



# ปีการศึกษา 2532

การลดรูปของระบบเชิงเส้นโดยใช้การประมาณค่าแบบพาด  
Linear system reduction using Padé approximation

โดย

นายสิกการ สุทธิรักษา  
นายอัฐกาญจน์ สุทธิรัมย์

อาจารย์ที่ปรึกษา  
รศ. วิพันธ์ ปรีชาพานิช

026921


22.พ.ย. 2532

# ปริญญาานิพนธ์ปีการศึกษา 2532

เรื่อง การลดรูปของระบบเชิงเส้นโดยใช้การประมาณค่าแบบพาด  
*Linear system reduction using Padé approximation*

ผู้จัดทำ 1 นายลักการ สุทธิรักษา  
2 นายอัฐกาญจน์ สุทธิรัมย์

อาจารย์ที่ปรึกษา

  
(รศ. วิพันธ์ ปรึษาพานิช)



# สารบัญ

บทที่	หน้า
บทที่ 1 การประมาณค่าแบบพหุคูณ	1
1.1 คุณสมบัติของโคเออนิก	1
1.2 การลดรูปโดยใช้การประมาณค่าแบบพหุคูณ	2
บทที่ 2 การทดลองและผลการทดลอง	7
2.1 เตรียมการทดลอง	7
2.2 ขั้นตอนการทดลอง	8
2.3 ผลการทดลอง	8
บทที่ 3 วิจัยและสรุปผลการทดลอง	23
ภาคผนวก ก	
ภาคผนวก ข	



## บทนำ

บทนำ ในการวิเคราะห์ระบบที่มีอันดับสูงนั้น จะเป็นงานที่ยุ่งยากและสิ้นเปลืองค่าใช้จ่าย ดังนั้น 1 วิธีการแทนระบบที่มีอันดับสูงด้วยระบบที่มีอันดับต่ำ วิธีหลายวิธีในการลดรูปอันดับของระบบ (Chidambara 1969, Davison 1966, Marshal 1966 และ Nogarajan 1971) นั้น ยึดหลักการคงไว้ซึ่งโพลเด่น (dominant poles) ของระบบในแบบจำลองลดรูป ลักษณะสำคัญของวิธีเหล่านี้คือ แบบจำลองลดรูปมักจะเสถียร (ไม่เสถียร) ถ้าระบบที่มีอันดับสูงนั้นเสถียร (ไม่เสถียร) ถึงแม้ว่าวิธีเหล่านี้จะอธิบายระบบในรูปของเวกเตอร์สถานะ (State-vector form) ซึ่งทำให้ต้องคำนวณหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของเมตริกซ์สถานะอันดับสูง การคำนวณเหล่านี้เป็นงานที่ยุ่งยากและใช้เวลานาน รูปผลัดจะคำนวณพลาดได้ถ้าค่าไอเกนของ ระบบมีค่าหลายค่า

วิธีในการลดรูปของระบบอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งยึดหลักการของการคงไว้ซึ่งโมเมนต์ของเวลาของระบบในแบบจำลองลดรูป (Paynter 1957, Bosley and Lees 1972) การใช้เศษส่วน (continued fraction) สังเคราะห์แบบจำลองลดรูปนั้น (Chen and Shieh 1970 Chuana 1971) ถือเป็นกรณีพิเศษของการประมาณค่าแบบพาด (Baker 1965) ซึ่งในกรณีระบบเสถียรเชิงอะซิมโทติก (asymptotically Stable) จะมีวิธีการทำเหมือนวิธีการคงไว้ซึ่งโมเมนต์ของเวลา (Zakian 1973) วิธีเหล่านี้มีลักษณะเป็นประโยชน์มากมาย เช่น คำนวณได้ง่าย, ทำให้โมเมนต์ของเวลาของระบบเท่ากับโมเมนต์ของเวลาของแบบจำลองลดรูป และค่าสถานะเสถียรของเอาต์พุตของ ระบบและแบบจำลองลดรูปจะเหมือนกันถ้าอินพุตอยู่ในรูปของ

## Σ๐๑๓

วิธีเหล่านี้ใช้กันมากในการสร้างแบบจำลองกระบวนการทางเคมี (Bosley and Lees 1972) ข้อเสียเปรียบอย่างมากของวิธีเหล่านี้คือ แบบจำลองลดรูปอาจจะไม่เสถียร (เสถียร) ถึงแม้ว่าระบบนั้นเสถียร (ไม่เสถียร) (Brown 1971, Rossen 1972)

วัตถุประสงค์ของปริญาพนธ์เล่มนี้คือ พัฒนาวิธีการลดรูปของระบบโดยวิธีการประมาณค่าแบบพาด เพื่อให้แบบจำลองลดรูปคงไว้ซึ่งโมเมนต์ของเวลา โดยจะมีการทดสอบสถานะเสถียรของระบบและแบบจำลองลดรูปว่าแตกต่างกันอย่างไรซึ่งจะพิจารณาได้จากผลตอบสนองของเวลา

ในบทที่ 1 จะกล่าวถึงนิยามของตัวประมาณค่าแบบพาด และทฤษฎีของ โคเอนิค โดยนำวิธีการลดรูปของระบบอินพุตเดียวและเอาต์พุตเดียวมากล่าวไว้ด้วย บทที่ 2 จะกล่าวถึงการทดลองและแสดงตัวอย่างที่ได้นำมาศึกษา บทที่ 3 เป็นบทที่บรรจุไว้ด้วยสรุปผลการทดลองและวิจารณ์ สำหรับภาคผนวก ก เป็นวิธีคำนวณเชิงตัวเลขที่ถูกเลือกใช้ในโปรแกรมที่จัดทำขึ้น ภาคผนวก ข กล่าวถึงลักษณะทั่วไปของเทอร์ปาสคาล 5.5 และรายละเอียดเกี่ยวกับโปรแกรมที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการทดลอง

บทที่ 1  
การประมาณค่าแบบพาด  
Padé Approximation

1.1. ทฤษฎีของโคเอนิก (Koenig's theorem)

นิยาม

โดยทั่วไปตัวประมาณค่าแบบพาด (Padé approximant) ถูกนิยามไว้ว่าตัวประมาณค่าแบบพาดคือ ฟังก์ชันเศษส่วน  $[P_m(x)]/[Q_n(x)]$  ซึ่ง  $P_m(x)$  และ  $Q_n(x)$  เป็นโพลิโนเมียลของ  $x$  มีดีกรี  $m$  และ  $n$  ตามลำดับ โดยเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์  $[m, n]$  ฟังก์ชันเศษส่วน  $[m, n]$  จะเป็นตัวประมาณค่าแบบพาดของฟังก์ชัน  $f(x)$  ก็ต่อเมื่อการกระจายอนุกรมกำลังของ  $[m, n]$  เหมือนกับการกระจายอนุกรมกำลังของ  $f(x)$  โดยกระจายถึงเทอมที่มีอันดับ  $x^{m+n}$

ให้ฟังก์ชันที่ต้องการประมาณค่าถูกนิยามด้วยอนุกรมกำลัง

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \quad (1)$$

และให้ตัวประมาณค่าแบบพาดถูกนิยามด้วย

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n} \quad (2)$$

เพราะว่าการกระจายอนุกรมกำลังของ (2) ต้องสอดคล้องกับ (1) โดยพิจารณาถึง  $x^{m+n}$  ดังนั้นเราจะได้เซตของสมการเส้นตรง

$$a_0 = b_0c_0$$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_m = b_0c_m + b_1c_{m-1} + \dots + b_m c_0 \quad (3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$0 = b_0c_{m+n} + b_1c_{m+n-1} + \dots + b_n c_m$$

ซึ่งจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ของ (2) ได้อย่างเดียว เราควรสังเกตว่าไม่  $b_0$  หรือ  $b_n$  มีค่าเท่ากับ 1

การวิเคราะห์หัดข้างบน การประมาณค่าแบบพาดถูกกระทำรอบจุด  $x=0$

ทฤษฎีที่สองทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการลู่ออกของโพลของตัวประมาณค่าแบบพาด ได้ถูกกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีที่ 1 (โคเอนิก)

ให้

$$f(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots, c_i \text{ เป็นจำนวนจริงและ } c_0 > 0 \quad (4)$$

เป็นฟังก์ชันเศษส่วนสำหรับ  $|s| < r$  ถ้า

$$|r| < \sigma < R$$

ดังนั้น

$$\frac{c_v}{c_{v+1}} = r + O(\sigma^{v+1}) \quad (5)$$

ทฤษฎีที่ 2 (รูปทั่วไป)

ให้  $f(s)$  ในสมการ (4) เป็นฟังก์ชันเศษส่วนสำหรับ  $|s| < R$  และมี  $p$  โพล  $r_1, r_2, \dots, r_p$  ให้

$$0 < |r_1| \leq |r_2| \leq |r_3| \leq \dots \leq |r_p| < \sigma R < R$$

และให้

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= (1-r_1^{-1}s)(1-r_2^{-1}s)\dots(1-r_p^{-1}s) \\ &= 1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ps^p \end{aligned} \quad (6)$$

