การลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้น

Model Reduction in Linear Systems

โดย

นายกิตติ เลิศพิริยสุวัฒน์
นายอรุณศักดิ์ ชื่นวงศ์อรุณ

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2535

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2535

ภาควิชา วิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง การลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้น

ผู้จัดทำ

1. นายกิตติ เลิศพิริยสุวัฒน์ 32-1018
2. นายอรุณศักดิ์ ชื่นวงศ์อรุณ 32-1423

รองศาสตราจารย์ วิพันธ์ ปรีชาพานิช อาจารย์ที่ปรึกษา

(...)

หัวข้อปริญญานิพนธ์	การลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้น		
นักศึกษา	นาย กิตติ	เลิศพิริยสุวัฒน์	32-1018
	นาย อรุณศักดิ์	ชื่นวงศ์อรุณ	32-1423
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ วิพันธ์ ปรีชาพานิช		
ปีการศึกษา	2535		

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันนี้ การลดทอนอันดับของระบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์หรือสัมประสิทธิ์ของระบบ ที่เรียกว่า "การสร้างแบบจำลองระบบลดทอน" หรือ "Model Reduction" ได้มีอยู่หลายวิธีในการประมาณค่า แต่วิธีเหล่านั้นยุ่งยาก และซับซ้อนเกินไปในการนำมาสร้างแบบจำลอง

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ได้นำเสนอวิธีในการสร้างแบบจำลองระบบ โดยประยุกต์วิธีการประมาณค่าของพาเด (Pade' Approximation) มาใช้เพื่อให้แบบจำลองระบบลดทอนมีผลตอบสนองของเอาท์พุทใกล้เคียงกับระบบต้นแบบเดิมมากที่สุด รวมทั้งยังคงการรักษาสถานะทางเสถียรภาพของระบบเอาไว้

นอกจากนั้น ยังได้พัฒนาซอฟต์แวร์ ที่ใช้ประกอบกับวิธีเหล่านี้ ซึ่งต้องทำงานภายใต้สภาวะแวดล้อมของโปรแกรมวินโดวส์ โดยสามารถลดทอนอันดับของระบบ , ทดสอบเสถียรภาพ และแสดงผลตอบสนองในโดเมนเวลาของระบบทั้งสองได้

THESIS	Model Reduction in Linear Systems		
STUDENTS	Mr. Kitti	Lertpiriyasuwat	32-1018
	Mr. Aroonsak	Chuenwongaroon	32-1423
THESIS ADVISOR	Assoc. Vipan	Prijapanij	
ACADEMIC YEAR	1992		

ABSTRACT

In the present day, there are many techniques in the reduction order of Linear Time-Invariant Systems by evaluating either parameters or coefficients, calls " Model Reduction ", but their methods are too complicated for practice.

This thesis proposes a method to contract a model reduction by Pade' Approximation that make time response of the reduced model very close to time response of the prototype system and still retain stability in the sense that the model is stable if the system is stable.

In addition, the software was developed to support this method that is used as Windows_Application. It has many outstanding features. For instance, the maximum times of reduction system are four times, many time-responses can be plotted on the same frame, and it can test stability of system.

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ วิพันธ์ ปรีชาพานิช เป็นอย่างสูง ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาการให้แก่ผู้เขียนตลอดเวลา ที่ได้ทำการศึกษาอยู่ที่สถาบันแห่งนี้ อีกทั้งยังให้คำปรึกษา และคำแนะนำในการแก้ปัญหาต่าง ๆ จนกระทั่ง ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบคุณ ชุมนุมคอมพิวเตอร์ ลาดกระบัง ที่เอื้อเฟื้ออุปกรณ์และซอฟต์แวร์ที่ใช้ในการทำปริญญานิพนธ์

ขอขอบคุณ เพื่อน ๆ และ น้อง ๆ ที่สนับสนุนกำลังใจเต็มเปี่ยม

สารบัญ

สารบัญรูป

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

ปัจจุบันนี้การวิเคราะห์ระบบโดยทั่วไป ไม่ว่าจะเป็นระบบตามโรงงานอุตสาหกรรม หรือระบบใดๆ ก็ตามมักจะพบว่า ระบบที่วิเคราะห์จะเป็นระบบควบคุมขนาดใหญ่ที่มีอันดับสูง เมื่อทำการวิเคราะห์จะประสบกับปัญหาความยุ่งยากในการวิเคราะห์ และต้องสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายมาก จากปัญหานี้จึงเกิดแนวความคิดที่จะสร้าง แบบจำลองของระบบขึ้นมาแทนระบบเดิม โดยสร้างเป็นระบบที่มีอันดับ ขนาดเล็กกว่าระบบเดิม ซึ่งขณะเดียวกัน ผลตอบสนองของระบบ ทั้งสองจะต้องใกล้เคียงกันที่สุด

ในการวิเคราะห์การลดทอนอันดับของระบบ มีผู้สนใจศึกษาวิธีการต่าง ๆ ไว้เป็นจำนวนมากมาย มีหลายรูปแบบด้วยกัน ซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปแบบของคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน และมีอยู่หลายวิธีในการลดทอนอันดับของระบบ (Chidambara 1969, Davison 1966 และ Nagaraj 1971) ที่ยึดหลักการคงโพล เด่น (Dominant poles) ของระบบเอาไว้ในแบบจำลองของระบบลดทอน และ วิธีการเหล่านี้ จะส่งผลให้แบบจำลองของระบบลดทอนมีเสถียรภาพหรือไม่มีเสถียรภาพ ขึ้นอยู่กับว่าถ้าระบบเดิมมีเสถียรภาพแล้ว แบบจำลองของระบบลดทอนมีเสถียรภาพด้วย แต่ถ้าระบบเดิมไม่มีเสถียรภาพแล้ว แบบจำลองของระบบลดทอนก็จะไม่มีเสถียรภาพด้วย แต่วิธีการเหล่านี้มักจะอธิบายระบบในรูปของ เวกเตอร์สถานะ (state-vector) ซึ่งจะต้องคำนวณหาค่าของไอเก็น (eigen-value) และไอเก็นเวกเตอร์ (eigen-vector) ของระบบ ซึ่งการคำนวณ นี้เป็นงานที่ยุ่งยากและใช้เวลานาน

ส่วนอีกวิธีหนึ่งในการลดทอนอันดับของระบบ (Paynter 1957, Bosley และ Lees 1972) โดยการทำให้โมเมนต์ของเวลา (time-moment) เริ่มต้นของแบบจำลองของระบบลดทอนมีค่าเหมือนในระบบเดิม การใช้วิธีเศษส่วนเชิงซ้อนต่อเนื่อง (continued-fraction) ในการสร้างแบบจำลองของ ระบบลดทอน (Chen และ Shieh 1970, Chuang 1971) ซึ่งถือเป็นกรณีพิเศษของ การประมาณค่าแบบพาเด (Baker 1965) สำหรับระบบที่เสถียรภาพเชิงอะซิมโตด (asymptotically stable) จะมีวิธีการเหมือนกับวิธีคงโมเมนต์ของเวลา (Zakian 1973) ซึ่งวิธีการเหล่านี้มีประโยชน์ หลายประการเป็นต้นว่า คำนวณได้ง่าย ให้ผลตอบสนองของเอาท์พุทที่สถานะคงที่ในโดเมนเวลาของระบบเดิม และแบบจำลองของระบบลดทอนเหมือนกัน ถ้าอินพุทอยู่ในรูป

$$\sum \alpha_i t^i$$

มีการนำวิธีเหล่านี้ไปใช้กันอย่างกว้างขวาง ในการสร้างแบบจำลองระบบลดทอน กระบวนการทางเคมี (Bosley และ Lees 1972) แต่ปัญหาที่เกิดคือ แม้ว่าระบบเดิมจะเสถียร แต่แบบจำลองของระบบลดทอนอาจจะไม่เสถียรได้

ในการศึกษาขั้นต้นนี้ได้แสดงถึงการทดลองวิเคราะห์ แบบจำลองของระบบลดทอน (Model Reduction) ในระบบเชิงเส้นในโดเมนของความถี่ (frequency domain) โดยเสนอวิธีการประมาณค่าแบบพาเด (Pade′ approximation) เพื่อให้แบบจำลองของระบบลดทอนคงไว้ ซึ่งโมเมนต์ของเวลา และพัฒนาวิธีการนี้ออกไป เพื่อให้ผลตอบสนองหนึ่งหน่วยเวลาของเอาท์พุท ของระบบเดิมและแบบจำลองของระบบลดทอน ใกล้เคียงกันที่สุด อนึ่ง ในการทดสอบระบบชั้นการทดลอง ได้สร้างโปรแกรมเพื่อใช้ในการทดลองขึ้นด้วยภาษา Visual Basic on Windows ซึ่งเป็นโปรแกรมที่สร้างแบบจำลองของระบบลดทอนโดยใช้อัลกอลิทึม ที่พัฒนามาจากวิธีของพาเด ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของระบบ แสดงผลตอบสนองในโดเมนของเวลาและทดสอบเสถียรภาพของระบบและแบบจำลองของระบบลดทอน

บทที่ 2

การวิเคราะห์ทฤษฎีการประมาณค่าแบบพาเด

(Pade' Approximation)

2.1 ความเป็นมาและเหตุผลจำเป็น

ในการวิเคราะห์ และศึกษาระบบควบคุมสมัยใหม่ สำหรับระบบควบคุมเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Linear time-invariant) อาจแทนได้ด้วยสมการ

$$(D^{(n)}+a_{n-1}D^{(n-1)}+..+a_1D+a_0)y(t)=(b_{n-1}D^{(n-1)}+b_{n-2}D^{(n-2)}+..+b_1D+b_0)u(t) \quad \text{.......(1)}$$

