

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2533

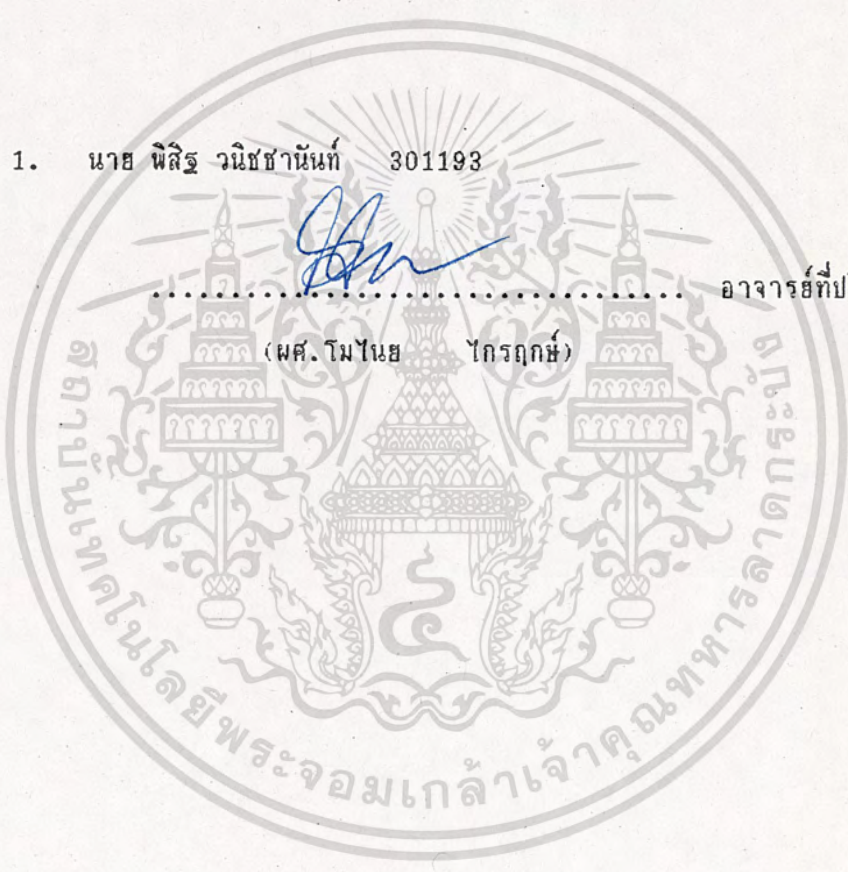
ภาควิชา วิศวกรรมโทรคมนาคม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง อินพุทแอดมิตแตนซ์ของสายอากาศที่มีควาวิตีตรงกลมอยู่ด้านหลังช่องเปิด

ผู้จัดทำ

1. นาย พิสิฐ วนิชชานันท์ 301193



อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผศ. โมนัย ไกรฤกษ์)

เลขหม่ T 3309A พ5  
เลขทะเบียน 027927  
วัน, ต. น. ปี ๑๕.๑.๓4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำใบใช้

027927

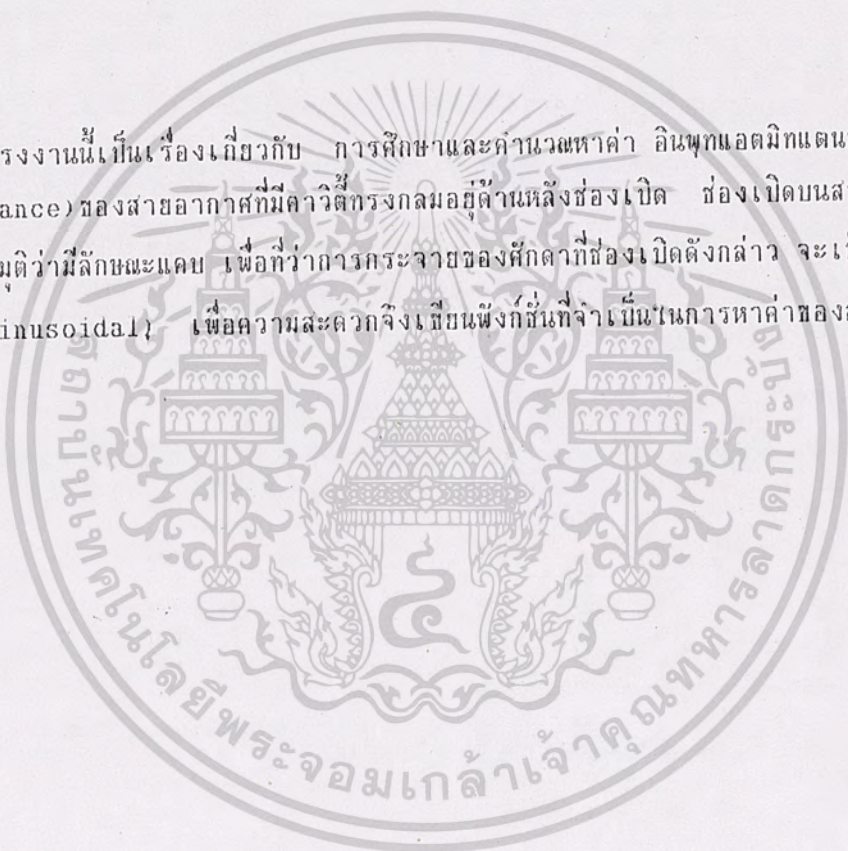
อินพุทแอดมิทแตนซ์ของสายอากาศที่มีค่าวิตกรงกลมอยู่ด้านหลังช่องเปิด

พิสิฐ วนิชชานันท์ 30.1193

ผศ.วมนัย ไกรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา  
ปีการศึกษา 2533

บทคัดย่อ

โครงงานนี้เป็นเรื่องเกี่ยวกับ การศึกษาและคำนวณหาค่า อินพุทแอดมิทแตนซ์ (input admittance) ของสายอากาศที่มีค่าวิตกรงกลมอยู่ด้านหลังช่องเปิด ช่องเปิดบนสายอากาศ จะถูกสมมุติว่ามีลักษณะแคบ เพื่อที่ว่าการกระจายของศักดาที่ช่องเปิดดังกล่าว จะเป็นแบบรูป ซายน์ (Sinusoidal) เพื่อความสะดวกจึงเขียนฟังก์ชันที่จำเป็นในการหาค่าของสนามเอาไว้ด้วย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Input Admittance of the Spherical Cavity-Backed Slot Antenna

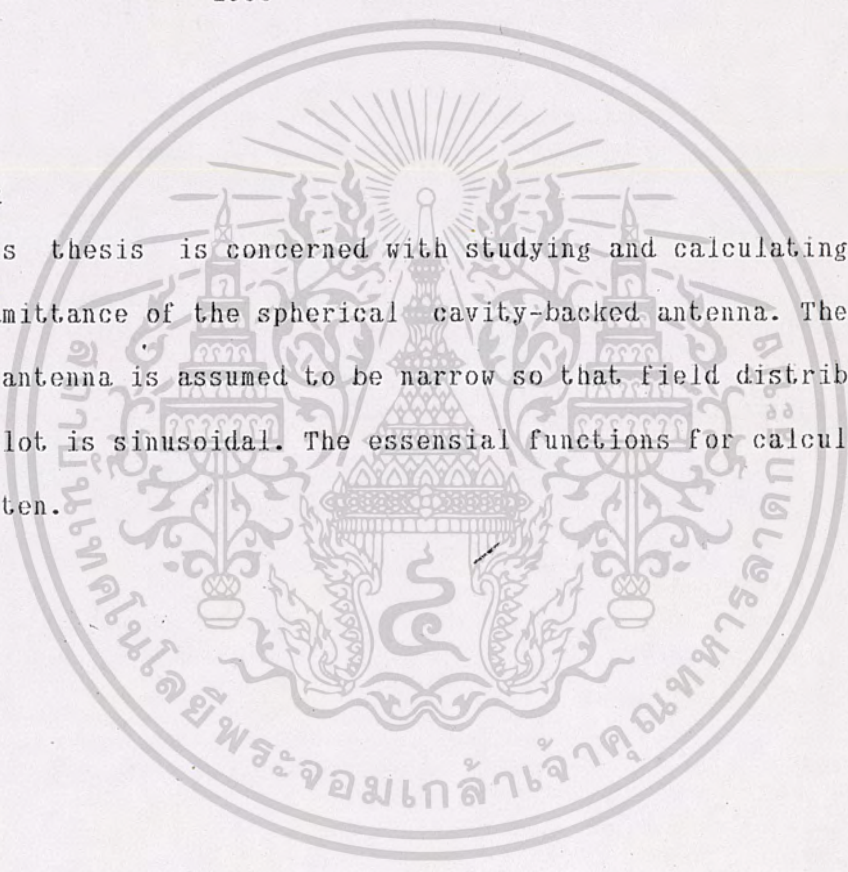
Pisit Vanichchanunt 30.1193

Associate Professor Monai Krairiksh Advisor

1990

Abstract

This thesis is concerned with studying and calculating the input admittance of the spherical cavity-backed antenna. The slot on the antenna is assumed to be narrow so that field distribution on the slot is sinusoidal. The essential functions for calculating are written.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 บทนำ	1.1
บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการ	2.1
บทที่ 3 การคำนวณและการเขียนโปรแกรม	3.1
3.1 การคำนวณสนามที่ช่องเปิดสายอากาศ	3.1
3.2 การคำนวณสนามภายใน	3.3
3.3 การแก้สนามภายนอก	3.20
3.4 การหาอินทิกรัลแอมพิทูด	3.45
3.5 ฟังก์ชันแกมมา และ แฟกทอเรียล	3.63
3.6 ฟังก์ชันไซ	3.65
3.7 สัญลักษณ์ของพอยน์ทิงเจอร์	3.67
3.8 ฟังก์ชันเบสเซล	3.71
3.9 ฟังก์ชันไฮเพอร์จีอเมตริก	3.76
3.10 ฟังก์ชันเลอจอง	3.78
3.11 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลอจองเทียบกับดีกรี	3.81
3.12 การหารากของฟังก์ชันเลอจอง	3.87
บทที่ 4 การทดลองและผลการทดลอง	4.1
บทที่ 5 บทวิจารณ์และสรุปผล	5.1
กิตติกรรมประกาศ	
หนังสืออ้างอิง	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 1

### บทนำ

เนื่องจาก สายอากาศที่มีช่องเปิด (aperture antenna) มีน้ำหนักและขนาดเป็นที่ต้องการ ประกอบกับสามารถสร้างได้ง่าย มันจึงเป็นสายอากาศที่ใช้กันมาก เช่น ในเครื่องบิน และ ยานอวกาศ เป็นต้น อย่างไรก็ตามก่อนที่จะนำสายอากาศไปใช้นั้น เราจำเป็นต้องทราบถึงลักษณะการกระจายคลื่น (radiation pattern) และ คุณสมบัติทางอิมพีแดนซ์ (impedance) ของมันเสียก่อน

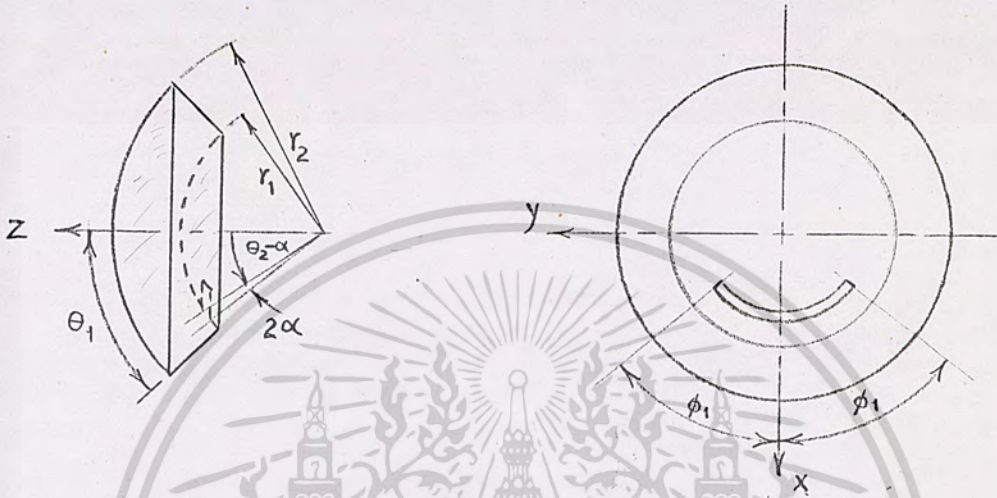
สำหรับในการหา อินพุทแอมพิทูดของสายอากาศที่มีค่าวิตกรงกลมอยู่ด้านหลังช่องเปิด ของโครงงานนี้จะประกอบด้วย เนื้อเรื่องที่สำคัญสองส่วนคือ สนามภายในและสนามภายนอก ของตัวสายอากาศ และ ช่องจะถูกสมมุติว่าแคบเพื่อที่ว่าตรงบริเวณ ช่องเปิด (slot aperture) จะไม่มีสนามไฟฟ้าในทิศทางเดียวกับทิศทางตามแนวยาวของช่อง และการกระจายของทิศทางจะเป็นแบบรูปหัวใจที่ช่องเปิดด้วย

เมื่อเราทราบถึง สนามภายใน และ สนามภายนอกของตัวสายอากาศก็จะสามารถหาความหนาแน่นของกำลังงานเชิงซ้อน (complex power density) ที่ปล่อยออกจากสายอากาศโดยใช้ ทฤษฎีพอยนติ้ง (Poynting theorem) จากนั้นก็จะสามารถหา กำลังงานเชิงซ้อน (complex power) และ แอมพิทูดของสายอากาศได้ในที่สุด

ในการหาสนามนี้จะสมมุติว่าวัสดุที่ใช้ทำเป็นสายอากาศเป็น ตัวนำที่สมบูรณ์ (perfect conductors) เพื่อที่จะไม่มีการสูญเสียเนื่องจากตัวนำ ส่วนบริเวณภายในและภายนอกของสายอากาศจะถูกกำหนดเป็นสุญญากาศ (vacuum) สำหรับการป้อนสัญญาณ (feed) จะใช้ป้อนที่ช่องของสายอากาศ (slot feed)

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักการ



รูปที่ 2.1 แสดงสายอากาศที่มีควาวิตทรงกลมอยู่ด้านหลังช่องเปิด

จากรูปที่ 2.1 สายอากาศที่มีควาวิตทรงกลมอยู่ด้านหลังช่องเปิด ประกอบด้วยส่วนของพื้นผิวทรงกลมรัศมี  $r_1, r_2$  และทรงกรวย  $\theta_1$  สำหรับช่องจะอยู่ที่ผิวทรงกลม  $r_1$  ที่มุม  $\theta = \theta_2$  และส่วนยาวของช่องจะอยู่ในช่วง  $-\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1$  สำหรับส่วนแคบของมันกว้างเป็นมุม  $2\alpha$  จากสมการทั่วไปสำหรับ เวกเตอร์โพเทนเชียล (vector potentials) ในตัวกลางเนื้อเดียวซึ่งปราศจากแหล่งกำเนิดสนาม (homogeneous source-free region)

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} - k^2 \bar{A} = -\nabla \times \phi^m \quad (2.1.a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{F} - k^2 \bar{F} = -\nabla \times \phi^e \quad (2.1.b)$$

เมื่อ  $\bar{A}$  คือ แมกเนติกเวกเตอร์โพเทนเชียล (magnetic vector potential)

$\bar{F}$  คือ อีเลคตริกเวกเตอร์โพเทนเชียล (electric vector potential)

$\phi^m$  คือ แมกเนติกสเกลาร์โพเทนเชียล (magnetic scalar potential)

$\phi^e$  คือ อีเลคตริกสเกลาร์โพเทนเชียล (electric scalar potential)

เอกสารนี้เป็นสำหรับบทความสัมพันธ์ของความรู้แม่เหล็กไฟฟ้าและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในการคำนวณและการคำนวณของ  $\bar{A}$  และ  $\bar{F}$  เมื่อ  $\nabla \cdot \bar{H} = 0$  คือ

$$\vec{E} = -\nabla \phi + \nabla \times \vec{A} / \gamma \tag{2.2.a}$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{F} / z \tag{2.2.b}$$

เมื่อ  $y = y(w) = \epsilon(w) + jw\epsilon(w)$  (2.3.a)

$z = z(w) = jw\mu(w)$  (2.3.b)

$\epsilon(w)$  : สภาพความยอมรับไฟฟ้าเชิงซ้อน (complex permittivity)

:  $D = \epsilon(w)E$

$$\epsilon(w) = \epsilon + jw\epsilon_1 - w^2\epsilon_2 + \dots$$

$\mu(w)$  : สภาพความซึมซาบแม่เหล็กเชิงซ้อน (complex permeability)

:  $B = \mu(w)H$

$$\mu(w) = \mu + jw\mu_1 - w^2\mu_2 + \dots$$

$\sigma(w)$  : สภาพความนำไฟฟ้าเชิงซ้อน (complex conductivity)

:  $J = \sigma(w)E$

$$\sigma(w) = \sigma + jw\sigma_1 - w^2\sigma_2 + \dots$$

$J$  : กระแสไฟฟ้าเชิงผิว (electric current density)

$H$  : กระแสแม่เหล็กเชิงผิว (magnetic current density)

$k = \sqrt{-zy}$

เนื่องจากการวิเคราะห์สนามกระทำโดยใช้ฟังก์ชันกลม ดังนั้นกำหนดให้

$$\vec{A} = u_r \vec{A}_r \tag{2.4.a}$$

$$\vec{F} = u_r \vec{F}_r \tag{2.4.b}$$

แทน  $A$  จาก 2.4.1 ลงใน 2.1.1 โดยที่

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = & u_r \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \phi^2} \right) + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi} \right] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้ตัดแปลงเนื้อหาและตั้งชื่อเองแก่เจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} = y \frac{\partial \phi^n}{\partial \theta} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi} = y \frac{\partial \phi^n}{\partial \phi}$$

เลือก  $-y\phi^n = \frac{\partial A_r}{\partial r}$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \phi^2} + k^2 A_r = 0 \quad (2.5.a)$$

จาก(2.5.1)เราสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้คือ

$$(\nabla^2 + k^2) A_r / r = 0 \quad (2.5.b)$$

จะเห็นว่า  $A_r / r$  เป็นคำตอบของ สมการสเกลาร์เฮลมโฮลทซ์ (scalar Helmholtz equation) ในทำนองเดียวกับที่แทน  $F$  จาก 2.4.2 ลงใน 2.1.2 และเลือก

$$-z\phi^n = \frac{\partial F_r}{\partial r}$$

จะได้ว่า  $(\nabla^2 + k^2) F_r / r = 0 \quad (2.5.c)$

จากสมการ 2.5.1 ซึ่งเป็นสมการที่จะให้หา  $A_r$  ถ้าเรากำหนดให้  $A_r$  เป็นฟังก์ชันที่สามารถแบ่งแยกได้ (separable function)

$$A_r = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (2.6)$$

เมื่อ  $R(r)$ ,  $\Theta(\theta)$  และ  $\Phi(\phi)$  เป็นฟังก์ชันของ  $r$ ,  $\theta$  และ  $\phi$  ตามลำดับ

แทน  $A_r$  จาก(2.6)ลงใน(2.5.1)แล้วหารด้วย  $R\Theta\Phi$  ตลอดทั้งสมการจะได้

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d (\sin \theta \frac{d \Theta(\theta)}{d \theta})}{d \theta} + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d \phi^2} + k^2 = 0$$

คูณด้วย  $r^2 \sin^2 \theta$

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{d^2 R}{dr^2} + \sin \theta \frac{d (\sin \theta \frac{d \Theta}{d \theta})}{d \theta} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d \phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่เว้นแต่จากตอนที่  $\Phi$  เป็นอิสระ จึงกำหนดให้

$$(d^2 \phi / d\phi^2) / \phi = -u^2 \quad (2.7.a)$$

เมื่อ  $u$  เป็นค่าคงที่ แทนค่าลงในสมการอันก่อนแล้วหารด้วย  $\sin^2 \theta$  จะได้

$$r^2 / R^2 (d^2 R / dr^2) + 1 / (\sin^2 \theta) d(\sin^2 \theta / d\theta) / d\theta - u^2 / \sin^2 \theta + k^2 r^2 = 0$$

จะเห็นว่าแต่ละเทอมมีเฉพาะ  $r$  หรือ  $\theta$  อย่างใดอย่างหนึ่งซึ่งผลรวมของแต่ละเทอมเป็นศูนย์ ดังนั้นผลรวมของแต่ละเทอมที่มีแต่  $\theta$  หรือเฉพาะที่มีแต่  $r$  ของสมการจะต้องเป็นค่าคงที่ ดังนั้นกำหนดให้

$$1 / (\sin^2 \theta) d(\sin^2 \theta / d\theta) / d\theta - u^2 / \sin^2 \theta = -v(v+1) \quad (2.7.b)$$

เมื่อ  $v$  เป็นค่าคงที่

จาก(2.7.2) กับสมการก่อนหน้ามัน จะได้ว่า

$$(r^2 / R) d^2 R / dr^2 - v(v+1) + k^2 r^2 = 0$$

คูณด้วย  $R/r^2$  จะได้

$$d^2 R / dr^2 - v(v+1) R / r^2 + k^2 R = 0 \quad (2.7.c)$$

รวบรวมสมการ 2.7.1 ถึง 2.7.3 จะได้

$$r^2 d^2 R / dr^2 + [(kr)^2 - v(v+1)] R = 0 \quad (2.8.a)$$

$$1 / \sin^2 \theta d(\sin^2 \theta / d\theta) / d\theta + [v(v+1) - u^2 / \sin^2 \theta] \phi = 0 \quad (2.8.b)$$

$$d^2 \phi / d\phi^2 + u^2 \phi = 0 \quad (2.8.c)$$

จาก(2.8.1)จะได้ว่า  $R$  เป็นฟังก์ชันสเฟอริคัลเบสเซล (spherical Bessel function)

$$R(r) = B_\nu(kr) \sim J_\nu(kr), N_\nu(kr) \quad (2.9.a)$$

จาก(2.8.2)  $\phi$  เป็นฟังก์ชันแอสซีสซิเอตเลอจอง (associated Legendre function)

$$\phi(\theta) = L_\nu^m(\cos \theta) \sim P_\nu^m(\cos \theta), Q_\nu^m(\cos \theta) \quad (2.9.b)$$

จาก(2.8.3)  $\phi$  เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก (harmonic function)

$$\phi(\phi) = h(u\phi) \sim \sin(u\phi), \cos(u\phi) \quad (2.9.c)$$

$$\text{ดังนั้น } (A_\nu)_{u,\nu} = B_\nu(kr) L_\nu^m(\cos \theta) h(u\phi) \quad (2.10)$$

ถ้าเราต้องการผลรวมของ  $(A_\nu)_{u,\nu}$  เราจะใช้เครื่องหมายรวม ( $\Sigma$ ) ตลอดค่า  $m$  และ  $\nu$  ที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 เป็นไปได้  
 ไม่ว่าการณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A_{uv} = \sum_u \sum_v C_{u,v} (A_r)_{u,v} = \sum_u \sum_v C_{u,v} B_v(kr) L_v''(\cos\theta) h(u\phi) \quad (2.11)$$

เมื่อ  $C_{u,v}$  เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นกับ  $u$  และ  $v$

สำหรับ  $F_r$  นั้นก็จะมีคำตอบเหมือนกับ  $A_r$  ในสมการที่(2.11)

จาก(2.1)~(2.2)และ(4.1)~(4.2)เราสามารถหาสนามได้ในเทอมของ  $A_r$  และ  $F_r$  ดังนี้

$$E_r = 1/y(\partial^2/\partial r^2 + k^2)A_r \quad (2.12.a)$$

$$E_\theta = -1/(r \sin\theta) \partial F_r / \partial \phi + 1/(yr) \partial^2 A_r / \partial r \partial \theta \quad (2.12.b)$$

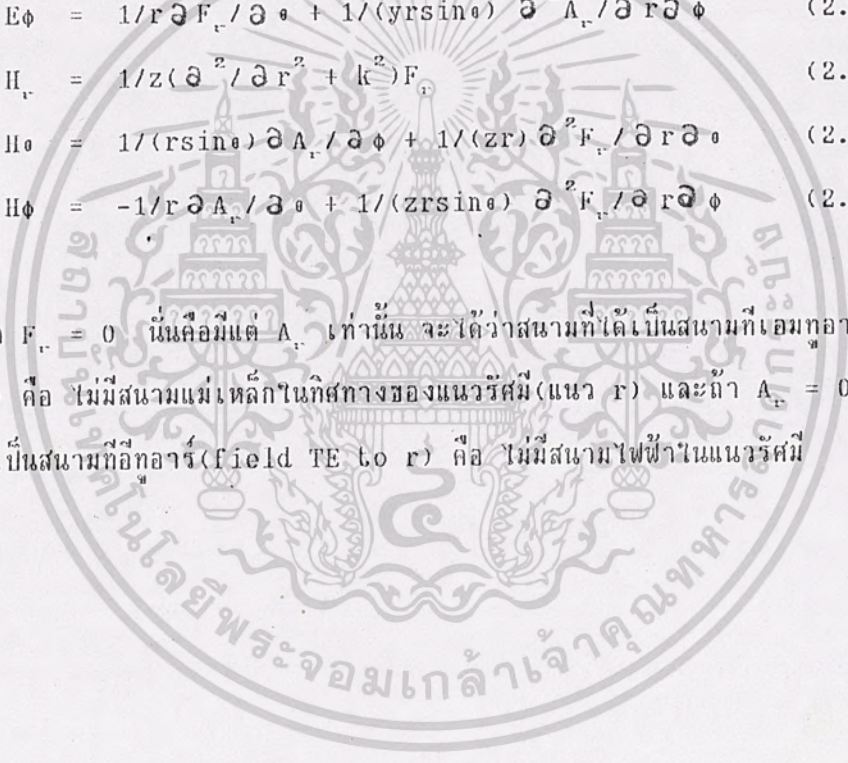
$$E_\phi = 1/r \partial F_r / \partial \theta + 1/(yrs \sin\theta) \partial^2 A_r / \partial r \partial \phi \quad (2.12.c)$$

$$H_r = 1/z(\partial^2/\partial r^2 + k^2)F_r \quad (2.12.d)$$

$$H_\theta = 1/(r \sin\theta) \partial A_r / \partial \phi + 1/(zr) \partial^2 F_r / \partial r \partial \theta \quad (2.12.e)$$

$$H_\phi = -1/r \partial A_r / \partial \theta + 1/(zrs \sin\theta) \partial^2 F_r / \partial r \partial \phi \quad (2.12.f)$$

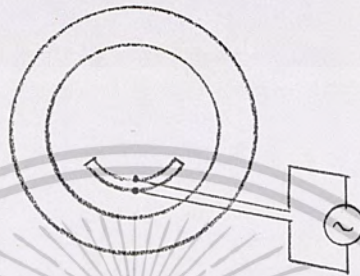
เมื่อ  $F_r = 0$  นั้นคือมีแต่  $A_r$  เท่านั้น จะได้ว่าสนามที่ได้เป็นสนามทีเอมทอรัล (field TM to r) คือ ไม่มีสนามแม่เหล็กในทิศทางของแนวรัศมี(แนว r) และถ้า  $A_r = 0$  จะได้ว่าสนามที่ได้เป็นสนามทีอีทอรัล (field TE to r) คือ ไม่มีสนามไฟฟ้าในแนวรัศมี



บทที่ 3

การคำนวณและการเขียนโปรแกรม

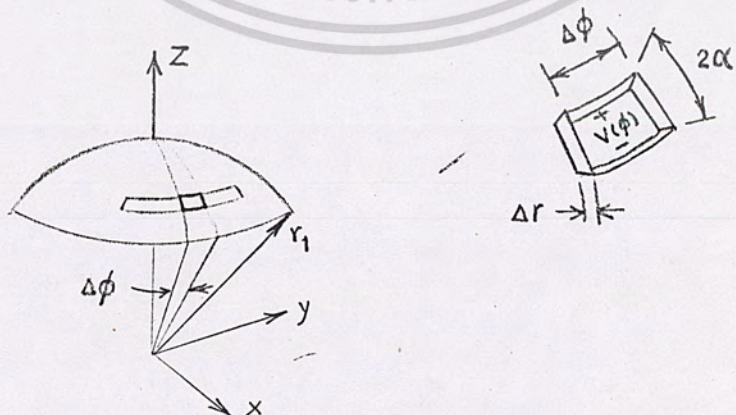
ในการป้อนสายอากาศที่มีค่าวิกฤตทรงกลมอยู่หลังช่องเปิด จะใช้วิธีป้อนโดยตรงที่ช่องเปิด ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงวิธีป้อนสายอากาศที่ช่องเปิด

3.1 การคำนวณสนามที่ช่องเปิดของสายอากาศ

ในการหาสนามที่ช่องสายอากาศซึ่งอยู่ในช่วง  $\theta_2 - \alpha \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha$  และยาว  $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$  บนผิวทรงกลมรัศมี  $r_1$  นั้น จะสมมุติว่ามีเส้นแรงสนามอยู่ปริมาตร  $\eta$  ระหว่างส่วนของช่องเปิดในช่วง  $\phi$  ถึง  $\phi + \Delta\phi$  และหักดากัศมระหว่างด้านบน และด้านล่างของส่วนของช่องเปิดคือ  $v(\phi)$  และ ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เนื้อคือ  $E_0(\phi, r)$  และผิว  $r_1$  มีความหนาเป็น  $\Delta r$



รูปที่ 3.2 แสดงวิธีการหาสนามที่ช่องเปิดบนผิวรัศมี  $r_1$  โดยขั้นตอนการคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับงานวิจัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$E_\theta(\theta, \phi) \propto$  ความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็ก = จำนวนเส้นแรงแม่เหล็ก/พื้นที่ตั้งฉาก

$$\propto n / (2\pi r_1 \sin\theta \Delta\phi \Delta r)$$

$$E_\theta(\theta, \phi) = c / \sin\theta$$

เมื่อ  $c$  เป็นค่าที่ไม่ขึ้นกับ  $\theta$

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \int_{\theta_2 - \alpha}^{\theta_2 + \alpha} E_\theta r_1 d\theta = \int_{\theta_2 - \alpha}^{\theta_2 + \alpha} \frac{c r_1}{\sin\theta} d\theta \\ &= c r_1 \ln(\csc\theta + \cot\theta) \Big|_{\theta_2 - \alpha}^{\theta_2 + \alpha} = c r_1 \ln(\tan(\theta/2)) \Big|_{\theta_2 - \alpha}^{\theta_2 + \alpha} \\ &= c r_1 \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right] \end{aligned}$$

จัดรูปได้

$c$

$$= \frac{V(\phi)}{r_1 \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]}$$

แทนค่า  $c$  จะได้

$$E_\theta(\theta, \phi) = \frac{V(\phi)}{r_1 \sin\theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]}$$

นี่คือ สนามที่รัศมี  $r = r_1$  มีค่าดังนี้

$$E_\theta(r_1, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{V(\phi)}{r_1 \sin\theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]} & ; \theta_2 - \alpha \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha \\ & -\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้ง (3.1.1)



เมื่อ  $V(\phi) = V_0 \sin[kr_1 \sin\alpha_2 (\phi_1 - \phi)]$  (3.1.2)

3.2 การคำนวณสนามภายใน

การพิจารณาสนามภายใน จะพิจารณาถึงสนามภายในท่อนำคลื่นเชิงรัศมี (radial wave guide) ซึ่งเป็นรูปทรงกรวย  $\alpha = \alpha_1$  ยาวไม่จำกัดก่อน จากนั้นจะพิจารณาสนามเมื่อมีผิวทรงกลม  $r = r_2$  เพิ่มเติม (คือมีทั้งตัวนำ  $\alpha = \alpha_1$  และ  $r = r_2$ ) และก็พิจารณาเมื่อมีผิวทรงกลม  $r = r_1$  พร้อมกับมีช่องเปิด ( $\alpha_2 - \alpha \leq \alpha_2 \leq \alpha_2 + \alpha$ ,  $-\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1$ ) บน  $r = r_1$  ด้วย

เนื่องจากทั้ง แมกนีติก และ อิเล็กตริกเวกเตอร์โพเทนเชียล เป็นผลบวกของ แมกนีติก และ อิเล็กตริกโพเทนเชียล ในแต่ละโหมด (mode) หรือ

$A_r = \sum_m \sum_w (A_{rw})$  (3.2.1.a)

$F_r = \sum_m \sum_v (F_{rv})$  (3.2.1.b)