ในที่สุดให้ตัวส่วนของตัวประมาณค่าแบบพาด [v, p] คือ

$$k_v(s) = 1 + \alpha_1^{(v)}s + \alpha_2^{(v)}s^2 + \dots + \alpha_p^{(v)}s^p \quad (7)$$

ดังนั้น

$$\alpha_i^{(v)} = a_i + O(\sigma^v) \quad (8)$$

$$K_v(s) = \Psi(s) + O(\sigma^v) \quad (9)$$

สำหรับกรณีเมื่อ  $p=1$  ทฤษฎีที่ 2 จะเป็นทฤษฎีที่ 1

1.2 การลดรูปโดยใช้การประมาณค่าแบบพาด (Padé approximation and dominant mode reduction) พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่มีอันดับสูง

$$G(s) = \frac{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_{n-1}s^{n-1}}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)} \quad (10)$$

$$= \frac{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_{n-1}s^{n-1}}{e_0 + e_1s + e_2s^2 + \dots + e_ns^n} \quad (11)$$

$G(s)$  สามารถกระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังรอบจุด  $s=0$

$$G(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots \quad (12)$$

ซึ่ง

$$c_0 = \frac{d_0}{e_0}$$

$$c_k = \frac{1}{e_0} \left[ d_k - \sum_{j=1}^k e_j c_{k-j} \right], \forall k > 0 \quad (13)$$

และ

$$d_k = 0, \forall k > n-1$$

$e_i$  เป็นสัดส่วนโดยตรงกับโมเมนต์ของเวลา (time moment) ของระบบ

โดยสมมติว่าระบบนั้นเสถียรเชิงอะซิมโทติก (asymptotically stable) โดยตลอดทั้งปริภูมิพหุนามนี้ ให้  $e_i$  เป็นโมเมนต์ของเวลา

สมมติว่าแบบจำลองลดรูป  $R(s)$  มีอันดับ  $k$  ต้องการคงไว้ซึ่งโพลที่  $s = -s_i$  ให้

$$R(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{k-1} s^{k-1}}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{k-1} s^{k-1} + s^k} \quad (14)$$

เพื่อความสะดวกเราจะให้อันดับของตัวเศษของ  $R(s)$  และ  $G(s)$  น้อยกว่าอันดับของตัวส่วนของ  $R(s)$  และ  $G(s)$  อยู่หนึ่งอันดับ ดังนั้นถ้า  $R(s)$  และ  $G(s)$  อยู่หนึ่งอันดับ ดังนั้นถ้า  $R(s)$  เป็นตัวประมาณค่าแบบพาดของ  $G(s)$  เราจะได้

$$a_0 = b_0 c_0$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$$

(15)

$$0 = b_0 c_{1k-1} + b_1 c_{1k-1} + \dots + c_{k-1}$$

$$0 = b_0 c_{1k-1} + b_1 c_{1k-1} + \dots + c_k$$

แต่เพราะว่า  $R(s)$  ต้องมีโพลที่  $s = -s_i$  ดังนั้นใช้บทสรุปของการประมาณค่าแบบพาดจากกว่าหนึ่งจุด สมการสุดท้ายของ (15) ถูกแทนด้วยสมการข้างล่าง

$$0 = b_0 - b_1 s_i + b_2 s_i^2 - \dots + (-1)^k s_i^k \quad (16)$$

(14) ในสมการเหล่านี้จะเป็นตัวกำหนดค่าของสัมประสิทธิ์  $b_i, a_i, (i=0, \dots, k-1)$  ของ

คือใช้สมมติว่าแบบจำลองลดรูป  $R(s)$  ต้องการคงไว้ซึ่งโพลเด่น  $k$  ตัว (โพล  $k$  ตัวอยู่ใกล้จุดกำเนิดที่สุด) ของระบบอันดับสูง ยิ่งไปกว่านั้นสมมติว่าเรารู้ตำแหน่งของโพล  $k$  ตัวนั้น  $K(s)$  จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_{k-1} s^{k-1}}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_k)} \\ &= \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_{k-1} s^{k-1}}{b_0 + b_1 s + \dots + b_{k-1} s^{k-1} + s^k} \end{aligned} \quad (17)$$

ซึ่ง  $b_i (i=0, 1, \dots, k-1)$  อาจจะคำนวณได้จากเทอมของ  $s_1, \dots, s_k$

ดังนั้น ถ้า  $R(s)$  คือตัวประมาณค่าแบบพาดของ  $G(s)$  ดังนั้น  $a_i (i=0, 1, \dots, k-1)$  ถูกกำหนดโดยใช้สมการ  $k$  สมการแรกของ (15)

เนื่องจากเรารู้ตำแหน่งโพลเด่น (dominant pole) ของระบบ ซึ่งในกรณีส่วนใหญ่เราจะไม่รู้ ดังนั้นเราจะใช้ทฤษฎีที่ 1 และ 2 ในการกำหนดจำนวนของโพลเด่น และตำแหน่งของมัน

ตัวอย่างสมมติว่าฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ มีตำแหน่งของโพลดังแสดงใน รูปที่ 1



รูปที่ 1. ตำแหน่งของโพลของ  $G(s)$

ใช้ทฤษฎีของโคเอนิคกับการกระจาย

$$G(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots$$

โพลตัวหนึ่งซึ่งอยู่ใกล้จุดกำเนิดที่สุด  $s_1$  จะถูกเลือก ถ้า  $s_1$  อยู่ใกล้กับ  $s_2$  และ  $s_3$  ดังนั้น อัตราส่วน  $s_i = (c_i)/(c_{i+1})$  (ทฤษฎีที่ 1) จะลู่เข้าอย่างช้า ซึ่งหมายความว่า โพลอย่างน้อยที่สุดหนึ่งตัวอยู่ใกล้กับ  $s_1$  ดังนั้น เมื่อใช้ทฤษฎีที่ 2 ทดสอบการลู่เข้าของ โพล 2 ตัว (นั่นคือ  $p=2$  ในทฤษฎีที่ 2) ในตัวอย่างนี้มันจะไม่ลู่เข้าเพราะว่า  $s_1$  และ  $s_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น ทฤษฎีที่ 2 ต้องใช้ทดสอบกับการลู่เข้าของโพลสามตัวแรก ถ้า การลู่เข้าเป็นไปโดยเร็ว ดังนั้นมันจะหมายความว่าระบบมีโพลเด่นสามตัว และสมการซึ่ง สมพันธ์กับโพลเหล่านี้ สามารถคำนวณได้โดยใช้ (3)

อัตราการลู่เข้าอาจถูกใช้เพื่อกำหนดอัตราส่วนระหว่างโพลที่ถูกตัดทิ้ง ที่มีค่าน้อยที่สุด กับโพลที่ถูกรักษาไว้ที่มีค่ามากที่สุด

ดังนั้นในการลดอันดับของฟังก์ชันถ่ายโอน อันดับแรกกระจายฟังก์ชันถ่ายโอน เป็นอนุกรมกำลังแล้วใช้ทฤษฎีที่ 1 และ 2 เพื่อกำหนดจำนวนของโพลเด่นและตำแหน่งของมัน ต่อจากนั้นใช้การประมาณค่าแบบพาดเพื่อที่กำหนดตัวเศษของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ ถูกลดรูป

เราควรสังเกตว่าโพลและซีโรของ  $G(s)$  ที่เหมือนกันจะถูกละทิ้งโดยอัตโนมัติ และ ไม่ทำให้เกิดผลกระทบต่อแบบจำลองลดรูป

ในกรณีที่ระบบถูกอธิบายในรูปตัวแปรสถานะ

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (18)$$

$$y = Cx + Du$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1} B + D \\ &= (CA^0B + D) + CA^1Bs + CA^2Bs^2 + \dots \quad (19) \\ &= c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + \dots \end{aligned}$$

ซึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_0 = (CA^{-1}B+D) \quad (20)$$

$$c_i = CA^{-(i+1)}B, \quad \forall i > 0$$

ดังนั้น ขั้นตอนในการลดรูปอาจใช้กับการกระจายของ (19) ซึ่งค่าของสัมประสิทธิ์ถูกกำหนดโดยใช้ (20)

ถ้าแบบจำลองของระบบไม่เสถียร ดังนั้น แบบจำลองลดรูปก็ควรจะไม่เสถียรด้วย ฉะนั้นโหมดที่ไม่เสถียรของ  $G(s)$  ต้องถูกรักษาไว้ในแบบจำลองลดรูป ทฤษฎีของโคเนนิคและรูปทั่วไปของทฤษฎีนี้ อาจถูกใช้เพื่อคำนวณหาโหมดที่ไม่เสถียรดังขั้นตอนข้างล่าง

ใช้การแปลง  $s = \frac{z-1}{z+1}$  กับ  $G(s)$  เพื่อจะได้  $G(z)$  โพลที่ไม่เสถียรของ  $G(s)$

จะถูกส่งไปนอกวงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบแซด ( $z$ -plane) กระจาย  $G(z)$

$$G(z) = d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots \quad (21)$$

แล้วใช้ทฤษฎีที่ 1 และ 2 กับ (21) เราจะได้โพลที่มีค่ามากของ  $G(s)$  ทั้งหมด ซึ่งในกรณีนี้จะเป็นโพลที่อยู่นอกวงกลมหนึ่งหน่วย

