



CALCULATION OF ELECTRIC FIELD BY FINITE ELEMENT METHOD



ปริญญาโทนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2534

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

007771

ปริญญาโทปีการศึกษา 2534

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า เจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง

เรื่อง Calculation of Electric Field by Finite Element Method

ผู้จัดทำ

1. นาย ธวัช ดาราดีกุล

2. นาย สรเดช กิจเสวี

3. นาย สุรศักดิ์ ศุภโชคชัย

อ. สมเจตน์ เทียมเมือง อาจารย์ที่ปรึกษา

อ. จงรักษ์ บุญเลี้ยง อาจารย์ที่ปรึกษา

(.....
จงรักษ์ บุญเลี้ยง.....)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Calculation of Electric Field by Finite Element Method

ธวัช ดาราดีกุล 311106

สุรเดช กิจเสวี 311364

สุรศักดิ์ ศุภโชคชัย 311366

อ.สมเจตน์ เทียมเมือง อาจารย์ที่ปรึกษา

อ.จรงค์ บุญเลี้ยง อาจารย์ที่ปรึกษา

ปีการศึกษา 2534

บทคัดย่อ

Finite Element Method เป็นกระบวนการคำนวณที่ทันสมัยและมีประสิทธิภาพที่ใช้ในการแก้ปัญหทางวิศวกรรมที่ซับซ้อน ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมา

หลักการพื้นฐานของวิธีนี้คือ การแบ่งบริเวณที่จะพิจารณาออกเป็น element จำนวนมาก ๆ จากนั้นก็หาค่าคุณสมบัติในแต่ละ element เพื่อนำมาพิจารณาคุณสมบัติรวมของบริเวณ ซึ่งจำเป็นต้องนำ computer มาช่วยในการคำนวณ element จำนวนมาก

ในปฏิญานพจน์นี้ เราจะนำ Finite Element Method มาใช้คำนวณหาสนามไฟฟ้า โดยการกำหนด ค่าขอบเขต และ สมการของสนามจากคุณสมบัติของ electrode จากนั้นก็นำโปรแกรม computer มาคำนวณ และแสดงผลออกมา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Calculation of Electric Field by Finite Element Method

Tawat Daradikul 311106

Suradej Kitseree 311364

Surasak Suppachokchai 311366

Abstract

The Finite Element Method of Analysis is very powerful, modern computation tool that has been used for 10 years to solve very complex structural engineering problems, particularly in the aircraft industry.

The FEA is now gaining wide acceptance in other disciplines such as thermal analysis, fluid mechanics, and electromagnetics.

Because of the basic idea behind the FEA is to divide the structure, body, or region being analyzed into a large number of finite element, or simply element which always use the two-dimension element triangle so it required the use of a digital computer to compute the large number of elements' characteristics.

In this thesis we use this technique in finding the electric field by prescribe the boundary value and field equation from the characteristics of electrodes. Then we use computer program to solve the problem and display the output that make us know the electric field in the area.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทนำ	1
บทที่ 2	หลักเบื้องต้นเกี่ยวกับสนามไฟฟ้า
บทที่ 3	พื้นฐานของสนามชนิดต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับ FINITE ELEMENT METHOD
บทที่ 4	การแก้ปัญหาสนาม 2 มิติ โดยใช้วิธี FINITE ELEMENT METHOD
บทที่ 5	โปรแกรมที่ใช้ใน FINITE ELEMENT METHOD
บทสรุป	61
FLOWCHART	
ตัว PROGRAM FINITE ELEMENT	
ตัว PROGRAM PLOT GRAPH	
ตัวอย่าง INPUT / OUTPUT	
บรรณานุกรม	
กิตติกรรมประกาศ	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
1	แสดง triangle element	62
2	แสดง บริเวณที่พิจารณา	62
3	แสดง การแทนที่พื้นผิวด้วย element	62
4	แสดง การหาพื้นที่ใต้กราฟโดยการแบ่ง ออกเป็น element	63
5	แสดง ข้อแตกต่างในการแทนที่บริเวณทั้งสองแบบ	62
6	แสดง ความแตกต่างของ node ทั้ง 2 วิธี	62
7 a	แสดง node ใน finite different method	63
7 b	แสดง node ใน finite element method	63
8 a	แสดง element ของ finite element method	63
8 b	แสดง element ของ finite different method	63
2.1	แสดง อิเล็กโตรดแบบ plane to plane	64
2.2	แสดง อิเล็กโตรดแบบ sphere to plane	64
2.3	แสดง อิเล็กโตรดแบบ point to plane	65
2.4	แสดง สนามไฟฟ้าทุกจุดในอิเล็กโตรด	65
2.5	แสดง การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้าของอิเล็กโตรด	66
3.1	แสดง B-H curve ของโลหะ SAE-1010	67
3.2	แสดง B-H curve ของ permanent magnet material	67
3.3 a,b,c,d	แสดง ตัวอย่างการคำนวณใน machine	69-70
3.4 a,b,c	แสดง ตัวอย่างการคำนวณใน insulator	71

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1 a,b	แสดง Dirichlet's boundary ใน coaxial line	72
4.2	แสดง triangular element ในแกน x-y	73
4.3a	แสดง triangular element ที่ไม่ต่อเนื่อง	73
4.3b	แสดง triangular element ที่ต่อเนื่องกัน	73
4.4	แสดง แนวศึกษ์ใน coaxial line	74
4.5	แสดง การแบ่ง element ใน rotor slot	74
4.6	แสดง แนวศึกษ์ใน rotor slot	75
4.7	แสดง ตัวอย่างการแบ่งบริเวณเป็น element	75



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
3.1	แสดง ค่า B,H ในรูปที่ 3.1	68
5.1	แสดง โปรแกรมสำเร็จรูปทาง Finite element method	76



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Finite Element Method คืออะไร

หลักการพื้นฐานของ finite element method ก็คือการแบ่งรูปทรงที่ยาก, ซับซ้อน ขนาดใหญ่ ออกเป็น finite element จำนวนมาก element นี้อาจจะเป็น 1, 2 หรือ 3 มิติก็ได้ แต่ที่นิยมที่สุดก็คือ การแบ่งเป็น element 2 มิติ รูปสามเหลี่ยม (two-dimension element) ดังรูปที่ 1 เมื่อรูปทรงถูกแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยมดังกล่าว จำนวนมากโดยไม่ซ้อนกัน เราก็มองเห็นรูปทรงออกมาง่ายขึ้น ในรูป สามเหลี่ยมนี้จะประกอบด้วย 3 nodes (i, j, k) ซึ่งตั้งอยู่บนจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเราจะพูดถึงวิธีการที่จะนำรูปสามเหลี่ยมนี้ไปแทนในรูปทรงที่ซับซ้อน

รูป 2 แสดงถึงรูปทรงที่ซับซ้อนอันหนึ่ง เราจะลองพิจารณาในแง่ของอุณหภูมิที่กระจายอยู่ในรูปทรงนี้ ตัวแปรของสนามที่สนใจในที่นี้คืออุณหภูมิ และเพราะว่าในรูปทรงนี้ประกอบด้วย จุดต่างๆมากมาย ซึ่งอุณหภูมิของจุดเหล่านี้คือสิ่งที่เราสนใจ จากทฤษฎี เรารู้ว่าถ้าเป็นการวิเคราะห์ในระบบปิด เราสามารถคำนวณหาอุณหภูมิที่จุดใดๆ ในระบบนั้นได้ เพราะว่าค่าที่ต้องการจะออกมาในรูปฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ของ x และ y [$T = f(x, y)$] ซึ่งในรูปที่ 2 นั้น เป็นระบบปิด ดังนั้นจึงสามารถหาค่าอุณหภูมิแต่ละจุดได้

แทนที่เราจะพิจารณาอุณหภูมิในทุกๆจุด เราเปลี่ยนมาพิจารณาค่าอุณหภูมิที่จุดเดียวแต่มีจำนวนอนันต์ ซึ่งจุดนี้ก็คือ จุดยอดของสามเหลี่ยมนั่นเอง รูป 3 ทำการแทนที่รูปทรงด้วย element รูปสามเหลี่ยมจำนวนหนึ่ง ซึ่งขอบเขตของรูปทรงเฉพาะที่ node เท่านั้น จากนั้นก็ใช้ interpolation function ในการแปลงค่าการเปลี่ยนแปลงของสนาม (ซึ่งในที่นี้คืออุณหภูมิ) ให้อยู่ในรูปของ global coordinates (ในกรณีคือ x, y) ถ้าเรารู้อุณหภูมิที่ node ต่างๆ ก็จะทำให้วิเคราะห์อุณหภูมิทั้งรูปทรงได้ จากนั้นก็วิเคราะห์ถึงความร้อนที่ไหลผ่านในแต่ละส่วนได้

จากที่กล่าวมาแล้วว่าการคำนวณต้องใช้ computer เข้ามาช่วย ซึ่งข้อมูลที่เรานำมาป้อนแก่เครื่อง computer ได้แก่ นิกัดของแต่ละ node , ข้อจำกัดของ element , ข้อมูลของวัสดุ , ข้อมูลของ boundary condition และในการคำนวณนั้น ถ้าจำนวน element มีมากๆ ค่าความถูกต้อง (accuracy) ก็จะมียิ่งมาก แต่จะเพิ่มเวลาในการคำนวณรวมทั้งค่าใช้จ่ายสูงขึ้นไปด้วย ดังนั้น จึงต้องใช้ประสบการณ์ในการกำหนดจำนวน element ที่จะใช้ให้เหมาะสมที่สุด computer จะทำการคำนวณค่าที่แต่ละ node และแสดงออกมาในรูปของ graphic ซึ่งจะนำไปใช้ในการ design ต่อไป

เอา จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่า finite element method สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาลักษณะเดียวกัน อีกหนึ่งบทให้คิดแหล่งที่มาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การโค้งงอ และความชัน

finite element method จะกำหนดคุณสมบัติเหล่านี้ของแต่ละ node จากนั้นก็นำไปหาค่า stress หรือ bending moments ได้

ในงานทางกลศาสตร์ของไหล , สนามที่แปรไปคือ ความเร็ว และความดัน ของของไหล จากนั้นก็นำไปหา shear stresses ได้

กล่าวโดยสรุป แนวความคิดทาง finite element method ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

- 1) แทนที่บริเวณที่พิจารณาด้วย finite element (discretization)
- 2) interpolating polynomials อธิบายการแปรของสนามในแต่ละ element

ที่นี้ลองมาดูความสำคัญและประโยชน์ของ discretization ในอดีต นักวิทยาศาสตร์ประสบปัญหาในการหาค่าของ รูปทรงที่แปลกและซับซ้อน แต่โดยอาศัยการ discretization ทำให้นักวิทยาศาสตร์เหล่านั้นแก้ปัญหาได้ ตัวอย่างเช่น

ในการหา พท. ใต้กราฟของ $f(x)$ ในรูป 4 a ในอดีตนั้นไม่สามารถหาค่าได้ แต่โดยวิธีการ discretization ก็ทำการแทน พท. ด้วยรูปสี่เหลี่ยมเล็กหลายรูป ดังรูป 4 b แล้วทำการคำนวณค่าสี่เหลี่ยมแต่ละรูป จากนั้นรวมกัน ก็จะแทนค่าประมาณของ พท. ใต้กราฟได้ และจากรูป 4 c ก็เป็นการทำลักษณะเดียวกัน แต่ในรูป 4 b จะได้ค่าประมาณที่ต่ำกว่าค่าจริง ส่วนรูป 4 c จะได้ค่าประมาณที่มากกว่าค่าจริง และเราสามารถสรุปได้อีกว่า ถ้าเรายิ่งแบ่งเป็นสี่เหลี่ยมมากรูปเท่าไร ค่าประมาณที่ได้ก็จะใกล้เคียงกับค่าจริงมากขึ้น

อีกตัวอย่างหนึ่ง คือ ในการหาเส้นรอบวงของวงกลม ดังรูปที่ 5 ก็ทำการแทนที่ด้วยรูปเหลี่ยม จากนั้นก็วัด แล้วก็จะได้ค่าประมาณของเส้นรอบวงได้ ซึ่งในรูป 5 a ก็ได้ค่าที่ต่ำกว่าค่าจริง ส่วนรูป 5 b ก็ได้ค่าที่มากกว่าค่าจริง และถ้าเราแบ่งเป็นรูปเหลี่ยมมากเท่าไร ก็ได้ค่าใกล้เคียงมากเท่านั้น

สรุป การ discretization ก็คือ การแบ่งปัญหาที่ใหญ่ๆ ออกเป็น ขนาดเล็ก และง่าย จำนวนมาก ซึ่งผลรวมของคำตอบของปัญหาเล็กๆเหล่านี้ จะประมาณค่าของคำตอบในปัญหาใหญ่ๆนั้นได้

ซึ่งตัวอย่างการหา พท. ใต้กราฟ ก็คือหลักการของ rectangular element

- การใช้ 1. dimension element นั้นมักใช้ในการพิจารณาเกี่ยวกับ ความยาว , ระยะทาง
- 2. dimension element นั้นมักใช้ในการพิจารณาเกี่ยวกับ พื้นที่
- 3. dimension element นั้นมักใช้ในการพิจารณาเกี่ยวกับ ปริมาตร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของโรงเรียนอัสสัมชัญศรีราชา หากมีการนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ผ่านการอนุญาตจากโรงเรียนอัสสัมชัญศรีราชา ถือว่าผิดกฎหมาย และจะดำเนินการฟ้องดำเนินคดีตามกฎหมายต่อไป

ความสัมพันธ์ระหว่าง Finite Element Method (FEM.) กับ Finite Difference Method (FDM.)

ทั้งสองวิธีนี้ ใช้ในการแก้ปัญหาคณิตเดียวกัน โดยอาศัยหลักการ discretization เหมือนกัน แต่รูปแบบของการ discretization นั้นแตกต่างกัน

พิจารณา element รูปสี่เหลี่ยม

ใน finite difference method จะแบ่งบริเวณที่สนใจเป็น "lumps" จำนวนมากๆ โดยถือว่าแต่ละ lump มีค่าสนามที่เท่ากันทั้ง lump และถือว่า node ของ lump ก็อยู่บริเวณตรงกลางของ lump หรือจุด centroid lump

ส่วนใน finite element method เราแบ่งเป็นบริเวณเป็น element และ node จะอยู่บริเวณมุมของ elements ซึ่งแต่ละ node จะมีคุณสมบัติของสนามที่ต่างกันและใช้ interpolation function ในการหาค่า field ของแต่ละ element ดังนั้นค่า field จะไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับการเลือกใช้ interpolation polynomial

รูปที่ 6 แสดงความแตกต่างของการ discretization ของทั้งสองวิธี

รูปที่ 7 แสดงการ discretization บริเวณหนึ่งโดยทั้งสองวิธี

จากรูปที่ 7 เรามาดูการเข้าใกล้ (approach) ที่แตกต่างกัน โดยมีจำนวน node เท่ากัน

รูป 7 a finite difference method discretization ถ้าเราต้องการหาค่า node ที่บริเวณ boundary ของบริเวณ จะเห็นได้ว่า พท. ของ lump บริเวณ boundary จะเป็นครึ่งหนึ่งของ lump อื่นๆ และ lump บริเวณมุมของบริเวณก็จะเป็น 1/4 ของ lump อื่นๆ และโดยระยะห่างระหว่าง node จะต้องเท่ากัน ถ้าไม่เท่ากัน การคำนวณก็จะยุ่งยากขึ้นไปอีก ส่วนในรูป 7 b finite element method discretization ทุก element จะมีระยะห่างระหว่าง node เท่ากัน ไม่ว่าจะต้องการหาค่า node บริเวณใดก็ตาม และถ้าระยะห่าง node ไม่เท่ากัน ใน finite element method ก็สามารถคำนวณได้ง่ายกว่า

ข้อได้เปรียบอีกอย่างที่สำคัญของ finite element method ก็คือ ในกรณีที่บริเวณเป็นรูปที่ซับซ้อน finite element method discretization จะสามารถประมาณขอบเขตของบริเวณได้ดีกว่า finite difference method ดังรูป 8

ข้อแตกต่างอีกอย่างคือ ใน finite difference method กฎพื้นฐานจะเขียนแสดงที่แต่ละ node ดังนั้น ความสัมพันธ์จึงเป็นเส้นตรง ส่วนใน finite element method

นั้น มีวิธีการ approach ที่มีประสิทธิภาพที่ดี เช่น variation methods, ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ weighted-residual methods

ข้อดีและข้อเสียของ finite element method

ข้อดี

1. สามารถใช้ได้กับรูปทรงที่ซับซ้อนและยากๆ ได้ โดยใช้ element รูปสามเหลี่ยมได้ทุกกรณี
2. สามารถใช้ระยะห่างระหว่าง node ที่แตกต่างกันได้
3. สามารถใช้ได้กับวัสดุประเภท nonhomogenous และ anisotropic ได้
 - nonhomogenous = วัสดุที่คุณสมบัติขึ้นอยู่กับระยะห่าง
 - isotropic = วัสดุที่คุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง
4. สามารถใช้ boundary condition ได้หลายชนิด
5. สามารถใช้ได้กับปัญหาทั้ง LINEAR และ NONLINEAR ได้
6. สามารถใช้ ELEMENT อันดับสูงขึ้นไปได้ง่าย

ข้อเสีย

คือความจำเป็นในการใช้ COMPUTER และ SOFTWARE ที่ยุ่งยากในการคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

หลักเบื้องต้นเกี่ยวกับสนามไฟฟ้า

สนามไฟฟ้า เกิดจากแรงกระทำระหว่างประจุไฟฟ้าด้วยกันในบริเวณนั้น ๆ ถ้าเป็นประจุชนิดเดียวกันก็จะเกิดแรงผลักกัน ถ้าเป็นประจุต่างชนิดกันก็จะดูดกัน

จากกฎของคูลอมบ์ ถ้ามีประจุ Q_1 และ Q_0 มีขนาดเล็กเป็นจุด วางห่างกันระยะ r จะเกิดแรงกระทำต่อกันในแนวทิศทางต่อเชื่อมโงงระหว่างสองประจุนั้น สมมติว่า แรงที่เกิดจาก Q_1 กระทำต่อ Q_0 ซึ่งมีตำแหน่งทางเวกเตอร์เทียบกับ Q_1 เป็น r แรงที่เกิดขึ้นคำนวณได้จากสมการ

$$F_{Q_1 Q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_0 \vec{r}}{r^3} = \frac{Q_0 Q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon r^2}$$

r คือ เวกเตอร์ตำแหน่งสัมพัทธ์ของประจุ Q_0 เมื่ออ้างอิงเทียบกับ Q_1 ซึ่งมี
เวกเตอร์หน่วย $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

ϵ คือ เปรอิมิตติวิตีของตัวกลาง = $\epsilon_r \epsilon_0$

ϵ_0 คือ เปรอิมิตติวิตีของสุญญากาศหรือที่ว่าง = 8.854×10^{-12} F/M

ϵ_r คือ เปรอิมิตติวิตีสัมพัทธ์ (ไม่มีหน่วย)

ถ้ามีประจุ N ประจุกระจายอยู่หลายจุด ซึ่งมีเวกเตอร์ตำแหน่งต่าง ๆ กันเป็น r_i และ r_i เป็นเวกเตอร์หน่วยตามตำแหน่งของ Q_i เมื่อเทียบกับ Q_0 แรงทั้งหมดที่กระทำกับ Q_0 จะเท่ากับผลรวมทางเวกเตอร์ของแต่ละแรงนั้นคือ

$$F_{Q_0} = \sum_{i=1}^N F_{Q_i Q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_0 Q_i r_i}{4\pi\epsilon r_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_0 Q_i}{4\pi\epsilon r_i^2} \hat{r}_i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าแรงที่กระทำต่อประจุ Q_0 คิดเป็นแรงต่อหนึ่งหน่วยประจุ Q_0 ค่านี้ก็คือความ
เครีศคสนามไฟฟ้า

$$E = \frac{F}{Q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{F_{ir}}{4\pi r^2}$$

ซึ่งก็หมายความว่า

$$F = EQ_0$$

ฉะนั้น การเคลื่อนที่ประจุในสนามไฟฟ้าย่อมจะต้องเกิดเป็นแรงขึ้น ซึ่งอาจจะเป็น
งานที่ทำงานออกไปเพื่อเคลื่อนประจุหรืองานที่ได้มา คือ

$$W = Q_0 \int E \cdot ds$$

แต่ถ้านำประจุ Q_0 นี้เคลื่อนที่ไปในสนามไฟฟ้าสถิตย์จนครบรอบเป็นวงปิดโดยไม่ขึ้น
อยู่กับเส้นทาง จะพบว่าเมื่อเคลื่อนครบรอบแล้วผลลัพธ์จะไม่มีการทำงานหรือได้งานมา นั่น
คือ

$$W = Q_0 \int E \cdot ds = 0$$

งานที่ทำเพื่อเคลื่อนประจุติดต่อหนึ่งหน่วยประจุ Q_0 ค่าที่ได้เรียกว่าความต่างศักย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$V = \frac{dw}{Q_0} = -E \cdot ds$$

$\leftarrow Q_0$

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V(A) - V(B) = V_{AB}$$

เนื่องจากพิจารณาเป็นสนามไฟฟ้าสถิตย์ ($\nabla \times \mathbf{E} = 0$) ฉะนั้นเวกเตอร์สนามไฟฟ้า
อาจหาได้จากเกรเดียนต์ศักย์ไฟฟ้า คือ

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } V = -\nabla V \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right) \end{aligned}$$

ประการสุดท้ายโดยอาศัยสมการที่สี่ของแมกซ์เวลล์ ในตัวกลางที่เป็นเนื้อเดียวยวตลอค
และไอโซโทรปิก จะได้ POISSON'S EQUATION

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= -\rho \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\rho \end{aligned}$$

ในกรณีที่ไม่มีประจุในปริมาตรนั้น นั่นคือ $\rho = 0$ จะได้ LAPLACE'S EQUATION
คือ

$$\nabla^2 V = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
ในการสร้างสนามไฟฟ้านั้นเพื่อศึกษานั้น เราจะป้อนไฟฟ้าเข้าไประหว่างขั้วอิลอค



โทรศ 2 ขั้ว ซึ่งจะเกิดสนามไฟฟ้าระหว่างขั้วอิเล็กโทรด ลักษณะต่างกันแล้วแต่ชนิดของอิเล็กโทรด ซึ่งจะแบ่งเป็นดังนี้

1. สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ (UNIFORM FIELD) หมายถึง สนามไฟฟ้าทุก ๆ จุดระหว่างอิเล็กโทรดเท่ากัน โดยมีลักษณะอิเล็กโทรดเป็นแบบ PLANE TO PLANE ดังรูปที่ 2.1

โดยสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\frac{\phi}{r} = 0$$

$$\frac{\phi}{z} = 0$$

LAPLACE' EQUATION ในระบบคาร์ทีเซียน คือ

$$\Delta\phi = \text{DIV grad } \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

เมื่อพิจารณาจะพบว่า ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของศักย์ไฟฟ้าในแนวแกน y และ z ถึงสมการจะย่อเหลือเพียง

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

ฉะนั้น
$$\frac{\phi}{x} = K_1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อใส่เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$(x=0) = V_1$$

$$(x=d) = V_2$$

จึงหาค่าคงตัว K_1 และ K_2 ได้

$$(0) = K_2 + V_1$$

$$(d) = K_1 d + V_1 = V_2$$

จะได้ $K_1 = \frac{V_2 - V_1}{d}$

$$(x) = \frac{V_2 - V_1}{d} x + V_1$$

และ $E(x) = -\text{grad} \cdot (x)$

$$= -\frac{d\phi}{dx}$$

$$= -\frac{(V_2 - V_1)}{d} x$$

$$= \frac{V_1 - V_2}{d} x$$

เนื่องจาก $V_1 - V_2 = V$

ดังนั้น

$$E(x) = \frac{V}{d} x$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 2. สนามไฟฟ้าที่ไม่สม่ำเสมอเล็กน้อย (SLIGHTLY NONUNIFORM FIELD) นำไปใช้
 หมายถึง สนามไฟฟ้าระหว่างอิเล็กโทรดแต่ละจุดมีค่าแตกต่างกัน แต่ไม่มากนักขึ้นอยู่กับค่า

หนึ่งของจุดนั้น ซึ่งมีลักษณะของอิเล็กโตรดเป็นแบบ SPHERE TO PLANE เป็นต้น ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 2.2

อาจคำนวณได้ดังนี้

$$E_{max} = \frac{V}{d}$$

เมื่อ คือ แฟลคเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีค่าดังนี้

$$= \frac{E_{av}}{E_{max}} \leq 1$$

โดยที่

$$E_{av} = \frac{V}{d}$$

ถ้าเราหาค่าสนามไฟฟ้าได้ทุกจุดในอิเล็กโตรดชนิดนี้จะได้ดังรูปที่ 2.3

3. อิเล็กโตรดมีสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอสูง (HIGHLY NONUNIFORM FIELD) หมายถึง สนามไฟฟ้าระหว่างอิเล็กโตรดที่มีค่าสนามไฟฟ้าสูงที่บริเวณใกล้กับผิวอิเล็กโตรดที่มีพื้นที่น้อยที่สุด เมื่อระยะห่างจากผิวอิเล็กโตรดสนามไฟฟ้าจะลดลงอย่างรวดเร็ว ลักษณะอิเล็กโตรดชนิดนี้ คือ POINT TO PLANE ดังรูปที่ 2.4

เมื่อเราทำการเปรียบเทียบสนามไฟฟ้าของอิเล็กโตรดลักษณะต่าง ๆ จะได้ดังตามรูปที่ 2.5

แต่ในปฏิญานพนธ์นี้ เราจะทำการศึกษาเพียงแต่สนามไฟฟ้าที่สม่ำเสมอเท่านั้น เนื่องจากเป็นพื้นฐานของสนามไฟฟ้าชนิดอื่น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

พื้นฐานของสนามชนิดต่างๆที่เกี่ยวกับ FINITE ELEMENT METHOD

ELECTROMAGNETIC ANALYSIS.