เมื่อกำหนด u(t) และ y(t) คืออินพุทและเอาท์พุทของระบบตามลำดับ โดยที่

$$D^{(n)}=\frac{d^n}{dt^n}$$

จากสมการที่ (1) ถ้าให้

$$u(t) = (D^{(n)} + a_{n-1}D^{(n-1)} + \ldots + a_1D + a_0)z(t)$$

จะได้ว่า

$$y(t) = (b_{n-1}D^{(n-1)} + b_{n-2}D^{(n-2)} + \ldots + b_1D + b_0)z(t)$$

ถ้าให้ $x_n(t)$ เป็นตัวแปรสถานะ (state variable) มีนิยามคือ

$$x_1(t) = z(t)$$

$$x_2(t) = Dz(t)$$

$$x_3(t) = D^{(2)}z(t)$$

....

$$x_n(t) = D^{(n-1)}z(t)$$

จะได้สมการที่ (1) ซึ่งสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของควบคุมได้ (controllable form) คือ

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & . & . & . & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

โดยมีสมการเอาท์พุทเป็น

$$y(t) = [\, b_0 \; b_1 \; b_2 \ldots b_n \,]\, x(t)$$

เขียนเป็นรูปอย่างง่ายได้

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

สมการที่ (2) เรียกว่า สมการสถานะ (state equation) และ x(t) เรียกว่า เวกเตอร์สถานะ (state vector) โดยที่ A,B และ C เป็นเมตริกซ์ขนาด n×n, n×1 และ 1×n ตามลำดับ

เราสามารถแสดงการวิเคราะห์ระบบ ในโดเมนของความถี่ได้ โดยการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของสมการที่ (1) ได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเป็น

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+..+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+..+a_1 s+b_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

เมื่อ Y(s) และ U(s) เป็นการแปลงลาปลาซ ของ y(t) และ u(t) ตามลำดับ

สำหรับในกรณีระบบที่ทำการวิเคราะห์เป็นระบบขนาดใหญ่ เมื่อทำการวิเคราะห์แล้วจะได้จำนวนตัวแปรสถานะมากมายหลายร้อยสถานะ ซึ่งเมตริกซ์ที่ปรากฎอยู่ในสมการสถานะ จะมีมิติขนาดใหญ่มาก ถ้าวิเคราะห์ในโดเมนของความถี่ ก็จะได้สมการแสดงค่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีอันดับสูง ๆ ซึ่งการวิเคราะห์ระบบเหล่านี้กระทำได้ยากมาก

ดังนั้นจึงเกิดแนวความคิดที่จะต้องหารูปแบบที่จะลดทอนอันดับของระบบ ให้อยู่ในรูปที่มีขนาดอันดับต่ำลง เพื่อสะดวกในการวิเคราะห์ และศึกษาผลตอบสนองของระบบ โดยผลตอบสนองของแบบ-จำลองของระบบลดทอนใหม่นี้ จะต้องมีค่าใกล้เคียงกับ ระบบเดิม มากที่สุด

2.2 จุดมุ่งหมายหลัก

ดังนั้น จากสมการที่ (1) เป็นระบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา ระบบใด ๆ จะสามารถแสดงได้ด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน คือ

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + .. + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + .. + a_1 s + a_0} \quad \text{.....................................(5)}$$

เมื่อทำการลดทอนอันดับของระบบเดิม แล้วสร้างแบบจำลองระบบลดทอนเป็นระบบใหม่ ซึ่งมีสมการฟังก์ชันถ่ายโอน เป็นระบบที่มีอันดับน้อยกว่าระบบเดิม ให้แทนด้วย

$$R(s) = \frac{q_k s^k + q_{k-1}s^{k-1} + \ldots + q_1 s + q_0}{p_l s^l + p_{l-1}s^{l-1} + \ldots + p_1 s + p_0} \quad \text{.....................................(6)}$$

(โดยที่ $k < m$ และ $l < n$)

ซึ่งเงื่อนไขของแบบจำลองระบบลดทอนคือ ผลตอบสนอง (6) จะต้องมีค่าใกล้เคียงกับระบบเดิม (5) มากที่สุด

2.3 ทฤษฎีการประมาณค่าแบบพาเด

ในความหมายทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎีนี้มีประโยชน์ในการประมาณฟังก์ชัน ให้เป็นเศษส่วนเชิงเส้นของฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบพาเด

กำหนดให้

$$F_{m,n}(s) = [m,n] = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \qquad \text{...(7)}$$

เป็นเศษส่วนเชิงเส้นพหุนามที่ประมาณฟังก์ชัน f(s) : $P_m(s)$,$Q_n(s)$ เป็นโพลิโนเมียลดีกรี m และ n ตามลำดับ และจะเรียก N = m+n ว่าเป็นดัชนี (index) ของฟังก์ชัน $F_{m,n}(s)$

นิยาม (Definition)

[m,n] เป็นการประมาณค่าแบบพาเด ของ f(s) ถ้ากระจาย [m,n] และ f(s) ออกเป็นอนุกรมกำลังแล้ว จะต้องมีค่าที่เหมือนกัน N เทอม (นั่นคือ พจน์จะต้องเหมือนกัน ถึงอันดับ s^{m+n}

เริ่มวิธีการประมาณ

ในการประมาณให้อยู่ในรูป (7) สำหรับค่า m,n ที่กำหนดมาให้เลือก $P_m(s)$ และ $Q_n(s)$ ให้ f(s) และ $F_{m,n}$ มีค่าเท่ากันที่ s = 0 และมีค่าอนุพันธ์ (derivative) หลายค่าที่ s = 0 ในกรณีที่ n = 0 การประมาณจะอยู่ในรูปเป็นการกระจายแบบแมคคลอริน ของ f(s) เราจะสมมติอนุกรมแมคคลอริน สำหรับ f(s) มีอยู่ในบริเวณย่านใกล้ ๆ รอบ s = 0 มี 2 เหตุผลด้วยกันสำหรับข้อเลือกใด ๆ ของ s = 0

1. จะเป็นวิธีการที่ง่ายกว่าสำหรับค่า s ใด ๆ
2. ช่วงขอบเขตที่จะทำการประมาณฟังก์ชัน ส่วนใหญ่จะมีค่า 0 อยู่ แต่ถ้าไม่มีค่า 0 อยู่ ก็สามารถ เปลี่ยนตัวแปร ด้วยวิธีง่าย ๆ เพื่อให้มี 0 ได้

สมมติว่า $P_m(s)$ และ $Q_n(s)$ ไม่สามารถแยกแฟคเตอร์ได้

ให้

$$P_m(s) = \sum_{j=0}^{m} a_j s^j$$

$$Q_n(s) = \sum_{j=0}^{n} b_j s^j, b_0 = 1 \qquad \text{.................................(8)}$$

จาก (7) จะได้ว่า

$$F_{m,n}(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + .. + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + .. + b_n s^n} \qquad \text{..............................(9)}$$

และให้ f(s) มีอนุกรมแมคลอริน

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j s^j$$
$$= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + ... \qquad \text{..............................(10)}$$

จากสมการที่ (9) และ (10) พิจารณาผลต่าง

$$f(s) - F_{m,n}(s) = \frac{(\sum_{j=0}^{\infty} c_j s^j)(\sum_{j=0}^{n} b_j s^j) - \sum_{j=0}^{m} a_j s^j}{\sum_{j=0}^{n} b_j s^j} \qquad \text{............................(11)}$$

เนื่องจากมีค่าคงที่ N+1 ตัว ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ a_j m+1 ตัว, ของ b_j n ตัว เราจะทำให้ $f(s) - F_{m,n}(s)$ และค่าอนุพันธ์ N ค่าแรก ให้มีค่าเท่ากับ 0 ที่ s = 0 ซึ่งสามารถทำได้ ถ้าเทอมเศษทางด้าน ขวาของ (11) มีกำลังสูงสุด ระดับดีกรี N+1 ดังนั้น จึงอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$(\sum_{j=0}^{\infty} c_j s^j)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j) - \sum_{j=0}^{m} a_j s^j = \sum_{j=N+1}^{\infty} d_j s^j \qquad \text{............................(12)}$$

สัมประสิทธิ์ของ s กำลัง N+1 เทอมแรกที่หายไปทางซ้ายของสมการ (12) จะอยู่ในรูปสมการ

$$\sum_{j=0}^{n} c_{N-s-j} b_j = 0 \ , \ s = 0,1,...,N-m-1 \qquad \text{..............................(13)}$$

$$(c_j = 0 \ \text{ if } j < 0 \ , \ b_0 = 1),$$

$$a_r = \sum_{j=0}^{r} c_{r-j} b_j \ , \ r = 0,1,...,m \qquad \text{..................................(14)}$$

$$(b_j = 0 \text{ if } j > n)$$

จากสมการที่ (13) และ (14) สามารถเขียนใหม่ได้เซตของสมการเชิงเส้นดังนี้

$a_0 = b_0c_0$

$a_1 = b_0c_1+b_1c_0$

. . . .

