพียงจำนวนเดียว) e ซึ่ง $\ln e = 1$ โดย $e = 2.71828182845904523536\ldots$

ทฤษฎีบท สำหรับทุกๆ b>0 และ c>0

$$\ln bc = \ln b + \ln c$$

ลักษณะสมบัติของลอการิทึม

1. $\ln b^r = r \ln b \quad ; b > 0$
2. $\ln \frac{1}{b} = -\ln b \quad ; b > 0$
3. $\ln \frac{b}{c} = \ln b - \ln c \quad ; b > 0, c > 0$

2.13 ฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชัน f และ g เป็นขบวนการที่ตรงกันข้ามในทางคณิตศาสตร์สองฟังก์ชัน f และ g ตรงกันข้ามกัน เมื่อ

$$f(x) = y \text{ ก็ต่อเมื่อ } g(y) = x$$

และจะใช้คำว่า"ผกผัน" แทนความสัมพันธ์นี้

นิยาม f เป็นฟังก์ชันแล้ว f มีฟังก์ชันผกผันให้เป็นฟังก์ชัน g โดเมนของ g คือเรนจ์ของ f ซึ่ง

$$f(x) = y \text{ ก็ต่อเมื่อ } g(y) = x$$

สำหรับทุกค่าของ x ในโดเมนของ f และทุก y ในเรนจ์ของ f ฟังก์ชันผกผันของ f จะแทนด้วย f^{-1} ดังนั้น

$$f(x) = y \text{ ก็ต่อเมื่อ } f^{-1}(y) = x$$

ทฤษฎีบท ให้ f มีอินเวิร์สแล้ว f และ f^{-1} มีลักษณะสมบัติดังต่อไปนี้

1. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
2. $f^{-1}(f(x)) = x$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f
3. $f^{-1}(f(y)) = y$ สำหรับทุก y ในโดเมนของ f

ทฤษฎีบท f ต่อเนื่องบนช่วง I และค่าของ f จากแต่ละจุดใน I กำหนดช่วง J ถ้า f มีอินเวิร์สแล้ว f^{-1} ต่อเนื่องบน J

ทฤษฎีบท f มีฟังก์ชันผกผัน , f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด I ซึ่ง a อยู่ใน I , $f'(a)$ หาค่าได้ โดย $f'(a) \neq 0$ และ $f(a) = c$ แล้ว f^{-1} หาค่าได้ และ

$$\left(f^{-1}\right)'(c) = \frac{1}{f'(a)}$$

จาก $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ เมื่อ $t > 0$

และ $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} > 0$ สำหรับทุกค่าของ $x > 0$

ดังนั้น $\ln x$ เพิ่มขึ้นบน $(0, \infty)$ จึงมีอินเวิร์ส เรียก อินเวิร์ส ของลอการิทึมว่า เอกซ์โปเนนเชียล

2.14 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม

จาก $(u^v)^w = u^{vw}$

จาก $a = e^{\ln a}$ เมื่อ a เป็นจำนวนบวกใดๆ

ได้ว่า $a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใดๆ

เรียก a ว่า ฐาน เรียก r ว่า เลขชี้กำลัง

$$a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1$$

$$a^1 = e^{1 \ln a} = e^{\ln a} = a$$

นั่นคือ $a^0 = 1$ และ $a^1 = a$

จาก $a^r = e^{r \ln a}$

โดยการใส่ลอการิทึมธรรมชาติทั้งสองข้าง

$$\ln a^r = \ln e^{r \ln a}$$

จาก $\ln e^a = a$ ดังนั้น $\ln e^{r \ln a} = r \ln a$

ดังนั้น $\ln a^r = r \ln a$

ทฤษฎีบท ให้ a>0 และให้ b และ c เป็นจำนวนใดๆ แล้วสูตรต่อไปนี้จะเป็นจริง

1. $a^{b+c} = a^b a^c$
2. $a^{-b} = \frac{1}{a}b$
3. $(a^b)^c = a^{bc}$

จากกฎทั่วไปของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลได้ว่า

$$\pi^2 \pi^{-4} = \pi^{2-4} = \pi^{-2}$$

$$\pi^{\sqrt{2}} \pi^{\sqrt{5}} = \pi^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$

2.15 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

นิยาม ฟังก์ชัน $y = \exp(x)$ [อ่านว่า ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลของ x] เป็นอินเวิร์สของ $y = \ln x$

จาก $x = \ln y$ เมื่อ $y > 0$

แล้ว $y = \ln^{-1} x = \exp(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนใดๆ

เนื่องจาก $\exp(x)$ และ $\ln x$ เป็นอินเวิร์สซึ่งกันและกัน ดังนั้น

$\exp(\ln x) = x$ เมื่อ $x > 0$

$\ln(\exp\ x) = x$ สำหรับทุก x

นิยาม ค่าของ x ซึ่ง $\ln x = 1$ เขียนแทนด้วย e

ดังนั้น $\ln e = 1$

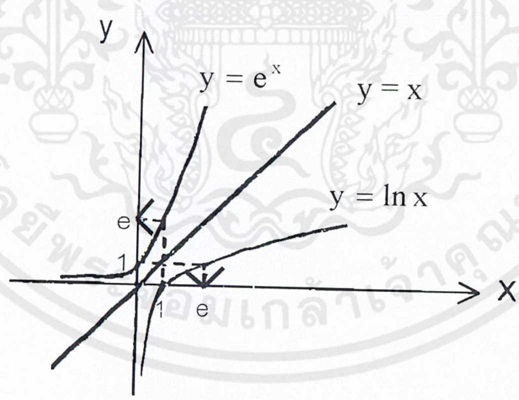
แล้ว $\exp(1) = e$

จะได้ว่า $x = \ln y \Rightarrow y = e^x$

นอกจากนี้ $\ln e^x = x$ สำหรับทุก x

และ $e^{\ln x} = x$ เมื่อ $x > 0$

กราฟของ $y = \ln x$ เปรียบเทียบกับ $y = e^x$ แสดงดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 กราฟของฟังก์ชัน $\mathbf{y = \ln x}$ เปรียบเทียบกับฟังก์ชัน $\mathbf{y = e^x}$

2.15.1 อนุพันธ์ของ e^x

ถ้า $y = e^x$ แล้ว $x = \ln y$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

ดังนั้น $$\frac{de^x}{dy} = e^x\frac{dx}{dx} = e^x$$

แล้ว $$\frac{de^u}{dx} = e^u\frac{du}{dx}$$

หรือ $$d\,e^u = e^u du$$

ทฤษฎีบท สำหรับทุกๆจำนวน b และ c

$$e^{b+c} = e^b e^c$$

2.15.2 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันยกกำลัง

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล a^x คือ ฟังก์ชันที่นิยามโดย $a^x = e^{x\ln a}$ การหาอนุพันธ์ a^x ก็คือ การหาอนุพันธ์ $e^{x\ln a}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}a^x &= \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = \left(e^{x\ln a}\right)\frac{d}{dx}(x\ln a)\\ &= (\ln a)\left(e^{x\ln a}\right)\\ &= (\ln a)a^x\\ \frac{d}{dx}a^x &= (\ln a)a^x\end{aligned}$$

อนุพันธ์ของ a^x มีค่าเหมือนกับ มีค่าคงที่มาคูณกับ a^x

เนื่องจาก $a^x = e^{x\ln a} > 0$ สำหรับทุก x

$\ln a > 0$ เมื่อ $a > 1$

ดังนั้น a^x เพิ่มขึ้น ถ้า $a > 1$ และ a^x ลดลง ถ้า $0 < a < 1$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}a^x &= \frac{d}{dx}(\ln a)a^x = (\ln a)\frac{d}{dx}a^x\\ &= (\ln a)^2 a^x\end{aligned}$$

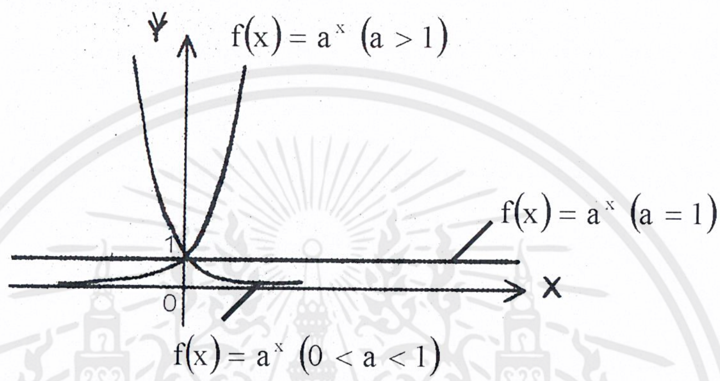
ถ้า $a \neq 1 \quad \Rightarrow$ กราฟของ a^x เป็น เว้าบน บน $(-\infty, \infty)$

ถ้า $a > 1$ แล้ว $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ และ $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ และ $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$

จากข้อมูลทั้งหมดนี้ พบว่ากราฟของ a^x ขึ้นกับค่าของ a

กราฟของ a^x สำหรับแต่ละค่าของ a แสดงดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 กราฟของฟังก์ชัน a^x สำหรับแต่ละค่าของ a

จาก $a^r = e^{r \ln a}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

เรียก a ว่า ฐาน เรียก r ว่า เลขชี้กำลัง

ถ้าฐานมีได้หลายค่าและเลขชี้กำลังเท่ากับ r

ได้ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล x^r นิยามโดย

$$x^r = e^{r \ln x}$$

อนุพันธ์ของ x^r หาได้โดยกฎลูกโซ่ดังนี้

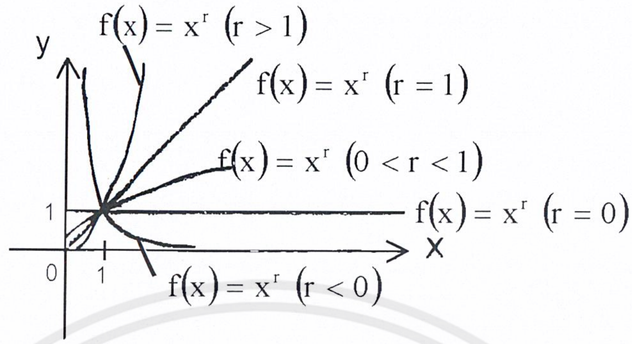
$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{d}{dx}\left(e^{r \ln x}\right) = e^{r \ln x}\left(\frac{r}{x}\right) = \frac{r}{x} x^r = r x^{r-1}$$

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$$

$$\frac{d^2 x^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(r x^{r-1}\right) = r(r-1)x^{r-2}$$

ลักษณะกราฟของ x^r ขึ้นกับค่าของ r

กราฟของ x^r สำหรับแต่ละค่าของ r แสดงดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 กราฟของฟังก์ชัน x^r สำหรับแต่ละค่าของ r

2.16 ลอการิทึมที่มีฐานต่างกัน

$\ln x$ และ e^x เป็นอินเวิร์สฟังก์ชันซึ่งกันและกัน เนื่องจาก a^x เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น เมื่อ $a > 1$ และลดลง เมื่อ $0 < a < 1$

ดังนั้นสำหรับ $a > 0$ และ $a \neq 1$ นั้น a^x มีอินเวิร์สให้เป็น $\log_a x$ เรียกว่า ลอการิทึม ฐาน a

เมื่อ $a = e$ ได้ว่า e^x และ $\log_e x$ เป็นอินเวิร์สซึ่งกันและกัน

ดังนั้น $\ln x = \log_e x$

ถ้า $a = 10$ แล้ว $\log_{10} x = \log x$ เรียกว่า ลอการิทึมสามัญของ x

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ และ } f(f^{-1}(y)) = y$$

a^x และ $\log_a x$ เป็นอินเวิร์สซึ่งกันและกัน

$$a^{\log_a x} = x$$

และ $\log_a a^x = x$

เนื่องจาก $\ln a^r = r \ln a$

จาก $a^{\log_a x} = x$ โดยการใส่ลอการิทึมธรรมชาติทั้งสองข้างได้

$$\ln a^{\log_a x} = \ln x$$

$$(\log_a x)(\ln a) = \ln x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

ทฤษฎีบท สำหรับ $a > 0$ ใดๆ ซึ่ง $a \neq 1$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \text{ สำหรับทุกๆ} x>0$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x\ln a}$$

ทฤษฎีบท ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนบวก แล้ว

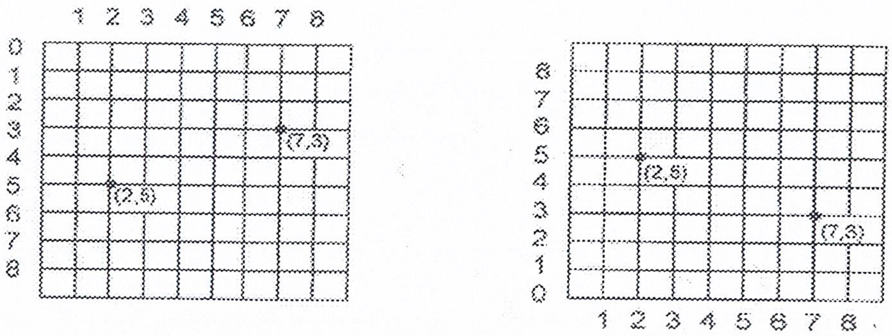
$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

2.17 การสร้างภาพกราฟิกเบื้องต้น

กราฟิกที่คอมพิวเตอร์สร้างขึ้นนั้นจะสร้างขึ้นได้โดยใช้ภาพกราฟิกเบื้องต้นต่าง ๆ ซึ่งได้แก่ จุด (point) ,เส้นตรง (straight line) ,เส้นโค้ง (curves) ,และภาพรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ (geometric figures) เช่น วงกลม ,วงรี ,รูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น นอกจากนี้ยังต้องประกอบด้วยคำสั่งที่เกี่ยวกับการจัดการหน้าจอ เช่น การลบหน้าจอ , การวางภาพที่กำหนดไว้ในตำแหน่งที่ต้องการบนจอภาพ เป็นต้น

2.17.1 การสร้างจุด

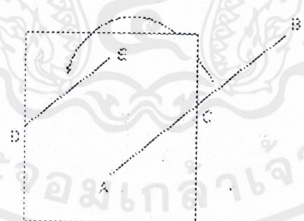
ภาพบนจอภาพแบบแรสเตอร์สแกนเกิดจากจุดสว่างหลายๆจุด ซึ่งจะกำหนดตำแหน่งได้โดยกำหนดจุดในเฟรมบัฟเฟอร์ที่สอดคล้องกับจุดจริงบนจอภาพ ทั้งจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์จะใช้ระบบพิกัดจุด 2 มิติในการอ้างถึงจุดต่างๆโดยมีจุดกำเนิดหรือจุด(0,0) อยู่ที่มุมบนซ้ายของจอภาพดังรูปที่ 2.14 (ก) ซึ่งต่างจากระบบพิกัดที่มักใช้ในการเขียนกราฟ กล่าวคือ จุดกำเนิดอยู่ที่มุมล่างซ้าย และในรูปที่ 2.14 (ข) การอ้างถึงพิกเซลใดพิกเซลหนึ่งจะใช้คู่ลำดับ (x,y) โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์



(ก) (ข)

รูปที่ 2.14 ระบบพิกัดของจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์เทียบกับระบบพิกัด
ที่ใช้ในการเขียนกราฟ

ค่าของจุดพิกัด x และ y จะต้องมีค่าไม่เกินค่าขอบเขตของจอภาพที่ใช้ ถ้ามีการกำหนดค่าเกินขอบเขตจะต้องมีการจัดการอย่างใดอย่างหนึ่งเพื่อกันเหตุการณ์เช่นนี้ ตัวอย่างเช่น ให้จุดที่มีค่าอยู่เกินขอบเขตไม่ว่าจะเป็นขอบเขตบน ล่าง ซ้าย หรือขวา ถูกเปลี่ยนค่าให้เป็นค่าที่ขอบเขต นั่นคือ ภาพที่มีพิกัดเกินขอบเขตจะถูกตัดไปเลย (clipping) อีกวิธีหนึ่งเป็นการให้ค่าที่เกินขอบเขตไป เริ่มจากจุดเริ่มต้นอีกที ซึ่งเรียกว่า ผลวนรอบ (wrap around effect)

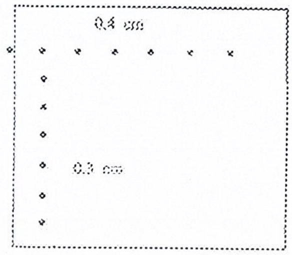


รูปที่ 2.15 ปรากฏการณ์วนรอบ

2.17.2 อัตราส่วนแอสเป็กต์

ถ้าใช้คำสั่งสร้างพิกเซลขึ้นมา 8 พิกเซลลงบนจอภาพทั้งในแนวดิ่งและแนวนอน แล้วลองวัดความยาวของพิกเซลที่ติดต่อกันทั้ง 8 พิกเซลจะพบว่าความยาวในแนวนอนและในแนวดิ่งมีค่าต่างกัน แม้ว่าจะมีจำนวนพิกเซลเท่ากัน อัตราส่วนระหว่างความยาวในแนวนอนกับความยาวในแนวดิ่งนี้เรียกว่า อัตราส่วนแอสเป็กต์ (aspect ratio) ค่านี้เกิดจากการที่ระยะห่างระหว่างพิกเซลในแนวดิ่ง

ของจอภาพนั่นเอง ซึ่งต่อมาในปัจจุบันมีการปรับปรุงให้ระยะห่างระหว่างพิกเซลนี้มีขนาดเท่ากัน ทั้งในแนวนอนและแนวดิ่งจึงทำให้อัตราส่วนแอสเป็กต์มีค่าเป็น 1

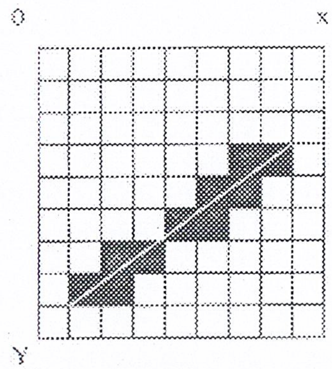


รูปที่ 2.16 อัตราส่วนแอสเป็กต์ซึ่งมีค่าเป็น 1.33

อัตราส่วนนี้มีผลต่อความถูกต้องของภาพที่วาดบนจอภาพ ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความกว้างเท่ากับ 80 พิกเซล สำหรับจอภาพซึ่งมีอัตราส่วนแอสเป็กต์เป็น 4/3 ความยาวจริงในแนวนอนบนจอภาพจะเท่ากับ 0.4*10 = 4 เซนติเมตร (8 พิกเซล = 0.4 เซนติเมตร) และถ้าลากเส้นในแนวดิ่งโดยใช้จำนวนพิกเซลเท่าเดิมคือ 80 พิกเซล ความยาวจริงของเส้นบนจอภาพจะสั้นกว่าเส้นที่อยู่ในแนวนอน นั่นคือจะยาวเพียง 0.3*10 = 3 เซนติเมตร ทำให้ภาพที่ได้ไม่ใช่สี่เหลี่ยมจัตุรัสตามที่ต้องการ การแก้ไขทำได้โดยใช้จำนวนพิกเซลที่มากกว่า 80 พิกเซล ซึ่งจะทำให้ความยาวจริงของเส้นในแนวดิ่งบนจอภาพเท่ากับ 4 เซนติเมตรด้วย จำนวนพิกเซลที่ต้องการคือ 80*4/3 ซึ่งมีค่าประมาณ 107 พิกเซล หมายความว่าในการวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนจอภาพที่มีอัตราส่วนแอสเป็กต์เป็น 4/3 ต้องใช้พิกเซล 80 พิกเซลสำหรับการวาดเส้นในแนวนอนและใช้พิกเซล 107 พิกเซลสำหรับการวาดในแนวดิ่ง จึงจะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ต้องการ

2.17.3 การวาดเส้นตรง

เส้นตรงก็คือพิกเซลที่จัดเรียงเป็นลำดับติดๆกันในแนวตรง สำหรับจอภาพแบบแรสเตอร์สแกน การลากเส้นตรงในแนวเฉียงเราจำเป็นต้องเลือกพิกเซลที่ใกล้กับแนวเส้นที่สุดเพื่อให้ได้เส้นตรงที่ดีที่สุด รูปที่ 2.17 แสดงเส้นที่ลากบนจอภาพแบบแรสเตอร์สแกน ความถูกต้องและคุณภาพของเส้นที่แสดงบนจอภาพจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของจอภาพถ้าเป็นจอภาพที่มีความละเอียดสูงเช่น1024×1024 จุด จะสามารถวาดเส้นได้ตรงและต่อเนื่องมากกว่าจอภาพที่มีความละเอียดต่ำ เส้นที่ปรากฏบนจอภาพที่มีความละเอียดต่ำจะมีช่องว่างระหว่างพิกเซลให้เห็นทำให้เส้นไม่ต่อเนื่องรูปที่ 2.18 จะแสดงภาพเส้นตรงที่ปรากฏบนจอภาพที่มีความละเอียดต่างกัน



รูปที่ 2.17 พิกเซลที่ใช้สำหรับประกอบเป็นเส้นตรง AB

รูปที่ 2.18 เปรียบเทียบภาพเส้นตรงที่ได้จากจอภาพที่มีความละเอียดต่างกัน

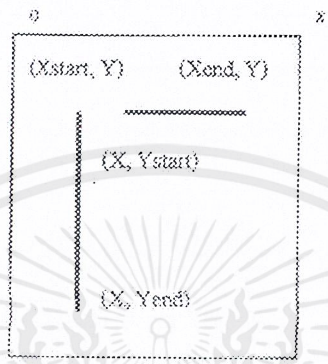
ในระบบกราฟิกที่มีความสามารถสูง การวาดเส้นตรงทำได้โดยทางฮาร์ดแวร์ซึ่งทำให้สามารถวาดเส้นได้อย่างรวดเร็วมาก ส่วนระบบกราฟิกที่มีความสามารถต่ำ ก็จะวาดเส้นโดยใช้ซอฟแวร์ซึ่งวาดได้ช้ากว่ามาก ในการวาดเส้นเรามักต้องเป็นคนกำหนดจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเองแล้วระบบกราฟิกจะวาดเส้นเชื่อมจุดที่เรากำหนดไว้ ในตอนต่อไปนี้เราจะมากล่าวถึงวิธีต่างๆที่ใช้ในการวาดเส้นตรงเชื่อมจุด 2 จุดอย่างคร่าวๆ

เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่ง

เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่งเป็นเส้นที่วาดได้ง่ายที่สุด ถ้าค่าของ x ที่จุดเริ่มต้นน้อยกว่าค่าของ x ที่จุดสิ้นสุด การวาดเส้นแนวนอนทำได้โดยให้ค่าทางแกน y คงที่ แล้วเพิ่มค่าทางแกน x ขึ้นทีละ 1 พิกเซล ดังแสดงในรูปที่ 2.19 เป็นภาพเส้นแนวนอนซึ่งลากจากจุด (Xstart , Y) ไปยัง

(Xend , Y) และ xstart <= Xend แต่ถ้า Xstart > Xend เราก็จะทำกลับกัน กล่าวคือ ให้ค่า y คงที่ แล้วลดค่าทางแกน x ลงทีละ 1 พิกเซล

ส่วนเส้นแนวดิ่งก็สามารถวาดได้โดยให้ค่าทางแกน x คงที่ แล้วเพิ่มค่าทางแกน y ขึ้นทีละ 1 พิกเซล ถ้าลากเส้นจากจุด y ซึ่งมีค่าน้อยไปยัง y ที่มีค่ามากกว่า แต่ถ้าต้องการลากเส้นจากจุด y ลงทีละ 1 พิกเซลในขณะที่ค่าทางแกน x คงที่



รูปที่ 2.19 เส้นแนวนอนและเส้นแนวดิ่ง

เส้นทแยงมุม

การวาดเส้นทแยงมุมซึ่งมีความลาดชันเป็น +1 เราสามารถทำได้โดยการเพิ่มค่าทางแกน x และ y ขึ้นทีละ 1 พิกเซลจากจุดเริ่มต้นซึ่งมีพิกัดน้อยกว่าของจุดสิ้นสุด หรือการลดค่าทางแกน x และ y ลงทีละ 1 พิกเซล ในกรณีกลับกัน สำหรับเส้นทแยงมุมที่มีความลาดชันเป็น –1 สามารถทำได้โดยการเพิ่มค่าทางแกน x และลดค่าทางแกน y ลงทีละ 1 พิกเซลพร้อมๆกัน

เส้นตรงที่มีความลาดชันใด ๆ

การวาดเส้นตรงที่มีความลาดชันเท่าไรก็ได้นั้น มีปัญหาในการสร้างหลายอย่าง เช่น จอภาพแบบแรสเตอร์สแกนสามารถแสดงจุดได้เฉพาะตรงที่เป็นตำแหน่งพิกเซลเท่านั้น ทำให้เส้นตรงที่ไม่ใช่เส้นแนวนอนหรือเส้นแนวดิ่งมีลักษณะเป็นขั้นบันได (staircase effect) กึ่งเส้นตรงเหล่านี้จะแทนเส้นตรงจริงๆได้โดยประมาณเท่านั้น เพราะว่าพิกเซลที่มีอาจไม่อยู่ในตำแหน่งที่ตรงกับจุดบนส่วนของเส้นตรงที่จะสร้างจริงๆ ดังนั้นเราจึงต้องเลือกจุดพิกเซลที่ใกล้กับจุดจริงๆมากที่สุด ปัญหาอีกประการหนึ่งก็คือ การหาพิกเซลที่ใกล้ หรือดีที่สุดนั้นสามารถทำได้หลายวิธี การเลือกวิธีใดในการสร้างเส้นประมาณนี้ขึ้นกับความเร็วในการสร้างเส้นและภาพเส้นที่วาดได้ดูเป็นเส้นตรงมากแค่ไหน เพื่อให้เข้าใจเกณฑ์ในการเลือกวิธีสร้างเส้นตรง ในตอนนี้จะกล่าวถึงวิธีต่างๆที่ใช้ในการสร้างเส้นตรง

1. **วิธีสร้างโดยใช้สมการเส้นตรง** วิธีนี้จะใช้ได้กับสมการเส้นตรง

$$Y = mX + b$$

โดยที่ m คือ ความลาดชัน

b คือ ค่าของจุดที่เส้นตรงตัดแกน Y (จุดที่ค่า X เป็นศูนย์)

วิธีการวาดเริ่มจากเราต้องหาค่าของ m และ b ก่อน จากนั้นเราจะวาดเส้นได้โดยการเพิ่มค่าของX ขึ้นทีละหนึ่งหน่วยจากจุดเริ่มต้น (Xstart , Ystart) จนถึงจุดสิ้นสุด (Xend , Yend) และทุกๆขั้นของการเพิ่มค่า X เราก็จะทำการคำนวณหาค่าของ Y จากสมการ ก็จะได้จุดพิกัด (X ,Y) ค่าของ Y ที่ได้จากการคำนวณมักจะเป็นค่าจำนวนจริงเพราะฉะนั้นจึงต้องมีการปรับให้ค่าจำนวนจริงนี้เป็นค่าจำนวนเต็มก่อน เพื่อใช้เป็นค่าพิกัดได้

วิธีนี้มีปัญหา 2 ประการ คือ ประการแรก ใช้เวลาในการวาดเส้นมาก และประการที่สองคือเส้นซึ่งมีความลาดชันมากกว่า 1 ะวาดได้ไม่ดีเนื่องจากมีช่วงว่างระหว่างเส้นมากเพราะเป็นช่วงที่ค่า X จากจุดเริ่มไปยังจุดสิ้นสุด ซึ่งใช้ในการคำนวณมีจำนวนน้อยเกินไป

2. **วิธี** Simple DDA (simple digital differential analyzer) เป็นวิธีที่ง่ายต่อการเขียนโปรแกรมและสามารถให้เส้นที่ค่อนข้างดี

สมมติว่าเราต้องการจะสร้างเส้นตรงซึ่งลากจากจุดพิกัด (Xstart , Ystart) ไปยังจุดพิกัด (Xend , Yend) ซึ่งมีความลาดชัน m ดังนี้

$$m = \frac{(Yend - Ystart)}{(Xend - Xstart)}$$

พิกัด (X1,Y1) และ (X2,Y2) ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ติดกันและอยู่บนเส้นตรงนี้ อาจนำมาใช้ในการคำนวณหาค่าความลาดชัน m ได้ดังนี้

$$m = \frac{(Y2 - Y1)}{(X2 - X1)}$$

สำหรับค่าสมบูรณ์ของ m น้อยกว่า 1 และ Xstart < Xend เราสร้างเส้นโดยการเพิ่มค่าของ X ตัวก่อน ขึ้น 1 หน่วยจนถึง Xend และคำนวณหาค่าของ Y (ถ้าในกรณีที่ Xstart > Xend ให้สลับค่าจุดปลายทั้งสอง) ดังนั้นสำหรับจุดที่ตามมา

$$X2 = X1 + 1$$

หรือ $X2 - X1 = 1$

แทนค่า $X2 - X1 = 1$ ลงในสมการ $m = \frac{(Y2 - Y1)}{(X2 - X1)}$ จะได้

$$Y2 = Y1 + m$$

จากสมการ Y2 = Y1 + m เราสามารถหาค่า Y ตัวต่อมาได้จากค่า Y ตัวก่อน วิธีการหาค่าจุดต่อมาจากค่าของจุดเดิมเช่นนี้เป็นเทคนิคที่ทำให้สามารถวาดเส้นได้เร็วขึ้น

ถ้าค่าสมบูรณ์ของ m มากกว่า 1 และ Ystart < Yend เราจะสร้างเส้นได้โดยเพิ่มค่าของ Y จนถึง Yend และคำนวณหาค่าของ X (ถ้าในกรณีที่ Ystart > Yend ให้สลับค่าจุดปลายทั้งสอง) ดังนั้น

$$Y2 = Y1 + 1$$

หรือ $Y2 - Y1 = 1$

แทนค่า $Y2 - Y1 = 1$ ลงในสมการ $m = \frac{(Y2 - Y1)}{(X2 - X1)}$ จะได้

$$X2 = X1 + 1/m$$

จากสมการแสดงให้เห็นว่าเราสามารถหาค่า X ตัวต่อมาได้จากค่า X ตัวเก่า

จากสมการคำนวณค่า X หรือ Y ข้างต้น ค่าที่ได้จะเป็นค่าจำนวนจริง ดังนั้นก่อนที่จะนำไปใช้ในการกำหนดจุดพิกเซลจะต้องแปลงให้เป็นจำนวนเต็มก่อน

3. **วิธี** Integer DDA เนื่องจากวิธี Simple DDA มีการคำนวณที่ใช้เวลามาก คือ การบวกเลขทศนิยม ดังนั้นจึงมีการพัฒนาวิธีที่ใช้เวลาน้อยกว่า โดยใช้การคำนวณที่เป็นจำนวนเต็มอย่างเดียวเท่านั้น ซึ่งเรียกว่าเป็นวิธี Integer DDA

หลักการเบื้องต้นของวิธีนี้ก็คือ แทนค่าความลาดชันซึ่งเป็นจำนวนจริงด้วยจำนวนเต็ม แทนที่จะต้องมีการคำนวณเลขทศนิยม

วิธีนี้แบ่งออกเป็น 4 กรณีขึ้นอยู่กับค่าของความลาดชันของเส้น แต่ละกรณีก็จะมีกฎเกณฑ์ของตัวมันเอง ซึ่งจะได้อธิบายแต่ละกรณีไป สำหรับค่า error ที่ใช้ในการอธิบายจะหมายถึง ระยะทางระหว่างจุดที่พล็อตเพื่อสร้างเส้นกับจุดสิ้นสุดของเส้นที่ควรจะเป็นจริงๆ และจุดสิ้นสุดจะต้องอยู่ในลำดับที่เหมาะสมของแต่ละกรณี

- กรณีที่ 1 ค่าความลาดชันระหว่าง 0 ถึง 1 โดยที่ delta_x และ delta_y เป็นค่าบวก :

ถ้าค่าของ error เป็นลบ ให้พล็อตจุดต่อไปทางขวาของจุดเดิมที่เพิ่งจะพล็อตมา โดยเลื่อนไปหนึ่งหน่วย แล้วบวกค่า delta_y เข้ากับค่า error แต่ถ้าค่าของ error เป็นบวก ให้ทำการพล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยและไปทางขวาอีกหนึ่งหน่วยจากจุดเดิม แล้วบวกค่า error ด้วยค่าของ delta_y ลบ delta_x

- กรณีที่ 2 ค่าความลาดชันมากกว่า 1 โดยที่ delta_x และ delta_y เป็นบวก :

ถ้าค่าของ error เป็นลบ ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วย และไปทางขวาอีกหนึ่งหน่วยจากจุดเดิม แล้วบวกค่า error ด้วยค่าของ delta_y ลบ delta_x แต่ถ้าค่าของ error เป็นบวก ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยจากจุดเดิมที่เพิ่งจะพล็อตมา แล้วลบค่า delta_x ออกจากค่า error

- กรณีที่ 3 ค่าความลาดชันระหว่าง –1 ถึง 0 โดยที่ delta_x และ delta_y เป็นลบ :

ถ้าค่าของ error เป็นลบ ให้พล็อตจุดต่อไปทางซ้ายของจุดเดิมที่เพิ่งจะพล็อตมา โดยเลื่อนไปหนึ่งหน่วย แล้วบวกค่า delta_y เข้ากับค่า error แต่ถ้าค่าของ error เป็นบวก ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยและไปทางซ้ายอีกหนึ่งหน่วยจากจุดเดิม แล้วบวกค่า error ด้วยค่าของ delta_x + delta_y

- กรณีที่ 4 ค่าความลาดชันน้อยกว่า –1 โดยที่ delta_x เป็นลบและ delta_y เป็นบวก :

ถ้าค่าของ error เป็นลบ ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยและไปทางซ้ายอีกหนึ่งหน่วยจากจุดเดิม แล้วบวกค่า error ด้วยค่าของ delta_x + delta_y แต่ถ้าค่าของ error เป็นบวก ให้พล็อตจุดต่อไปที่ตำแหน่งสูงขึ้นไปหนึ่งหน่วยจากจุดเดิมที่เพิ่งจะพล็อตมา แล้วบวกค่า delta_x เข้าจากค่า error

ค่า error ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเส้นจะมีค่าเป็น 0 และจะมีค่าเป็น 0 ทุกครั้งที่ตำแหน่งจุดที่คำนวณได้ อยู่บนเส้นที่ควรจะเป็นจริงและแต่ละกรณีข้างต้นจะมีค่าของ error ต่างกัน

รูปที่ 2.17 แสดงภาพของเส้นตรงที่ควรจะเป็นเทียบกับเส้นที่เกิดจากการสร้างโดยใช้วิธี Integer DDA เป็นเส้นที่ลากระหว่างจุด (2,2) ไปยังจุด (6,7) ในรูปแสดงการคำนวณจุดที่จะต้องพล็อตต่อไปจากจุดตั้งต้นจนถึงจุดสิ้นสุดด้วย จะเห็นว่าวิธีนี้ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่าความลาดชัน (ซึ่งจะต้องการหาร) แต่ก็สามารถสร้างเส้นตรงได้เช่นกัน

บทที่3
การออกแบบระบบและหลักการที่เกี่ยวข้อง

3.1 การออกแบบระบบ

1. ออกแบบระบบงานและส่วนประกอบต่างๆที่จำเป็นสำหรับระบบ
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานในการเขียนโปรแกรมด้วยภาษาวิชวล เบสิก
3. ทำการพัฒนาระบบ
4. ทำการทดสอบและแก้ไขโปรแกรมให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น
5. ประเมินความสมบูรณ์ของระบบและปัญหาที่เกิดขึ้น

3.2 ระบบงาน

การทำงานของระบบนั้นแบ่งออกเป็น 3 ส่วน โดยมีการทำงานเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ส่วนข้อมูลเข้า (Input) เป็นการป้อนค่าฟังก์ชันที่ต้องการหาอนุพันธ์ ซึ่งเราจะต้องทำการตรวจสอบการป้อนสมการว่าถูกต้องหรือไม่ ถ้ามีข้อผิดพลาดจะแสดงให้ทราบ และทำการป้อนค่าสมการเข้าไปใหม่

2. ส่วนการวิเคราะห์และการประมวลผล (Analysis and process) นำฟังก์ชันที่ป้อนเข้ามาทำการคำนวณเพื่อเขียนกราฟให้ได้ผลตามที่ต้องการ

3. ส่วนข้อมูลออก (Output) เป็นการนำข้อมูลที่ได้จากการประมวลผลมาแสดงผลทางจอภาพ

3.3 แผนงานและการพัฒนาระบบ

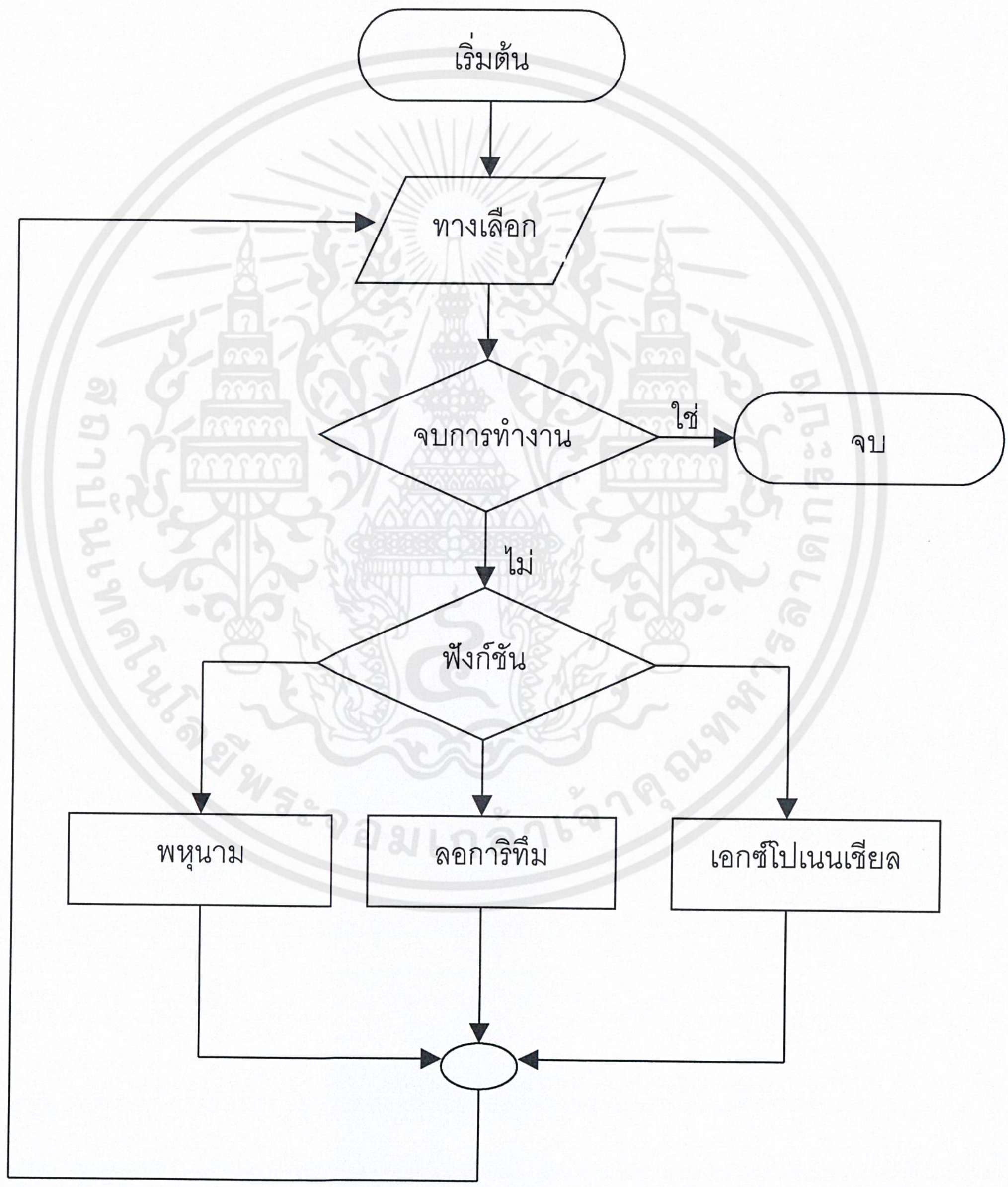
1. ออกแบบผังงาน (Flow chart) ของระบบงาน

2. ศึกษาการเขียนโปรแกรมด้วยภาษาวิชวลเบสิกเพื่อใช้ในการเขียนกราฟฟิกทางคอมพิวเตอร์ ทำการศึกษาคณิตศาสตร์ ในหัวข้อเรื่องของการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณหาจุดต่างๆที่จะนำมาเขียนกราฟฟิก

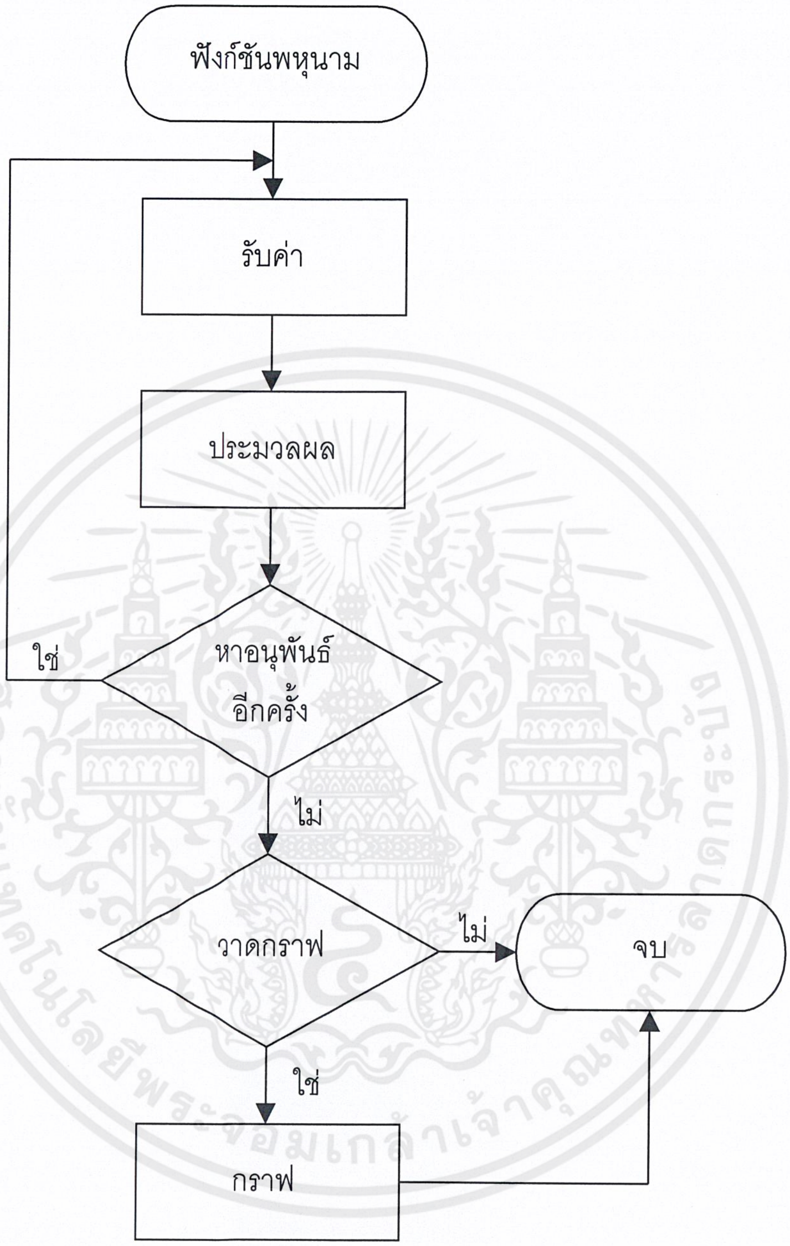
3. กำหนดข้อมูลเข้า (Input) และข้อมูลออก (Output) ของระบบ

4. ออกแบบหน้าจอการทำงาน
5. นำความรู้เรื่องการเขียนกราฟมาเขียนเป็นโปรแกรมแสดงกราฟ
6. ออกแบบทดสอบระบบงานที่ออกแบบไว้ และทำการแก้ไขข้อมูล ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น
7. จัดทำเอกสารประกอบการใช้งาน