ชนิดของปัญหา

วิศวกรไฟฟ้านั้นจะต้องออกแบบอุปกรณ์ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับสนามไฟฟ้า, สนามแม่เหล็ก หรือสนามแม่เหล็กไฟฟ้า การคำนวณสนามเหล่านี้ และค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสนามเหล่านี้ เช่น POWER INPUT, POWER OUTPUT, LOSSES, EFFICIENCY และ IMPEDANCE สามารถทำได้โดยใช้ FINITE ELEMENT ANALYSIS โดยใช้ เมตริกซ์ (MKS) แทนตัวแปรเหล่านี้

สนามไฟฟ้าสถิตย์ (ELECTROSTATIC FIELD)

สนามไฟฟ้าสถิตย์จะเป็นไปตาม POISSON'S EQUATION และ ค่า POTENTIAL เรียกว่า ELECTRIC SCALAR POTENTIAL ϕ หน่วยเป็น VOLTS และเขียนสมการ POISSON'S EQUATION สำหรับ บริเวณ NONCONDUCTING 2 มิติ ได้ คือ

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dy} \frac{d\phi}{dy} \right) = -\rho \quad (1)$$

ซึ่ง ϵ คือ ค่า DIELECTRIC CONSTANT หรือ ค่า PERMITTIVITY ของวัสดุ และ ρ คือ จำนวนประจุต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ถ้าใน 3 มิติ สมการที่ (1) จะได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dy} \frac{d\phi}{dy} + \frac{d}{dz} \frac{d\phi}{dz} \right) = -\rho \quad (2)$$

และสนามไฟฟ้า E จะเป็นดังนี้

$$E = -\frac{d\phi}{dx} - \frac{d\phi}{dy} - \frac{d\phi}{dz} = -\nabla \phi \quad (3)$$

ในหลาย ๆ ปัญหา ความหนาแน่นประจุ ρ จะมีค่า = 0 และ ϕ ก็จะมีค่า = 0 VOLTS (GROUND) ในบางบริเวณและมีค่า HIGH VOLTAGE ในอีกบริเวณ ตัวอย่างเช่น ในฉนวนแรงสูง และ SWITCHGEAR สมการพลังงาน สำหรับปัญหาทางสนามไฟฟ้าสถิตย์คือ

$$F = \int \left[\frac{E^2}{2} \right] dv - \int \left[\frac{\phi \rho}{2} \right] dv \quad (4)$$

ซึ่งในเทอมแรกคือ พลังงานสะสมของสนามไฟฟ้าสถิตย์ และเทอมที่สองคือ พลังงานของสนามที่ได้รับเข้ามา

STEADY CURRENT FLOW

ก้อาศัย POISSON'S EQUATION โดยดูการไหลของกระแสไฟฟ้าขณะ STEADY ในตัวนำที่ดี สมการใน 3 มิติ คือ

$$\frac{d}{dx} \frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dy} \frac{d\phi}{dy} + \frac{d}{dz} \frac{d\phi}{dz} = 0 \quad (5)$$

ซึ่ง ϵ คือ ค่าความนำไฟฟ้าในวัสดุต่าง ๆ

เมื่อสมการของสนามไฟฟ้า E เป็นดังสมการที่ (3) ความหนาแน่นกระแส J หาได้จากกฎของโอห์ม

$$J = \epsilon E \quad (6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

POWER LOSS ต่อหน่วยปริมาตร P หาได้จาก

$$P = \underline{J^2} \quad (7)$$

ถ้าเรารู้ J และ P ภายในบริเวณที่มีสายไฟ และ BUSBAR เราสามารถรู้ประสิทธิภาพและความร้อนได้

ELECTRODYNAMIC

ปัญหาทั้ง 2 ที่กล่าวมานั้นเกี่ยวข้องกับ สนามไฟฟ้าสถิตย์ สนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาในวัสดุตัวนำ DIELECTRIC เรียกว่า ELECTRODYNAMIC สนามแม่เหล็กจะคิดว่ามีผลต่อ VOLTAGE และ CURRENT เลอ

ในเรื่อง ELECTRODYNAMIC นี้ วัสดุจะมีค่า และ ไม่เท่ากับ 0 ตัวอย่าง เช่น การสูญเสียในตัวเก็บประจุเกิดจากความถี่ของ TAGE ความถี่ f คูณด้วย 2π จะกลายเป็นความถี่เชิงมุม ถ้าค่าความนำ มีค่าน้อยกว่า คูณกับ มากแล้ว ELECTRODYNAMIC ก็ไม่จำเป็นต้องนำมาคิด เราใช้สนามไฟฟ้าสถิตย์แทนได้เลย

LINER MAGNETOSTATIC

สนามแม่เหล็ก B คือ ปริมาณเวกเตอร์เหมือนกับ E B ยังแทนค่าของความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก และมีผลกับอุปกรณ์ทางแม่เหล็กไฟฟ้าอย่างมาก ตัวอย่างเช่น มอเตอร์ไฟฟ้า GENERATOR และ ACTUATORS

B สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ของ กับ H โดย เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$B = \mu H \quad (8)$$

ความสัมพันธ์นี้จะ LINEAR และ เกิดขึ้นเมื่อ μ เป็นค่าคงที่

เช่นเดียวกับที่มีความสัมพันธ์กับ POTENTIAL เรียกว่า VOLTAGE ϕ , B ก็มีความสัมพันธ์กับ MAGNETIC POTENTIAL A, แต่ไม่เหมือนกับ ซึ่งเป็น SCALAR, A จะเป็น เวกเตอร์ เรียกว่า MAGNETIC VECTOR POTENTIAL ความสัมพันธ์ของ A คือ

$$B = \nabla \times A \quad (9)$$

ใน 2 มิติ A จะเป็นตาม POISSON'EQUATION

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\mu} \frac{dA}{dx} + \frac{d}{dy} \frac{1}{\mu} \frac{dA}{dy} = -J \quad (10)$$

ซึ่ง A จะอยู่ในแนวแกน z ของ MAGNETIC VECTOR POTENTIAL และ J ก็อยู่ในทิศทาง z เหมือนกัน

MAGNETODYNAMIC

สนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาสามารถ INDUCE ให้เกิดกระแสไหลในวัสดุตัวนำได้ ถ้ากระแสที่ INDUCE เป็นค่าที่ไม่รู้ แต่มีค่ามากพอที่จะแยกสนามแม่เหล็กออกจากสนามไฟฟ้าสถิตย์ แล้วจะเรียกว่า MAGNETODYNAMIC ในบางปัญหาเราต้องการคำนวณกระแสเหนี่ยวนำ หรือ กระแส EDDY พอดี ๆ กับที่ต้องการรู้ค่าสนามแม่เหล็ก

จากสมการที่ (6) ความหนาแน่นกระแสเหนี่ยวนำ $J_i = E_i$ (11)

ซึ่งสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ E, หาได้จาก FARADAY'S LAW

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีนำไปใช้

$$\nabla \times E_i = -\frac{dB}{dt} \quad (12)$$

แทนค่า สมการที่ (9) จะได้

$$E_r = -\frac{A}{r} \quad (13)$$

สนามไฟฟ้าทั้งหมด คือ สมการ (3) และสมการ (13)

$$E = -\nabla \phi - \frac{A}{r} \quad (14)$$

และ VOLTAGE คือ การINTEGRAL สนามไฟฟ้า E (VOLTS/METER) ตามแนว l:

$$V = \int E \cdot dl \quad (15)$$

ดังนั้น VOLTAGE จะสัมพันธ์กับทั้ง ELECTRIC POTENTIAL ϕ และ MAGNETIC VECTOR POTENTIAL A:

$$V = \phi - \int \frac{A}{r} \cdot dl \quad (16)$$

จะคำนวณหา กระแสเหนี่ยวนำและสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้า จะต้องนำ LOSSES ในการเหนี่ยวนำกระแสรวมเข้าใน FUNCTION F. หรือ F คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$F = \int_V (\frac{B^2}{2\mu} - J \cdot A + i \frac{1}{2} A^2) dv \quad (17)$$
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่ง J คือ ความหนาแน่นของกระแสที่ความถี่เชิงมุม

μ คือ PERMEABILITY

คือ CONDUCTIVITY

สนามแม่เหล็ก และกระแสก็ยังคงเป็นรูป SINE แต่ มีมุม PHASE ต่างกันไป หรือเขียนในรูป PHASOR ได้ สมการ MATRIX จากการ MINIMIZING สมการของ F ในสมการที่ (16) จะยุ่งยาก และใช้เวลานานในการคำนวณ

ELECTROMAGNETIC

เมื่อมีทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเกิดขึ้น จะเรียกว่า สนามแม่เหล็กไฟฟ้า ทั้งสองสนามจะแยกกันคำนวณไม่ได้เพราะมันมีความสัมพันธ์กันอยู่ ตัวอย่างเช่น เสาอากาศจะมี TRANSVERSE ELECTRIC (TE) หรือ TRANSVERSE MAGNETIC (TM) สนามแม่เหล็กไฟฟ้านี้ต้องใช้การกระตุ้นซึ่งขึ้นอยู่กัเวลา

รูปสมการของ สนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะประกอบด้วย เทอมของพลังงานของทั้งไฟฟ้าและแม่เหล็กรวมทั้งสมการเพิ่มเติมอีก ดังนั้น โดยปกติเราจะไม่รู้ค่า A และ ϕ แต่ที่ความถี่สูง ๆ ค่า ϕ จะน้อยมากจนตัดทิ้งได้

ผลของการเกิดขึ้นพร้อมกันของ E และพลังงานของมัน กับ B และ พลังงานของมัน จะทำให้เกิด RESONANCE นั่นคือ ที่ความถี่ค่าหนึ่งจะมีพลังงานจำนวนมากถ่ายไปมาระหว่างสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก สนามแม่เหล็กจะเกิดค่าความเหนี่ยวนำ L สนามไฟฟ้าจะเกิดค่าความจุ C ดังนั้น รูป Finite Element ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าก็จะกลายเป็นวงจร LC ซึ่งจะเกิด Resonance ที่ความถี่ที่เหมาะสม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Element Types

สำหรับ Element ที่จะใช้ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า 2 มิติ นั้น มีทั้งสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม ในแต่ละ Element ของสนามแม่เหล็กจะมี Vector Potential A, กระแสที่ใช้ และกระแสเหนี่ยวนำจะสมมติให้มีทิศทางออกนอกระบบของ Element ต่างกับ Finite Element ทางด้านโครงสร้างเพราะ Finite Element ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า จะต้องพิจารณาที่อากาศและสุญญากาศด้วย ถ้ามีสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าที่มีค่ามากพอเกิดขึ้นบริเวณอากาศหรือสุญญากาศ เราจะต้องแบ่งบริเวณนั้นออกเป็น Finite Element ด้วย เหมือนกับที่ทำในวัสดุอื่น ๆ ในอุปกรณ์ของแม่เหล็กส่วนมากจะมี Airgaps เล็ก ๆ อยู่ระหว่างขั้วโลหะขนาดใหญ่ ดังนั้นในกรณีนี้จึงต้องใช้ Finite Element ที่ยาวและบาง ความถูกต้องในการคำนวณจะขึ้นอยู่กับการแทนที่ gap ได้มากน้อยเพียงใด โดยที่ จะต้องสมมติให้ B มีค่าคงที่ ในบางกรณีจะเกิดค่า B หรือ E ที่บริเวณรอบ ๆ อุปกรณ์แทนที่เราจะพิจารณาอากาศหรือสุญญากาศรอบ ๆ เป็น Finite Element ควรใช้ Boundary แบบเปิดในการคำนวณแทน

คุณสมบัติของวัสดุ

คุณสมบัติที่จำเป็นของวัสดุในทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้า มีอยู่ 3 ประการ คุณสมบัติเหล่านี้ จะพิจารณาโดยใช้รูปของโครงสร้างโมเลกุลของวัสดุ และจะใช้ได้ก็ต่อเมื่อขนาดของวัสดุนั้นใหญ่กว่าโมเลกุลของมันมาก ๆ คุณสมบัติเหล่านี้จะใช้ได้สมบูรณ์กับวัสดุที่เป็นของแข็ง แต่จะใช้ได้ไม่ครบถ้วนกับวัสดุที่เป็นของเหลว, ก๊าซ, Semiconductors หรือ Plasmas คุณสมบัติ 3 ประการนี้ คือ Permeability, Permittivity (Dielectric Constant) และ Electrical Conductivity คุณสมบัติทั้ง 3 นี้ จะเปลี่ยนแปลงไปตามอุณหภูมิ, ความถี่ หรือตัวแปรทางกายภาพอื่น ๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Permittivity จะถูกกำหนดโดยสมการ

$$= \frac{D}{E} \quad (18)$$

ซึ่ง D คือ ความหนาแน่น Flux ไฟฟ้า และ E คือ สนามไฟฟ้า ถ้า D และ E มีทิศทางเดียวกันแล้ว จะเป็น Scalar และถ้า D และ E มีทิศทางต่างกัน จะเป็น Tensor ถ้าอัตราส่วนในสมการที่ (17) เป็นค่าคงที่แล้ว ก็จะเป็นค่าคงที่ด้วย วัสดุส่วนมากจะมีค่า คงที่ เพราะว่าความสัมพันธ์ระหว่าง E และ D เป็น LINEAR โดยปกติค่า ของวัสดุอื่นจะคิดเทียบกับของอากาศ ดังความสัมพันธ์

มีวัสดุบางชนิดที่ D และ E ไม่ LINEAR และ วัสดุเหล่านี้ไม่ค่อยนำมาใช้ในทางวิศวกรรม PERMEABILITY μ ถูกกำหนดโดยสมการที่ (8) อากาศและสุญญากาศมีค่า $\mu_0 = 12.57E-7$ HENRIES/m และค่า ของวัสดุอื่น ๆ ก็จะบอกเทียบกับของอากาศ ดังสมการ μ/μ_0 วัสดุส่วนมากจะมีค่า RELATIVE PERMEABILITY เท่ากับ 1 ค่า RELATIVE PERMEABILITY μ_r ของ TYPICAL STEEL มีค่าเป็นพัน ๆ ถ้าค่า B อยู่ในช่วง LINEAR ของ B-H CURVE

รูปที่ 3.1 และ ตารางที่ 3.1 แสดงถึงความสัมพันธ์ของ B-H ของ TYPICAL STEEL ที่ใช้ในมอเตอร์ไฟฟ้า จะเห็นว่า ความสัมพันธ์จะ NONLINEAR อย่างมาก ที่ค่า B มากกว่า 1.5 TESLAS (T) ขึ้นไป STEEL จะอิ่มตัวที่ 1.5 T ถ้าลด B จะทำให้ค่า H เพิ่มขึ้น แต่สังเกตว่าที่ค่า B สูง ๆ B-H CURVE จะมีค่าเข้าใกล้ค่า PERMEABILITY ของอากาศ ค่าความชันจะไม่เท่ากับศูนย์ แต่จะเปลี่ยนแปลงระหว่างค่าหลายพัน กับ 1

ค่าความนำไฟฟ้า กำหนดโดยสมการที่ (6) อากาศ, สุญญากาศและวัสดุประเภท

ฉนวน จะมีค่าความนำไฟฟ้าเป็นศูนย์, และจะไม่นำกระแสเลย เว้นแต่จะเพิ่มค่า E ให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
สูงจนเกิดการ ARC ตัวนำที่วไป, ทองแดง จะมี $\sigma = 5.8E7$ S/m ที่อุณหภูมิห้องในวัสดุ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารที่ตรงตามที่มีการนำไปใช้
ส่วนมากค่า จะเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ แต่ขึ้นกับค่า E ด้วย ในสารกึ่งตัวนำ ค่า

จะแปรกับทั้งขนาดและทิศทางของ E

STEEL และ เหล็ก มีค่าความนำอยู่ในช่วง $1.E6 - 1.E7$ S/m ถ้า B เปลี่ยนแปลงตามเวลา ถ้าต้องการลด INDUCED LOSSES STEEL จะต้องทำเป็นชั้นบาง ๆ

EXCITATIONS

มี 2 วิธีในการกระตุ้นหรือสร้างสนามแม่เหล็ก : ใช้กระแสไฟฟ้าหรือใช้แม่เหล็กถาวร ความหนาแน่นกระแส J จะสร้างสนามแม่เหล็ก B โดย

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} B = J + \frac{D}{t} \quad (19)$$

ซึ่ง $D = E$ และ ค่าอนุพันธ์เทียบกับเวลา เรียกว่า DISPLACEMENT CURRENT ถ้า DISPLACEMENT CURRENT = 0, สมการที่ (18) จะกลายเป็น POISSON'S EQUATION 2 มิติ สมการ (18) ถ้าไม่คิด DISPLACEMENT CURRENT จะถูก INTEGRATED ทั้งพื้นที่ S จะได้ AMPERE'S LAW :

$$\int H \cdot dl = \int J \cdot ds \quad (20)$$

หน่วยของทางขวาของสมการคือ แอมแปร์

ถ้าจะเพิ่มกระแส, ทางขวามือของสมการ จะเพิ่มขึ้นด้วยโดยเพิ่มจำนวนตัวนำ N ซึ่งนำกระแส I เพราะว่า

$$\int H \cdot dl = NI \quad (21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ ดังนั้น H จะขึ้นกับผลคูณของ N และ I เพื่อให้กระแสมีค่าต่ำ อุปกรณ์ทางแม่เหล็กจะ

มี COIL ซึ่งมีจำนวนสายมาก ๆ

อีกวิธีที่จะสร้าง B คือ ใช้แม่เหล็กถาวร รูปที่ 3.2 แสดง B-H CURVE ของแม่เหล็กถาวรที่ $H = 0$ ค่า B 0 เรียกว่า RESIDUAL FLUX DENSITY B_r ที่ $B = 0$, $H = -H_c$ ซึ่ง H_c คือ COERCIVE FORCE ค่า B ที่สร้างจากแม่เหล็กถาวรเองนั้น จะมีค่าระหว่าง 0 และ B_r ขึ้นกับรูปร่างและสภาพแวดล้อม

บางครั้ง ต้นกำเนิดสนามแม่เหล็ก B นอกอุปกรณ์ก็ต้องพิจารณาด้วย และกระแสหรือค่าแม่เหล็กถาวร ซึ่งสร้าง B จะเป็น UNKNOWN

สนามไฟฟ้า E จะสัมพันธ์กับ A และ ϕ ดังสมการที่ (14) ซึ่งคล้ายกับสมการที่ (3) สำหรับสนามไฟฟ้าสถิตย์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้น การที่จะกระตุ้น E คือ กำหนด A และ/หรือ ϕ การกระตุ้น E อีกวิธีคือ กระตุ้นด้วยประจุไฟฟ้า เช่น ความหนาแน่นประจุไฟฟ้า ρ , ดังสมการที่ (1)

BOUNDARY CONDITIONS

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กมีทั้งมีขอบเขตและไม่มีขอบเขต ตัวอย่างเช่น กระแสที่ไหลในขดลวดในอากาศจะมีสนามแม่เหล็กขยายสู่อินฟินิตี้ ถ้านำ STEEL มาพันรอบ ๆ ขดลวด จะทำให้จำกัดสนาม B ให้อยู่ที่ผิวนอกของ STEEL ได้ ดังนั้น ถ้าต้องการจำกัดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้ FINITE ELEMENT จะต้องนำขอบเขตอนั้นต์มาใช้ด้วย

ค่าขอบเขตจะอยู่ที่ MAGNETIC VECTOR POTENTIAL A และอยู่ที่ ELECTRIC SCALAR POTENTIAL ϕ การบังคับค่า A จะมีผลสนามแม่เหล็ก และจะบังคับค่า ϕ ต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

TWO DIMENSIONAL A

ในปัญหาของพื้นผิว 2 มิติ แนวของ CONSTANT MAGNETIC VECTOR POTENTIAL A เรียกว่า MAGNETIC FLUX LINE แนว FLUX จะมีรูปแบบคล้ายกับที่เกิดจาก เข็มชิวบางวางตั้งอยู่บนพื้นผิว ในเครื่องจักรไฟฟ้าส่วนมาก B จะไหลในแนวระนาบของแผ่น STEEL และค่า FLUX ก็จะมีค่าที่ขอบเขตที่บริเวณผิวนอกของ STEEL FLUX จะวางตัวตามแนวขอบเขต (โดยไม่ได้กัน) โดยให้ $A = 0$ ตลอดค่าขอบเขต

เครื่องจักรไฟฟ้าบางตัวจะมีขั้วเป็นจำนวนเต็ม, บางชนิดเป็นแบบมีครึ่งขั้ว จำนวนของ GRID POINTS จะลดลงได้มากถ้าใน MESH ประกอบด้วย POLE หรือ ครึ่ง POLE ตัวอย่างเช่น MESH ที่ประกอบด้วยครึ่ง POLE จะมี PLUX LINES หนาแน่นกับขอบเขตวงรอบอันหนึ่ง และจะตั้งฉากกับขอบเขตวงรอบอันอื่น ๆ ถ้าไม่มีการบังคับที่ GRID POINT ภายนอก จะแสดงให้เห็นถึงเหตุที่ PLUX LINE ตั้งฉากกับ FINITE ELEMENT MESH BOUNDARY การตั้งฉากนี้เรียกว่า ค่าขอบเขตธรรมชาติ (NATURAL BOUNDARY CONDITION)

ในเครื่องจักรกลไฟฟ้าชนิดที่มีขั้วเต็ม POLES, ขอบเขตของแต่ละ POLE จะมีค่าขอบเขตเป็นช่วง (PERIODIC BOUNDARY CONDITION) สำหรับเครื่องจักรชนิดระนาบหมุนค่าขอบเขตในช่วงจะอยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงขั้ว (r, θ)

$$A(r, \theta_0 + \pi) = -A(r, \theta_0) \quad (22)$$

ซึ่ง θ_0 คือ มุมของ RADIAL BOUNDARY

และ π คือ มุมของ POLE PITCH

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 คำ MULTIPOINT CONSTRAINT (MPC) ปกติเรียกว่า NEGA BOUNDARY
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 CONDITION รูปที่ 3 มีรูปแบบของแนว FLUX แสดงในช่วง 1 POLE PITCH ในเครื่อง

จักชนิดเต็ม POLE รูปที่ 3.3 ยังแสดงอีกว่ารูปร่างของ POLE PITCH จะเป็นรูปร่างเช่นใดก็ได้ ที่รัศมีใด ๆ ค่า RADIAL BOUNDARY จะประมาณ 1 POLE PITCH ดังนั้น ตัว ROTOR อาจจะมีขนาดถึง 1 POLE PITCH จาก STATOR

สรุปว่า ถ้า POLE เป็นจำนวนคี่ จะใช้ NEGA และถ้าเป็นจำนวนคู่จะใช้ POSA ถ้าปริมาณของ STEEL ในรูป FINITE ELEMENT มีค่าน้อยหรือ $= 0$ เราจะใช้ขอบเขตอนันต์ (INFINITE BOUNDARY CONDITION) โดยมากเราจะไม่นิยมพิจารณาอากาศหรือสูญญากาศบริเวณห่างจากอุปกรณ์มาก ๆ การใช้ขอบเขตอนันต์ ก็คือ ล้อมรอบอุปกรณ์ด้วยชั้นของอนันต์ หรือ OPEN BOUNDARY ELEMENT ซึ่งใช้เฉพาะในการขยายรูปร่างออกสู่ที่ว่าง OPEN-BOUNDARY FINITE ELEMENTS แบบปกติจะขยายขอบเขตได้เป็นระยะทาง 1×10^{100} ปีแสง

ELECTRIC POTENTIAL ศักย์ไฟฟ้า

ศักย์ไฟฟ้า ϕ ของสมการ (1) และ (2) มักจะถูกกำหนดให้อยู่ภายในขอบเขตของ GRID POINTS มันจะถูกบังคับให้อยู่ในบริเวณที่รู้ค่า STATIC VOLTAGE เช่น ขั้ว ELECTRODES ทางไฟฟ้าแรงสูงและระนาบ GROUND ใน อุปกรณ์ DC และไฟฟ้า 60 Hz

ขอบเขตภายนอกถ้าไม่ถูกบังคับจะเป็นไปตามค่าขอบเขตธรรมชาติ สภาวะธรรมชาติ คือ เส้นทางของค่าคงที่ของ POTENTIAL ϕ จะปกติเทียบกับค่าขอบเขต ดังนั้น E, GRADIENT ของ ϕ จะเป็น TANGENTIAL กับค่าขอบเขต

ค่าขอบเขตแบบเป็นช่วง บางครั้งจะเหมาะกับ ϕ ตัวอย่างเช่น เครื่องจักรไฟฟ้าแรงสูง ซึ่งมี VOLTAGE เปลี่ยนจากบวกเป็นลบที่ขั้วติดกัน MPCs ก็เหมาะกับ ϕ ไม่ว่าจะ เป็นบวกหรือลบ ขึ้นกับจำนวนขั้วเป็นคี่หรือคู่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ ค่าขอบเขตแบบอนันต์ จะเป็นปกติสำหรับ ϕ ถ้าอุปกรณ์ที่พิจารณานั้นไม่ถูกล้อมรอบด้วย

ตัวนำไฟฟ้าแล้ว ค่า ϕ จะลดลงถ้าเราออกห่างจากอุปกรณ์ที่พิจารณาอยู่

ผลและการตรวจสอบ

ผลจากการคำนวณ สนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยโปรแกรม FINITE ELEMENT จะเป็นค่าของศักย์แม่เหล็ก หรือ ศักย์ไฟฟ้าที่ GRID POINT ในรูปของ FINITE ELEMENT แม้ว่าวิศวกรจะไม่สนใจค่า POTENTIAL แต่ยังมีผลสำคัญว่านั่นที่ตามมา ผลเหล่านี้จะต้องตรวจสอบว่าอุปกรณ์ที่พิจารณามีคุณสมบัติที่น่าพอใจหรือไม่ ซึ่งผลเหล่านี้และที่วิศวกรสนใจมาก ในการตรวจสอบและออกแบบผลิตภัณฑ์ที่ตั้งขึ้น

การเขียนแนวเส้นของศักย์ (CONTOUR PLOTS OF POTENTIAL)

หนทางที่ดูและเข้าใจได้เร็วที่สุดในผลของการวิเคราะห์ทาง FINITE ELEMENT ก็คือการเขียนแนวเส้นของศักย์ที่คำนวณได้ ดังรูปที่ 3

การเขียนแนวเส้นจะแสดงสิ่งแรกคือ ค่าขอบเขตที่ออกแบบไว้เหมาะสมหรือไม่ เช่น ถ้าแนวเส้นส่วนมากวิ่งไปที่ BOUNDARY แสดงว่า ที่ BOUNDARY ไม่ได้ถูกบังคับให้มีค่า $= 0$