$a_m = b_0c_m+b_1c_{m-1}+. . .+b_mc_o$

. . . .

$$0 = b_0c_{m+n}+b_1c_{m+n-1}+. . .+b_nc_m \qquad ....(15)$$

จากสมการที่ (9) เขียนใหม่ โดยเป็นสมการของฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G(s)=\frac{Y_m(s)}{U_n(s)}=\frac{a_0+a_1s+a_2s^2+...+a_ms^m}{b_0+b_1s+b_2s^2+...+b_ns^n} \qquad ....(16)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ c_i ($i = 0,1,2,3,...$) หาได้จากสมการที่ (15) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ได้คือ

$$\begin{bmatrix} c_{m+1} & c_m & .. & .. & c_1 \\ c_{m+2} & c_{m+1} & .. & .. & c_2 \\ c_{m+3} & c_{m+2} & c_{m+1} & .. & c_3 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & .. & c_{m+2} & c_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ -c_2 \\ . \\ . \\ -c_m \end{bmatrix} \qquad ....(17)$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & .. & .. & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ c_m & c_{m-1} & .. & .. & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad ....(18)$$

โดยที่สมการที่ (18) แทนชุดของสมการที่ (15) จำนวน $(m+1)$ ส่วนสมการที่ (17) จะแทนชุดของสมการที่ (15) ที่เหลือ สมการที่ (17) และ (18) เป็นรูปแบบใหม่ของสมการที่ (15) และสำหรับรูปแบบ

ของฟังก์ชันถ่ายโอนโดยทั่วไป มักจะกำหนดให้ $b_n = b_{m+1} = 1$ สมการที่ (17) และ (18) สามารถเขียนให้ง่าย ขึ้นอยู่ในรูปแบบของพีชคณิตเมตริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{C_1 b} = -\mathbf{C}$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{C_2 b} \qquad \text{...(19),(20)}$$

สมการที่ (19) และ (20) แทนสมการที่ (17) และ (18) ตามลำดับ โดย $\mathbf{C_1}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติขนาดเท่ากับ $n \times n$ ส่วน $\mathbf{C_2}$ มีมิติ $(m+1) \times (m+1)$ a, b และ c เป็นเวกเตอร์สดมภ์ (column vector) มีขนาด (m+1),(n) และ (m+1) ตามลำดับ

ดังนั้น จากแนวความคิดของทฤษฎีการประมาณค่าแบบพาเดนี้ จะเห็นว่า ถ้าเรามีสมการของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งมีรูปแบบตามสมการ (16) แล้วจัดการให้อยู่ ในรูปแบบของสมการที่ (10) เมื่อเราเลือกจำนวนอันดับที่จะคงไว้ในแบบจำลองระบบลดทอน แล้วจึงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ได้ จากชุดสมการที่ (15)

2.4 <u>วิธีการประมาณค่าแบบพาเดและการนำไปใช้</u>

จากทฤษฎีที่ได้แสดงไว้ในหัวข้อที่ผ่านมา สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับ การลดทอนอันดับของฟังก์ชันถ่ายโอนได้ โดยลดทอนดีกรีจากโพลิโนเมียลดีกรีสูง ให้เป็นโพลิโนเมียลที่มีดีกรี ที่ต่ำลงนั่นเอง ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสูง

ระบบต้นแบบ

$$G(s) = \frac{d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \ldots + d_1 s + d_0}{e_n s^n + e_{n-1}s^{n-1} + \ldots + e_1 s + e_0} \qquad \text{.............................(21)}$$

G(s) สามารถกระจายเป็นอนุกรมอนันต์ รอบ s = 0 อยู่ในรูป

$$G(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots$$

โดยที่สัมประสิทธิ์สามารถหาได้จาก

$$c_0 = \frac{d_0}{e_0}$$

$$c_k = \frac{1}{e_0}[d_k - \sum_{j=1}^{k} e_j c_{k-j}], \qquad \forall k > 0 \quad \text{.................................(22)}$$

และ $d_k = 0$ ถ้า $\forall k > n-1$

ซึ่งค่าของ e_i จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับโมเมนต์ของเวลา (time-moment) ของระบบ

หลังจากลดทอนอันดับของระบบ (21) จะได้ แบบจำลองระบบลดทอนซึ่งมี ฟังก์ชันถ่ายโอน R(s) อันดับ k โดยให้มีโพลหนึ่งอยู่ที่ $s = -s_1$ ให้

ระบบลดทอนแล้ว

$$R(s) = \frac{a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots+a_{k-1}s^{k-1}}{b_0+b_1s+b_2s^2+\ldots+b_{k-1}s^{k-1}+s^k} \quad \text{..................................(23)}$$

อันดับเศษของ R(s) และ G(s) จะสมมติให้มีอันดับน้อยกว่าของส่วนอยู่หนึ่ง จากทฤษฎีที่ได้แสดงใน (3) จะได้ R(s) เป็นการประมาณแบบพาเดของ G(s) ซึ่งในที่สุด จะได้สมการ เชิงเส้นต่อไปนี้

$$a_0 = b_0c_0$$

$$a_1 = b_0c_1+b_1c_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(24)}$$

$$0 = b_0c_{2k-2}+b_1c_{2k-1}+\ldots+c_{k-1}$$

$$0 = b_0c_{2k-1}+b_1c_{2k-2}+\ldots+c_k$$

แต่เพราะว่า R(s) มีโพลที่ $s = s_1$ จากการใช้การประมาณแบบพาเด สมการสุดท้ายของ (15) สามารถแทนได้ด้วยสมการ

$$0 = b_0-b_1s_1+b_2s_1^2-\ldots+(-1)^k s^k \quad \text{..(25)}$$

ดังนั้น สมการเหล่านี้จะเป็นตัวกำหนด ค่าของสัมประสิทธิ์ b_i , a_i $(i = 0,1,2,...,k-1)$ ของ (23)

ในกรณีที่ ระบบถูกอธิบาย ในรูปตัวแปรสถานะ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \qquad \text{...(26)}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซ สมการ (26) จะได้ ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ คือ

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$
$$= (\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}s + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-3}\mathbf{B}s^2 + \ldots \qquad \text{................................(27)}$$
$$= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots$$

ซึ่ง

$$c_0 = (CA^{-1}B + D)$$
$$c_i = CA^{-(i+1)}B \ , \ \forall i > 0 \qquad \text{............................(28)}$$

ดังนั้น อัลกอริทึมในการลดทอนอันดับ อาจใช้กับการกระจายของ (27) โดยที่สัมประสิทธิ์ถูกกำหนดโดยใช้ (28)

นอกจากอัลกอริธึมในการสร้างแบบจำลองระบบลดทอน โดยวิธีของพาเด ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในข้างต้น ทฤษฎีการประมาณค่าแบบพาเด ยังสามารถขยายการใช้งาน และประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธีอื่นได้อีก ดังต่อไปนี้

2.4.1 การตีความหมายโดยใช้เศษส่วนย่อย

เป็นวิธีที่มีการประยุกต์เมื่อ ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ของระบบอยู่ในรูปของผลบวกเศษส่วยย่อย (Partial Sum) ดังนั้น ถ้าให้

$$G(s) = \frac{x_1}{1-\alpha_1 s} + \frac{x_2}{1-\alpha_2 s} + \ldots + \frac{x_n}{1-\alpha_n s} \quad \text{.......(29)}$$

ในการทดทอนอันดับ ให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายที่สุด เหลืออันดับ k จะต้องรักษา k พจน์แรกให้คงไว้ในแบบจำลองระบบลดทอน จากสมการ (29) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} G(s) &= x_1(1+\alpha_1 s+(\alpha_1 s)^2+\ldots) + x_2(1+\alpha_2 s+(\alpha_1 s)^2+\ldots) \\ &\quad + \ldots + x_n(1+\alpha_n s+(\alpha_n s)^2+\ldots) \\ &= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots \end{aligned}$$

ซึ่ง

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j^i \quad ; i = 0,1,2,\ldots$$

และให้แบบจำลองระบบลดทอนอยู่ในรูป

$$R(s) = \frac{y_1}{1-\alpha_1 s} + \frac{y_2}{1-\alpha_2 s} + \ldots + \frac{y_k}{1-\alpha_k s} \quad \text{.......(30)}$$

โดยที่ k คืออันดับของแบบจำลองระบบลดทอน ดังนั้น

$$\begin{aligned} R(s) &= y_1(1+\alpha_1 s+(\alpha_1 s)^2+\ldots) + y_2(1+\alpha_2 s+(\alpha_1 s)^2+\ldots) \\ &\quad + \ldots + y_k(1+\alpha_k s+(\alpha_k s)^2+\ldots) \\ &= c_0^1 + c_1^1 + c_2^1 + \ldots \end{aligned}$$

ซึ่ง $c_i^1 = \sum_{j=1}^{k} y_j \alpha_j^i$: i = 0,1,2,...