เมื่อ  $(Ar)_{mw} = \begin{bmatrix} A_{mw} \cos m\phi \\ +B_{mw} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{mw} \hat{H}_w^{(1)}(kr) \\ +D_{mw} \hat{H}_w^{(2)}(kr) \end{bmatrix} P_w^m(\cos\alpha)$  (3.2.2.a)

$(Fr)_{mv} = \begin{bmatrix} R_{mv} \cos m\phi \\ +S_{mv} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{mv} \hat{H}_v^{(1)}(kr) \\ +U_{mv} \hat{H}_v^{(2)}(kr) \end{bmatrix} P_v^m(\cos\alpha)$  (3.2.2.b)

$A_{mw}, B_{mw}, C_{mw}, D_{mw}$  เป็นสัมประสิทธิ์ของสนามที่โหมด  $w$  ซึ่งขึ้นอยู่กับ  $m$  และ  $w$

$R_{mv}, S_{mv}, T_{mv}, U_{mv}$  เป็นสัมประสิทธิ์ของสนามที่โหมด  $v$  ซึ่งขึ้นอยู่กับ  $m$  และ  $v$

$m = 0, 1, 2, 3, \dots$

โดยอาศัยความสัมพันธ์

$\frac{d^2}{dr^2} \hat{B}_v(kr) - v(v+1) \frac{\hat{B}_v(kr)}{r^2} + k^2 \hat{B}_v(kr) = 0$

หรือ  $\hat{B}_v(kr) + \hat{B}_v''(kr) = \frac{v(v+1)}{r^2} \hat{B}_v(kr)$  (3.2.3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สำนักงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่สามารถเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต การคัดลอกโดยไม่ได้รับอนุญาตถือว่าผิดกฎหมาย

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้า (kr) ก็สารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และแทน  $A_{m\nu}$  และ  $F_{m\nu}$  เพื่อหาสนามภายในสายอากาศ จะได้

$$E_r^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (E_r^i)_{m\nu}^{TM} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (E_r^i)_{m\nu}^{TE} \quad (3.2.4.a)$$

$$E_{\theta}^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (E_{\theta}^i)_{m\nu}^{TM} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (E_{\theta}^i)_{m\nu}^{TE} \quad (3.2.4.b)$$

$$E_{\phi}^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (E_{\phi}^i)_{m\nu}^{TM} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (E_{\phi}^i)_{m\nu}^{TE} \quad (3.2.4.c)$$

$$H_r^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H_r^i)_{m\nu}^{TM} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H_r^i)_{m\nu}^{TE} \quad (3.2.4.d)$$

$$H_{\theta}^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H_{\theta}^i)_{m\nu}^{TM} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H_{\theta}^i)_{m\nu}^{TE} \quad (3.2.4.e)$$

$$H_{\phi}^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H_{\phi}^i)_{m\nu}^{TM} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (H_{\phi}^i)_{m\nu}^{TE} \quad (3.2.4.f)$$

เมื่อ สนามที่เอม ในแต่ละหมายเลขโหมดของสนามภายใน คือ

$$(E_r^i)_{m\nu}^{TM} = \frac{w(w+1)}{yr^2} \begin{bmatrix} A_{m\nu} \cos m\phi \\ +B_{m\nu} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{m\nu} \hat{H}_w^{(1)}(kr) \\ +D_{m\nu} \hat{H}_w^{(2)}(kr) \end{bmatrix} P_w^m(\cos\theta)$$

$$(E_{\theta}^i)_{m\nu}^{TM} = \frac{k}{yr} \begin{bmatrix} A_{m\nu} \cos m\phi \\ +B_{m\nu} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{m\nu} \hat{H}_w^{(1)'}(kr) \\ +D_{m\nu} \hat{H}_w^{(2)'}(kr) \end{bmatrix} \frac{dP_w^m(\cos\theta)}{d\theta}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ไม่วารณิใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(E\phi^i)_{mw}^{TM} = \frac{km}{y r \sin\theta} \begin{bmatrix} -A_{mw} \cos m\phi \\ +B_{mw} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{mw} \hat{H}_w^{(1)}(kr) \\ +D_{mw} \hat{H}_w^{(2)}(kr) \end{bmatrix} P_w^m(\cos\theta)$$

$$(Hr^i)_{mw}^{TM} = 0$$

$$(H\theta^i)_{mw}^{TM} = \frac{m}{r \sin\theta} \begin{bmatrix} -A_{mw} \cos m\phi \\ +B_{mw} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{mw} \hat{H}_w^{(1)}(kr) \\ +D_{mw} \hat{H}_w^{(2)}(kr) \end{bmatrix} P_w^m(\cos\theta)$$

$$(H\phi^i)_{mw}^{TM} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} A_{mw} \cos m\phi \\ +B_{mw} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{mw} \hat{H}_w^{(1)}(kr) \\ +D_{mw} \hat{H}_w^{(2)}(kr) \end{bmatrix} \frac{dP_w^m(\cos\theta)}{d\theta}$$

สนามที่อินทิเกรตในแต่ละ หมายถึงเลขที่ของสนามภายใน คือ

$$(Er^i)_{mv}^{TE} = 0$$

$$(E\theta^i)_{mv}^{TE} = \frac{-m}{r \sin\theta} \begin{bmatrix} -R_{mv} \sin m\phi \\ +S_{mv} \cos m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{mv} \hat{H}_v^{(1)}(kr) \\ +U_{mv} \hat{H}_v^{(2)}(kr) \end{bmatrix} P_v^m(\cos\theta)$$

$$(E\phi^i)_{mv}^{TE} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} R_{mv} \cos m\phi \\ +S_{mv} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{mv} \hat{H}_v^{(1)}(kr) \\ +U_{mv} \hat{H}_v^{(2)}(kr) \end{bmatrix} \frac{dP_v^m(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$(Hr^i)_{mv}^{TE} = \frac{v(v+1)}{z r^2} \begin{bmatrix} R_{mv} \cos m\phi \\ +S_{mv} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{mv} \hat{H}_v^{(1)}(kr) \\ +U_{mv} \hat{H}_v^{(2)}(kr) \end{bmatrix} P_v^m(\cos\theta)$$

$$(H\theta^i)_{mv}^{TE} = \frac{k}{z r} \begin{bmatrix} R_{mv} \cos m\phi \\ +S_{mv} \sin m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{mv} \hat{H}_v^{(1)}(kr) \\ +U_{mv} \hat{H}_v^{(2)}(kr) \end{bmatrix} \frac{dP_v^m(\cos\theta)}{d\theta}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(H\phi^i)_{m\nu}^{TE} = \frac{km}{zr\sin\theta} \begin{bmatrix} -R_{m\nu}\sin m\phi \\ +S_{m\nu}\cos m\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{m\nu} \hat{H}_v^{(1)'}(kr) \\ +U_{m\nu} \hat{H}_v^{(2)'}(kr) \end{bmatrix} P_v^m(\cos\theta)$$

เนื่องจาก สนามไฟฟ้าที่สัมผัสกับผิวกรวย  $\theta = \theta_1$  เป็นศูนย์ หรือ

$$Er^i(r, \theta = \theta_1, \phi) = 0$$

$$E\phi^i(r, \theta = \theta_1, \phi) = 0$$

จะได้

$$P_v^m(\cos\theta_1) = 0$$

$$\frac{dP_v^m(\cos\theta_1)}{d\theta} = 0$$

คือ

เป็นเงื่อนไขในการหา ดีกรี (degree)  $w$  และ  $v$  ของสนามที่เอม และ ที่อ้อมตามลำดับ

เนื่องจาก สนามไฟฟ้าที่สัมผัสกับผิวทรงกลม  $r = r_1$  เป็นศูนย์ และสนามแม่เหล็กที่ตั้งฉากกับผิวทรงกลม  $r = r_2$  เป็นศูนย์ จะได้

$$E\theta^i(r = r_2, \theta, \phi) = 0$$

$$E\phi^i(r = r_2, \theta, \phi) = 0$$

$$Hr^i(r = r_2, \theta, \phi) = 0$$

จะได้

$$D_{m\nu} = -C_{m\nu} \hat{H}_w^{(1)'}(kr_2) / \hat{H}_w^{(2)'}(kr_2)$$

$$U_{m\nu} = -T_{m\nu} \hat{H}_v^{(1)'}(kr_2) / \hat{H}_v^{(2)'}(kr_2)$$

เมื่อพิจารณา สนามที่  $r = r_1$  พบว่า  $E_r(r_1, \theta, \phi)$  เป็นฟังก์ชันคู่ตามมุม  $\phi$  นั่นคือ  $E\theta$

จะต้องเป็นฟังก์ชันคี่ด้วย คือไม่มีเทอม  $\sin m\phi$  หรือ แทนที่  $\theta$  นั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการคำนวณ  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้ง  $R_{m\nu}$  มิให้เปลี่ยนแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อถึงตอนนั้น พบว่า

$$(A_r)_{mw} = A_{mw} C_{mw} \hat{H}_w^{(2)'}(kr_2) \begin{bmatrix} \hat{H}_w^{(1)}(kr) \hat{H}_w^{(2)'}(kr_2) \\ -\hat{H}_w^{(2)}(kr) \hat{H}_w^{(1)'}(kr_2) \end{bmatrix} P_w^m(\cos\theta) \cos\phi$$

$$(F_r)_{mv} = S_{mv} T_{mv} \hat{H}_v^{(2)'}(kr_2) \begin{bmatrix} \hat{H}_v^{(1)}(kr) \hat{H}_v^{(2)'}(kr_2) \\ -\hat{H}_v^{(2)}(kr) \hat{H}_v^{(1)'}(kr_2) \end{bmatrix} P_v^m(\cos\theta) \sin\phi$$

เพื่อความสะดวกในการแก้ปัญหาต่อไปและประหยัดตัวอักษรที่ใช้เป็นตัวแปร จึงแทน

$$A_{mw} C_{mw} \hat{H}_w^{(2)'}(kr_2) \quad \text{ด้วย} \quad \frac{-yr_1 A_{mw}}{k K_w'(kr_1)}$$

และแทน

$$S_{mv} T_{mv} \hat{H}_v^{(2)'}(kr_2) \quad \text{ด้วย} \quad \frac{r_1 B_{mv}}{L_v(kr_1)}$$

$$\text{เมื่อ} \quad K_w(kr) = \hat{H}_w^{(1)}(kr) \hat{H}_w^{(2)'}(kr_2) - \hat{H}_w^{(2)}(kr) \hat{H}_w^{(1)'}(kr_2) \quad (3.2.5.a)$$

$$L_v(kr) = \hat{H}_v^{(1)}(kr) \hat{H}_v^{(2)'}(kr_2) - \hat{H}_v^{(2)}(kr) \hat{H}_v^{(1)'}(kr_2) \quad (3.2.5.b)$$

$$\text{จะได้} \quad (A_r)_{mw} = -A_{mw} \frac{yr_1 K_w(kr)}{k K_w'(kr_1)} P_w^m(\cos\theta) \cos\phi$$

$$(F_r)_{mv} = B_{mv} r_1 \frac{L_v(kr)}{L_v'(kr)} P_v^m(\cos\theta) \sin\phi$$

โดยที่  $A_{mw}$  และ  $B_{mv}$  เป็นสัมประสิทธิ์ ของสนามที่หาได้จากเงื่อนไขที่  $r = r_1$

แทน  $(A_r)_{mw}$  และ  $(F_r)_{mv}$  เพื่อหาสนามภายในจะได้

อีกครั้งเป็นเอกลักษณ์  $E_r = -E \sum A_{mw} w(w+1)(kr_1) \frac{K_w(kr)}{K_w'(kr_1)} P_w^m(\cos\theta) \cos\phi$  เมื่อผู้พูดให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใด พังสั่น อีกทั้งห้าม  $(kr)^2 K_w'(kr_1)$  และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E_\theta = -\sum_m \left\{ \sum_w A_{mw} \frac{kr_1 K_w'(kr)}{kr K_w'(kr_1)} \frac{dP_w^m}{dv} + \sum_v B_{mv} \frac{kr_1 L_v(kr)}{kr L_v(kr_1)} \frac{mP_v^m}{\sin\theta} \right\} \cos m\phi$$

$$E_\phi = \sum_m \left\{ \sum_w A_{mw} \frac{kr_1 K_w'(kr)}{kr K_w'(kr_1)} \frac{mP_w^m}{\sin\theta} + \sum_v B_{mv} \frac{kr_1 L_v(kr)}{kr L_v(kr_1)} \frac{dP_v^m}{dv} \right\} \sin m\phi$$

$$H_r = -j \sum_m \sum_v B_{mv} \frac{v(v+1)(kr_1) L_v(kr)}{(kr)^2 L_v(kr_1)} P_w^m(\cos\theta) \sin m\phi$$

$$H_\theta = -j \sum_m \left\{ \sum_w A_{mw} \frac{kr_1 K_w'(kr)}{kr K_w'(kr_1)} \frac{mP_w^m}{\sin\theta} + \sum_v B_{mv} \frac{kr_1 L_v'(kr)}{kr L_v(kr_1)} \frac{dP_v^m}{dv} \right\} \sin m\phi$$

$$H_\phi = -j \sum_m \left\{ \sum_w A_{mw} \frac{kr_1 K_w(kr)}{kr K_w'(kr_1)} \frac{dP_w^m}{dv} + \sum_v B_{mv} \frac{kr_1 L_v'(kr)}{kr L_v(kr_1)} \frac{mP_v^m}{\sin\theta} \right\} \cos m\phi$$

เป็นสมการที่ (3.2.6.a) ถึง (3.2.6.f)

สำหรับการแก้หา  $A_{mw}$  และ  $B_{mv}$  เป็นดังต่อไปนี้

ที่  $r = r_1$

$$E_\theta^1(r_1, \theta, \phi)$$

$$= \begin{cases} E_\alpha(\theta, \phi) = \frac{V_0 \sin[kr_1 \sin\theta_2 (\phi_1 - \phi)]}{r_1 \sin\theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]} & ; \theta_2 - \alpha \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha \\ & , -\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 \\ 0 & ; \text{อื่น} \end{cases}$$

(3.2.7.a)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า  
ไม่ว่ากรณีใด ๆ ก็ตาม หากมีให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(3.2.7.b)

และ

$$E_{\theta}'(r_1, \theta, \phi) = \sum_m \left\{ \sum_v \frac{B_{mv}}{v \sin \theta} P_v^m(\cos \theta) + \sum_w \frac{A_{mw}}{w} \frac{dP_w^m(\cos \theta)}{d\theta} \right\} \cos m\phi \quad (3.2.8.a)$$

$$E_{\phi}'(r_1, \theta, \phi) = \sum_m \left\{ \sum_v B_{mv} \frac{dP_v^m(\cos \theta)}{d\theta} + \sum_w \frac{A_{mw}}{w \sin \theta} P_w^m(\cos \theta) \right\} \sin m\phi \quad (3.2.8.b)$$

จากสมการ(3.2.8.a)จะได้

$$\int_0^{2\pi} E_{\theta}'(r_1, \theta, \phi) \cos m\phi d\phi = \left\{ \sum_v \frac{B_{mv}}{v \sin \theta} P_v^m(\cos \theta) + \sum_w \frac{A_{mw}}{w} \frac{dP_w^m(\cos \theta)}{d\theta} \right\} \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi d\phi \quad (3.2.8.c)$$

จากสมการ(3.2.7.b) และ(3.2.8.b)จะได้

$$0 = \sum_v \left[ B_{mv} \frac{dP_v^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] + \sum_w \left[ \frac{A_{mw}}{w \sin \theta} P_w^m(\cos \theta) \right] \int_0^{2\pi} \sin^2 m\phi d\phi \quad (3.2.8.d)$$

นิยามให้

$$\delta_m = \begin{cases} 1 & ; m = 0 \\ 0 & ; m \neq 0 \end{cases}$$

และจาก

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi d\phi = \begin{cases} 2 & ; m = 0 \\ 1 & ; m \neq 0 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น 
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi d\phi = (1 + \delta_m) \pi$$

กำหนดให้

$$f_m(\theta) = \frac{1}{(1 + \delta_m) \pi} \int_0^{2\pi} E_{\theta}^1(r_1, \theta, \phi) \cos m\phi d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(1 + \delta_m) \pi} \int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_{\theta}(\theta, \phi) \cos m\phi d\phi & ; \theta_2 - \alpha \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha \\ 0 & ; \text{อื่นๆ} \end{cases} \quad (3.2.9.a)$$

พิจารณา เทอม  $\int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_{\theta}(\theta, \phi) \cos m\phi d\phi$

จาก 
$$\int_{-\phi_1}^{\phi_1} \text{sinc}(\phi_1 - |\phi|) \cos m\phi d\phi = 2 \int_0^{\phi_1} \text{sinc}(\phi_1 - \phi) \cos m\phi d\phi$$

$$= \frac{2c}{m^2 - c^2} (\cos c\phi_1 - \cos m\phi)$$

ดังนั้น

$$\int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_{\theta} \cos m\phi d\phi = \int_{-\phi_1}^{\phi_1} \frac{V_0 \sin[kr_1 \sin \theta_2 (\phi_1 - |\phi|)]}{r_1 \sin \theta_2 \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]} \cos m\phi d\phi$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่  $r_1 \sin \theta_2 \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]$  ศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้  $\left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]$  ของอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{V_0}{r_1 \sin \theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]} \int_{-\phi_1}^{\phi_1} \sin[kr_1 \sin \theta_2 (\phi_1 - \phi)] \cos m \phi d\phi$$

$$= \frac{2 V_0 k \sin \theta_2 [\cos(kr_1 \phi_1 \sin \theta_2) - \cos m \phi_1]}{(m^2 - (kr_1 \sin \theta_2)^2) \sin \theta \ln \left[ \frac{\tan(\theta_2 + \alpha)/2}{\tan(\theta_2 - \alpha)/2} \right]} \quad ; m = kr_1 \sin \theta_2$$

แต่เมื่อ  $m = kr_1 \sin \theta_2$  พบว่า เกือบ

$$\lim_{kr_1 \sin \theta_2 \rightarrow m} \frac{\cos(kr_1 \phi_1 \sin \theta_2) - \cos m \phi_1}{m^2 - (kr_1 \sin \theta_2)^2}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin m \phi_1}{2m} & ; m \neq 0 \\ \phi_1 / 2 & ; m = 0 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตั้งใหม่

$$\int_{\phi_1}^{\phi_1} E_{\alpha}(\theta, \phi) \cos m \phi d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{2 V_0 k \sin \theta_2 [\cos(kr_1 \phi_1 \sin \theta_2) - \cos m \phi]}{(m^2 - (kr_1 \sin \theta_2)^2) \sin \theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]} & ; m \neq kr_1 \sin \theta_2 \\ \frac{2 V_0 k \sin \theta_2 (\sin m \phi_1 / (2m)) \sin \theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]}{\sin \theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]} & ; m = kr_1 \sin \theta_2 \neq 0 \\ \frac{2 V_0 k \sin \theta_2 (\phi_1 / 2) \sin \theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]}{\sin \theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]} & ; m = kr_1 \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

จัดรูปสมการ(3.2.8.c) และ(3.2.8.d)ใหม่จะได้

$$f_m(\theta) = \int_v [-m B_{mv} P_v^m(\cos \theta)] + \int_w [-A_{mw} \frac{dP_w^m(\cos \theta)}{dw}] \quad (3.2.11.a)$$

$$0 = \int_v [B_{mv} \frac{dP_v^m(\cos \theta)}{dv}] + \int_w [m A_{mw} P_w^m(\cos \theta)] \quad (3.2.11.b)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนด

$$\int_0^{\theta_1} m P_v^m d\theta \quad \text{op 3.2.1.a}$$

$$\int_0^{\theta_1} \frac{dP_v^m}{d\theta} \sin\theta d\theta \quad \text{op 3.2.1.b}$$

$$\int_0^{\theta_1} m P_w^m d\theta \quad \text{op 3.2.1.c}$$

$$\int_0^{\theta_1} \frac{dP_w^m}{d\theta} \sin\theta d\theta \quad \text{op 3.2.1.d}$$

เมื่อ

$$P_w^m(\cos\theta_1) = 0$$

และ

$$\frac{dP_v^m}{d\theta}(\cos\theta_1) = 0$$

ใช้ op 3.2.1.a กับ (3.2.11.a) และ op 3.2.1.b กับ (3.2.11.b) จะได้

$$\int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} f_m(\theta) m P_v^m d\theta = -\sum_v [B_{mv} \int_0^{\theta_1} \frac{d}{d\theta} (P_v^m P_w^m) \sin\theta d\theta]$$

$$= -\sum_w [A_{mw} \int_0^{\theta_1} m \frac{dP_w^m}{d\theta} P_v^m d\theta]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$0 = \sum_v \int_0^{\theta_1} [B_{mv} \int_0^{\theta_1} \frac{dP_v^m}{d\theta} \frac{dP_v^m}{d\theta} \sin\theta d\theta] + \sum_w \int_0^{\theta_1} [A_{mw} \int_0^{\theta_1} m P_w^m \frac{dP_v^m}{d\theta} \sin\theta d\theta]$$

จับสองสมการลบกัน จะได้

$$\int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} f_m(\theta) P_v^m d\theta = -\sum_v \int_0^{\theta_1} [B_{mv} \int_0^{\theta_1} \frac{dP_v^m}{d\theta} \frac{dP_v^m}{d\theta} \sin\theta d\theta + \sin\theta \frac{dP_v^m}{d\theta} \frac{dP_v^m}{d\theta} d\theta] - \sum_w \int_0^{\theta_1} [A_{mw} \int_0^{\theta_1} (dP_w^m P_v^m + P_w^m \frac{dP_v^m}{d\theta}) \sin\theta d\theta] \quad (3.2.12.a)$$

ใช้ op 3.2.1.d กับ (3.2.11.a) และ op 3.2.1.c กับ (3.2.11.b) จะได้

$$\int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} f_m(\theta) \frac{dP_v^m}{d\theta} \sin\theta d\theta = -\sum_v \int_0^{\theta_1} [B_{mv} \int_0^{\theta_1} m P_v^m \frac{dP_v^m}{d\theta} \sin\theta d\theta] - \sum_w \int_0^{\theta_1} [A_{mw} \int_0^{\theta_1} \frac{dP_w^m}{d\theta} \frac{dP_v^m}{d\theta} \sin\theta d\theta]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานภายในเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\Sigma [A_{mw} \int_0^{\theta_1} \frac{m^2}{\sin \theta} P_v^m P_{v'}^m d\theta]$$

จับสมการทั้งสองลบกันจะได้

$$\int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} f_m(\theta) \frac{dP_v^m}{d\theta} \sin \theta d\theta = -\Sigma m B_{mw} \int_0^{\theta_1} [P_v^m \frac{dP_{v'}^m}{d\theta} + \frac{dP_v^m}{d\theta} P_{v'}^m] d\theta$$

$$-\Sigma A_{mw} \int_0^{\theta_1} [\frac{m^2}{\sin \theta} P_v^m P_{v'}^m + \sin \theta \frac{dP_v^m}{d\theta} \frac{dP_{v'}^m}{d\theta}] d\theta$$

(3.2.12.b)

จาก (3.2.12.b) พิจารณา

$$\int_0^{\theta_1} [P_v^m \frac{dP_{v'}^m}{d\theta} + \frac{dP_v^m}{d\theta} P_{v'}^m] d\theta = P_v^m P_{v'}^m \Big|_0^{\theta_1}$$

$$= P_v^m (\cos \theta_1) P_{v'}^m (\cos \theta_1) - P_v^m (1) P_{v'}^m (1)$$

$$= 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

หมายเหตุ

$$P_v^m(1) = 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

$$= 1 \quad ; \quad m = 0$$

จาก (3.2.12.a)

$$\int_0^{\theta_1} [\frac{m^2}{\sin \theta} P_v^m P_{v'}^m + \sin \theta \frac{dP_v^m}{d\theta} \frac{dP_{v'}^m}{d\theta}] d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & ; v \neq v' \\ N_v^m = -\frac{v(v+1)}{2} [\sin \theta P_v^m \frac{d^2 P_{v'}^m}{d\theta^2}] \Big|_0^{\theta_1} & ; v = v' \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ การใช้งานโดยไม่อนุญาตให้ทำซ้ำโดยไม่ขออนุญาตเป็นการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้ง 2v+1 ให้ตัดแปลงเนื้อหาเอกสารฉบับนี้อีก ๑ ครั้งของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $\frac{d}{d\theta} P_w^m(\cos\theta_1) = \frac{d}{d\theta} P_{w'}^m(\cos\theta_1) = 0$

จาก (3.2.12.b) พิจารณา

$$\int_0^{\theta_1} [ \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_w^m P_{w'}^m + \sin\theta \frac{dP_w^m}{d\theta} \frac{dP_{w'}^m}{d\theta} ] d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & ; w \neq w' \\ M_w^m = \frac{w(w+1)}{2w+1} [ \sin\theta \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_{w'}^m}{\partial \theta} ] \Big|_{\theta=\theta_1} & ; w = w' \end{cases}$$

เมื่อ  $P_w^m(\cos\theta_1) = P_{w'}^m(\cos\theta_1) = 0$   
 ตั้งนิยามจาก (3.2.12.a) และ (3.2.12.b) จะได้

$$A_{mw} = \frac{-1}{M_w^m} \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} f_m(\theta) \frac{dP_w^m}{d\theta} \sin\theta d\theta \quad (3.2.13.a)$$

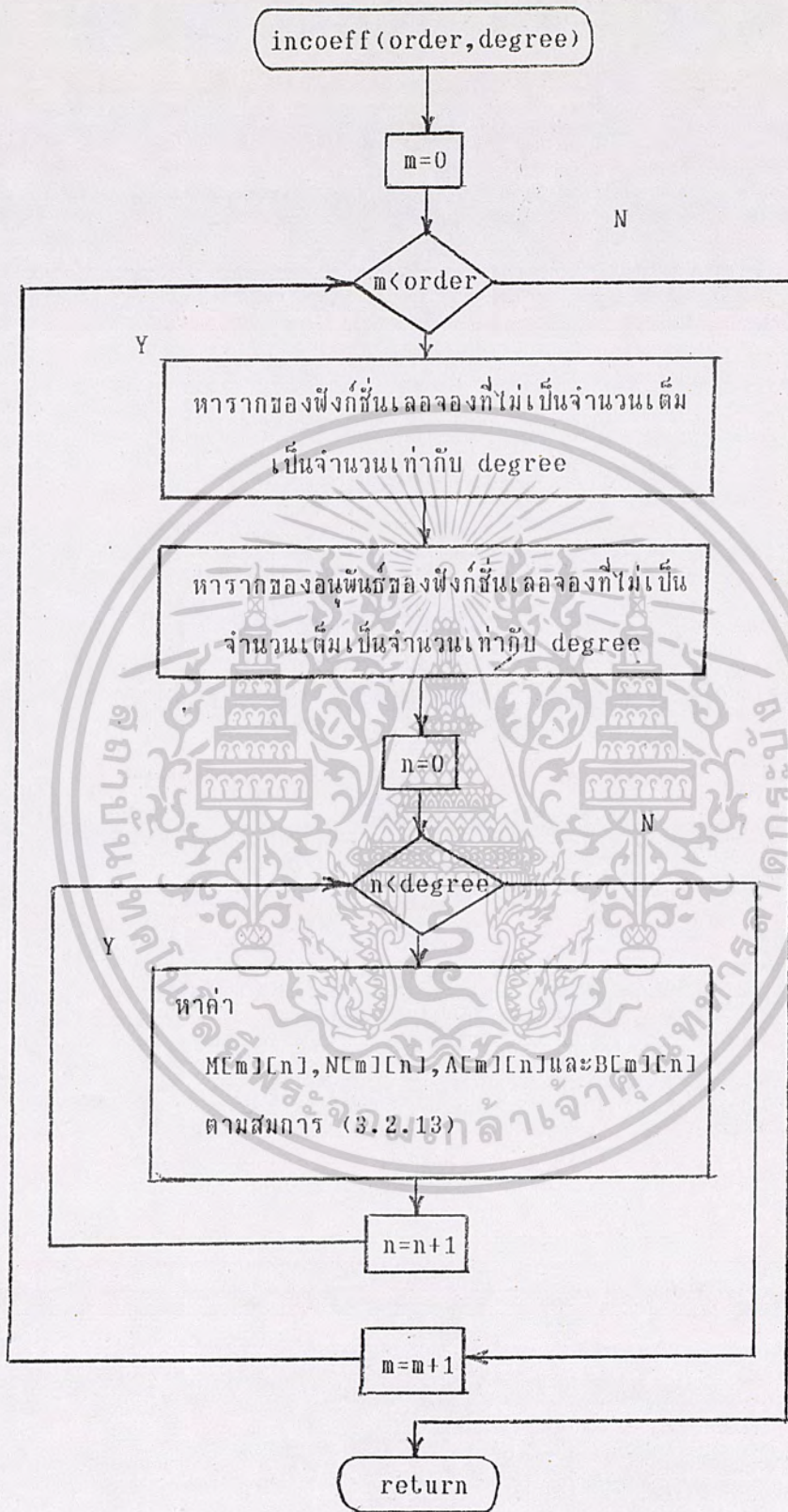
$$B_{mw} = \frac{-1}{N_w^m} \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} m f_m(\theta) P_w^m d\theta \quad (3.2.13.b)$$

เมื่อ  $P_w^m(\cos\theta_1) = 0 \quad (3.2.13.c)$

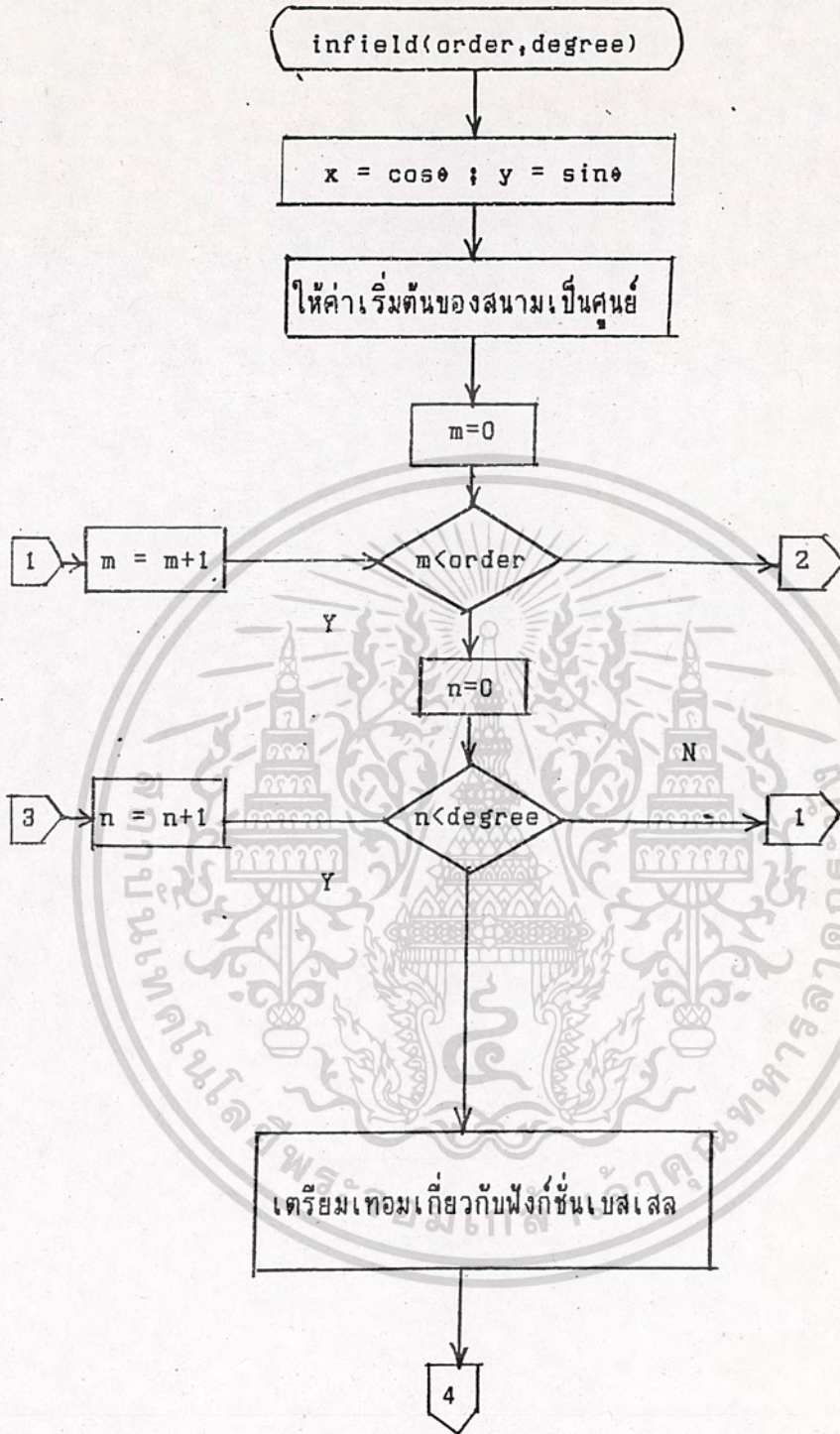
$$M_w^m = \frac{w(w+1)}{2w+1} [ \sin\theta \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} ] \Big|_{\theta=\theta_1} \quad (3.2.13.d)$$

$$\frac{dP_w^m}{d\theta}(\cos\theta_1) = 0 \quad (3.2.13.e)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้  $\frac{-v(v+1)}{2v+1} [ \sin\theta \frac{\partial P_v^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_v^m}{\partial \theta} ] \Big|_{\theta=\theta_1}$  ไม่นับญาติให้หน้า (3.2.13.f) ด้านการคำนวณว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกและเผยแพร่ข้อมูลอันเป็นอันของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