ในกรณี สนามแม่เหล็ก 2 มิติ ดังรูปที่ 3 ความหนาแน่นของ A จะเดินอยู่เป็นสัดส่วนกับความหนาแน่น FLUX B ทิศทางของเส้นจะเป็นทิศทางเดียวกับ B ดังนั้น แนวเส้นนี้จะบอกแนวของ FLUX และจะบอกให้ผู้ออกแบบรู้ว่าจะต้องเพิ่ม STEEL ที่ไหนเพื่อป้องกันการอิ่มตัว และลด STEEL ที่ไหนเพื่อเป็นการประหยัดราคาและเนื้อที่

การเขียนแนวเส้นของศักย์ไฟฟ้า ϕ จะทำให้เข้าใจสนามไฟฟ้าสถิตย์ E จากสมการที่ (3) $E = -\nabla\phi$ และดังนั้น E จะมีค่ามากที่สุดที่แนวเส้นติด ๆ กัน ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ ทิศทางของ E จะเป็นทางเดียวกับแนวเส้นของ ϕ

B หรือ E

สนามแม่เหล็ก B และสนามไฟฟ้า E ถูกคำนวณ และแสดงออกมา ค่าของสนามในแต่ละ ELEMENT จะหาได้จาก หาค่า A และ ϕ จากสมการที่ (9) และสมการที่ (14) ซึ่งผลนี้จะช่วยผู้ออกแบบในการตัดสินใจในวัสดุเหล่านั้น เช่น รูปร่างที่เหมาะสมอาจจะต้องเพิ่ม STEEL ถ้า B มีค่ามากกว่า 1.5T และตัด STEEL ออก ถ้า B น้อยกว่า 1.5T เพื่อไม่ให้ STEEL อิ่มตัว

การวัดค่า B ในช่องว่างอากาศ ทำได้โดยใช้ HALL EFFECT PROBES เพื่อเช็คการคำนวณการวัดค่า B ของ STEEL หรือ แม่เหล็กโดยตรงคงทำไม่ได้ ดังนั้น การใช้การคำนวณโดย FINITE ELEMENT จึงจำเป็นมาก

FLUX

ฟลักซ์แม่เหล็ก มีประโยชน์มากในการหาค่า VOLTAGE และ ค่าความเหนี่ยวนำ จากค่า A เราสามารถหาค่า FLUX ระหว่าง 2 จุด ได้อย่างง่ายดาย ค่าจำกัดความของ FLUX แม่เหล็ก คือ

$$= \int B \cdot ds \quad (23)$$

แทนค่าก็จะได้

$$= \int \nabla \times A \cdot ds \quad (24)$$

จากกฎของ STOVES

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$= \int A \cdot dl \quad (25)$$
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่ง N คือ จำนวนรอบขดลวด ถ้า I และ เกิดในขดลวดเดียวกัน จะเรียก L ว่า SELF-INDUCTANCE แต่ถ้าเป็นของขดลวดก็จะเรียกว่า MUTUAL INDUCTANCE

เราสามารถโปรแกรมทาง FINITE ELEMENT ในการคำนวณของ L โดยใช้สมการของ ตัวอย่างเช่น ใน 2 มิติ เราจะหาค่า SELF-INDUCTANCE ต่อหน่วยความลึกของขดลวดได้

$$\frac{L}{d} = \frac{J}{3I^2} \sum_{n=1}^{N_e} (S_n \sum_{k=1}^{N_e} A_k) \quad (30)$$

ซึ่ง

- d : ความลึก
- J : ความหนาแน่นกระแส
- N_e : จำนวน ELEMENT ที่ทำให้เกิดด้านของขดลวด
- S_n : พท. ของ ELEMENT รูปสามเหลี่ยม

ความจุไฟฟ้า C คำนวณได้จาก สนามไฟฟ้า E และพลังงานที่สะสมใน E คือ

$$W_E = \frac{1}{2} \int V / E^2 dv \quad (31)$$

สามารถคำนวณโดยใช้ PROGRAM AOS/MAGNETIC และค่าความจุไฟฟ้ามีความสัมพันธ์ ดังสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$W_E = \frac{1}{2} CV^2 \quad (32)$$

ซึ่ง V คือ VOLTAGE ระหว่างขั้ว ELECTRODE ของตัว C

ความต้านทาน R ใน FINITE ELEMENT นั้น จะใช้ในกรณีที พท. หน้าตัดไม่คงที่ และกระแสที่ไหลจึงจำเป็นต้องหา ซึ่งหาจากสมการ

$$R = \int \frac{1}{\sigma} J^2 \frac{dv}{I^2} \quad (33)$$

ค่าการสูญเสีย (LOSSES)

การคำนวณค่า POWER LOSSES ของอุปกรณ์ทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีความสำคัญ 2 ประการ คือ ข้อแรก LOSSES จะเป็นตัวกำหนด ประสิทธิภาพของอุปกรณ์ ข้อสอง POWER LOSSES เป็นตัวกำหนดความร้อนซึ่งจำเป็นต้องกำจัดไป เพื่อป้องกันไฟไหม้

ใน DC จะเกิด LOSS จากค่า R คือ $I^2 R$ เท่านั้น โดยค่า r ของสายต่าง ๆ จากตาราง เพราะฉะนั้นไม่จำเป็นต้องใช้ FEM. ในขณะนั้น

ใน AC ความถี่สูง จะเกิด EDDY CURREN LOSSES เนื่องจาก มีค่ามากขึ้น ค่า LOSS ต่อ หน่วยปริมาตร คือ $J^2 /$

ในอุปกรณ์แม่เหล็ก AC จะเกิด CORE LOSS ซึ่งประกอบด้วย EDDY CURRENT LOSS และ HYSTERESIS LOSS ซึ่งสัมพันธ์กับ B_c และ H_c ในรูปที่ 2 พท. ภายใน HYSTERESIS LOOP คือ พลังงานสูญเสียในแต่ละ CYCLE

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พลังงาน (ENERGIES)

การตรวจสอบที่ดีวิธีหนึ่งในการวิเคราะห์ FEM. คือ ผลรวมของพลังงานทั้งหมดจะต้องเป็นศูนย์ ตัวอย่างเช่น ในสนามไฟฟ้าสถิตย์

$$\int_V \frac{1}{2} E^2 dv - \int_V [\rho \phi] dv = 0 \quad (34)$$

ซึ่งทางซ้ายมือ คือ พลังงานไฟฟ้าสะสม และทางขวา คือ พลังงานที่ป้อนเข้าที่เชื่อมกับ CHARGE. เติมนำทางขวาไม่รวมพลังงานที่ป้อนเข้าเพื่อบังคับผลต่าง VOLTAGE

แรง (FORCE)

อุปกรณ์ทางแม่เหล็กไฟฟ้าหลายชนิด ถูกออกแบบให้สร้างแรงทางแม่เหล็กไฟฟ้า การคำนวณแรงนี้จะช่วยในการออกแบบ และตรวจสอบในการวัด ในการออกแบบแรง ต้องกำจัดแรงอื่น ๆ ออกไปก่อน

สมการของแรง F คือ

$$F_x = \frac{W}{x} \quad (35)$$

ซึ่ง x คือ ระยะทาง และ W คือ พลังงานที่ได้จากแรงนั้น
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
แรงของสนามแม่เหล็กสถิตย์ หาได้จากสมการ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F_x(x) = \frac{W(x + \Delta x) - W(x)}{\Delta x} \quad (36)$$

ซึ่ง W คือ พลังงานไฟฟ้าสะสม

TORQUE

การคำนวณ TORQUE นั้นสำคัญในการวิเคราะห์ FINITE ELEMENT ของมอเตอร์ไฟฟ้า, GENERATORS, ACTUATORS และ อุปกรณ์ที่หมุน การคำนวณ TORQUE ก็คล้ายกับการคำนวณแรง คือ

$$T(\theta) = \frac{W_e(\theta + \Delta\theta) - W_e(\theta)}{\Delta\theta} \quad (37)$$

ซึ่ง W_e ต้องคำนวณที่ 2 จุด โดยใช้การกระตุ้นครั้งที่ 1, มุม θ มีหน่วยเป็นเรเดียน

ตัวอย่างในการวิเคราะห์ทางไฟฟ้า

ในการคำนวณในตัวอย่างนี้เป็นแบบ ELECTRO STATIC AXISYMMETRIC โดยประจุอิสระ ρ จะมีค่าเป็นศูนย์

ELECTRO STATIC AXISYMMETRIC INSULATOR

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า รูปที่ 3.4 ก. แสดงให้เห็น ฉนวน PORCELAIN วางตัวระหว่างแท่งตัวนำแรงส่งวางไม่วางกรณีใด ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งหากนำไปใช้ในแนวตั้งกับระนาบ GROUND แท่งตัวนำและ GROUND เป็นโลหะ ที่ระนาบ GROUND มีค่า

= 0 VOLTS และที่แท่งตัวนำมีค่า 10 kv DC หรือ AC

สมมติว่า ฉนวน และ อากาศ มีค่าความนำ = 0 การคำนวณ E จึงเป็นแบบ สนามไฟฟ้าสถิตย์ ความรู้เกี่ยวกับ E จะนำไปใช้ในการพิจารณาการ ARC และ CORONA และพิจารณาค่า C ระหว่างแท่งตัวนำกับ GROUND

รูป 3.4ข. แสดงรูปร่างของ AXISYMMETRIC FINITE ELEMENT ที่พัฒนามาจากรูป 3.4 ก. ELEMENT เล็ก ๆ ถูกลำมาแทนในพท. บริเวณระหว่างแท่งตัวนำกับ GROUND ภายในแท่ง ROD และ GROUND ไม่ต้องพิจารณา เพราะ เรากำหนดให้ที่ผิวทั้ง 2 มีค่า 10kv และ 0v และต้องใช้ค่าขอบเขตแบบเปิดในการพิจารณา E ในกรณีนี้

รูป 3.4ค แสดงแนวเส้นของ voltage ที่คงที่ จะเห็นว่าแนวเส้นจะอยู่ชิดกันระหว่างแท่งตัวนำกับ ground แสดงว่ามีค่า E สูงที่บริเวณนี้

บทที่ 4

การแก้ปัญหาสนาม 2 มิติ โดยใช้ FINITE ELEMENT METHOD

1. First order triangular elements for plane problems

บทนำ First order triangular finite elements เริ่มต้นปรากฏตัวขึ้นในงานของวิศวกรรมไฟฟ้าในปี 1968 มันถูกใช้ในการหาผลตอบของปัญหาการแปรียบเทียบของท่อนำคลื่นอย่างง่าย และยังใช้ในงานที่ต้องการหา two-dimensional scalar potentials หรือ wave functions. แต่ในหลาย ๆ งาน first-order elements ถูกแทนที่โดยการใช้อยู่ higher-order element แต่อย่างไรก็ตามก็ยังคงใช้ first-order element ในปัญหาที่มีรูปทรงเรขาคณิตที่ซับซ้อน อย่างเช่น ในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กของเครื่องจักรกลไฟฟ้า หรือการกระจายของโวลเตจ และกระแสในอุปกรณ์ semiconductor

วิธี first-order จะใช้ element สามเหลี่ยม ซึ่งมีรูปทรงสองมิติ ซึ่งเป็นเทคนิคการประมาณค่า ทั้งใช้อย่างมากในงานทางวิศวกรรมไฟฟ้า แล้วต่อจากนั้นก็ใช้คณิตศาสตร์คำนวณและกำหนดค่าขอบเขตหรือมุมของสามเหลี่ยม และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สร้างผลสรุปออกมา

2. Laplace's equation

การแก้ปัญหาจำนวนมากในงานทางวิศวกรรมไฟฟ้าต้องใช้สมการลาปลาซ 2 มิติ ตัวอย่างเช่น การหาคณสมบัติคลื่นของสายส่ง coaxial ที่มีตัวนำเป็นสี่เหลี่ยมของ TEM ดังในรูปที่ 1.1 (a) ต้องการหาศักย์ไฟฟ้าที่กระจายอยู่ในพื้นที่ระหว่างตัวนำ นิจาร์ณาเพียงหนึ่ง

ในสี่ของปัญหาจริงที่ต้องการวิเคราะห์ เพราะว่ามันสมมาตรกัน มี boundary conditions สองชนิดในกรณีนี้ คือ ศักย์ที่ถูกระบุค่าตามผิวของโลหะตัวนำ (Dirichlet conditions) และได้รับค่าศูนย์ตามแกนสามมาตร ค่าศักย์จะเป็นไป

ตามสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.01)$$

ทำนองเดียวกัน ในการวิเคราะห์เครื่องจักรกลไฟฟ้าก็ต้องการที่จะกำหนดการกระจายของศักย์ใน air-gap ดังในรูป 1.1 (b) และเราก็ยังคงใช้สมการลาปลาซอยู่ภายในขอบเขตนี้ ส่วน boundary conditions ก็เหมือนกัน จะกำหนดค่า ศักย์ตามผิวของเหล็ก และต้องมีค่าศูนย์ที่ symmetry planes

เป็นที่รู้ดีว่า พลังงานศักย์ที่น้อยที่สุดนั้นจะเกิดขึ้นเมื่อการกระจายศักย์ในสายส่ง หรือ slot นั้น ต้องมีพลังงานสนามสะสมต่อหน่วยความยาวที่น้อยที่สุด พลังงานที่จะหาได้จาก

$$W(u) = \frac{1}{2} \int \epsilon u / \nabla u / \nabla^2 ds \quad (2.02)$$

ผลคำตอบโดยประมาณของสมการลาปลาซอาจหาได้โดยตรง โดยหลายวิธี หรือใช้วิธี finite difference การแสดงค่าโดยประมาณอาจถูกสร้างขึ้นสำหรับพลังงานสะสม $W(u)$ ซึ่งสัมพันธ์กับค่าศักย์ $u(x,y)$ โดยการสมมติค่าศักย์ u ที่เหมาะสม เป็นฟังก์ชันอย่างง่ายที่ไม่ได้กำหนดสัมพันธ์ที่ พลังงานที่น้อยที่สุดจะกำหนดสัมพันธ์ และกำหนดค่าประมาณให้กับการกระจายศักย์โดยปริยาย

สมมติ $u(x,y)$ เป็นผลตอบแท้จริงของปัญหา ขณะที่ $h(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีผลต่างอย่างพอเพียงกับค่าศูนย์ที่ทุก ๆ จุด boundary ที่ค่าของ u ถูกกำหนดโดย boundary conditions การรวมกันของ $(u+\epsilon h)$ เมื่อ ϵ เป็นตัวแปรสเกลาร์ และมีการกำหนดค่า boundary ที่ u เหมือนกัน พลังงาน $W(u+\epsilon h)$ สัมพันธ์กับการกระจายศักย์สมมตินี้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$W(u+\epsilon h) = W(u) + \int \nabla u \cdot \nabla h dS + \frac{1}{2} \epsilon^2 \int |\nabla h|^2 dS \quad (2.03)$$

แปลงเทอมกลางทางขวาของสมการโดยใช้ green's theorem ได้เป็น

$$W(u+\epsilon h) = W(u) + \epsilon^2 W(h) - \epsilon \int h \nabla^2 u ds + \epsilon \int h \nabla u \cdot \nabla ds \quad (2.04)$$

เทอมที่ 3 จะหายไปตามสมการลาปลาซ $\nabla^2 u = 0$ และเทอมสุดท้ายทางขวาก็จะหายไปเช่นกันที่ทุกจุดบน boundary ในรูป 1.1 ได้เป็น

$$W(u+\epsilon h) = W(u) + \epsilon^2 W(h) \quad (2.05)$$

เทอมขวาสุดในสมการนี้จะเป็นบวกเสมอ $W(u)$ จะเป็นค่าพลังงานที่น้อยที่สุดจริงเมื่อ $\epsilon = 0$ สำหรับฟังก์ชัน h ใด ๆ และ h ต้องหายไปที่ boundary ที่ u ถูกกำหนด และ h ต้องเป็นผลต่างที่น้อยที่สุด

จากสมการ (2.05) พลังงานประมาณที่สมมติ $W(u+\epsilon h)$ ต่างจากพลังงานจริง $W(u)$ โดย error ซึ่งขึ้นกับกำลังสองของ ϵ ถ้าการกระจายศักย์สมมติไม่ต่างจากค่าจริงมากนัก หรือกล่าวได้ว่า ถ้า ϵ นั้นเล็กมาก ค่า error ในพลังงานนั้นจะน้อยกว่าค่า error ในศักย์มาก จุดนี้เป็นจุดที่สำคัญในการพิจารณาในทางปฏิบัติ สำหรับปริมาณจริงที่ต้องการในการวิเคราะห์ทางวิศวกรรมจะสัมพันธ์กับพลังงานบ่อฮอจิมพลีแดนซ์, power losses หรือ พลังงานสะสมเป็นค่าประมาณที่มีความถูกต้องมาก ถ้าผลตอบของศักย์มี error สูงมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. first-order elements

เพื่อที่จะสร้างผลตอบประมาณโดยวิธี finite element อย่างง่าย ขอบเขตของปัญหา จะถูกแบ่งย่อยออกเป็น element สามเหลี่ยมหลาย ๆ รูป ดังเช่นในรูป 4.1 สิ่งสำคัญของวิธีคือ การกำหนดค่าศักย์ u เป็นมาตรฐาน ก่อนภายในแต่ละ element และหลังจากนั้นก็สัมพันธ์กันกับการกระจายศักย์ในหลาย ๆ element โดยที่ให้ศักย์ต่อเนื่องกันไปตลอด boundary

ในรูป 4.2 จะสมมติว่าศักย์เป็นค่าประมาณที่พอเพียง โดยแสดงอยู่ในรูป

$$U = a + bx + cy \quad (3.01)$$

ผลตอบแท้จริงถูกแทนโดยฟังก์ชัน piecewise-planar; smoothly-curved การกระจายศักย์ที่แท้จริงบนแกน $x-y$ ถูกแทนโดยการประมาณ jewel-faceted อย่างไรก็ตามค่าศักย์ตามขอบเขตของสามเหลี่ยมใด ๆ เป็น Linear interpolate ระหว่างค่ามุมยอด 2 จุด ดังนั้น ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปมีจุดยอดมุมร่วมกัน ค่าศักย์จะต่อเนื่องตลอด interelement boundary จะไม่มี gap ในผิว $U(x,y)$ ซึ่งประมาณผลตอบจริงบนแกน $x-y$

สัมประสิทธิ์ a, b, c ในสมการ (3.01) อาจหาจากสามสมการพร้อมกัน โดยการสมมติค่ายอดมุมให้ศักย์ U_1, U_2, U_3 ที่ 3 จุดยอด แทนค่าศักย์ที่จุดยอดทั้งสาม และตำแหน่งของมัน ในสมการ (3.01) จะได้

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.02)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้ดาวน์โหลดเนื้อหานี้และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัมประสิทธิ์ a, b, c หาได้โดยการแก้สมการพร้อมกันในสมการ (3.02) แทนค่า
ผลที่ได้ลงในสมการ (3.01) ได้เป็น

$$U = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (3.03)$$

โดยการรวม x, y และ element ของ coefficient matrix ที่อินเวอร์สเป็น
ฟังก์ชันของตำแหน่งใหม่ สมการ 3.03 อาจเขียนใหม่เป็น

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i \alpha_i(x, y) \quad (3.04)$$

โดยที่

$$\alpha_i = \frac{1}{2A} \{ (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \} \quad (3.05)$$

เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งเชิงเส้นเท่านั้น และ A แทนพื้นที่ผิวของสามเหลี่ยม อีกสอง
ฟังก์ชันที่เหลือก็หาเหมือนกันโดยการเปลี่ยน subscripts จากสมการ (3.05) เราได้
ฟังก์ชันใหม่คือ interpolatory บน 3 ค่ายอดของสามเหลี่ยมที่แต่ละฟังก์ชันจะหาไปที่
ทุกค่ายอด แต่จะเป็น 1 ที่ค่ายอดอันหนึ่ง

$$\begin{aligned} \alpha_i(x_j, y_j) &= 0, \quad i \neq j \\ &= 1, \quad i = j \end{aligned} \quad (3.06)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
พลังงานสัมพันธ์กันกับ element สามเหลี่ยมรูปหนึ่งโดยที่ใช้สมการ (2.02) ขอบ

เขตของการอินทิเกรตคือ ตัว element เอง ค่าเกรเดียนท์ของศักย์อาจหาได้จากสมการ (3.04) คือ

$$\nabla U = \sum_{i=1}^3 U_i \nabla \alpha_i \quad (3.07)$$

ดังนั้น พลังงาน element จะได้เป็น

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \int \rho \nabla U^2 dS \quad (3.08)$$

หรือ จาก (3.07)

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_i U_j \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \quad (3.09)$$

เพื่อความกระชับรัดจะกำหนด เมตริกซ์ element เป็น

$$S_{i,j} = \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j ds \quad (3.10)$$

ที่ subscript ของ element เหมือนกัน สมการ (3.09) อาจเขียนอยู่ในรูป

matrix quadratic เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} U^T S^{(e)} U \quad (3.11)$$

เมื่อ U เป็น column vector ของค่าสอดคล้อง ; T คือ transposition

สำหรับสามเหลี่ยมใด ๆ matrix S จะสามารถคำนวณได้ โดยแทนสมการ (3.05) เข้าไปในสมการ (3.10) ได้เป็น

$$S_{12}^{(e)} = \frac{1}{4A} \{ (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \} \quad (3.12)$$

และจะเหมือน ๆ กันสำหรับ matrix S อื่น ๆ โดยการแทนค่าเข้าไป

4. Element assembly

สำหรับสามเหลี่ยมใด ๆ พลังงาน element อาจจะสามารถคำนวณได้โดยประมาณดังที่ผ่านมาแล้ว พลังงานทั้งหมดที่ได้จากหลาย ๆ element หรือ ผลรวมของพลังงานในแต่ละ element ทั้งหมด

$$W = \sum W^{(e)} \quad (4.01)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปแบบที่เกิดขึ้นจากแผ่นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง อาจจะสร้างสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งขึ้นมา
 ดังนั้น เราสามารถจะพิจารณาต่อเนื่องกันไปเมื่อมีสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งเพิ่มเข้ามาจากที่มี
 อยู่เดิม เพื่อให้ง่ายเข้า สมมติ สามเหลี่ยมหนึ่งรูปที่มีอยู่เดิมประกอบด้วย 1-2-3 ดังในรูป
 4.3 (a) และสามเหลี่ยมที่เพิ่มเข้ามาเป็น 4-5-6 เมื่อค่าดัชนีทั้งสามค่าสัมพันธ์กับแต่ละ
 สามเหลี่ยม

สภาพที่เป็นไปได้ทั้งหมดของคู่ของ element ถูกกำหนดโดย column vector ที่มี
 อยู่ทั้งหมด 6 ค่า ของดัชนีที่สอดคล้อง

$$U_{dis}^T = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6]_{dis} \quad (4.02)$$

โดย subscript "dis" หมายถึง disjoint elements (elements ที่ไม่
 ได้ร่วมกันในทุก ๆ ทาง) พลังงานทั้งหมดของคู่ของ element ได้เป็น

$$W = \frac{1}{2} U_{dis}^T S_{dis} U_{dis} \quad (4.03)$$

เมื่อ

$$S_{dis} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} & & & \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & & & \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & & & \\ & & & S_{44}^{(2)} & S_{45}^{(2)} & S_{46}^{(2)} \\ & & & S_{54}^{(2)} & S_{55}^{(2)} & S_{56}^{(2)} \\ & & & S_{64}^{(2)} & S_{65}^{(2)} & S_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.04)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 เป็นเมตริกซ์ S (the Dirichlet matrix) ของ disjoint pair ของ
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 element เพื่อความกระชับ จะแบ่งส่วนเมตริกซ์

$$S_{dis} = \begin{bmatrix} S^{(1)} & 0 \\ 0 & S^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.05)$$

ในการเชื่อมกันของ elements ค่าสัจยที่ต้องการจะต่อเนื่องตลอด boundary เพราะว่า สัจยในแต่ละสามเหลี่ยมถูกประมาณโดยฟังก์ชันเชิงเส้นของ x และ y ตามแต่ละด้านของสามเหลี่ยม ค่าของมันจะเปลี่ยนแบบเชิงเส้นตามระยะทาง เมื่อได้ค่าสัจยที่ต่อเนื่องตามต้องการ จัดให้สัจยที่ตรงจุดยอดมุมสามเหลี่ยมให้ตรงกัน กล่าวได้ว่า สัจยในรูป 4.3 (b) จะต่อเนื่อง ถ้าสัจยที่จุดยอด 1 และ 6 ถูกทำให้เท่ากัน และสัจยที่จุดยอด 2 และ 4 ก็เช่นเดียวกัน

ความเท่ากันของสัจยถูกแสดงโดยจำนวนโนดสำหรับขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม รูป 4.3 (b) ไม่มีความต้องการความสัมพันธ์พิเศษระหว่างจำนวนโนดสำหรับสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยม จำนวนที่แสดงในรูป 4.3 นั้นกำหนดขึ้นเอง บังคับให้จุดยอดเท่ากันแสดงอยู่ในรูป matrix ที่ rectangular matrix C สัมพันธ์กับสัจยของ disjoint element ไปยังสัจยของ conjoint ของ element

$$U_{dis} = CU_{con} \quad (4.06)$$

โดยที่ subscript ที่กำหนดคือ disjoint และ conjoint ตามลำดับ

จำนวนจุดที่แสดงในรูป 1.3 จะมีรูปสมการเป็น

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \text{dis} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \text{con} \quad (4.07)$$