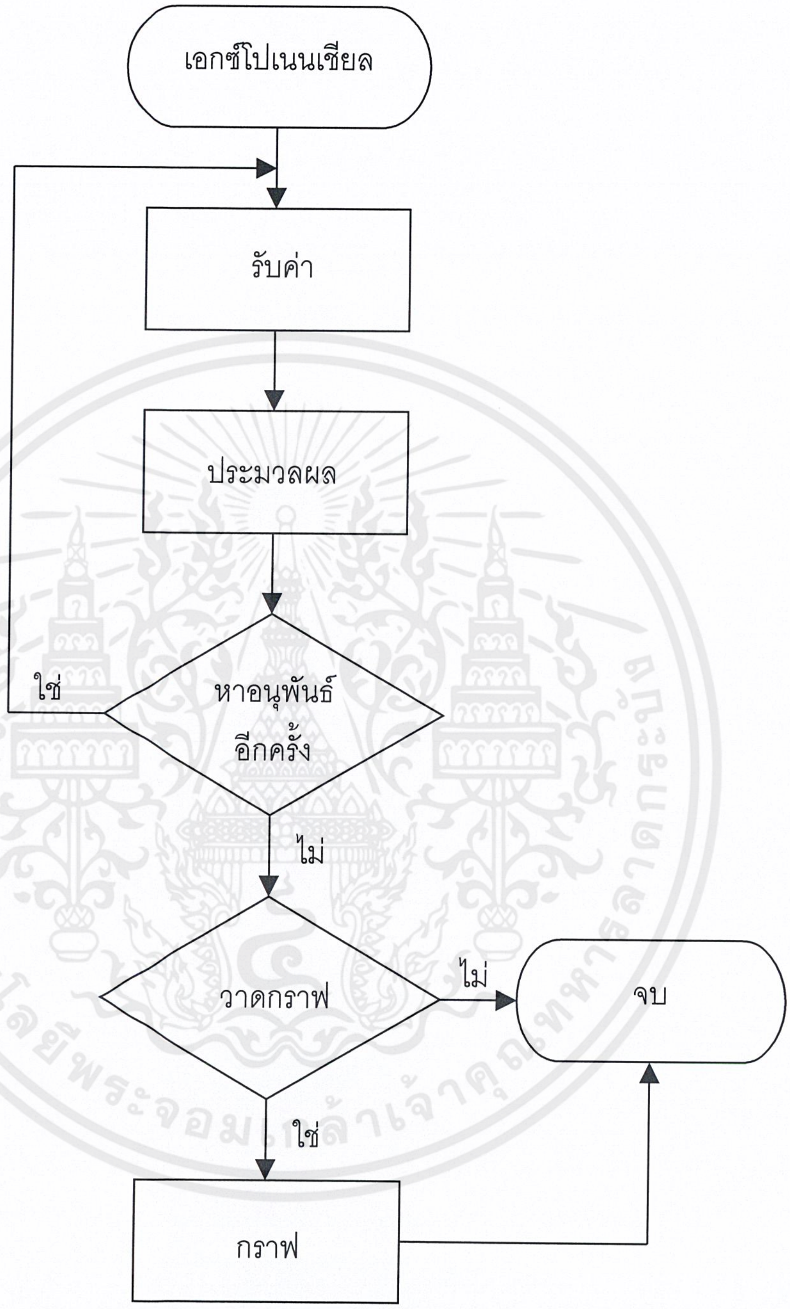
3.4 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม



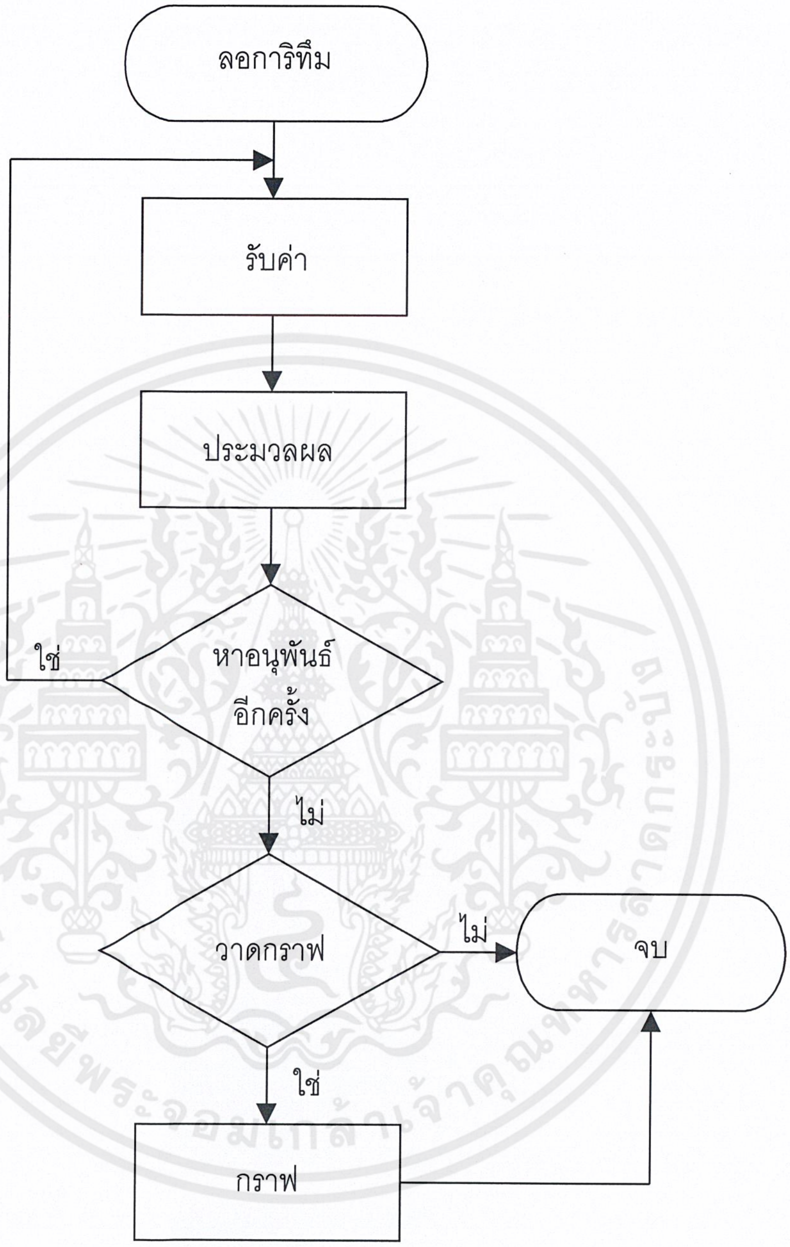
รูปที่ 3.1 **ขั้นตอนการทำงานของระบบ**



รูปที่ 3.1 (ต่อ) **ชั้นตอนการทำงานของระบบ**



รูปที่ 3.1 (ต่อ) **ขั้นตอนการทำงานของระบบ**



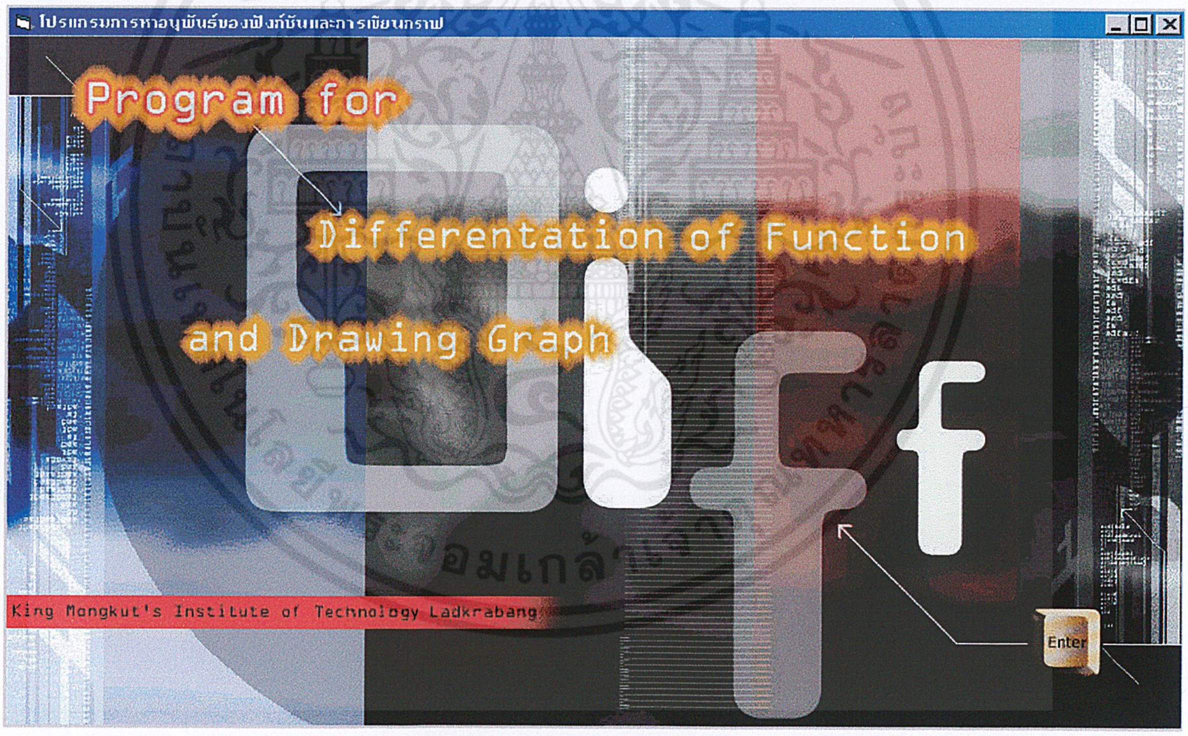
รูปที่ 3.1 (ต่อ) **ขั้นตอนการทำงานของระบบ**

บทที่ 4
ผลการทดลอง

4.1 การทดลองและผลการทดลอง

ต้องการแสดงกราฟของฟังก์ชันที่ได้จากการป้อนค่าฟังก์ชันในรูปแบบต่างๆ เพื่อที่จะแสดงการทำงานของโปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการเขียนกราฟว่าจะมีผลการทดลองเป็นอย่างไร โดยให้ผู้ใช้ทำการทดลองเปิดโปรแกรม การหาอนุพันธ์.exe ซึ่งแสดงดังรูปที่4.1 เพื่อทำการทดลองใช้โปรแกรม โดยเลือกรูปแบบของฟังก์ชันที่ต้องการได้จาก Option Button เลือกฟังก์ชัน เพื่อทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและเขียนกราฟต่อไป

ตัวอย่างสำหรับฟังก์ชันแบบต่างๆแสดงดังต่อไปนี้

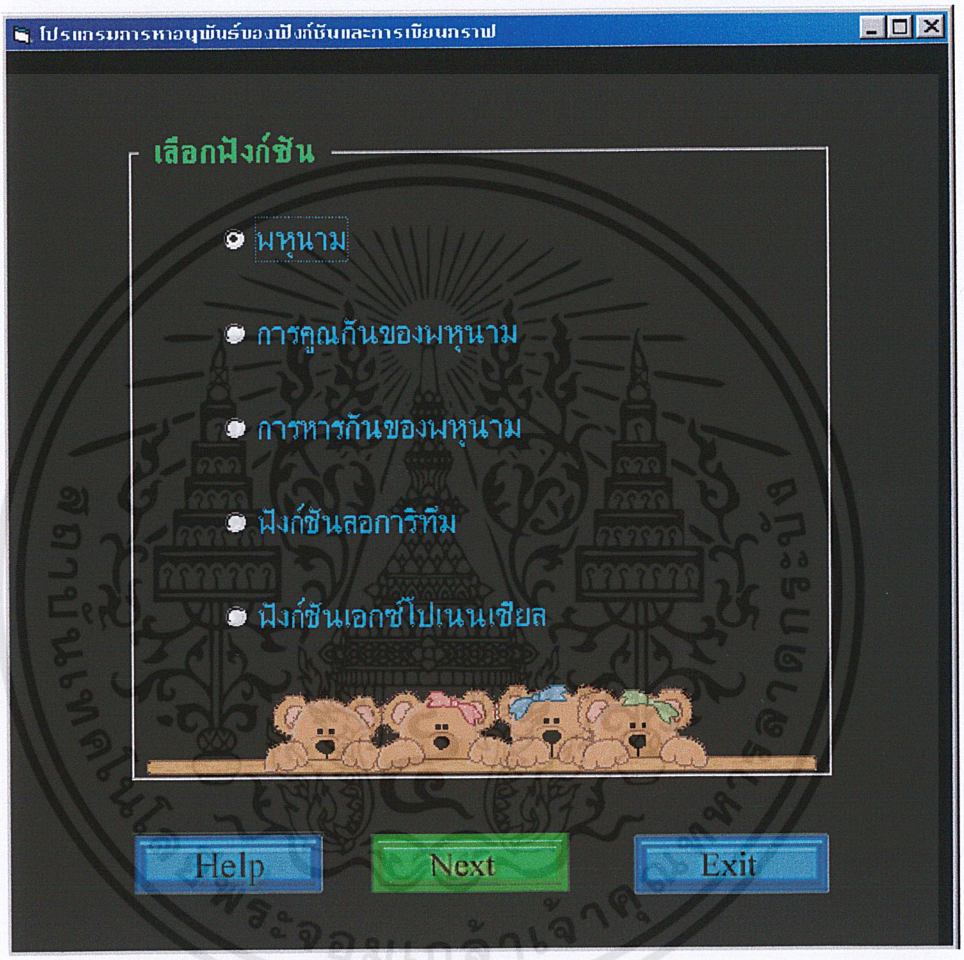


รูปที่ 4.1 แสดงหน้าจอแรกของโปรแกรม การหาอนุพันธ์.exe

4.1.1 **การทดลองที่ 1**

ต้องการป้อนค่าฟังก์ชันแบบพหุนาม โดยฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 2$ เข้ามาเพื่อให้โปรแกรมทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและแสดงกราฟ ซึ่งมีวิธีการทำงานดังนี้

1. ที่ช่องเลือกฟังก์ชัน ทำการเลือก พหุนาม จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Next แสดงดังรูปที่ 4.2



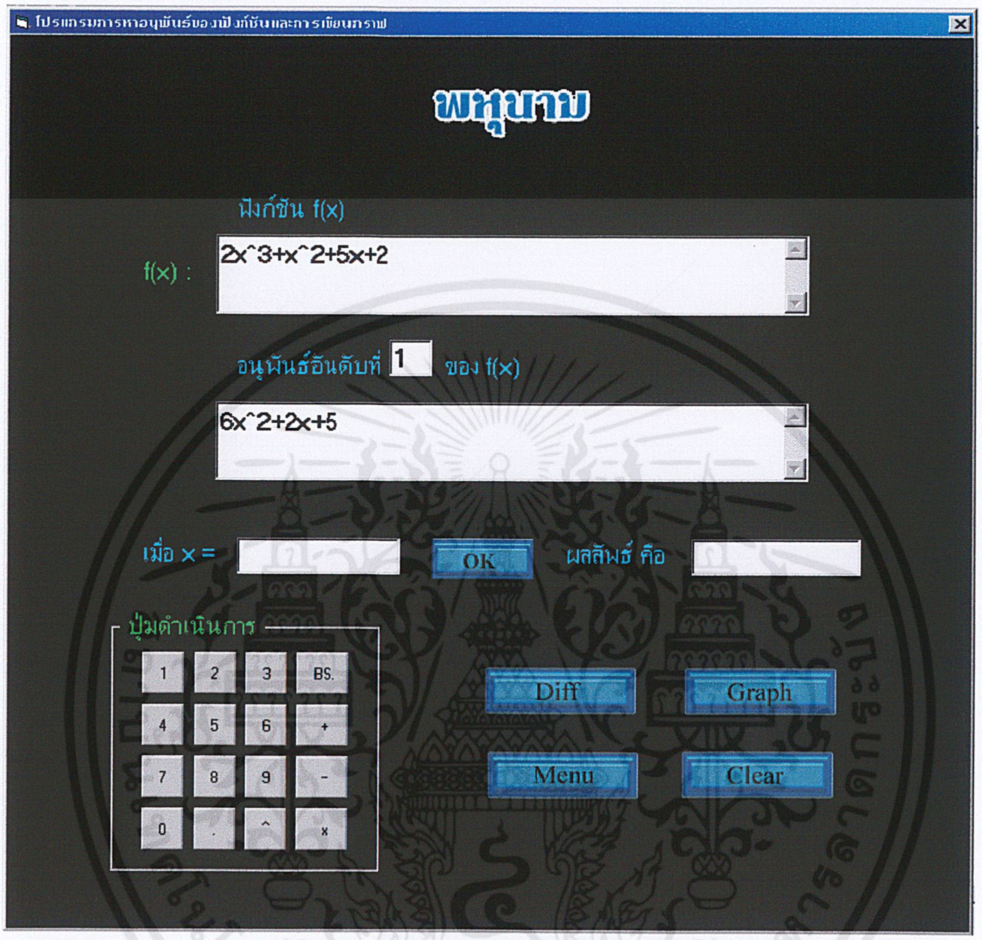
รูปที่ 4.2 แสดงการเลือกฟังก์ชันพหุนาม

2. ทำการป้อนฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 2$ โดยทำการพิมพ์ 2x^3+x^2+5x+2 จากปุ่มดำเนินการลงในช่องว่าง แสดงดังรูปที่ 4.3

3. จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Diff เพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล

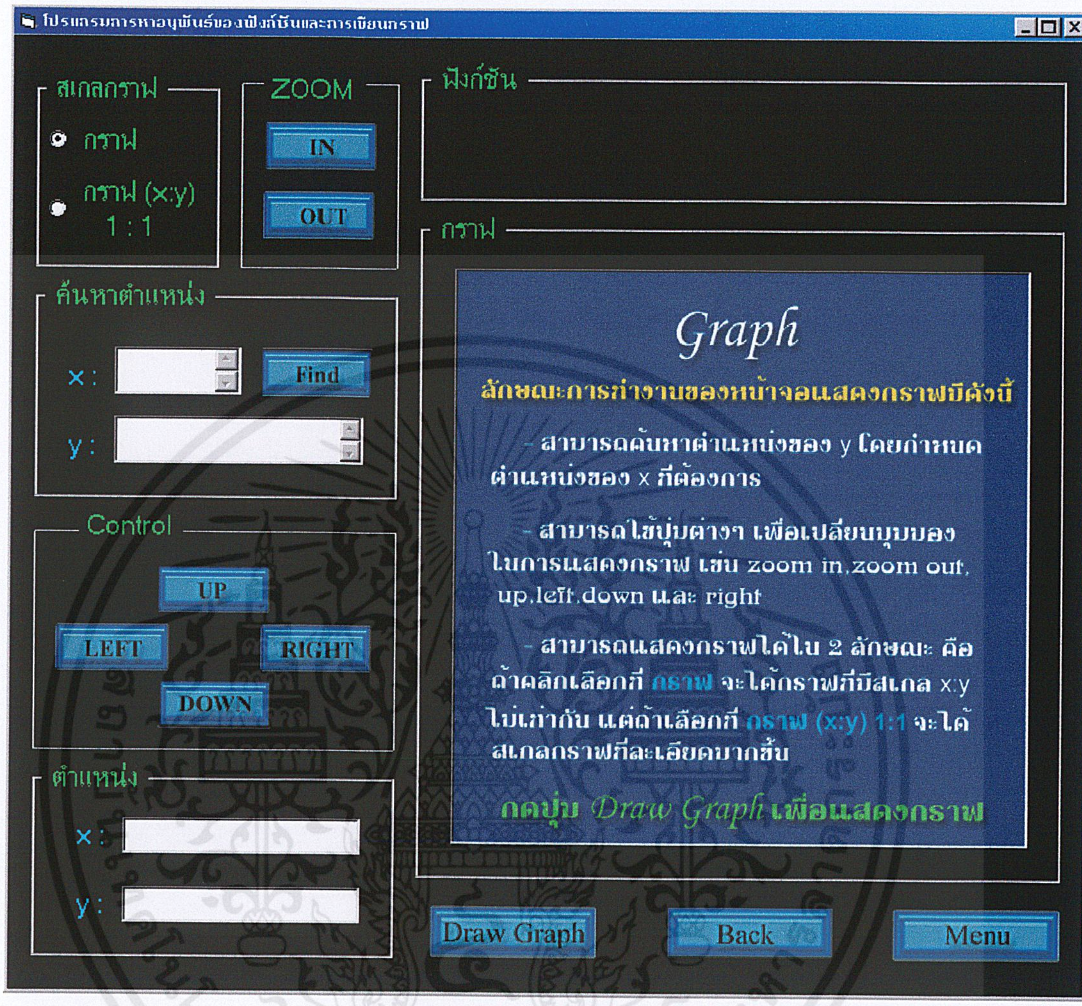
รูปที่ 4.3 **แสดงการป้อนค่าฟังก์ชัน** $\mathbf{f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 2}$

4. โปรแกรมจะทำการประมวลผล และแสดงผลการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 2$ แสดงดังรูปที่ 4.4



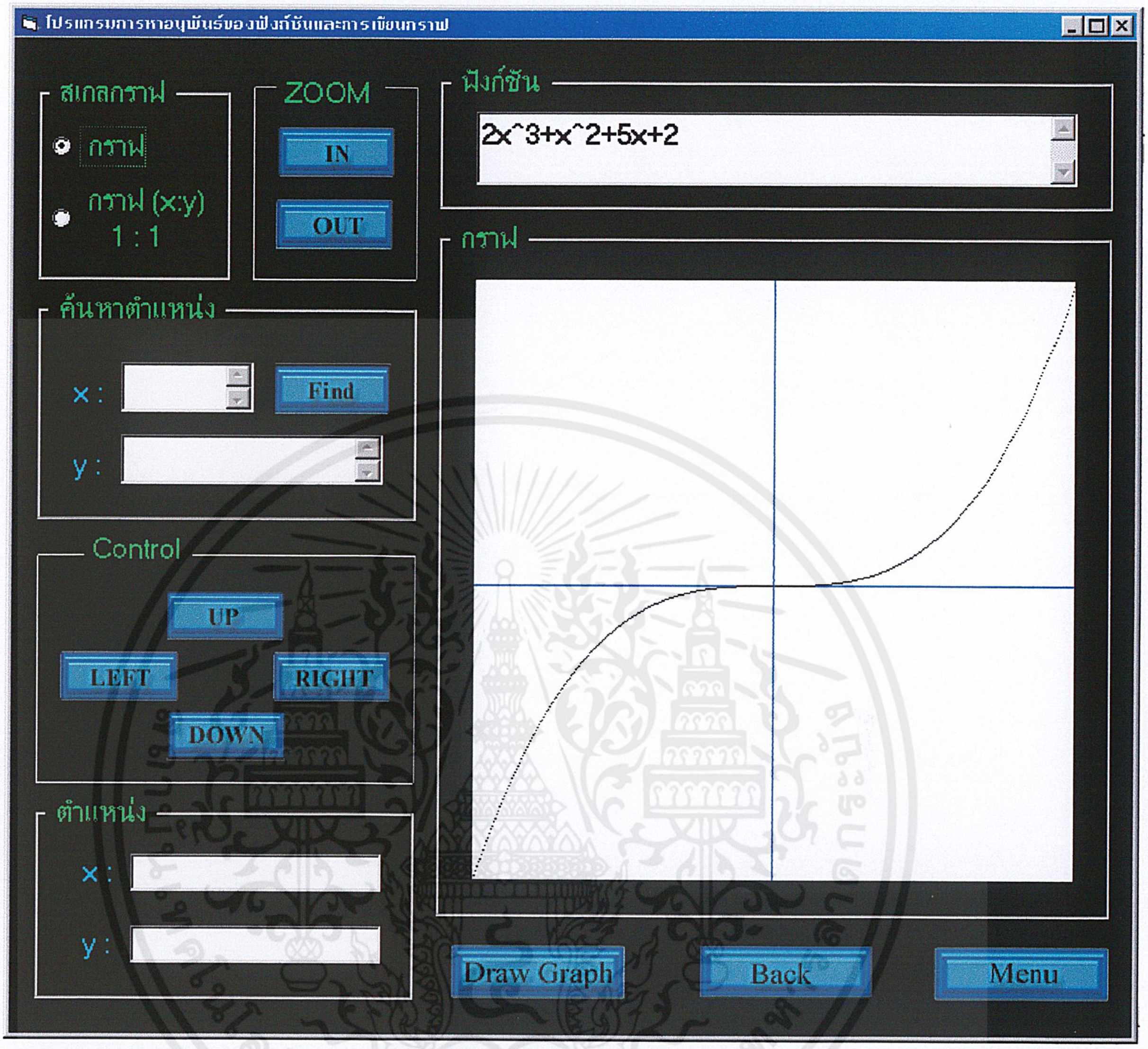
รูปที่ 4.4 แสดงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 2$