1.2.1 การตีความหมายโดยใช้เศษส่วนย่อย (An alternative interpretation using partial fraction)

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบในรูปเศษส่วนย่อยดังนั้นให้

$$G(s) = \frac{x_1}{1-\alpha_1 s} + \frac{x_2}{1-\alpha_2 s} + \dots + \frac{x_n}{1-\alpha_n s} \quad (22)$$

เขียน (22) ใหม่ได้

$$G(s) = x_1(1+\alpha_1 s+\alpha_1^2 s^2+\dots) + x_2(1+\alpha_2 s+\alpha_2^2 s^2+\dots) + \dots + x_n(1+\alpha_n s+\alpha_n^2 s^2+\dots) \\ = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots$$

ซึ่ง

$$c_i = \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j^i, \quad i=0,1,2,\dots$$

ให้แบบจำลองลดรูปคือ

$$R(s) = \frac{y_1}{1-\alpha_1 s} + \frac{y_2}{1-\alpha_2 s} + \dots + \frac{y_k}{1-\alpha_k s} \quad (23)$$

โดยที่  $k$  คืออันดับของแบบจำลองลดรูป ดังนั้น

$$R(s) = y_1(1+\alpha_1 s+\alpha_1^2 s^2+\dots) + y_2(1+\alpha_2 s+\alpha_2^2 s^2+\dots) + \dots + y_k(1+\alpha_k s+\alpha_k^2 s^2+\dots) \\ = c_0' + c_1' s + c_2' s^2 + \dots$$

ซึ่ง

$$c_i = \sum_{j=1}^k y_j \alpha_j^i, \quad i=0,1,2,\dots$$

เพราะว่า  $R(s)$  คือตัวประมาณค่าแบบพาเตของ  $G(s)$  ดังนั้นเราต้องการ

$$c_i = c_i, \quad i=0,1,2,\dots,(k-1)$$

ซึ่งจะนำไปสู่ชุดของสมการดังข้างล่าง

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

การตีความหมายข้างบน แสดงให้เห็นถึงผลกระทบของโพลที่ถูกตัดทิ้ง  $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$  ถูกนำไปใช้ในการคำนวณหารชิติว  $y_i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) เราควรสังเกตว่าสำหรับระบบที่เสถียรเชิงอะซิมโทติกทั้งแบบจำลองลดรูป และระบบเต็มจะมีโมเมนต์ของเวลาเหมือนกัน และจะไม่มีค่าผิดพลาดในสภาวะเสถียร (no steady-state error) ระหว่างแบบจำลองลดรูป! และระบบเต็มเกิดขึ้น ทั้งนี้อินพุทของระบบต้องอยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i t^i$$

## บทที่ 2

### การทดลองและผลการทดลอง

#### 2.1 เตรียมการทดลอง

#### พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \quad (24)$$

ให้ตัวประมาณค่าแบบพหุคูณของ (24) คือ

$$\frac{U_m(x)}{V_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n} \quad (25)$$

สำหรับ  $(m+n)$  เทอมแรกของ (24) และ (25) ต้องเท่ากันดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์

$$a_0 = b_0c_0$$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$$

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0$$

⋮

$$a_m = b_0c_m + b_1c_{m-1} + \dots + b_mc_0$$

$$0 = b_0c_{m+1} + b_1c_m + \dots - b_{m+1}c_0$$

⋮

$$0 = b_0c_{m+n} + b_1c_{m+n-1} + \dots + b_{n+1}c_m$$

เขียน (26) ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์โดยที่ (25) มี  $n-m+1$

$$\begin{bmatrix} c_{m+1} & c_m & \dots & c_1 \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m & \dots & c_2 \\ c_{m+3} & c_{m+2} & c_{m+1} & \dots & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \dots & c_{m+2} & c_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ -c_2 \\ \dots \\ -c_m \end{bmatrix} \quad (27a)$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m-1} & \dots & \dots & -c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (27b)$$

จาก (27) จะได้ว่า

$$c_1 \hat{b} = -\hat{c}, \quad \hat{a} = c_1 \hat{b} \quad (28)$$

โดยที่  $c_1$  และ  $c_2$  เป็นเมตริกซ์ขนาด  $(n \times n)$  และ  $(m+1) \times (m+1)$  ตามลำดับ  
 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  คือ เวกเตอร์ขนาด  $(m+1)$ ,  $n$  และ  $(m+1)$  ตามลำดับ

$c_{ij}$  ซึ่งเป็นสมาชิกของ  $c_1, \hat{c}$  และ  $c_2$  คือโมเมนต์ของเวลาของระบบ

## 2.2 ขั้นตอนการทดลอง

(1) นำฟังก์ชันถ่ายโอนในโดเมน  $S$  ที่ต้องการลดรูป ทั้งนี้ฟังก์ชันถ่ายโอนต้องอยู่ในรูป

$$\frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} \quad (29)$$

(2) นำเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ของเศษและส่วน และอันดับของระบบ พร้อมทั้งอันดับของแบบจำลองลดรูป ไปใส่ในโปรแกรมที่จัดเตรียมไว้

(3) ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ของเศษและ ส่วนของแบบจำลองลดรูป

(4) ผู้ทดลองอาจนำฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบและแบบจำลองลดรูป ไปหาผลตอบสนองหนึ่งหน่วย (unit step response) ในโดเมนเวลาได้โดยเลือกเมนู (Menu) ในโปรแกรมที่จัดเตรียมไว้

หมายเหตุ รายละเอียดเกี่ยวกับโปรแกรมแสดงไว้ในภาคผนวก

## 2.3 ผลการทดลอง

### ตัวอย่าง 1

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G(s) = \frac{(s+1.5)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+6)}$$

$$\frac{s^2 + 5.5s + 6}{s^3 + 9s^2 + 20s + 12}$$

ซึ่งจะได้ค่าโมเมนต์ของเวลาดังนี้

$$c_0 = 1.0000$$

$$c_1 = -0.3750$$

$$c_2 = 0.3333$$

$$c_3 = -0.3159$$



$$C_1 = 0.3078$$

$$C_2 = -0.3039$$

$$C_3 = 0.3019$$

เมื่อเลือกแบบจำลองลดรูปให้มีอันดับ 2 แบบจำลองลดรูปจะมีฟังก์ชันถ่ายโอน

$$R(s) = \frac{0.911s+1.764}{s^2+4.470s+3.529}$$



Upper Limit: 2.000000000E101  
 Number of intervals:50

Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error
0.00000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.40000	0.2005333	0.2304612	-0.0299278
0.80000	0.3162755	0.3388589	-0.0225834
1.20000	0.3850280	0.3980938	-0.0130658
1.60000	0.4269050	0.4337882	-0.0068832
2.00000	0.4529520	0.4564506	-0.0034986
2.40000	0.4694292	0.4712019	-0.0017727
2.80000	0.4799923	0.4809121	-0.0009198
3.20000	0.4868339	0.4873354	-0.0005014
3.60000	0.4913003	0.4915935	-0.0002932
4.00000	0.4942335	0.4944189	-0.0001855
4.40000	0.4961685	0.4962944	-0.0001259
4.80000	0.4974495	0.4975396	-0.0000900
5.20000	0.4982999	0.4983663	-0.0000664
5.60000	0.4988655	0.4989153	-0.0000498
6.00000	0.4992422	0.4992797	-0.0000375
6.40000	0.4994835	0.4995217	-0.0000282
6.80000	0.4996613	0.4996824	-0.0000212
7.20000	0.4997734	0.4997891	-0.0000158
7.60000	0.4998483	0.4998600	-0.0000117
8.00000	0.4998985	0.4999070	-0.0000086
8.40000	0.4999320	0.4999383	-0.0000063
8.80000	0.4999545	0.4999590	-0.0000046
9.20000	0.4999695	0.4999728	-0.0000033
9.60000	0.4999796	0.4999819	-0.0000024
10.00000	0.4999863	0.4999880	-0.0000017
10.40000	0.4999908	0.4999920	-0.0000012
10.80000	0.4999938	0.4999947	-0.0000009
11.20000	0.4999959	0.4999965	-0.0000006
11.60000	0.4999972	0.4999977	-0.0000004
12.00000	0.4999981	0.4999985	-0.0000003
12.40000	0.4999988	0.4999990	-0.0000002
12.80000	0.4999992	0.4999993	-0.0000001
13.20000	0.4999994	0.4999995	-0.0000001
13.60000	0.4999996	0.4999997	-0.0000001
14.00000	0.4999997	0.4999998	-0.0000001
14.40000	0.4999998	0.4999999	-0.0000000
14.80000	0.4999999	0.4999999	-0.0000000
15.20000	0.4999999	0.4999999	-0.0000000
15.60000	0.4999999	0.5000000	-0.0000000
16.00000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
16.40000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
16.80000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
17.20000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
17.60000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
18.00000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
18.40000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
18.80000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
19.20000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
19.60000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
20.00000	0.5000000	0.5000000	-0.0000000
Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ตัวอย่าง 2