ในสมการ (4.07) matrix element ที่ถูกเว้นไว้จะเป็นศูนย์เสมอ ที่ลำดับที่ไม่ได้ต่อกันระหว่างจุดยอดที่ติดต่อกัน แทนสมการ (4.06) ลงในสมการ (4.03) พลังงานสำหรับปัญหาที่ต่อเนื่องกันจะได้เป็น

$$W = \frac{1}{z} U_{\text{con}}^T S U_{\text{con}} \quad (4.08)$$

$$\text{ที่ } S = C^T S_{\text{dis}} C \quad (4.09)$$

แทนกลุ่มของ coefficient matrix ของปัญหาต่อเนื่อง สำหรับกลุ่ม ในรูป 4.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$S = \begin{bmatrix}
 \begin{matrix} (1) & (2) \\ S_{11} + S_{00} & S_{12} + S_{04} \end{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) \\ S_{13} & S_{05} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} (1) & (2) \\ S_{21} + S_{40} & S_{22} + S_{44} \end{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) \\ S_{23} & S_{46} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} (1) \\ S_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} (1) \\ S_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} (1) \\ S_{33} \end{matrix} & \begin{matrix} (2) \\ 0 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} (2) \\ S_{50} \end{matrix} & \begin{matrix} (2) \\ S_{54} \end{matrix} & \begin{matrix} (1) \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} (2) \\ S_{55} \end{matrix}
 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

จำนวน disjoint และ conjoint ส่วนใหญ่อยู่ในเทอมของจำนวน local และ global ตามลำดับ

5. Solution of the connected problem

พลังงานของการกระจายโดยประมาณแบบต่อเนื่อง ถูกทำเป็นสูตรในรูปของ quadratic รวมทั้ง column vector ของ nodal potentials เพื่อให้ได้รับผลตอบของสมการลาปลาซ ที่พลังงานสะสมน้อยที่สุดในรูปแบบ finite element ที่ต่อเนื่องกัน เมื่อพลังงานแสดงในสมการ. (4.08) เป็น quadratic ใน nodal potentials มันต้องมีจำนวนน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับแต่ละองค์ประกอบของ potential vector U

เหตุนี้ เมื่อน้อยมาก ก็พอที่จะให้

k หมายถึง potential vector ที่ต่อเนื่องกันทั้งหมด หรือสัมพันธ์กับจำนวนโหนด ใน connected model

การดิฟเฟอเรนเชียลในสมการ (5.01) เกี่ยวกับแต่ละทุก ๆ k ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะที่ไม่บังคับให้น้อยที่สุด ที่คิย์ยอมแปรไปที่ทุก ๆ โหนด อย่างไรก็ตามลักษณะที่ไม่บังคับให้น้อยที่สุด ไม่ได้สอดคล้องปัญหา boundary-value ที่สภาพเริ่มต้นในรูป 4.1 จริงๆ แล้วการไม่บังคับพลังงานให้น้อยที่สุด คือ ไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ที่คิย์เป็นศูนย์ทุก ๆ ที่ ในปัญหา boundary-value ที่ต้องแก้ แน่แน่นอนส่วนของ boundary ต้องกำหนดค่าคิย์ ดังนั้นสับเซตที่แน่นอนของคิย์ที่มีอยู่ในเวกเตอร์ U ต้องสมมติค่าที่ซึ่งคิย์เป็นอิสระต่อการเปลี่ยนแปลง คือ จำนวนแรก ทุก ๆ โหนด ที่กำหนดค่าคิย์ไว้ก่อนเป็นสุดท้าย ในรูป 4.1 (a) เป็นตัวอย่าง โหนดในพื้นที่ระหว่างตัวนำ (ที่คิย์จะถูกกำหนด) จะเป็นจำนวนแรก และทุก ๆ โหนดบนผิวของตัวนำ (ที่คิย์ได้กำหนดไว้แล้ว) เป็นจำนวนที่ตามมา สมการ (5.01) อาจเขียนอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์แบ่งส่วน

$$\frac{W}{U} = \frac{[U_f^T U_p^T]}{[U]} \begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \\ S_{pf} & S_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_p \end{bmatrix} = 0 \quad (5.02)$$

โดยที่ subscript f และ p หมายถึง โหนดที่คิย์เป็นอิสระและคิย์ถูกกำหนดไว้ก่อนแล้ว ตามลำดับ โดยคิย์ที่กำหนดไว้ก่อนแล้วจะไม่เปลี่ยนแปลง ดิฟเฟอเรนเชียลที่เกี่ยวกับมันจะเป็นไปไม่ได้ จะทำการดิฟเฟอเรนเชียลที่เกี่ยวกับคิย์อิสระเท่านั้น คือ

$$[S_{ff} \quad S_{fp}] \begin{bmatrix} U_f \\ U_p \end{bmatrix} = 0 \quad (5.03)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการ (5.03) อาจเขียนใหม่ให้อยู่ในรูป

$$S_{eef} U_e = -S_{efb} U_b \quad (5.04)$$

coefficient matrix ทางด้านซ้ายมือเป็นจตุรัส และ โดยทั่วไปรูปแบบผลตอบของปัญหาจะถูกให้โดย

$$U = \begin{bmatrix} -S_{eef}^{-1} S_{efb} U_b \\ U_b \end{bmatrix} \quad (5.05)$$

ผลคำตอบโดยประมาณที่คำนวณถึงรูปแบบของกลุ่มของค่า nodal potential ใดๆก็ตาม มีนัยสำคัญที่ผลตอบ finite element เป็นลักษณะเฉพาะและกำหนดแน่นอนทุกที่ ไม่ใช่แค่ที่จุดยอดมุมสามเหลี่ยมเท่านั้น กลุ่มของ nodal potential values เป็นการแทนการรวมกันสำหรับผลตอบพื้นผิวราบ ซึ่งให้พลังงานน้อยที่สุด

ภายในแต่ละรูปสามเหลี่ยมค่า local potential ถูกกำหนดไว้ก่อนโดยสมการ (3.01) ดังนั้น ไม่จำเป็นต้องประมาณต่อไปอีกเพื่อได้รับโครงร่างของค่า equipotential เพื่อคำนวณพลังงานสะสมทั้งหมด หรือ เพื่อกระทำการใดที่ต้องการต่อไปอีก เมื่อในวิธีนี้ศักย์ในแต่ละ element เป็น linear interpolate ของค่ายอดของมัน เช่นในสมการ (3.04) equipotential plot จะประกอบด้วยโครงร่างของ piecewise-straight ตัวอย่างเช่น ในรูป 4.4 แสดงถึง equipotential contour plot สำหรับปัญหาของรูป 4.1 (a)

6. Poisson's equation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า การกระจายของแหล่งกำเนิดเกิดขึ้นภายในขอบเขตสนาม หรือในทำนองคล้ายคลึงไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามเผยแพร่แบบสงวนสิทธิ์และต้องอ้างอิงถึงชื่อของเอกสารที่นำมาไปใช้กัน แต่มีผลต่างของการกระจายของแหล่งกำเนิดที่เห็นได้ชัด เช่นในรูป 4.5 แสดงถึง

ต้องนำเครื่องจักรกลไฟฟ้าที่วางตัวอยู่ใน slot สามารถแสดงให้เห็นสนามแม่เหล็กใน slot สามารถอธิบายได้โดย magnetic vector potential A โดยใช้รูปแบบเวกเตอร์ของสมการปัวซอง

ถ้า slot และตัวนำถูกสมมติให้มีความยาวมาก ทั้งความหนาแน่นกระแส J และ magnetic vector potential A มีองค์ประกอบอยู่ในทิศตามยาวเท่านั้น สมการปัวซองแบบเวกเตอร์ ลดรูปลงเป็นแบบสเกลลาร์ที่คุ้น

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J \quad (6.01)$$

ถ้า machine iron ถูกสมมติให้เข้าขั้วมิได้ไม่จำกัด โดยปกติ A ที่ตรงแนวกลาง slot และที่ผิว iron ทั้งหมดต้องเป็นศูนย์ และค่าคงที่ใด ๆ ของ A กำหนดเป็น flux line และ boundary condition สำหรับปัญหาจะถูกกำหนดไว้ชัดเจน ปัญหาที่แก้ไขโดย สมการปัวซอง คือ ฟังก์ชันของพลังงานที่น้อยที่สุด

$$F(\mu) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu} |\nabla A|^2 dS - \mu_0 \int \mu J dS \quad (6.02)$$

เพื่อแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันนี้เป็นคำตอบจริงที่น้อยที่สุดของสมการ 6.01 สมมติ A เป็นผลคำตอบที่ถูกต้อง และ เป็นฟังก์ชันดัดเพื่อเรนเงิลที่จะหาไปที่ทุกจุด boundary ที่ A ถูกกำหนดไว้ก่อน

คำนวณ

$$F(A + \epsilon) = F(A) + \epsilon \int \nabla A \cdot \nabla dS - \epsilon \mu_0 \int J \cdot dS + \frac{1}{2} \epsilon^2 \int \frac{1}{\mu} |\nabla|^2 dS \quad (6.03)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ โดยการให้ ทฤษฎีของ Green เทอมที่สองทางขวาของสมการอาจแปลงเป็น

$$\int \nabla A \cdot \nabla dS = \int \underline{A} dS - \int \nabla^2 A dS \quad (6.04)$$

n

การอินทิกรัลทางขวาจะหายไปเมื่อ หรือ A เป็นศูนย์ที่ทุก ๆ จุดตาม boundary เมื่อ A เป็นผลตอบที่ถูกต้องของสมการ (6.01) แปลงสมการ (6.04) ทางขวา เทอมที่ surface - integral เป็น

$$-\int \nabla^2 A dS = \mu_0 \int J dS \quad (6.05)$$

ฟังก์ชันของสมการ (6.03)

$$F(A+\epsilon) = F(A) = \frac{1}{2} \int \nabla A / \nabla A / dS \quad (6.06)$$

โดยที่อินทิกรัลทางขวาเป็นบวกเสมอ มันจะเห็นได้ชัดว่าจะน้อยที่สุดเมื่อ Q มีค่าเป็น ศูนย์ และ F(u) มีค่าน้อยที่สุด สำหรับ U = A เป็นผลคำตอบของสมการ (6.01)

พลังงานสนามจะยังคงคำนวณโดยรูปแบบของ

$$W = \frac{1}{2} \int \nabla A / \nabla A / dS \quad (6.07)$$

หรือรูปแบบที่สมมูลกันคือ

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int A J dS \quad (6.08)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ค่าของ $F(A)$ น้อยที่สุด, F จะมีค่าเป็นลบมีขนาดเท่ากับพลังงานสะสมทั้งหมด error term ในสมการ (6.06) จะขึ้นกับกำลังสองของตัวแปร • เมื่อใกล้ผลตอบที่ถูกต้องค่า • จะเล็ก

7. Modelling the source term

ในการสร้างรูปแบบ finite element ของปัญหาแบบใช้สมการปัวซอง วิธีดำเนินการจะคล้ายคลึงกันกับการใช้สมการลาปลาซ ขอบเขตของปัญหาก็ยังเป็นรูปสามเหลี่ยม ดังในรูป 4.5 เพื่อเทอมแรกในฟังก์ชันของสมการ (6.02) เหมือนกับรูปแบบต่อเนื่องของสมการ (4.08) เทอมที่สองในสมการ (6.02) ก็กระทำในลักษณะเดียวกันแต่ต่างกัน ในรายละเอียดบางส่วน

สำหรับสามเหลี่ยมรูปหนึ่งใด ๆ ค่าความหนาแน่นของกระแส $J(x, y)$ จะถูกกำหนดไว้ในทำนองเดียวกับค่าศักย์ (potential)

$$J(x, y) = \sum_{i=1}^3 J_i \alpha_i(x, y) \quad (7.01)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ด้านขวามือ คือ ค่ามอดของ ความหนาแน่นกระแสภายในสามเหลี่ยม เราจะสามารถรู้ค่าเหล่านี้ได้ เมื่อกำหนดค่าความหนาแน่นของกระแสในฟังก์ชันก่อน source integral อาจเขียนได้เป็น

$$\int A J dS = \sum_{i=1}^3 \int A_i \alpha_i dS J_i \quad (7.02)$$

โดยที่ค่าศักย์ที่ขอบเท่านั้นที่ยังไม่รู้ สำหรับแต่ละ element ให้ เมตริกซ์จตุรัสลำดับ 3 ถูกกำหนดโดย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
3 ถูกกำหนดโดย
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$T_{i,j}^{(e)} = \int \alpha_i \alpha_j dS \quad (7.03)$$

ดังนั้น

$$\int A J dS = A^T T^{(e)} J \quad (7.04)$$

supscript e คือ element ขอบเขตในการอินทิเกรตคือ element นั้น ๆ

สำหรับกลุ่ม disjoint ของ element สามเหลี่ยม ฟังก์ชันของสมการ (6.02) จะได้เป็น

$$F(A) = \frac{1}{2} A_{dis}^T S_{dis} A_{dis} - \mu_0 A_{dis}^T T_{dis} J_{dis} \quad (7.05)$$

การต่อเนื่องกันของ element ถูกนำมาใช้เพื่อต้องการต่อเนื่องของศักย์และเตตน จะมีการแปลงสูตรเหมือนกับสมการ (4.06) ดังนั้น

$$F(A) = \frac{1}{2} A^T S A - \mu_0 A^T C^T T_{dis} J_{dis} \quad (7.06)$$

การทำให้ $F(A)$ น้อยที่สุด โดยเทียบกับแต่ละทุก ๆ vertex potential โดย

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = 0 \quad (7.07)$$

ได้สมการเมตริกซ์

$$S^* A = \mu_0 C^T T_{dis} J_{dis} \quad (7.08)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
ที่รูปแบบ finite element ของปัญหา boundary-value โดยทั่วไปไม่มีความจำ

เป็นที่ source densities ต้องต่อเนื่องคร่อม interelement boundaries ดังนั้น
ไม่จำเป็นต้องแปลงสูตรฝั่งขวามือต่อไปอีก เว้นแต่ในกรณีพิเศษ

เมื่อการดิฟเฟอเรนเชียลไม่สามารถทำได้ในสมการ (7.07) ที่เกี่ยวกับศักย์ที่คงที่
เมตริกซ์ S' ของสมการ (7.08) เป็นสี่เหลี่ยม มันมีหลายแถวที่ไม่บังคับโนดในปัญหา และ
หลาย ๆ column ที่มีโนดใน model เช่นในสมการ (5.03) เวกเตอร์ของ node
potentials จะถูกแบ่งใหม่โดยที่ unconstrained potentials ทั้งหมดอยู่ข้างบน
และ prescribed potentials ทั้งหมดอยู่ในส่วนล่าง เมตริกซ์ S ถูกแบ่งเป็นส่วน
ได้เป็น

$$[S_{ff} \quad S_{fp}] \begin{bmatrix} A_f \\ A_p \end{bmatrix} = \mu_0 C^T T_{dis} J_{dis} \quad (7.09)$$

f และ p หมายถึง free และ prescribed potential values ตามลำดับ

$$S_{ff} A_f = \mu_0 C^T T_{dis} J_{dis} - S_{fp} A_p \quad (7.10)$$

ผลตอบของสมการนี้กำหนดค่า node potential ที่ไม่รู้ค่า ดังนั้น จึงต้องแก้ปัญหา
สิ่งที่น่าสนใจคือ ฝั่งขวามือของสมการ (7.10) จะร่วมกันอยู่ระหว่าง source
term ของสมการดิฟเฟอเรนเชียล (the inhomogeneous part of equation) กับ
ผลของค่า boundary ที่กำหนดไว้ก่อน (the inhomogeneous part of boundary
conditions) ดังนั้น พื้นฐานจะไม่แตกต่างกัน ระหว่างการแทนสมการดิฟเฟอเรนเชียล
nonhomogeneous กับ inhomogeneous boundary conditions

8. Practical handling of boundary conditions

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
ปัญหา finite element ที่ในสมการ (5.03) และ (7.09) จำนวนมีความจำ

เป็นในปัญหาที่มีรูปแบบพิเศษหลาย ๆ อัน เพื่อที่จะจัดการกับสมการ

fixed potentials ทั้งหมด ต้องเป็นจำนวนสุดท้าย (numbered last) potential free ที่แปรได้ ต้องเป็นจำนวนแรก (numbered first)

ในทางปฏิบัติ มันไม่สะดวกที่จะเปลี่ยนลำดับจำนวนใหม่ หรือ แบ่งเมตริกซ์ออกเป็น ส่วน ๆ การลำดับจำนวนใหม่และการแบ่งส่วนเป็นเพียงจุดประสงค์ที่ต้องการอธิบายเท่านั้น ในการคำนวณจริงมันไม่จำเป็น

พิจารณาปัญหา two-element อย่างง่ายที่แสดงอยู่ในรูป 4.3 (b) อีกครั้ง สมมติว่า potential 3 และ 4 ถูก fixed ค่า ส่วน 1 และ 2 ปลอยอิสระ กล่าวได้ว่าการเปลี่ยนแปลงจำนวนเป็นไปตามความสอดคล้องกับวิธีการที่ใช้ข้างบน ตามสมการ (7.09) สมการเมตริกซ์ถูกแก้ไขให้อยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (8.01)$$

ไม่มีมากนักที่อาจกล่าวได้ว่า พิจารณา high-numbered potentials ซึ่งถูกบังคับต้อง fixed ค่า ดังนั้น สมการที่ใช้อธิบายโดยทั่วไปอยู่ในรูปแบบเดียวกัน

$$D \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{33} & \\ & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (8.02)$$

โดยที่ D เป็นจตุรัสไวด์ ๆ หรือ diagonal matrix สมการ (8.02) อาจกล่าวว่าเป็นเอกสารที่เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า มี fixed potentials มีอาจารย์ร่วมกับสมการ (8.01) เป็นไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & & \\ S_{21} & S_{22} & & \\ & & D_{33} & \\ & & & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{13} & -S_{14} \\ -S_{23} & -S_{24} \\ & D_{33} \\ & & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (8.03)$$

ต่อไป กำหนดจำนวนชั้นสำหรับ potentials ไม่จำเป็นต้องแปรหรือ fix ค่า potential ในลำดับพิเศษใด ๆ ตัวอย่าง ให้จุดยอดเป็น 1-2-3-4 อาจกลับเป็น 2-4-1-3 ดังนั้น fixed potentials ตอนที่อยู่ที่โนด 1 และ 3 สมการรูป (8.03) จะมีรูปเป็น

$$\begin{bmatrix} D_{11} & & & \\ & S_{22} & S_{24} & \\ & & D_{33} & \\ & S_{42} & S_{44} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & & & \\ -S_{21} & -S_{23} & & \\ & & D_{33} & \\ -S_{41} & -S_{43} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (8.04)$$

matrix elements ที่เว้นว่างไว้ข้างบนเป็นศูนย์ทั้งหมด

โดยที่ สมการ (8.04) มี rows และ columns มากกว่า สมการ (8.01) ดังนั้น ค่าผลตอบจะสูงกว่า ไม่มีความจำเป็นสำหรับจำนวนของ vertices และ potentials ใด ๆ มันอาจมีจำนวนเท่าที่ต้องการ

ในทางปฏิบัติ diagonal matrix D ข้างบน ส่วนใหญ่จะเป็นยูนิท เมตริกซ์

(unit matrix) $D = I$ เมตริกซ์ S ที่พบทั้งขนาดเล็กมากหรือขนาดใหญ่มาก ทั้งหมดจะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้เรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ถูกเปรียบเทียบอย่างเดียวกัน ดังนั้น การคำนวณ round off-error ที่พิจารณาอาจทำไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ ให้การเลือก D ต่างกัน แต่ส่วนใหญ่จะใช้ที่ $D = I$ มากกว่า สมการ (8.04) จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & S_{22} & S_{24} & \\ & & 1 & \\ & S_{42} & S_{44} & \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -S_{21} & -S_{23} & \\ & & 1 & \\ & -S_{41} & -S_{43} & \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix}
 \quad (8.05)$$

สมการ (8.05) แสดงให้เห็นว่า การตั้งสมการ finite element และ boundary conditions สามารถทำพร้อมกันได้โดยง่าย ที่แต่ละ element matrix ถูกสร้างขึ้น จำนวน row และ column ถูกนำมากำหนดว่าสอดคล้องกับ free หรือ fixed potentials เมตริกซ์ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ free potentials จะอยู่ในรูปแบบธรรมชาติ ค่า fixed potential ถูกกระทำโดยการแทน row และ column ของ unit matrix บนฝั่งซ้าย

9. Programming and data structures

จุดเด่นของวิธี finite element โดยการใช first-order triangular element ลาดิสความยืดหยุ่นทางเรขาคณิตเป็นหลักใหญ่ ไปเหมือนวิธีการทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ วิธี finite element ไม่ได้จำกัดอยู่แค่ในรูปทรงเรขาคณิตเท่านั้น โดยการใช element สามเหลี่ยม ตัวอย่าง ขอบเขตที่เป็น two-dimensional ใด ๆ อาจกระทำโดย boundary ที่ประมาณโดยส่วนที่เป็นเส้นตรงอนุกรมกัน

การประมาณผลตอบของปัญหาโดยวิธี finite element อาจพิจารณาเป็น 5 ชั้น

ตอน ประกอบกัน

- เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
1. สร้างโครงข่าย finite element แทนขอบเขตของปัญหาลงใน elements ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 2. กำหนด sources และ กำหนดค่าของ boundary ของปัญหา

3. สร้าง matrix ขึ้นแทนแต่ละ element
4. รวมกลุ่มของ elements ทั้งหมด โดยการแปลง matrix เช่นสมการ (4.09) และการกำหนด boundary conditions
5. ผลคำตอบของสมการพีชคณิต
6. แสดงและคำนวณผล

ในความเป็นจริงเรขาคณิตศาสตร์จะซับซ้อน เมื่อปัญหาของ boundary-value ถูกอธิบายเป็น disjoint set ของ element ในขั้นตอนแรก ขั้นตอนที่ตามมาทั้งหมดจะรวมกันเป็นระบบเพื่อสร้างผลตอบที่ต้องการ

การแทนเมตริกซ์ของแต่ละ element สามเหลี่ยม สามารถทำได้โดยการหาค่าแห่งมุมยอดของสามเหลี่ยมที่ต้องการ โดยไม่ต้องมีความรู้เกี่ยวกับธรรมชาติของโครงข่าย แต่เราต้องมีความรู้เกี่ยวกับกลุ่มและการกำหนด boundary conditions ซึ่งเป็นโครงข่ายของการจัดการในสามเหลี่ยมที่ต่อเนื่องกัน

กลุ่มของ matrix ในแต่ละ element จะสร้าง global matrix ขึ้นแทน โดยต้องการแปลงสูตรต่อเนื่องจากสมการ (4.05) - (4.06)

ข้อมูลทั้งหมดที่ต้องการจะประกอบอยู่ใน connection matrix C อย่างไรก็ตาม จะเห็นว่าไม่สามารถเก็บ connection matrix ในรูปแบบของ สมการ (4.07) และ disjoint global matrix ในรูปแบบที่ได้จากสมการ (4.04) สำหรับ both matrixes จะมีรูปแบบพิเศษกว่า และ จะประกอบด้วยสัดส่วนที่เป็นศูนย์ทั้งหมดสูง โดยได้จากสมการ (4.10) ต่อมาอาจอยู่ในรูป

1	2	3	1.000
2	4	3	1.000
3	4	5	0.000
4	7	6	0.000
4	6	5	0.000

กลุ่มจะดำเนินการโดยการทำเป็นศูนย์กับ matrix S, ตั้ง element matrix สำหรับสามเหลี่ยม 1-2-3, เพิ่ม 9 จำนวน ขึ้นแก่ S แล้วคำนวณ element matrix สำหรับสามเหลี่ยม 2-4-3, เพิ่มแก่ S,... จนกระทั่ง matrix S ทั้งหมดเป็น assembled การคำนวณเมตริกซ์ที่แทนของแต่ละ element ต้องการความรู้เกี่ยวกับคู่ลำดับของจุดยอดของมัน

สำหรับจุดประสงค์นี้ 1-by-M arrays ของคู่ลำดับ x,y ต้องการ

0.000	0.000
1.000	0.000
0.000	4.000
1.000	4.000
0.000	4.500
3.000	4.500

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในที่สุด boundary condition ถูกใส่เข้าไป สำหรับความมุ่งหมายนี้ มันต้องกำหนดจำนวน boundary-point และ ค่า boundary ที่สอดคล้องอย่างเพียงพอ

6	0.000
7	0.000

ส่วนในเรื่องของโปรแกรมจะอธิบายในบทต่อไป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

โปรแกรมที่ใช้ใน FINITE ELEMENT METHOD

การพิจารณาในส่วน HARDWARE

ในอดีต วิศวกรต้องประสบปัญหาในการหาคำตอบของผลการวิเคราะห์ต่าง ๆ ซึ่งวิศวกรจึงต้องหาอุปกรณ์ซึ่งเหมาะสม ในการวิเคราะห์ทาง FINITE ELEMENT เครื่องมือนี้ต้องประกอบด้วย HARDWARE และ SOFTWARE ตัว HARDWARE นั้นมีตั้งแต่ เครื่องคิดเลข จนถึง SUPERCOMPUTERS ในช่วง 30-40 ปีที่ผ่านมา การพัฒนาเทคนิคทางอิเล็กทรอนิกส์ได้เพิ่มอัตราส่วนของคุณสมบัติกับราคาขึ้นมาก จึงทำให้การใช้ COMPUTER ใน FINITE ELEMENT ANALYSIS กว้างขวางขึ้นมาก

ในช่วงปี 1970 งานทาง FINITE ELEMENT ส่วนมากจะใช้ MAINFRAME COMPUTERS แต่ในช่วงต่อมาก็หันมาใช้ทั้ง WORKSTATIONS และ PERSONAL COMPUTERS เข้ามาช่วย แต่ก็ยังมีข้อจำกัดที่ขนาดของปัญหาที่จะวิเคราะห์ด้วย

ดังนั้นในการศึกษาเรื่องนี้ เราจะแบ่ง COMPUTERS ออกเป็น 3 ประเภทคือ MAINFRAMES, WORKSTATIONS และ PERSONAL COMPUTERS

ในบทนี้จะอธิบายถึง PERSONAL COMPUTERS เท่านั้น ในส่วนของ WORKSTATIONS และ MAINFRAMES นั้นจะใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาขนาดใหญ่มาก ๆ เท่านั้น

PERSONAL COMPUTERS

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
PERSONAL COMPUTERS (PC) หรือ MICROCOMPUTERS เริ่มมีบทบาทต่อ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่นำไปใช้
FINITE ELEMENT ANALYSIS (FEA) แบบธรรมดา มากขึ้น โดยมากจะเป็นการกระทำ