5. คลิกที่ปุ่ม Graph เพื่อไปยังหน้าจอที่จะแสดงกราฟ แสดงดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 แสดงหน้าจอการเขียนกราฟ

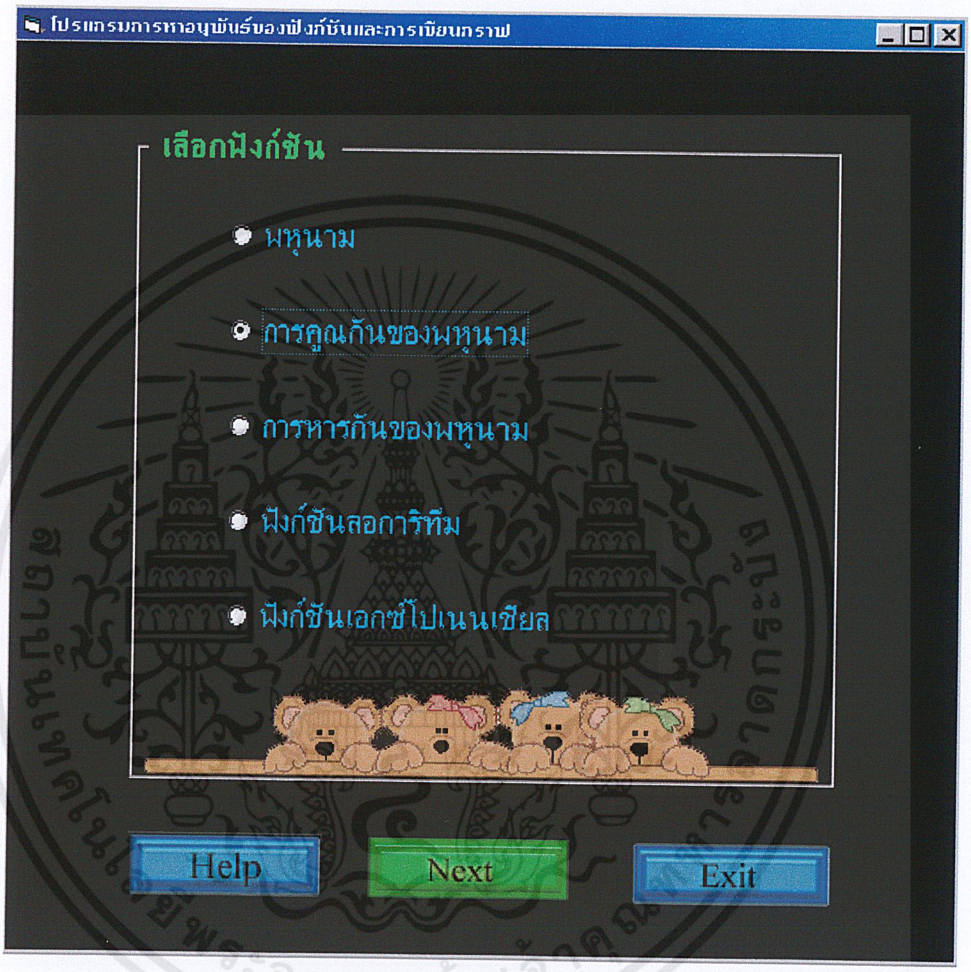
6. คลิกที่ปุ่ม Draw Graph เพื่อให้โปรแกรมทำการแสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 2$ แสดงดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 **แสดงกราฟของฟังก์ชัน** $\mathbf{f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 2}$

4.1.2 **การทดลองที่** 2

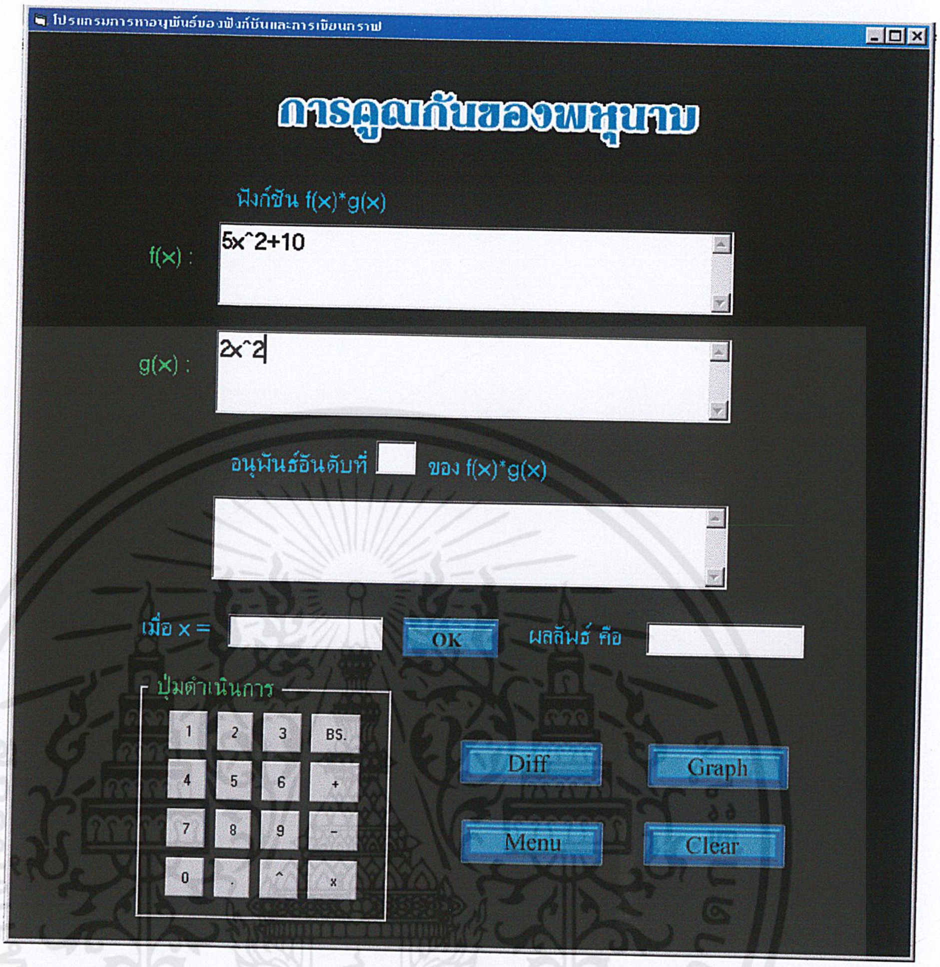
1. ที่ช่องเลือกฟังก์ชัน ทำการเลือก การคูณกันของพหุนาม จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Next แสดงดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 **แสดงการเลือกฟังก์ชันการคูณกันของพหุนาม**

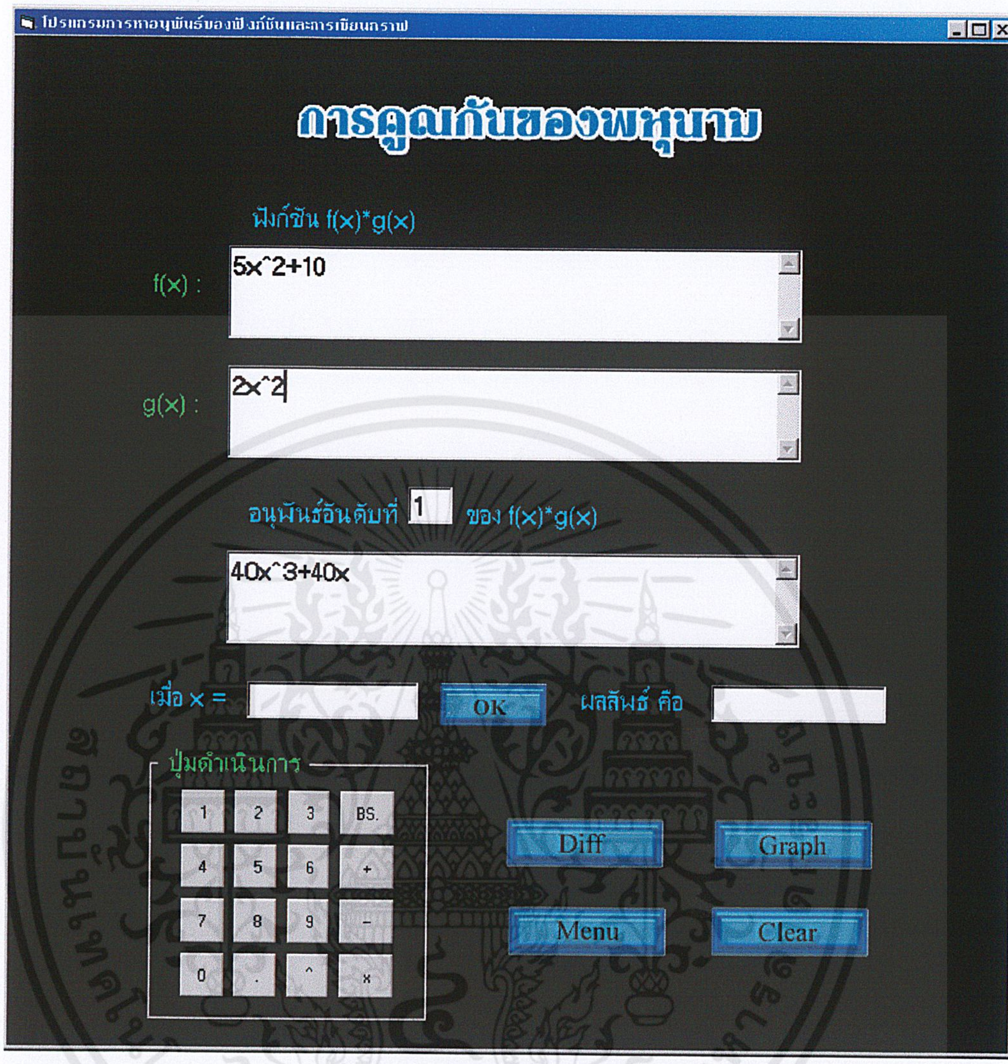
2. ทำการป้อนฟังก์ชัน $f(x) = 5x^2 + 10$ และฟังก์ชัน $g(x) = 2x^2$ โดยทำการพิมพ์ 5x^2+10 ลงในช่องว่างของ f(x) และพิมพ์ 2x^2 ลงในช่องว่างของ g(x) แสดงดังรูปที่ 4.8

3. จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Diff เพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล



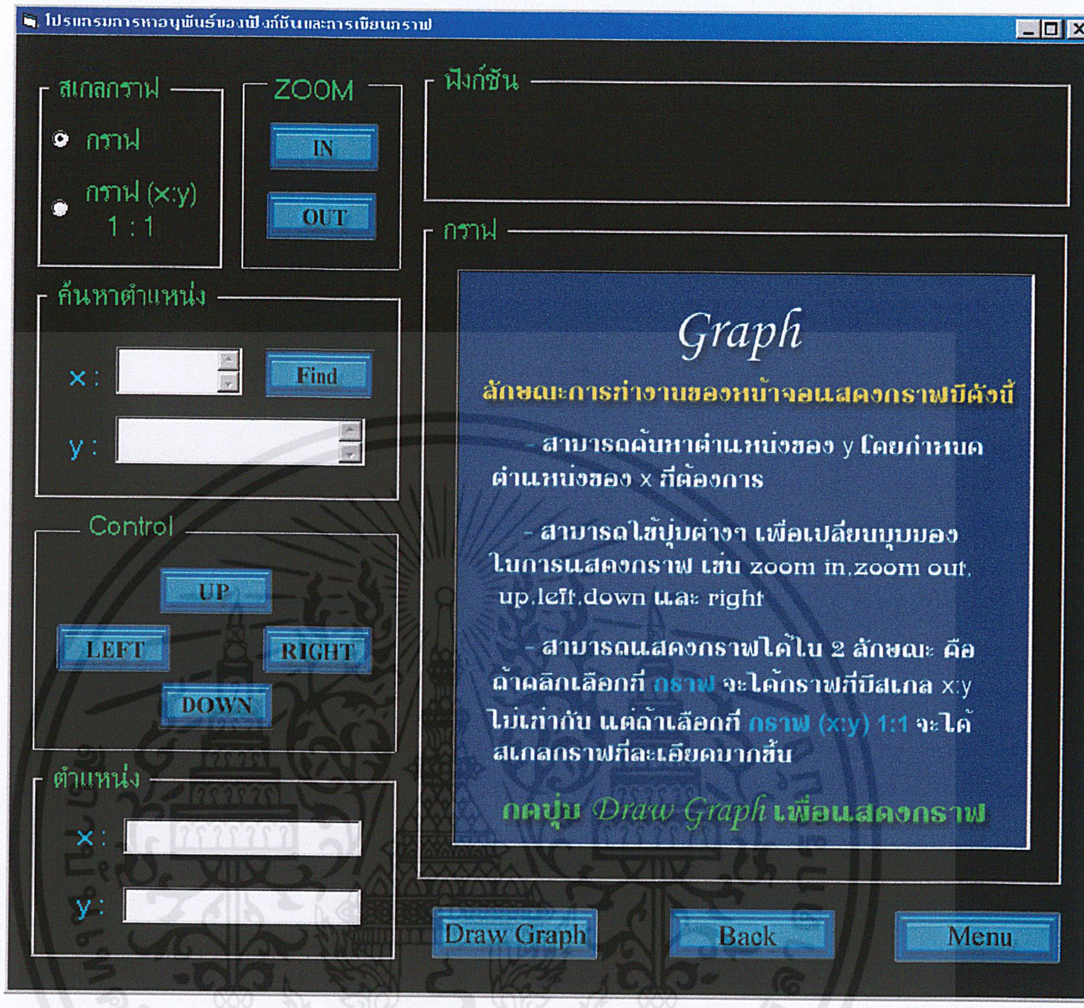
รูปที่ 4.8 **แสดงการป้อนค่าฟังก์ชัน $\mathbf{f(x) = 5x^2 + 10}$ และ $\mathbf{g(x) = 2x^2}$**

4. โปรแกรมจะทำการประมวลผล และแสดงผลการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันการคูณกันของพหุนามระหว่าง $f(x) = 5x^2 + 10$ และ $g(x) = 2x^2$ แสดงดังรูปที่ 4.9



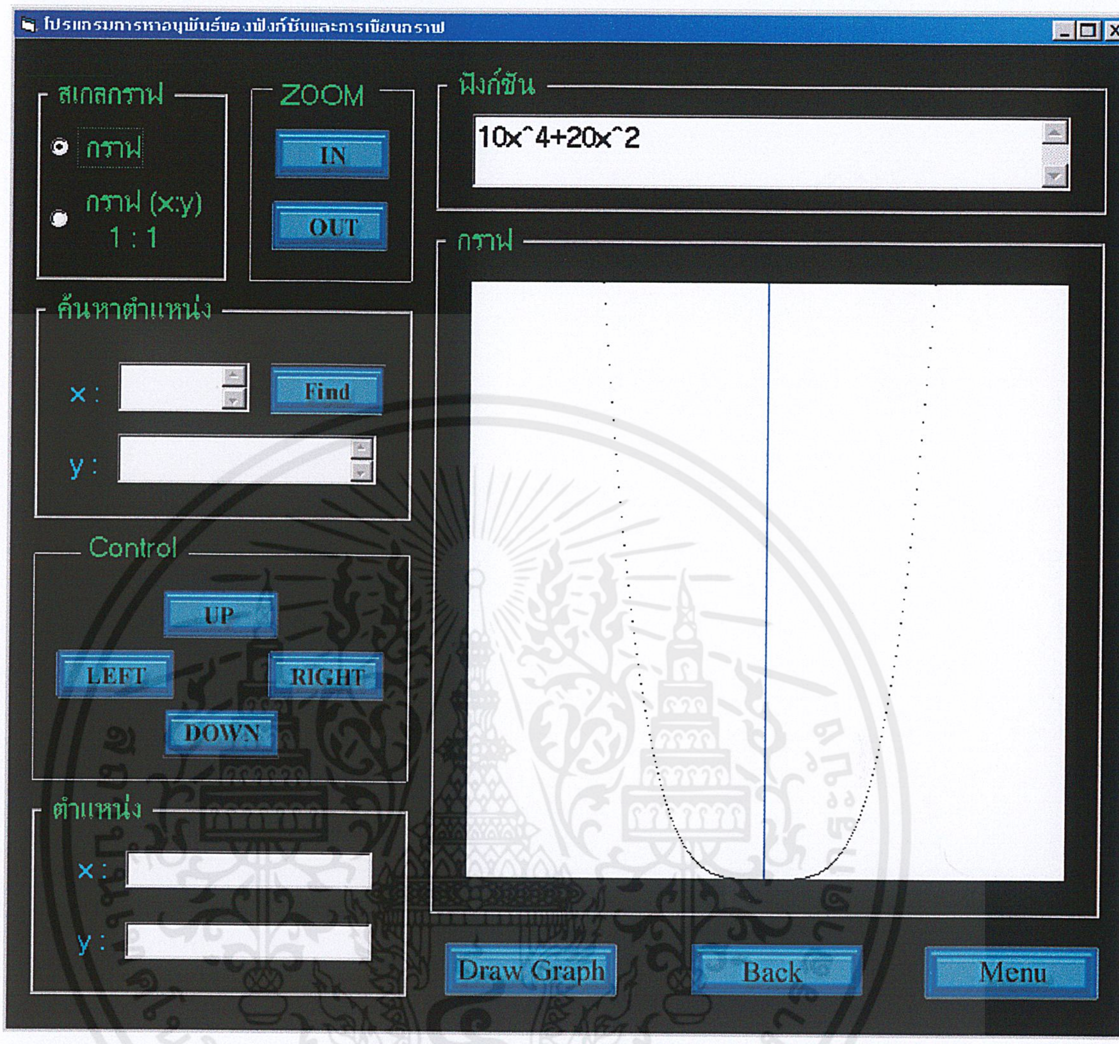
รูปที่ 4.9 **แสดงอนุพันธ์อันดับที่** 1 **ของฟังก์ชัน** $\mathbf{f(x) = 5x^2 + 10}$ **คูณกับฟังก์ชัน** $\mathbf{g(x) = 2x^2}$

5. คลิกที่ปุ่ม Graph เพื่อไปยังหน้าจอที่จะแสดงกราฟ แสดงดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 **แสดงหน้าจอการเขียนกราฟ**

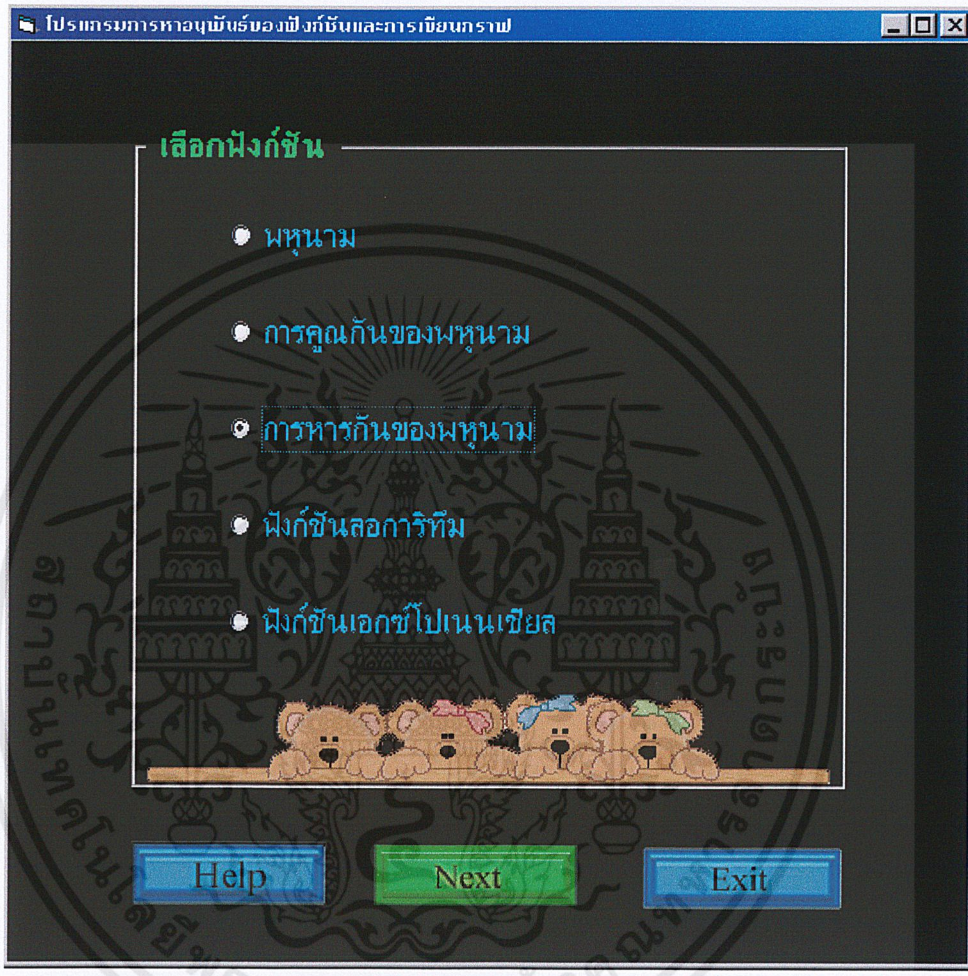
6. คลิกที่ปุ่ม Draw Graph เพื่อให้โปรแกรมทำการแสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 5x^2 + 10$ คูณกับฟังก์ชัน $g(x) = 2x^2$ แสดงดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 **แสดงกราฟของฟังก์ชัน** $\mathbf{f(x) = 5x^2 + 10}$ **คูณกับฟังก์ชัน** $\mathbf{g(x) = 2x^2}$