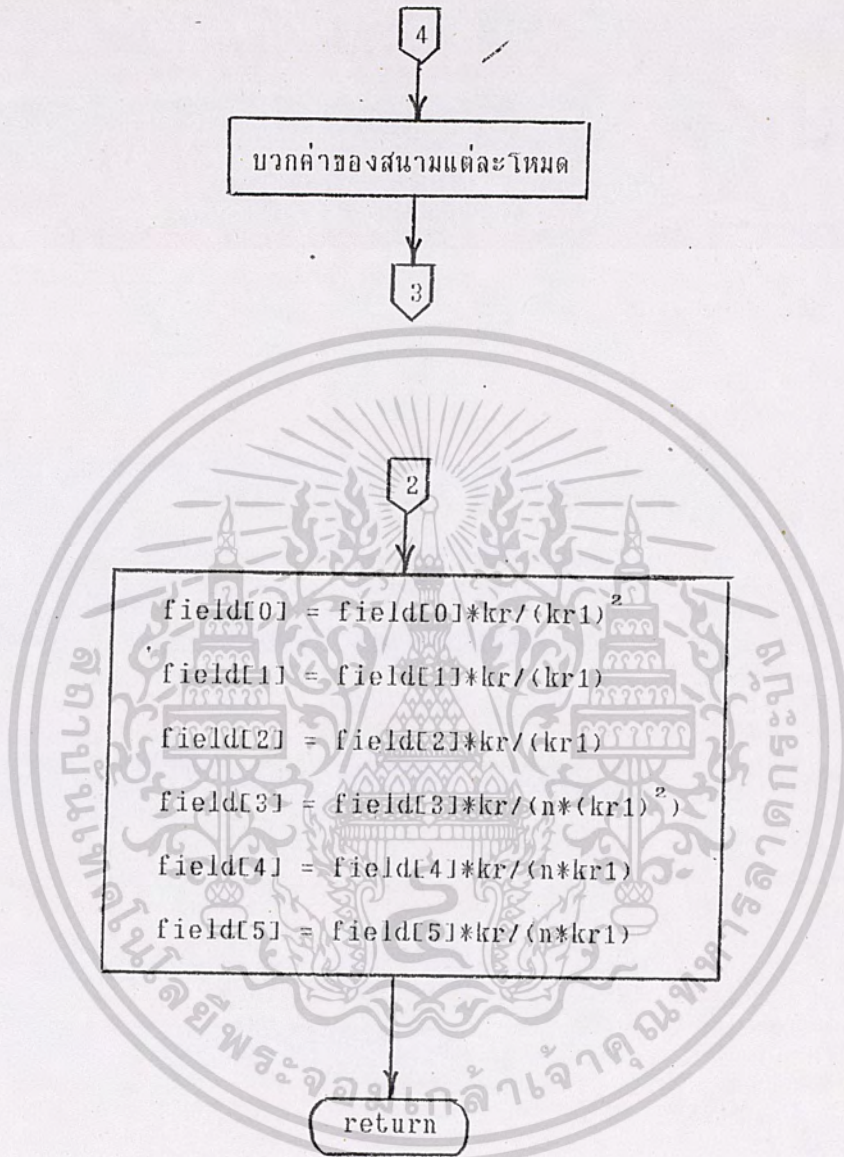


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่ควรเอาไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
รูปที่ 3.3 ผังงานของโปรแกรมหาค่าสัมประสิทธิ์ของสนามภายใน  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4(a) ผังงานของโปรแกรมย่อยหาสนามภายใน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4(b) ฝั่งงานของโปรแกรมย่อยหาค่าสนามภายใน(ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ยืมเห็นนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.3 การแก้สนามภายนอก

แบ่งสนามภายนอกออกเป็น ๓ บริเวณ คือ บริเวณ  $0 \leq r < r_1$  และบริเวณ  $r > r_1$  เมื่อ  $r_1$  เป็นรัศมีที่น้อยกว่าของสายอากาศ

#### 3.3.1 สนามในบริเวณ $0 \leq r < r_1$

$$E_r^{o-} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn} n(n+1) \frac{kr_1 \hat{J}_n(kr)}{(kr)^2 \hat{J}_n'(kr_1)} P_n^m(\cos\theta) \cos m\phi$$

$$E_\theta^{o-} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[ a_{mn} \frac{kr_1 \hat{J}_n'(kr)}{kr \hat{J}_n'(kr_1)} \frac{dP_n^m}{d\theta} + b_{mn} \frac{kr_1 \hat{J}_n(kr)}{kr \hat{J}_n(kr_1)} \frac{mP_n^m}{\sin\theta} \right] \cos m\phi$$

$$E_\phi^{o-} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[ a_{mn} \frac{kr_1 \hat{J}_n'(kr)}{kr \hat{J}_n'(kr_1)} \frac{mP_n^m}{\sin\theta} + b_{mn} \frac{kr_1 \hat{J}_n(kr)}{kr \hat{J}_n(kr_1)} \frac{dP_n^m}{d\theta} \right] \sin m\phi$$

$$H_r^{o-} = -j \sum_n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} b_{mn} n(n+1) \frac{kr_1 \hat{J}_n(kr)}{(kr)^2 \hat{J}_n'(kr_1)} P_n^m(\cos\theta) \sin m\phi$$

$$H_\theta^{o-} = -j \sum_n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[ -a_{mn} \frac{kr_1 \hat{J}_n(kr)}{kr \hat{J}_n'(kr_1)} \frac{mP_n^m}{\sin\theta} + b_{mn} \frac{kr_1 \hat{J}_n'(kr)}{kr \hat{J}_n(kr_1)} \frac{dP_n^m}{d\theta} \right] \sin m\phi$$

$$H_\phi^{o-} = -j \sum_n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[ -a_{mn} \frac{kr_1 \hat{J}_n(kr)}{kr \hat{J}_n'(kr_1)} \frac{dP_n^m}{d\theta} + b_{mn} \frac{kr_1 \hat{J}_n'(kr)}{kr \hat{J}_n(kr_1)} \frac{mP_n^m}{\sin\theta} \right] \cos m\phi$$

เป็นสมการที่ (3.3.1.a) ถึง (3.3.1.f)

เมื่อ  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่  $m, m+1, m+2, \dots$  ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ  $a_{mn}$  และ  $b_{mn}$  เป็นค่าที่ขึ้นกับ  $m$  และ  $n$  อย่างยิ่งถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.2 สนามในบริเวณ  $r > r_1$ 

$$E_r^{n+} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} c_{mn} \frac{n(n+1) kr_1 \hat{H}_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \cos m\phi}{(kr)^2 \hat{H}_n'(kr_1)}$$

$$E_\theta^{n+} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [c_{mn} \frac{kr_1 \hat{H}_n'(kr) dP_n^m}{kr \hat{H}_n'(kr_1) d\theta} + d_{mn} \frac{kr_1 \hat{H}_n(kr) mP_n^m}{kr \hat{H}_n(kr_1) \sin\theta}] \cos m\phi$$

$$E_\phi^{n+} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [c_{mn} \frac{kr_1 \hat{H}_n'(kr) mP_n^m}{kr \hat{H}_n'(kr_1) \sin\theta} + d_{mn} \frac{kr_1 \hat{H}_n(kr) dP_n^m}{kr \hat{H}_n(kr_1) d\theta}] \sin m\phi$$

$$H_r^{n+} = -j \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} d_{mn} \frac{n(n+1) kr_1 \hat{H}_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \sin m\phi}{(kr)^2 \hat{H}_n'(kr_1)}$$

$$H_\theta^{n+} = -j \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [c_{mn} \frac{kr_1 \hat{H}_n(kr) mP_n^m}{kr \hat{H}_n'(kr_1) \sin\theta} + d_{mn} \frac{kr_1 \hat{H}_n'(kr) dP_n^m}{kr \hat{H}_n(kr_1) d\theta}] \sin m\phi$$

$$H_\phi^{n+} = -j \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [c_{mn} \frac{kr_1 \hat{H}_n(kr) dP_n^m}{kr \hat{H}_n'(kr_1) d\theta} + d_{mn} \frac{kr_1 \hat{H}_n'(kr) mP_n^m}{kr \hat{H}_n(kr_1) \sin\theta}] \cos m\phi$$

เป็นสมการที่ (3.3.2.a) ถึง (3.3.2.f)

เมื่อ  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

$n = m, m+1, m+2, \dots$

$c_{mn}$  และ  $d_{mn}$  เป็นค่าที่ขึ้นกับ  $m$  และ  $n$

$H_n(kr) = H_n^{(2)}(kr)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.3.3 การหาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของสนามภายนอก

การสมมติสนามที่  $r = r_1$

การสมมติสนามในบริเวณ  $0 \leq r < r_1$  เมื่อ  $r \rightarrow r_1^-$

$$E_a(\theta, \phi) = \frac{V_0 \sin[kr_1 \sin \theta_2 (\phi_1 - \phi)]}{r_1 \sin \theta \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right]} \quad ; \quad \theta_2 - \alpha \leq \theta \leq \theta_2 + \alpha$$

$$, -\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 \quad (3.1.1)$$

$$E\theta^{\alpha-}(r_1, \theta, \phi) = \begin{cases} E\theta^{\alpha+}(r_1, \theta, \phi) & ; \theta_1 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & ; \text{อื่น ๆ} \end{cases} \quad (3.3.3.a)$$

$$E\phi^{\alpha-}(r_1, \theta, \phi) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq \theta < \theta_1 \\ E\phi^{\alpha+}(r_1, \theta, \phi) & ; \theta_1 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.3.3.b)$$

การสมมติสนามในบริเวณ  $r > r_1$  เมื่อ  $r \rightarrow r_1^+$

$$E\theta^{\alpha+}(r_1, \theta, \phi) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq \theta < \theta_1 \\ E\theta^{\alpha-}(r_1, \theta, \phi) & ; \theta_1 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.3.3.c)$$

$$E\phi^{\alpha+}(r_1, \theta, \phi) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq \theta < \theta_1 \\ E\phi^{\alpha-}(r_1, \theta, \phi) & ; \theta_1 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.3.3.d)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหา ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของสนามบริเวณ  $0 \leq r < r_1$

จากสนามบริเวณ  $0 \leq r < r_1$  ที่  $r = r_1$  อินทิเกรตสมการของ  $E_\phi^{(1)}$  (3.3.1.b)

เทียบกับ  $\cos m\phi d\phi$  และอินทิเกรตสมการของ  $E_\phi^{(1)}$  (3.3.1.c) เทียบกับ  $\sin m\phi d\phi$  จะได้

$$-\sum_n [a_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta} + b_{mn} \frac{mP_n^m}{\sin\theta}] = \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_0^{2\pi} E_\phi^{(1)} \cos m\phi d\phi \quad (3.3.4.a)$$

และ

$$\sum_n [a_{mn} \frac{mP_n^m}{\sin\theta} + b_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta}] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E_\phi^{(1)} \sin m\phi d\phi \quad (3.3.4.b)$$

เมื่อ  $\delta_m = \begin{cases} 1 & ; m = 0 \\ 0 & ; m \neq 0 \end{cases}$

กำหนด  $\int_0^\pi mP_n^m d\theta$  เป็น op 3.3.1.a

และ  $\int_0^\pi \frac{dP_n^m}{d\theta} \sin\theta d\theta$  เป็น op 3.3.1.b

เมื่อ  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

ใช้ op 3.3.1.b กับ (3.3.4.a)

$$-\sum_n \int_0^\pi [a_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} \sin\theta + b_{mn} mP_n^m \frac{dP_n^m}{d\theta}] d\theta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} E\phi^{\alpha-}(r_1, \theta, \phi) \cos m\phi \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \sin\theta \, d\phi \, d\theta \\
 &= \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\theta_2+\alpha-\phi_1}^{\theta_2+\alpha+\phi_1} \int E_n \cos m\phi \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \sin\theta \, d\phi \, d\theta \\
 &+ \int_0^{\pi} \int E\phi^{\alpha+} \cos m\phi \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \sin\theta \, d\phi \, d\theta \\
 &= \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\theta_2-\alpha-\phi_1}^{\theta_2+\alpha+\phi_1} \int E_n \cos m\phi \, d\phi \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \sin\theta \, d\theta \\
 &- \sum_{n \neq m} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ c_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \sin\theta + d_{mn} m P_n^m \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \right] d\theta \quad (3.3.4.c)
 \end{aligned}$$

ใช้ op 3.3.1.a กับ (3.3.4.b) จะได้

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=m}^{\infty} \int_0^{\pi} \left[ a_{mn} \frac{m^2}{\sin\theta} P_n^m P_\alpha^m + b_{mn} m \frac{dP_n^m}{d\theta} P_\alpha^m \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int E\phi^{\alpha-}(r_1, \theta, \phi) \sin m\phi \, d\phi \, m P_\alpha^m \, d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int E\phi^{\alpha+}(r_1, \theta, \phi) \sin m\phi \, d\phi \, m P_\alpha^m \, d\theta
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\pi} [c_{mn} \frac{m^2}{\sin \theta} P_n^m P_{\alpha}^m + d_{mn} m \frac{dP_n^m}{d\theta} P_{\alpha}^m] d\theta \quad (3.3.4.d)$$

(3.3.4.c) - (3.3.4.d) จะได้

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn} \int_0^{\pi} [dP_n^m \frac{dP_{\alpha}^m}{d\theta} \sin \theta + \frac{m^2}{\sin \theta} P_n^m P_{\alpha}^m] d\theta \\ & - \sum_{n=m}^{\infty} b_{mn} \int_0^{\pi} m [P_n^m \frac{dP_{\alpha}^m}{d\theta} + \frac{dP_n^m}{d\theta} P_{\alpha}^m] d\theta \\ & = \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\theta_2-\alpha-\phi_1}^{\theta_2+\alpha-\phi_1} \int_{\theta_1}^{\pi} E_n \cos m\theta d\theta \frac{dP_{\alpha}^m}{d\theta} \sin \theta d\theta \\ & - \sum_{n=m}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\pi} \{c_{mn} [\frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{\alpha}^m}{d\theta} \sin \theta + \frac{m^2}{\sin \theta} P_n^m P_{\alpha}^m] + d_{mn} m [\frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{\alpha}^m}{d\theta} + \frac{dP_n^m}{d\theta} P_{\alpha}^m]\} d\theta \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$\int_0^{\pi} [dP_n^m \frac{dP_{\alpha}^m}{d\theta} \sin \theta + \frac{m^2}{\sin \theta} P_n^m P_{\alpha}^m] d\theta = \begin{cases} 0 & ; n \neq \alpha \\ \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & ; n = \alpha \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่หาแล้วหาอีกที่กรมโขนงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น 0 อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
และ  $\int_0^{\pi} m [P_n^m \frac{dP_{\alpha}^m}{d\theta} + \frac{dP_n^m}{d\theta} P_{\alpha}^m] d\theta$  ไม่วารณใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลงใน (3.3.5) แล้วจัดรูปใหม่ จะได้

$$a_{mn} = - \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \left\{ \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\theta_2+\alpha}^{\theta_1} \int_{\phi_1}^{\phi_2} E_n \cos m\phi \, d\phi \, \frac{dP_n^m}{d\theta} \sin\theta \, d\theta \right. \\ \left. - \sum_{q=m}^{\infty} [c_{mq} \alpha_{mnq} + d_{mq} \beta_{mnq}] \right\} \quad (3.3.6.a)$$

เมื่อ

$$\alpha_{mnq} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left[ \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_n^m P_q^m + \sin\theta \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_q^m}{d\theta} \right] d\phi \, d\theta = \alpha_{mqn}$$

$$\beta_{mnq} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} m \left[ P_n^m \frac{dP_q^m}{d\theta} + \frac{dP_n^m}{d\theta} P_q^m \right] d\phi \, d\theta \\ = m P_n^m P_q^m \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} = - [m P_n^m P_q^m] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \beta_{mqn}$$

หมายเหตุ

ในการจัดรูปใหม่ เพื่อกำหนด  $a_{mn}$  นั้น หลังจากใช้สูตรออร์โธโกนอลแล้ว จะได้  $a_{mq}$  อยู่ในรูป  $\Sigma$  ของ  $c_{mq}$  และ  $d_{mq}$  ดังนั้น เพื่อกำหนด  $a_{mn}$  ก็จะต้องแทน  $q$  ด้วย  $n$  และ แทน

$n=m$  ด้วย  $q$  ผลก็ได้รับก็คือ  $a_{mn}$  อยู่ในรูป  $\Sigma$  ของ  $c_{mq}$  และ  $d_{mq}$  ดังสมการ (3.3.6.a)  $q=m$

ในการหา  $b_{mn}$  ก็เช่นเดียวกับ  $a_{mn}$  โดยใช้ op 3.3.1.a กับ (3.3.4.a) และ op 3.3.1.b กับ (3.3.4.b) แล้วเอาสมการที่ได้มาสัมพันธ์กัน และใช้สูตรออร์โธโกนอลของฟังก์ชันเลอจองก็จะได้ สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$b_{mn} = - \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \left\{ \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_n^{\alpha+\alpha} \cos m\phi \, d\phi \, mP_n^m \, d\theta \right. \\ \left. - \sum_{q=m}^{\infty} [c_{mq} \beta_{mq} + d_{mq} \alpha_{mq}] \right\} \quad (3.3.5.b)$$

การหาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของสนามบริเวณ  $r > r_1$

จากสมการของสนามบริเวณ  $r > r_1$  แทน  $r$  ด้วย  $r_1$  แล้วอินทิเกรตสมการของ  $E_0^{\alpha+}$  เทียบกับ  $\cos m\phi \, d\phi$  และอินทิเกรตสมการของ  $E_0^{\alpha+}$  เทียบกับ  $\sin m\phi \, d\phi$  จะได้

$$- \sum_{n=m}^{\infty} [c_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta} + d_{mn} mP_n^m] = \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_0^{2\pi} E_0^{\alpha+} \cos m\phi \, d\phi \quad (3.3.7.a)$$

และ

$$\sum_{n=m}^{\infty} [c_{mn} \frac{mP_n^m}{\sin\theta} + d_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta}] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E_0^{\alpha+} \sin m\phi \, d\phi \quad (3.3.7.b)$$

ใช้ op 3.3.1.b กับ (3.3.7.a)

$$- \sum_{n=m}^{\infty} \int_0^\pi [c_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} \sin\theta + d_{mn} mP_n^m \frac{dP_n^m}{d\theta}] \, d\theta \\ = \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_0^{\alpha+} \cos m\phi \, d\phi \frac{dP_n^m}{d\theta} \sin\theta \, d\theta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนไว้สำหรับงานวิจัยเท่านั้น ไม่ควรนำออกเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ (1+\delta\_m)\pi \int\_0^{2\pi} \int\_0^\pi E\_0^{\alpha-} \cos m\phi \, d\phi \frac{dP\_n^m}{d\theta} \sin\theta \, d\theta

$$= - \sum_{n=m_0}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\pi} [a_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \sin\theta + b_{mn} m P_n^m \frac{dP_\alpha^m}{d\theta}] d\theta \quad (3.3.8.a)$$

ใช้ op 3.3.1.a กับ (3.3.7.a)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m_0}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\pi} [c_{mn} \frac{m^2}{\sin\theta} P_n^m P_\alpha^m + d_{mn} m \frac{dP_n^m}{d\theta} P_\alpha^m] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} E\phi^{m+} \sin m\phi d\phi \right) m P_\alpha^m d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} E\phi^{m-} \sin m\phi d\phi \right) m P_\alpha^m d\theta \\ &= \sum_{n=m_0}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\pi} [a_{mn} \frac{m^2}{\sin\theta} P_n^m P_\alpha^m + b_{mn} m \frac{dP_n^m}{d\theta} P_\alpha^m] d\theta \quad (3.3.8.b) \end{aligned}$$

(3.3.8.a) - (3.3.8.b) จะได้

$$- \sum_{n=m_0}^{\infty} c_{mn} \int_{\theta_1}^{\pi} [ \frac{m^2}{\sin\theta} P_n^m P_\alpha^m + \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \sin\theta ] d\theta$$

$$- \sum_{n=m_0}^{\infty} d_{mn} \int_{\theta_1}^{\pi} [ m P_n^m \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} + \frac{dP_n^m}{d\theta} P_\alpha^m ] d\theta$$

$$\sum_{n=m_0}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\pi} [ a_{mn} \frac{m^2}{\sin\theta} P_n^m P_\alpha^m + \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_\alpha^m}{d\theta} \sin\theta ] d\theta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในเท่านั้น ไม่ควรเผยแพร่ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+ b_{mn} \int_{\theta_1}^{\pi} [P_n^m \frac{dP_n^m}{d\theta} + \frac{dP_n^m}{d\theta} P_n^m] d\theta$$

แทน

$$\int_{\theta_1}^{\pi} [m^2 P_n^m P_n^m + \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} \sin\theta] d\theta = \begin{cases} 0 & ; n \neq q \\ \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & ; n = q \end{cases}$$

จะได้

$$c_{mq} \frac{2q(q+1)(q+m)!}{(2q+1)(q-m)!} = \sum_{n=m}^{\infty} [a_{mn} \alpha_{mnq} + b_{mn} \beta_{mnq}]$$

แทน n ด้วย q และแทน q ด้วย n แล้วจัดรูปสมการใหม่

$$c_{mn} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \sum_{q=m}^{\infty} [a_{mq} \alpha_{mqn} + b_{mq} \beta_{mqn}] \tag{3.3.9.a}$$

สำหรับการหา  $d_{mn}$  ก็เช่นเดียวกับ  $c_{mn}$  แต่ใช้ op 3.3.1.a กับ (3.3.7.a) และใช้ op 3.3.1.b กับ (3.3.7.b) และเอาสมการที่ได้มาลบกัน จากนั้นใช้สูตรออร์โธโกนอลและจัดรูปใหม่ จะได้

$$d_{mn} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \sum_{q=m}^{\infty} [a_{mq} \beta_{mqn} + b_{mq} \alpha_{mqn}] \tag{3.3.9.b}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปสมการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของสนามภายนอก

$$a_{mn} = - \left\{ \text{coeff1}_{mn} - \sum_{i=m}^{\infty} [c_{mi} \alpha_{mni} + d_{mi} \beta_{mni}] \right\} / \text{coeff}_{mn} \quad (3.3.10.a)$$

$$b_{mn} = - \left\{ \text{coeff2}_{mn} - \sum_{i=m}^{\infty} [c_{mi} \beta_{mni} + d_{mi} \alpha_{mni}] \right\} / \text{coeff}_{mn} \quad (3.3.10.b)$$

$$c_{mn} = \frac{1}{\text{coeff}_{mn}} \sum_{i=m}^{\infty} [a_{mi} \alpha_{mni} + b_{mi} \beta_{mni}] \quad (3.3.10.c)$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\text{coeff}_{mn}} \sum_{i=m}^{\infty} [a_{mi} \beta_{mni} + b_{mi} \alpha_{mni}] \quad (3.3.10.d)$$

เมื่อ  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  คือ สปส. ของสนามภายนอกบริเวณ  $r < r_1$

$c_{mn}$ ,  $d_{mn}$  คือ สปส. ของสนามภายนอกบริเวณ  $r > r_1$

$$\alpha_{mni} = \alpha_{mni} = \int_{\theta_1}^{\pi} \left[ \frac{m^2}{\sin \theta} P_n^m P_i^m + \sin \theta \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_i^m}{d\theta} \right] d\theta \quad (3.3.10.e)$$

$$\begin{aligned} \beta_{mni} &= \beta_{mni} = \int_{\theta_1}^{\pi} m \left[ P_n^m \frac{dP_i^m}{d\theta} + \frac{dP_n^m}{d\theta} P_i^m \right] d\theta \\ &= - \left[ m P_n^m P_i^m \right] \Big|_{\theta=\theta_1} \end{aligned} \quad (3.3.10.f)$$

เอกสารที่  $\text{coeff}_{mn} = \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$  งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไป (3.3.10.g) การค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ยินดีขอมอบให้ด้วยแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{coeff1}_{mn} = \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\theta_2-\alpha-\phi_1}^{\theta_2+\alpha+\phi_1} \int E_n \cos m\phi \, d\phi \frac{dP_n^m}{d\sigma} \sin\sigma \, d\sigma \quad (3.3.10.h)$$

$$\text{coeff2}_{mn} = \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\theta_2-\alpha-\phi_1}^{\theta_2+\alpha+\phi_1} \int E_n \cos m\phi \, d\phi \, m P_n^m \, d\sigma \quad (3.3.10.i)$$

$$E_n = \frac{V_0 \sin[kr_1 \sin\theta_2 (\phi_1 - \phi / r)]}{r_1 \ln \left[ \frac{\tan((\theta_2 + \alpha)/2)}{\tan((\theta_2 - \alpha)/2)} \right] \sin\sigma} \quad ; \theta_2 - \alpha < \theta < \theta_2 + \alpha$$

$$, -\phi_1 < \phi < \phi_1$$

พิจารณา  $\alpha_{mni}$   
เมื่อ  $n = i$

$$\alpha_{mni} = \int_{\theta_1}^{\pi} \left[ \frac{m^2}{\sin\sigma} P_n^m P_i^m + \sin\sigma \frac{dP_n^m}{d\sigma} \frac{dP_i^m}{d\sigma} \right] d\sigma$$

$$= \sin\sigma P_i^m \frac{dP_n^m}{d\sigma} \Big|_{\theta_1}^{\pi} + n(n+1) \int_{\theta_1}^{\pi} P_n^m P_i^m \sin\sigma \, d\sigma$$

$$= - \left[ \sin\sigma P_i^m \frac{dP_n^m}{d\sigma} \right] \Big|_{\theta=\theta_1}^{\pi} + n(n+1) \int_{\theta_1}^{\pi} P_n^m P_i^m \sin\sigma \, d\sigma$$

แทนค่า จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสาร [sinσ P<sub>i</sub><sup>m</sup> dP<sub>n</sub><sup>m</sup>] งานที่ [n(n+1) sinσ<sub>1</sub> [P<sub>n</sub><sup>m</sup> dP<sub>n</sub><sup>m</sup> - P<sub>n</sub><sup>m</sup> dP<sub>n</sub><sup>m</sup>]] ด้านการค่า  
ไม่วารณใด ๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้าม [dσ] ตัด [dσ] = θ<sub>1</sub> i(i+1) - n(n+1) เจ้า dσ เอกสารทุก dσ ที่มี [dσ] θ<sub>1</sub> ใช้

$$= \frac{-\sin \theta_1}{i(i+1)-n(n+1)} \left[ i(i+1) P_i^m \frac{dP_n^m}{d\theta} - n(n+1) P_n^m \frac{dP_i^m}{d\theta} \right] \Big|_{\theta=\theta_1}$$

(3.3.11.a)

เมื่อ  $n = i$

$$\text{จาก } \int \left[ \frac{m^2}{\sin \theta} (P_n^m)^2 + \sin \theta (dP_n^m)^2 \right] d\theta$$

$$= \sin \theta \lim_{i \rightarrow n} \frac{\partial}{\partial i} \left[ \frac{i(i+1) P_i^m \frac{dP_n^m}{d\theta} - n(n+1) P_n^m \frac{dP_i^m}{d\theta}}{i(i+1) - n(n+1)} \right] + c$$

$$= \frac{\sin \theta}{2n+1} \left[ n(n+1) \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_n^m}{\partial n} + (2n+1) P_n^m \frac{dP_n^m}{d\theta} - n(n+1) P_n^m \frac{\partial^2 P_n^m}{\partial \theta \partial n} \right] + c$$

$$= \sin \theta P_n^m \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} + \frac{n(n+1)}{2n+1} \sin \theta \left[ \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_n^m}{\partial n} - P_n^m \frac{\partial^2 P_n^m}{\partial \theta \partial n} \right] + c$$

$$\alpha_{mn1} = \int_{\theta_1}^{\pi} \left[ \frac{m^2}{\sin \theta} (P_n^m)^2 + \sin \theta (dP_n^m)^2 \right] d\theta$$

$$= \frac{n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} - \sin \theta_1 \left\{ P_n^m \frac{P_n^m}{\theta} + \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[ \frac{P_n^m}{\theta} \frac{P_n^m}{n} - P_n^m \frac{P_n^m}{\theta n} \right] \right\} \Big|_{\theta=\theta_1}$$

(3.3.11.b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ

$$\left. \left( \sin \theta \frac{P_n^m}{\theta} + \frac{n(n+1)}{2n+1} \sin \theta \left[ \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_n^m}{\partial n} - P_n^m \frac{\partial^2 P_n^m}{\partial \theta \partial n} \right] \right) \right|_{\theta=\pi}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n+1} \sin \theta \left[ \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_n^m}{\partial n} - P_n^m \frac{\partial^2 P_n^m}{\partial \theta \partial n} \right] \Big|_{\theta=\pi} = \frac{n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial P_n^m}{\partial n} = \lim_{v \rightarrow n} \frac{\partial P_v^m}{\partial v} (\cos \theta)$$

พิจารณา coeff<sub>1<sub>mn</sub></sub>

จาก

$$\text{coeff}_{1_{mn}} = \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\phi_1}^{\theta_2+\alpha} \int_{\theta_2-\alpha-\phi_1}^{\theta_2+\alpha} E_n \cos m\phi d\phi \frac{dP_n^m}{d\theta} \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\phi_1}^{\theta_2+\alpha} E_n \cos m\phi d\phi * \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \frac{dP_n^m}{d\theta} \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\phi_1}^{\theta_2+\alpha} (\sin \theta \int E_n \cos m\phi d\phi) (P_n^m(\cos(\theta_2+\alpha)) - P_n^m(\cos(\theta_2-\alpha)))$$

(3.3.12)

เหตุที่  $\sin \theta$  ไปคูณกับ  $\int E_n \cos m\phi d\phi$  ได้ ก็เพราะ เทอม  $\int E_n \cos m\phi d\phi$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับบริการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอญนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่รับประกันด้วย เติม  $\sin \theta$  เป็นตัวหารอยู่ (ดู สมการ (3.2.10))

พิจารณา  $\text{coeff2}_{mn}$ 

$$\begin{aligned} \text{coeff2}_{mn} &= \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_n \cos m\phi d\phi \pi P_n^m d\theta \\ &= \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} \int_{\theta_2-\alpha-\phi_1}^{\theta_2+\alpha+\phi_1} \int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_n \cos m\phi d\phi \pi P_n^m d\theta \\ &= \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} (\sin\theta_1 \int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_n \cos m\phi d\phi) \left( \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \pi P_n^m d\theta \right) \quad (3.3.13.a) \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $\alpha$  มีค่าน้อยมากจึงประมาณได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{coeff2}_{mn} &\sim \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} (\sin\theta_1 \int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_n \cos m\phi d\phi) \frac{\pi P_n^m(\cos\theta_2)(2\alpha)}{\sin\theta_2} \\ &\sim \frac{1}{(1+\delta_m)\pi} (\sin\theta_1 \int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_n \cos m\phi d\phi) \frac{2m\alpha P_n^m(\cos\theta_2)}{\sin\theta_2} \quad (3.3.13.b) \end{aligned}$$