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} + \frac{4}{s+4} - \frac{6}{s+8}$$

$$= \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

ซึ่งมีค่าโมเมนต์ของเวลาดังนี้

$$C_0 = 1.0000$$

$$C_1 = -1.0833$$

$$C_2 = 1.0902$$

$$C_3 = -1.0665$$

$$C_4 = 1.0417$$

$$C_5 = -1.0239$$

$$C_6 = 1.0131$$

$$C_7 = -1.0069$$

$$C_8 = 1.0036$$

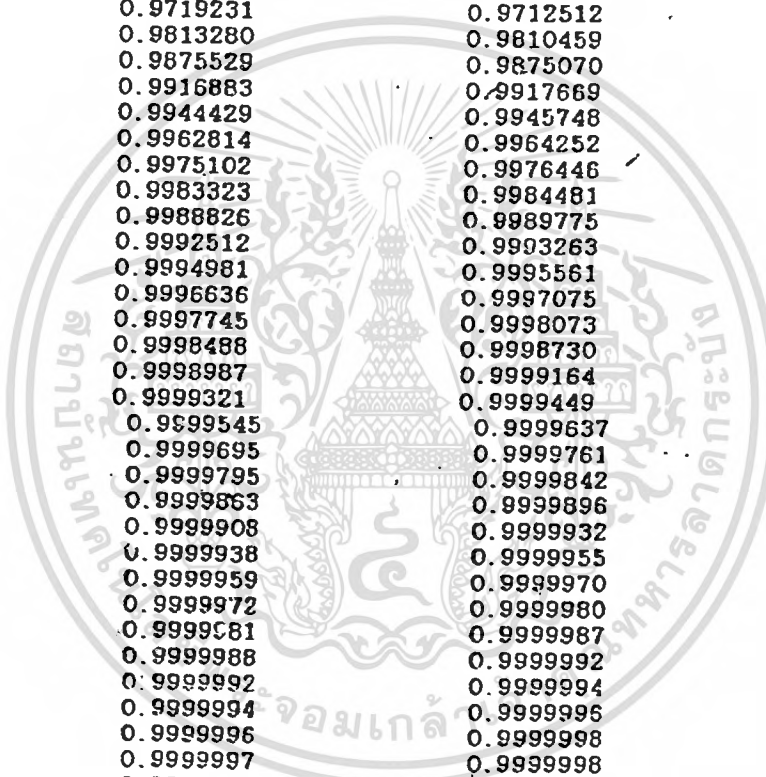
$$C_9 = -1.0018$$

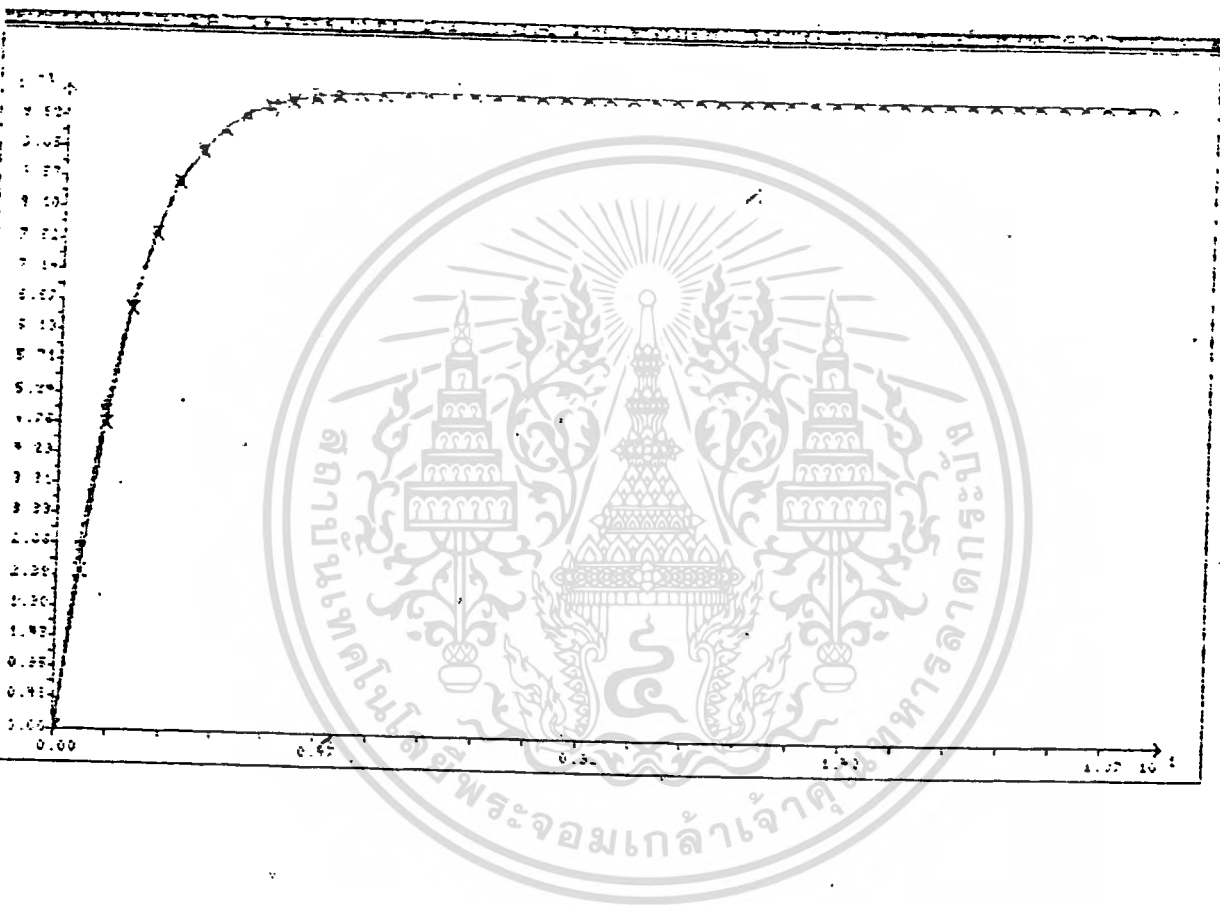
เมื่อเลือกให้  $R(s)$  มีอันดับ 2

$$R(s) = \frac{0.780s + 2.504}{s^2 + 3.443s + 2.504}$$

Upper Limit: 0.0000000000E+01  
 Number of intervals: 50

Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error
0.00000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.40000	0.2442667	0.2788010	-0.0345343
0.80000	0.4761418	0.5005970	-0.0244552
1.20000	0.6513032	0.6615424	-0.0102392
1.60000	0.7715747	0.7733414	+0.0017667
2.00000	0.8508723	0.8492398	0.0016325
2.40000	0.9024126	0.9001165	0.0022960
2.80000	0.9358583	0.9339755	0.0018828
3.20000	0.9576475	0.9564154	0.0012322
3.60000	0.9719231	0.9712512	0.0006719
4.00000	0.9813280	0.9810459	0.0002821
4.40000	0.9875529	0.9875070	0.0000460
4.80000	0.9916883	0.9917669	-0.0000786
5.20000	0.9944429	0.9945748	-0.0001319
5.60000	0.9962814	0.9964252	-0.0001438
6.00000	0.9975102	0.9976446	-0.0001344
6.40000	0.9983323	0.9984481	-0.0001158
6.80000	0.9988826	0.9989775	-0.0000949
7.20000	0.9992512	0.9993263	-0.0000751
7.60000	0.9994981	0.9995561	-0.0000580
8.00000	0.9996636	0.9997075	-0.0000439
8.40000	0.9997745	0.9998073	-0.0000328
8.80000	0.9998488	0.9998730	-0.0000242
9.20000	0.9998987	0.9999164	-0.0000177
9.60000	0.9999321	0.9999449	-0.0000128
10.00000	0.9999545	0.9999637	-0.0000092
10.40000	0.9999695	0.9999761	-0.0000066
10.80000	0.9999795	0.9999842	-0.0000047
11.20000	0.9999863	0.9999896	-0.0000033
11.60000	0.9999908	0.9999932	-0.0000024
12.00000	0.9999938	0.9999955	-0.0000017
12.40000	0.9999959	0.9999970	-0.0000012
12.80000	0.9999972	0.9999980	-0.0000008
13.20000	0.9999981	0.9999987	-0.0000006
13.60000	0.9999988	0.9999992	-0.0000004
14.00000	0.9999992	0.9999994	-0.0000003
14.40000	0.9999994	0.9999996	-0.0000002
14.80000	0.9999996	0.9999998	-0.0000001
15.20000	0.9999997	0.9999998	-0.0000001
15.60000	0.9999998	0.9999999	-0.0000001
16.00000	0.9999999	0.9999999	-0.0000000
16.40000	0.9999999	1.0000000	-0.0000000
16.80000	0.9999999	1.0000000	-0.0000000
17.20000	1.0000000	1.0000000	-0.0000000
17.60000	1.0000000	1.0000000	-0.0000000
18.00000	1.0000000	1.0000000	-0.0000000
18.40000	1.0000000	1.0000000	-0.0000000
18.80000	1.0000000	1.0000000	-0.0000000
19.20000	1.0000000	1.0000000	-0.0000000
19.60000	1.0000000	1.0000000	-0.0000000
20.00000	1.0000000	1.0000000	-0.0000000





เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3

ให้ฟังก์ชันถ่ายโอนระบบ

$$G(s) = \frac{96.8 + 167.2s + 84.8s^2 + 13.2s^3}{24 + 50s + 35s^2 + 10s^3 + s^4}$$

ซึ่งมีค่าโมเมนต์ของเวลาดังนี้

$$C_0 = 4.0338$$

$$C_1 = -1.4361$$

$$C_2 = 0.6432$$

$$C_3 = -0.3764$$

$$C_4 = 0.2763$$

$$C_5 = -0.2350$$

$$C_6 = 0.2166$$

$$C_7 = -0.2081$$

$$C_8 = 0.2039$$

$$C_9 = -0.2019$$

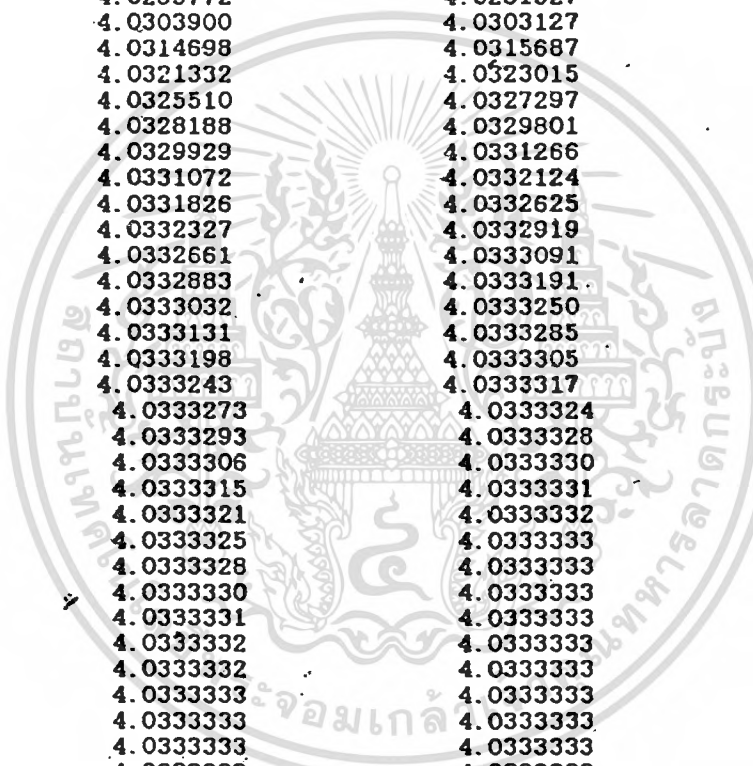
เมื่อเลือกให้  $R(s)$  มีอันดับ 2

$$R(s) = \frac{1.288s + 1.693}{s^2 + 4.689s + 4.198}$$



Upper Limit: 2.00000000E+01  
 Number of intervals:50

Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error
0.00000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.40000	2.6483200	2.7057149	-0.0573949
0.80000	3.5124665	3.5465739	-0.0341074
1.20000	3.8180139	3.8300088	-0.0119949
1.60000	3.9360527	3.9372530	-0.0012003
2.00000	3.9858158	3.9835416	0.0022742
2.40000	4.0085288	4.0060022	0.0025266
2.80000	4.0196405	4.0178464	0.0017941
3.20000	4.0254146	4.0244126	0.0010021
3.60000	4.0285772	4.0281527	0.0004245
4.00000	4.0303900	4.0303127	0.0000773
4.40000	4.0314698	4.0315687	-0.0000989
4.80000	4.0321332	4.0323015	-0.0001682
5.20000	4.0325510	4.0327297	-0.0001787
5.60000	4.0328188	4.0329801	-0.0001613
6.00000	4.0329929	4.0331266	-0.0001337
6.40000	4.0331072	4.0332124	-0.0001052
6.80000	4.0331826	4.0332625	-0.0000799
7.20000	4.0332327	4.0332919	-0.0000592
7.60000	4.0332661	4.0333091	-0.0000430
8.00000	4.0332883	4.0333191	-0.0000308
8.40000	4.0333032	4.0333250	-0.0000218
8.80000	4.0333131	4.0333285	-0.0000153
9.20000	4.0333198	4.0333305	-0.0000107
9.60000	4.0333243	4.0333317	-0.0000074
10.00000	4.0333273	4.0333324	-0.0000051
10.40000	4.0333293	4.0333328	-0.0000035
10.80000	4.0333306	4.0333330	-0.0000024
11.20000	4.0333315	4.0333331	-0.0000016
11.60000	4.0333321	4.0333332	-0.0000011
12.00000	4.0333325	4.0333333	-0.0000008
12.40000	4.0333328	4.0333333	-0.0000005
12.80000	4.0333330	4.0333333	-0.0000003
13.20000	4.0333331	4.0333333	-0.0000002
13.60000	4.0333332	4.0333333	-0.0000002
14.00000	4.0333332	4.0333333	-0.0000001
14.40000	4.0333333	4.0333333	-0.0000001
14.80000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
15.20000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
15.60000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
16.00000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
16.40000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
16.80000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
17.20000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
17.60000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
18.00000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
18.40000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
18.80000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
19.20000	4.0333333	4.0333333	-0.0000000
19.60000	4.0333333	4.0333333	0.0000000
20.00000	4.0333333	4.0333333	0.0000000
Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



## ตัวอย่าง 4

ความต้องการอย่างหนึ่งในการลดรูปนั้นคือ ยิ่งแบบจำลองลดรูปมีอันดับใกล้เคียงกับระบบ ผลตอบสนองของแบบจำลองลดรูปนั้นก็ใกล้เคียง กับผลตอบสนองของระบบด้วย

พิจารณา

$$G(s) = \frac{s^4 + 6.9s^3 + 16.6s^2 + 17.1s + 7.6s + 1.2}{s^4 + 6.6s^3 + 14.71s^2 + 13.266s + 4.846s + 0.762s + 0.036}$$