4.1.3 **การทดลองที่** 3

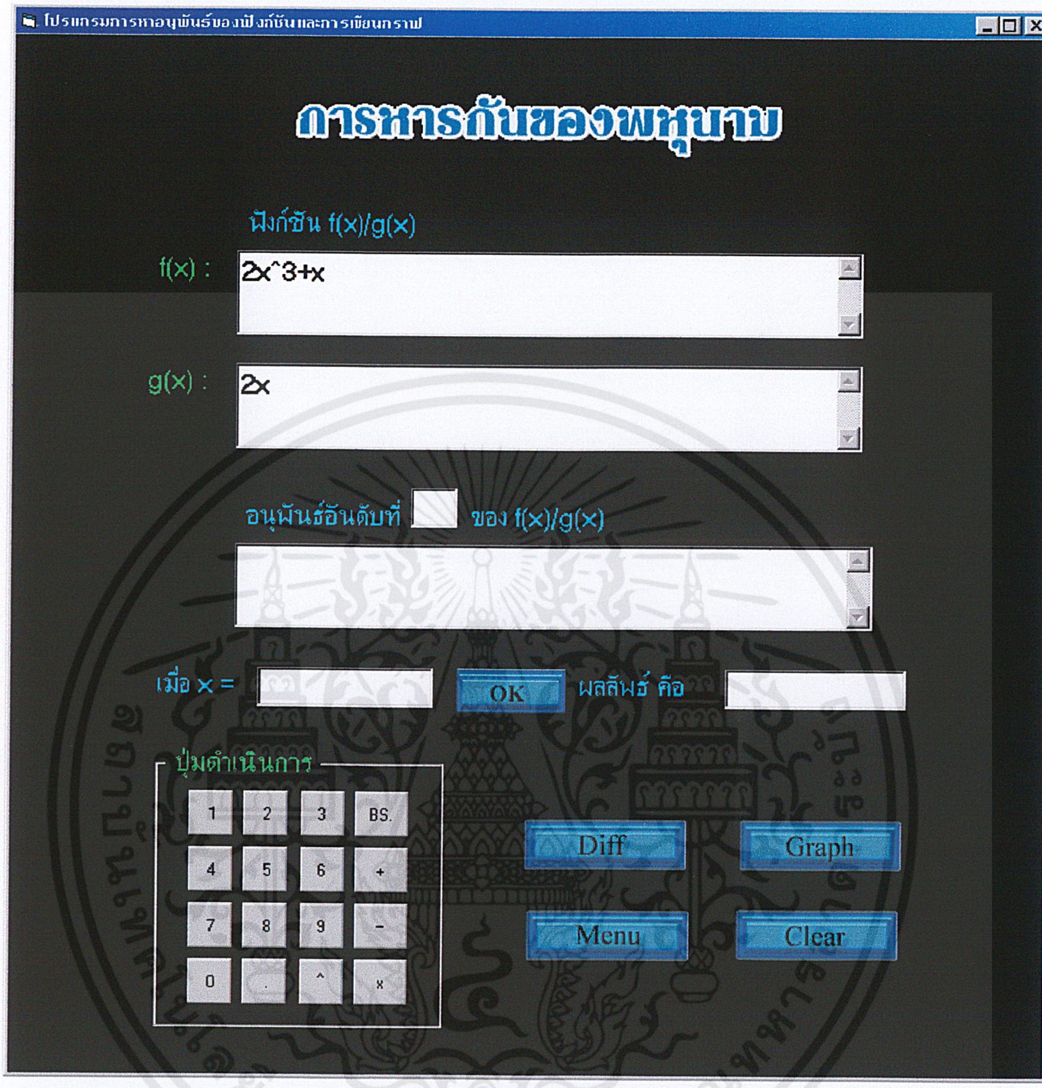
1. ที่ช่องเลือกฟังก์ชัน ทำการเลือก การหารกันของพหุนาม จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Next แสดงดังรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 **แสดงการเลือกฟังก์ชันการหารกันของพหุนาม**

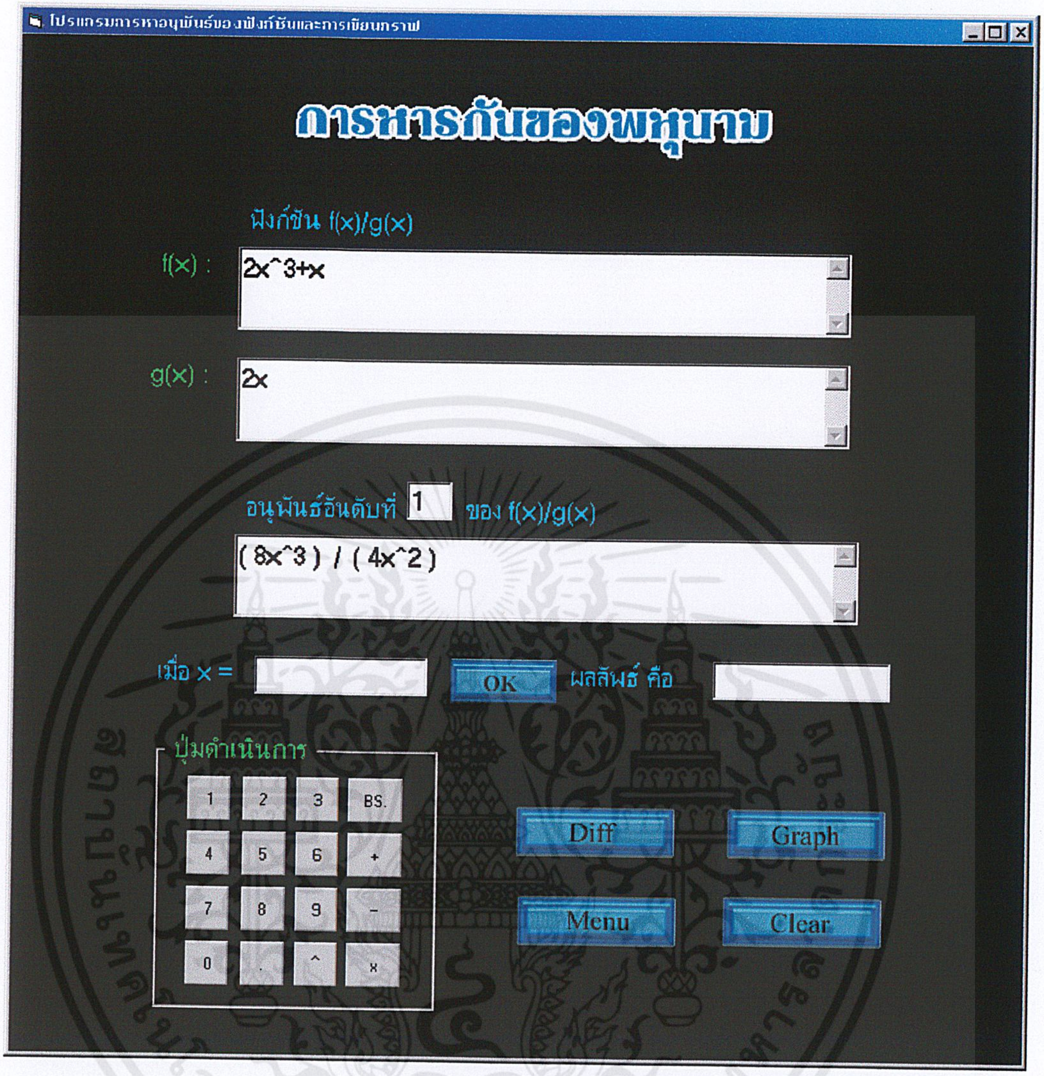
2. ทำการป้อนฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + x$ และฟังก์ชัน $g(x) = 2x$ โดยทำการพิมพ์ 2x^3+x ลงในช่องว่างของ f(x) และพิมพ์ 2x ลงในช่องว่างของ g(x) แสดงดังรูปที่ 4.13

3. จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Diff เพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล



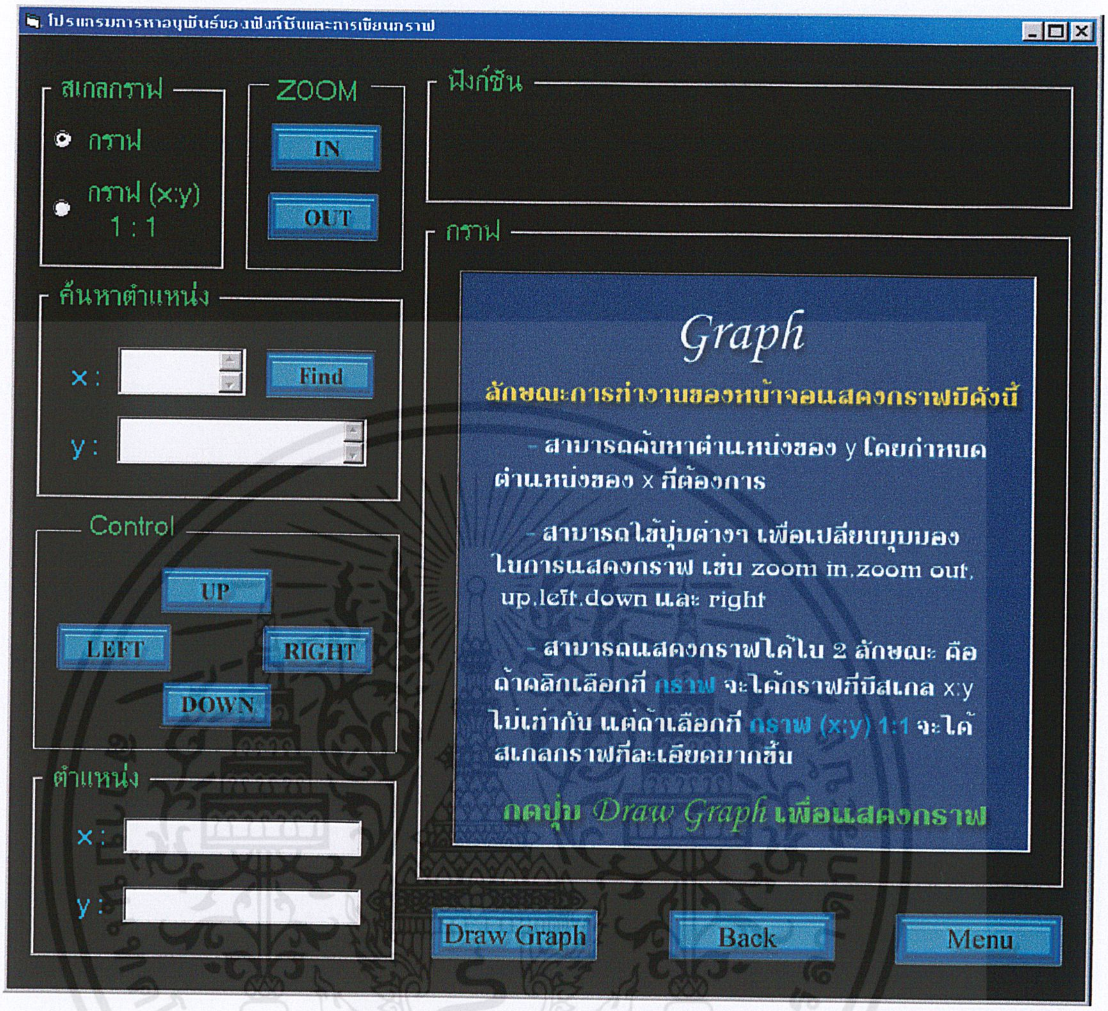
รูปที่ 4.13 **แสดงการป้อนฟังก์ชัน** $\mathbf{f(x) = 2x^3 + x}$ **และฟังก์ชัน** $\mathbf{g(x) = 2x}$

4. โปรแกรมจะทำการประมวลผล และแสดงผลการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันการหารกันของพหุนามระหว่าง $f(x) = 2x^3 + x$ และ $g(x) = 2x$ แสดงดังรูปที่ 4.14



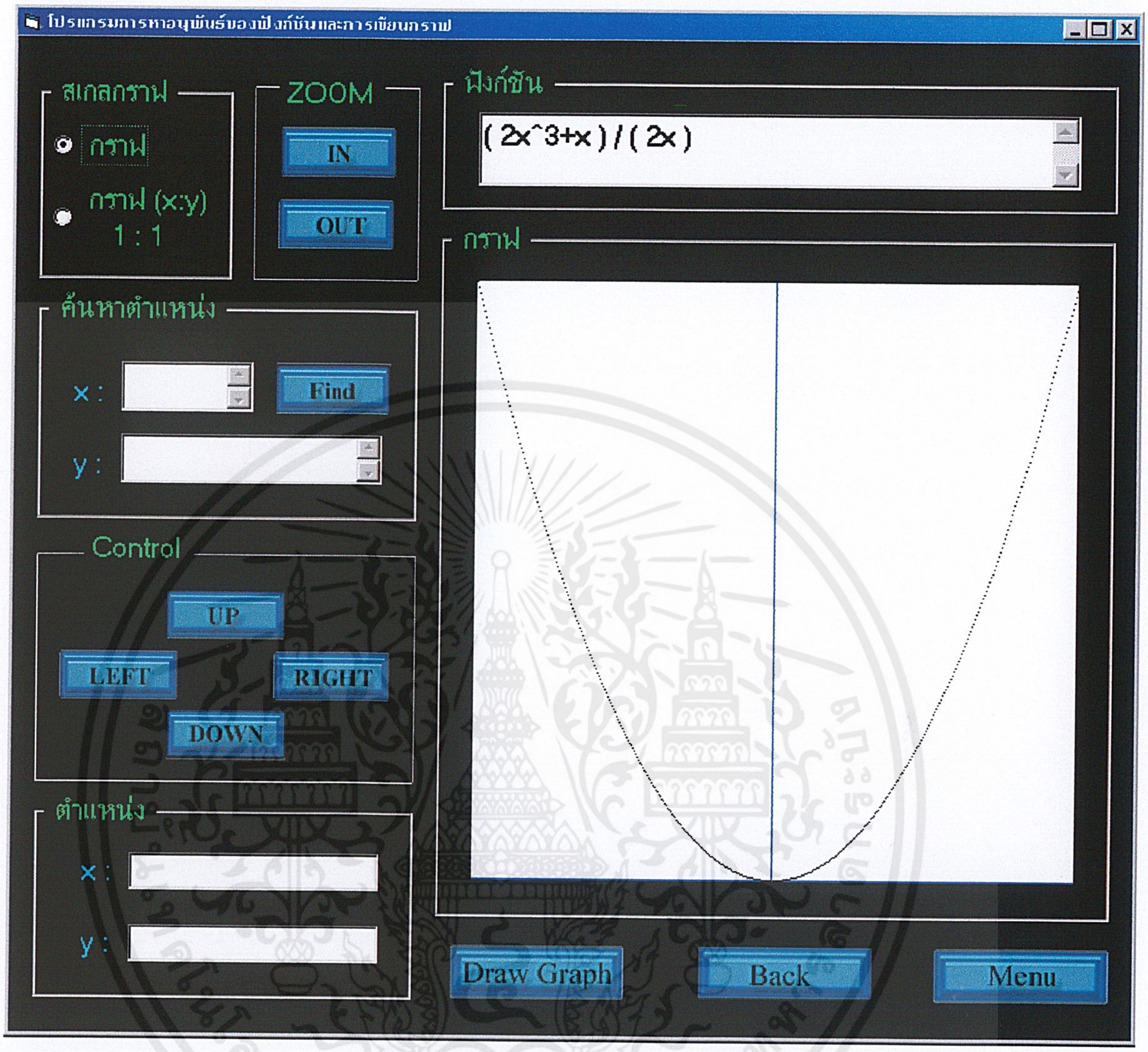
รูปที่ 4.14 **แสดงอนุพันธ์อันดับที่** 1 **ของฟังก์ชัน** $\mathbf{f(x) = 2x^3 + x}$ **หารกับฟังก์ชัน** $\mathbf{g(x) = 2x}$

5. คลิกที่ปุ่ม Graph เพื่อไปยังหน้าจอที่จะแสดงกราฟ แสดงดังรูปที่ 4.15



รูปที่ 4.15 **แสดงหน้าจอการเขียนกราฟ**

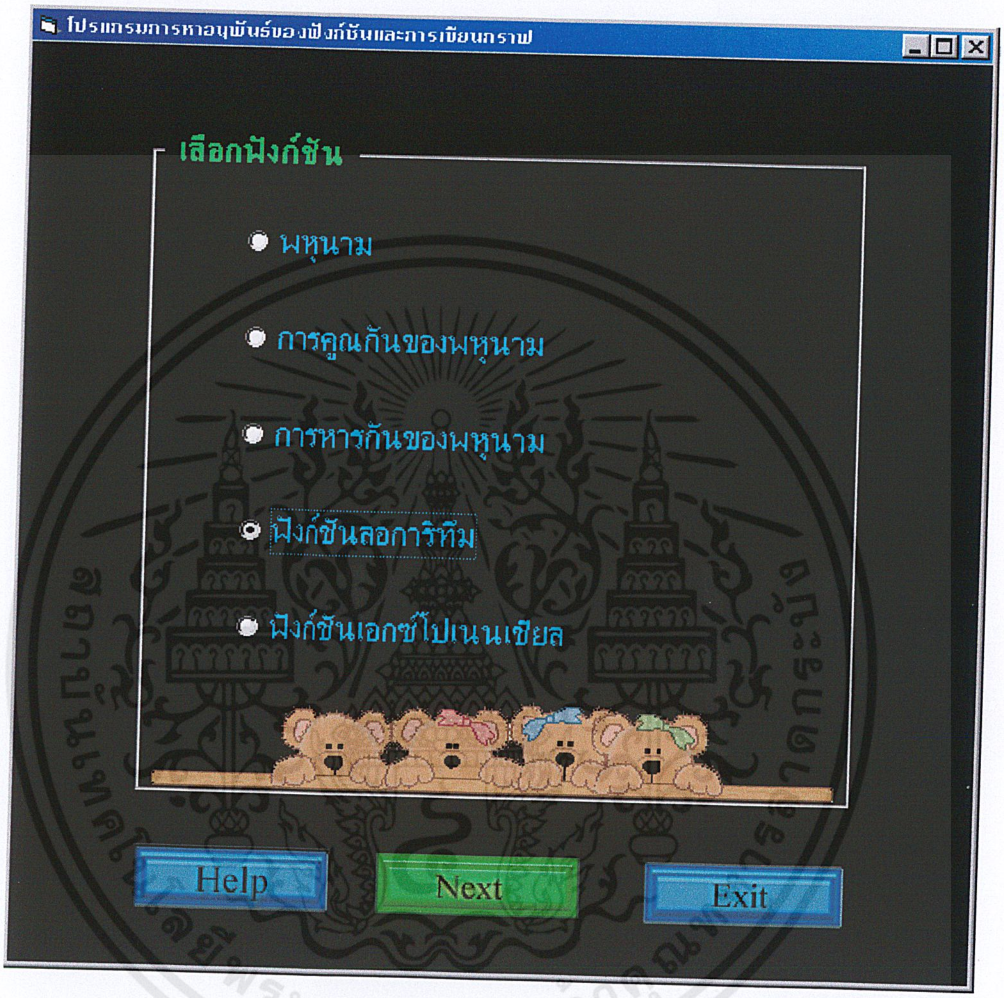
6. คลิกที่ปุ่ม Draw Graph เพื่อให้โปรแกรมทำการแสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + x$ หารกับฟังก์ชัน $g(x) = 2x$ แสดงดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 **แสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + x$ หารกับฟังก์ชัน $g(x) = 2x$**

4.1.4 การทดลองที่ 4

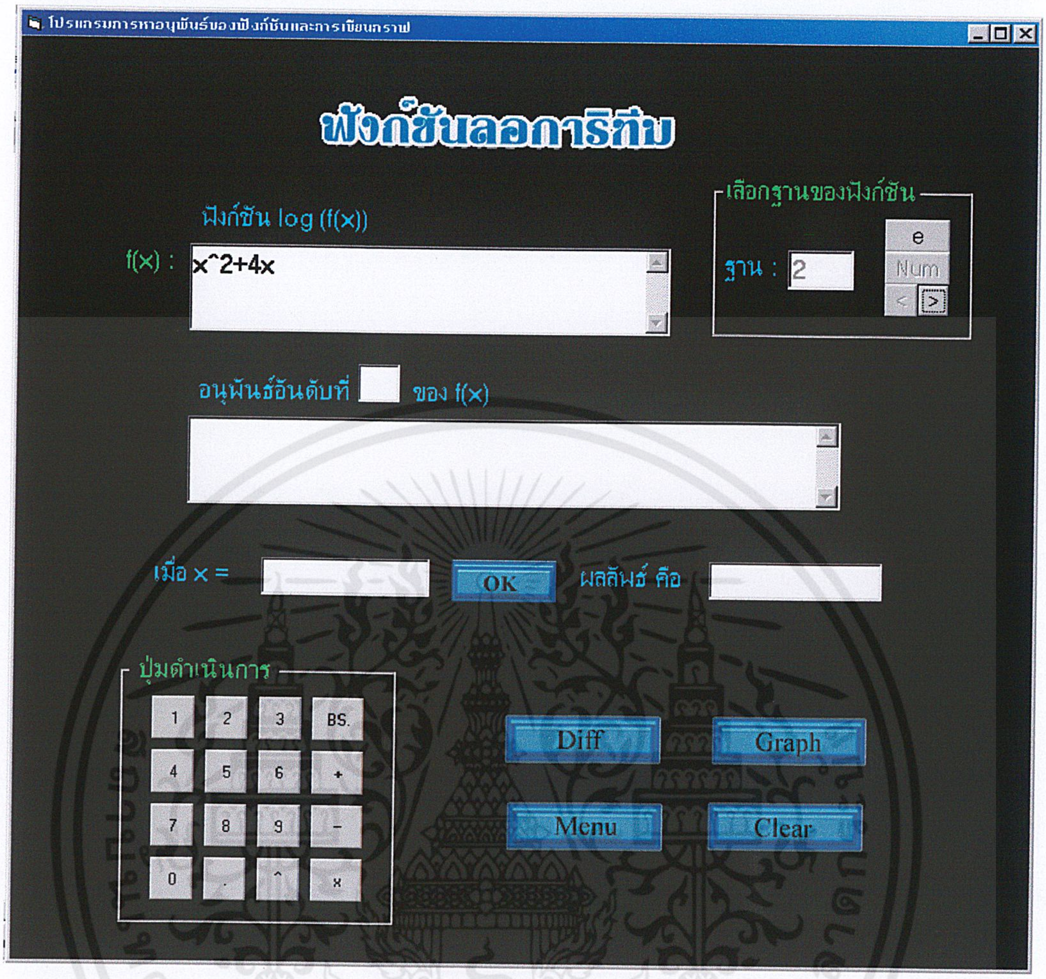
1. ที่ช่องเลือกฟังก์ชัน ทำการเลือกฟังก์ชันลอการิทึม จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Next แสดงดังรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 แสดงการเลือกฟังก์ชันลอการิทึม