เมื่อแทน  $\sin\theta_1 \int_{-\phi_1}^{\phi_1} E_n \cos m\phi d\phi$  ได้จาก(3.2.10)

$$-\phi_1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.3.4 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของสนามภายนอกโดยระบบสมการเชิงเส้น

$$\text{coeff}_{mn} * a_{mn} = -\text{coeff1}_{mn} + \sum_{i=m}^{\infty} [c_{mi} * \alpha_{mni} + d_{mi} * \beta_{mni}]$$

$$\text{coeff}_{mn} * b_{mn} = -\text{coeff2}_{mn} + \sum_{i=m}^{\infty} [c_{mi} * \beta_{mni} + d_{mi} * \alpha_{mni}]$$

$$\text{coeff}_{mn} * c_{mn} = \sum_{i=m}^{\infty} [a_{mi} * \alpha_{mni} + b_{mi} * \beta_{mni}]$$

$$\text{coeff}_{mn} * d_{mn} = \sum_{i=m}^{\infty} [a_{mi} * \beta_{mni} + b_{mi} * \alpha_{mni}]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \text{coeff}_{mn} * a_{mn} &= -\text{coeff}_{1mn} + \sum_{i=m}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_{mni}}{\text{coeff}_{mi}} \sum_{j=m}^{\infty} [a_{m,i} * \alpha_{m,i,j} + b_{m,i} * \beta_{m,i,j}] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\beta_{mni}}{\text{coeff}_{mi}} \sum_{j=m}^{\infty} [a_{m,i} * \beta_{m,i,j} + b_{m,i} * \alpha_{m,i,j}] \right\} \\
 &= -\text{coeff}_{1mn} + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{a_{m,i} [\alpha_{mni} * \alpha_{m,i,j} + \beta_{mni} * \beta_{m,i,j}]}{\text{coeff}_{mi}} \\
 &\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{b_{m,i} [\alpha_{mni} * \beta_{m,i,j} + \beta_{mni} * \alpha_{m,i,j}]}{\text{coeff}_{mi}} \\
 &= -\text{coeff}_{1mn} + \sum_{j=m}^{\infty} \frac{a_{m,i} \sum_{i=m}^{\infty} [\alpha_{mni} * \alpha_{m,i,j} + \beta_{mni} * \beta_{m,i,j}]}{\text{coeff}_{mi}} \\
 &\quad + \sum_{j=m}^{\infty} \frac{b_{m,i} \sum_{i=m}^{\infty} [\alpha_{mni} * \beta_{m,i,j} + \beta_{mni} * \alpha_{m,i,j}]}{\text{coeff}_{mi}}
 \end{aligned}$$

(3.3.14.a)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \text{coeff}_{mn} * b_{mn} &= -\text{coeff2}_{mn} + \sum_{i=m}^{\infty} \left\{ \frac{\beta_{mni}}{\text{coeff}_{mi}} \sum_{j=m}^{\infty} [a_{m,i} * \alpha_{m,i,j} + b_{m,i} * \beta_{m,i,j}] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_{mni}}{\text{coeff}_{mi}} \sum_{j=m}^{\infty} [a_{m,i} * \beta_{m,i,j} + b_{m,i} * \alpha_{m,i,j}] \right\} \\
 &= -\text{coeff2}_{mn} + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{a_{m,i} [\beta_{mni} * \alpha_{m,i,j} + \alpha_{mni} * \beta_{m,i,j}]}{\text{coeff}_{mi}} \\
 &\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{b_{m,i} [\beta_{mni} * \beta_{m,i,j} + \alpha_{mni} * \alpha_{m,i,j}]}{\text{coeff}_{mi}} \\
 &= -\text{coeff2}_{mn} + \sum_{j=m}^{\infty} \frac{a_{m,i} \sum_{i=m}^{\infty} [\alpha_{mni} * \beta_{m,i,j} + \beta_{mni} * \alpha_{m,i,j}]}{\text{coeff}_{mi}} \\
 &\quad + \sum_{j=m}^{\infty} \frac{b_{m,i} \sum_{i=m}^{\infty} [\alpha_{mni} * \alpha_{m,i,j} + \beta_{mni} * \beta_{m,i,j}]}{\text{coeff}_{mi}}
 \end{aligned}$$

(3.3.14.b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
\text{coeff}_{mn} * c_{mn} &= \sum_{i=m}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_{mni}}{\text{coeff}_{mi}} [-\text{coeff1}_{mi} + \sum_{j=m}^{\infty} (c_{mj} * \alpha_{mij} + d_{mj} * \beta_{mij})] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta_{mni}}{\text{coeff}_{mi}} [-\text{coeff2}_{mi} + \sum_{j=m}^{\infty} (c_{mj} * \beta_{mij} + d_{mj} * \alpha_{mij})] \right\} \\
&= - \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\{\alpha_{mni} * \text{coeff1}_{mi} + \beta_{mni} * \text{coeff2}_{mi}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{c_{mj} \{\alpha_{mni} * \alpha_{mij} + \beta_{mni} * \beta_{mij}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{d_{mj} \{\alpha_{mni} * \beta_{mij} + \beta_{mni} * \alpha_{mij}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&= - \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\{\alpha_{mni} * \text{coeff1}_{mi} + \beta_{mni} * \text{coeff2}_{mi}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&\quad + \sum_{j=m}^{\infty} c_{mj} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\{\alpha_{mni} * \alpha_{mij} + \beta_{mni} * \beta_{mij}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&\quad + \sum_{j=m}^{\infty} d_{mj} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\{\alpha_{mni} * \beta_{mij} + \beta_{mni} * \alpha_{mij}\}}{\text{coeff}_{mi}}
\end{aligned}$$

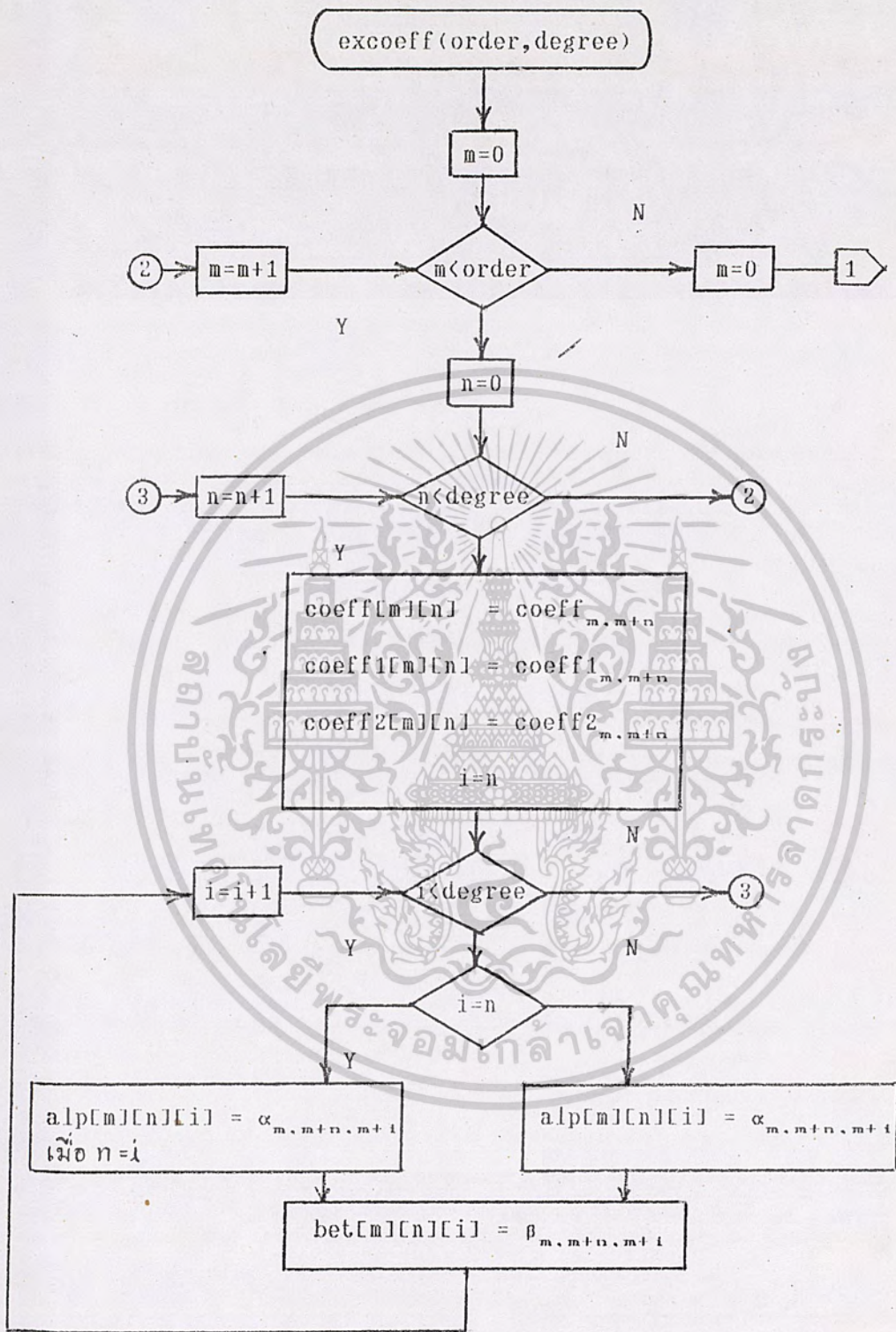
(3.3.14.c)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

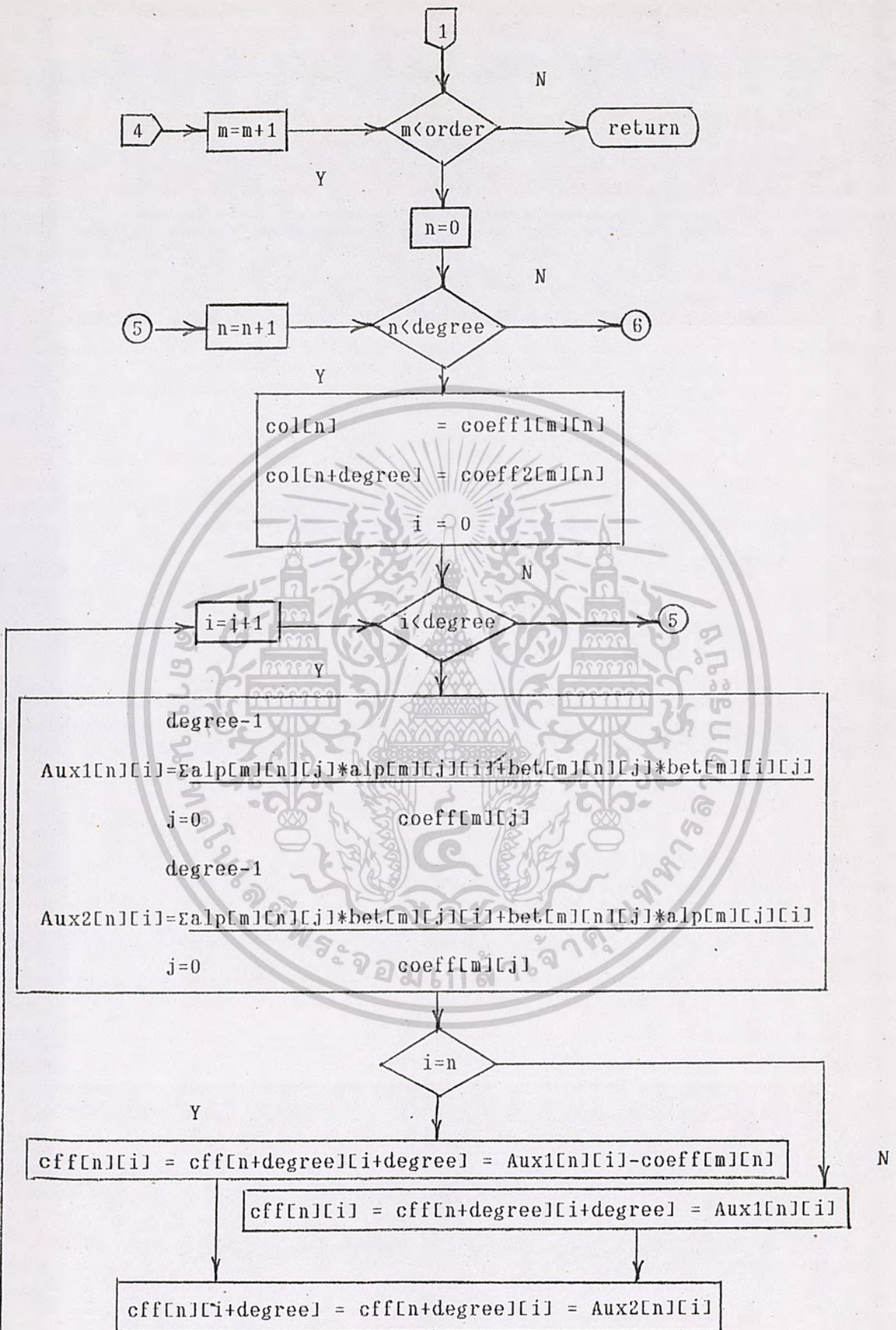
$$\begin{aligned}
\text{coeff}_{mn} * d_{mn} &= \sum_{i=m}^{\infty} \left\{ \frac{\beta_{mni}}{\text{coeff}_{mi}} [-\text{coeff1}_{mi} + \sum_{j=m}^{\infty} (c_{m,j} * \alpha_{m,i,j} + d_{m,j} * \beta_{m,i,j})] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_{mni}}{\text{coeff}_{mi}} [-\text{coeff2}_{mi} + \sum_{j=m}^{\infty} (c_{m,j} * \beta_{m,i,j} + d_{m,j} * \alpha_{m,i,j})] \right\} \\
&= - \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\{\alpha_{mni} * \text{coeff2}_{mi} + \beta_{mni} * \text{coeff1}_{mi}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{c_{m,j} \{\alpha_{mni} * \beta_{m,i,j} + \beta_{mni} * \alpha_{m,i,j}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{d_{m,j} \{\alpha_{mni} * \alpha_{m,i,j} + \beta_{mni} * \beta_{m,i,j}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&= - \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\{\alpha_{mni} * \text{coeff2}_{mi} + \beta_{mni} * \text{coeff1}_{mi}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&\quad + \sum_{j=m}^{\infty} c_{m,j} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\{\alpha_{mni} * \beta_{m,i,j} + \beta_{mni} * \alpha_{m,i,j}\}}{\text{coeff}_{mi}} \\
&\quad + \sum_{j=m}^{\infty} d_{m,j} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\{\alpha_{mni} * \alpha_{m,i,j} + \beta_{mni} * \beta_{m,i,j}\}}{\text{coeff}_{mi}}
\end{aligned}$$

(3.3.14.d)

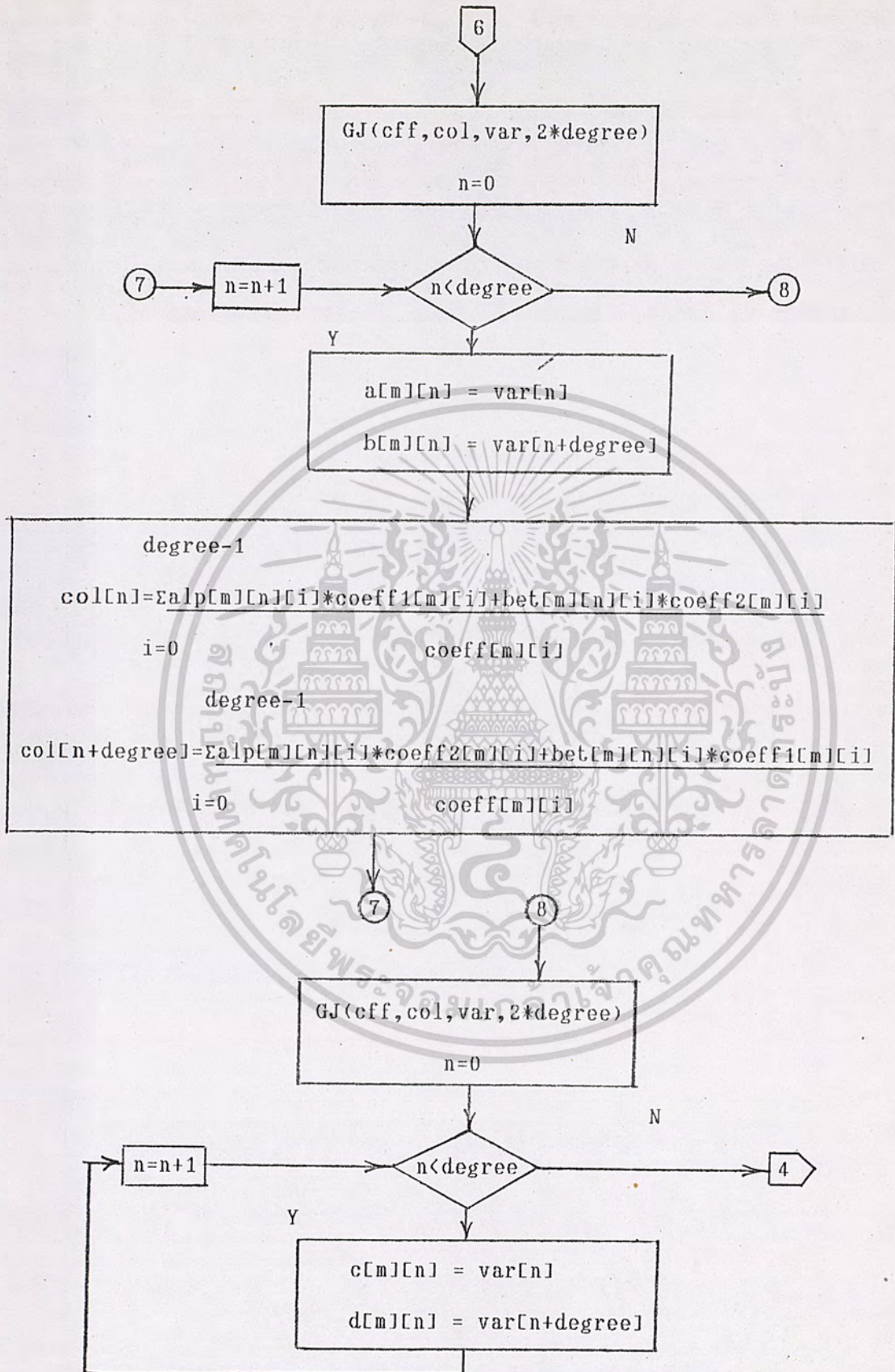
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



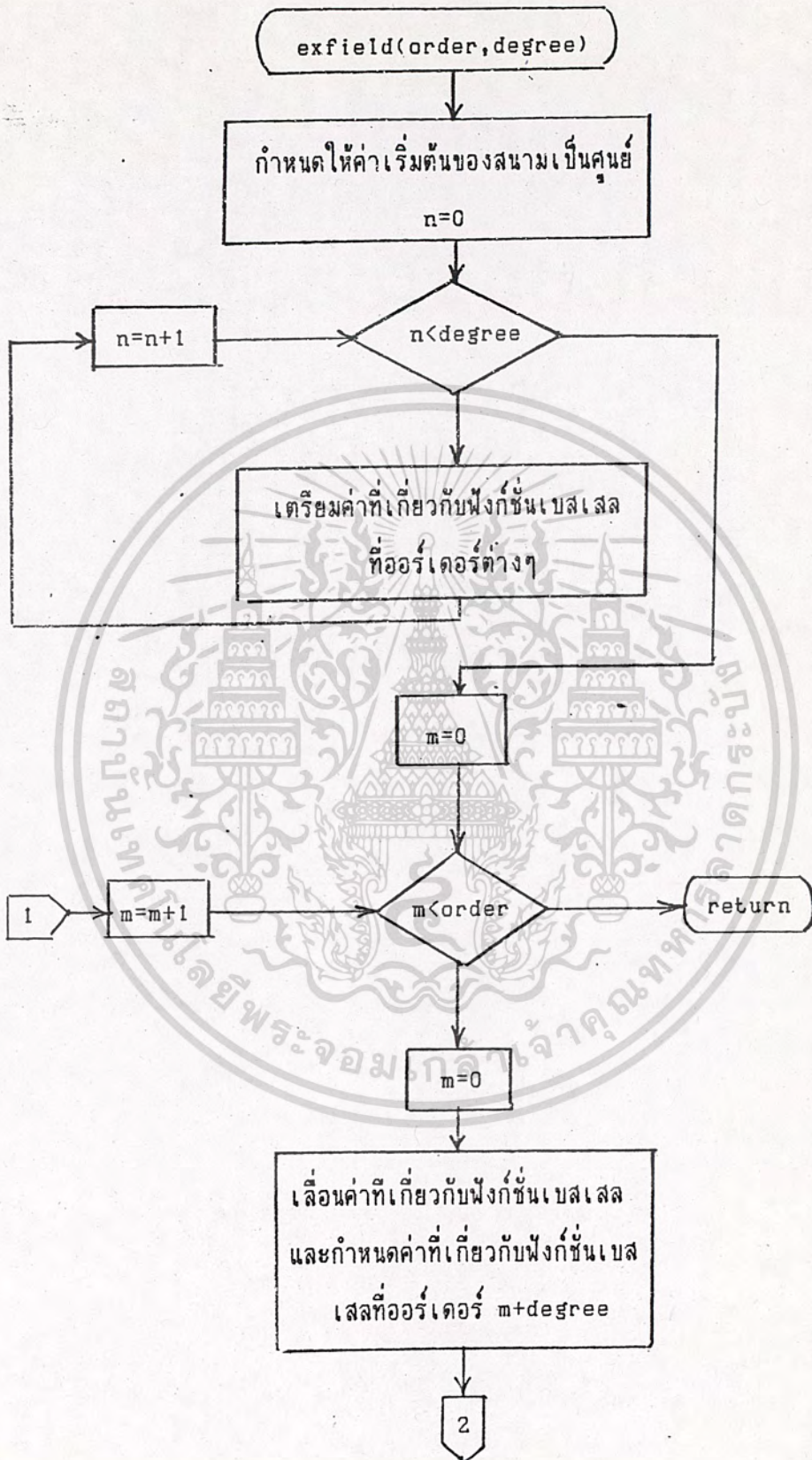
รูปที่ 3.5(a) ผังงานของโปรแกรมย่อยหาสัมประสิทธิ์สนามภายนอก  
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



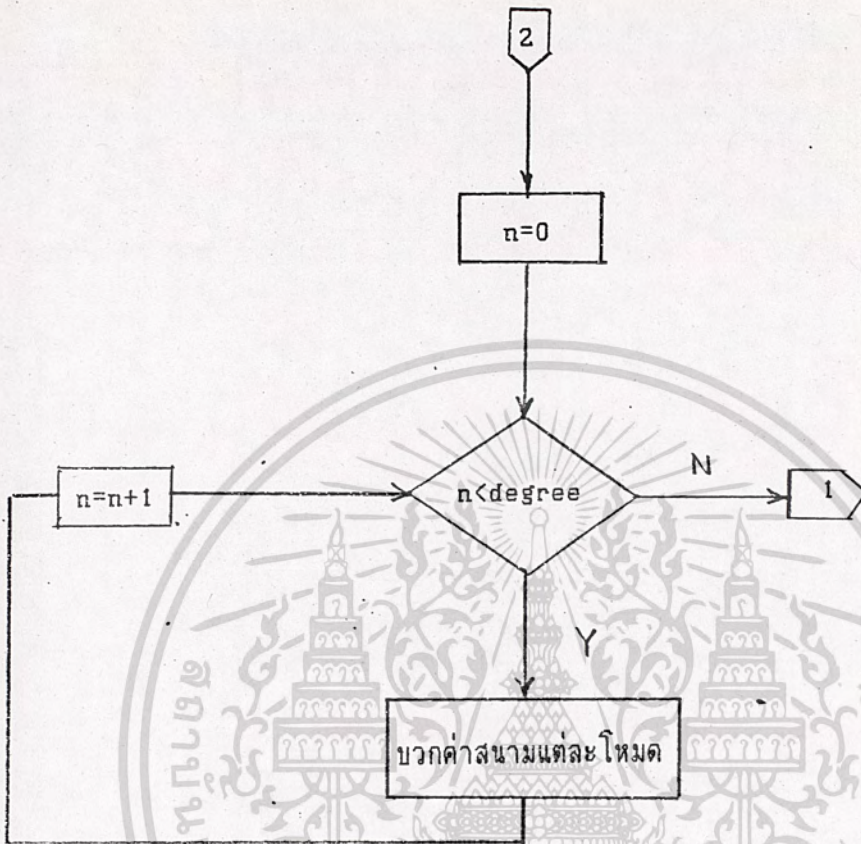
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไมอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและสร้างสิ่งอื่นจากเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้  
 รูปที่ 3.5 (b) ฟังงานหาสัมประสิทธิ์สนามภายนอก(ต่อ)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 รูปที่ 3.5(c) ฟังก์ชันของโปรแกรมหาสัมประสิทธิ์สนามภายนอก (ต่อ)  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามรูปที่ 3.6(a) ผังงานของโปรแกรมหาสนามภายนอก



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งที่ อี.6(ธ) ฝั๊งงานของโปรแกรมหาสนามภายนอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4 การหาอินทิกรัลแอมพลิจูด

จาก ทฤษฎีพอยน์ติง กำลังงานที่ผ่านพื้นผิว  $s$  คือ

$$P = \frac{1}{2} \int \int_s (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s}$$

กรณีนี้  $s$  เป็นส่วนของพื้นผิวทรงกลมรัศมี  $r = r_1$

$$P = \frac{1}{2} \int \int_s (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \int \int_s (E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) r_1^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

ในขั้นแรกจะหา กำลังงานที่ผ่านพื้นผิว  $r = r_1$  เนื่องจากสนามภายใน จากสนามภายใน ที่  $r = r_1$

$$E_\theta(r_1, \theta, \phi) = -\sum_m \left[ \sum_w A_{mw} \frac{dP_w^m}{d\theta} + \sum_v B_{mv} \frac{mP_v^m}{\sin\theta} \right] \cos m\phi \quad (3.4.1.a)$$

$$E_\phi(r_1, \theta, \phi) = \sum_m \left[ \sum_w A_{mw} \frac{mP_w^m}{\sin\theta} + \sum_v B_{mv} \frac{dP_v^m}{d\theta} \right] \sin m\phi \quad (3.4.1.b)$$

$$H_\theta(r_1, \theta, \phi) = -j \sum_m \left[ \sum_w -A_{mw} \frac{K_w'(kr_1)}{K_w'(kr_1) \sin\theta} \frac{mP_w^m}{v} + \sum_v B_{mv} \frac{L_v'(kr_1)}{L_v(kr_1)} \frac{dP_v^m}{d\theta} \right] \sin m\phi \quad (3.4.1.c)$$

$$H_\phi(r_1, \theta, \phi) = -j \sum_m \left[ \sum_w -A_{mw} \frac{K_w'(kr_1)}{K_w'(kr_1) d\theta} \frac{dP_w^m}{v} + \sum_v B_{mv} \frac{L_v'(kr_1)}{L_v(kr_1) \sin\theta} \frac{mP_v^m}{v} \right] \cos m\phi \quad (3.4.1.d)$$

ในการหากำลังงาน จะเห็นว่าเราต้องหาผลคูณ  $E_\theta H_\phi^*$  กับ  $E_\phi H_\theta^*$  และเนื่องจาก

ค่าของสนามเหล่านี้ อยู่ในรูปผลบวกของสนามแต่ละโหมด ดังนั้นจะต้องมีผลคูณของสนามที่มีทั้ง  
 เลขชี้กำลังเหมือนกัน และเลขชี้กำลังต่างกัน จะเห็นว่าเกิดเทอมของผลคูณขึ้นมา  
 ไม่เท่ากัน และหมายถึงเลขชี้กำลังเหมือนกัน และหมายถึงเลขชี้กำลังต่างกัน จะเห็นว่าเกิดเทอมของผลคูณขึ้นมา

มาย แต่ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าแท้จริงแล้ว เทอมของกำลังงานของสนามที่ผ่าน "พื้นผิวที่สนามในแต่ละโหมด ออร์โธโกนอล(orthogonal) กันแล้ว" จะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อเทอมของกำลังงานนั้นเกิดจาก ผลคูณของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กที่ต่างชนิดกัน (เช่น ทีอี กับ ทีเอ็ม) หรือมีหมายเลขโหมดต่างกัน ดังนั้นจะพิจารณาถึงเทอมของกำลังงานที่เกิดจากผลคูณของ

- สนามไฟฟ้า ทีเอ็มโหมด กับ สนามแม่เหล็ก ทีเอ็มโหมด
- สนามไฟฟ้า ทีอีโหมด กับ สนามแม่เหล็ก ทีอีโหมด
- สนามไฟฟ้า ทีเอ็มโหมด กับ สนามแม่เหล็ก ทีอีโหมด
- สนามไฟฟ้า ทีอีโหมด กับ สนามแม่เหล็ก ทีเอ็มโหมด

3.4.1 เทอมของกำลังงานจากสนามไฟฟ้าทีเอ็มโหมด กับ สนามแม่เหล็กทีเอ็มโหมด

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E_{\phi}^i)_{m,w}^{TM} (H_{\theta}^i)_{m,w}^{TM}] - (E_{\theta}^i)_{m,w}^{TM} (H_{\phi}^i)_{m,w}^{TM}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(-A_{m,w} \frac{dP_w^m}{d\theta} \cos\theta) (-j \frac{A_{m,w}}{\eta} \frac{K_w^*(kr_1)}{K_w^{**}(kr_1)} \frac{dP_w^m}{d\theta} \cos\theta') \\
 & - (\frac{A_{m,w}}{\sin\theta} m P_w^m \sin\theta) (-j \frac{A_{m,w}}{\eta} \frac{K_w^*(kr_1)}{K_w^{**}(kr_1)} \frac{m P_w^m}{\sin\theta} \sin\theta')] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & = \frac{j A_{m,w} A_{m,w}}{\eta} \frac{K_w^*(kr_1)}{K_w^{**}(kr_1)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [dP_w^m \frac{dP_w^m}{d\theta} \cos\theta \cos\theta' \\
 & + \frac{m m'}{\sin^2\theta} P_w^m P_w^{m'} \sin\theta \sin\theta'] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{j}{\eta} A_{m_w} A_{m'_w} \frac{K_w^*(kr_1)}{K_w^{*'}(kr_1)} \int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} [m^2 P_w^m P_w^{*m'} + \sin\theta \frac{dP_w^m}{d\theta} \frac{dP_w^{*m'}}{d\theta}] \cos m\phi \cos m'\phi d\phi d\theta$$

$$+ \frac{m m' P_w^m P_w^{*m'}}{\sin^2\theta} \int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin m'\phi d\phi r_1^2 \sin\theta d\theta$$

จากสูตร

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos m'\phi d\phi = \begin{cases} (1 + \delta_m) \pi & ; m = m' \\ 0 & ; m \neq m' \end{cases}$$

และ

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin m'\phi d\phi = \begin{cases} (1 - \delta_m) \pi & ; m = m' \\ 0 & ; m \neq m' \end{cases}$$

จะเห็นว่า ถ้า  $m = m'$  เทอมของกำลังงานจากสนามไฟฟ้าที่เอมโหนด กับ สนามแม่เหล็กที่เอมโหนดจะเป็นศูนย์ แต่ถ้า  $m \neq m'$  จะได้ว่า

$$\int_0^{\theta_1} \int_0^{2\pi} [(E\theta^i)_{m_w}^{TM} (H\phi^i)_{m_w}^{TM*} - (E\phi^i)_{m_w}^{TM} (H\theta^i)_{m_w}^{TM*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{j \omega r_1^2 A_{m_w} A_{m'_w} K_w^*(kr_1)}{\eta K_w^{*'}(kr_1)} \int_0^{\theta_1} [m^2 P_w^m P_w^{*m'} + \sin\theta \frac{dP_w^m}{d\theta} \frac{dP_w^{*m'}}{d\theta}] d\theta & ; m=m' \neq 0 \\ \frac{j 2\pi r_1^2 A_{m_w} A_{m'_w} K_w^*(kr_1)}{K_w^{*'}(kr_1)} \int_0^{\theta_1} \frac{dP_w^m}{d\theta} \frac{dP_w^{*m'}}{d\theta} \sin\theta d\theta & ; m=m'=0 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสูตร

$$\int_0^{\theta_1} \left[ m^2 \frac{P_w^m P_{w'}^m}{\sin \theta} + \sin \theta \frac{dP_w^m}{d\theta} \frac{dP_{w'}^m}{d\theta} \right] d\theta = \begin{cases} \frac{w(w+1)}{2w+1} \left[ \sin \theta \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_{w'}^m}{\partial \theta} \right] \Big|_{\theta=\theta_1} & ; w=w' \\ 0 & ; w \neq w' \end{cases}$$

เมื่อ  $w$  และ  $w'$  เป็นรากของสมการ

$$P_w^m(\cos \theta_1) = 0$$

$$P_{w'}^m(\cos \theta_1) = 0$$

ดังนั้นเทอมของกำลังงานซึ่งเกิดจากสนามไฟฟ้าที่เอมโหมด และสนามแม่เหล็กที่เอมโหมด คือ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} \left[ (E_\theta)_{m,w}^{TM} (H_\phi)_{m,w'}^{TM*} - (E_\theta)_{m,w}^{TM} (H_\phi)_{m,w'}^{TM*} \right] r_1^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{j(1+\epsilon_m) \pi r_1^2 A_{m,w}^2 K_w^*(kr_1) w(w+1) \left[ \sin \theta \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_{w'}^m}{\partial \theta} \right] \Big|_{\theta=\theta_1}}{K_w^{*'}(kr_1) (2w+1)} & ; m = m' \text{ และ } w = w' \\ 0 & ; m \neq m' \text{ หรือ } w \neq w' \end{cases}$$