ที่เกี่ยวข้องกับ SOFTWARE ประเภท CAD ซึ่งใช้ในการวาดรูปแบบ, RUN โปรแกรมเล็ก ๆ และคำนวณผล ในปัญหาเหล่านี้จะต้องคำนวณบางส่วนด้วยมือก่อน ที่เรียกว่าวิธี "CLOSE - FORM" คือ กำหนดปัญหาให้สอดคล้องกับสมการในหนังสือ โดยการป้อนข้อมูลบางส่วนเข้าในSOFTWARE ก็สามารภได้คำตอบคร่าว ๆ ของปัญหา ซึ่งก็ต้องใช้รายละเอียดในการปรับปรุงอีก

ข้อดีของการใช้ SOFTWARE ทาง FEA ใน PC ก็คือ ราคาถูก ใช้ง่าย นั่นคือใช้ภาษาที่ใกล้เคียงกับภาษาอังกฤษ และใช้เวลาในการศึกษาคู่มีไม่นานนัก ซึ่ง SOFTWARE เหล่านี้ใช้ในการออกแบบเบื้องต้น

ในขณะที่ PC มีการพัฒนาในด้านความเร็ว และด้านแสดงผลทางกราฟฟิค จึงถูกใช้ในการสร้างรูปแบบ และ การคำนวณผล ทุญแจสำคัญในทั้งสองส่วนก็คือ เวลาในการตอบสนอง

การพิจารณาในด้าน SOFTWARE

ในการพิจารณา SOFTWARE ทาง FEA ชนิดไหนที่จะเหมาะสม ต้องพิจารณาใน 3 หัวข้อ คือ

1. PREPROCESSORS
2. MODEL SOLUTION
3. POSTPROCESSORS

PREPROCESSORS จะช่วยวิศวกรคำนวณทางเรขาคณิต, คุณสมบัติของวัสดุ, ค่าขอบเขต และ LOAD ที่จะต้องจัดการ ข้อมูล INPUT จะต้องถูกป้อนเข้าทาง อุปกรณ์ของ

PREPROCESSORS การคำนวณสมการจะทำโดย โปรแกรมคำนวณทาง FEA ถ้าการแสดงผลเอกสารนี้เป็นเอกสารที่ส่งวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นับญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ผลออกมาค่อนข้างยาก ต้องใช้ POSTPROCESSING ในการค่า OUTPUT ให้ดูเข้าใจง่าย ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแบลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ เช่น การ PLOT เป็นสี การทำกราฟ เป็นต้น

ตัวอย่างของโปรแกรมที่มีใช้ในปัจจุบันแสดงใน ตารางที่ 5.1 ในช่วง 10-15 ปีที่ผ่านมา ได้มีการพัฒนาในด้าน ความง่ายในการใช้, ความสามารถในการคำนวณ และการแสดงผลที่เข้าใจง่าย ถ้ารูปที่จะวิเคราะห์ค่อนข้างง่าย เราสามารถที่จะแสดงรายละเอียดทางรูปทรงได้ แสดงวิธีการคำนวณ และแสดงผลได้ภายในวันเดียว แต่ว่าในความ เป็นจริงรูปทรงของปัญหาทาง FEA ต้องใช้เวลาเป็นวันหรือเป็นเดือนในการพิจารณา ซึ่ง จะทำให้ระยะเวลาในการวิเคราะห์ขยายออกไปอีกมาก

PREPROCESSORS

มีหน้าที่เตรียมรูปร่างของ FEA เพื่อใช้ในการคำนวณ เวลาที่ใช้ในส่วนนี้จะหมดไปกับการกำหนดรูปทรง และอธิบาย การแบ่งรูปทรง ถ้ามีการป้อน INPUT เหล่านี้คือ คุณสมบัติของวัสดุ, สถานภาพ และ LOAD จะทำให้ประหยัดเวลาไปได้มาก

PREPROCESSOR ที่ดี ควรจะประกอบด้วย ระบบ CAD โดยเฉพาะในรูปทรงที่ ยาก ๆ จำเป็นต้องมาก ซึ่ง CAD นี้สามารถ แสดง พื้นผิว หรือ ปริมาตรของรูปทรงได้ จากนั้นก็แสดงการแบ่งรูปทรงเป็น ELEMENT ถ้าคุณสมบัติของวัสดุแตกต่างกัน ก็จะแสดง ให้เห็นได้คล้าย LOAD และค่าขอบเขตสามารถแสดงได้เช่นกัน

ใน PREPROCESSOR ส่วนมาก จะมีส่วนเช็คความถูกต้อง เช่น การเช็คว่าได้ใช้ ELEMENT ครบบริบูรณ์ ตรวจสอบคุณสมบัติของทุกส่วนว่า เรียบร้อยหรือยัง เป็นต้น

SOLUTION MODULES

ไม่ว่าจะเป็นการคำนวณสนามประเภทใด วิธีการคำนวณในส่วนนี้จะคล้ายคลึงกัน ซึ่ง เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า แบ่งเป็นส่วน INPUT ส่วน ASSEMBLY ส่วนคำนวณ และส่วน OUTPUT

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในส่วน INPUT โปรแกรมจะอ่านข้อมูลเข้าไป เปิด FILE เก็บไว้ และจำแนกข้อมูลออกเป็นพวก เช่น พิกัดของ ELEMENT, คุณสมบัติวัสดุ, LOAD เป็นต้น และในส่วนก็จะสร้าง MATRIX ประจำ NODE ขึ้น โดยเอาจำนวน NODE จำนวน ELEMENT เป็นหลัก และแสดงให้ผู้รู้ว่าเครื่องได้รับทราบข้อมูลแล้ว ถ้าข้อมูลมีปัญหา ก็จะแจ้ง ERROR ให้ผู้ใช้ทราบ

ในส่วน ASSEMBLY และส่วนคำนวณ สมการ NODE จะถูกใช้ในการคำนวณหาค่า UNKNOWN จากนั้นก็ทำการคำนวณทาง เมตริกซ์ ซึ่งในส่วนนี้จะใช้เวลามากที่สุด

ในส่วน OUTPUT จะแสดงให้ผู้ทราบถึงค่า NODE และค่าของ ELEMENT โดยในส่วนนี้จะทำการเช็คค่าต่าง ๆ ว่าถูกต้องแค่ไหนด้วย และท้ายที่สุด ก็แสดงผลออกมา ถ้ายังไม่พอใจก็ต้องนำไปต่อเข้ากับส่วน POST PROCESSORS ต่อไป

POSTPROCESSORS

กฎข้อแรกของการวิเคราะห์ FEA คือ ผู้ใช้ต้องยังไม่เชื่อในคำตอบที่คำนวณออกมา คือ ต้องทำการตรวจสอบกับคำตอบที่หาได้จาก การคำนวณด้วยมือ, การตัดสินใจทางวิศวกรรม และใช้ COMMON SENSE ด้วยการมองดูที่ OUTPUT สามารถรู้ได้ว่าวิธีคำนวณถูกต้องไหม โดยวิธี EQUILIBRIUM ซึ่งถ้าค่า RELATIVE ERROR เพิ่มขึ้น แสดงว่าคำตอบยังใช้ไม่ได้มากขึ้น

อีกวิธีที่จะตรวจสอบได้คือ ตรวจสอบ DISPLACEMENTS (NODAL RESULTS) ของค่าที่ไม่ถูกต้องที่ทำให้รูปหรือค่าของ ELEMENT ผิดเพี้ยนไป ซึ่งสามารถใช้การตัดสินใจ หรือ COMMON SENSE วิเคราะห์ว่าถูกต้องหรือไม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ... ไม่อนุญาตให้...
 POSTPROCESSORS ทดสอบต้องแสดงผลออกมาชัดเจน และเข้าใจได้ง่าย ไม่ว่าจะ
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 เป็น กราฟ หรือ รูปอะไรก็ตาม

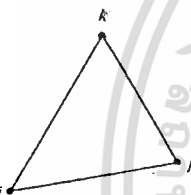
สรุปผลของโครงการนี้

จากการเสนอโครงการงานในขั้นต้น เราจะเห็นได้ว่าเราสามารถใช่วิธี Finite Element มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าสนามไฟฟ้าลักษณะสองมิติ ได้อย่างละเอียดพอสมควร โดยการนำ computer มาช่วยในการคำนวณ ทำให้ได้ค่าถูกต้องแม่นยำ และรวดเร็วมาก นอกจากจะได้ทราบค่าสนามไฟฟ้าแล้ว เรายังสามารถที่จะรู้ถึงลักษณะของสนามไฟฟ้าในขอบเขตที่เราศึกษาอีกด้วย ซึ่งการศึกษาในขั้นต้นนี้อาจจะไม่ละเอียดมากนัก ยังต้องมีการศึกษาและปรับปรุงต่อไปอีก เพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้องและแม่นยำรวดเร็วยิ่งขึ้น และจะได้นำไปใช้กับสนามไฟฟ้าที่มีลักษณะไม่สม่ำเสมอที่มีรูปร่างซับซ้อน ซึ่งอาจจะขยายไปถึงรูปทรงสามมิติอีกด้วย

จุดบกพร่องของโครงการนี้ก็ คือ ศึกษาได้ในสนามไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นสนามที่ค่อนข้างสม่ำเสมอในระนาบสองมิติเท่านั้น และการใช้โปรแกรมในการหาค่าสนามไฟฟ้านี้สามารถขยายการหาค่าสนามไฟฟ้า 100 จุดเท่านั้น ซึ่งยังไม่ค่อยละเอียดเท่าที่ควรนัก เนื่องจากแนวทางในการศึกษาด้านการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธี Finite Element นี้ ในประเทศไทยยังมีน้อยมาก อีกทั้งการศึกษาด้านสนามไฟฟ้าที่ไม่สม่ำเสมอเป็นเรื่องที่ยาก และความรู้ทางด้านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาค่าสนามไฟฟ้าและโปรแกรมในการ Plot Graph ของคณะผู้จัดทำยังมีน้อยมาก เนื่องจากไม่ได้ศึกษามาทางด้านโปรแกรมโดยตรง ดังนั้น โครงการงานนี้จึงควรจะเป็นการศึกษาร่วมกันระหว่างภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า กับ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

ส่วนที่จะต้องศึกษาต่อไปคือ นำวิธีการ Finite Element นี้ไปใช้กับสนามไฟฟ้าที่มีลักษณะไม่สม่ำเสมอที่มีขอบเขตที่จะศึกษามีรูปร่างซับซ้อนที่เป็นสามมิติ และขยายความสามารถของโปรแกรมในการคำนวณให้ละเอียด โดยการขยายความสามารถเพิ่มจำนวนจุดที่จะคำนวณให้มากขึ้น และทำการจัดขั้นตอนบางส่วนของโปรแกรมในการคำนวณ เพื่อให้โปรแกรมทำงานได้รวดเร็ว และให้ผู้ศึกษาโครงการงานนี้ต่อเข้าใจได้ง่ายยิ่งขึ้น เพื่อที่จะ

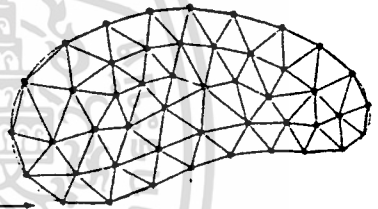
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับครูอาจารย์เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า นำความรู้ทั้งหมดนี้ไปประยุกต์ใช้กับอุปกรณ์ไฟฟ้าต่าง ๆ เช่น นำไปคำนวณค่าสนามไฟฟ้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ของสายส่งกำลังไฟฟ้า Generator Motor เป็นต้น



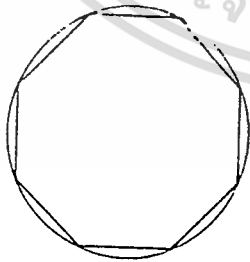
รูป 1



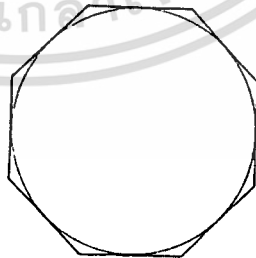
รูป 2



รูป 3



(a)



(b)

รูป 5



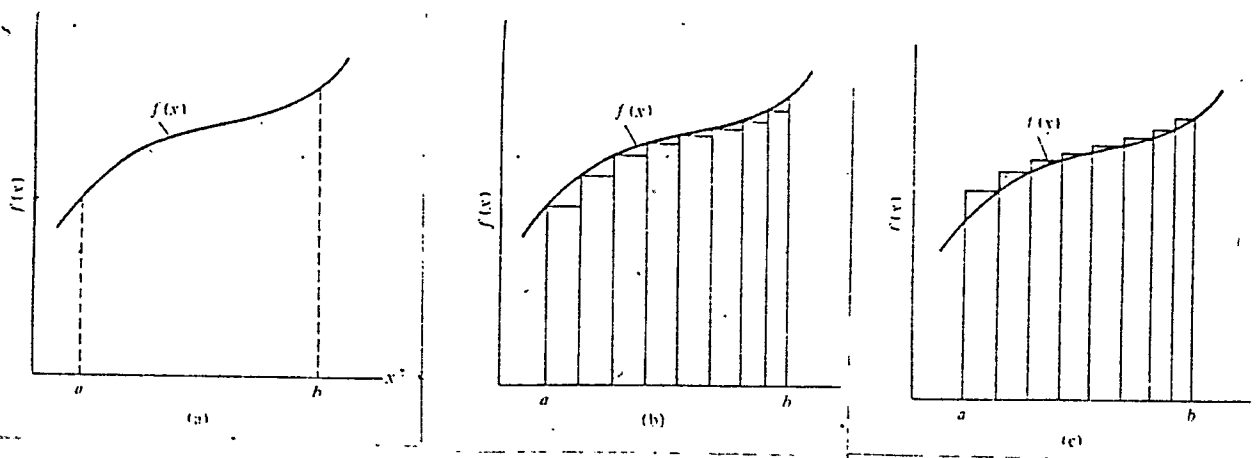
a



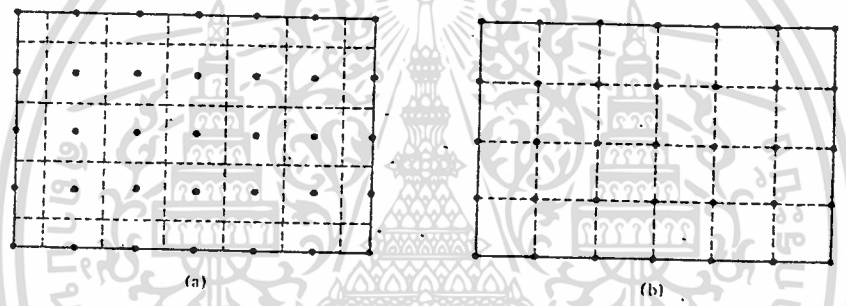
b

รูป 6

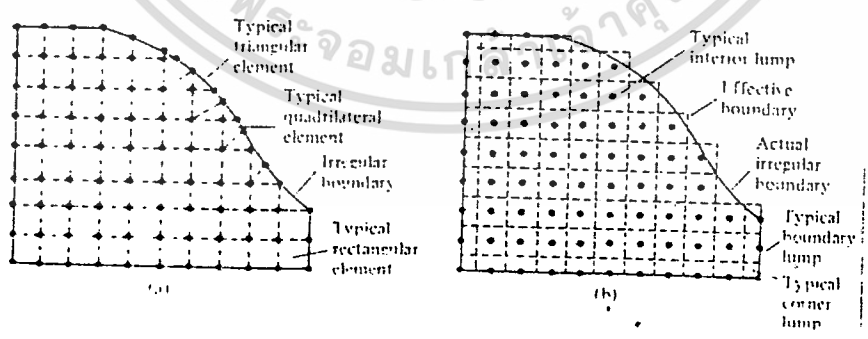
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.

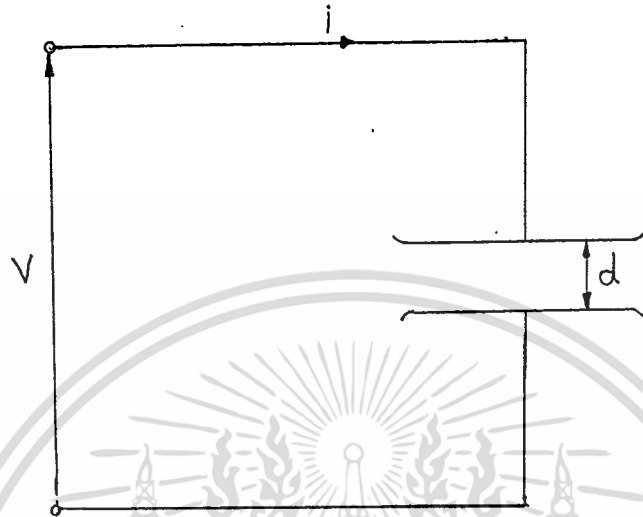


รูป 7

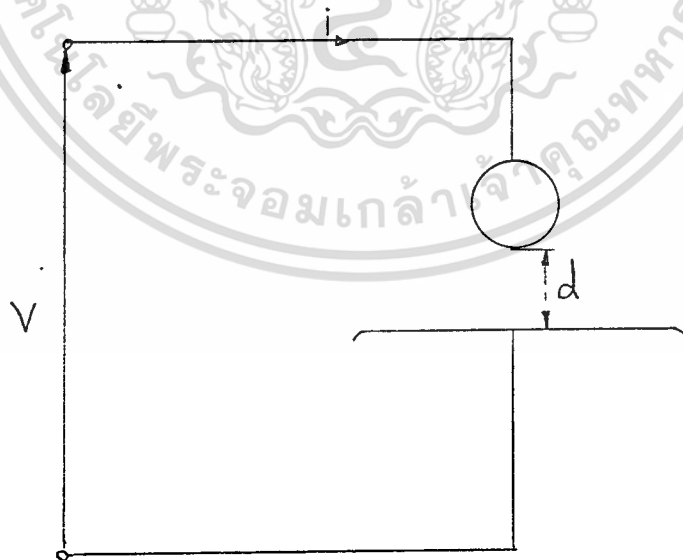


รูป 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

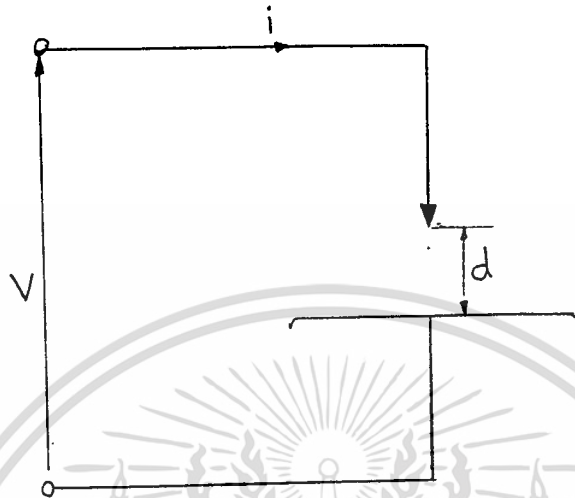


รูป 2.1

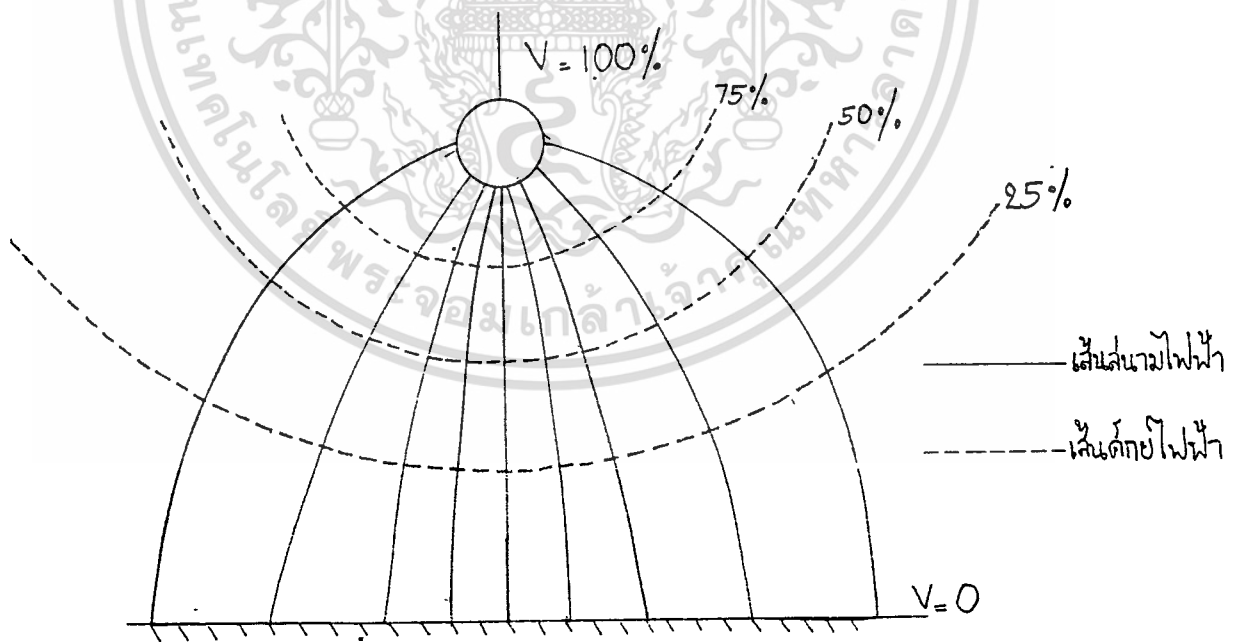


รูป 2.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

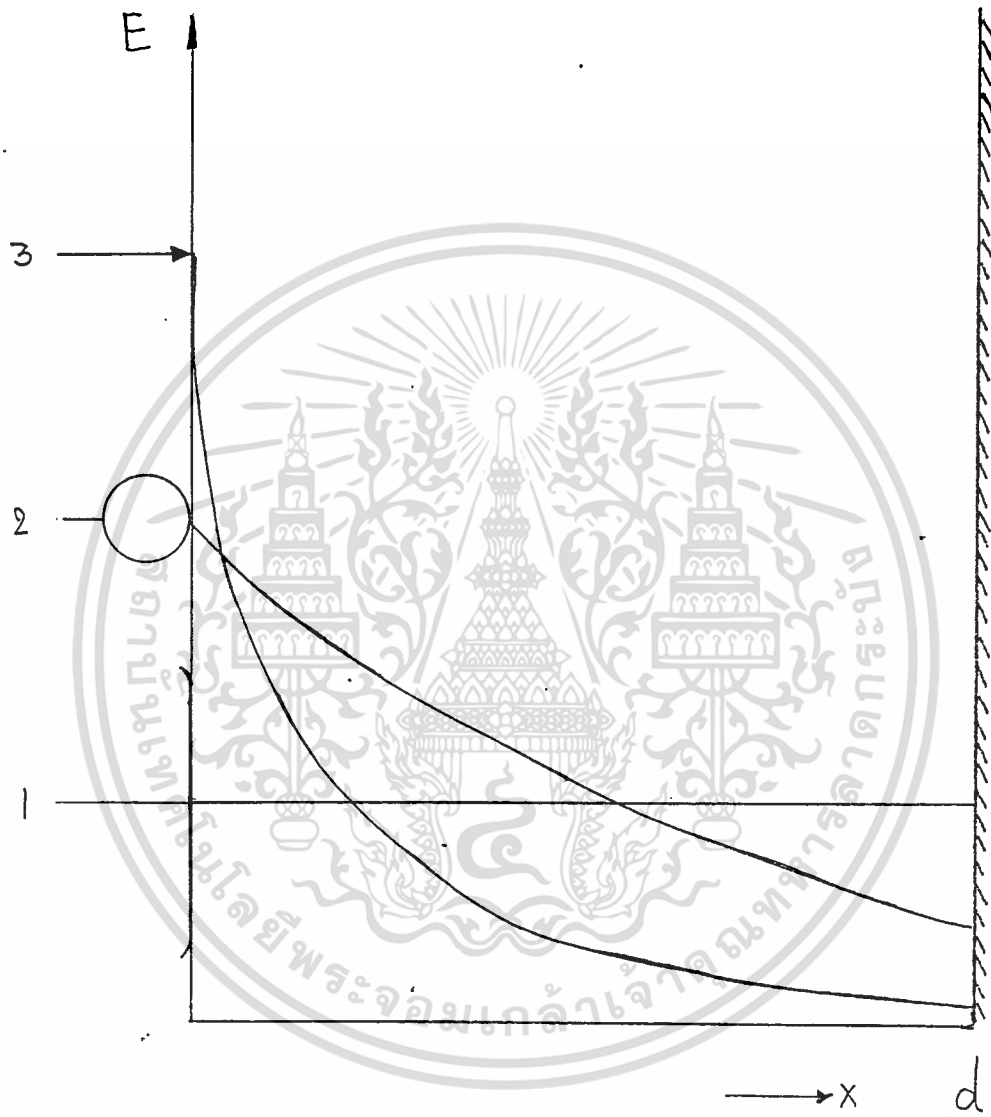


รูป. 2.3



รูป. 2.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป. 2.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

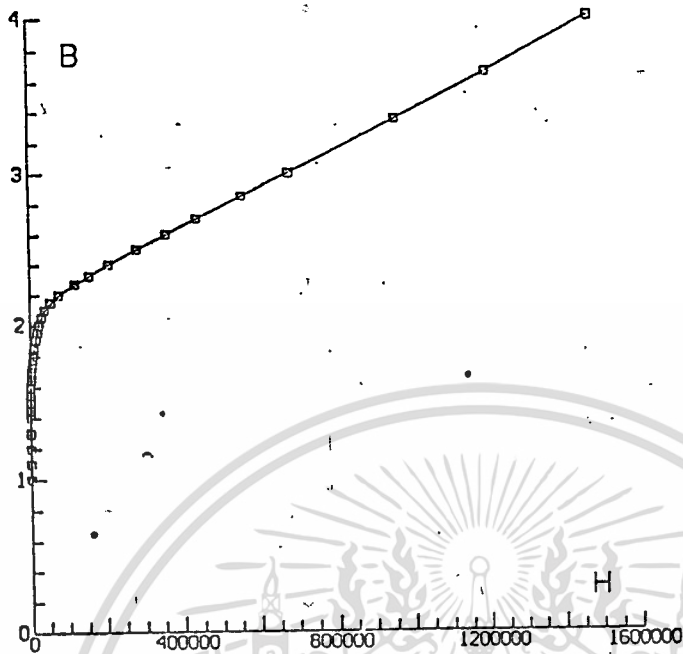


Figure 3.1 B-H curve for typical SAE 1010 steel, commonly used for small electric motors and other magnetic devices.