เนื่องจาก R(s) เป็นการประมาณแบบพาเดของ G(s) ดังนั้น $c_i^1 = c_i$ ซึ่งจะนำไปสู่เซตของสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2 & \alpha_{k+1}^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} & \alpha_{k+1}^{k-1} & \cdots & \alpha_n^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{........(27)}$$

จะพบว่าโพลที่ถูกตัดทิ้ง $\alpha_{k+1},\ldots\ldots,\alpha_n$ จะมีผลกระทบต่อการหาเรซิดิว y_i (i =1,2,3,..,k) เราสามารถสังเกตได้ว่า ระบบที่มีเสถียรภาพเชิงอะซิมโตด ทั้งของระบบอันดับสูง และแบบจำลองของระบบลดทอนอันดับต่ำ จะมีโมเมนต์ของเวลาเหมือนกัน และไม่มีค่าผิดพลาดที่สถานะคงที่ ทั้งนี้อินพุทของระบบจะต้องอยู่ในรูป

$$\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i t^i$$

2.4.2 <u>เทคนิคการใช้เกณฑ์เสถียรภาพของเราท์ร่วมกับวิธีการประมาณแบบพาเด</u>

กรณีของฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีรูปแบบเป็นเศษส่วนจะถือว่าเป็นกรณีพิเศษของ วิธีโมเมนต์ของเวลา (Time-moment Method) ซึ่งนั่นคือวิธีเหล่านี้ ล้วนเสมือนเป็นวิธีการประมาณค่าแบบพาเดทั้งสิ้น (Wall 1948) เทคนิควิธีการของเศษส่วนต่อเนื่องและโมเมนต์ของเวลา มีประโยชน์ในการใช้ลดทอนอันดับของระบบสูง ๆ มากเพราะสามารถคำนวณได้ไม่ยากนัก ไม่มีความซับซ้อนเท่าไร ค่าโมเมนต์ของเวลาและค่าที่สถานะคงที่ ของเอาท์พุทของระบบ และแบบจำลองระบบลดทอน จะมีค่าเหมือนกัน แต่จุด-

(Rossen and Lapidus 1972,Brown 1971) มีตรงที่ว่า แบบจำลองของระบบลดทอนที่ได้ อาจจะไม่เสถียร แม้บางครั้งระบบต้นแบบอันดับสูงเดิมจะมีเสถียรภาพก็ตาม

ได้มีการเสนอวิธีการในการปรับปรุงจุดบกพร่องนี้หลายวิธีด้วยกัน อย่างเช่น วิธีการคงโพลของระบบอันดับสูงไว้ในแบบจำลองระบบลดทอน และแนวความคิดของการประมาณค่าแบบพาเด ในกรณีมากกว่าหนึ่งจุด วิธีการนี้จะช่วยส่งเสริมความรู้สึกในเรื่องของเสถียรภาพ คือจะเสถียรได้ ถ้าระบบเดิมเสถียร (Shamash 1973c) , ใช้เกณฑ์เสถียรภาพของเราท์ (Routh Stabiliy Criterion) เพื่อใช้ในการคำนวณเทอมส่วนของ R(s) ส่วนเทอมเศษของ R(s) สามารถคำนวณโดย กระจายเศษฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเป็นผลบวกและผลคูณของเศษส่วนต่อเนื่อง ซึ่งสุดท้ายจะนำมาเชื่อมกัน (Hutton 1971) เมื่อพิจารณาอย่างละเอียดแท้จริงแล้ว วิธีการนี้ก็เป็นส่วนแฝงของวิธีพาเดนั่นเอง ต่อไปจะพิจารณาอัลกอริทึมการประมาณที่ใช้เกณฑ์เสถียรภาพของเราท์มาร่วม

- วิธีการเศษส่วนต่อเนื่อง

เริ่มต้นด้วยการกำหนด ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับสูง

$$G(s) = \frac{d_1 s^{s-1} + d_2 s^{s-2} + \ldots + d_n}{e_0 s^n + e_1 s^{n-1} + \ldots + e_n} \qquad \text{.......... (28)}$$

อัลกอริธึมของ Hutton เริ่มต้นด้วยการคำนวณฟังก์ชันถ่ายโอน $\overline{G}(s)$

$$\overline{G}(s) = \frac{1}{s} G\left(\frac{1}{s}\right) \qquad \text{.......... (29)}$$

$$\overline{G}(s) = \frac{d_n s^{n-1} + \ldots + d_1}{e_n s^n + e_{n-1} s^{n-1} + \ldots + e_0} \qquad \text{.......... (30)}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอน $\overline{G}(s)$ กระจายออกเป็นผลบวกและผลคูณ ของเศษส่วนต่อเนื่อง ดังแสดงข้างล่าง

$$\overline{G}(s)=\left(\frac{1}{1+\alpha_1 s}+\frac{1}{1+\alpha_2 s}+\cdots\frac{1}{1+\alpha_n s}\right)\Bigg[\beta_1$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha_2 s}+\frac{1}{\alpha_3 s}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n s}\right)\Bigg[\beta_2$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha_3 s}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n s}\right)\Bigg[\beta_3$$

$$\vdots$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha_n s}\right)\Big[\beta_n\Big]\cdots\Big]\Big]\Big] \qquad \text{................ (31)}$$

ซึ่ง

$$\left(\frac{1}{1+\alpha_1 s}+\frac{1}{1+\alpha_2 s}+\cdots\frac{1}{1+\alpha_n s}\right) \triangleq \cfrac{1}{1+\alpha_1 s+\cfrac{1}{\alpha_2 s+\cfrac{1}{\alpha_3 s+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{\alpha_n s}}}}}$$

เป็นเศษส่วนต่อเนื่อง Stieltjes นิยาม อัลกอริทึมสำหรับคำนวณ สัมประสิทธิ์ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ของเกณฑ์เถียรภาพของเราท์ (ระบบจะเสถียรแบบอะซิมโตติกคอล ก็ต่อเมื่อ $\alpha_i > 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$) สำหรับแบบจำลองของระบบลดทอน การกระจายแบบ α - β ของสมการ 31 จะสิ้นสุดที่ลำดับ k

$$\overline{R}(s)=\left(\frac{1}{1+\alpha_1 s}+\frac{1}{1+\alpha_2 s}+\cdots\frac{1}{1+\alpha_n s}\right)\Bigg[\beta_1$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha_2 s}+\frac{1}{\alpha_3 s}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n s}\right)\Bigg[\beta_2$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha_3 s}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n s}\right)\Bigg[\beta_3$$

$$\vdots$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha_n s}\right)\Big[\beta_n\Big]\cdots\Big]\Big]\Big] \qquad \text{................ (32)}$$

ซึ่งผลบวกจะปรากฏเป็นเป็นฟังก์ชันถ่ายโอน อันดับที่ k

$$\overline{R}(s) = \frac{a_k s^{k-1} + \ldots + a_1}{b_k s^k + \ldots + b_1 s + b_0} \qquad \ldots\ldots (33)$$

แล้วใช้เทคนิคการแปลงส่วนกลับ จะได้

$$R(s) = \frac{a_1 s^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 s^k + b_1 s^{k-1} + \ldots + b_k} \qquad \ldots\ldots (34)$$

เนื่องจาก $\alpha_i > 0$; $i = 1,2,\ldots,n$

ระบบอันดับ n มีเสถียรภาพเชิงอะซิมโตด และ เซต $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k\}$ เป็นสับเซตของ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ ดังนั้น ถ้าระบบอันดับสูงที่กำหนดให้ มีเสถียรภาพเชิงอะซิมโตดแล้ว แบบจำลองของระบบลดทอนอันดับต่ำที่คำนวณโดยวิธีการนี้ จะมีเสถียรภาพด้วย นั่นคือ การลดทอนอันดับของระบบวิธีนี้จะคงไว้ซึ่งความมีเสถียรภาพ

สัมประสิทธิ์ในอนุกรมกำลังของ G(s) และ R(s) รอบ s = 0 สามารถพิสูจน์ได้เหมือนกัน อย่างน้อย k เทอมแรก

ให้

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \qquad \ldots\ldots (35)$$

นิยาม พลังงานผลตอบสนองอิมพัลซ์ของระบบเป็น

$$I = \int_0^{\infty} g^2(t)dt \qquad \ldots\ldots (36)$$

จากทฤษฎีของแอสตรอม (Astrom(1970)) พลังงานผลตอบสนองอิมพัลซ์ I_k ของแบบจำลองระบบลดทอนอันดับ k จะสามารถกำหนดได้เป็น

$$I_k = E_1 + E_2 + \ldots + E_k \qquad ; k = 1,2,\ldots,n$$

โดย

$$E_i = \frac{\beta_i^2}{2\alpha_i} \qquad \ldots\ldots (37)$$

และ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n ; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n\}$ เป็นลำดับพารามิเตอร์แอลฟาและเบตา ที่ใช้ในการคำนวณแบบจำลองระบบลดทอน

เนื่องจากระบบที่มีเสถียรภาพเชิงอะซิมโตด ดังนั้น E_i จะมีค่าเป็นบวกเสมอ

จะได้

$$I_1 \leq I_2 \leq \ldots \leq I_n = I \qquad (38)$$

จะเห็นได้ว่า ระบบอันดับสูงจะมีการประมาณพลังผลตอบสนองอิมพัลซ์อย่างใกล้เคียง โดยใช้สมการ (37) เป็นเกณฑ์ ในการเลือกอันดับของแบบจำลองระบบลดทอน

- วิธีคงค่าอัลฟาพารามิเตอร์

จากวิธีการประมาณค่าแบบพาเดที่ได้กล่าวมาในตอนต้นของบทที่ 2 ตามอัลกอลิทึม ในสมการที่ (21) (22) (23) และ (24) เพื่อคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองระบบลดทอนนั้น มีปัญหาสำคัญที่ว่า แบบจำลอง ของระบบลดทอนที่ได้ อาจไม่มีเสถียรภาพก็ได้ แม้ว่าระบบต้นแบบเดิมจะเสถียรก็ตาม

วิธีการแก้ปัญหาเรื่องของเสถียรภาพ โดยการคำนวณส่วนของ R(s) ซึ่งให้ อัลฟาพารามิเตอร์ (α - parameter) เหมือนกับอัลฟาพารามิเตอร์ของ G(s) k ตัวแรก ในการคำนวณหา อัลฟาพารามิเตอร์ k ตัวแรกของ G(s) สามารถหาได้ดังนี้