(3.4.2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.2 เทอมของกำลังงานจากสนามไฟฟ้าที่อินทิเกรต กับ สนามแม่เหล็กที่อินทิเกรต

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E_{\theta}^i)_{m\nu}^{TM} (H_{\phi}^i)_{m'\nu'}^{TM*} - (E_{\phi}^i)_{m\nu}^{TM} (H_{\theta}^i)_{m'\nu'}^{TM*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(-B_{m\nu} \frac{m P_{\nu}^m}{\sin\theta} \cos m\phi) (j B_{m'\nu'} \frac{L_{\nu'}^{*m'}}{L_{\nu'}^{*m'}}(kr_1) \frac{m' P_{\nu'}^{m'} \cos m'\phi}{L_{\nu'}^{*m'}}) \\
 & - (B_{m\nu} \frac{dP_{\nu}^m}{d\theta} \sin m\phi) (j B_{m'\nu'} \frac{L_{\nu'}^{*m'}}{L_{\nu'}^{*m'}}(kr_1) \frac{dP_{\nu'}^{m'}}{d\theta} \sin m'\phi)] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & = -j r_1^2 \frac{B_{m\nu} B_{m'\nu'}}{\eta} \frac{L_{\nu'}^{*m'}}{L_{\nu'}^{*m'}}(kr_1) \int_0^{2\pi} [m m' P_{\nu}^m P_{\nu'}^{m'} \int_0^{\theta_1} \cos m\phi \cos m'\phi d\phi \\
 & + \sin\theta \frac{dP_{\nu}^m}{d\theta} \frac{dP_{\nu'}^{m'}}{d\theta} \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin m'\phi d\phi] d\theta
 \end{aligned}$$

ถ้า  $m \neq m'$  หรือ  $m = m' = 0$  ผลของการอินทิเกรต จะเป็นศูนย์  
 ดังนั้น ถ้า  $m = m'$  จะได้

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E_{\theta}^i)_{m\nu}^{TE} (H_{\phi}^i)_{m\nu}^{TE*} - (E_{\phi}^i)_{m\nu}^{TE} (H_{\theta}^i)_{m\nu}^{TE*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & = \frac{-j(1-\delta_m)\pi r_1^2}{\eta} B_{m\nu} B_{m\nu} \frac{L_{\nu}^{*m}}{L_{\nu}^{*m}}(kr_1) \int_0^{\theta_1} [m^2 P_{\nu}^m P_{\nu}^m + \sin\theta \frac{dP_{\nu}^m}{d\theta} \frac{dP_{\nu}^m}{d\theta}] d\theta
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสูตร

$$\int_0^{\theta_1} [m^2 P_v^m P_{v'}^{m'} + \sin \theta \frac{dP_v^m}{d\theta} \frac{dP_{v'}^{m'}}{d\theta}] d\theta = \begin{cases} \frac{-v(v+1) [\sin \theta P_v^m \frac{\partial^2 P_{v'}^{m'}}{\partial \theta^2}]}{2v+1} \Big|_{\theta=\theta_1} & ; v=v' \\ 0 & ; v \neq v' \end{cases}$$

เมื่อ  $\frac{dP_v^m}{d\theta}(\cos \theta_1) = \frac{dP_{v'}^{m'}}{d\theta}(\cos \theta_1) = 0$

ดังนั้น เทอมของกำลังงาน เนื่องจากสนามไฟฟ้า TE โหมด และสนามแม่เหล็ก TE โหมด คือ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E_{\theta}^i)_{m,v}^{TE} (H_{\phi}^i)_{m,v}^{TE*} - (E_{\phi}^i)_{m,v}^{TE} (H_{\theta}^i)_{m,v}^{TE*}] r_1^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{j(1-\delta_m) \pi r_1^2 (B_{m,v}^0)^2 L_v^{*'}(kr_1) v(v+1) [\sin \theta P_v^m \frac{\partial^2 P_{v'}^{m'}}{\partial \theta^2}]}{L_v^*(kr_1) 2v+1} \Big|_{\theta=\theta_1} & ; m=m' \text{ และ } v=v' \\ 0 & ; m \neq m' \text{ หรือ } v \neq v' \end{cases}$$

(3.4.3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.3 เทอมของกำลังงานเนื่องจากสนามทีเอ็มโหมด กับ สนามแม่เหล็กทีอีโหมด

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E\theta^i)_{m,w}^{TM} (H\phi^i)_{m',v}^{TE*} - (E\phi^i)_{m,w}^{TM} (H\theta^i)_{m',v}^{TE*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(-A_{m,w} \frac{dP_w^m}{d\theta} \cos m\phi) \frac{j B_{m',v} L_v^{*'}(kr_1)}{\eta L_v^*(kr_1)} \frac{m' P_v^{m'} \cos m'\phi}{L_v^*(kr_1) \sin\theta} \\
 & \quad - (A_{m,w} \frac{m P_w^m \sin m\phi}{\sin\theta}) \frac{j B_{m',v} L_v^{*'}(kr_1)}{\eta L_v^*(kr_1)} \frac{dP_v^{m'} \sin m'\phi}{d\theta}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & = \frac{-j r_1^2}{\eta} A_{m,w} \frac{B_{m',v} L_v^{*'}(kr_1)}{L_v^*(kr_1)} \int_0^{2\pi} [m' P_v^{m'} \frac{dP_w^m}{d\theta} \int_0^{\theta_1} \cos m\phi \cos m'\phi d\phi \\
 & \quad + m P_w^m \frac{dP_v^{m'}}{d\theta} \int_0^{\theta_1} \sin m\phi \sin m'\phi d\phi] d\theta
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ถ้า  $m \neq m'$  หรือ  $m = m' = 0$  ผลของการอินทิเกรต จะเป็นศูนย์  
 แต่ถ้า  $m = m' \neq 0$  จะได้

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E\theta^i)_{m,w}^{TM} (H\theta^i)_{m',v}^{TE*} - (E\phi^i)_{m,w}^{TM} (H\phi^i)_{m',v}^{TE*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & = \frac{-j \pi r_1^2}{\eta} A_{m,w} B_{m,v} \frac{L_v^{*'}(kr_1)}{L_v^*(kr_1)} m \int_0^{\theta_1} [P_v^m \frac{dP_w^m}{d\theta} + P_w^m \frac{dP_v^m}{d\theta}] d\theta
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [P_v^m \frac{dP_w^m}{d\theta} + P_w^m \frac{dP_v^m}{d\theta}] d\theta = 0$$

ดังนั้น เทอมของกำลังงาน เนื่องจากสนามไฟฟ้าที่เอมโหมด กับ สนามแม่เหล็กที่เอมโหมด จะเป็นศูนย์ หรือเขียนได้ว่า

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E_{\theta}^i)_{m,v}^{TE} (H_{\phi}^i)_{m,v}^{TE} - (E_{\phi}^i)_{m,v}^{TM} (H_{\theta}^i)_{m,v}^{TM}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi = 0$$

(3.4.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.4 เทอมของกำลังงานเนื่องจากสนามไฟฟ้าที่อ้อมกับ สนามแม่เหล็กที่เคมโหมด

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E\phi^i)_{m'w}^{TE} (H\phi^i)_{m'w}^{TM*} - (E\phi^i)_{m'v}^{TE} (H\phi^i)_{m'w}^{TM*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & 0 \quad 0 \\
 & \quad 2\pi \theta_1 \\
 & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(-B_{m'v} \frac{mP_v^m \cos m\phi}{\sin\theta} (-j A_{m'w} \frac{K_w^*(kr_1)}{\eta} \frac{dP_w^{m'}}{\cos m'\phi}) \\
 & \quad 0 \quad 0 \quad \sin\theta \quad \eta \quad K_w^{*'}(kr_1) d\theta \\
 & \quad - (B_{m'v} \frac{dP_v^m \sin m\phi}{d\theta} (-j A_{m'w} \frac{K_w^*(kr_1)}{\eta} m'P_w^{m'} \sin m'\phi))] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & \quad d\theta \quad \eta \quad K_w^{*'}(kr_1) \sin\theta \\
 & = \frac{j r_1^2}{\eta} B_{m'v} A_{m'w} \frac{K_w^*(kr_1)}{K_w^{*'}(kr_1)} \int_0^{2\pi} [mP_v^m \frac{dP_w^{m'}}{d\theta} \int_0^{\theta_1} \cos m\phi \cos m'\phi d\theta \\
 & \quad + m' P_w^{m'} \frac{dP_v^m}{d\theta} \int_0^{\theta_1} \sin m\phi \sin m'\phi d\theta] d\phi \\
 & \quad 0
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ถ้า  $m \neq m'$  หรือ  $m = m' = 0$  ผลของการอินทิเกรต จะเป็นศูนย์  
 แต่ถ้า  $m = m' \neq 0$  จะได้

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E\phi^i)_{m'v}^{TE} (H\phi^i)_{m'w}^{TM*} - (E\phi^i)_{m'v}^{TE} (H\phi^i)_{m'w}^{TM*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & 0 \quad 0 \\
 & \quad \theta_1 \\
 & = \frac{j \pi r_1^2}{\eta} B_{m'v} A_{m'w} \frac{K_w^*(kr_1)}{K_w^{*'}(kr_1)} m \int_0^{\theta_1} [P_v^m \frac{dP_w^m}{d\theta} + P_w^m \frac{dP_v^m}{d\theta}] d\theta
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก

$$\int_0^{\theta_1} [P_v^m \frac{dP_w^m}{d\theta} + P_w^m \frac{dP_v^m}{d\theta}] d\theta = 0$$

ดังนั้นเทอมของกำลังงานเนื่องจาก ผลคูณระหว่างสนามไฟฟ้าที่โหนดกับสนามแม่เหล็กที่โหนดจะมีค่าเป็นศูนย์ หรือ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E_{\theta}^i)_{m'v}^{TE} (H_{\phi}^i)_{m'w}^{TM*} - (E_{\phi}^i)_{m'v}^{TE} (H_{\theta}^i)_{m'w}^{TM*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi = 0 \tag{3.4.5}$$

จะเห็นว่าเทอมของกำลังงานที่เกิดจากผลคูณระหว่างสนามไฟฟ้า ที่โหนด กับสนามแม่เหล็กที่โหนด หรือกลับกันจะมีค่าเป็นศูนย์ และนอกจากนี้เทอมของกำลังงานที่เกิดจากผลคูณระหว่างสนามไฟฟ้าที่โหนด (ที่โหนด) กับสนามแม่เหล็กที่โหนด (ที่โหนด) จะมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อมีหมายเลขโหนดต่างกัน จึงสรุปได้ว่า กำลังงานที่ผ่านพื้นผิวที่สนามออร์โธโกนอลกันจะมีเฉพาะเทอมซึ่งเกิดจากผลคูณของสนามในโหนดเดียวกัน

ดังนั้นกำลังงานของสนามสามารถแยกได้ว่าเป็นผลรวมของกำลังงานเนื่องจากสนามที่โหนดกับกำลังเนื่องจากสนามที่โหนดดังนี้

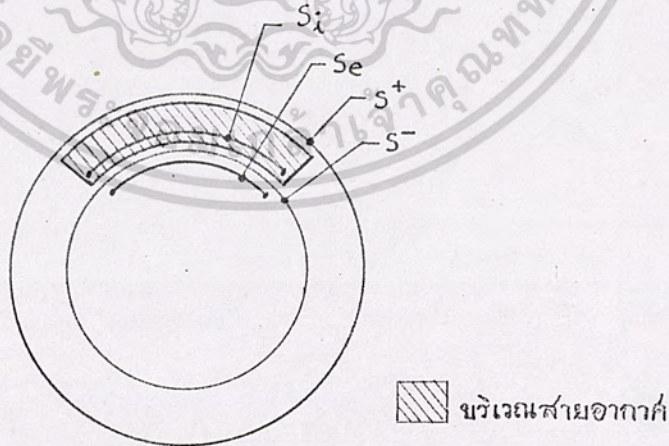
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} (\bar{E}^i \times \bar{H}^{i*}) \cdot d\bar{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [E_{\theta}^i H_{\phi}^{i*} - E_{\phi}^i H_{\theta}^{i*}] r_1^2 \sin^2\theta d\theta d\phi \\ &= \sum_m \sum_w \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} (E_{\theta}^i)_{m'v}^{TM} \times (H_{\phi}^i)_{m'w}^{TM*} \cdot ds + \sum_v \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} (E_{\phi}^i)_{m'v}^{TM} \times (H_{\theta}^i)_{m'w}^{TM*} \cdot ds \\ &= \sum_m \sum_w \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} [(E_{\theta}^i)_{m'v}^{TM} (H_{\phi}^i)_{m'w}^{TM*} - (E_{\phi}^i)_{m'v}^{TM} (H_{\theta}^i)_{m'w}^{TM*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(E_{\theta}^i)_{m\nu}^{TM} (H_{\phi}^i)_{m\nu}^{TM*} - (E_{\phi}^i)_{m\nu}^{TM} (H_{\theta}^i)_{m\nu}^{TM*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 & \nu=0 \quad 0 \\
 & = \frac{j\pi r_1^2}{\eta} \sum_m \left[ \sum_{\nu} (1+\delta_m) A_{m\nu}^2 \frac{K_w^{*m}(kr_1)}{K_w^{*m}(kr_1)} \frac{w(w+1)}{2w+1} [\sin\theta \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_w^m}{\partial w}] \right]_{\theta=\theta_1} \\
 & + \sum_{\nu} (1-\delta_m) B_{m\nu}^2 \frac{L_v^{*m}(kr_1)}{L_v^{*m}(kr_1)} \frac{v(v+1)}{2v+1} [\sin\theta \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_w^m}{\partial v}] \Big|_{\theta=\theta_1}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.6}$$

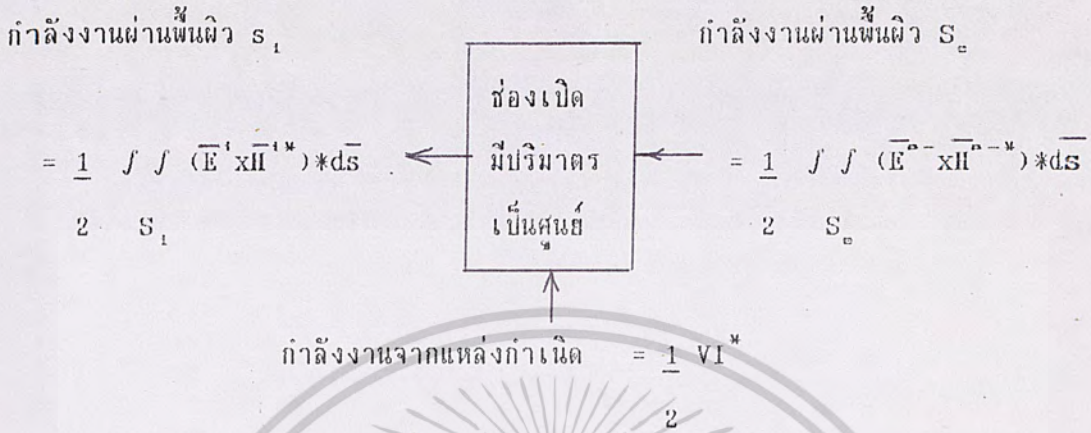
ในการหาอินทิกรัลแอมพลิจูดจำเป็นต้องหากำลังงานที่ผ่านพื้นผิวต่อไปนี้

- $S_i : r=r^+, 0 \leq \theta \leq \theta_1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$
- $S_o : r=r^-, 0 \leq \theta \leq \theta_1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$
- $S^- : r=r_1^-, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$
- $S^+ : r=r_1^+, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$



รูปที่ 3.7 แสดงการกำหนดพื้นผิว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ แสดงทิศทางการไหลของกำลังงานที่ช่องเปิด

จากรูปที่ แสดงถึงกำลังงานที่เกี่ยวข้องกับช่องเปิดของสายอากาศ ประกอบด้วยกำลังงานที่ป้อนให้กับสายอากาศ กำลังงานที่ผ่านพื้นผิว  $S_2$  ซึ่งหาได้จากกำลังงานเนื่องจากสนามภายนอกในบริเวณ  $r < r_1$  และกำลังงานที่ผ่านพื้นผิว  $S_1$  ซึ่งหาได้จากกำลังงานเนื่องจากสนามภายใน สำหรับทิศทางของกำลังงานที่ได้อาจการอินทิเกรตเชิงผิว กำหนดว่ามีทิศทางพุ่งออกจากจุดกำเนิดตั้งนั้นสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสัมพันธ์ของกำลังงานได้ดังสมการ

$$\frac{1}{2} VI^* + \frac{1}{2} \int \int_{S_2} (\vec{E}'' \times \vec{H}''^*) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \int \int_{S_1} (\vec{E}' \times \vec{H}'^*) \cdot d\vec{s}$$

หรือ

$$V(VY)^* = \int \int_{S_1} (\vec{E}' \times \vec{H}'^*) \cdot d\vec{s} - \int \int_{S_2} (\vec{E}'' \times \vec{H}''^*) \cdot d\vec{s}$$

$$Y^* = \frac{1}{V} \left[ \int \int_{S_1} (\vec{E}' \times \vec{H}'^*) \cdot d\vec{s} - \int \int_{S_2} (\vec{E}'' \times \vec{H}''^*) \cdot d\vec{s} \right] \quad (3.4.7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่  $VV^2$  ให้  $S_1$  รับการใช้งานเพื่อการริชญาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $Y$  คือ อินพุทแอมพลิจูด

$V$  คือ อินพุทโวลต์เตจ ,  $V = V_0 \sin(kr_1 \sin \theta_2 \phi_1)$

$I$  คือ กระแสอินพุท

$$\int \int_{S_1} (\bar{E}^1 \times \bar{H}^{1*}) \cdot d\bar{s}$$

$$= \frac{j\pi r_1^2}{\eta} \sum_m \sum_w (1 + \delta_m) A_{mw}^2 \frac{K_w^*(kr_1)}{K_w^*(kr_1)} \frac{w(w+1) [ \sin \theta \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_w^m}{\partial w} ]}{2w+1} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta_1}$$

$$+ \sum_v \epsilon (1 - \delta_m) B_{mv}^2 \frac{L_v^*(kr_1)}{L_v^*(kr_1)} \frac{v(v+1) [ \sin \theta \frac{\partial^2 P_v^m}{\partial \theta \partial v} ]}{2v+1} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta_1} \quad (3.4.6)$$

$\int \int_{S_0} (\bar{E}^0 \times \bar{H}^{0*}) \cdot d\bar{s}$  คือ กำลังงานของสนามภายนอกบริเวณ  $r < r_1$  ที่ผ่านพื้นผิว  $S_0$

เนื่องจากสนามภายนอกบริเวณ  $r < r_1$  ไม่ออร์โธโกนอลบนพื้นผิว  $S_0$  ดังนั้นการหาเทอม  $\int \int_{S_0} (\bar{E}^0 \times \bar{H}^{0*}) \cdot d\bar{s}$  จำเป็นจะต้องหาจาก กำลังงานของสนามที่ผ่านพื้นผิวที่ สนามออร์โธโกนอลตั้งขึ้น

$$\int \int_{S_0} (\bar{E}^0 \times \bar{H}^{0*}) \cdot d\bar{s} = \int \int_{S^-} (\bar{E}^0 \times \bar{H}^{0*}) \cdot d\bar{s} - \int \int_{S^+} (\bar{E}^0 \times \bar{H}^{0*}) \cdot d\bar{s} \quad (3.4.8)$$

เมื่อ

$\int \int_{S^-} (\bar{E}^0 \times \bar{H}^{0*}) \cdot d\bar{s}$  คือ กำลังงานของสนามภายนอกบริเวณ  $r < r_1$  ที่ผ่านพื้นผิว  $S^-$

$\int \int_{S^+} (\bar{E}^0 \times \bar{H}^{0*}) \cdot d\bar{s}$  คือ กำลังงานของสนามภายนอกบริเวณ  $r > r_1$  ที่ผ่านพื้นผิว  $S^+$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหาค่าพลังงานที่ผ่านพื้นผิวเหล่านี้ ก็ใช้วิธีเดียวกับ การหาค่าพลังงานของสนามภายในที่ผ่านพื้นผิว  $r_1$  และอาศัยความสัมพันธ์

$$\int_0^\pi \frac{[m^2 P_n^m P_n^m + \sin\theta \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_n^m}{d\theta}] d\theta}{\sin\theta} = \begin{cases} \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & ; n = q \\ 0 & ; n \neq q \end{cases}$$

จะได้

$$\begin{aligned} & \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} \\ &= \sum_m \sum_n \left[ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(E_\theta^{(mn)})^{TM} (H_\phi^{(mn)})^{TM*} - (E_\phi^{(mn)})^{TM} (H_\theta^{(mn)})^{TM*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \right. \\ & \quad \left. + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(E_\theta^{(mn)})^{TE} (H_\phi^{(mn)})^{TE*} - (E_\phi^{(mn)})^{TE} (H_\theta^{(mn)})^{TE*}] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=m}^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(-a_{mn} \frac{dP_n^m}{d\theta} \cos m\phi) (-j a_{mn} \frac{\hat{J}_n^*(kr_1)}{\eta} \frac{dP_n^m}{d\theta} \cos m\phi) \\ & \quad - (-a_{mn} \frac{mP_n^m}{\sin\theta} \sin m\phi) (-j a_{mn} \frac{\hat{J}_n^*(kr_1)}{\eta} \frac{mP_n^m}{\sin\theta} \sin m\phi)] r_1^2 \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(-b_{mn} \frac{dP_n^m}{ds} \cos\phi) (-j b_{mn} \frac{\hat{J}_n'^*(kr_1)}{\hat{J}_n^*(kr_1)} \frac{mP_n^m \cos\phi}{\sin\phi}) \\
 & - (-b_{mn} \frac{dP_n^m}{ds} \sin\phi) (-j b_{mn} \frac{\hat{J}_n'^*(kr_1)}{\hat{J}_n^*(kr_1)} \frac{dP_n^m \sin\phi}{ds})] r_1^2 \sin\phi d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{j2\pi r_1^2}{\eta} \frac{n(n+1)(n+m)! [(1+\delta_m) a_{mn}^2 \hat{J}_n(kr_1)]}{(2n+1)(n-m)! \hat{J}_n'(kr_1)} \\
 & - \frac{(1-\delta_m) b_{mn}^2 \hat{J}_n'(kr_1) J_n(kr_1)}{\hat{J}_n(kr_1)} \quad (3.4.9.a)
 \end{aligned}$$

โดยวิธีเดียวกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{S^+} (\bar{E}^{n+} \times \bar{H}^{n+}) \cdot d\bar{s} \\
 & = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{j2\pi r_1^2}{\eta} \frac{n(n+1)(n+m)! [(1+\delta_m) c_{mn}^2 \hat{H}_n^{(1)}(kr_1)]}{(2n+1)(n-m)! \hat{H}_n^{(1)'}(kr_1)} \\
 & - \frac{(1-\delta_m) d_{mn}^2 H_n^{(1)'}(kr_1)}{H_n^{(1)}(kr_1)} \quad (3.4.9.b)
 \end{aligned}$$

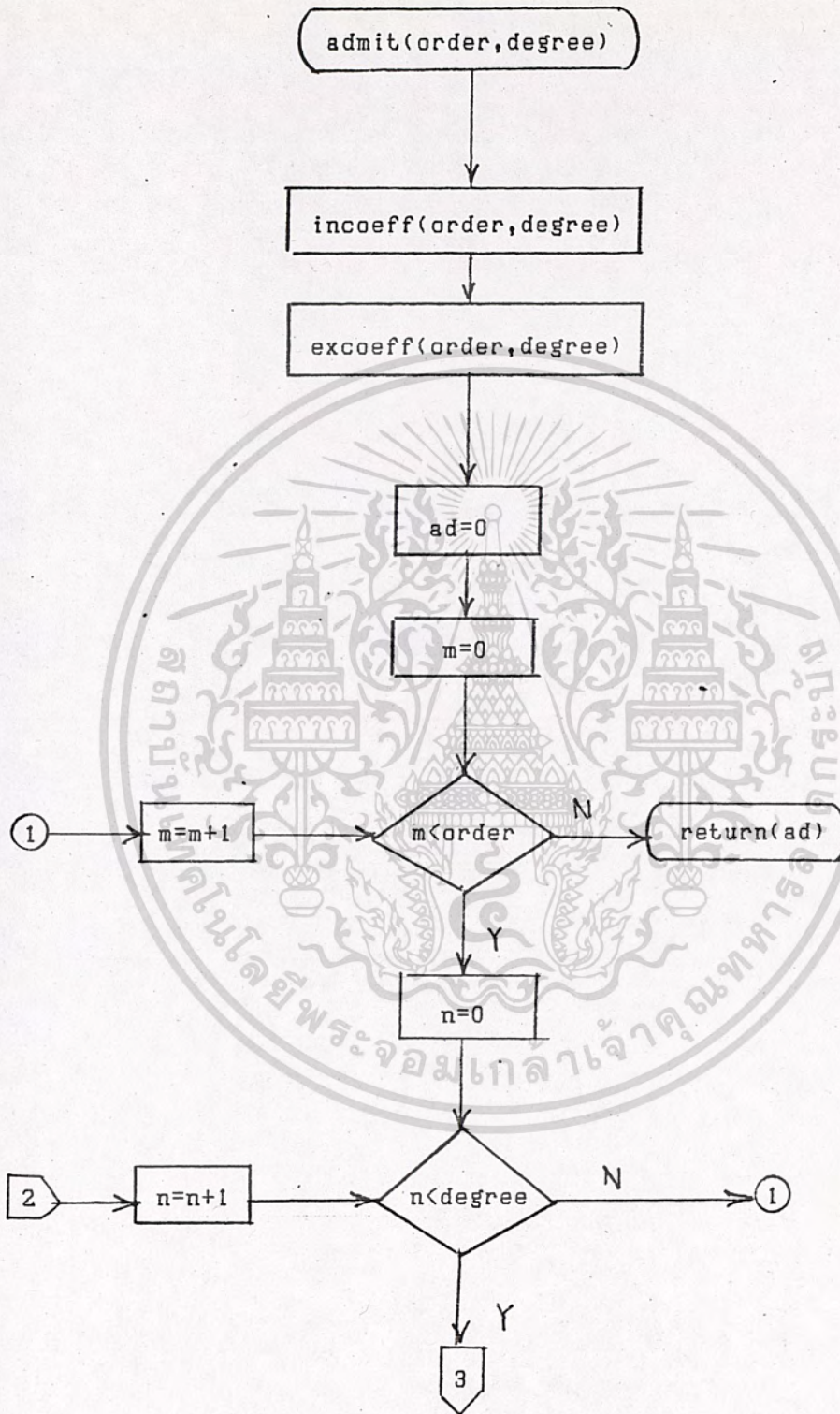
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตั้งนิยามอินทิกรัลแอดมิตแตนซ์คือ

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{\eta/v^2} \left[ \int_{S_i} \int (\bar{E}^i \times \bar{H}^{i*}) \cdot d\bar{s} - \int_{S_e} \int (\bar{E}^e \times \bar{H}^{e*}) \cdot d\bar{s} \right]^* \\
 &= \frac{j\pi r_1^2}{\eta/v^2} \left\{ \sum_m \left[ \sum_w (1+\delta_m) A_{mw}^2 \frac{K_w'(kr_1)}{K_w'(kr_1)} \frac{w(w+1)}{2w+1} [\sin\theta \frac{\partial P_w^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_w^m}{\partial w}] \right]_{\theta=0}^{\theta=\theta_1} \right. \\
 &\quad + \sum_w (1-\delta_m) B_{mw}^2 \frac{L_w'(kr_1)}{L_w'(kr_1)} \frac{v(v+1)}{2v+1} [\sin\theta \frac{\partial^2 P_v^m}{\partial \theta \partial v}]_{\theta=0}^{\theta=\theta_1} \left. \right] \\
 &- \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \left\{ (1+\delta_m) a_{mn}^2 \frac{\hat{J}_n'(kr_1)}{\hat{J}_n'(kr_1)} \right. \\
 &\quad - (1-\delta_m) b_{mn}^2 \frac{\hat{J}_n'(kr_1)}{\hat{J}_n'(kr_1)} \\
 &\quad \left. - (1+\delta_m) c_{mn}^2 \frac{\hat{H}_n^{(2)'}(kr_1)}{\hat{H}_n^{(2)'}(kr_1)} - (1-\delta_m) d_{mn}^2 \frac{\hat{H}_n^{(2)'}(kr_1)}{\hat{H}_n^{(2)'}(kr_1)} \right\}
 \end{aligned}$$

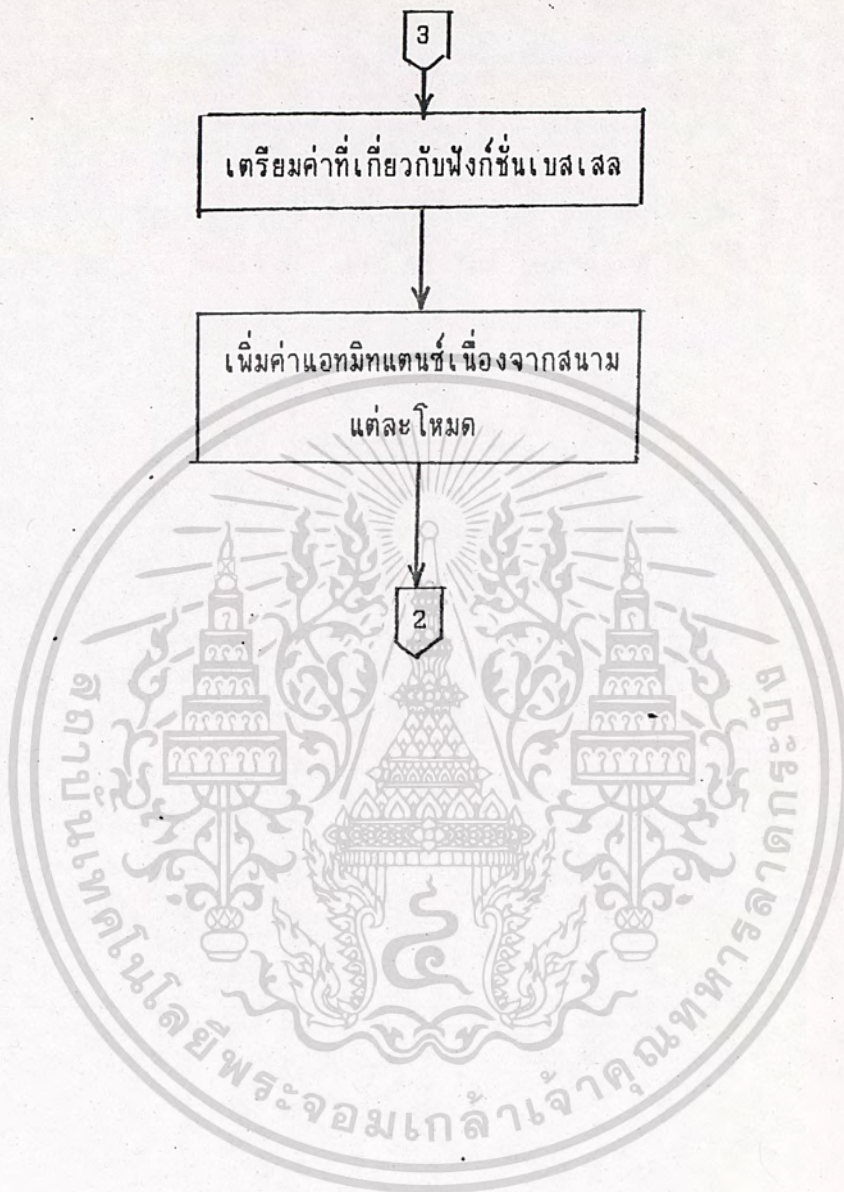
(3.4.10)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาใดๆ โดยยังงั้นแก่เจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.7(a) ฟังก์ชันหาอินพุทแอดมิตแทนซ์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีเห็นแก่ประโยชน์ของเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.7 (b) ผังงานหาอินพุทแอดมิทแทนซ์

### 3.5 ฟังก์ชันแกมมา และ แฟกทอเรียล (Gamma and Factorial Function)

จาก สูตรของออยเลอร์ (Euler's formula)

$$\text{gamma}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad (z \neq 0, -1, -2, -3, \dots)$$