เมื่อเลือก  $R(s)$  ให้มีอันดับ 3

$$R_3(s) = \frac{0.9999s^3 + 0.9000s + 0.200}{s^3 + 0.600s^2 + 0.110s + 0.006}$$

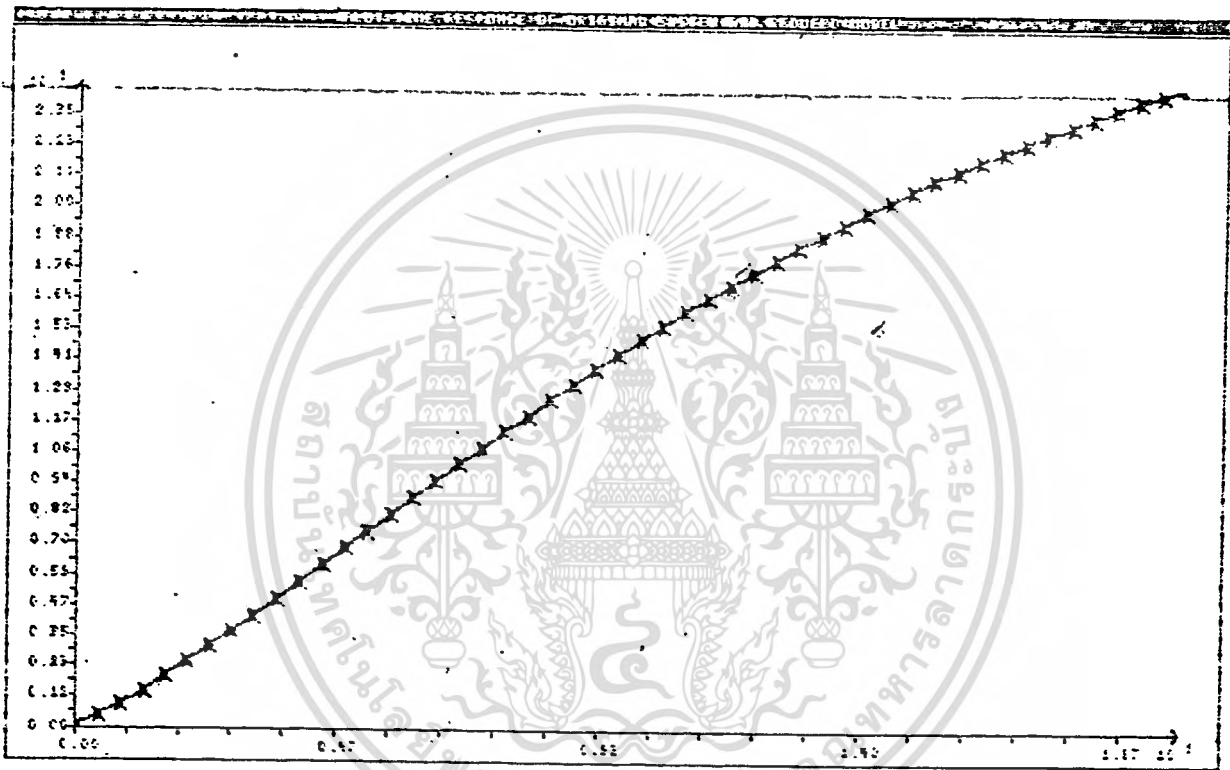
เมื่อเลือก  $R(s)$  ให้มีอันดับ 2

$$R_2(s) = \frac{0.93s + 0.619}{s^2 + 0.285s + 0.018}$$



Upper Limit: 2.000000000E+01  
Number of intervals: 50

Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error
0.00000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.40000	0.4230560	0.4221111	0.0009449
0.80000	0.8885674	0.8873230	0.0012444
1.20000	1.3912998	1.3901662	0.0011335
1.60000	1.9263314	1.9255272	0.0008042
2.00000	2.4890381	2.4886452	0.0003928
2.40000	3.0750938	3.0751075	-0.0000138
2.80000	3.6804732	3.6808398	-0.0003666
3.20000	4.3014527	4.3020956	-0.0006428
3.60000	4.9346067	4.9354434	-0.0008367
4.00000	5.5768005	5.5777531	-0.0009525
4.40000	6.2251804	6.2261803	-0.0009999
4.80000	6.8771611	6.8781518	-0.0009907
5.20000	7.5304117	7.5313491	-0.0009374
5.60000	8.1828415	8.1836932	-0.0008516
6.00000	8.8325344	8.8333282	-0.0007438
6.40000	9.4775341	9.4786068	-0.0006228
6.80000	10.1155707	10.1180745	-0.0004958
7.20000	10.7500866	10.7504555	-0.0003689
7.60000	11.3743921	11.3746384	-0.0002463
8.00000	11.9895318	11.9896633	-0.0001315
8.40000	12.5946819	12.5947086	-0.0000267
8.80000	13.1891461	13.1890795	0.0000666
9.20000	13.7723437	13.7721961	0.0001476
9.60000	14.3437991	14.3435830	0.0002161
10.00000	14.9031317	14.9028595	0.0002722
10.40000	15.4500464	15.4497298	0.0003165
10.80000	15.9843248	15.9839751	0.0003497
11.20000	16.5058172	16.5054446	0.0003726
11.60000	17.0141353	17.0140489	0.0003863
12.00000	17.5101447	17.5097529	0.0003918
12.40000	17.9929593	17.9925692	0.0003900
12.80000	18.4629351	18.4625529	0.0003822
13.20000	18.9201649	18.9197957	0.0003692
13.60000	19.3647736	19.3644217	0.0003519
14.00000	19.7969138	19.7965825	0.0003313
14.40000	20.2167619	20.2164537	0.0003082
14.80000	20.6245140	20.6242309	0.0002832
15.20000	21.0203836	21.0201266	0.0002570
15.60000	21.4045978	21.4043676	0.0002302
16.00000	21.7773950	21.7771918	0.0002032
16.40000	22.1390228	22.1388463	0.0001765
16.80000	22.4897355	22.4895851	0.0001504
17.20000	22.8297928	22.8296675	0.0001253
17.60000	23.1594574	23.1593561	0.0001013
18.00000	23.4789943	23.4789157	0.0000786
18.40000	23.7886690	23.7886116	0.0000574
18.80000	24.0887469	24.0887092	0.0000377
19.20000	24.3794919	24.3794722	0.0000197
19.60000	24.6611656	24.6611623	0.0000033
20.00000	24.9340269	24.9340384	-0.0000115
Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error

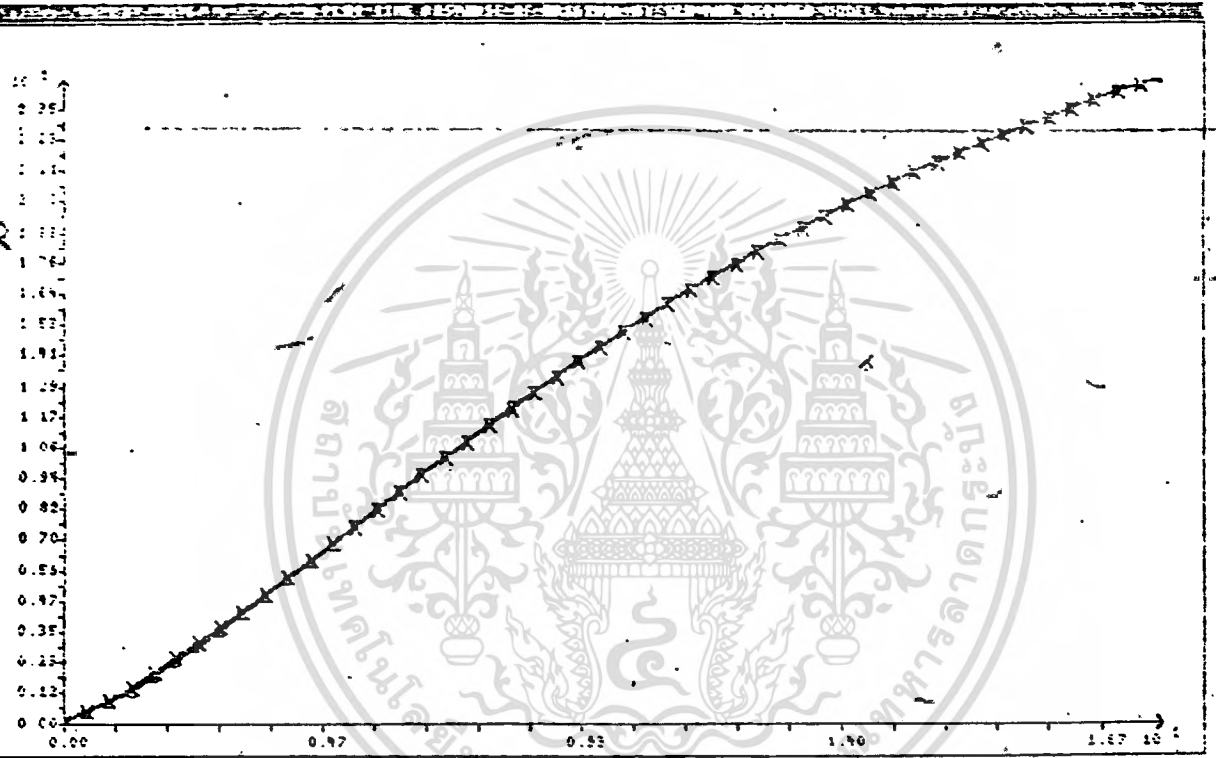


Upper limit: 2.0000000000E+01  
 Number of intervals:50

Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error
0.00000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.40000	0.4230560	0.3442553	0.0788007
0.80000	0.8885674	0.7605852	0.1279822
1.20000	1.3912998	1.2369234	0.1543764
1.60000	1.9263314	1.7627428	0.1635885
2.00000	2.4890381	2.3288697	0.1601684
2.40000	3.0750938	2.9273201	0.1477737
2.80000	3.6804732	3.5511557	0.1293175
3.20000	4.3014527	4.1943573	0.1070954
3.60000	4.9346067	4.8517123	0.0828944
4.00000	5.5769005	5.5187168	0.0580337
4.40000	6.2251804	6.1914887	0.0336918
4.80000	6.8771611	6.8666909	0.0104701
5.20000	7.5304117	7.5414650	-0.0110533
5.60000	8.1828415	8.2133712	-0.0305297
6.00000	8.8325844	8.8803365	-0.0477521
6.40000	9.4779341	9.5406089	-0.0626249
6.80000	10.1175787	10.1927172	-0.0751385
7.20000	10.7500866	10.8354349	-0.0853483
7.60000	11.3743921	11.4677496	-0.0933575
8.00000	11.9895318	12.0888353	-0.0993036
8.40000	12.5946819	12.6980282	-0.1033463
8.80000	13.1891461	13.2948055	-0.1056594
9.20000	13.7723437	13.8787667	-0.1064230
9.60000	14.3437991	14.4496173	-0.1058182
10.00000	14.9031317	15.0071546	-0.1040229
10.40000	15.4500464	15.5512547	-0.1012083
10.80000	15.9843248	16.0818615	-0.0975367
11.20000	16.5058172	16.5989774	-0.0931602
11.60000	17.0144353	17.1026544	-0.0882191
12.00000	17.5101447	17.5929865	-0.0828418
12.40000	17.9929593	18.0701038	-0.0771445
12.80000	18.4629351	18.5341663	-0.0712312
13.20000	18.9201649	18.9853589	-0.0651940
13.60000	19.3647736	19.4238874	-0.0591138
14.00000	19.7969138	19.8499745	-0.0530607
14.40000	20.2167619	20.2638565	-0.0470946
14.80000	20.6245140	20.6657804	-0.0412663
15.20000	21.0203836	21.0560015	-0.0356179
15.60000	21.4045978	21.4347813	-0.0301836
16.00000	21.7773950	21.8023856	-0.0249906
16.40000	22.1390228	22.1590827	-0.0200599
16.80000	22.4897355	22.5051422	-0.0154066
17.20000	22.8297928	22.8408338	-0.0110410
17.60000	23.1594574	23.1664263	-0.0069689
18.00000	23.4789943	23.4821867	-0.0031925
18.40000	23.7886690	23.7863796	0.0002895
18.80000	24.0887469	24.0852661	0.0034808
19.20000	24.3794919	24.3731041	0.0053878
19.60000	24.6611656	24.6521472	0.0090184
20.00000	24.9340269	24.9226445	0.0113824
Time (sec)	Time response (original)	Time response (reduced)	Error