ให้ (สมมติ n เป็นเลขคู่)

$$Q(s) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{e_0 + e_2 s^2 + \ldots + e_n s^n}{e_1 s + e_3 s^3 + \ldots + e_{n-1} s^{n-1}}} \qquad (39)$$

$$Q(s) = \cfrac{1}{1 + \alpha_1 \cfrac{1}{s} + \cfrac{1}{\alpha_2 \cfrac{1}{s} + \cfrac{1}{\ldots\ldots}}} \qquad (40)$$

$$+ \cfrac{1}{\alpha_n \cfrac{1}{s}}$$

เทอมส่วนของ R(s) จะถูกกำหนดโดยเทอมส่วนของเศษส่วนต่อเนื่อง

$$Q_k(s) = \cfrac{1}{1+\alpha_1 \cfrac{1}{s} + \cfrac{1}{\alpha_2 \cfrac{1}{s} + \cfrac{1}{\dots}}} \qquad \text{.......... (41)}$$

$$+\cfrac{1}{\alpha_k \cfrac{1}{s}}$$

เศษส่วนต่อเนื่อง (46) นี้ สามารถอินเวอร์ส โดยใช้เซตของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด หลังจากได้เทอมส่วนของ R(s) , b_i ทราบค่า และดังนั้น a_i (i = 0,1,...,k-1) จะสามารถหาได้ โดยการแก้สมการ (24) k สมการแยก

[ข้อสังเกต : อันดับเทอมเศษของแบบจำลองระบบลดทอนสามารถเลือกได้อย่างอิสระจากเทอมส่วน ใน ขณะวิธีเดิมต้องให้อันดับเทอมเศษน้อยกว่าเทอมส่วนอยู่หนึ่ง]

2.4.3 วิธีการหารแฟคเตอร์สังเคราะห์ (Modified factor divion method)

เป็นวิธีการประยุกต์ ในการหาสัมประสิทธิ์ตัวแบบจำลองระบบลดทอน ร่วมกับวิธีการประมาณค่าแบบพาเด โดยวิธีนี้เน้นในเรื่องของการคงค่าสถานะทางเสถียรภาพของระบบเอาไว้ เพื่อแก้ไขปัญหาทางด้านเสถียรภาพของระบบ โดยจะทำการปรับปรุงเทอมส่วน (modified denominator) ของระบบ แล้วทำการแปรค่าพารามิเตอร์ในเทอมส่วนนั้น ก็จะสามารถสร้างแบบจำลองระบบลดทอนได้ใน อันดับต่าง ๆ

ขั้นตอนแรก คือปรับปรุงเทอมส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนเต็มรูปของระบบ โดยเลือกค่าพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริง $p > 0$ ซึ่ง $s = -p$ จะเป็นรากของเทอมส่วนที่ปรับปรุงใหม่ สมมติว่า ระบบต้นแบบเดิมมีอันดับ n กำหนดด้วย

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad \text{.......... (42)}$$

โดยที่ N(s) เป็นโพลิโนเมียลเทอมเศษ และ

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

เป็นโพลิโนเมียลเทอมส่วนของระบบ (42)

พิจารณาโพลิโนเมียลดีกรี n ซึ่งกำหนดโดย

$$P(s) \equiv D(s)D(p) - D(-s)D(-p) \quad \text{.......................................} \quad (43)$$

โดย p .> 0 และเป็นจำนวนจริงใด ๆ

โดยทฤษฎีเศษ (remainder theorem) สามารถเห็นได้ง่ายจากสมการที่ (43) ว่า P(-p) = 0 และ (s + p) เป็นแฟคเตอร์ของ P(s) และสามารถพิสูจน์ได้ว่า P(s) ต้องเป็นเฮอร์วิทซ์ (Hurwitz) ถ้า D(s) เป็นเฮอร์วิทซ์ (นั่นคือ รากทั้งหมดอยู่ในทางด้านซ้ายของระนาบ s) นิยามโพลิโนเมียลอันดับ n-1

$$Q(s) \equiv \frac{P(s)}{s+p} \quad \text{.......................................} \quad (44)$$

ก็ต้องเป็นเฮอร์วิทซ์ด้วย

ถ้าโพลแฟคเตอร์ (s + p) เป็นโพลแฟคเตอร์ที่ไม่ต้องการในการประมาณค่า ของระบบต้นแบบเดิม G(s) ดังนั้นแบบจำลองอันดับ n - 1 จะมี Q(s) เป็นเทอมส่วนที่เสถียร (stable denominator) เทอมเศษจะใช้วิธีการของพาเดในการคำนวณประยุกต์ร่วม ซึ่งจะยังคงค่าผลรวมของโมเมนต์ของเวลา และมาร์คอฟพารามิเตอร์เอาไว้ ในแบบจำลองระบบลดทอน

ข้อกำหนดในการเลือกค่า p

โดยทั่วไปเพื่อให้สอดคล้องกับแบบจำลองที่คงสถานะทางเสถียรภาพ ค่าของ p ควรจะมากกว่าศูนย์ แต่อย่างไรก็ตาม จากการทดลองเชิงตัวเลขซึ่งสามารถจะสรุปได้ว่า ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดจะต้องเลือก p ให้อยู่ บนช่วง

$$\alpha \leq p \leq \beta$$

เมื่อ - α เป็นโพลเฉลี่ยของระบบ (42) จะสามารถกำหนดได้ด้วย

$$\alpha = \frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n} \quad \text{.......................................} \quad (45)$$

และ $-\beta$ เป็นส่วนจริงลบที่มีขนาดมากที่สุดของโพลของระบบ (คือระยะห่างจากแกนจินตภาพมากที่สุด)

โดยทั่วไปการกระจายโพลของระบบมักจะไม่ทราบว่าเป็นอย่างไร ถึงแม้ว่า α จะสามารถคำนวณได้ง่ายจากสมการ (45) แต่การจะคำนวณค่า β จริง ๆ ไม่สามารถคำนวณได้ง่ายเท่าไรนัก จึงประมาณค่านี้โดยพิจารณาสัมประสิทธิ์ของ D(s) เพียง 3 ตัว ในสมการที่ (42) ซึ่งจะมีค่ากำลังของ s สูงสุด ดังนั้นจึงกำหนดสมการควอดราติก

$$a_n s^2 + a_{n-1} s + \ldots + a_{n-2} = 0 \qquad (46)$$

ซึ่งรากที่มีส่วนจริงลบที่มีขนาดใหญ่ที่สุด จะสามารถประมาณค่าได้ด้วย

$$\beta = \frac{a_{n-1} + \sqrt{(a_{n-1}^2 - 4a_n a_{n-2})}}{2a_n} \quad \text{เมื่อ} \quad a_{n-1}^2 \geq 4a_n a_{n-2}$$

$$= \frac{a_{n-1}}{2a_n} \quad \text{เมื่อ} \quad a_{n-1}^2 < 4a_n a_{n-2} \qquad (47)$$

ในสมการที่ (47) ประมาณค่า β จะแน่นอนขึ้นอยู่กับที่ตั้งของโพล ว่าแยกห่างกันเพียงไร แต่ก็อาจจะมีบางระบบที่การประมาณนี้ไม่ถูกต้องนัก อย่างไรก็ดีสมการที่ (45) และ (47) ช่วยกำหนดช่วงขอบเขต ของค่า p ซึ่งสามารถกำหนดให้กว้าง หรือเล็กลงเมื่อมีความจำเป็น

ดังนั้น เมื่อได้ขอบเขตของ p แล้วก็จะสามารถเลือก p โดยให้

$$p = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

เป็นโพลที่สามารถกำจัดทิ้งได้เป็นโพลแรก เนื่องจากโพลในตำแหน่งนี้ไม่มีผลต่อผลตอบสนองชั่วขณะ และผลตอบสนองคงที่ (โพลที่มีขนาดส่วนจริงลบมากที่สุด หรือ น้อยที่สุดจึงจะมีผล)

สำหรับการลดทอนระบบมากกว่า 1 อันดับ การประมาณค่า α และ β จะคำนวณได้จากเทอมส่วนของแบบจำลองระบบลดทอนสุดท้าย โดยค่าคงที่เหล่านี้ จะไม่สามารถใช้ได้ทั่วไปในการคำนวณแบบ

จำลองระบบลดทอน ตัวอย่าง ถ้า D(s) ในสมการ (42) ถูกลดทอนอันดับเหลือ ดีกรีของเทอมส่วนเป็น (n - 1)

$$\overline{D}(s) = \overline{a}_{n-1}s^{n-1} + \overline{a}_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \overline{a}_0$$

แล้วค่าของ α และ β สำหรับการคำนวณการลดทอนอันดับเสตจถัดไป จะคำนวณโดยสมการ (45) และ (47) ซึ่ง $n-1, \overline{a}_{n-1}, \overline{a}_{n-2}, \overline{a}_{n-3}$ จะถูกแทนด้วย n, a_n, a_{n-1}, a_{n-2} ตามลำดับ.