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันแกมมาและแฟกทอเรียลคือ

$$z! = \text{gamma}(z+1)$$

ในกรณีที่  $z$  เป็นจำนวนเต็มคือ  $z = n$  จะได้ว่า

$$n! = \text{gamma}(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$$

เนื่องจาก สูตรของออยเลอร์หาค่าได้ช้า ดังนั้นถ้าต้องการคำนวณได้อย่างรวดเร็วจะต้องใช้ สูตรของสเตอร์ลิง (Stirling's formula)

$$x! = (2\pi)^{1/2} x^{x+1/2} \exp(-x + \epsilon/(12x)) \quad (x > 0, 0 < \epsilon < 1)$$

สำหรับค่าประมาณของ  $\epsilon$  ได้จากการ interpolate ของค่า  $\epsilon$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ใกล้ที่สุดมากกว่าและน้อยกว่าค่าที่ต้องการหาหรือคำนวณได้จากผลบวกของโพลิโนเมียล

$$\text{gamma}(x+1) = x! = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + e(x), \quad 0 < x < 1$$

$$|e(x)| \leq 3 \times 10^{-7}$$

$$b_1 = -0.57719 \ 1652$$

$$b_5 = -0.75670 \ 4078$$

$$b_2 = -0.98820 \ 5891$$

$$b_6 = 0.48219 \ 9394$$

$$b_3 = -0.89705 \ 6937$$

$$b_7 = -0.19352 \ 7818$$

$$b_4 = 0.91820 \ 6857$$

$$b_8 = 0.03586 \ 8343$$

สำหรับสูตรรีเคอร์เรนต์ (recurrent formula) ที่มีดังนี้

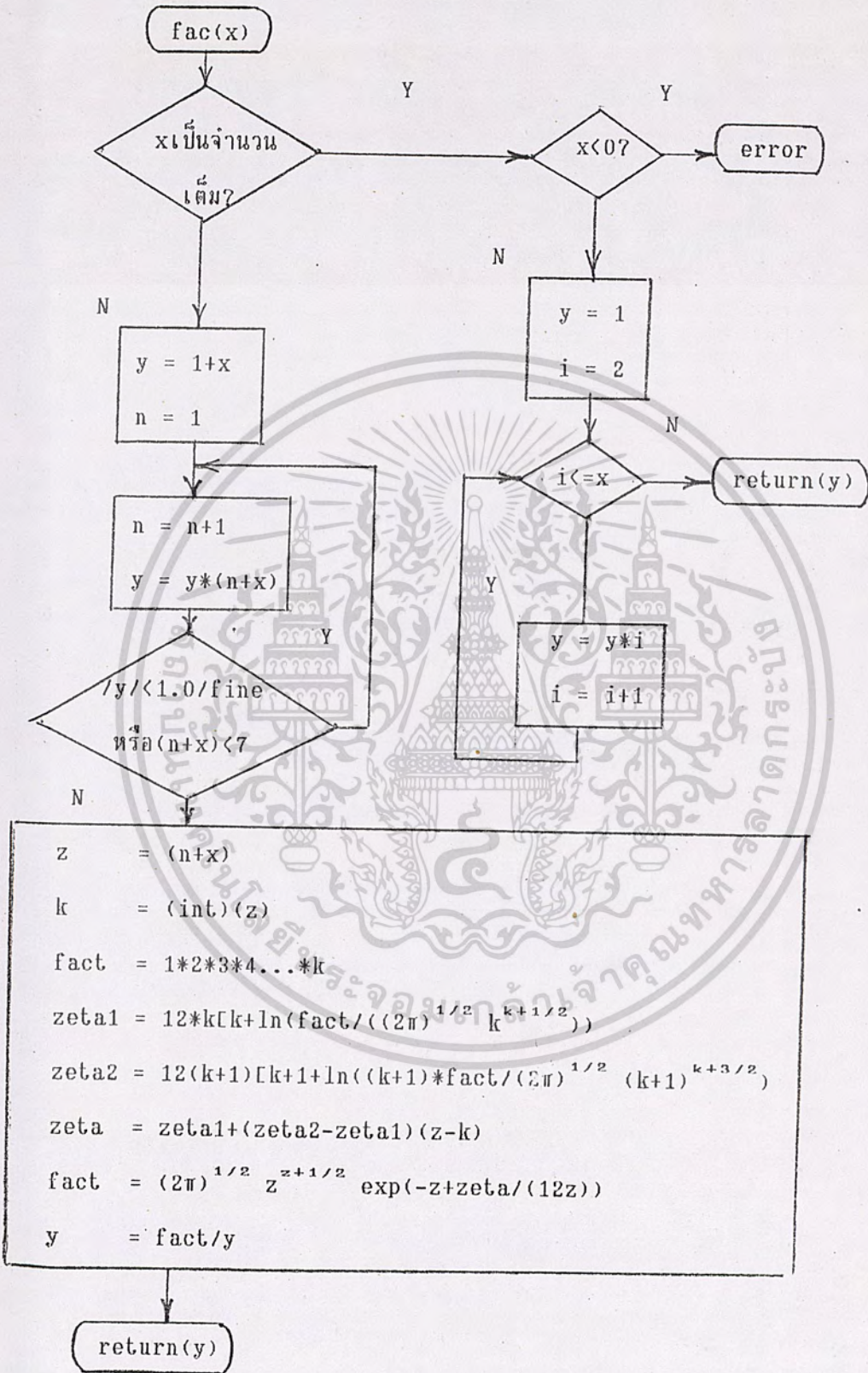
$$(n+x)! = (n+x)(n-1+x)(n-2+x)\dots(2+x)(1+x)x!$$

และ

$$(-n+x)! = \frac{x!}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}$$

เมื่อ  $n \in I^+$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 รูปที่ 3.8 ผังงานของฟังก์ชันแกมมา  
 ไม่ว่าจะกรณีใด ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามเผยแพร่สิ่งเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.6 ฟังก์ชันไซ (Psi (digamma) Function)

ฟังก์ชันไซ นิยามโดย

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} (\ln \Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

คุณสมบัติของไซฟังก์ชัน

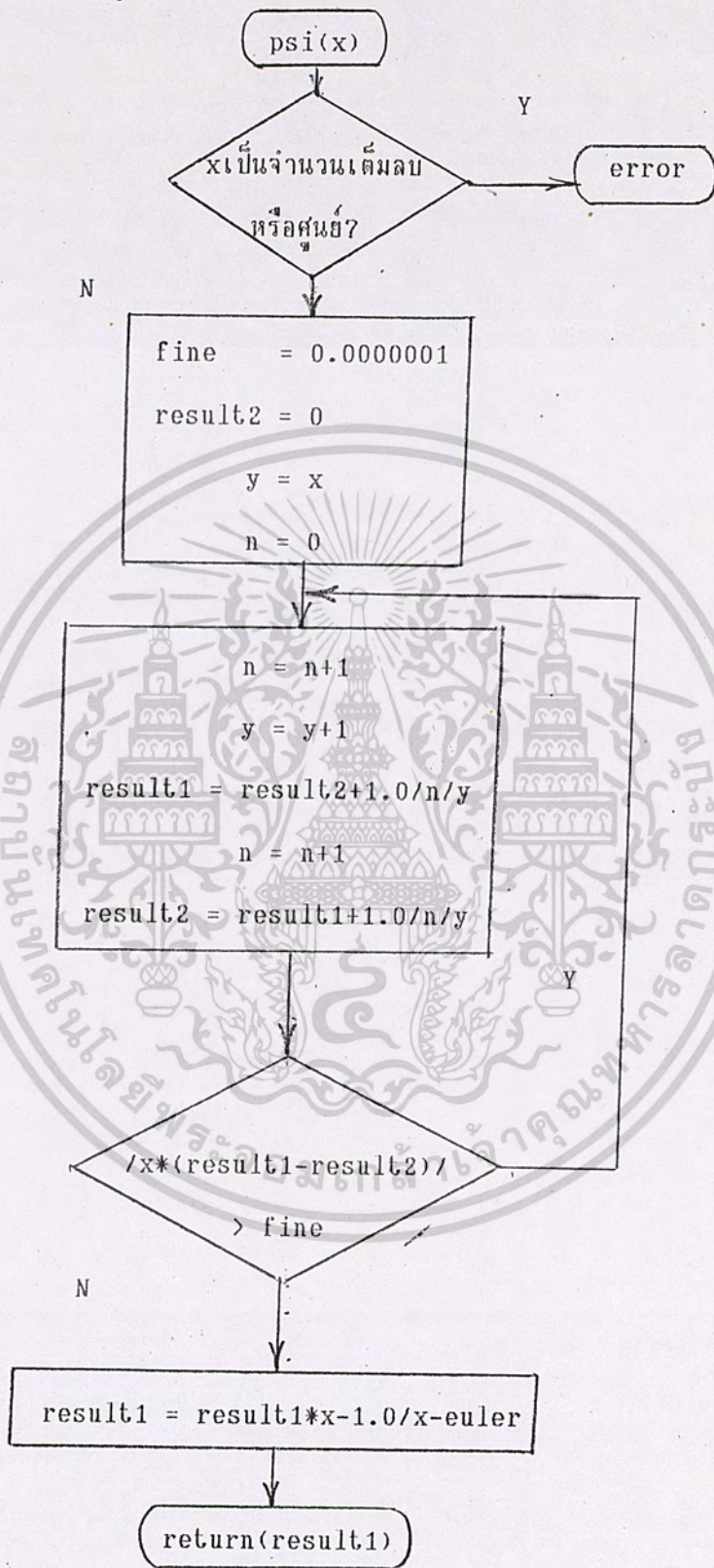
$$\psi(n+z) = \frac{1}{(n-1)+z} + \frac{1}{(n-2)+z} + \dots + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{1+z} + \psi(z)$$

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)} ; z = -1, -2, -3, \dots$$

$$\psi(1+z) = \frac{1}{z} + \psi(z)$$

เมื่อ  $\gamma = 0.5772$  : ค่าคงที่ของออยเลอร์ (euler constant)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 รูปที่ 3.9 ผลงานของฟังก์ชันนี้  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.7 สัญลักษณ์ของพอยชแฮมเมอร์ (Pochhammer Symbol)

สัญลักษณ์ของพอยชแฮมเมอร์นิยามโดย

$$(v)_n = \frac{\Gamma(v+n)}{\Gamma(v)}$$

$$= v(v+1)(v+2) \dots (v+n-1)$$

$$(v)_0 = 1$$

เมื่อ  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

การหาอนุพันธ์ของสัญลักษณ์ของพอยชแฮมเมอร์

$$\begin{aligned} \frac{d(v)_n}{dv} &= \frac{\Gamma(v) \Gamma'(v+n) - \Gamma(v+n) \Gamma'(v)}{(\Gamma(v))^2} \\ &= \Gamma'(v+n) - (v)_n \psi(v) \\ &= \frac{\psi(v+n) \Gamma(v+n)}{\Gamma(v)} - (v)_n \psi(v) \\ &= (v)_n (\psi(v+n) - \psi(v)) \\ &= (v)_n \left[ \frac{1}{v} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{2+v} + \dots + \frac{1}{(n-2)+v} + \frac{1}{(n-1)+v} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d(v)_0}{dv} = 0 \quad \text{สำหรับทุกค่า } v$$

ถ้า  $v = -m$  เมื่อ  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(v)_n}{dv} \right|_{v=-m} &= \lim_{v \rightarrow -m} \{ v(v+1)(v+2)(v+3) \dots (v+m) \dots (v+n-1) \} \\ &\quad \left[ \frac{1}{v} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{2+v} + \dots + \frac{1}{(n-1)+v} \right] \\ &= \lim_{v \rightarrow -m} \{ v(v+1) \dots (v+m-1)(v+m+1) \dots (v+n-1) \} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ขออนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและข้อมูลของเอกสาร (n-1)+v การนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{v \rightarrow -m} \{v(v+1)\dots(v+m-1)(v+m+1)\dots(v+n-1) \\
 &\quad \left[ \frac{v+m}{v} + \frac{v+m}{1+v} + \frac{v+m}{2+v} + \dots + 1 + \frac{v+m}{(n-1)+v} \right] \} \\
 &= (-m)(-m+1)\dots(-1)(1)\dots(-m+n-1)\{0+0+\dots+0+1+0+\dots+0\} \\
 &= (-m)(-m+1)\dots(-1)(1)(2)\dots(-m+n-1) \\
 &= (-m)(-m+1)\dots(-1) * \text{fac}(n-m-1) \\
 &= (-1)^m (m)(m-1)(m-2)\dots(2)(1) * \text{fac}(n-m-1) \\
 &= (-1)^m \text{fac}(m) \text{fac}(n-m-1)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(-m)_n = (-1)^m m! (n-m-1)! \quad \text{เมื่อ } m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ในขณะที่

$$(-m)_n = 0 \quad \text{เมื่อ } m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

เราอาจเขียนใหม่ได้ว่า

$$(-m)_n = 0$$

และ

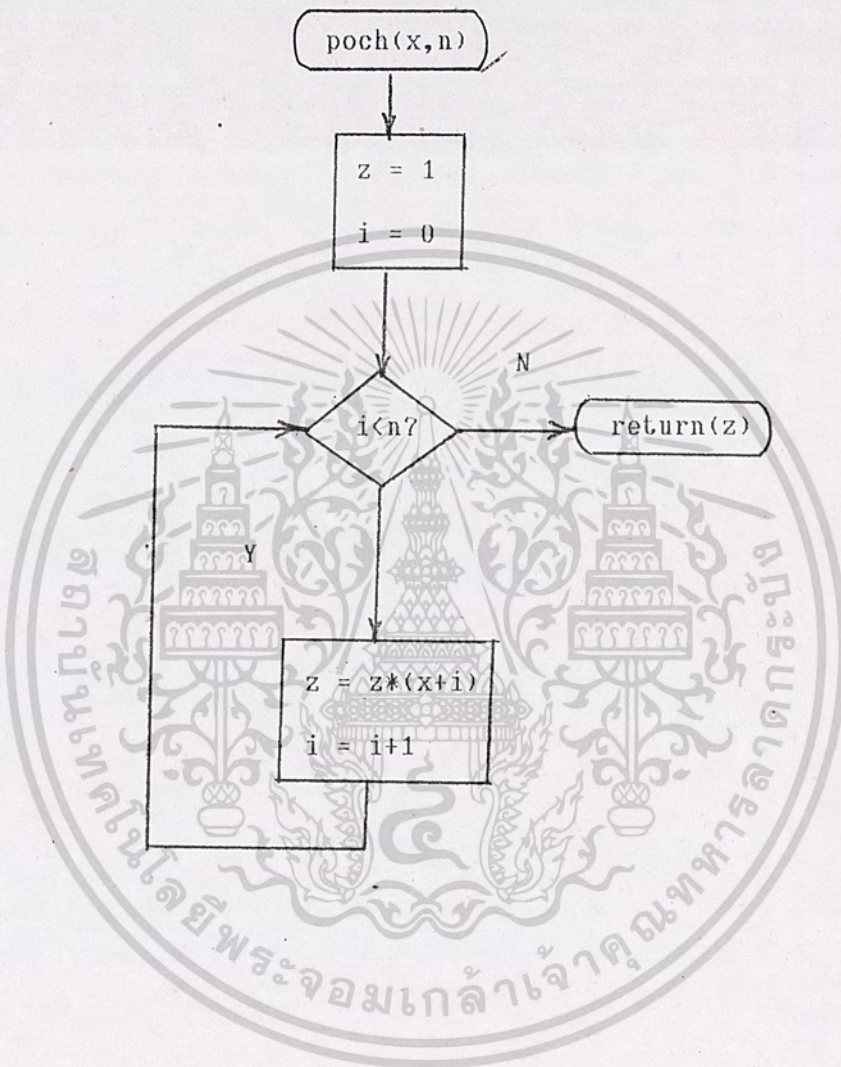
$$(-m)_n = (-1)^m m! (n-m-1)!$$

เมื่อ

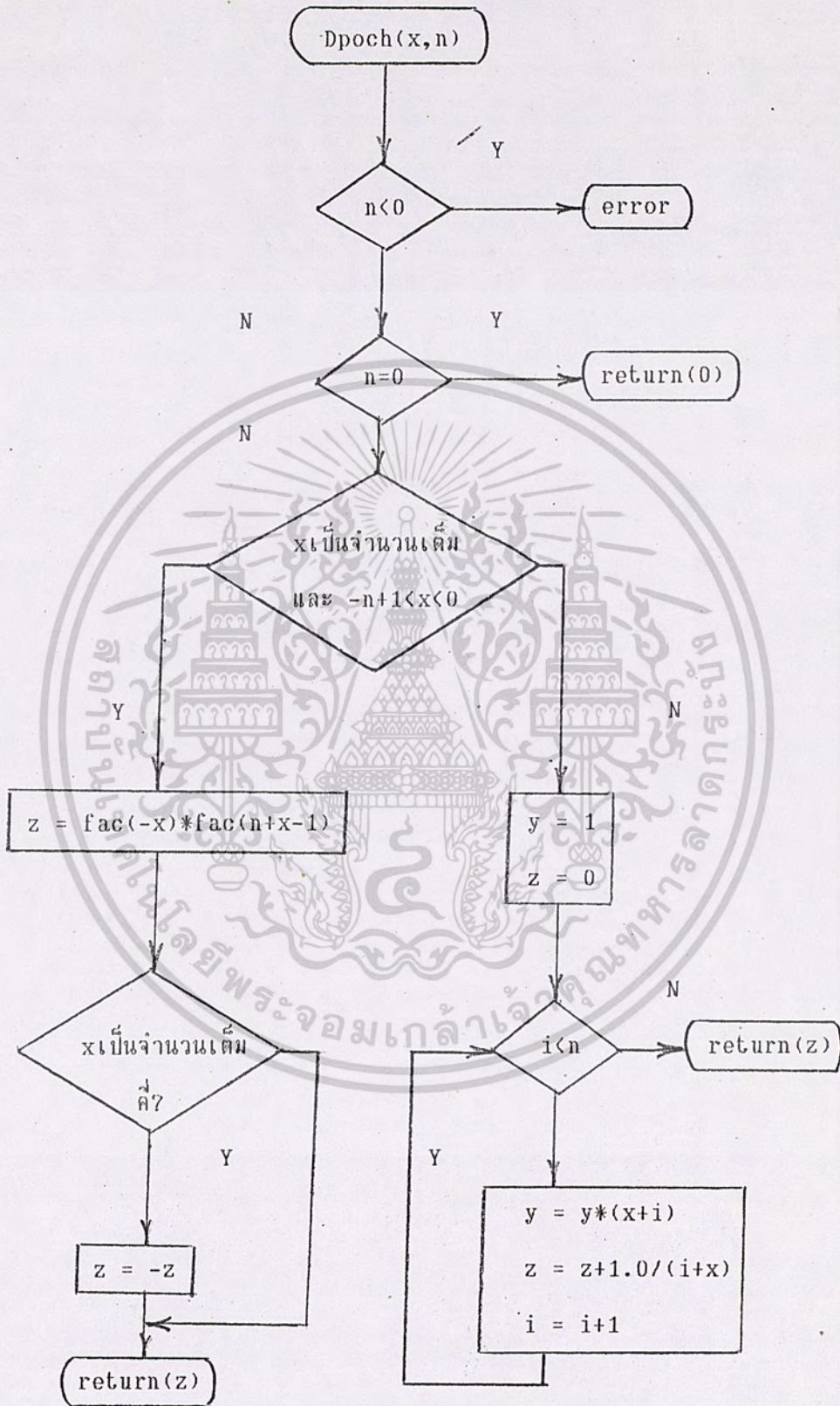
$$n = m+1, m+2, m+3, \dots$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
รูปที่ 3.10 ผังงานของสัญลักษณ์ของพอยซ์แฮมเมอร์  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 รูปที่ 3.11 ผังงานของอนพีแอนด์ของสัญลักษณ์ของฟอร์แอสแมเมอร์  
 ไม่ว่าการณีได้ ทั้งสิ้น ยกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.8 ฟังก์ชันเบสเซล(Bessel function)

ถึงแม้ว่าฟังก์ชันที่เราใช้จะเป็น ฟังก์ชันสเฟียริคอลเบสเซล(Spherical Bessel functions)  $\hat{B}_\nu(x)$  แต่มันก็มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเบสเซลธรรมดา(ordinary Bessel functions)  $B_\nu(x)$  ดังนี้

$$\hat{B}_\nu(x) = \sqrt{\pi x/2} B_{\nu+1/2}(x)$$

ฟังก์ชันเบสเซล(Bessel function)เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x \frac{d}{dx} (x \frac{dB_\nu}{dx}) + (x^2 - \nu^2) B_\nu = 0$$

สำหรับฟังก์ชันเบสเซลมีคำตอบที่สำคัญอยู่สองรูปแบบคือ

ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง(Bessel function of the first) ใช้สัญลักษณ์  $J_\nu(x)$

ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สอง(Bessel function of the second) ใช้สัญลักษณ์  $N_\nu(x)$

หรือ เขียนได้ดังนี้

$$B_\nu(x) \sim J_\nu(x), N_\nu(x)$$

โดยที่

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x)^{2m+\nu}}{m!(m+\nu)! 2^{2m+\nu}}$$

$$N_\nu(x) = (J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)) / \sin \nu\pi$$

ในกรณีที่  $\nu=n$  ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สอง หรือ ฟังก์ชันนอยแมน(Newman function)หาได้จาก การเข้าใกล้ของ

$$N_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x)$$

หรือ จากสูตรสำเร็จ

$$N_0 = \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} J_0(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} (x/2)^{2m} \phi(m)$$

และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 $N_\nu = \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} J_\nu(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n-m-1)!}{m!} (2/x)^{2m}$   
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} [\phi(m) + \phi(m+n)]$$

เมื่อ  $n > 0$

$$\log_e e = 0.5772 \quad (\text{ค่าคงที่ของออยเลอร์})$$

$$e = 1.781$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(m) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/m$$

สำหรับความสัมพันธ์ของ ลำดับที่เป็นจำนวนเต็มลบ (negative integer order) คือ

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

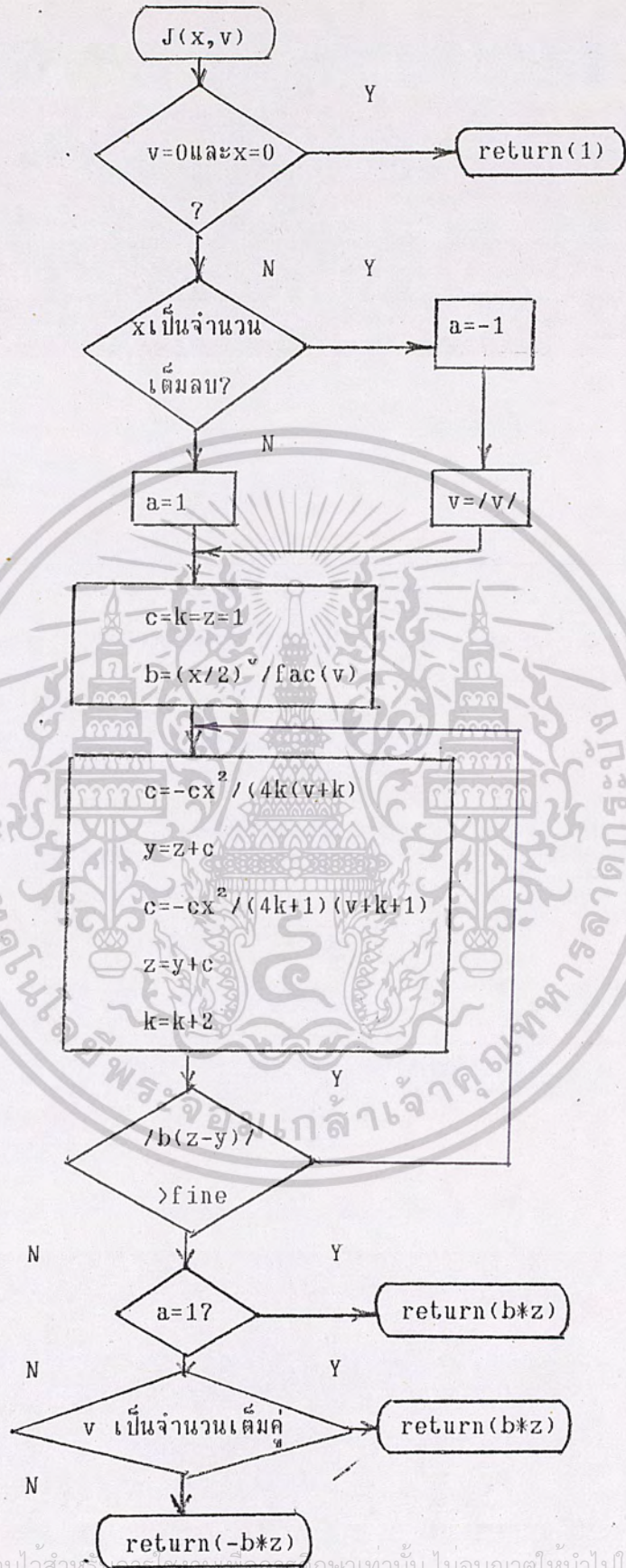
ในบางครั้งจะ เป็นการสะดวก ถ้านิยามฟังก์ชันเบสเซลใหม่จากผลรวมเชิงเส้น

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + jN_\nu(x)$$

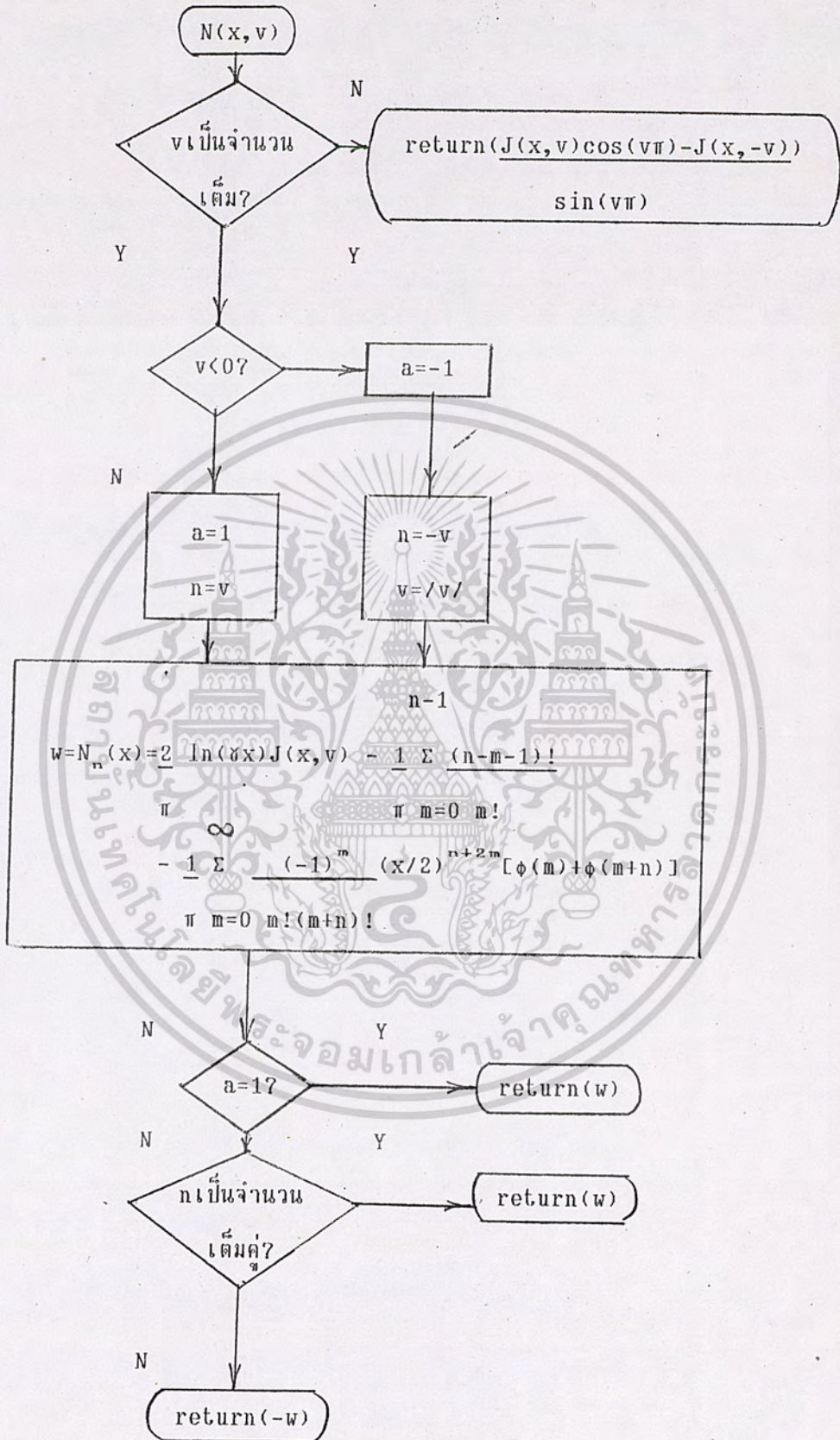
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - jN_\nu(x)$$

ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันแฮงเคิลชนิดที่หนึ่ง และ สอง (Hankel function of the first and second kinds) หรือบางครั้งก็เรียกรวมๆเป็น ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สาม (Bessel function of the third kind)

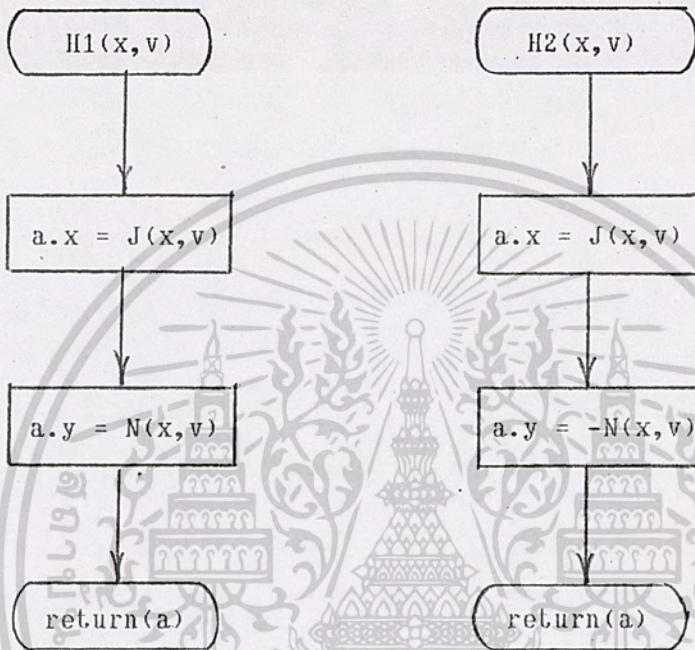
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานภายในมหาวิทยาลัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
รูปที่ 3.12 ฟังก์ชันของฟังก์ชันเบสเสถียรชนิดที่หนึ่ง  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งนี้เป็นอีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงแก่เจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งรูปที่ 3.13 ผังงานของฟังก์ชันเบสเสถียรชนิดที่สอง เจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 รูปที่ 3.14 ฝั่งงานของฟังก์ชันแรงแกลชนิดที่หนึ่งและสอง  
 ไม่ว่าจะกรณีใด ทั้งสิ้น อีกทั้งไม่มีเหตุที่โต้แย้งเนื้อหา และต้องยืนยันถึงใจของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.9 ฟังก์ชันไฮเปอร์จีออเมตริก(Hypergeometric Function)

อนุกรมไฮเปอร์จีออเมตริกของเกาส์(Gauss hypergeometric series) นิยามดังนี้

$$F(a,b;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z) = F(b,a;c;z)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

เมื่อ  $c \neq 0, -1, -2, \dots$  (ค่าของฟังก์ชันจะเป็นอนันต์)

$|z| = 1$  เป็นวงกลมของคอนเวอร์เจนซ์

คุณสมบัติของ ฟังก์ชันไฮเปอร์จีออเมตริก ที่สำคัญคือ

$$\lim_{c \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(c)} F(a,b;c;z) = \frac{(a)_{m+1} (b)_{m+1}}{(m+1)!} z^{m+1} F(a+m+1, b+m+1; m+2; z)$$