Figure 3.2 B-H curve for a typical permanent magnet material.

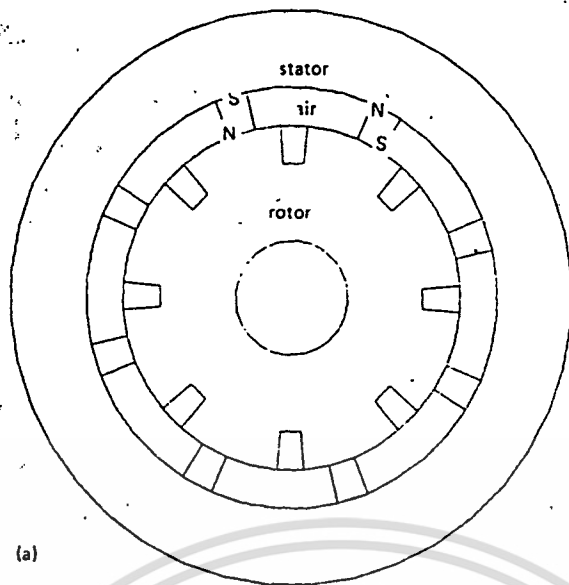
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและตั้งอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 3.1 B and H Points on Figure 5.1

B (T)	(amps/m)
0.0	0.0
1.0	295
1.1	340
1.2	400
1.3	500
1.4	600
1.45	790
1.50	960
1.55	1250
1.60	1620
1.643	2387
1.674	3183
1.700	4000
1.733	5570
1.749	6366
1.778	7958
1.805	9540
1.845	11940
1.904	15915
1.955	19900
2.000	24000
2.050	31000
2.100	40000
2.150	55600
2.200	76000
2.275	119366
2.330	158000
2.400	210000
2.500	282000
2.600	358000
2.700	437800
2.850	557000
3.000	680000
3.354	955000
3.655	1.19361E6
4.000	1.4682E6

ตาราง 3.1

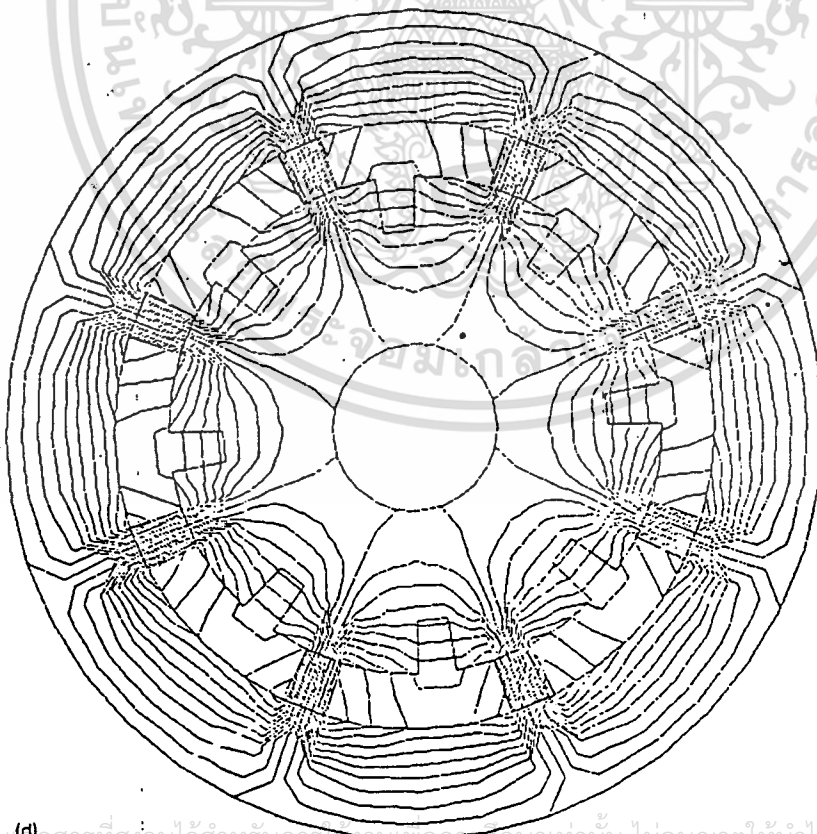
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(a)

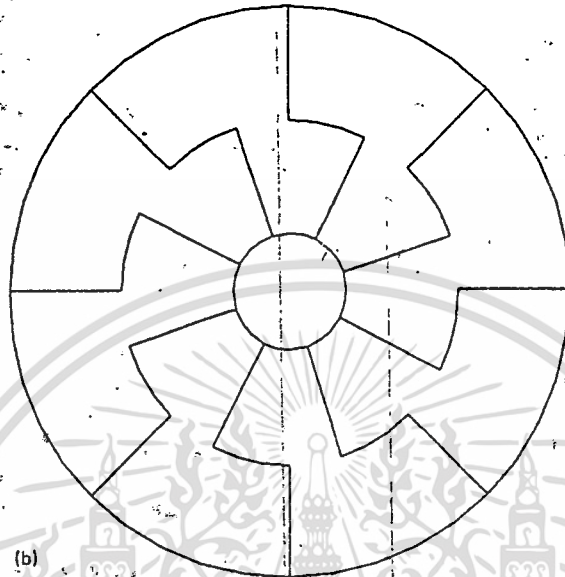
Figure 3.3 Modeling one pole pitch of an eight-pole motor using periodic boundary conditions on A . (a) Entire motor. (b) One possible division into eight identical pieces of a puzzle. (c) Two-dimensional finite element model of one piece containing one pole pitch. (d) Flux plot of entire motor. An identical picture can be obtained by assembling eight copies of a flux plot of a one-pole-pitch model with NEGA boundary conditions.

รูป 3.3

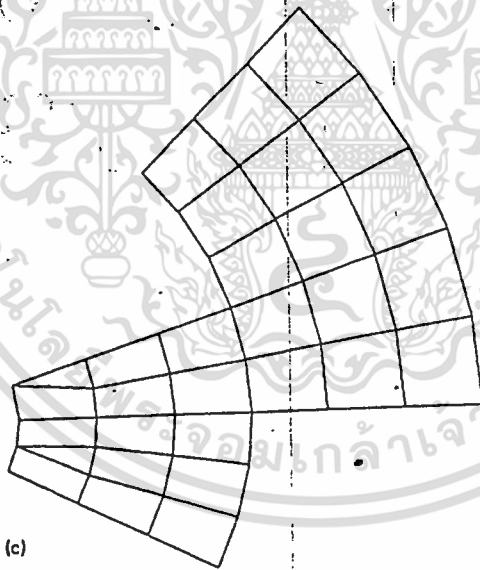


(d)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
Figure 3.3 Continued
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(b)

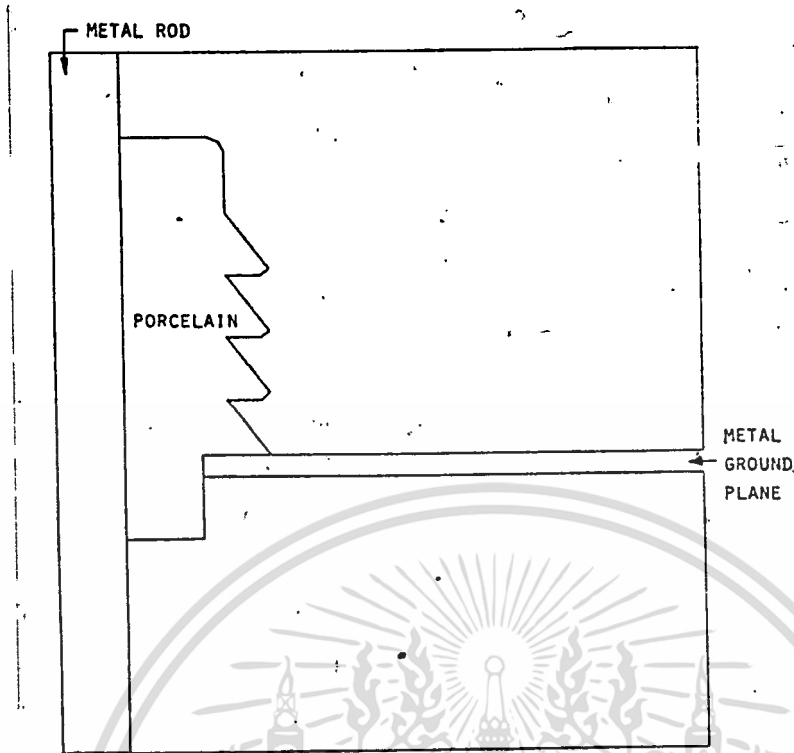


(c)

Figure 3.3 Continued

๓.๓ 3.3

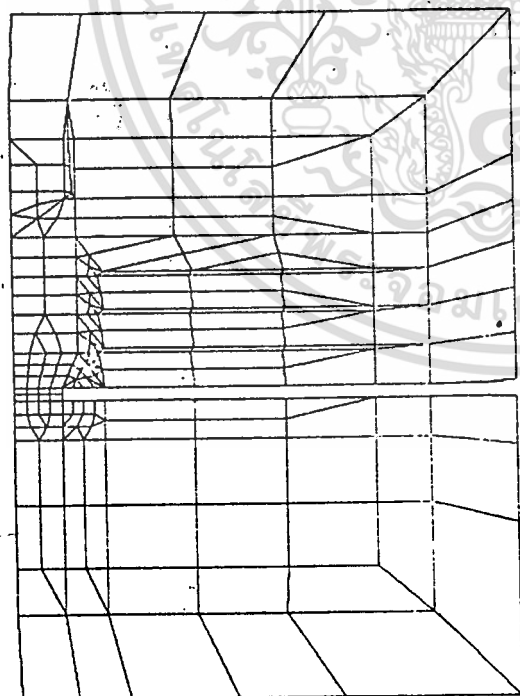
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



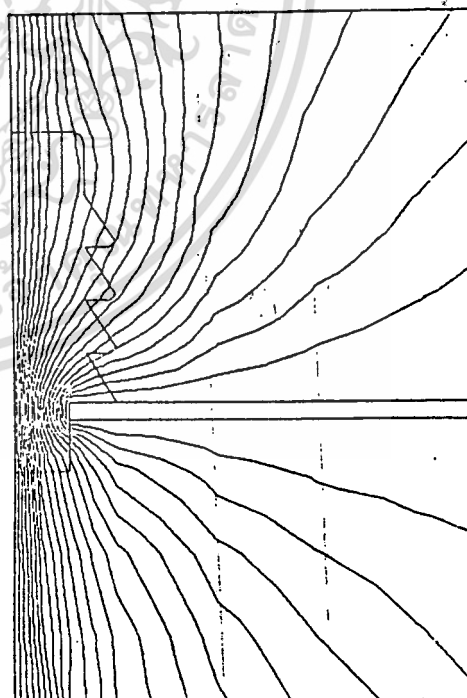
รูป 3.4 a,b,c

(a)

Figure 3.4 An axisymmetric insulator. (a) Geometry symmetric about left vertical axis. (b) Axisymmetric finite element model. (c) Calculated voltage contours.



(b)



(c)

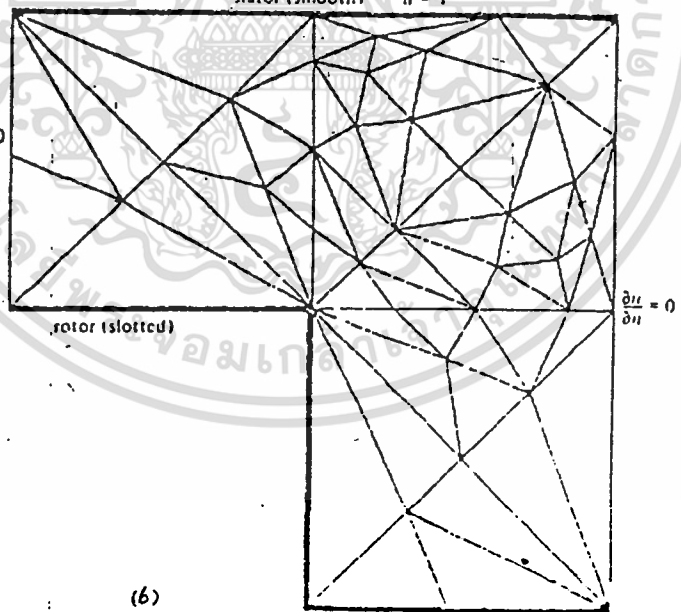
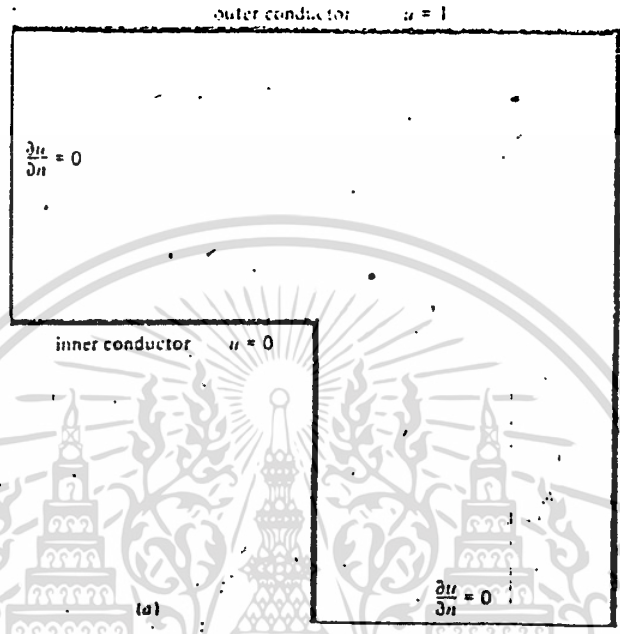
Figure 3.4 Continued

Figure 3.4. Continued

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

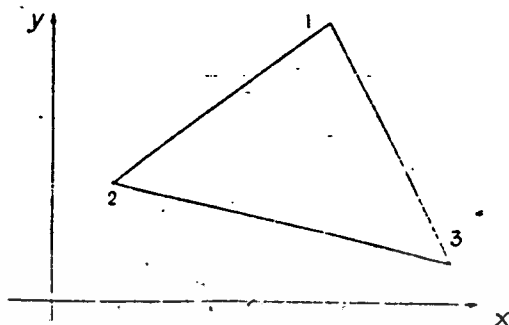
พ.ด.1

(a) One-quarter of the rectangular coaxial line, showing boundary conditions of the problem. (b) Half of one tooth pitch of an electric machine, and its finite element model. The heavy lines indicate Dirichlet boundaries (potential specified), whereas the remaining boundaries are planes of symmetry, requiring vanishing normal derivative of potential.



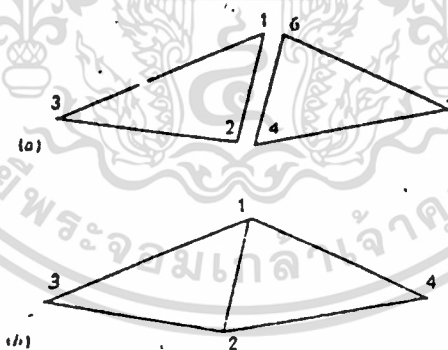
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Typical triangular finite element in x - y plane.



รูป. 4.2

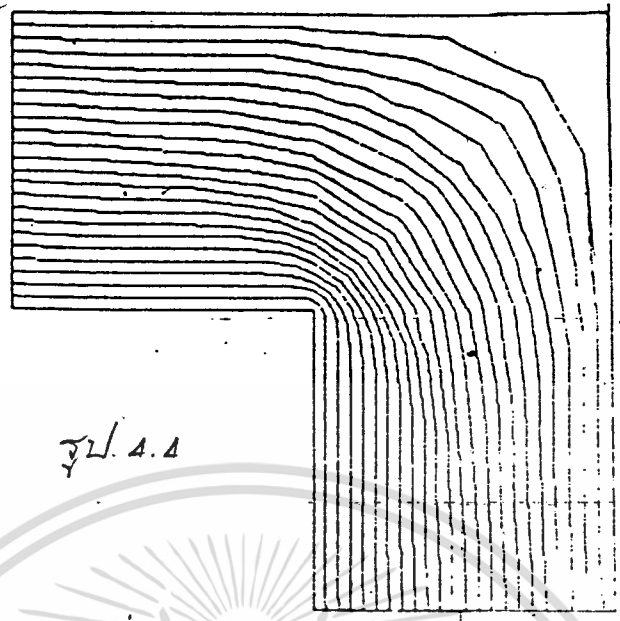
(a) Adjacent triangular elements, considered to be electrically disjoint. (b) Adjacent triangular elements, with potentials required to be continuous, and nodes renumbered accordingly.



รูป. 4.3

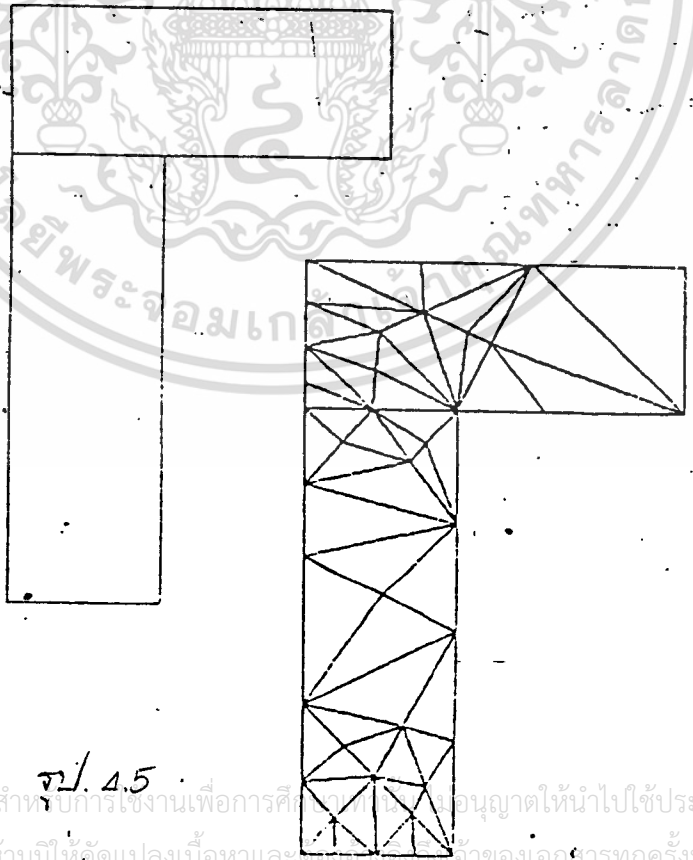
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Equipotential contours for the coaxial-line problem of



รูป. 4.4

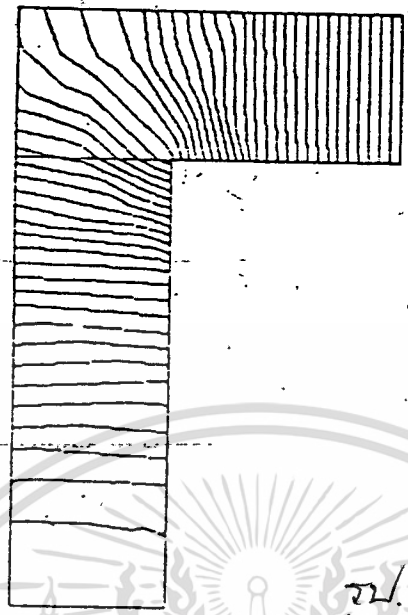
Electric machine rotor slot and its triangular finite element representation.



รูป. 4.5

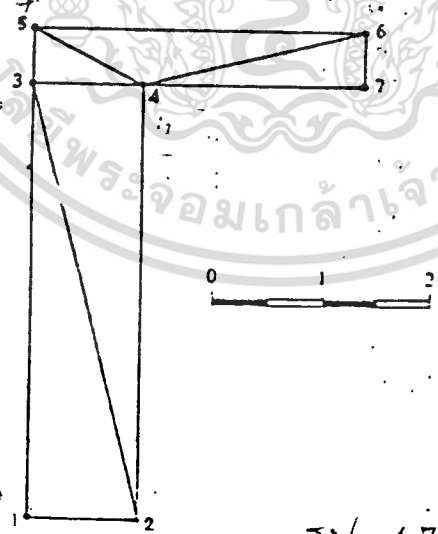
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้หมมิให้กััดแปลงเนื้อหาและข้อมูลของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Solution of the electric machine slot problem of



รูป. 4.6

A very simple model for the slot problem, to illustrate data handling techniques.



รูป. 4.7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 5.1 Some Representative Finite Element Software Packages

Name	Origin	Type (primary)
ABAQUS	H.K.S.	Structural, especially nonlinear
ANSYS	Swanson Analysis Systems, Inc.	Structural
STRUCL	M.I.T.	Structural, civil
McAUTO/STRUCL	McDonnell-Douglas Automation	Structural, civil
NASTRAN	N.A.S.A.	Structural
MSC/NASTRAN	MacNeal-Schwendler Corp.	Structural
STARDYNE	Systems Dev. Corp.	Structural
FIDAP	Fluid Dynamics	Fluid
AOS/MAGNETIC	CAD COMP, Inc.	Electromagnetic
PDA/PATRAN	P.D.A.	Pre- and postprocessor
SUPERTAB	S.D.R.C.	Pre- and postprocessor
MARC	MARC Software Intern., Inc.	Structural