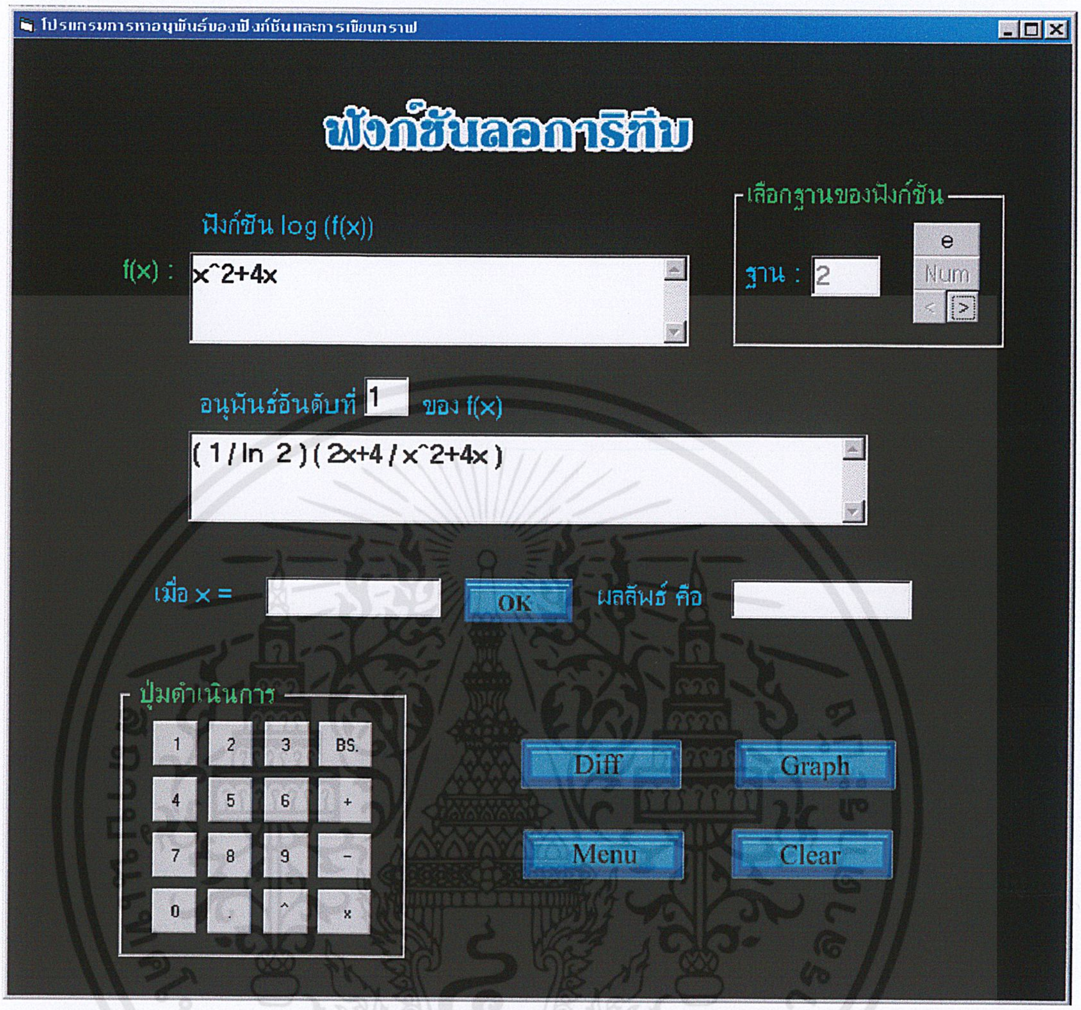
2. ทำการป้อนฟังก์ชัน $\log(f(x)) = x^2 + 4x$ โดยทำการพิมพ์ x^2+4x ลงในช่องว่างของ log(f(x)) และทำการกำหนดฐานของฟังก์ชันลอการิทึมให้มีค่าเท่ากับ 2

3. จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Diff เพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล



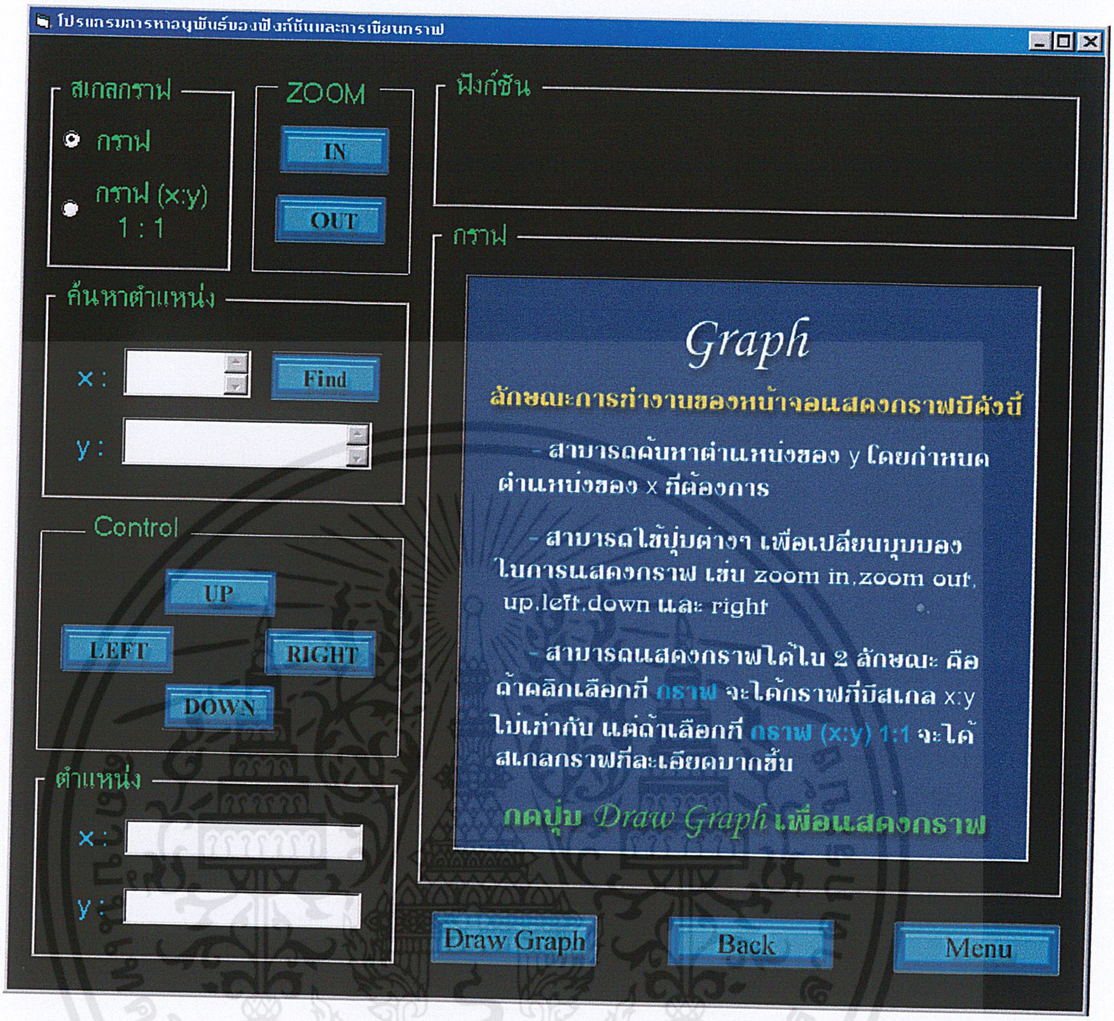
รูปที่ 4.18 **แสดงการป้อนฟังก์ชัน** $\mathbf{log(f(x)) = x^2 + 4x}$ ฐาน 2

4. โปรแกรมจะทำการประมวลผล และแสดงผลการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม $\log(f(x)) = x^2 + 4x$



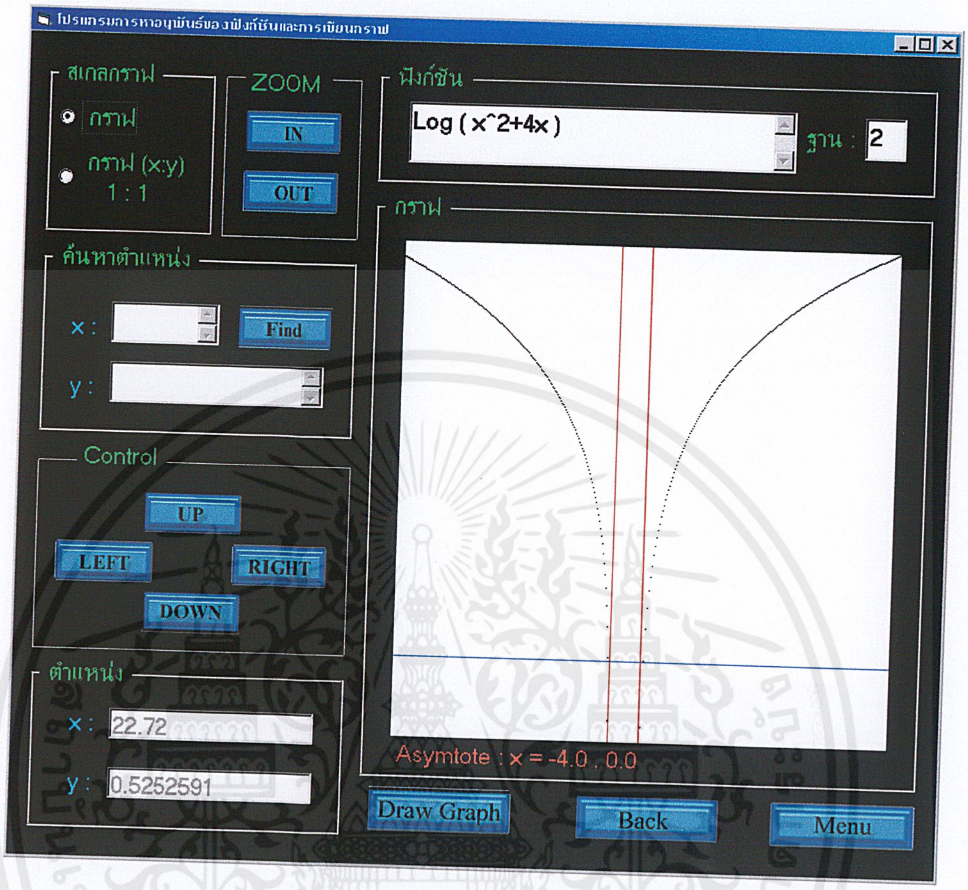
รูปที่ 4.19 **แสดงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน** $\mathbf{log(f(x)) = x^2 + 4x}$

5. คลิกที่ปุ่ม Graph เพื่อไปยังหน้าจอที่จะแสดงกราฟ



รูปที่ 4.20 **แสดงหน้าจอการเขียนกราฟ**

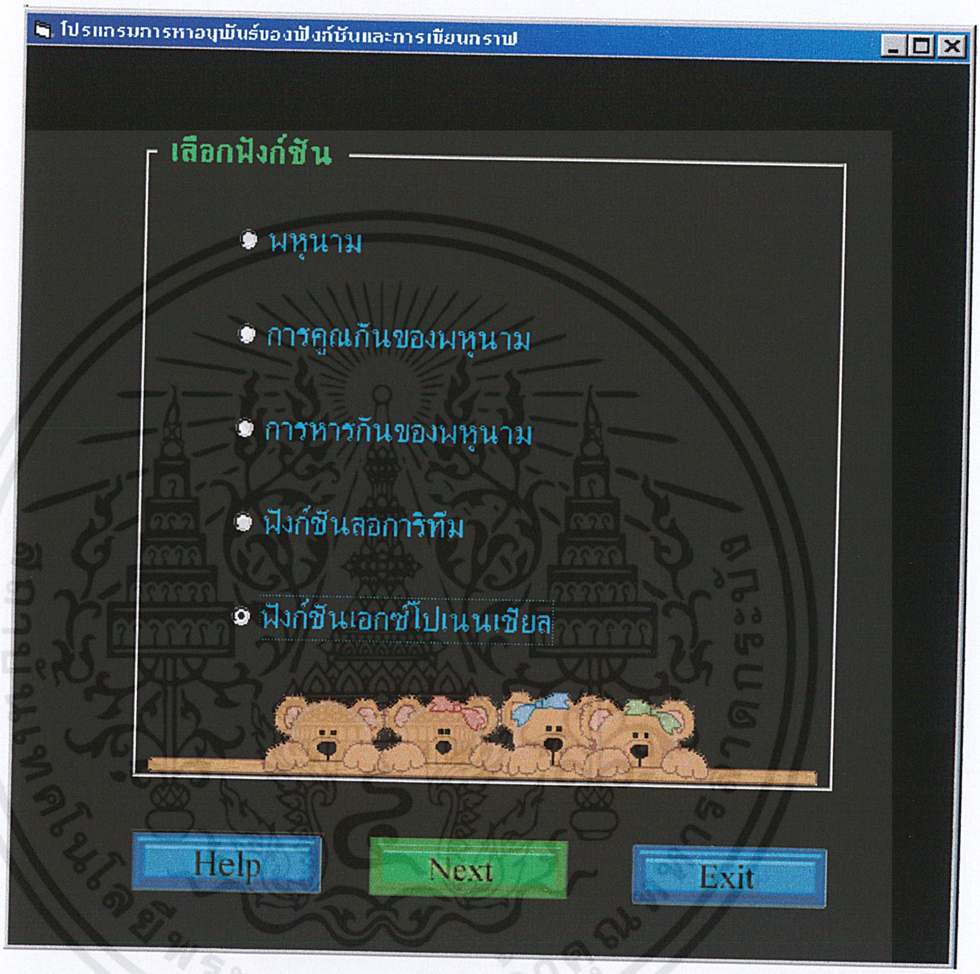
6. คลิกที่ปุ่ม Draw Graph เพื่อให้โปรแกรมทำการแสดงกราฟของฟังก์ชัน $\log(f(x)) = x^2 + 4x$



รูปที่ 4.21 แสดงกราฟของฟังก์ชัน $\log(f(x)) = x^2 + 4x$

4.1.5 การทดลองที่ 5

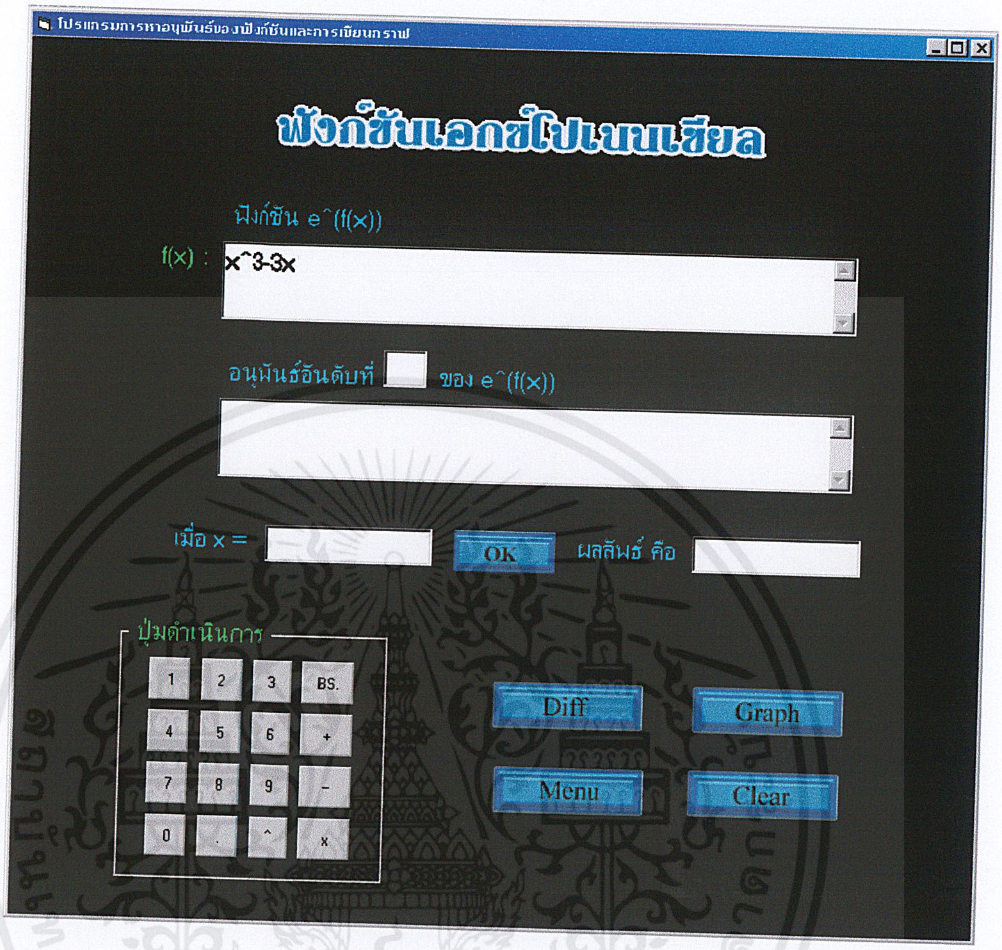
1. ที่ช่องเลือกฟังก์ชัน ทำการเลือก ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Next แสดงดังรูปที่ 4.22



รูปที่ 4.22 แสดงการเลือกฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

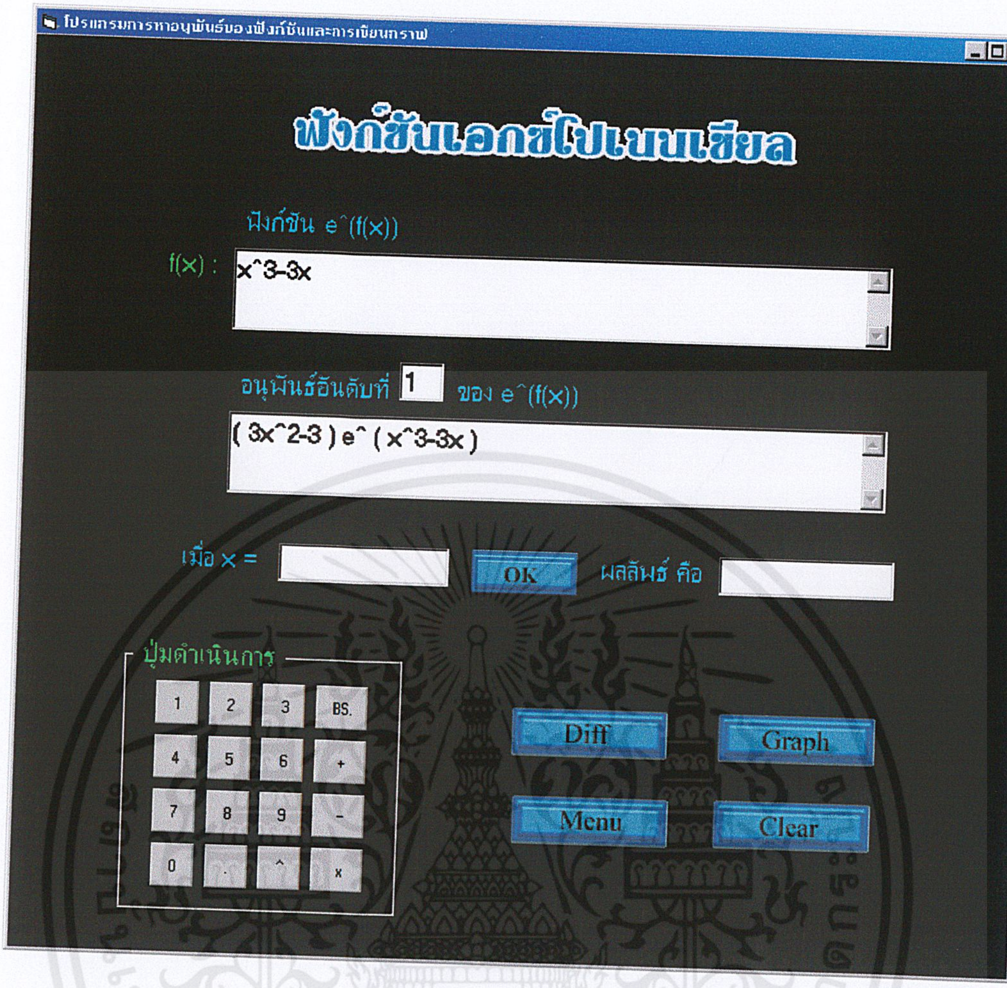
2. ทำการป้อนฟังก์ชัน e^(f(x)) = $x^3 - 3x$ โดยพิมพ์ x^3-3x ลงในช่องว่างของ e^(f(x))

3. จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Diff เพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล



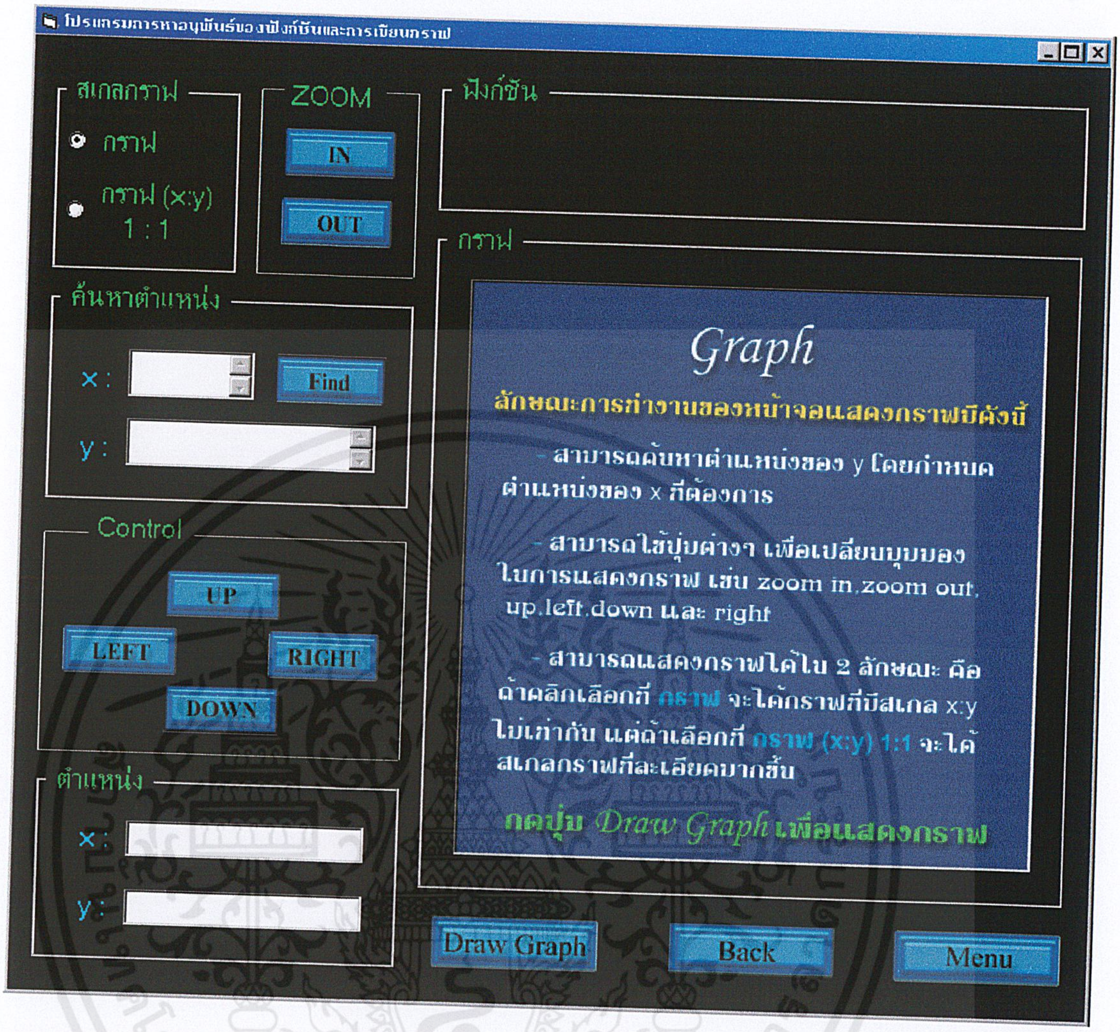
รูปที่ 4.23 **แสดงการป้อนฟังก์ชัน** $\mathbf{e^{\wedge}(f(x)) = x^3 - 3x}$

4. โปรแกรมจะทำการประมวลผล และแสดงผลการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล $e^{\wedge}(f(x)) = x^3 - 3x$



รูปที่ 4.24 **แสดงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $e^{(f(x))} = x^3 - 3x$**

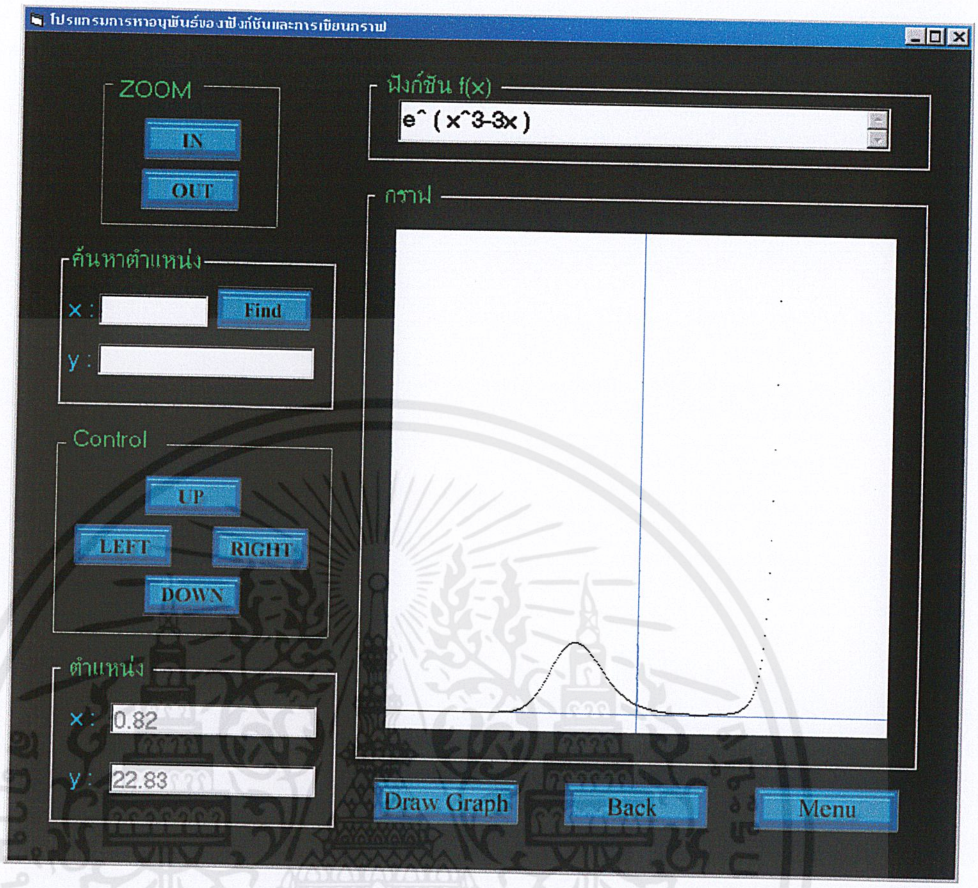
5. คลิกที่ปุ่ม Graph เพื่อไปยังหน้าจอที่จะแสดงกราฟ



รูปที่ 4.25 **แสดงหน้าจอการเขียนกราฟ**

6. คลิกที่ปุ่ม Draw Graph เพื่อให้โปรแกรมทำการแสดงกราฟของฟังก์ชัน

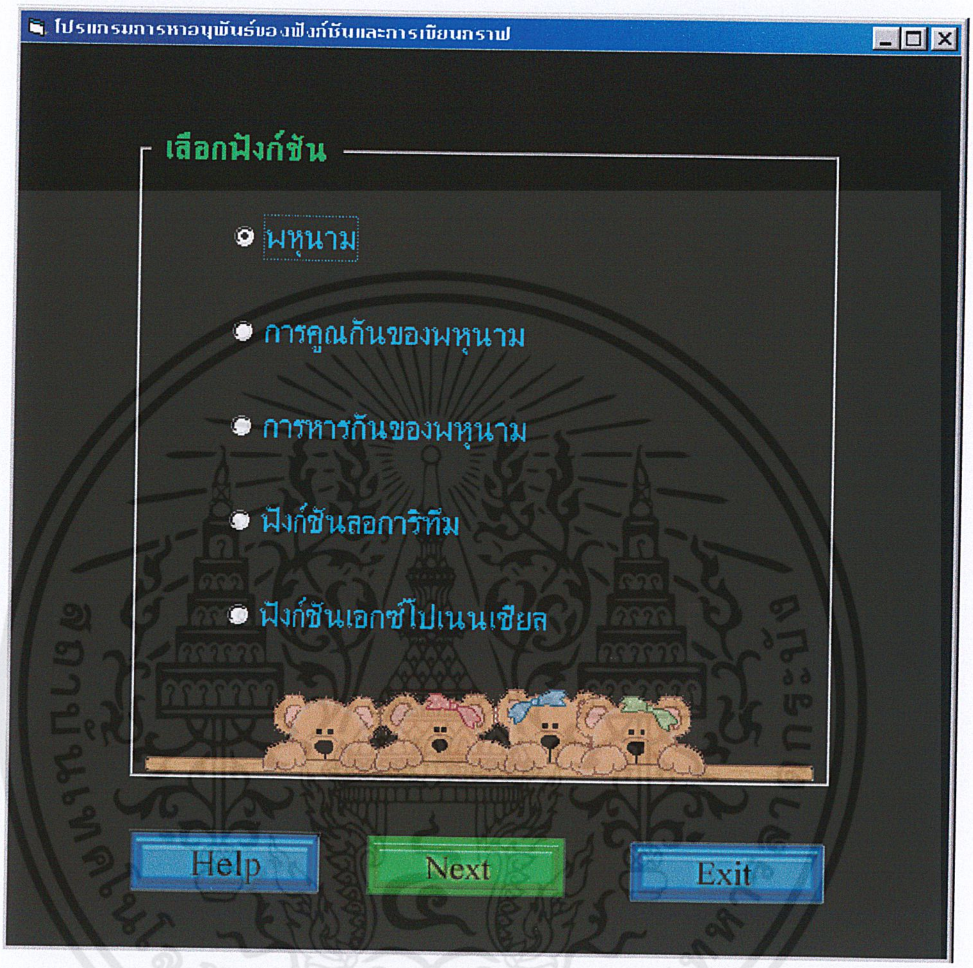
$e^\wedge(f(x)) = x^3 - 3x$



รูปที่ 4.26 **แสดงกราฟของฟังก์ชัน $e\hat{}(f(x)) = x^3 - 3x$**

4.1.6 การทดลองที่ 6

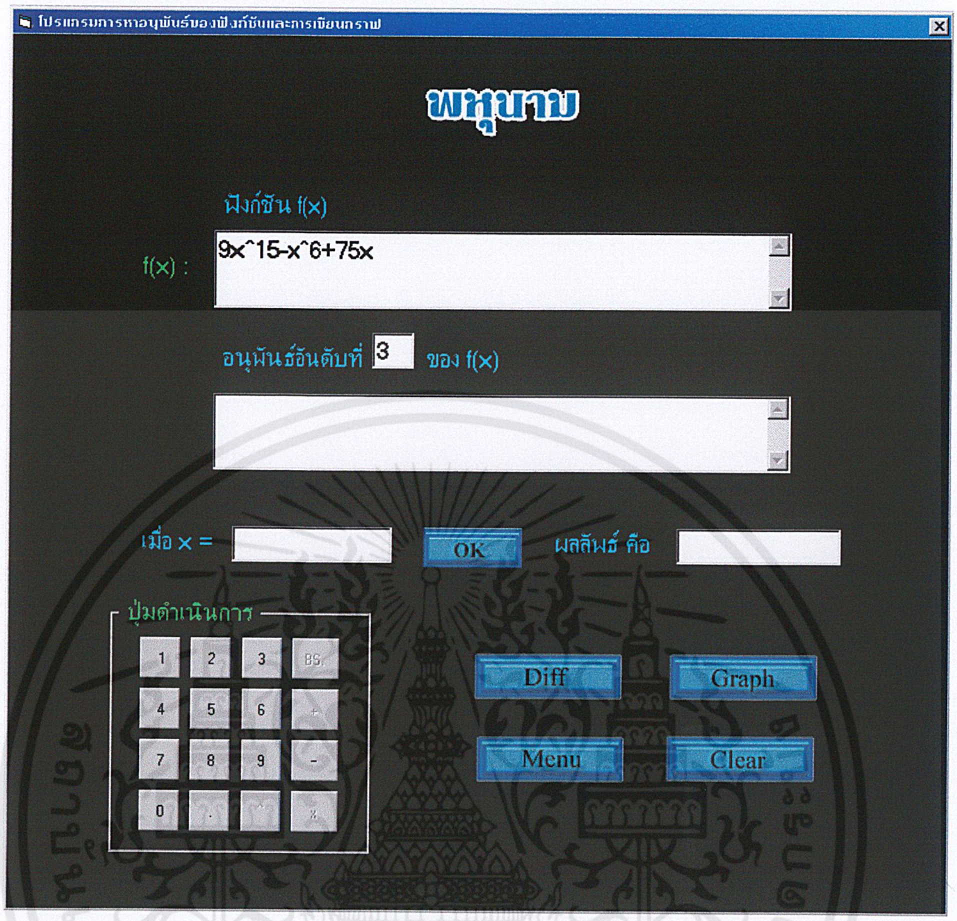
1. ที่ช่องเลือกฟังก์ชัน ทำการเลือก พหุนาม จากนั้นคลิกที่ปุ่ม Next



รูปที่ 4.27 แสดงการเลือกฟังก์ชันพหุนาม

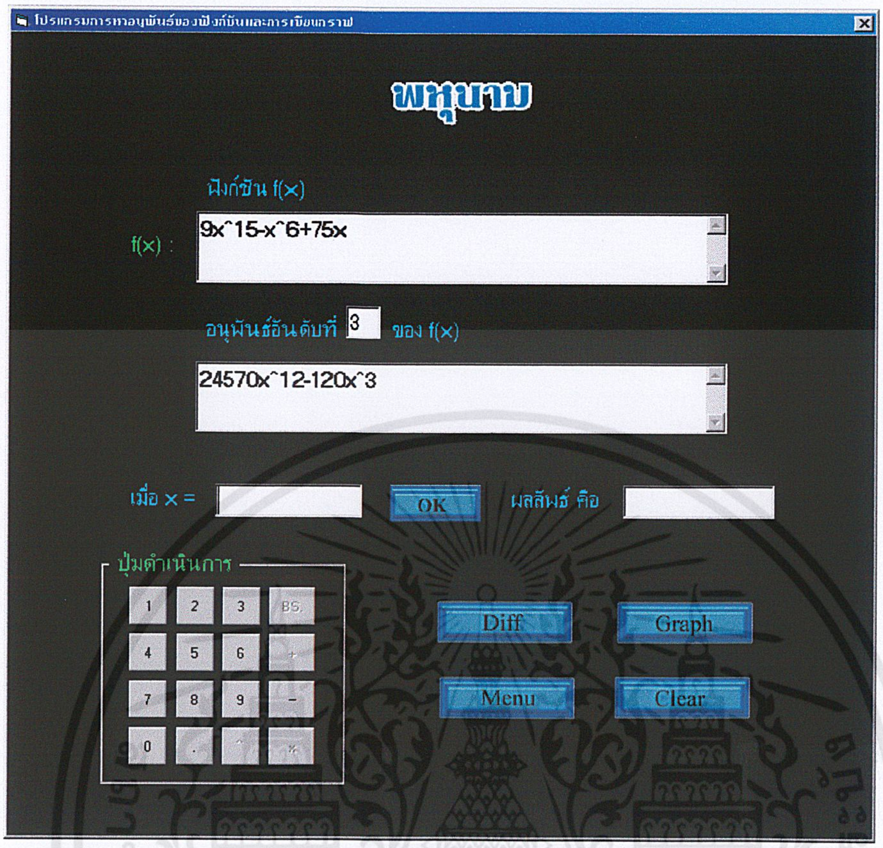
2. ทำการป้อนฟังก์ชัน $f(x) = 9x^{15} - x^{6} + 75x$ โดยพิมพ์ 9x^15-x^6+75x ลงในช่องว่างของ f(x)

3. ทำการป้อนค่าอนุพันธ์อันดับที่ของฟังก์ชัน f(x) ลงในช่องว่าง ซึ่งในที่นี้กำหนดให้เท่ากับ 3



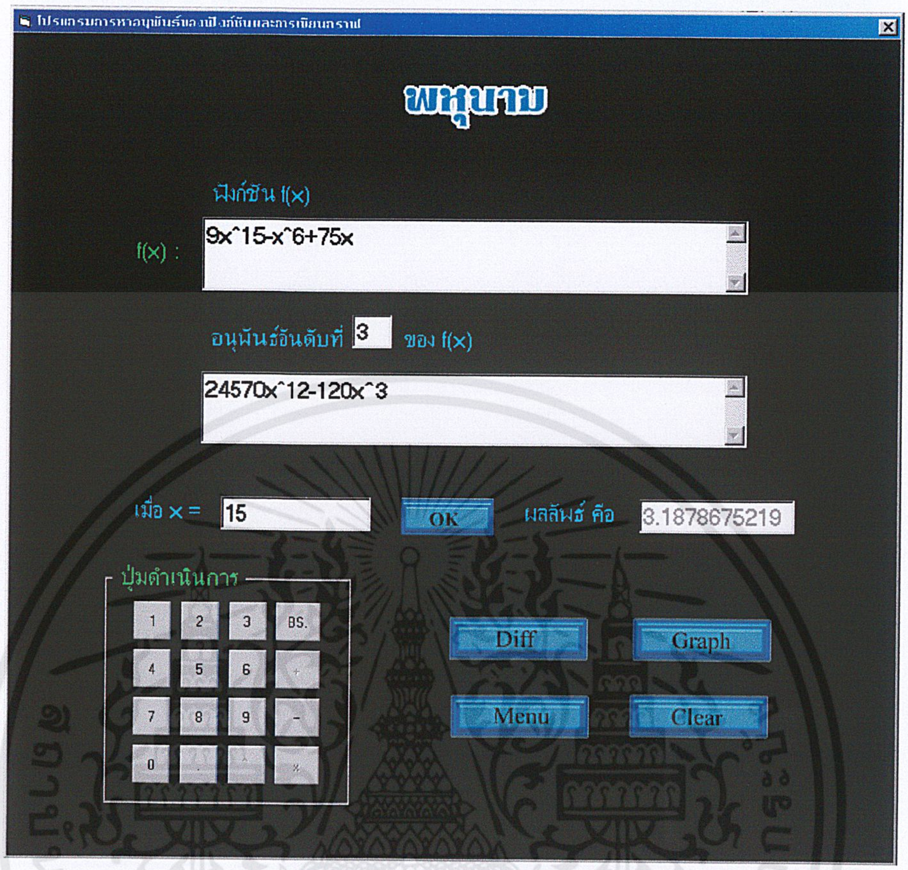
รูปที่ 4.28 **แสดงการป้อนฟังก์ชัน $f(x) = 9x^{15} - x^{6} + 75x$ และอันดับที่ของอนุพันธ์เท่ากับ**3

4. คลิกปุ่ม Diff เพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล



รูปที่ 4.29 **แสดงอนุพันธ์อันดับที่** 3 **ของฟังก์ชัน** $\mathbf{f(x) = 9x^{15} - x^{6} + 75x}$

5. ป้อนค่า x = 15 เพื่อหาผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วคลิกปุ่ม OK เพื่อให้โปรแกรมทำการประมวลผล

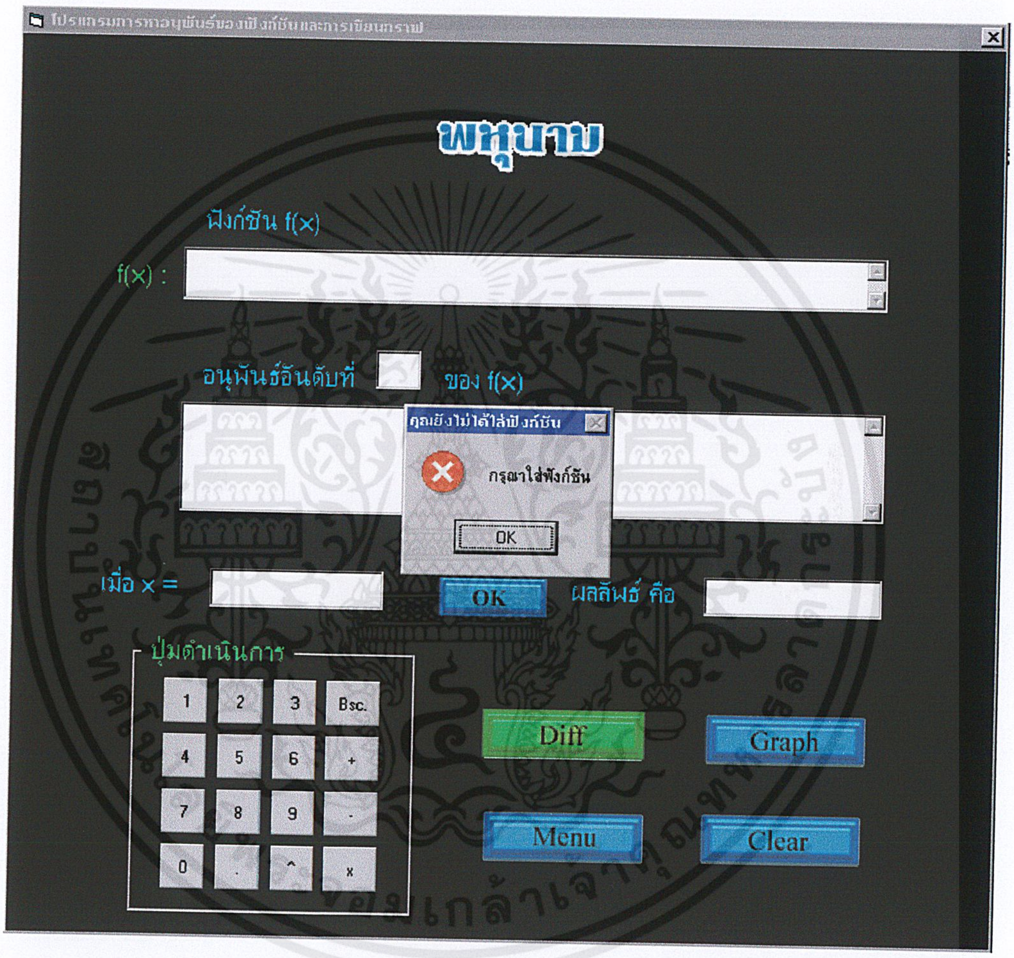


รูปที่ 4.30 **แสดงผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ เมื่อ x มีค่าเท่ากับ 15**