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางธุรกิจ

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



### บทที่ 3

#### วิจารณ์และสรุปผลการทดลอง

##### วิจารณ์และสรุป

แบบจำลองลดรูปคงไว้ซึ่งโมเมนต์ของเวลาของระบบทำให้แน่ใจได้ว่า แบบจำลองลดรูปมีผลตอบสนองสถานะเสถียร (the steady state response) ใกล้เคียงกับผลตอบสนองสถานะเสถียรของระบบ และเพื่อปรับปรุงการประมาณค่าของระบบให้มีผลตอบสนองชั่วขณะ (initial transient response) ดีขึ้นเราทำได้ 2 วิธีคือ

(1) ให้แบบจำลองลดรูปคงไว้ซึ่งมาร์คอฟพารามิเตอร์ (Markov parameters) ของระบบ มาร์คอฟพารามิเตอร์ของระบบคือ สัมประสิทธิ์ของการกระจายอนุกรมกำลังของ  $G(s)$  โดย  $s$  มีกำลังเป็นลบ นั่นคือ

$$G(s) = \frac{d_1}{s} + \frac{d_2}{s^2} + \frac{d_3}{s^3} + \dots$$

และ  $d_i$  เป็นมาร์คอฟพารามิเตอร์ลำดับที่  $i$  ของระบบ ฉะนั้นในการปรับปรุงการประมาณค่าผลตอบสนองชั่วขณะของระบบ สัมประสิทธิ์ของตัวเศษของ  $R(s)$  ถูกเลือกให้เพื่อคงไว้ซึ่งโมเมนต์ของเวลาและมาร์คอฟพารามิเตอร์ของระบบ

(2) ให้แบบจำลองลดรูปรักษาไว้ซึ่งโพลที่มีค่ามาก ในความเป็นจริง การลดรูปของระบบที่มีอันดับสูง โดยละทิ้งโหมดสูง (high modes) นั้น จะทำให้ระบบไม่สมบูรณ์ ฉะนั้นในการปรับปรุงการประมาณค่าของผลตอบสนองชั่วขณะของระบบ  $R(s)$  ควรรักษาไว้ซึ่งโหมดสูงบ้าง

จุดประสงค์ของการแนะนำวิธีการลดรูปโดยใช้การประมาณแบบพหุนามก็คือ

(1) เป็นวิธีที่ง่าย

(2) การคำนวณทำได้ง่ายกว่าวิธีอื่น ๆ

(3) ค่าของโพลที่ถูกตัดทิ้งถูกนำไปใช้ในการคำนวณด้วย

(4) แบบจำลองลดรูปคงไว้ซึ่งโมเมนต์ของเวลาของระบบทำให้ระบบและแบบจำลองลดรูปไม่มีค่าผิดพลาดในสถานะเสถียร (no steady state error) เกิดขึ้น เมื่ออินพุตเป็นโพลีโนเมียลของเวลา

(5) ในตัวอย่างที่พิจารณาจะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของแบบจำลองอันดับ  $k$  จะดีกว่าผลตอบสนองของแบบจำลองอันดับ  $(k-1)$

(6) แบบจำลองลดรูปมักจะเป็นเสถียร (ไม่เสถียร) ถ้าระบบเสถียร (ไม่เสถียร)

ในการวิเคราะห์ในตัวอย่างเราจะคงไว้ซึ่งโพลที่มีค่าน้อยวิธีนี้จะเป็นการประมาณค่าที่ดีในหลายกรณี แต่อย่างไรก็ตามสำหรับระบบแกว่งกวัด (oscillatory systems) การคงไว้ซึ่งโพลที่มีค่าน้อยจะนำไปสู่การประมาณค่าที่เลว ในกรณีเราจำเป็นต้องคงไว้ซึ่งโพลที่มีส่วนจริง (real part) มีค่าเป็นลบน้อย วิธีนี้จะทำสำเร็จได้โดยใช้ทฤษฎีของโคเอนิค และการแปลงฟังก์ชันถ่ายโอน  $G(s)$  ให้เป็น  $G(z)$  เพราะว่าโพลที่มีส่วนลบน้อยที่สุดจะถูกส่งไปใกล้วงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบแซคมากที่สุด

## ภาคผนวก ก

การแปลงกลับเชิงเลขของการแปลงลาปลาซ

Numerical Inversion of the Laplace Transform

พิจารณาฟังก์ชันเศษส่วน

$$X(S) = \frac{b_{n-1}S^{n-1} + b_{n-2}S^{n-2} + \dots + b_1S + b_0}{S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_1S + a_0} \quad (1)$$

 $a_i, b_i$  เป็นสัมประสิทธิ์ที่มีค่าเป็นจำนวนจริง $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก

สมการดิฟเฟอเรนเชียลของ (1) คือ

$$X^{(n)}(t) + a_{n-1}X^{(n-1)}(t) + \dots + a_1X'(t) + a_0X(t) = 0 \quad (2)$$

โดยมีสถานะเริ่มต้น

$$X(0) = b_{n-1} \quad (3a)$$

$$\dot{X}(0) = b_{n-2} - a_{n-1}X(0) \quad (3b)$$

$$\ddot{X}(0) = b_{n-3} - a_{n-1}\dot{X}(0) - a_{n-2}X(0) \quad (3c)$$

$$\vdots$$

$$X^{(n-1)}(0) = b_0 - a_{n-1}X^{(n-2)}(0) - a_{n-2}X^{(n-3)}(0) - \dots - a_1X(0) \quad (3d)$$

เงื่อนไขของลิปชิตส์ (Lipshitz condition) สำหรับสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับหนึ่ง (first-order ordinary differential equation) กล่าวว่า ปัญหาค่าขอบเขตของสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับหนึ่งจะมีได้คำตอบเดียวในช่วง  $[a, b]$  ถ้าฟังก์ชัน

$$\dot{X} = f(t, X)$$

ต่อเนื่องตลอดช่วง  $[a, b]$  และมีจำนวนบวก  $L$  ซึ่ง  $|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$ สำหรับทุกเวลา  $t$  และ  $x$  โดยที่  $a \leq t \leq b$  และ  $-\infty < x < \infty$ 

เงื่อนไขของลิปชิตส์สำหรับสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสองกล่าวว่า

ปัญหาค่าขอบเขตของสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสอง จะมีได้คำตอบเดียวในช่วง  $[a, b]$  ถ้าฟังก์ชัน

$$\ddot{X} = f(t, X, \dot{X})$$

ต่อเนื่องตลอดช่วง  $[a, b]$  และมีจำนวนบวก  $L$  ซึ่ง  $|f(t, x_2, \dot{x}_2) - f(t, x_1, \dot{x}_1)| \leq L(|x_2 - x_1| +$  $|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|)$  สำหรับทุกเวลา  $t$  และ  $x$  โดยที่  $a \leq t \leq b, -\infty < x < \infty, -\infty < \dot{x} < \infty$ 

วิธีของรุงค์กัตตา (Runge-Kutta Method)

สำหรับฟังก์ชัน

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \text{TNTarget } F(t, x, x_{\dots}, x^{(n-1)})$$

เมื่อ  $x(i)$  คือ  $\frac{d^i x}{dt^i}$  ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของลิปชิตส์ซึ่งเป็นเงื่อนไขสำหรับสมการดิฟ

เพื่อเรขาคณิตอันดับหนึ่ง และอันดับสอง เมื่อสถานะเริ่มต้นคือ

$$x[\text{ขีดจำกัดล่าง}] = a_1$$

$$x'[\text{ขีดจำกัดล่าง}] = a_2$$

∴

$$x^{(n-1)}[\text{ขีดจำกัดล่าง}] = a_n$$

เขียนสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับ  $n$  ใหม่ให้เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับหนึ่ง  $n$  สมการได้ดังนี้

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\ddot{x}_1 = \dot{y}_1 = y_2$$

$$\ddot{\ddot{x}}_1 = \dot{y}_2 = y_3$$

∴∴

$$x^{(n-1)} = \dot{y}_{(n-2)} = y_{(n-1)}$$

$$x^{(n)} = \dot{y}_{(n-1)} = \text{TNTARGETF}(t, x, y_1, \dots, y_{n-1})$$

ใช้วิธีรังก์กัตตาอันดับ 4 (Fourth-order general Runge-Kutta Method) ประมาณค่า  $y$  และ

$$h = \frac{\text{ขีดจำกัดบน} - \text{ขีดจำกัดล่าง}}{\text{ช่วงของเวลา}}$$

ช่วงของเวลา

โดยที่สูตรของวิธีรังก์กัตตาประกอบด้วยสมการดังต่อไปนี้

$$F1x = h \cdot Y1[t]$$

$$F1y1 = h \cdot y2[t]$$

∴

$$F1yn-2 = h \cdot yn-1[t]$$

$$F1yn-1 = h \cdot \text{TNTARGETF}(t, x(t), y1(t), \dots, yn-1(t))$$

$$F2x = h \cdot (y1[t] + F1y1/2)$$

$$F2y1 = h \cdot (y2[t] + F1y2/2)$$

∴

$$F2yn-2 = h \cdot (yn-1[t] + F1yn-1/2)$$

$$F2yn-1 = h \cdot \text{TNTARGETF}(t+h/2, x[t] + F1x, y1[t] + F1y1/2, \dots, yn-1[t] + F1yn-1/2)$$

$$F3x = h \cdot (y1[t] + F2y1/2)$$

$$F3y1 = h \cdot \text{TNTARGETF}(t+h/2, x[t] + F2x, y1[t] + F2y1/2, \dots, yn-1[t] + F2yn-1/2)$$

$$F4x = h \cdot (y1[t] + F3y1)$$

$$F4y1 = h \cdot (y2[t] + F3y2)$$

$$F4yn-2 = h \cdot (yn-1[t] + F3yn-1)$$

$$F4yn-1 = h \cdot \text{TNTARGETF}(t+h, x[t] + F3x, y1[t] + F3y1, \dots, yn-1[t] + F3yn-1)$$

$$x[t+1] = x[t] + (F1x + 2 \cdot F2x + 2 \cdot F3x + F4x) / 6$$

## ภาคผนวก ข

เทอร์โบปาสคาล 5.5 (Turbo Pascal 5.5)