ตาราง 5.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



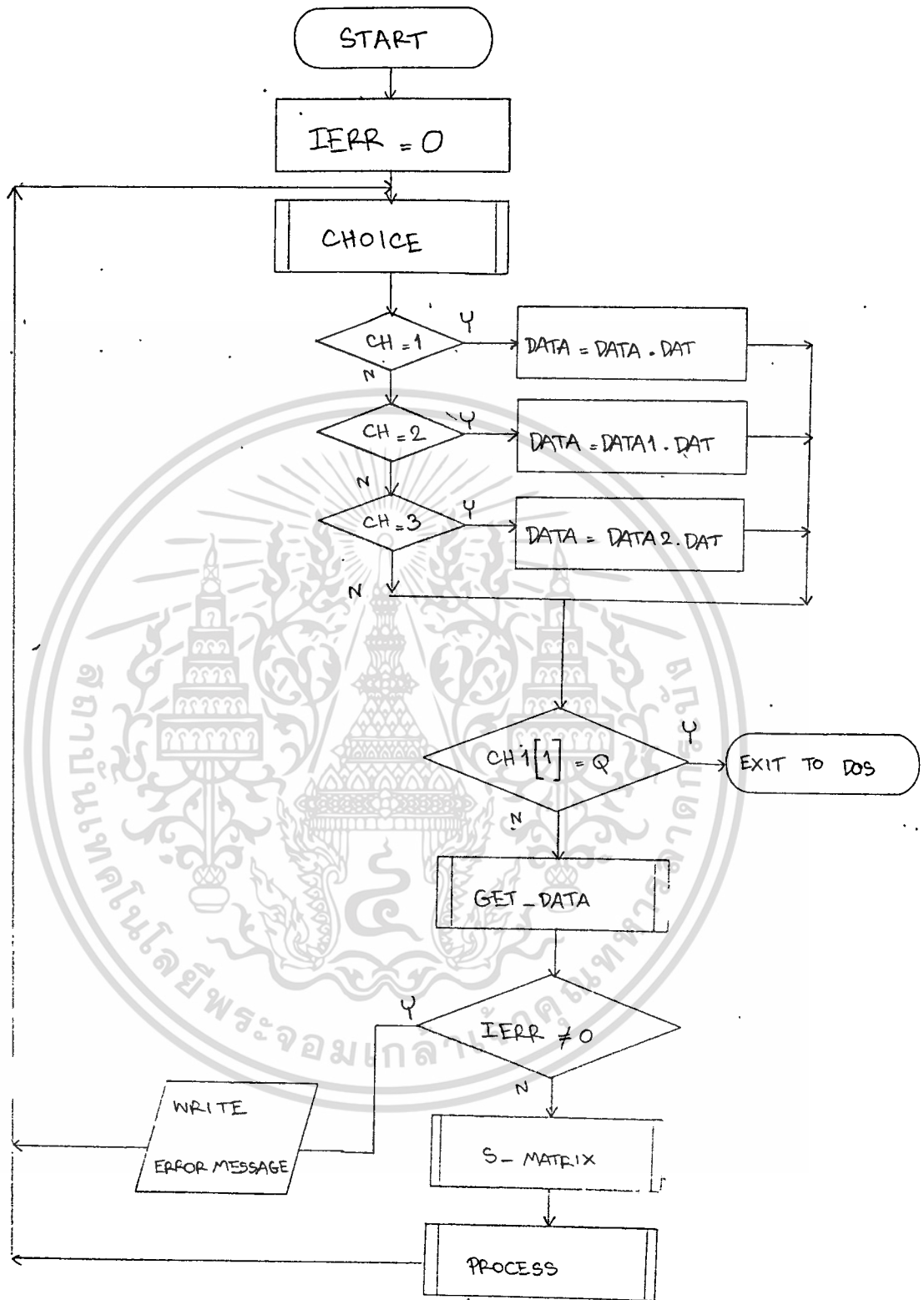
PROCEDURE



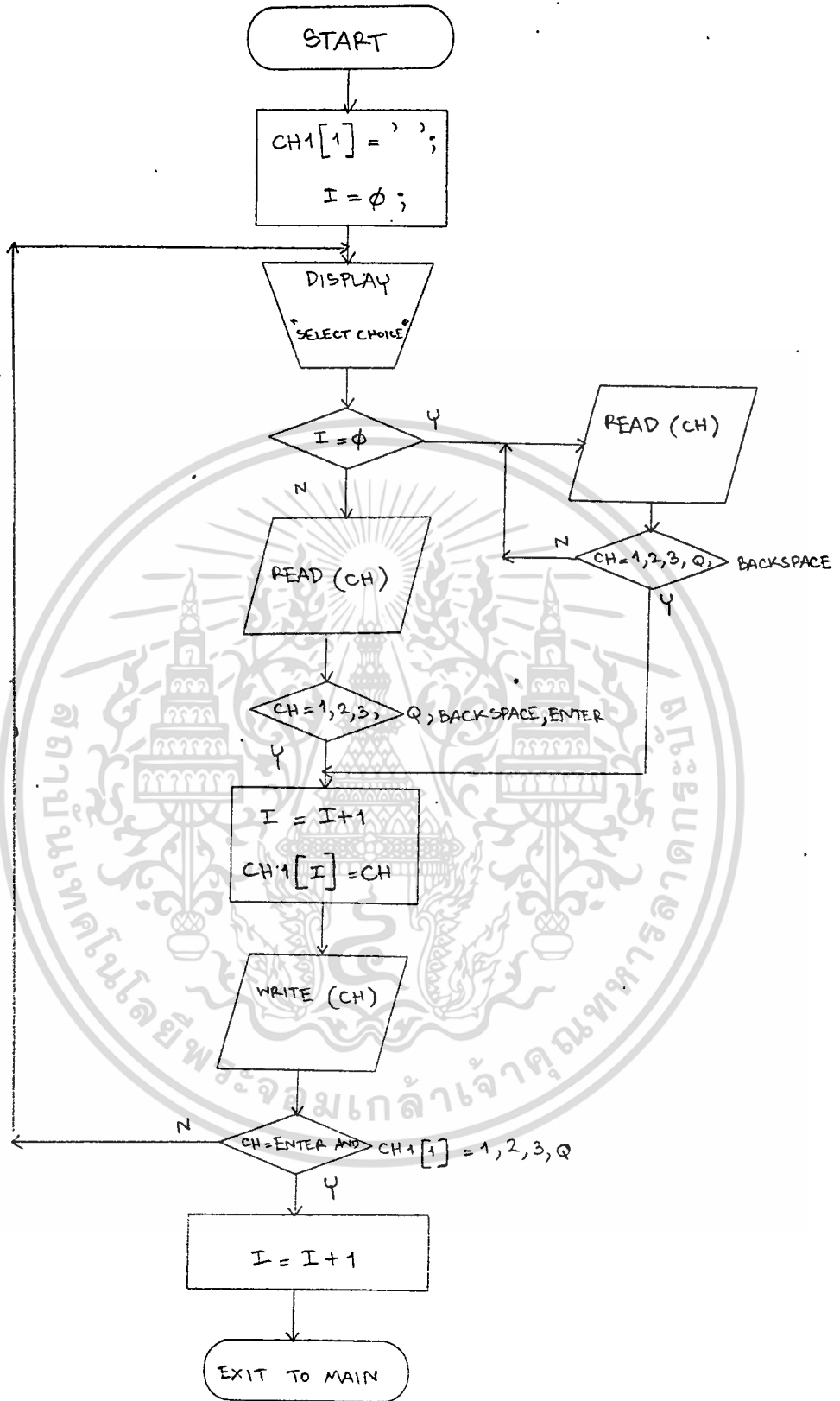
ต่อหน้าหน้า



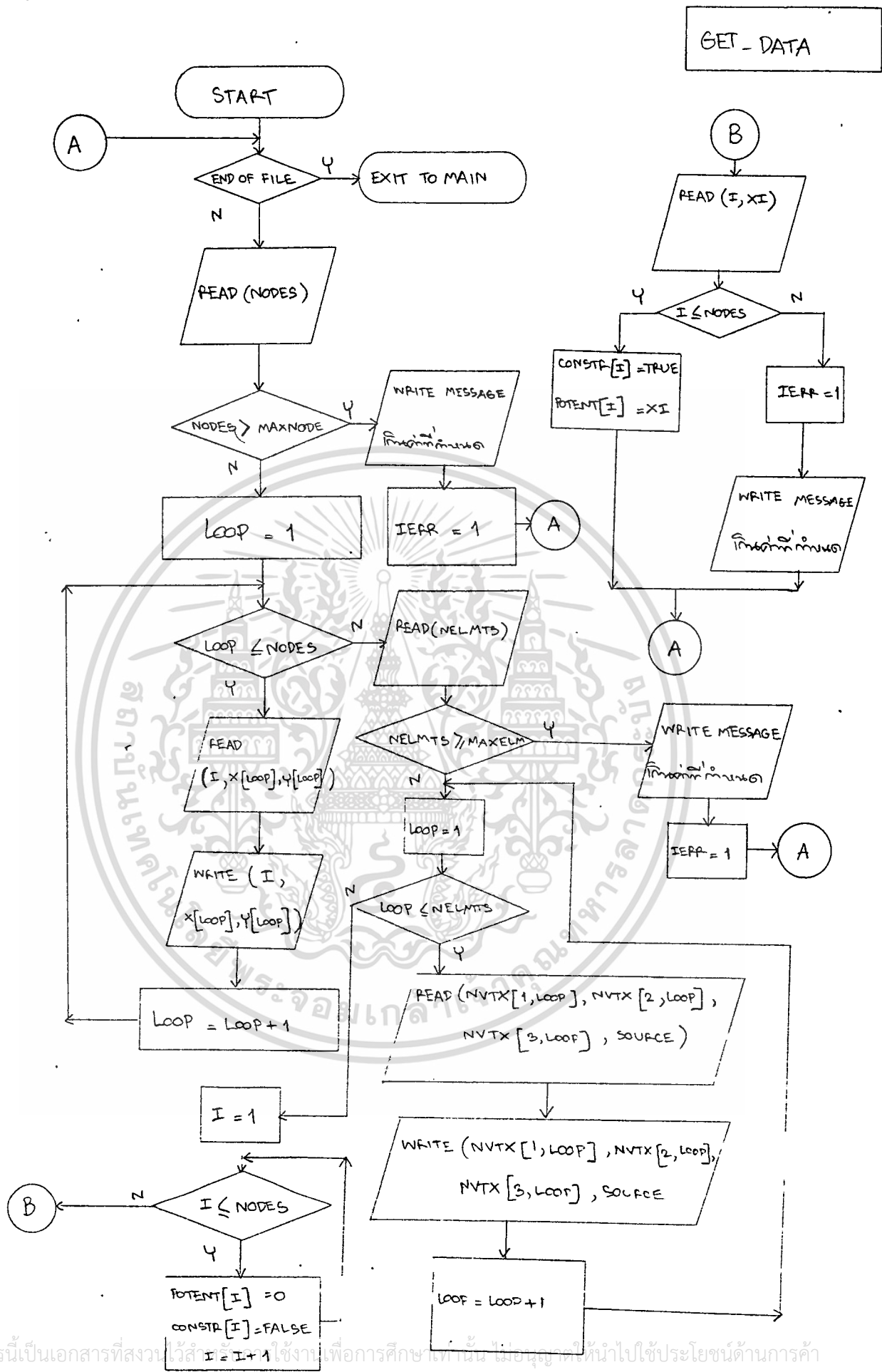
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



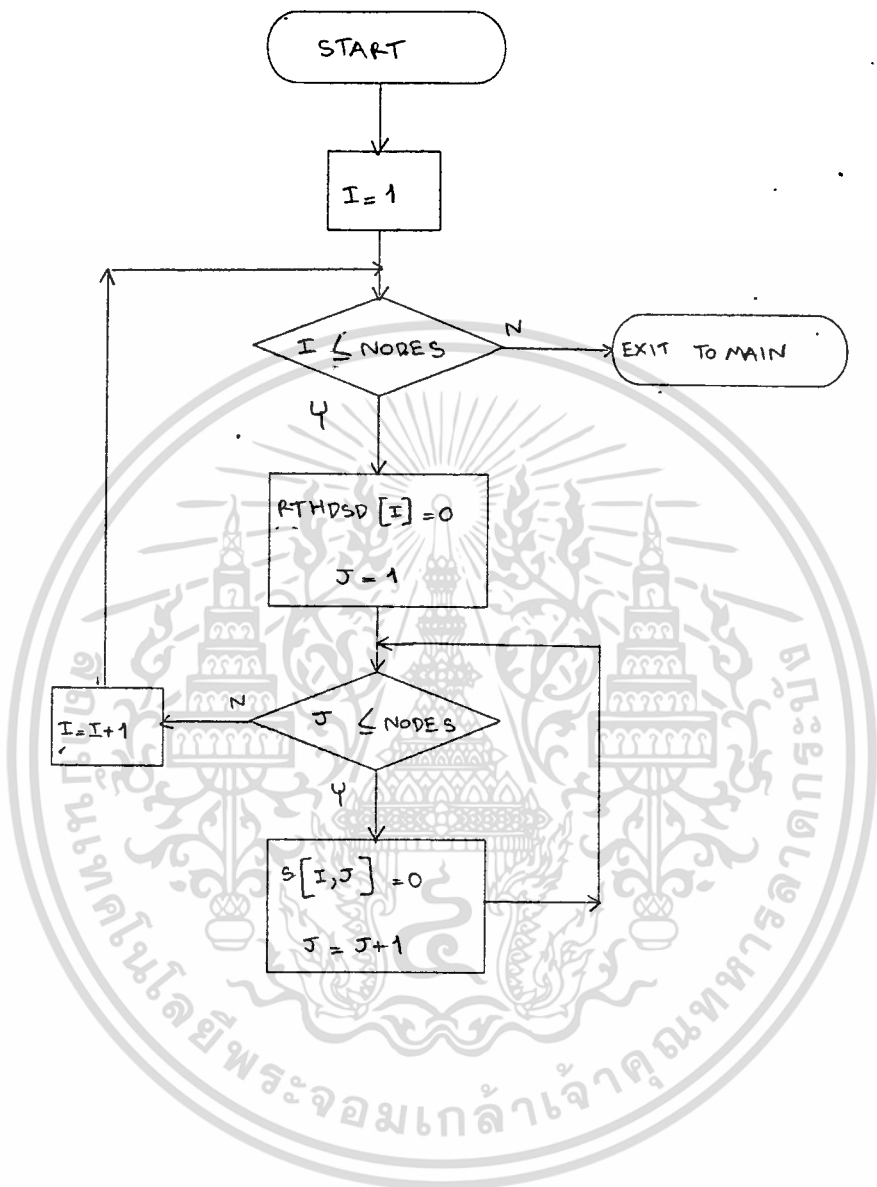
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

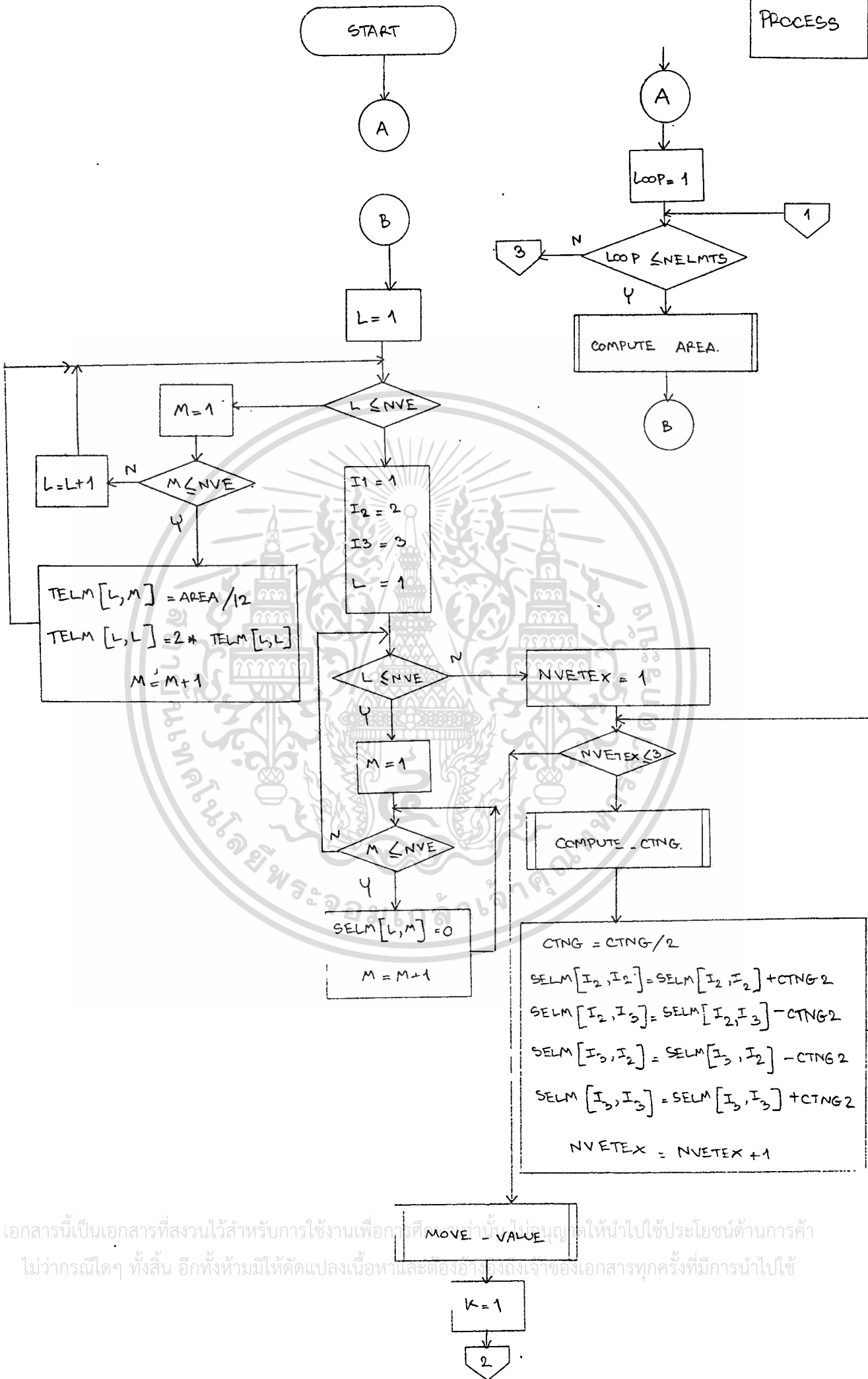


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้สำหรับการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

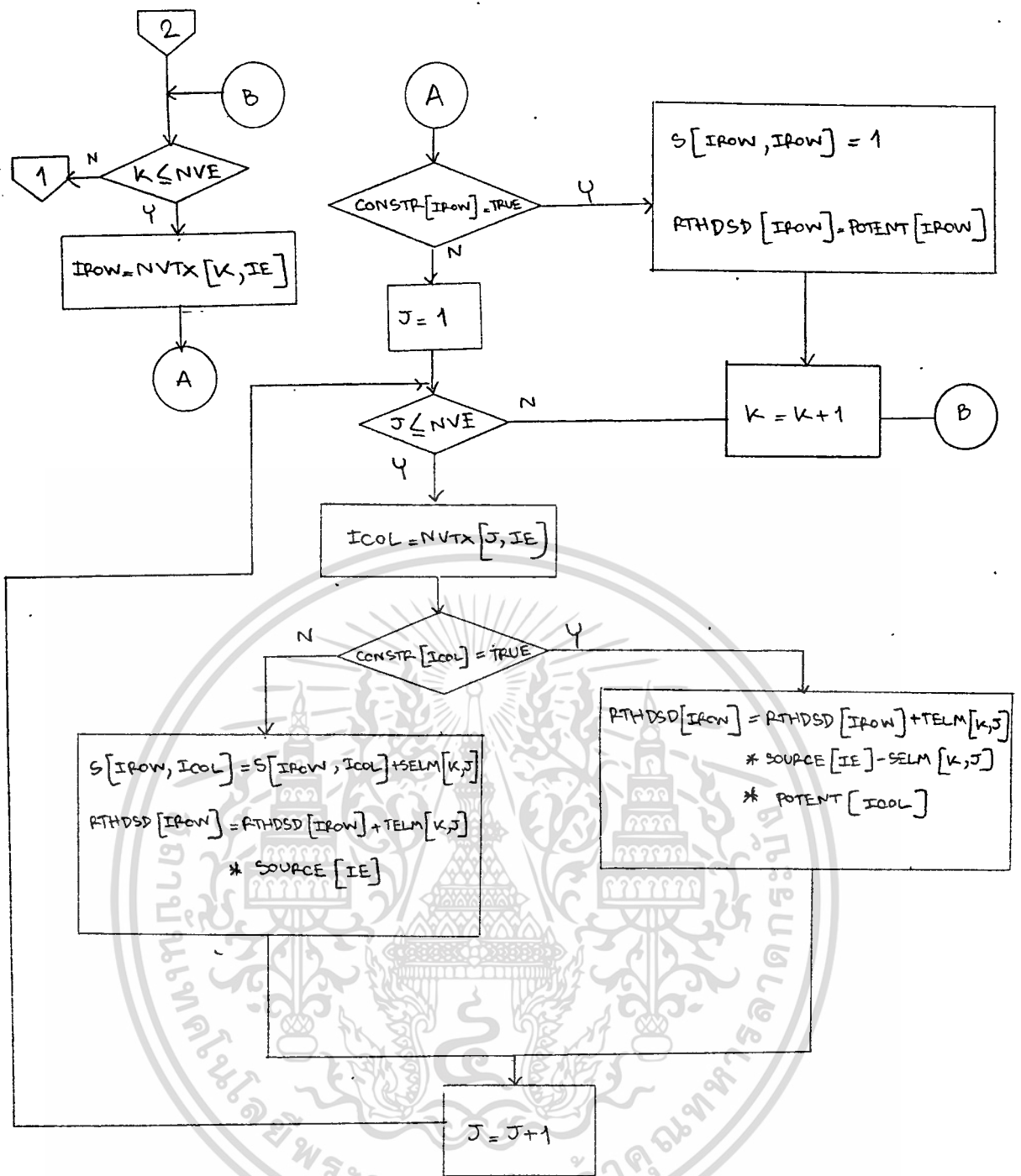


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

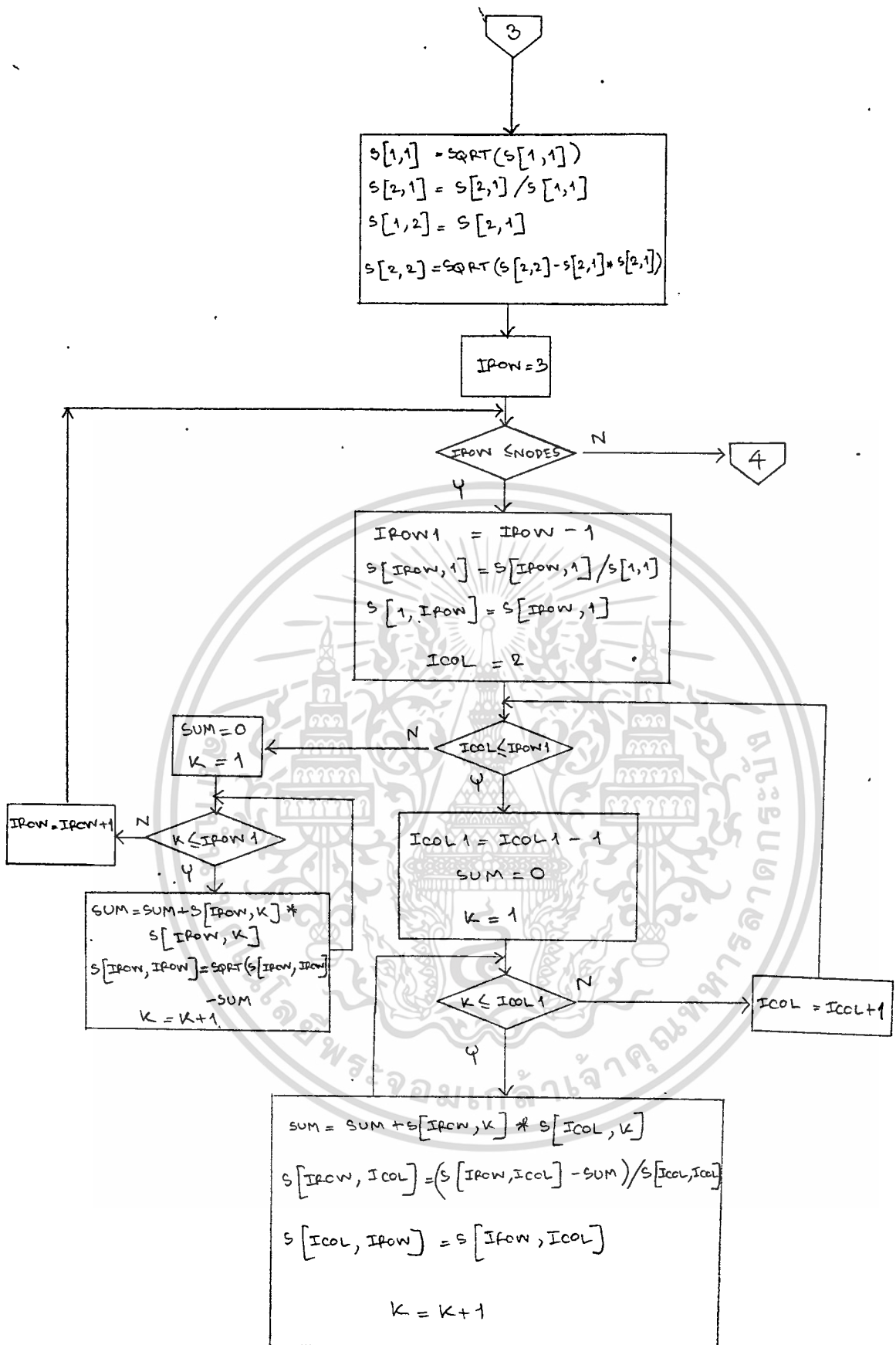
PROCESS



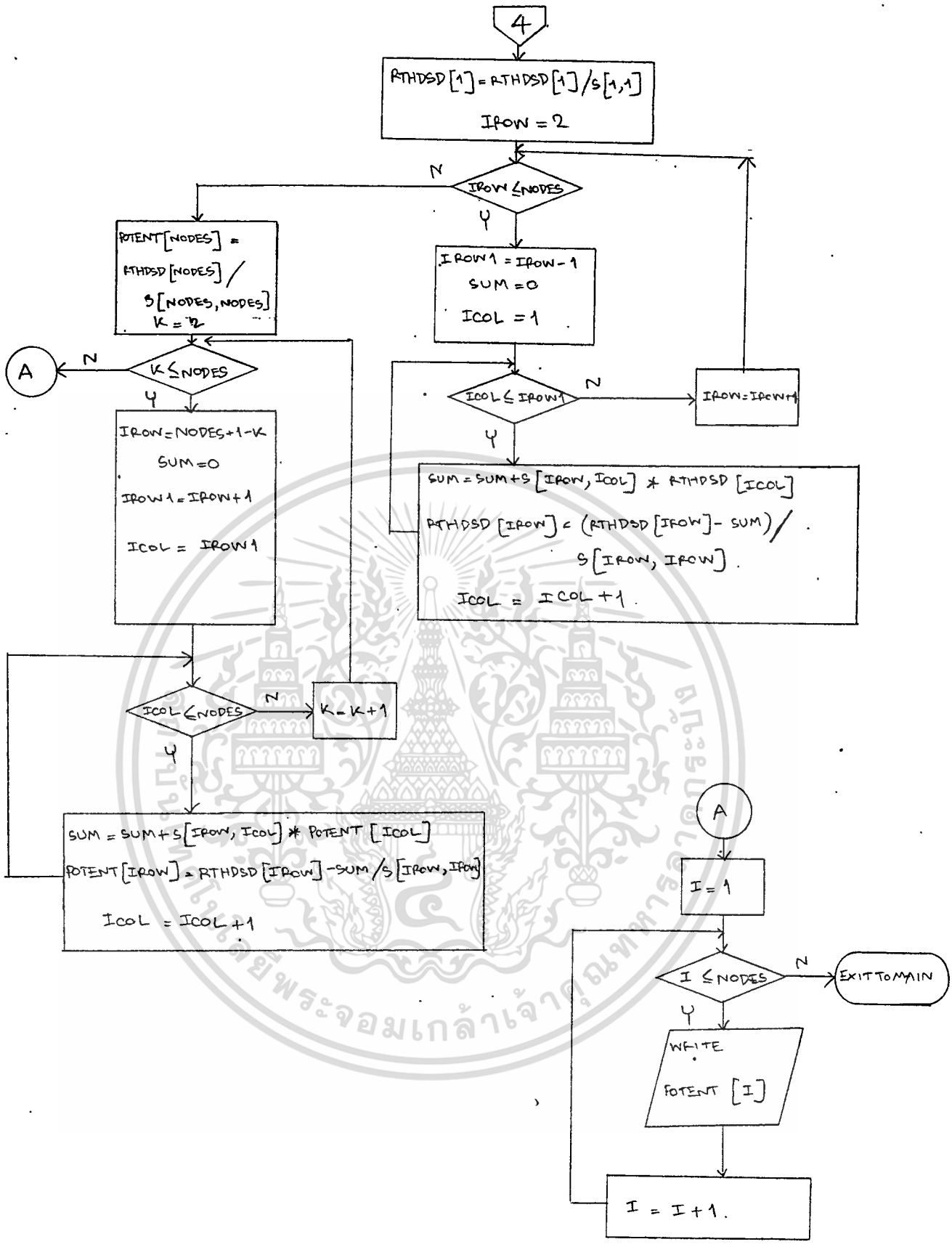
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่ควรเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