บทที่ 3

การทดสอบระบบ

3.1 การทดลองเพื่อทดสอบวิธีของพาเด

จากทฤษฎีของ Pade' ที่ใช้ในการลดรูปฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่มีอันดับสูง ๆ ที่อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$G(s) = \frac{d_{n-1}s^{n-1}+d_{n-2}s^{n-2}+...+d_1s+d_0}{e_ns^n+e_{n-1}s^{n-1}+...+e_1s+e_0}$$

ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีอันดับต่ำกว่า ซึ่งถูกประมาณโดยวิธีของ Pade' ได้เป็นดังนี้

$$\frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{a_ms^m+a_{m-1}s^{m-1}+...a_1s+a_0}{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+...+b_1s+b_0} = c_{m+n}s^{m+n}+c_{m+n-1}s^{m+n-1}+...+c_1s+c_0$$

เพราะฉะนั้นเราจะหาค่าสัมประสิทธิ์ c_0 - c_{m+n} จากสมการต่อไปนี้ก่อน

$$c_0 = \frac{d_0}{e_0}$$

$$c_k = \frac{1}{e_0}[d_k - \sum_{j=1}^{k} e_jc_{k-j}], \qquad k > 0$$

และ $d_k = 0$ ถ้า $k > n-1$

แล้วจึงหาค่าโดมิแนนท์โพลของระบบต้นแบบ (s1) ก่อน แล้วาจึงทำาการหาค่าสัมประสิทธิ์ a และ b จากสมการต่อไปนี้ด้วยการแก้สมการทางพีชคณิต

$$a_0 = b_0c_0$$
$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$$
$$a_m = b_0c_m + b_1c_{m-1} + \cdots + b_mc_0$$
$$0 = b_0c_{2m-2} + b_1c_{2m-1} + \cdots + c_{m-1}$$
$$0 = b_0 - b_1s_1 + b_2s_1^2 - \cdots + (-1)^m s^m$$

ดังนั้นเราจะทำการทดสอบวิธีของพาเด (Pade') ดูว่าฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้ว ยังมีผลตอบสนองที่ใกล้เคียงกันกับ ผลตอบสนองของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบก่อนถูกลดรูปหรือไม่ และยังคงสถานะทางด้านเสถียรภาพอยู่เหมือนเดิมหรือเปล่า คือถ้าระบบก่อนถูกลดรูปมีสถานะที่เสถียรแล้ว ระบบที่ถูกลดรูปแล้วควรจะยังคงเสถียรอยู่ จึงจะเรียกได้ว่าวิธีของ Pade' สามารถนำไปใช้ได้

สำหรับการทดลองของเรานั้นจะทำการทดลองโดยนำฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบต่าง ๆ หลาย ๆ ระบบมาทำการลดรูป โดยใช้วิธีของ Pade' แต่เนื่องจากการทดลองกับระบบต่าง ๆ เป็นการทำงานที่ซ้ำรูปแบบเดิมคือ ใช้สมการเดิมในการคำนวณ และเพื่อความสะดวก รวดเร็วในการทดลองเราจึงได้เขียนโปรแกรมที่ช่วยในการ ทดลองขึ้น ซึ่งโปรแกรมที่เขียนขึ้นนั้น สามารถที่จะทำการลดทอนอันดับของระบบได้ โดยคำนวณสัมประสิทธิ์ c, a, b ค่าต่าง ๆ ให้ แล้วแสดงผลให้ดูในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดทอนอันดับแล้ว และยังสามารถแสดงผลตอบสนองทางเวลา ของระบบเดิมก่อนถูกลด รูปเปรียบเทียบกับผลตอบสนองทางความถี่ ของระบบที่ถูกลดรูปแล้วได้ นอกจากนั้นยังสามารถตรวจดูเสถียรภาพของระบบทั้งก่อนลดรูป และหลังลดรูปได้ โดยใช้หลักการของ Routh-Hurwitz ได้อีกด้วย สำหรับโปรแกรมที่เขียนขึ้นนั้นได้กำหนดให้ใช้ได้กับระบบที่มี อันดับไม่เกิน 10 เพราะฉะนั้นในการทดลองของเราจึงทดลองกับระบบที่มีอันดับไม่เกิน 10 เท่านั้น

3.2 <u>ขั้นตอนของการทดสอบ</u>

[1].นำฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ของระบบที่ต้องการลดอันดับ โดยที่ฟังก์ชัน ถ่ายโอนต้องอยู่ในรูปของเศษส่วนพหุนามดังนี้

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i}$$

[2].นำเฉพาะสัมประสิทธิ์ของเทอมเศษและส่วน และอันดับของระบบ ที่ต้องการลดทอนอันดับ ใส่ในโปรแกรมที่ได้จัดเตรียมไว้ จากนั้นเลือกอันดับที่ต้องการจะลด

[3].ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม จะแสดงอยู่ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดทอนแล้ว

[4].เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาของระบบเดิมก่อนถูกลดทอนกับระบบที่ถูกลดทอนแล้ว

[5] ตรวจดูเสถียรภาพของระบบทั้งที่ยังไม่ถูกลดทอนอันดับ กับที่ถูกลดทอนอันดับแล้ว

3.3 การทดลองและผลการทดลอง

การทดลองที่ 1: ระบบมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังต่อไปนี้ $G(s) = \dfrac{s^2+5.5s+6}{s^3+9s^2+20s+12}$

เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ c จากโปรแกรมที่เขียนขึ้นได้ดังนี้

$c_0 = 0.5$

$c_1 = -0.375$

$c_2 = 0.333333$

$c_3 = -0.315972$

เนื่องจากระบบเป็นระบบอันดับที่ 3 ดังนั้นเราจะลดรูปลงเป็นระบบอันดับที่ 2 ซึ่งเราได้ค่าสัมประสิทธิ์ a และ b ของ R(s) ดังนี้

$a_0 = 1.5$ $\quad b_0 = 3$

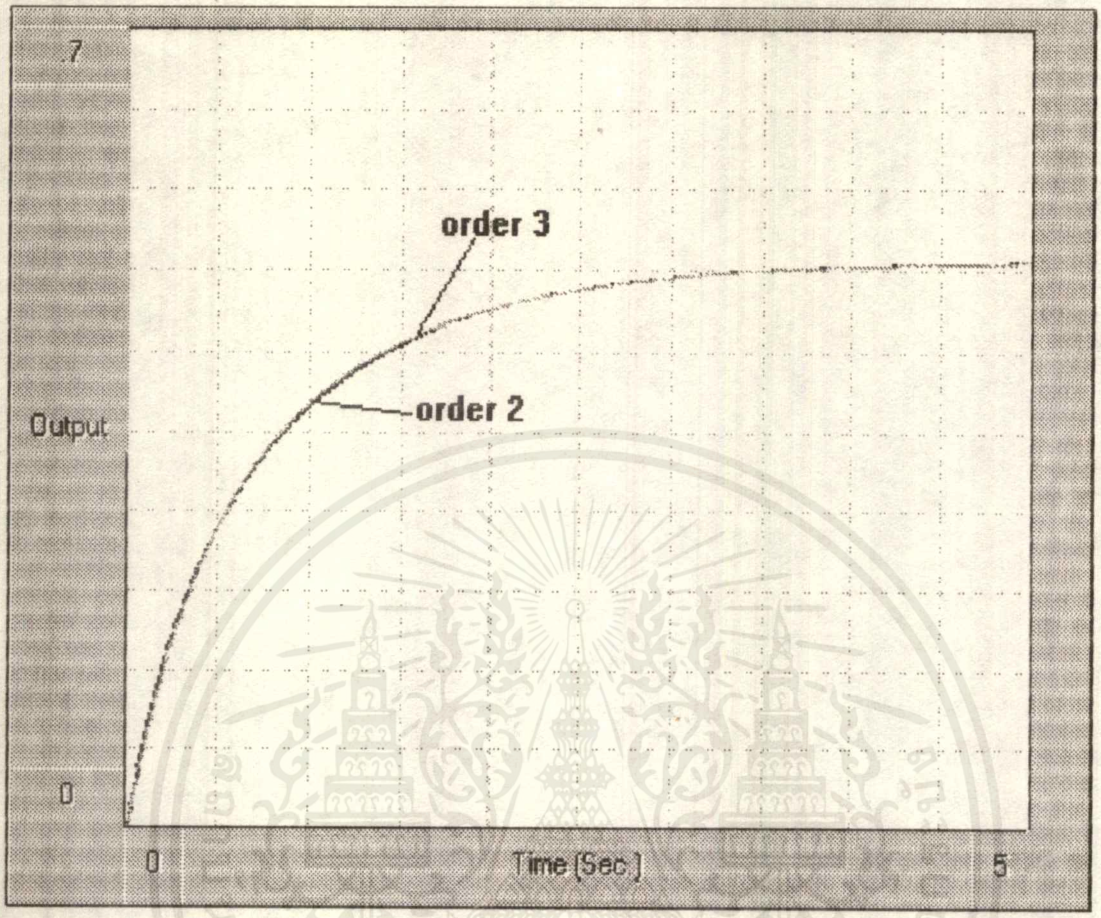
$a_1 = 0.875$ $\quad b_1 = 4$

$b_2 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{0.875s + 1.5}{s^2 + 4s + 3}$ และมีผลตอบสนองของระบบก่อนลดรูปและหลังจากถูกลดรูปแล้วเป็นดังรูปที่ 3.1

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของระบบก่อนที่จะลดรูปกับผลตอบสนองของระบบที่ถูกลดรูปแล้วมีค่าใกล้เคียงกันมาก

จากนั้นทำการทดสอบเสถียรภาพของระบบทั้งสอง ซึ่งได้ผลว่า ระบบก่อนที่จะลดรูปมีเสถียรภาพ และระบบที่ถูกลดรูปแล้วมีเสถียรภาพ



รูปที่ 3.1

การทดลองที่ 2: ระบบมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังต่อไปนี้ $G(s) = \dfrac{2s^2+8s+6}{s^3+8s^2+16s+6}$

เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ c จากโปรแกรมที่เขียนขึ้นได้ดังนี้