รณการลดรูปแบบจำลอง (MODEL REDUCTION PROGRAM) โดยใช้ภาษาปาสคาล และใช้เทอร์โบปาสคาล 5.5 ดังรายละเอียดต่อไปนี้

(1)  $Y_{n+1} = Y_n - 1$  (OVERLAY)

ปาสคาลเป็นภาษาโครงสร้าง โปรแกรมที่เขียนขึ้นจะประกอบด้วยโปรแกรมย่อย ๆ มาประกอบกัน ซึ่งหลังจากที่ทำการคอมไพล์ (COMPILE) แล้วจะถูกเก็บรวมไว้กับโปรแกรมหลัก (MAIN PROGRAM) เมื่อโปรแกรมถูกเรียกใช้งานแล้ว โปรซีเยอร์ (PROCEDURE) หรือฟังก์ชัน (FUNCTION) เหล่านี้จะจองหน่วยความจำหลักเป็นส่วน ๆ ซึ่ง โปรซีเยอร์หรือฟังก์ชันสามารถใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำร่วมกันได้ ลักษณะเช่นนี้จะช่วยทำงานโดยใช้โอเวอร์เลย์ คือมีโปรแกรมย่อยบางโปรแกรมใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำร่วมกันทำให้สามารถลดขนาดของโปรแกรมหลักได้

ในเทอร์โบปาสคาล 5.5 มีหน่วยโอเวอร์เลย์ซึ่งต้อง

- ใช้คอมไพล์เลอร์ไดเรคทีฟที่เรียกแบบห่างไกล (Force Far Call Compiler Directive) { $\$F\#$ } สำหรับโปรแกรมหลัก และทุก ๆ หน่วย (UNIT)

- ใช้หน่วยโอเวอร์เลย์ในทุก ๆ หน่วย

- ใช้ { $\$O\#$ } คอมไพล์เลอร์ไดเรคทีฟ

- ทำการโอเวอร์เลย์ทุกหน่วยในโปรแกรมหลักด้วย { $\$O$  ชื่อไฟล์}

- ทำการประกาศโอเวอร์เลย์ (INITIALIZE OVERLAY) ทุกตัว

(2) เทอร์โบปาสคาล 5.5 ใช้กระบวนการเชิงเลขของฟลอยติงพอยน์ (Floating - point Numeric Processing) 2 โหมด คือ โหมดธรรมดา และโหมด 8087

- โหมดธรรมดา ใช้ข้อมูลแบบจำนวนจริง 6 ไบต์ และไม่ใช้ตัวประมวลผล 8087 (8087 math coprocessor) ถึงแม้ว่าจะมีก็ตาม

- โหมด 8087 คำนวณได้เร็วกว่าและละเอียดกว่าโหมดธรรมดา

ในโปรแกรมการลดรูปแบบจำลองใช้ { $\$N\#, E\#$ } คอมไพล์เลอร์ไดเรคทีฟ ซึ่งสามารถใช้โหมด 8087 ได้ถึงแม้ว่าไม่มี 8087 โดยใช้อิมูเลชันรูทีน (Emulation Routine) ซึ่งใช้ความละเอียดเหมือน 8087 แต่ช้ากว่า

(3) โปรซีเยอร์และฟังก์ชันต่าง ๆ ในโปรแกรมการลดรูปแบบจำลองบรรจุในหน่วยหน่วยเป็นกลุ่มของนิยามของข้อมูล (Data Definitions) และโปรแกรมย่อยที่กำหนดให้คอมไพล์ร่วมกันโดยมี .TPU (TURBO PASCAL UNIT) เป็นส่วนขยาย (Extension) ทำให้โปรแกรมหลักสามารถติดต่อกับหน่วยได้โดยไม่ต้องเปิดเผยรายละเอียดการทำงานของหน่วย เทอร์โบปาสคาลลิงค์เกอร์ (TURBO PASCAL LINKER) จะทำการเชื่อมโค้ด (CODE) ของแต่ละหน่วย เข้าในเป้าหมายความจำ (Memory Image) ของโปรแกรมที่ทำการคอมไพล์อย่างอัตโนมัติโดยไม่ต้องคอมไพล์หน่วยใหญ่

(4) ใช้คอมไพล์เลอร์ไดเรคทีฟที่กำหนดขนาดหน่วยความจำ (Memory Allocation

Sizes (M) Compiler Directive) เพื่อควบคุมจำนวนของหน่วยความจำของโปรแกรม สำหรับสแต็ก (Stack) และฮีพ (HEAP)

(5) ใช้ Numerical Methods Toolbox Version 4.0 โดยนำมาคอมไพล์ใหม่เพื่อใช้กับเทอร์โบปาสคาล 5.5

(6) ใช้ Graphix Toolbox Version 4.0 โดยนำมาคอมไพล์ใหม่เพื่อใช้กับเทอร์โบปาสคาล 5.5

(7) สิ่งเพิ่มเติมของเทอร์โบปาสคาล 5.5 ที่ไม่มีในเวอร์ชัน (Version) ก่อนนี้และใช้ช่วยในการเขียนโปรแกรมการลดรูปแบบจำลองคือ Break/Watch และ Integrated Debugging

คุณสมบัติของโปรแกรมการลดรูปแบบจำลอง

(1) สามารถคำนวณผลตอบสนองของเวลา (time response) ได้ 50 จุด โดยกำหนดให้เวลาเริ่มต้นเป็น 0 วินาทีเสมอ

(2) ไม่จำกัดอันดับของฟังก์ชันถ่ายโอน แต่อาจทำให้เกิดโอเวอร์โฟลว์ (OVERFLOW) ได้

(3) กราฟของผลตอบสนองของเวลาสามารถพล็อต (plot) ได้ โดยโปรแกรมเท่านั้น

(4) สามารถกำหนดจุดเวลาสุดท้ายของการคำนวณได้ แต่ถ้าหากกำหนดเวลานาน

(5) สามารถกำหนดความละเอียดในการคำนวณ (NumIntervals) ได้ แต่ถ้าละเอียดมากจะใช้เวลานาน

(6) ผลลัพธ์ของการคำนวณและกราฟของผลตอบสนองของเวลาสามารถแสดงผลได้ทางจอภาพ, เก็บลงโน้ตเพิ่มข้อมูลหรือพิมพ์ออกมาได้

(7) ถ้าต้องการผลตอบสนองของเวลามากกว่า 50 จุด ต้องใช้หน่วยความจำมากขึ้น

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้จัดทำขอขอบคุณ รศ. วิพันธ์ ปรีชาพานิช ที่ได้ให้คำปรึกษาโดยตลอด และ  
ขอขอบคุณอาจารย์อีกหลายท่านที่ให้คำติชมเกี่ยวกับโครงการนี้ อีกทั้งขอขอบใจนางสาว  
ธารกมล สังขะวัฒนะ ผู้ซึ่งมีความกรุณาให้ความช่วยเหลือเป็นอย่างดี  
ผู้จัดทำ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

- (1) Muh-Yang Chen, "Solution of General Pade" Fitting Problem Via Continued-Fraction Expansion," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, pp. 57-59, Jan. 1987.
- (2) Y. Shamash, "Model reduction using the Routh stability criterion and the Pade' approximation technique," Int. J. Contr., vol. 21, No. 3, pp. 475-484, 1987.
- (3) Y. Shamash, "Linear system reduction using Pade" approximation to allow retention of dominant modes," Int. J. Contr., vol. 21, No. 2, pp 257-272, 1975.
- (4) Stephen K. O'Brien, Turbo Pascal 5.5: The Complete Reference, Osborn McGraw-Hill, 1989.
- (5) Borland International, Inc., Turbo Pascal Toolbox: Numerical Methods Version 4.0, IBM Version, 1987.
- (6) Borland International, Inc., Turbo Pascal: Graphix Toolbox Version 4.0, IBM Version, 1987.
- (7) Borland International, Inc., Turbo Pascal 4.0, IBM Version, 1987.
- (8) Herbert Schildt, Advanced Turbo Pascal: Programming and Techniques, McGraw-Hill, 1987.