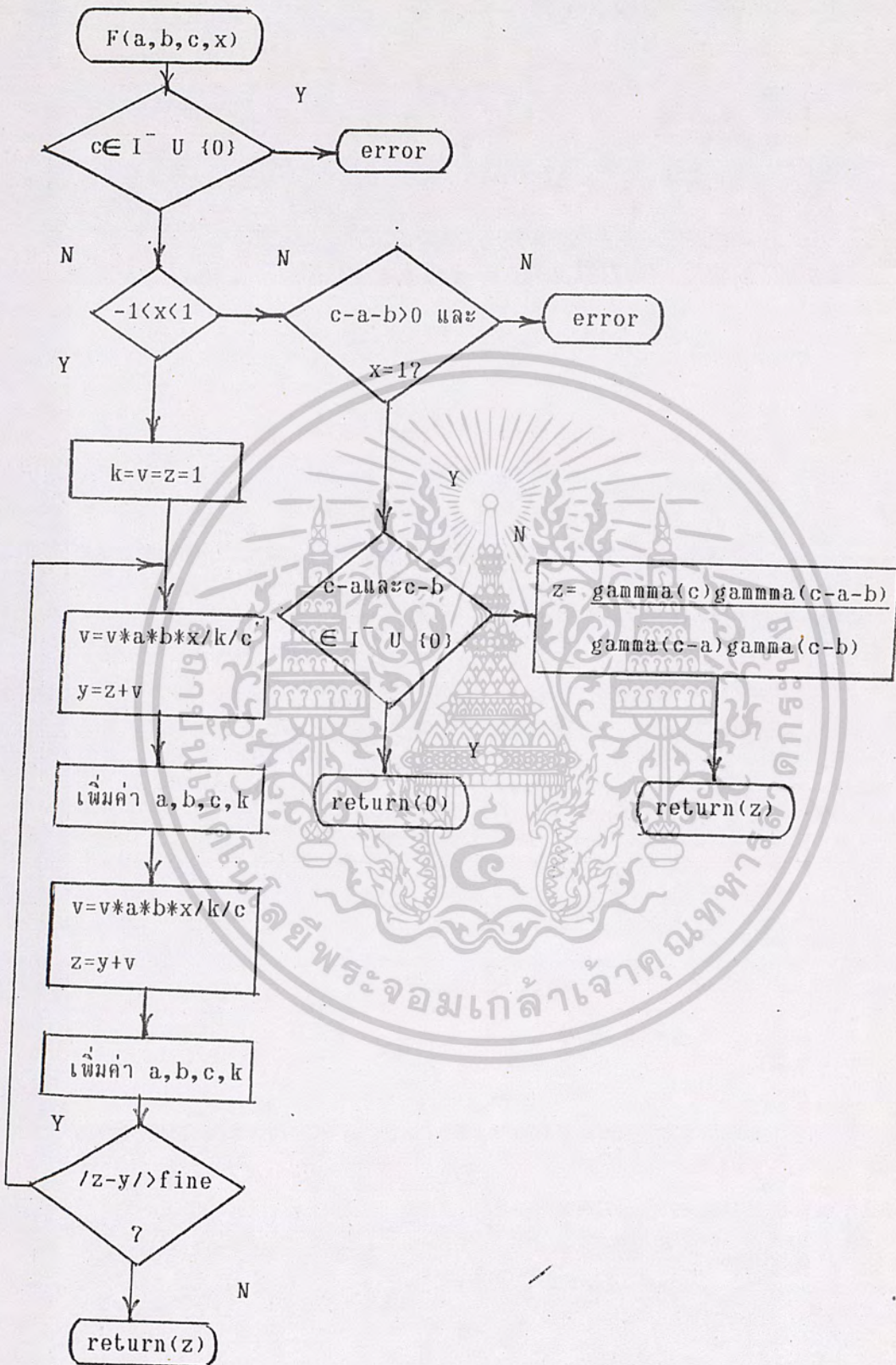
$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad ; c \neq 0, -1, -2, \dots$$

$$\quad \quad \quad ; \operatorname{Re}(c-a-b) > 0$$

หมายเหตุ  $(a)_n$  คือ สัญลักษณ์ของพอยน์แฮมเมอร์(pochhammer's symbol)

$$(a)_0 = 1$$

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น รูปที่ 3.15 ฟังก์ชันของฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริกของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.10 ฟังก์ชันเลอจอง (Legendre Function)

ฟังก์ชันเลอจอง เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + [v(v+1) - \frac{u^2}{1-x^2}] y = 0$$

โดยที่

$$y = L_v^u(x) \sim P_v^u(x), Q_v^u(x)$$

$P_v^u(x)$  เป็นฟังก์ชันเลอจองชนิดที่หนึ่ง (Legendre function of the first kind)

$Q_v^u(x)$  เป็นฟังก์ชันเลอจองชนิดที่สอง (Legendre function of the second kind)

$u$  เป็นออร์เดอร์ (order)

$v$  เป็นดีกรี (degree)

$$P_v^u(x) = [(1+x)/(1-x)]^{u/2} F(-v, v+1; 1-u; (1-x)/2), \quad |1-x| < 2$$

$$Q_v^u(x) = \pi [P_v^u(x) \cos(u+v)\pi - P_v^u(-x)] / (2 \sin(u+v)\pi)$$

ในกรณีที่  $u+v$  เป็นจำนวนเต็ม ใช้ลิมิตในการหา  $Q_v^u(x)$  หรือ จากสูตร

$$Q_v^u(x) = (aw_1 + bw_2) / (1-x^2)^{u/2}$$

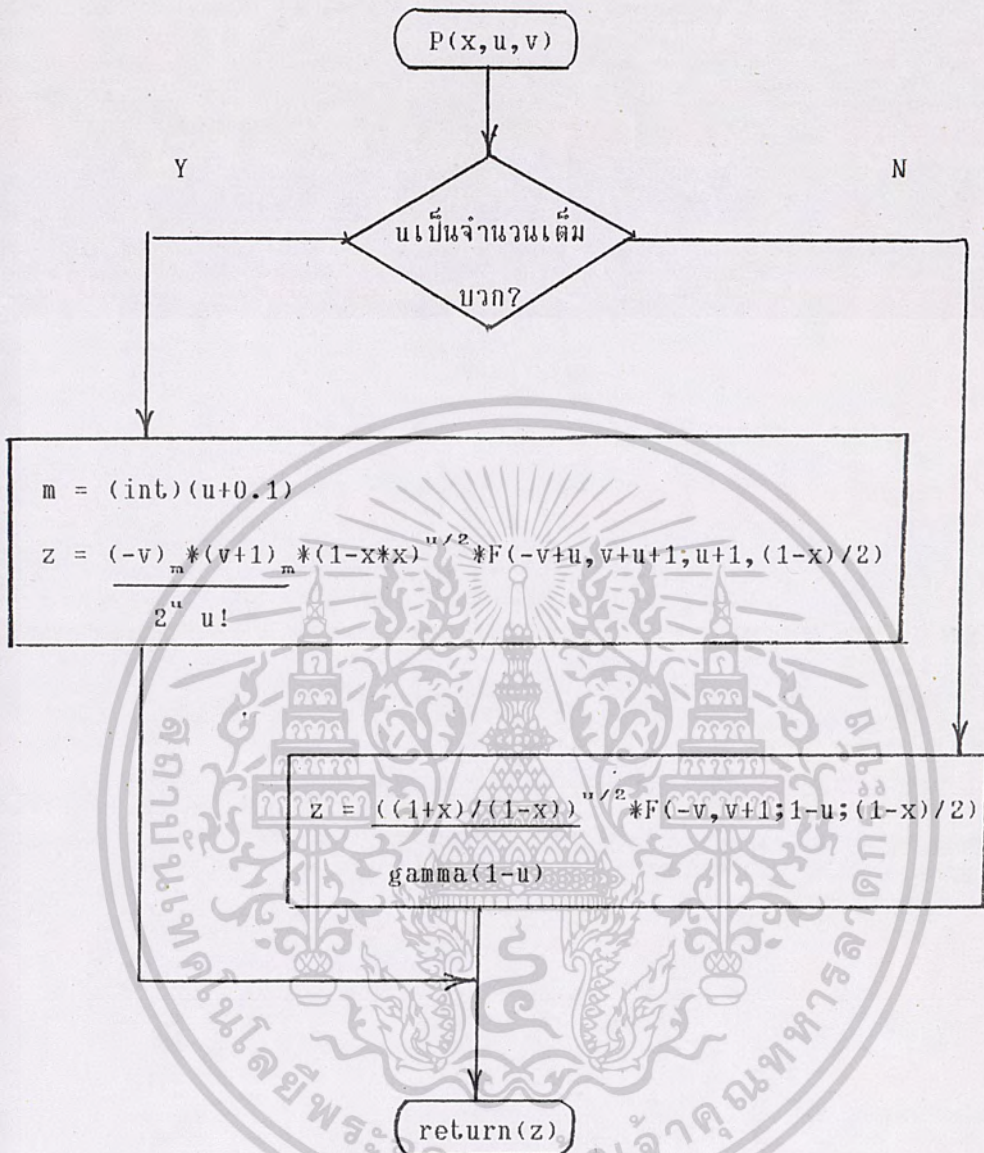
$$\text{เมื่อ } w_1 = F(-v/2-u/2, v/2-u/2+1/2; 1/2; x^2)$$

$$w_2 = xF(-v/2-u/2+1/2, v/2-u/2+1; 3/2; x^2)$$

$$a = -2^{u-1} \pi^{1/2} \sin[(v+u)\pi/2] \Gamma((v+u+1)/2) / \Gamma(v/2-u/2+1)$$

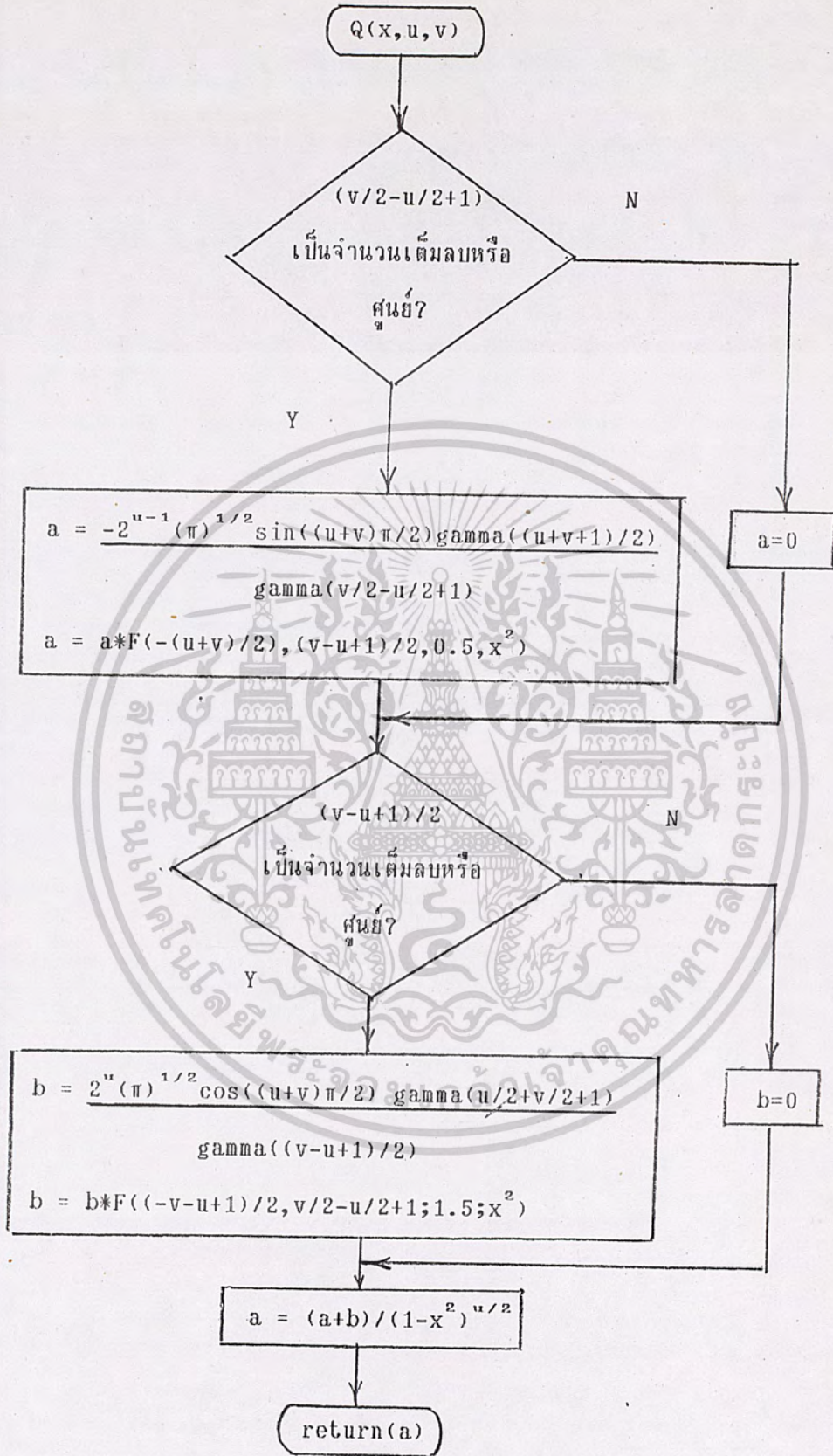
$$b = 2^u \pi^{1/2} \cos[(v+u)\pi/2] \Gamma(v/2+u/2+1) / \Gamma((v-u+1)/2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.16 ฟังก์ชันของฟังก์ชันเลขจอนชนิดที่หนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
รูปที่ 3.17 ฟังก์ชันของฟังก์ชันเลอจองอันดับที่สอง  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.11 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเบตาของเทียบกับตัวรี

$$\text{จาก } P_v^u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-u)} \frac{(1+x)^{u/2}}{(1-x)^{u/2}} F(-v, v+1; 1-v; (1-x)/2)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dP_v^u(x)}{dv} = \frac{1}{\Gamma(1-u)} \frac{(1+x)^{u/2}}{(1-x)^{u/2}} \frac{\partial}{\partial v} F(-v, v+1; 1-v; (1-x)/2)$$

พิจารณา  $\frac{\partial}{\partial v} F(-v, v+1; 1-u; (1-x)/2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} F(-v, v+1; 1-u; (1-x)/2) &= \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-v)_n (v+1)_n}{(1-u)_n n!} z^n \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{ (1+v)_n (-v)'_n + (-v)_n (1+v)'_n \}}{(1-u)_n n!} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)_n (1+v)_n \{-[\psi(-v+n) - \psi(-v)] + [\psi(1+v+n) - \psi(1+v)]\}}{(1-u)_n n!} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)_n (1+v)_n \{-[ \frac{1}{-v} + \frac{1}{-v+1} + \dots + \frac{1}{-v+n-1} ] + [ \frac{1}{v+1} + \frac{1}{v+2} + \dots + \frac{1}{v+n} ]\}}{(1-u)_n n!} z^n \end{aligned}$$

เมื่อ  $z = (1-x)/2$

ถ้า  $v = m$  โดยที่  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} F(-v, 1+v; 1-u; (1-x)/2) \right|_{v=m} = \sum_{n=1}^m \frac{[-(1+m)_n (-m)'_n + (-m)_n (1+m)'_n]}{(1-u)_n n!} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-(1+m)_n (-m)'_n]}{(1-u)_n n!} z^n$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก  $(-m)'_n = (-1)^m m! (n-m-1)!$  เมื่อ  $n = m+1, m+2, \dots$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} F(-v, 1+v; 1-u; (1-x)/2) \Big|_{v=m} &= \sum_{n=1}^m \frac{[-(1+m)_n (-m)'_n + (-m)_n (1+m)'_n] z^n}{(1-u)_n n!} \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{[(-1)^m m! (n-m-1)! (1+m)_n] z^n}{(1-u)_n n!} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{[-(1+m)_n (-m)'_n + (-m)_n (1+m)'_n] z^n}{(1-u)_n n!} \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{[(-1)^m m! (n-m-1)! (1+m)_n] z^n}{(1-u)_n n!} \end{aligned}$$

ถ้า  $v = -k$  โดยที่  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{\partial}{\partial v} F(-v, 1+v; 1-u; (1-x)/2) \Big|_{v=-k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-(1-k)_n (k)'_n + (k)_n (1-k)'_n] z^n}{(1-u)_n n!}$$

เนื่องจาก  $(1-k)_n = -(k-1)_n = 0$  เมื่อ  $n = k, k+1, k+2, \dots$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} F(-v, 1+v; 1-u; (1-x)/2) \Big|_{v=-k} &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{[-(1-k)_n (k)'_n + (k)_n (1-k)'_n] z^n}{(1-u)_n n!} \\ &+ \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[(k)_n (-(k-1))'_n] z^n}{(1-u)_n n!} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

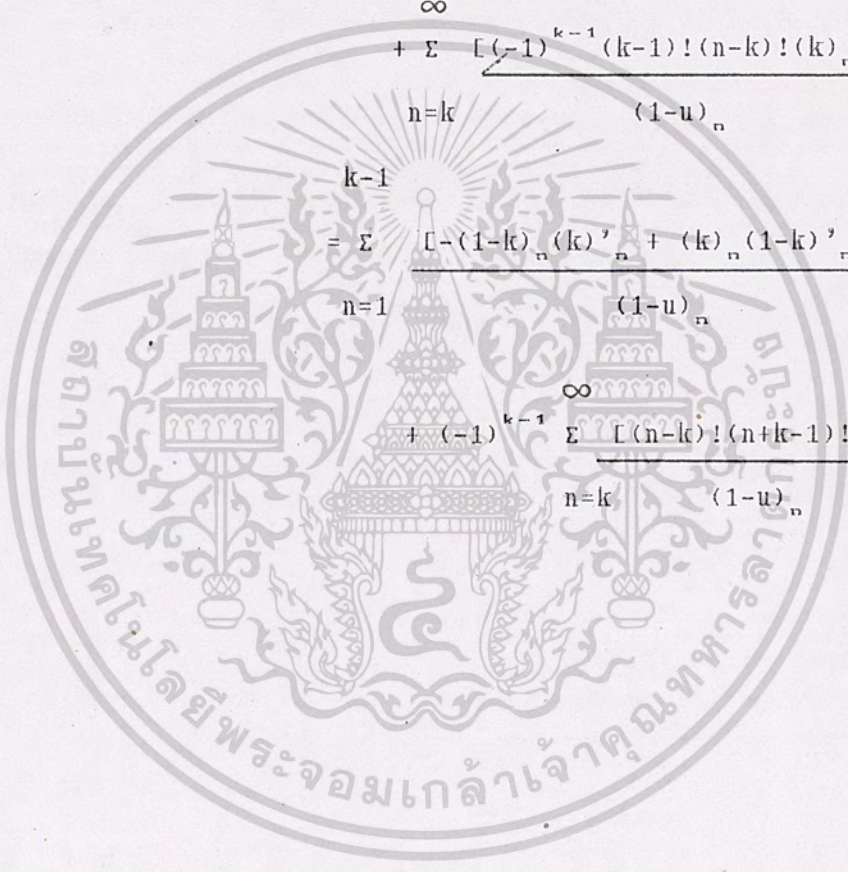
เนื่องจาก  $(-(k-1))'_n = (-1)^{k-1} (k-1)!(n-k-1)!$  เมื่อ  $n=k, k+1, k+2, \dots$   
 จะได้

$$\frac{\partial}{\partial v} F(-v, 1+v; 1-u; (1-x)/2) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{[-(1-k)'_n (k)'_n + (k)'_n (1-k)'_n] z^n}{(1-u)_n n!}$$

$$+ \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[(-1)^{k-1} (k-1)!(n-k-1)! (k)'_n] z^n}{(1-u)_n n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{[-(1-k)'_n (k)'_n + (k)'_n (1-k)'_n] z^n}{(1-u)_n n!}$$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[(n-k)!(n+k-1)!] z^n}{(1-u)_n n!}$$



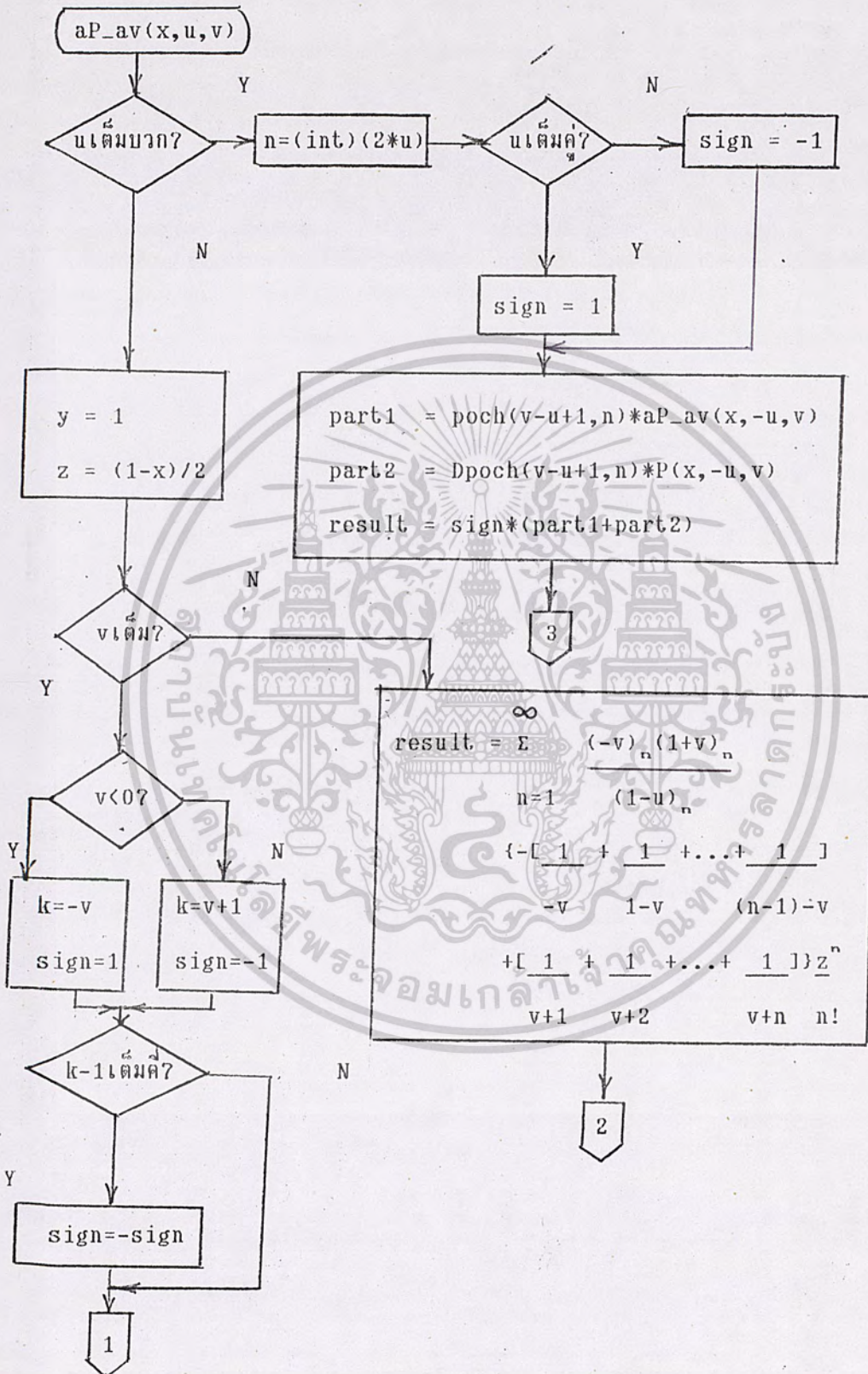
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตั้งนั้นจะได้

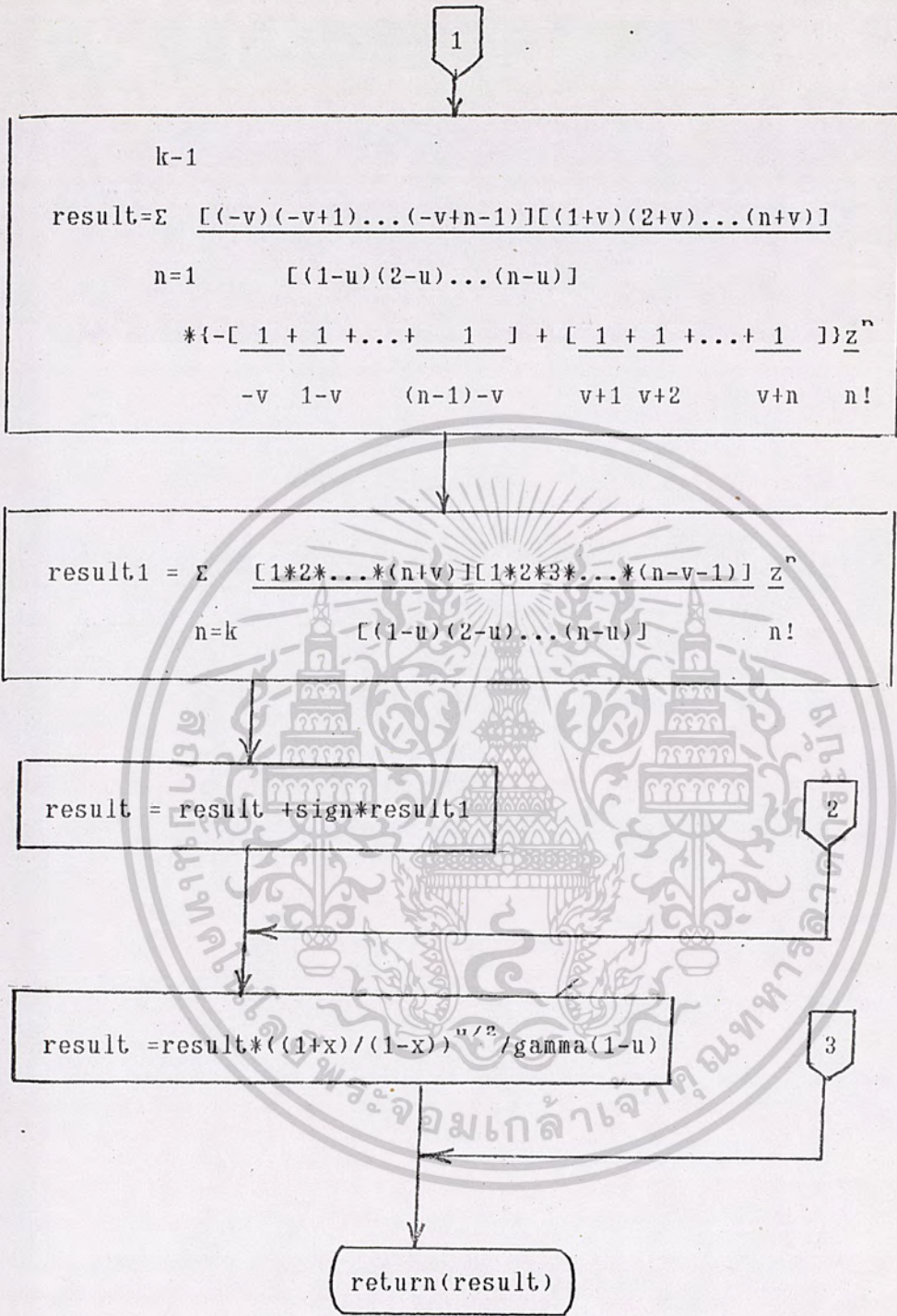
$$\frac{\partial P_v^u(x)}{\partial v} = \frac{1}{\Gamma(1-u)} \frac{(1+x)^{u/2}}{(1-x)^{u/2}}$$

$$\begin{aligned}
 & * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)_n (1+v)_n}{(1-u)_n} \left\{ -\left[ \frac{1}{-v} + \frac{1}{1-v} + \dots + \frac{1}{(n-1)-v} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left[ \frac{1}{v+1} + \frac{1}{v+2} + \dots + \frac{1}{v+n} \right] \right\} \frac{z^n}{n!} ; v \notin \mathbb{I} \\
 & * \sum_{n=1}^v \frac{[-(1+v)_n (-v)_n + (-v)_n (1+v)_n]}{(1-u)_n n!} z^n \\
 & \quad - (-1)^v \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{[(n-v-1)!(n+v)!]}{(1-u)_n n!} z^n ; v=0,1,2,3,\dots \\
 & * \sum_{n=1}^{-v-1} \frac{[-(1+v)_n (-v)_n + (-v)_n (1+v)_n]}{(1-u)_n n!} z^n \\
 & \quad + (-1)^{-v-1} \sum_{n=-v}^{\infty} \frac{[(n+v)!(n-v-1)!]}{(1-u)_n n!} z^n ; v = -1,-2,-3,\dots
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า  
 ไม่ว่าการณีรูปที่ 3.18(a) พังงานของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลอจองเทียบกับดีกรีสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นรูปที่ 3.18 (b) ผลงานของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลอจอง์เทียบกับดีกรี (ต่อ) ซึ่งประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.12 การหารากของฟังก์ชันเลขจาง

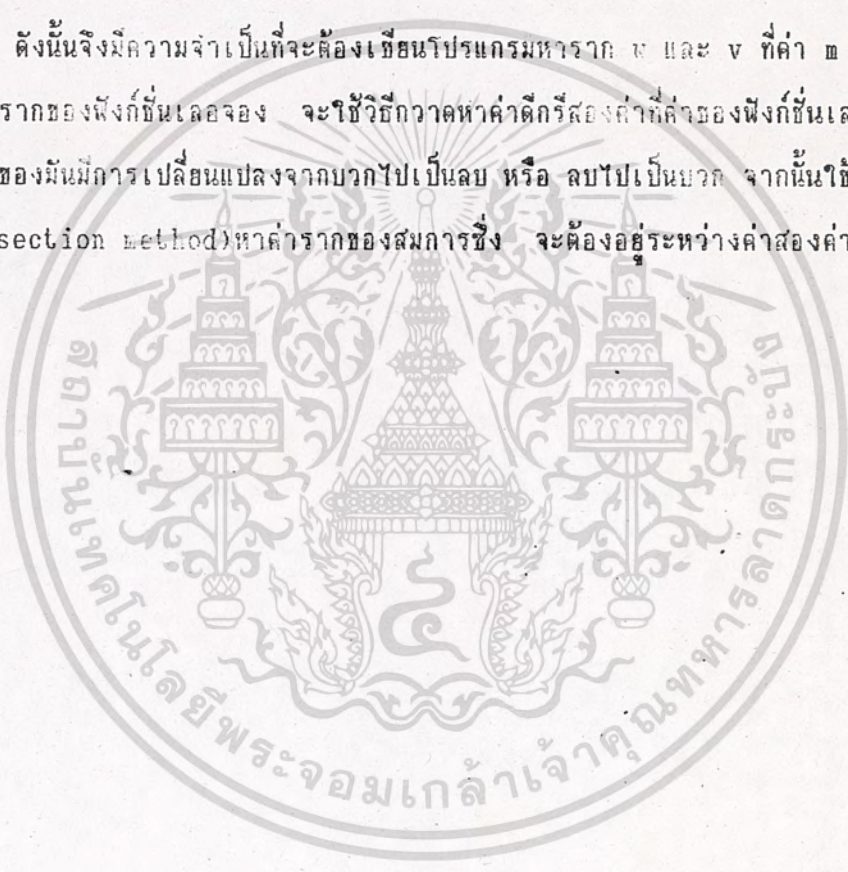
จากเงื่อนไขในการหาค่าตรี พ และ  $v$  ของสนามที่เอม และ ที่อีโหมด คือ