$c_0 = 1$

$c_1 = -1.333333$

$c_2 = 2.555556$

$c_3 = -5.203703$

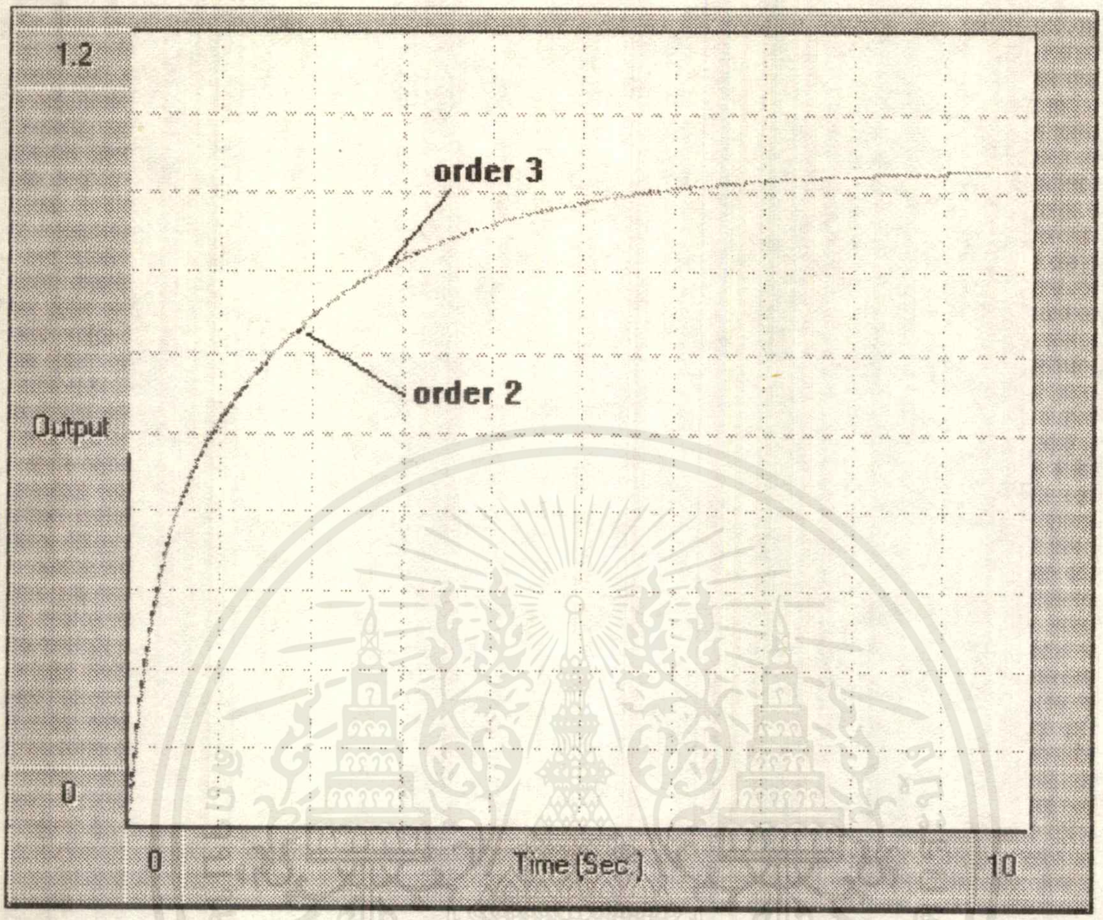
เนื่องจากระบบเป็นระบบอันดับที่ 3 ดังนั้นเราจะลดรูปลงเป็นระบบอันดับที่ 2 ซึ่งเราได้ค่าสัมประสิทธิ์ a และ b ของ R(s) ดังนี้

$a_0 = 1.866$	$b_0 = 1.866$
$a_1 = 1.8386$	$b_1 = 4.3271$
	$b_2 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{1.866s+1.8386}{s^2+4.3271s+1.866}$ และมีผลตอบสนองของระบบก่อนลดรูปและหลังจากถูกลดรูปแล้วเป็นดังรูปที่ 3.2

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของระบบก่อนที่จะลดรูปกับผลตอบสนองของระบบที่ถูกลดรูปแล้วมีค่าใกล้เคียงกันมาก

จากนั้นทำการทดสอบเสถียรภาพของระบบทั้งสอง ซึ่งได้ผลว่า ระบบก่อนที่จะลดรูปมีเสถียรภาพ และระบบที่ถูกลดรูปแล้วมีเสถียรภาพ



รูปที่ 3.2

การทดลองที่ 3: ระบบมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังต่อไปนี้ $G(s) = \dfrac{25.04s+5.008}{s^3+5.03247s^2+25.1026s+5.008}$

เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ c จากโปรแกรมที่เขียนขึ้นได้ดังนี้

$c_0 = 1$

$c_1 = -0.0125$

$c_2 = -0.942231$

$c_3 = 4.535812$

เนื่องจากระบบเป็นระบบอันดับที่ 3 ดังนั้นเราจะลดรูปลงเป็นระบบอันดับที่ 2 ซึ่งเราได้ค่าสัมประสิทธิ์ a และ b ของ R(s) ดังนี้

$a_0 = 0.9935$ $b_0 = 0.9935$

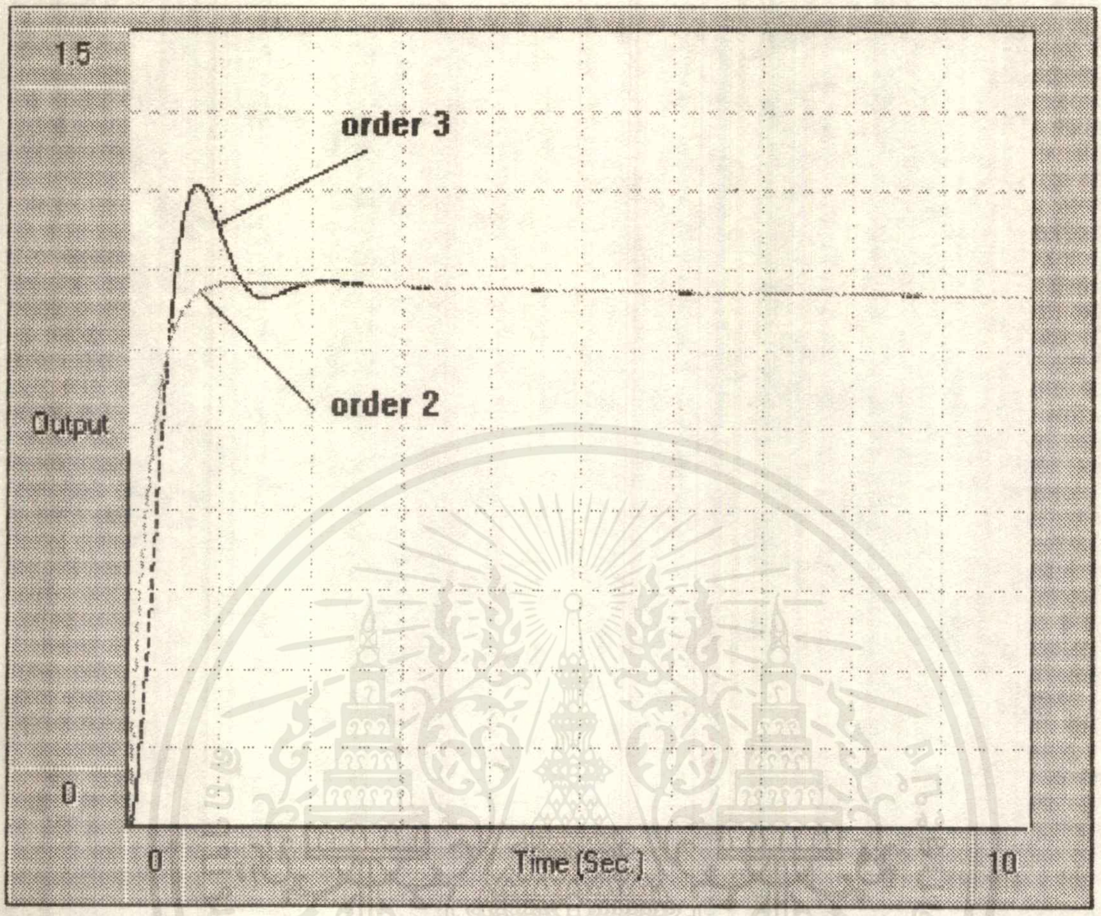
$a_1 = 5.0991$ $b_1 = 5.11155$

$b_2 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{5.0991s+0.9935}{s^2+5.11155s+0.9935}$ และมีผลตอบสนองของระบบก่อนลดรูปและหลังจากถูกลดรูปแล้วเป็นดังรูปที่ 3.3

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของระบบก่อนที่จะลดรูปกับผลตอบสนองของระบบที่ถูกลดรูปแล้วมีค่าใกล้เคียงกันมาก

จากนั้นทำการทดสอบเสถียรภาพของระบบทั้งสอง ซึ่งได้ผลว่า ระบบก่อนที่จะลดรูปมีเสถียรภาพ และระบบที่ถูกลดรูปแล้วมีเสถียรภาพ



รูปที่ 3.3

การทดลองที่ 4: ระบบมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังต่อไปนี้ $G(s) = \dfrac{s^3-s^2+14s+14}{s^4+3s^3+13s^2+8s+15}$

เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ c จากโปรแกรมที่เขียนขึ้นได้ดังนี้

$c_0 = 0.933333$

$c_1 = 0.435556$

$c_2 = -1.107852$

$c_3 = 0.093373$

$c_4 = 0.761006$

$c_5 = -0.29426$

เนื่องจากระบบเป็นระบบอันดับที่ 4 ดังนั้นเราจะลดรูปลงเป็นระบบอันดับที่ 3 และอันดับที่ 2 ซึ่งเราได้ค่าสัมประสิทธิ์ a และ b ของ R(s) ดังนี้