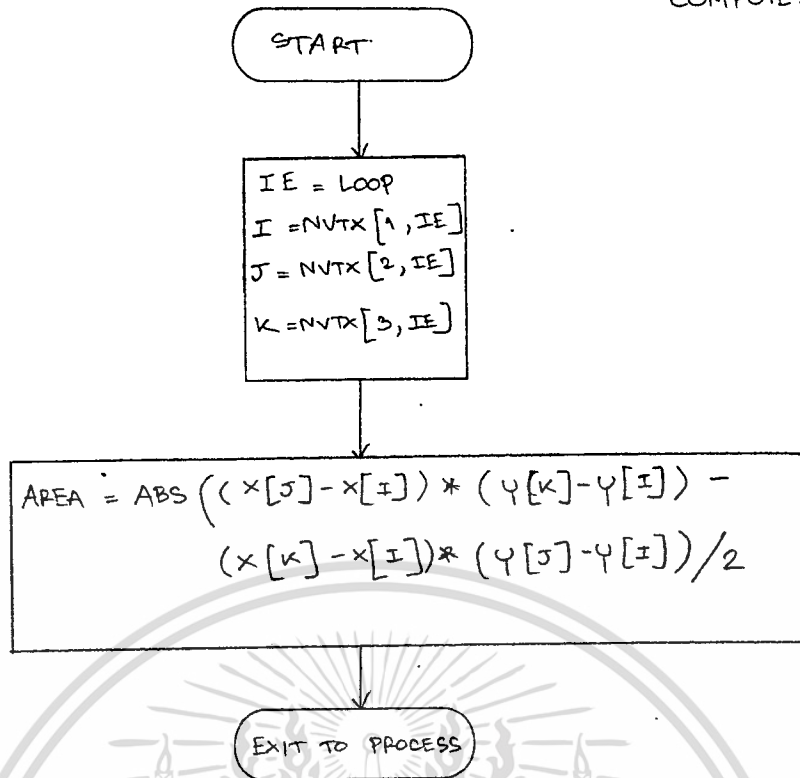


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

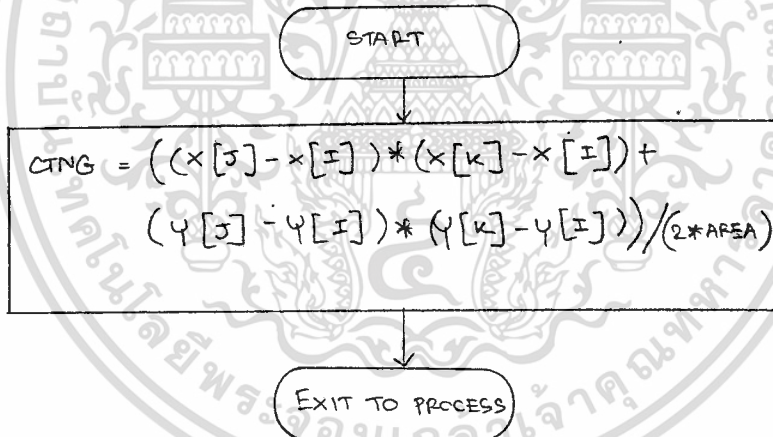


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

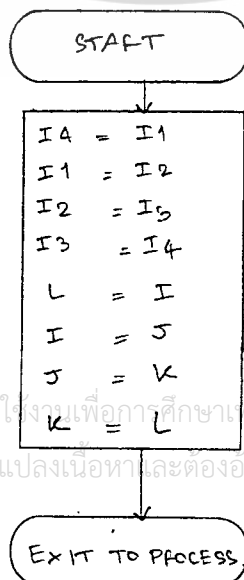
COMPUTE - AREA



COMPUTE - CTNG



MOVE - VALUE



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

program finite_element(input,output,text);
uses crt;
const
    maxnod = 100;
    maxelm = 100;
    nve = 3;

```

```

type
    a50 = array[1..maxnod] of real;
    a5050= array[1..maxnod,1..maxnod] of real;
    a75 = array[1..maxelm] of real;
    a33 = array[1..3,1..3] of real;
    a375 = array[1..3,1..maxelm] of integer;
    a3 = array[1..3] of integer;
    a50b = array[1..maxnod] of boolean;

```

```

var
    x,y,rthdsd,potent : a50;
    constr : a50b;
    s : a5050;
    nvtx : a375;
    source : a75;
    selm,telm : a33;
    intg : a3;
    fi : text;
    data : string;
    chl : array[1..2] of char;
    ch : char;
    num,temp,templ : integer;

```

```

    xi,area,ctng,ctng2,sum : real;
    i,j,k,l,m,loop,nodes,
    ierr,nelmts,
    ie,i1,i2,i3,i4,
    irow,icol,irowl,
    icoll,nvrtex : integer;

```

```

procedure choice; { MAKE MENU AND GET OPTION }
begin

```

```

    chl[1] := ' ';
    i := 0;
    writeln('***** ');
    writeln(' * FINITE ELEMENT PROGRAM * ');
    writeln('***** ');
    writeln; writeln;
    writeln(' PLEASE SELECT ');
    write(' FOR EXAMPLE FILE 1,2,3,Q ==> ');
    repeat
    begin
        if i = 0 then
            repeat
                ch := upcase(readkey);
            until ch in ['1','2','3','Q',#8]
        else
            repeat
                ch := upcase(readkey);
            until ch in ['1','2','3','Q',#8,#13];
        i := i+1;
        chl[i] := ch;
        write(chl[i]);
    end

```

```

procedure wait1;
begin

```

```

    num := num + 1;
    if num > 10 then
    begin
        readln;
        write(#7);
        clrscr;
        newline;
        blank;
        writeln(' :10,'Input Node List');
    end

```

```

    readln(fi,nelmts);
    if nelmts > maxelm then
    begin
        write('Element Number ',nelmts:4,' Exceed Maximum =',maxelm:3);
    end

```

```

        ierr := 1;
    end
else
    begin
    {
        write(#7);
        clrscr;
        newline;
        blank;
        writeln(' ':10,'Input Element List');
        blank;
        writeln(' ':3,'I',' ':5,'J',' ':5,'K',' ':8,'Source');
        writeln;
        num := 0;}
        for loop := 1 to nelmts do
            begin
                readln(fi,nvtx[1,loop],nvtx[2,loop],nvtx[3,loop],
                    source[loop]);
                { wait2;
                writeln(nvtx[1,loop]:19,nvtx[2,loop]:6,nvtx[3,loop]:6,
                    ' ':4,source[loop]:10:4);}
            end;

            clrscr;
            newline;
            blank;
            writeln(' ':6,'Input Fixed potentials');
            blank;
            writeln(' ':6,'Node',' ':12,'Value');
            writeln;
            for i := 1 to nodes do
                begin
                    potent[i] := 0;
                    constr[i] := false
                end;
                repeat
                    readln(fi,i,xi);
                    writeln(' ':20,i:5,' ':8,xi:10:4);
                    if i <= nodes then
                        begin
                            constr[i] := true;
                            potent[i] := xi;
                        end
                    else
                        begin
                            ierr := 1;
                            writeln('Node Number ',i:3,' Exceeds Maximum =',
                                nodes:3);
                        end;
                until eof(fi);
                readln;
            end;
        end;
        close(fi);
    end;
end;

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

```

procedure s_matrix;
begin
    for i := 1 to nodes do
        begin
            {SET S-MATRIX AND RIGHT SIDE TO ALL ZEROS}

```

```

        rthdsd[i] := 0;
        for j := 1 to nodes do
            s[i,j] := 0;
        end;
    end;
end;

procedure compute_area;
begin
    ie := loop;
    i := nvtx[1,ie];
    j := nvtx[2,ie];
    k := nvtx[3,ie];
    area := abs((x[j]-x[i]) * (y[k]-y[i]) -
                (x[k]-x[i]) * (y[j]-y[i])) / 2;
    { writeln('area',loop,'=',area:2:2);readln}
end;

procedure compute_ctng;
begin
    ctng := ((x[j]-x[i]) * (x[k]-x[i]) +
             (y[j]-y[i]) * (y[k]-y[i])) / (2 * area);
end;

procedure move_value;
begin
    i4 := i1;
    i1 := i2;
    i2 := i3;
    i3 := i4;
    l := i;
    i := j;
    j := k;
    k := l;
end;

procedure process; {PROCESS ELEMENT BY ELEMENT}
begin
    for loop := 1 to nelmts do
        begin
            compute_area;
            {
                ie := loop;
                i := nvtx[1,ie];
                j := nvtx[2,ie];
                k := nvtx[3,ie];
                area := abs((x[j]-x[i]) * (y[k]-y[i]) -
                            (x[k]-x[i]) * (y[j]-y[i])) / 2;
                writeln('area',loop,'=',area:2:2);readln;}
            for l := 1 to nve do
                begin
                    for m := 1 to nve do telm[l,m] := area/12;
                    telm[l,l] := 2 * telm[l,l];
                end;
            i1 := 1;
            i2 := 2;
            i3 := 3;
            for l := 1 to nve do
                for m := 1 to nve do
                    selm[l,m] := 0;
                for nvrtext := 1 to 3 do

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ หากมีข้อผิดพลาดหรือต้องการแจ้งแก้ไข กรุณาแจ้งผู้ดูแลระบบหรือติดต่อฝ่ายเทคนิค

```

begin
  compute_ctng;
  { ctng := ((x[j]-x[i]) * (x[k]-x[i]) +
            (y[j]-y[i]) * (y[k]-y[i])) / (2 * area);}
  ctng2 := ctng/2;
  selm[i2,i2] := selm[i2,i2] + ctng2;
  selm[i2,i3] := selm[i2,i3] - ctng2;
  selm[i3,i2] := selm[i3,i2] - ctng2;
  selm[i3,i3] := selm[i3,i3] + ctng2;
  move_value;
{
  i4 := i1;
  i1 := i2;
  i2 := i3;
  i3 := i4;
  l := i;
  i := j;
  j := k;
  k := l;}
end;
for k := 1 to nve do
begin
  irow := nvtx[k,ie];
  if constr[irow] = true then
  begin
    s[irow,irow] := 1;
    rthdsd[irow] := potent[irow];
  end
  else
  begin
    for j := 1 to nve do
    begin
      icol := nvtx[j,ie];
      if constr[icol] = true then
        rthdsd[irow] := rthdsd[irow] + telm[k,j] * source[ie]
          - selm[k,j] * potent[icol]
      else
      begin
        s[irow,icol] := s[irow,icol] + selm[k,j];
        rthdsd[irow] := rthdsd[irow] + telm[k,j] * source[ie];
      end;
    end;
  end;
end;
end;
s[1,1] := sqrt(s[1,1]);
s[2,1] := s[2,1]/s[1,1];
s[1,2] := s[2,1];
s[2,2] := sqrt(s[2,2] - s[2,1] * s[2,1]);
for irow := 3 to nodes do
begin
  irowl := irow - 1;
  s[irow,1] := s[irow,1]/s[1,1];
  s[1,irow] := s[irow,1];
  for icol := 2 to irowl do
  begin
    icoll := icol - 1;
    sum := 0;
    for k := 1 to icoll do
      sum := sum + s[irow,k]*s[icol,k];

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆก็ตาม หากมีข้อผิดพลาดหรือต้องการแจ้งแก้ไข กรุณาแจ้งไปยังเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

        s[irow,icol] := (s[irow,icol] - sum)/s[icol,icol];
        s[icol,irow] := s[irow,icol];
    end;
    sum := 0;
    for k := 1 to irow1 do
        sum := sum + s[irow,k]*s[irow,k];
        s[irow,irow] := sqrt(s[irow,irow] - sum);
    end;
    rthdsd[1] := rthdsd[1]/s[1,1];
    for irow := 2 to nodes do
    begin
        irow1 := irow - 1;
        sum := 0;
        for icol := 1 to irow1 do
            sum := sum + s[irow,icol]*rthdsd[icol];
            rthdsd[irow] := (rthdsd[irow] - sum)/s[irow,irow];
        end;
        potent[nodes] := rthdsd[nodes]/s[nodes,nodes];
        for k := 2 to nodes do
        begin
            irow := nodes + 1 - k;
            sum := 0;
            irow1 := irow + 1;
            for icol := irow1 to nodes do
                sum := sum + s[irow,icol]*potent[icol];
                potent[irow] := (rthdsd[irow] - sum)/s[irow,irow];
            end;
            clrscr;
            write(#7);
            newline;
            blank;
            writeln(' ':12,'Final solution');
            blank;
            writeln(' I', ' ':10,'X', ' ':11,'Y', ' ':5,'Potential');
            writeln;
            num := 0;
            for i := 1 to nodes do
            begin
                wait;
                blank;
                writeln(i:4, ' ',x[i]:10:2, ' ',y[i]:10:2, ' ',potent[i]:10:5);
            end;
            readln;
        end;
    end;
end;

```

```

begin
    { MAIN PROGRAM }
    clrscr;
    ierr := 0;
    repeat
        choice;
        write(#7);
        case chl[1] of
            '1' : data := 'data.dat';
            '2' : data := 'data1.dat';
            '3' : data := 'data2.dat';
        end;
        if chl[1] <> 'Q' then
            begin

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
 ไม่ควรเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
 ไม่ควรนำข้อมูลไปใช้ในการค้า
 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
get_data;
if ierr<>0 then
    writeln('Cannot Continue Processing')
else
    begin
        s_matrix;
        process;
        clrscr;
    end;
end;
until ch1[1] = 'Q';
clrscr;
sound;
end.
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

program test;
uses crt,graph;
const maxX = 100{8}; maxnod = 100;
      maxY = 100{6};
var   graphdriver,graphmode : integer;
      x,y,nodes,num,i,j,k : integer;
      x1 : array[1..maxX] of real{integer};
      y1 : array[1..maxY] of real{integer};
      poten : array[1..maxnod] of real;
      co : array[0..maxX,0..maxY] of real;
      fi : text;
      compare : real;

procedure open_graph;
begin
  graphdriver := detect;
  initgraph(graphdriver,graphmode,'');
end;

procedure close_graph;
begin
  closegraph;
end;

procedure grid;
var   x1,y1,i : integer;
begin
  x1 := 200;
  y1 := 50;
  for i := 1 to {2}8 do { Vertical }
  begin
    moveto(x1,50);
    setlinestyle(1,$5555,1);
    lineto(x1,300);
    x1 := x1 + {350}50;
  end;
  settextstyle(0,0,1);
  outtextxy(210,20,'X');
  moveto(200,50); lineto(200,25);
  moveto(190,35); lineto(200,25); lineto(210,35);
  for i := 1 to 6 do { Horizontal }
  begin
    moveto(200,y1);
    lineto(550,y1);
    y1 := y1 + 50;
  end;
  settextstyle(0,0,1);
  outtextxy(585,305,'Y');
  moveto(550,300); lineto(580,300);
  moveto(570,310); lineto(580,300); lineto(570,290);
  { outtextxy(170,50,'100');}
  outtextxy(170,100,'100');
  outtextxy(170,150,'75');
  outtextxy(170,200,'50');
  outtextxy(170,250,'25');
  outtextxy(175,300,'0');

```

```

end;

procedure getdata;
begin
  assign(fi,'out.dat');
  reset(fi);
  i := 1;
  clrscr;
  while not eof(fi) do
  begin
    readln(fi,x1[i],y1[i],poten[i]);
    {
      writeln(x1[i]:10:2,y1[i]:10:2,poten[i]:10:5);}
    i := i + 1;
  end;
  nodes := i;
  close(fi);
end;

```

```

procedure checkX;
begin
  if x1[i] = 0.00 then
    x := 200;
  if x1[i] = 1.00 then
    x := 250;
  if x1[i] = 2.00 then
    x := 300;
  if x1[i] = 3.00 then
    x := 350;
  if x1[i] = 4.00 then
    x := 400;
  if x1[i] = 5.00 then
    x := 450;
  if x1[i] = 6.00 then
    x := 500;
  if x1[i] = 7.00 then
    x := 550;
end;

```

```

procedure checkY;
begin
  if y1[i] = 0.00 then
    y := 300;
  if y1[i] = 1.00 then
    y := 250;
  if y1[i] = 2.00 then
    y := 200;
  if y1[i] = 3.00 then
    y := 150;
  if y1[i] = 4.00 then
    y := 100;
  if y1[i] = 5.00 then
    y := 50;
end;

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

procedure builtgraph;

```

```

begin
  setlinestyle(0,0,3);
  for i := 1 to nodes do
  begin
    if i = 1 then
    begin
      checkX;
      checkY;
      moveto(x,y); putpixel(x,y,1);
      compare := poten[i];
    end
    else
    begin
      if (compare = poten[i]) or (compare=poten[i]+1) or
        (compare=poten[i]-1) then
      begin
        checkX;
        checkY;
        lineto(x,y);
        compare := poten[i]
      end
      else
      begin
        checkX;
        checkY;
        moveto(x,y); putpixel(x,y,1);
        compare := poten[i]
      end;
    end;
  end;
end;

begin
  { MAIN PROGRAM }
  getdata;
  open_graph;
  grid;
  readln;
  builtgraph;
  readln;
  close_graph;
end.

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

FILE "DATA1.DAT"

```
-----  
12  
1 0 0  
2 1 0  
3 2 0  
4 0 1  
5 1 1  
6 2 1  
7 0 2  
8 1 2  
9 2 2  
10 0 3  
11 1 3  
12 2 3  
12 2 3  
1 2 5  
1 4 5  
2 3 6  
2 5 6  
4 5 8  
4 7 8  
5 8 9  
5 6 9  
7 8 11  
7 10 11  
8 11 12  
8 9 12  
  
1 0  
2 0  
3 0  
10 100  
11 100  
12 100
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

FILE "DATA2.DAT"

35			
1	0	0	
2	1	0	
3	2	0	
4	3	0	
5	4	0	
6	5	0	
7	6	0	
8	0	1	
9	1	1	
10	2	1	
11	3	1	
12	4	1	
13	5	1	
14	6	1	
15	0	2	
16	1	2	
17	2	2	
18	3	2	
19	4	2	
20	5	2	
21	6	2	
22	0	3	
23	1	3	
24	2	3	
25	3	3	
26	4	3	
27	5	3	
28	6	3	
29	0	4	
30	1	4	
31	2	4	
32	3	4	
33	4	4	
34	5	4	
35	6	4	
48			
1	8	9	1
1	2	9	1
2	3	9	1
3	9	10	1
3	10	11	1
3	4	11	1
4	5	11	1
5	11	12	1
5	12	13	1
5	6	13	1
6	7	13	1
7	13	14	1
8	9	15	1
9	15	16	1
9	16	17	1
9	10	17	1
10	11	17	1



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ถ้าหากมีข้อผิดพลาดใดๆ ทั้งนั้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

11	17	18	1
11	18	19	1
11	12	19	1
12	13	19	1
13	19	20	1
13	20	21	1
13	14	21	1
15	22	23	1
15	16	23	1
16	17	23	1
17	23	24	1
17	24	25	1
17	18	25	1
18	25	26	1
18	19	26	1
19	26	27	1
19	20	27	1
20	21	27	1
21	27	28	1
22	23	29	1
23	29	30	1
23	30	31	1
23	24	31	1
24	25	31	1
25	31	32	1
25	32	33	1
25	26	33	1
26	27	33	1
27	33	34	1
27	34	35	1
27	28	35	1
29	100		
30	100		
31	100		
32	100		
33	100		
34	100		
35	100		
1	0		
2	0		
3	0		
4	0		
5	0		
6	0		
7	0		



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

 * FINITE ELEMENT PROGRAM *

PLEASE SELECT
 FOR EXAMPLE FILE 1,2,3,Q ==> 1

Input Node List

N	X	Y
1	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000
3	2.0000	0.0000
4	0.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000
6	2.0000	1.0000
7	0.0000	2.0000
8	1.0000	2.0000
9	2.0000	2.0000
10	0.0000	3.0000

Input Node List

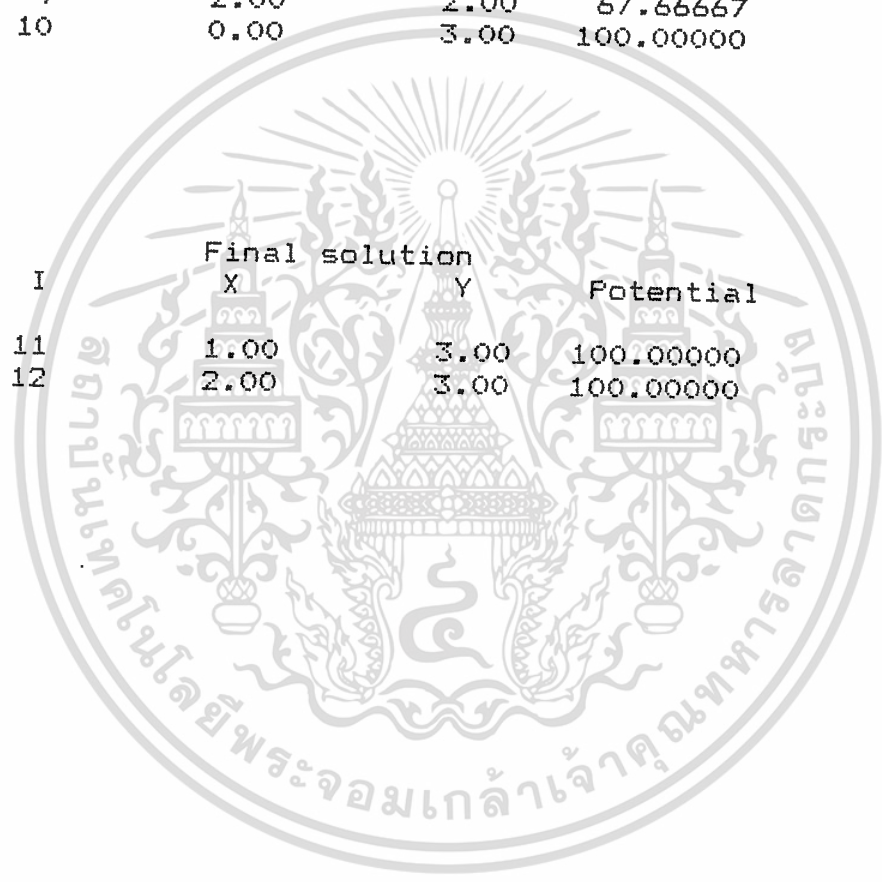
N	X	Y
11	1.0000	3.0000
12	2.0000	3.0000

Input Fixed potentials

Node	Value
1	0.0000
2	0.0000
3	0.0000
10	100.0000
11	100.0000
12	100.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	Final solution		Potential
	X	Y	
1	0.00	0.00	0.00000
2	1.00	0.00	0.00000
3	2.00	0.00	0.00000
4	0.00	1.00	34.33333
5	1.00	1.00	34.33333
6	2.00	1.00	34.33333
7	0.00	2.00	67.66667
8	1.00	2.00	67.66667
9	2.00	2.00	67.66667
10	0.00	3.00	100.00000



I	Final solution		Potential
	X	Y	
11	1.00	3.00	100.00000
12	2.00	3.00	100.00000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

* FINITE ELEMENT PROGRAM *

PLEASE SELECT
FOR EXAMPLE FILE 1,2,3,0 ==> 2

Input Node List

N	X	Y
1	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.0000
3	2.0000	0.0000
4	3.0000	0.0000
5	4.0000	0.0000
6	5.0000	0.0000
7	6.0000	0.0000
8	0.0000	1.0000
9	1.0000	1.0000
10	2.0000	1.0000

Input Node List

N	X	Y
11	3.0000	1.0000
12	4.0000	1.0000
13	5.0000	1.0000
14	6.0000	1.0000
15	0.0000	2.0000
16	1.0000	2.0000
17	2.0000	2.0000
18	3.0000	2.0000
19	4.0000	2.0000
20	5.0000	2.0000

Input Node List

N	X	Y
21	6.0000	2.0000
22	0.0000	3.0000
23	1.0000	3.0000
24	2.0000	3.0000
25	3.0000	3.0000
26	4.0000	3.0000
27	5.0000	3.0000
28	6.0000	3.0000
29	0.0000	4.0000
30	1.0000	4.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ที่อื่นทั้งห้ามมิให้เผยแพร่ข้อมูลนี้หรือเนื้อหาและข้อมูลอื่นใดที่ปรากฏในเอกสารนี้ไปยังบุคคลอื่นใดโดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Input Node List		
N	X	Y
31	2.0000	4.0000
32	3.0000	4.0000
33	4.0000	4.0000
34	5.0000	4.0000
35	6.0000	4.0000

Input Fixed potentials
Node Value

29	100.0000
30	100.0000
31	100.0000
32	100.0000
33	100.0000
34	100.0000
35	100.0000
1	0.0000
2	0.0000
3	0.0000
4	0.0000
5	0.0000
6	0.0000
7	0.0000

Final solution			
I	X	Y	Potential
1	0.00	0.00	0.00000
2	1.00	0.00	0.00000
3	2.00	0.00	0.00000
4	3.00	0.00	0.00000
5	4.00	0.00	0.00000
6	5.00	0.00	0.00000
7	6.00	0.00	0.00000
8	0.00	1.00	26.45258
9	1.00	1.00	26.55124
10	2.00	1.00	26.45531

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	Final solution		Potential
	X	Y	
11	3.00	1.00	26.55593
12	4.00	1.00	26.44367
13	5.00	1.00	26.54397
14	6.00	1.00	26.44716
15	0.00	2.00	52.04116
16	1.00	2.00	51.96375
17	2.00	2.00	52.04740
18	3.00	2.00	51.99138
19	4.00	2.00	52.00813
20	5.00	2.00	51.95173

I	Final solution		Potential
	X	Y	
21	6.00	2.00	52.03404
22	0.00	3.00	76.45123
23	1.00	3.00	76.54854
24	2.00	3.00	76.44584
25	3.00	3.00	76.52074
26	4.00	3.00	76.47907
27	5.00	3.00	76.55409
28	6.00	3.00	76.45222
29	0.00	4.00	100.00000
30	1.00	4.00	100.00000

I	Final solution		Potential
	X	Y	
31	2.00	4.00	100.00000
32	3.00	4.00	100.00000
33	4.00	4.00	100.00000
34	5.00	4.00	100.00000
35	6.00	4.00	100.00000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

- 1.FINITE ELEMENT FORELECTRICAL ENGINEERS, P.P. SILVESTER,
RL.FERRARI
- 2.THE FINITE ELEMENT METHOD, A FISRT APPROACH, A.J. DAVIES
- 3.THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEER, S.S.RAO
- 4.APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS, LARRY J.SEGERLIND
- 5.THE FINITE ELEMENT METHOD FOR ENGINEERING, KENNETT H.HUEBNEN
- 6.FINITE ELEMENT ANALYSIS FROM CONCEPT TO APPLICATION,
DAVID S.BURNETT
- 7.FINITE ELEMENT METHOD, H,R.SCHWARZ
- 8.FINITE ELEMENT COMPUTATIONAL ASPECTS, GRAHAM F. CAVEY ,
J.TINSLEY ODEN
- 9.FINITE ELEMENT PROGRAMMING, E.HINTON AND D.R.J. OWEN
- 10.ANALYSIS AND COMPUTATION OF ELECTRIC AND MAGNATIC FIELD
PROBLEMS, K.J. BINNS AND P.J. LAWVENSON

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญาโทชั้นนี้ได้รับความช่วยเหลืออย่างดีจาก อ. สมเจตน์ เทียมเมือง และ อ. จงรักษ์ บุญเส็ง ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ตลอดการทำปริญญาโทชั้นนี้ รวมทั้งเพื่อนๆ และผู้ช่วยเหลือให้คำแนะนำอันมีค่า และเป็นประโยชน์อย่างมาก ทางคณะผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมาไว้ ณ ที่นี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้