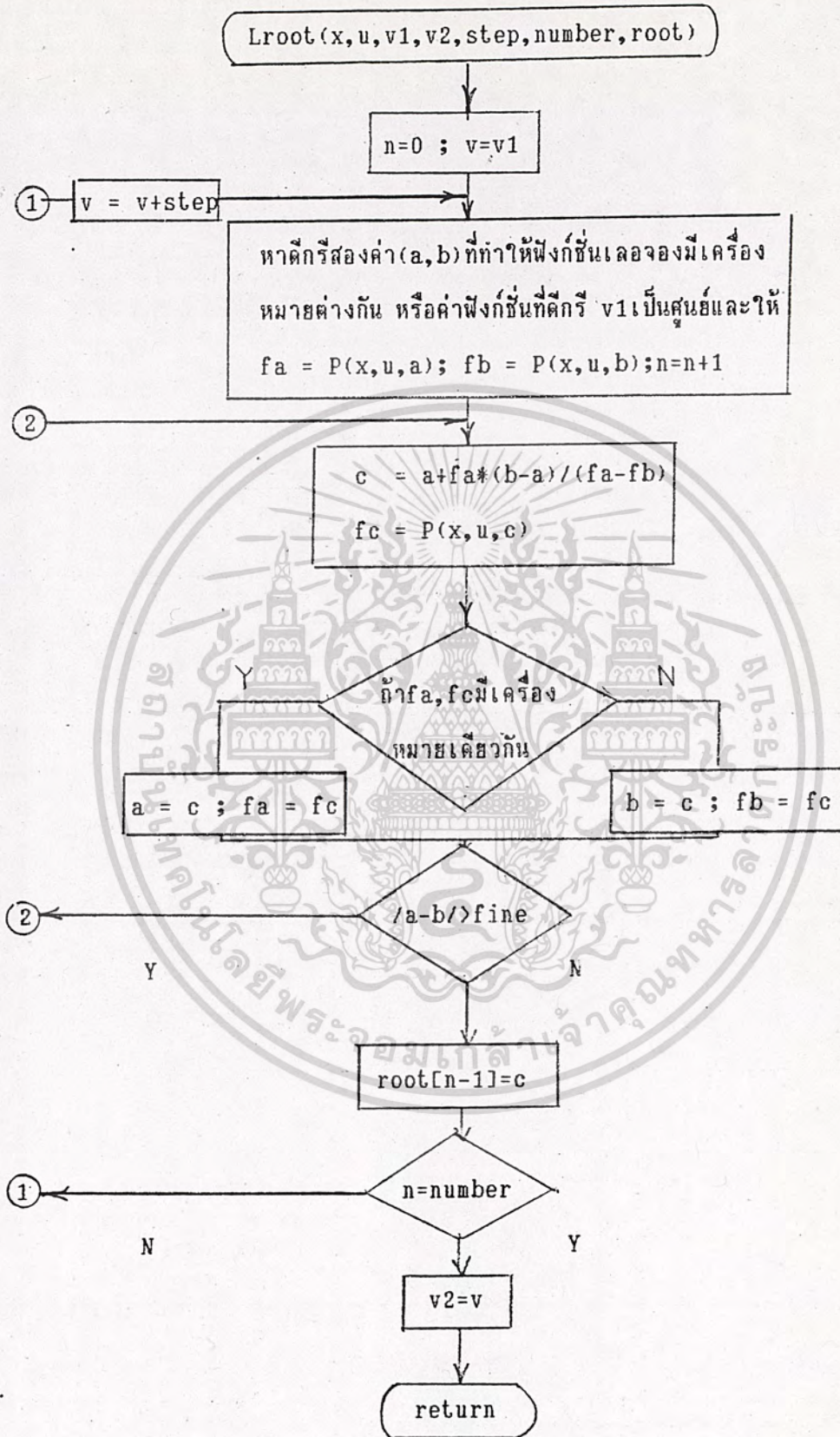
$$P_m(\cos \epsilon_s) = 0$$

และ  $dP_m(\cos \epsilon_s)/d\epsilon = 0$

เมื่อ  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องเขียนโปรแกรมหาราก  $w$  และ  $v$  ที่ค่า  $m$  ต่างๆ ใน การหารากของฟังก์ชันเลขจาง จะใช้วิธีกวาดหาค่าตรีสองค่าที่ค่าของฟังก์ชันเลขจางหรืออนุพันธ์ของมันมีการเปลี่ยนแปลงจากบวกไปเป็นลบ หรือ ลบไปเป็นบวก จากนั้นใช้วิธีไบเซกชัน (bisection method) หาค่ารากของสมการซึ่ง จะต้องอยู่ระหว่างค่าสองค่าดังกล่าว





เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งรูปที่พิมพ์งานในการใช้วิธีไบเซกชันในการหารากของฟังก์ชันเลขของ

บทที่ 4ผลการทดลอง4.1 ผลการรันโปรแกรมฟังก์ชันเลขจาง

ผลการรันโปรแกรม ฟังก์ชันเลขจางรวมทั้งอนุพันธ์ของมัน สามารถแสดงออกมาเป็นตารางได้ดังตาราง 4.1



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$x \setminus v$	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
-1.00	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000
-0.90	1.0000	-0.9000	0.7150	-0.4725	0.2079
-0.80	1.0000	-0.8000	0.4600	-0.0800	-0.2330
-0.70	1.0000	-0.7000	0.2350	0.1925	-0.4121
-0.60	1.0000	-0.6000	0.0300	0.3600	-0.4080
-0.50	1.0000	-0.5000	-0.1250	0.4375	-0.2891
-0.40	1.0000	-0.4000	-0.2600	0.4400	-0.1130
-0.30	1.0000	-0.3000	-0.3650	0.3825	0.0729
-0.20	1.0000	-0.2000	-0.4400	0.2800	0.2320
-0.10	1.0000	-0.1000	-0.4850	0.1475	0.3379
0.00	1.0000	0.0000	-0.5000	0.0000	0.3750
0.10	1.0000	0.1000	-0.4850	-0.1475	0.3370
0.20	1.0000	0.2000	-0.4400	-0.2800	0.2320
0.30	1.0000	0.3000	-0.3650	-0.3825	0.0729
0.40	1.0000	0.4000	-0.2600	-0.4400	-0.1130
0.50	1.0000	0.5000	-0.1250	-0.4375	-0.2891
0.60	1.0000	0.6000	0.0400	-0.3600	-0.4080
0.70	1.0000	0.7000	0.2350	-0.1925	-0.4121
0.80	1.0000	0.8000	0.4600	0.0800	-0.2330
0.90	1.0000	0.9000	0.7150	0.4725	0.2079
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ที่อ้างถึงในคู่มือนี้ให้หมายถึงข้อมูลของผลิตภัณฑ์หนึ่งๆ ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1.1 ค่าของฟังก์ชันเลขจอนต์หนึ่ง  $P_{10}^0(x)$

$x \setminus v$	0.1	0.2	0.3	0.4
-0.90	0.6888	0.3661	0.0493	-0.2449
-0.80	0.7586	0.5027	0.2441	-0.0054
-0.70	0.7998	0.5844	0.3625	0.1432
-0.60	0.8293	0.6435	0.4493	0.2536
-0.50	0.8524	0.6901	0.5184	0.3429
-0.40	0.8713	0.7287	0.5763	0.4184
-0.30	0.8874	0.7617	0.6262	0.4844
-0.20	0.9015	0.7907	0.6704	0.5432
-0.10	0.9139	0.8166	0.7100	0.5964
0.00	0.9251	0.8399	0.7461	0.6453
0.10	0.9352	0.8613	0.7792	0.6905
0.20	0.9445	0.8809	0.8099	0.7327
0.30	0.9531	0.8991	0.7376	0.7723
0.40	0.9661	0.9161	0.8644	0.8096
0.50	0.9686	0.9321	0.8908	0.8451
0.60	0.9756	0.9471	0.9148	0.8788
0.70	0.9822	0.9614	0.9376	0.9110
0.80	0.9884	0.9649	0.9593	0.9419
0.90	0.9944	0.9877	0.9801	0.9715
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ตารางที่ 4.1.2 ค่าของฟังก์ชันเลขจอนชนิดที่หนึ่ง  $P_n^{\alpha}(x)$  เอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$x \setminus v$	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
-0.90	0.0000	1.0000	-2.7000	4.5750	-6.0075
-0.80	0.0000	1.0000	-2.4000	3.3000	-2.9600
-0.70	0.0000	1.0000	-2.1000	2.1750	-0.7525
-0.60	0.0000	1.0000	-1.8000	1.2000	0.7200
-0.50	0.0000	1.0000	-1.5000	0.3750	1.5625
-0.40	0.0000	1.0000	-1.2000	-0.3000	1.8800
-0.30	0.0000	1.0000	-0.9000	-0.8250	1.7775
-0.20	0.0000	1.0000	-0.6000	-1.2000	1.3600
-0.10	0.0000	1.0000	-0.3000	-1.4250	0.7325
0.00	0.0000	1.0000	0.0000	-1.5000	0.0000
0.10	0.0000	1.0000	0.3000	-1.4250	-0.7325
0.20	0.0000	1.0000	0.6000	-1.2000	-1.3600
0.30	0.0000	1.0000	0.9000	-0.8250	-1.7775
0.40	0.0000	1.0000	1.2000	-0.3000	-1.8800
0.50	0.0000	1.0000	1.5000	0.3750	-1.5625
0.60	0.0000	1.0000	1.8000	1.2000	-0.7200
0.70	0.0000	1.0000	2.1000	2.1750	0.7525
0.80	0.0000	1.0000	2.4000	3.3000	2.9600
0.90	0.0000	1.0000	2.7000	4.5750	6.0075

ตารางที่ 4.1.3 ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขจอร์จชนิดที่หนึ่ง  $dP_v^0(x)/dx$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$x \setminus v$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
-1.00	-	-	-	-	-
-0.90	-1.4722	-1.7244	-1.8481	-1.8468	-1.7295
-0.80	-1.0986	-1.3570	-1.5185	-1.5841	-1.5584
-0.70	-0.8673	-1.1260	-1.3056	-1.4067	-1.4317
-0.60	-0.6931	-0.9498	-1.1399	-1.2625	-1.3220
-0.50	-0.5493	-0.8928	-0.9990	-1.1380	-1.2207
-0.40	-0.4236	-0.6733	-0.8729	-1.0228	-1.1237
-0.30	-0.3095	-0.5548	-0.7559	-0.9136	-1.0283
-0.20	-0.2027	-0.4433	-0.6446	-0.8075	-0.9329
-0.10	-0.1003	-0.3358	-0.5362	-0.7027	-0.8360
0.00	0.000	-0.2302	-0.4287	-0.5972	-0.7364
0.10	0.1003	-0.1242	-0.3202	-0.4893	-0.6327
0.20	0.2027	-0.1600	-0.2086	-0.3772	-0.5232
0.30	0.3095	0.0969	-0.0918	-0.2588	-0.4059
0.40	0.4236	0.2174	0.0334	-0.1311	-0.2779
0.50	0.5493	0.3498	0.1710	0.0101	-0.1350
0.60	0.6931	0.5008	0.3280	0.1717	0.0296
0.70	0.8673	0.6826	0.5167	0.3661	0.2285
0.80	1.0986	0.9224	0.7644	0.6209	0.5906
0.90	1.4722	1.3056	1.1571	1.0229	0.9003
1.00	-	-	-	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและตัวอักษรใดๆ จากเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้  
 ตารางที่ 4.1.4 ค่าของฟังก์ชันเลขจอนชนิดที่สอง  $Q_n^0(x)$

$x \setminus v$	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
-1.00	-	-	-	-	-
-0.90	2.6316	-6.2091	6.2381	-4.7222	1.5992
-0.80	1.3889	-3.3208	2.4144	0.1524	-3.5037
-0.70	0.9804	-2.2398	0.7821	1.9911	-4.2949
-0.60	0.7812	-1.6306	-0.1898	2.7307	-3.5699
-0.50	0.6667	-1.2150	-0.8427	2.8773	-2.2333
-0.40	0.5952	-0.8998	-1.3001	2.6509	-0.7393
-0.30	0.5495	-0.6392	-1.6225	2.1757	0.6404
-0.20	0.5208	-0.4111	-1.8367	1.5349	1.7326
-0.10	0.5051	-0.2013	-1.9598	0.7920	2.4283
0.00	0.5000	0.0000	-2.0000	-0.0000	2.6667
0.10	0.5051	0.2013	-1.9598	-0.7920	2.4283
0.20	0.5208	0.4111	-1.8367	-1.5349	1.7326
0.30	0.5495	0.6392	-1.6225	-2.1757	0.6404
0.40	0.5952	0.8998	-1.3011	-2.6509	-0.7393
0.50	0.6667	1.2160	-0.8427	-2.8773	-2.2333
0.60	0.7813	1.6306	-0.1898	-2.7307	-3.5699
0.70	0.9804	2.2399	0.7821	-1.9911	-4.2949
0.80	1.3889	3.3208	2.4145	-0.1524	-3.5037
0.90	2.7316	6.2091	6.2382	4.7223	1.5992
1.00	-	-	-	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดก็ตาม

ตารางที่ 4.1.5 ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขจอนชนิดที่สอง  $dQ_v^0(x)/dx$  มีการนำไปใช้

$x \setminus v$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
-1.00	-	-	-	-	-
-0.90	2.6316	5.1340	4.5458	3.5394	2.1814
-0.80	1.3889	2.7561	2.5103	2.0526	1.4114
-0.70	0.9804	1.9721	1.8382	1.5629	1.1602
-0.60	0.7812	1.5893	1.5105	1.3267	1.0449
-0.50	0.6667	1.3691	1.3232	1.1945	0.9865
-0.40	0.5952	1.2320	1.2081	1.1166	0.9590
-0.30	0.5495	1.1447	1.1366	1.0722	0.9514
-0.20	0.5208	1.0908	1.0949	1.0513	0.9591
-0.10	0.5051	1.0620	1.0761	1.0492	0.9800
0.00	0.5000	1.0545	1.0769	1.0641	1.0143
0.10	0.5051	1.0671	1.0968	1.0962	1.0633
0.20	0.5208	1.1013	1.1377	1.1481	1.1303
0.30	0.5495	1.1613	1.2042	1.2248	1.2210
0.40	0.5952	1.2561	1.3054	1.3360	1.3456
0.50	0.6667	1.4026	1.4589	1.4996	1.5226
0.60	0.7813	1.6364	1.7003	1.7519	1.7891
0.70	0.9804	2.0409	2.1140	2.1791	2.2314
0.80	1.3889	2.8670	2.925	2.9330	3.1064
0.90	2.6316	5.3688	5.4756	5.5822	5.6870
1.00	-	-	-	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าการตีพิมพ์ที่ 4.1.6 ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขจอนชนิดที่สอง  $dQ_0(x)/dx$  รังที่มีการนำไปใช้

#### 4.2 ผลการรันของฟังก์ชันเบสเสล

ผลการรันโปรแกรม ฟังก์ชันเบสเสลรวมทั้งอนุพันธ์ของมัน สามารถแสดงออกมาเป็นตารางได้ดังตารางที่ 4.2

$x \setminus v$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.0	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.7773	0.5970	0.4527	0.3394
0.2	0.9900	0.8274	0.6815	0.5542	0.4455
0.3	0.9776	0.8518	0.7313	0.6198	0.5193
0.4	0.9604	0.8626	0.7633	0.6666	0.5753
0.5	0.9385	0.8638	0.7830	0.7003	0.6188
0.6	0.9120	0.8573	0.7932	0.7237	0.6524
0.7	0.8812	0.8440	0.7952	0.7386	0.6774
0.8	0.8463	0.8248	0.7902	0.7458	0.6949
0.9	0.8075	0.8002	0.7788	0.7462	0.7054
1.0	0.7652	0.7708	0.7615	0.7402	0.7094

ตารางที่ 4.2.1 ค่าของเบสเสลฟังก์ชันชนิดที่หนึ่ง  $J_v(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$x \setminus v$	0.0	0.1	0.2	0.3
0.000	-0.0000	98074548.7119	18962756.5827	2715137.7997
0.001	-0.0005	49.1535	47.6322	34.1815
0.002	-0.0010	26.3403	27.3573	21.0411
0.003	-0.0015	18.2864	19.7786	15.8417
0.004	-0.0020	14.1146	15.7122	12.9521
0.005	-0.0025	11.5460	13.1432	11.0789
0.006	-0.0030	9.7982	11.3591	9.7513
0.007	-0.0035	8.5284	10.0409	8.7537
0.008	-0.0040	7.5621	9.0233	7.9724
0.009	-0.0045	6.8010	8.2116	7.3413
0.010	-0.0050	6.1851	7.5475	6.8191
0.100	-0.0499	0.4981	0.0250	0.0006
0.200	-0.0995	0.4925	0.0497	0.0025
0.300	-0.1483	0.4832	0.0739	0.0056
0.400	-0.1960	0.4703	0.0974	0.0098
0.500	-0.2423	0.4539	0.1199	0.0152

ตารางที่ 4.2.2 ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเบสเส้นชนิดที่หนึ่ง  $dJ_v(x)/dx$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$x \setminus v$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.00	-	-	-	-	-
0.10	-1.5342	-1.6824	-1.8304	-2.0019	-2.2202
0.20	-1.0811	-1.2237	-1.3492	-1.4703	-1.5993
0.30	-0.8073	-0.9483	-1.0693	-1.1783	-1.2831
0.40	-0.6060	-0.7457	-0.8659	-0.9718	-1.0687
0.50	-0.4445	-0.5823	-0.7024	-0.8080	-0.9027
0.60	-0.3085	-0.4437	-0.5635	-0.6696	-0.7642
0.70	-0.1907	-0.3226	-0.4414	-0.5479	-0.6433
0.80	-0.0868	-0.2147	-0.3319	-0.4383	-0.5345
0.90	0.0056	-0.1175	-0.2324	-0.3382	-0.4348
1.00	0.0883	-0.0295	-0.1412	-0.2457	-0.3423

ตารางที่ 4.2.3 ค่าของฟังก์ชันเบสเสถียรชนิดที่สอง  $N_v(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$x \setminus v$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.00	-	-	-	-	-
0.10	6.4590	6.5846	7.0793	8.1334	9.9538
0.20	3.3238	3.3471	3.4346	3.6521	4.0610
0.30	2.2931	2.3057	2.3236	2.3824	2.5143
0.40	1.7809	1.7965	1.7987	1.8104	1.8524
0.50	1.4715	1.4925	1.4950	1.4921	1.4997
0.60	1.2604	1.2897	1.2958	1.2906	1.2853
0.70	1.1032	1.1399	1.1527	1.1504	1.1419
0.80	0.9781	1.0220	1.0421	1.0453	1.0385
0.90	0.8731	0.9237	0.9513	0.9611	0.9586
1.00	0.7812	0.8391	0.8730	0.8898	0.8929

ตารางที่ 4.2.4 ค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเบสเสลชนิดที่สอง  $dN_v(x)/dx$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.3 ผลของสนามภายใน

ค่าของสนามภายในที่จุดต่างๆเมื่อ

รัศมีอันที่น้อยกว่า  $kr_1 = 6$

รัศมีอันที่มากกว่า  $kr_2 = 7.5$

มุมทรงกรวย  $\theta_1 = 60$  องศา

มุมตำแหน่งของช่องเปิด  $\theta_2 = 30$  องศา

ครึ่งหนึ่งของมุมของช่องเปิด  $\alpha = 0.5$  องศา

ครึ่งหนึ่งของมุมความยาวของช่องเปิด  $\phi_1 = 10$  องศา

point ( $kr, \theta, \phi$ )	$E_r$	$E_\theta$	$H_\phi$
(6, 5, 0)	-4.38433600	0.05383921	j(-0.01466293)
(6, 10, 0)	-7.56154200	0.01772612	j(0.00978727)
(6, 15, 0)	-8.36175212	-0.25330734	j(0.00201590)
(6, 20, 0)	-8.08259464	0.28637650	j(-0.00316422)
(6, 25, 0)	-3.68745995	-0.31671394	j(-0.01388178)
(6, 27, 0)	-1.74817871	1.41089237	j(-0.01778074)
(6, 30, 0)	-1.74550310	3.39633843	j(-0.02039513)
(6, 32, 0)	-2.10938626	2.29197466	j(-0.01855574)
(6, 35, 0)	0.10220484	-0.30800451	j(-0.01413296)
(6, 37, 0)	2.53914981	-0.64296167	j(-0.01193326)
(6, 40, 0)	4.46977683	0.24716021	j(-0.00867545)
(6, 42, 0)	4.71316289	0.29451355	j(-0.00578206)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ตารางที่ 4.3.1 ค่าของสนามภายในที่  $kr=6$  และ  $\phi=0$  คงที่  
 ไม่วาร์ณใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(6, 45, 0)	5.25217591	-0.24577888	$j(-0.00119558)$
(6, 47, 0)	5.56885473	-0.19372130	$j(0.00163403)$
(6, 50, 0)	4.94131606	0.16494271	$j(0.00560100)$
(6, 52, 0)	4.04242695	0.07644442	$j(0.00797901)$
(6, 55, 0)	2.79111067	-0.18007579	$j(0.01042284)$
(6, 57, 0)	1.87712547	-0.08080556	$j(0.01139417)$
(6, 60, 0)	0.00005121	0.12408586	$j(0.01178755)$

ตารางที่ 4.3.1 ค่าของสนามภายในที่  $kr=6$  และ  $\phi=0$  คงที่ (ต่อ)

หมายเหตุ ค่าของสนามในตารางจะต้องเอาโวลต์ตรงที่ใช้ในการป้อนสัญญาณมาคูณ และความคลื่นมาหาร จึงจะได้สนามไฟฟ้าเป็นหน่วย โวลต์/เมตร และสนามแม่เหล็กเป็นหน่วย แอมแปร์/เมตร สำหรับค่าของสนามอื่นๆที่ไม่ได้แสดงไว้จะมีค่าเป็นศูนย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.4 ผลของสนามภายนอก

ค่าของสนามภายในที่จุดต่างๆเมื่อ

รัศมีชั้นที่น้อยกว่า  $kr_1 = 4$

รัศมีชั้นที่มากกว่า  $kr_2 = 5.5$

มุมทรงกรวย  $\theta_1 = 60$  องศา

มุมตำแหน่งของช่องเปิด  $\theta_2 = 30$  องศา

ครึ่งหนึ่งของมุมของช่องเปิด  $\alpha = 0.5$  องศา

ครึ่งหนึ่งของมุมความยาวของช่องเปิด  $\phi_1 = 10$  องศา

point ( $kr, \theta, \phi$ )	$E_r$	$E_\theta$	$H_\phi$
(2, 10, 0)	0.07573931	-0.05702682	j( 0.00035907)
(2, 15, 0)	0.04453100	-0.06024411	j( 0.00040864)
(2, 20, 0)	0.03400821	-0.06122368	j( 0.00040864)
(2, 25, 0)	0.01476859	-0.06106542	j( 0.00042105)
(2, 30, 0)	-0.00363348	-0.06070000	j( 0.00042455)
(2, 35, 0)	-0.02198114	-0.06049152	j( 0.00041902)
(2, 40, 0)	-0.04105547	-0.06006806	j( 0.00040468)
(2, 45, 0)	-0.06119514	-0.05849465	j( 0.00038207)
(2, 50, 0)	-0.08209240	-0.05467720	j( 0.00035184)
(2, 55, 0)	-0.10288516	-0.04775384	j( 0.00033147)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ตารางที่ 4.4.1 ค่าของสนามภายนอกที่  $kr=2$  และ  $\phi=0$  องศา  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2,60,0)	-0.12241690	-0.03729943	$j(0.00027150)$
(2,65,0)	-0.13949248	-0.02333635	$j(0.00022306)$
(2,70,0)	-0.15304487	-0.00624599	$j(0.00017047)$
(2,75,0)	-0.16221973	0.01333705	$j(0.00015000)$
(2,80,0)	-0.16641080	0.03461726	$j(0.00005809)$
(2,85,0)	-0.16526773	0.05671379	$j(0.00000132)$
(2,90,0)	-0.15868679	0.07871695	$j(-0.00005369)$

ตารางที่ 4.4.1 ค่าของสนามภายนอกที่  $kr=2$  และ  $\phi=0$  คงที่(ต่อ)

หมายเหตุ ค่าของสนามในตารางจะต้องเอาโวลต์ตรงที่ใช้ในการป้อนสัญญาณมาคูณ และความคลี่นมาหาร จึงจะได้สนามไฟฟ้าเป็นหน่วย โวลต์/เมตร และสนามแม่เหล็กเป็นหน่วย แอมแปร์/เมตร สำหรับค่าของสนามอื่นๆที่ไม่ได้แสดงไว้จะมีค่าเป็นศูนย์

$(kr, \theta, \phi)$	$E_r$	$E_\theta$
5,90,0	-0.00968840+j(0.00633709)	0.00569915+j(-0.00077682)
5,90,5	-0.00956873+j(0.00641955)	0.00565739+j(-0.00084212)
5,90,10	-0.00921104+j(0.00665120)	0.00552848+j(-0.00102913)
5,90,15	-0.00862032+j(0.00698733)	0.00530348+j(-0.00131255)
5,90,20	-0.00780812+j(0.00736132)	0.00497316+j(-0.00165443)
5,90,25	-0.00679580+j(0.00769498)	0.00453424+j(-0.00200972)
5,90,30	-0.00562247+j(0.00791073)	0.00399465+j(-0.00233263)
5,90,35	-0.00433958+j(0.00794330)	0.00337577+j(0.00258286)
5,90,40	-0.00301813+j(0.00774962)	0.00271114+j(-0.00273064)
5,90,45	-0.00173994+j(0.00731474)	0.00204192+j(-0.00275993)
5,90,50	-0.00058967+j(0.00665402)	0.00141065+j(-0.00266946)
5,90,55	0.00035658+j(0.00581056)	0.00085515+j(-0.00247172)
5,90,60	0.00104266+j(0.00484904)	0.00040272+j(-0.00219014)
5,90,65	0.00144106+j(0.00384702)	0.00007272+j(-0.00185525)
5,90,70	0.00155657+j(0.00288500)	-0.00013383+j(-0.00150035)
5,90,75	0.00142415+j(0.00203682)	-0.00022295+j(-0.00115742)
5,90,80	0.00110179+j(0.00136165)	-0.00021042+j(-0.00085286)
5,90,85	0.00066051+j(0.00089847)	-0.00011859+j(-0.00061016)
5,90,90	0.00017389+j(0.00066347)	0.00002732+j(-0.00043887)
5,90,95	-0.00029056+j(0.00065040)	0.00020083+j(-0.00034455)

ตารางที่ 4.4.2 ค่าของสนามภายในที่  $kr=5$  และ  $\theta=90$  องศา คงที่  
 เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานโดยมีลิขสิทธิ์ของผู้นิพนธ์ ผู้ใช้ประโยชน์ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5,90,100	-0.00067747+j(0.00083352)	0.00037714+j(-0.00032446)
5,90,105	-0.00094674+j(0.00117236)	0.00053504+j(-0.00037041)
5,90,110	-0.00107478+j(0.00161757)	0.00065828+j(-0.00047012)
5,90,115	-0.00105424+j(0.00211702)	0.00073620+j(-0.00060924)
5,90,120	-0.00089278+j(0.00262133)	0.00076358+j(-0.00077294)
5,90,125	-0.00061089+j(0.00308842)	0.00074002+j(-0.00094730)
5,90,130	-0.00023848+j(0.00000000)	0.00066904+j(-0.00112032)
5,90,135	0.00018956+j(0.00379625)	0.00055725+j(-0.00128256)
5,90,140	0.00063816+j(0.00400980)	0.00041364+j(-0.00142738)
5,90,145	0.00107642+j(0.00413078)	0.00024893+j(-0.00155091)
5,90,150	0.00148045+j(0.00417171)	0.00007496+j(-0.00165176)
5,90,155	0.00183419+j(0.00415147)	-0.00009620+j(-0.00173052)
5,90,160	0.00212844+j(0.00409233)	-0.00025304+j(-0.00178919)
5,90,165	0.00235888+j(0.00401713)	-0.00038556+j(-0.00183055)
5,90,170	0.00252390+j(0.00394663)	-0.00048589+j(-0.00185749)
5,90,175	0.00162300+j(0.00389727)	-0.00054813+j(-0.00187253)
5,90,180	0.00265605+j(0.00387961)	-0.00056926+j(-0.00187734)

ตารางที่ 4.4.2 ค่าของสนามภายในที่  $kr=5$  และ  $\sigma=90$  องศา คงที่ (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 5

#### สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

ในโครงการนี้สามารถหาสนามภายนอก สนามภายใน และ อินพุทแอกทิกแดนซ์ของสายที่มีควาวิตีตรงกลมอยู่ด้านหลังช่องเปิด ส่วนการหาค่าเหล่านี้ก็เป็นไปตามความสัมพันธ์ที่หาได้ เนื่องจากการวิเคราะห์สนามใช้ฟังก์ชันทรงกลมจึงต้องใช้ ฟังก์ชันสเฟียริคอลลาร์โมนิก (spherical harmonic function) ซึ่งประกอบด้วย ฟังก์ชันเบสเซล และ ฟังก์ชันเลอจอง จึงมีความจำเป็นต้องเขียนโปรแกรมหาค่าฟังก์ชันเหล่านี้ เพื่อให้การคำนวณเป็นไปอย่างรวดเร็ว และน่าเชื่อถือ จึงต้องเลือกใช้สูตรที่มีข้อจำกัดน้อยที่สุด และสามารถคำนวณได้อย่างสะดวกรวดเร็ว การทดสอบความถูกต้องของฟังก์ชันเหล่านี้ทำได้โดย นำค่าของฟังก์ชันไปเปรียบเทียบกับตารางที่มีอยู่ แต่ถ้าไม่มีตารางก็จะนำฟังก์ชันนี้ไปทดสอบว่าเป็นไปตามคุณสมบัติเฉพาะของฟังก์ชันหรือไม่ หรืออาจเขียนโปรแกรมที่หาค่าฟังก์ชันโดยใช้สูตรหรือวิธีการที่แตกต่างกันซึ่งจะต้องให้ผลเหมือนกัน สำหรับผลการทดสอบพบว่าค่าของฟังก์ชันเหล่านี้มีความถูกต้อง

ในการหาค่าของสนาม และ อินพุทแอกทิกแดนซ์ ถึงแม้ว่าจะพยายามให้การคำนวณเป็นไปอย่างรวดเร็วที่สุด แต่ก็ยังใช้เวลานานเนื่องจากรูปแบบของความสัมพันธ์มีการเรียกใช้ฟังก์ชันต่างๆบ่อยครั้ง ส่วนความถูกต้องทำได้เพียงเขียนโปรแกรม ให้คำนวณตามความสัมพันธ์ที่มีอยู่อย่างถูกต้อง สำหรับการทดลองเพื่อยืนยันไม่ได้อยู่ในโครงการนี้เนื่องจากมีเวลาจำกัดจึงต้องจำกัดขอบเขตของโครงการเอาไว้

กิตติกรรมประกาศ

โครงการฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดีเนื่องจากความกรุณาจาก อาจารย์ โมไนย ไกรฤกษ์ และ อาจารย์ กิตติชัย พาณิชปฐมพงศ์ ที่ให้ความเอื้อเฟื้อในการใช้อุปกรณ์ และ คำแนะนำปรึกษาต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ ทางผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณไว้ในโอกาสนี้ นอกจากนี้ขอขอบคุณเพื่อนๆ ที่ให้กำลังใจและความช่วยเหลือเป็นอย่างดี

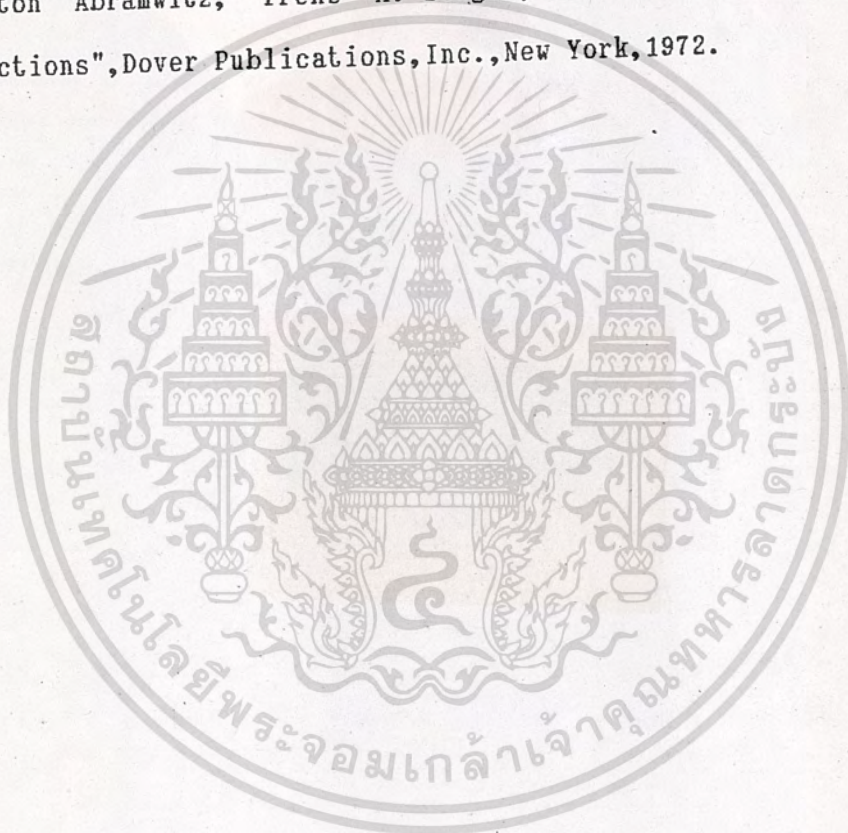
โครงการผู้จัดทำพยายามทำให้มีข้อผิดพลาดน้อยที่สุด ถ้าหากมีข้อผิดพลาดใดๆผู้จัดทำขอรับไว้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หนังสืออ้างอิง

1. Roger F., Harrington, "Time Harmonic Electromagnetic Fields", Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1961.
2. F.W.J, Olver, "Asymptotics and Special Function ", Academic Press, New York, 1974.
3. Milton Abramwitz, Irene A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., New York, 1972.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

๒๕๖๕