4.2 การแสดงข้อผิดพลาดของโปรแกรม

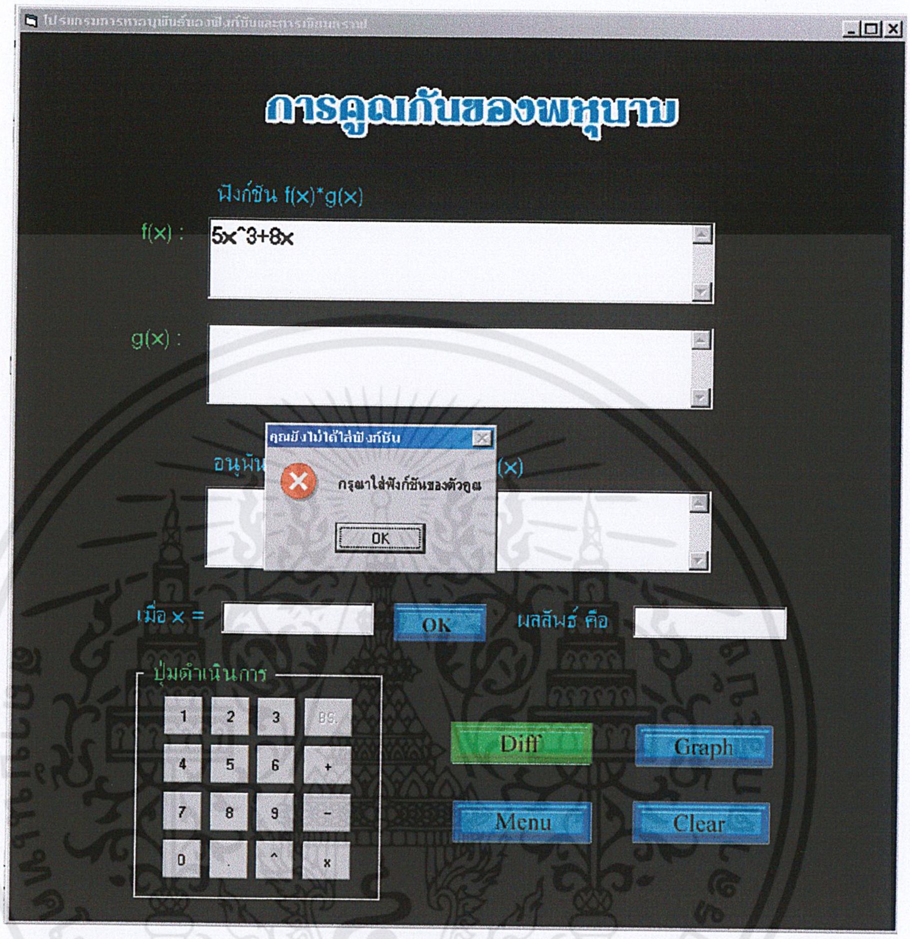
โปรแกรมสามารถแสดงข้อผิดพลาด หากผู้ใช้ป้อนค่าสมการไม่ถูกต้อง หรือไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ ข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีลักษณะดังนี้ คือ

4.2.1 **เกิดจากการไม่ป้อนสมการ** แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



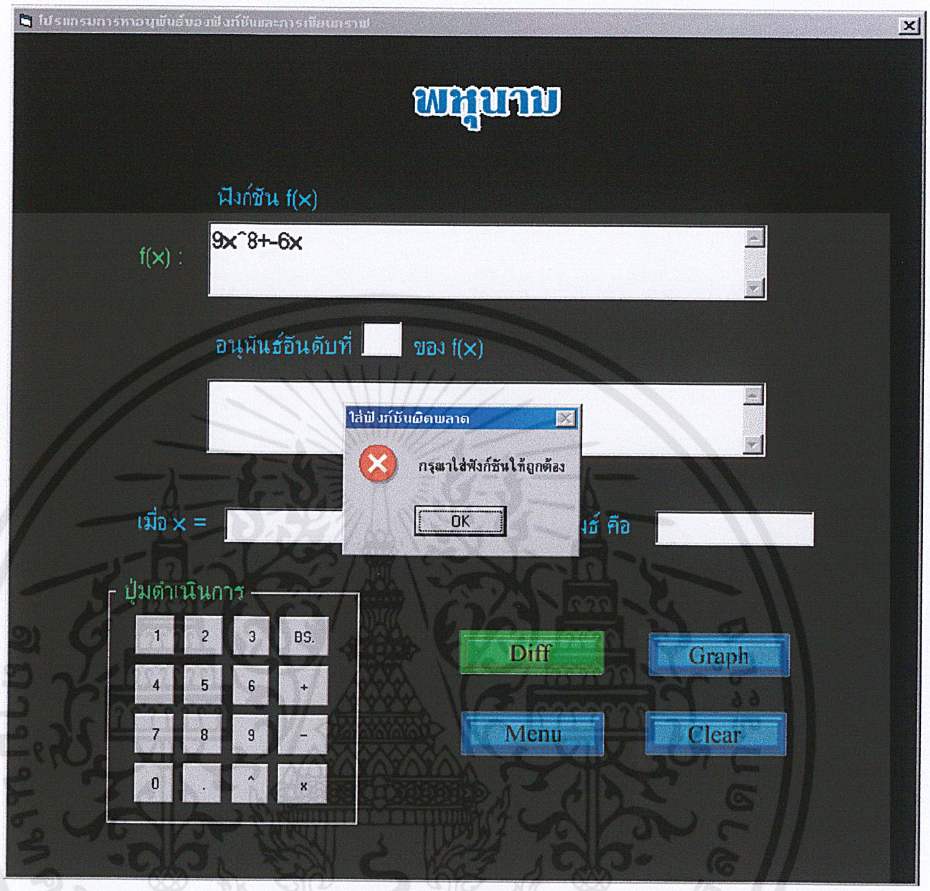
รูปที่ 4.31 แสดงข้อผิดพลาดจากการไม่ป้อนฟังก์ชัน

4.2.2 **เกิดจากการป้อนค่าที่ต้องการพิจารณาไม่ครบถ้วน** แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



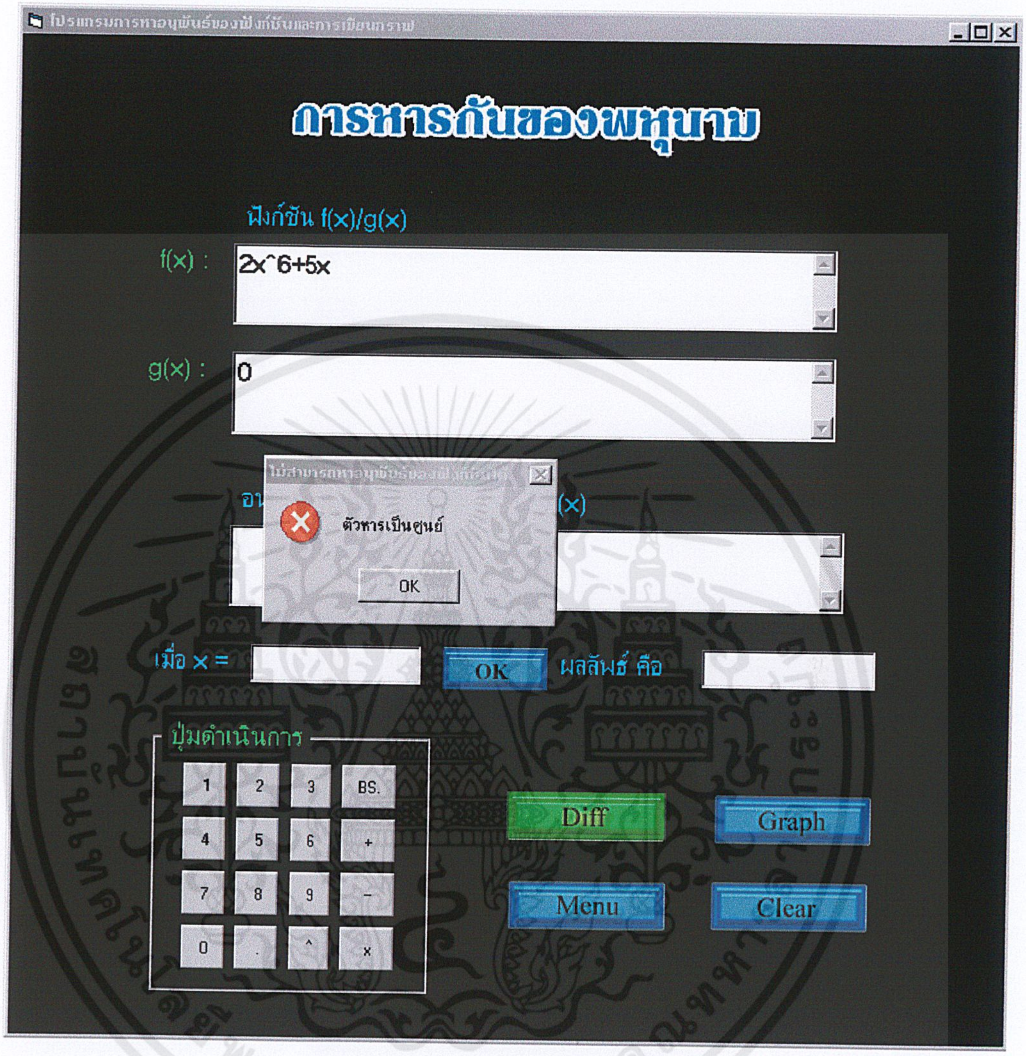
รูปที่ 4.32 แสดงข้อผิดพลาดจากการป้อนฟังก์ชันที่ต้องการพิจารณาไม่ครบถ้วน

4.2.3 **เกิดจากการป้อนค่าสมการผิด** แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



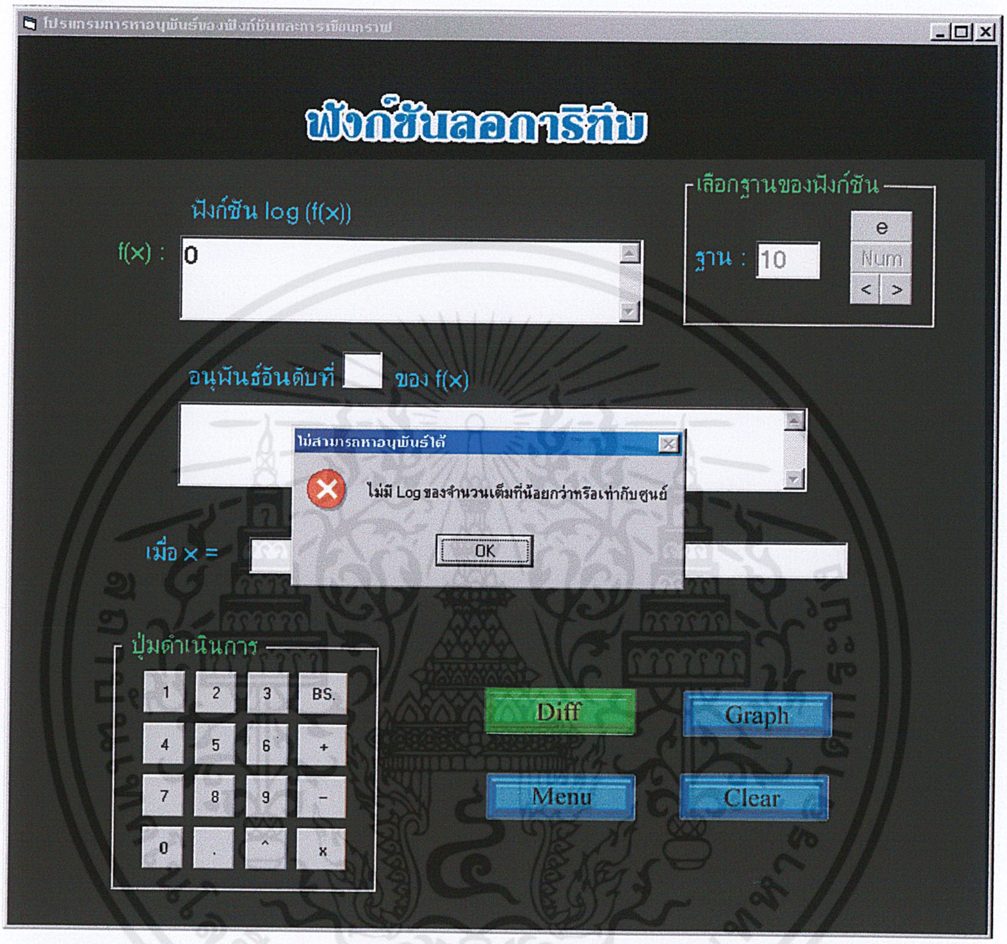
รูปที่ 4.33 **แสดงข้อผิดพลาดจากการป้อนฟังก์ชันผิด**

4.2.4 **เกิดจากการที่ตัวหารเป็นศูนย์** แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.34 **แสดงข้อผิดพลาดเนื่องจากตัวหารเป็นศูนย์**

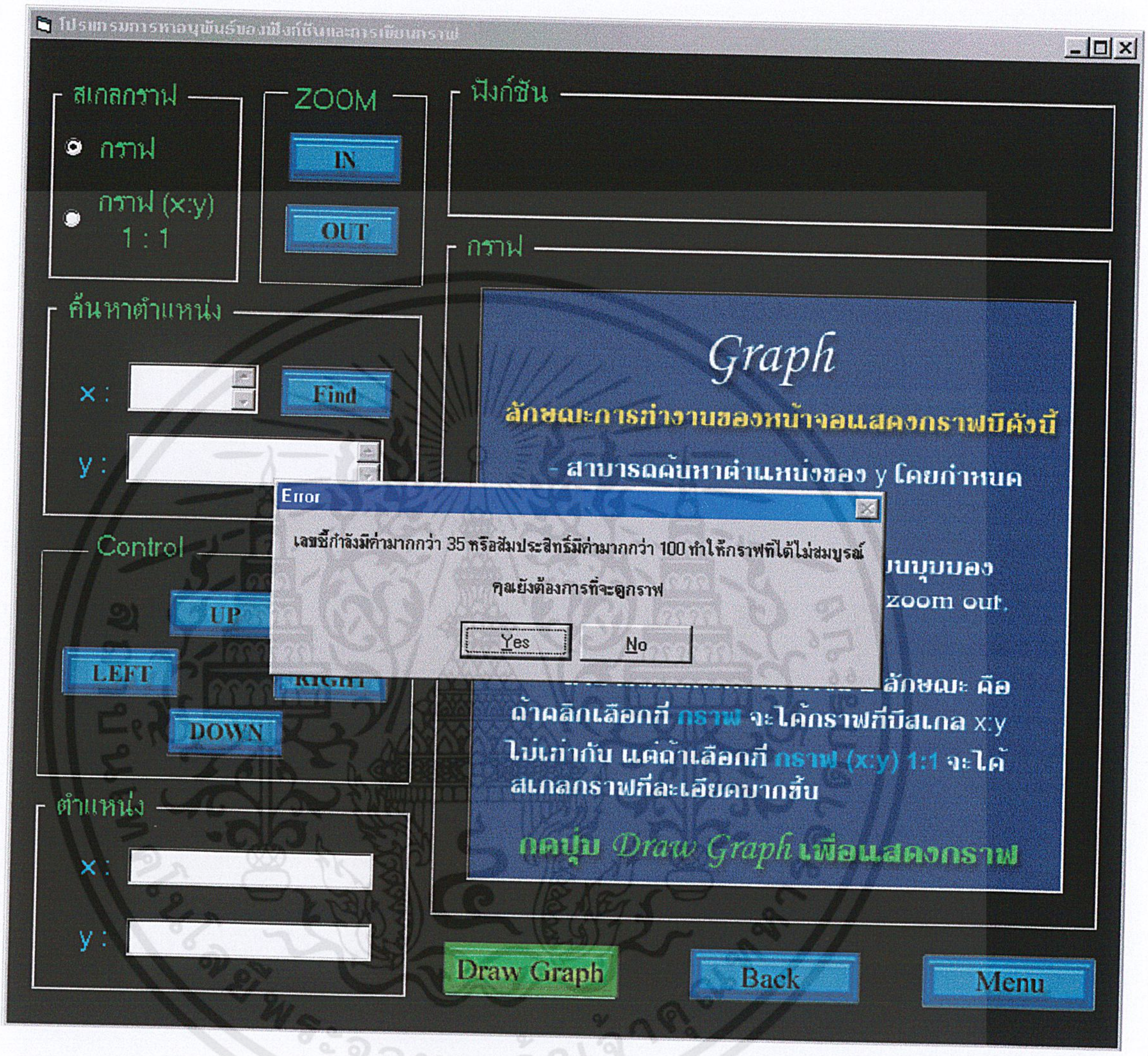
4.2.5 **เกิดจากการป้อนค่าฟังก์ชันลอการิทึมเป็นจำนวนที่น้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์** แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.35 แสดงข้อผิดพลาดเนื่องจากการป้อนค่าฟังก์ชันลอการิทึมเป็นศูนย์

รูปที่ 4.36 **แสดงข้อผิดพลาดเนื่องจากการป้อนค่าฟังก์ชันลอการิทึมน้อยกว่าศูนย์**

4.2.6 **เกิดจากการป้อนฟังก์ชันที่มีเลขชี้กำลังมากกว่า 35 หรือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่ามากกว่า 100 แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้**



รูปที่ 4.37 **แสดงข้อผิดพลาดเนื่องจากการป้อนฟังก์ชันที่มีเลขชี้กำลังมากกว่า** 35 **หรือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่ามากกว่า** 100

4.2.7 เกิดจากการป้อนค่าอนุพันธ์อันดับที่มากกว่า 5 แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 4.38 แสดงข้อผิดพลาดเนื่องจากการป้อนอันดับที่ของอนุพันธ์มากกว่า 5

บทที่ 5
สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

โปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการเขียนกราฟ เป็นโปรแกรมที่ถูกพัฒนาขึ้นโดยการนำกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้กับการเขียนโปรแกรมด้วยภาษา วิชวล เบสิก เพื่ออำนวยความสะดวกให้แก่ผู้ที่มีความสนใจและต้องการที่จะศึกษา

5.2 สรุปผล

ผลการวิจัยโปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการเขียนกราฟ สามารถสรุปโดยสังเขปได้ดังนี้

5.2.1 สามารถใช้การควบคุมต่างๆได้ด้วยเมาส์ (Mouse) และคีย์บอร์ด (Keyboard)

5.2.2 โปรแกรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการเขียนกราฟ มีลักษณะดังต่อไปนี้เท่านั้น

5.2.2.1 สามารถรับสมการของฟังก์ชันได้หนึ่งตัวแปร และรับจำนวนพจน์ของฟังก์ชันได้ไม่เกิน 100 พจน์

5.2.2.2 สามารถรับสมการที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันแบบต่างๆ ได้ดังนี้

- $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ โดยที่ a_i เป็นจำนวนจริง เมื่อ i = 0,1,2, ... ,n เรียกว่า ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

- การคูณกันของฟังก์ชันพหุนาม

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)\,(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)$$

- การหารกันของฟังก์ชันพหุนาม

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)\,/\,(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)$$

- การซ้อนกันของฟังก์ชันลอการิทึมกับฟังก์ชันพหุนาม

$$\log\,(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)$$
$$\ln\,(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)$$

- การซ้อนกันของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลกับฟังก์ชันพหุนาม

$$e^{(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)}$$

5.2.3 เลขชี้กำลังของฟังก์ชันสามารถรับได้เฉพาะจำนวนเต็มบวกเท่านั้น

5.2.4 ในการแสดงผลลัพธ์ของฟังก์ชัน สามารถแสดงเป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่ง

5.2.5 สามารถกำหนดอันดับของอนุพันธ์ที่ต้องการหาได้

5.2.6 สามารถแสดงกราฟได้ในช่วงที่ x มีค่าระหว่าง –32 ถึง 32

5.2.7 สามารถแสดงข้อผิดพลาดในการรับค่าของฟังก์ชัน

5.2.8 โปรแกรมนี้สามารถแสดงผลการวิเคราะห์และแสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ได้ในทุกขั้นตอน

5.3 ข้อจำกัดของโปรแกรม

5.3.1 โปรแกรมนี้ไม่สามารถรับฟังก์ชันที่ป้อนวงเล็บ และฟังก์ชันทางตรีโกณมิติได้ เช่น sine, cos, tan

5.3.2 โปรแกรมนี้ไม่สามารถรับฟังก์ชันที่ป้อนเครื่องหมายลบที่ซ้อนกันได้ เช่น $-(-3x)$

5.3.3 โปรแกรมนี้ไม่สามารถแสดงกราฟได้ทุกฟังก์ชัน เนื่องจากค่าของฟังก์ชันเกินขอบเขตของสเกลที่กำหนดไว้

5.3.4 โปรแกรมนี้สามารถแสดงเส้นกำกับแนวตั้งได้ที่เลขชี้กำลังของฟังก์ชันไม่เกิน 2

5.3.5 การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหารกันของพหุนาม , ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล สามารถหาอนุพันธ์ได้โดยที่อันดับของอนุพันธ์ไม่เกิน 5

5.3.6 เลขชี้กำลังสูงสุดของฟังก์ชันจะต้องมีค่าไม่เกิน 35 เพื่อให้การคำนวณเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

5.3.7 สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจะต้องมีค่าไม่เกิน 100 เพื่อให้การคำนวณเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

5.3.8 ถ้าค่า x ที่ต้องการพิจารณาหรือค่า $f(x)$ ที่ได้จากการคำนวณมีค่ามากเกินไปที่จะทำไม่สามารถประกาศตัวแปรมารับค่า x และ $f(x)$ ได้

5.4 ข้อเสนอแนะ

5.4.1 พัฒนาการทำงานให้สามารถรับฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น เช่น ฟังก์ชันทางตรีโกณมิติ

5.4.2 พัฒนาการรับค่าตัวแปร ให้รับได้มากกว่า 1 ตัวแปร

5.4.3 พัฒนาให้สามารถป้อนวงเล็บและเครื่องหมายลบที่ซ้อนกันได้

5.4.4 พัฒนาขอบเขตในการแสดงกราฟ ให้สามารถแสดงกราฟได้ทุกฟังก์ชัน

5.4.5 พัฒนาให้โปรแกรมสามารถรับฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น

$$\log\left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\right),\ \ln\left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\right)$$

โดยที่ a_i และ b_i เป็นจำนวนจริง เมื่อ $i = 0,1,2,\ldots,n$

บรรณานุกรม

กิตติ ภักดีวัฒนะกุล และ จำลอง ครูอุตสาหะ. 2543. Visual Basic6 **ฉบับโปรแกรมเมอร์**. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพ : ไทยเจริญการพิมพ์.

ฉันทวุฒิ พืชผล และ พิชิต สันติกุลานนท์. 2543. **คู่มือเรียน**Visual Basic6. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพ : บริษัท โปรวิชั่น จำกัด

ประเสริฐ พุทธให้. **แคลคูลัสI**. กรุงเทพ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

ภัคคินี ยิมเรวัต. 2529. **คณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์1 ตอน1**. กรุงเทพ : โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

ภัคคินี ยิมเรวัต. 2529. **คณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์1 ตอน2**. กรุงเทพ : โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

วรานันต์ วงศ์วิศว์. 2541. Visual Basic for Application. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพ : บริษัท เอส.พี.ซี. บุ๊คส์

Donald L. Stand and Mildred L. Stand. 1998. **Calculus for management and the life and Social Sciences**. Homewood.

Margaret L. Lial. et.at. 1993. **Calculus with Application**. 5th ed. New York : Harper Collins College.