ระบบอันดับที่ 3

$a_0 = 3.5626$	$b_0 = 3.8171$
$a_1 = 5.2683$	$b_1 = 2.6441$
$a_2 = 8.9394$	$b_2 = 3.6391$
	$b_3 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{8.9394s^2+5.2683s+3.5626}{s^3+3.6391s^2+2.6441s+3.8171}$

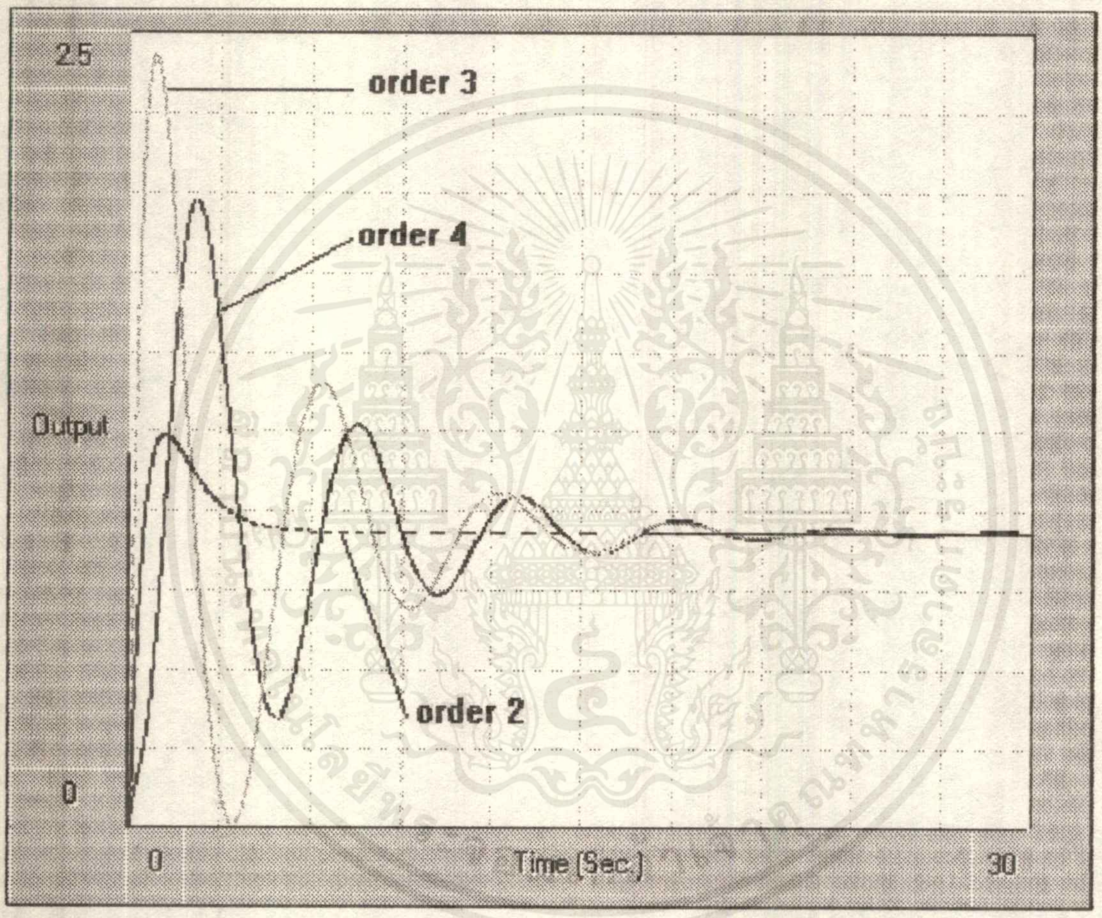
ระบบอันดับที่ 2

$a_0 = 1.8159$	$b_0 = 1.9456$
$a_1 = 3.4662$	$b_1 = 2.8058$
	$b_2 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{3.4662s+1.8159}{s^2+2.8058s+1.9456}$

ระบบทั้งสามมีผลตอบสนองของระบบก่อนลดรูปและหลังจากถูกลดรูปแล้วเป็นดังรูปที่ 3.4 จะเห็นได้ว่า ผลตอบสนองของระบบก่อนที่จะลดรูปกับผลตอบสนองของระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 3 และอันดับที่ 2 มีค่าใกล้เคียงกัน

จากนั้นทำการทดสอบเสถียรภาพของระบบทั้งสอง ซึ่งได้ผลว่า ระบบก่อนที่จะลดรูปมีเสถียรภาพ , ระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 3 มีเสถียรภาพ และระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 2 มีเสถียรภาพ



รูปที่ 3.4

การทดลองที่ 5: ระบบมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังต่อไปนี้ $G(s) = \dfrac{5s+100}{s^4+8s^3+32s^2+80s+100}$

เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ c จากโปรแกรมที่เขียนขึ้นได้ดังนี้

$c_0 = 1$

$c_1 = -0.75$

$c_2 = 0.28$

$c_3 = -0.064$

$c_4 = 0.0116$

$c_5 = -0.0037$

เนื่องจากระบบเป็นระบบอันดับที่ 4 ดังนั้นเราจะลดรูปลงเป็นระบบอันดับที่ 3 และอันดับที่ 2 ซึ่งเราได้ค่าสัมประสิทธิ์ a และ b ของ R(s) ดังนี้

ระบบอันดับที่ 3

$a_0 = 9.9897$	$b_0 = 9.9897$
$a_1 = 14.1105$	$b_1 = 21.6028$
$a_2 = -7.4701$	$b_2 = 5.9348$
	$b_3 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{-7.4701s^2+14.1105s+9.9897}{s^3+5.9348s^2+21.6028s+9.9897}$

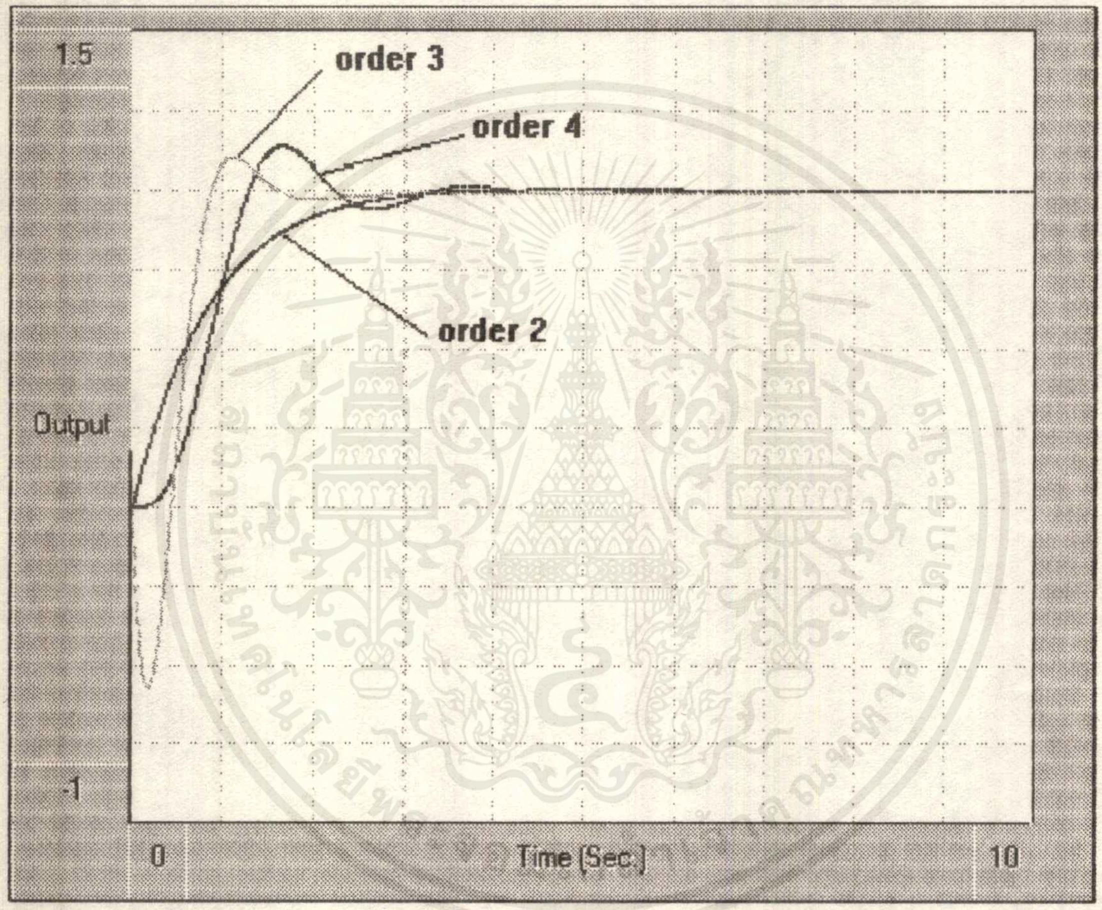
ระบบอันดับที่ 2

$a_0 = 0.3893$	$b_0 = 0.3893$
$a_1 = 1.1866$	$b_1 = 1.4786$
	$b_2 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{1.1866s+0.3893}{s^2+1.4786s+0.3893}$

จากระบบทั้งสามมีผลตอบสนองของระบบก่อนลดรูปและหลังจากถูกลดรูปแล้วเป็นดังรูปที่ 3.5 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของระบบก่อนที่จะลดรูปกับผลตอบสนองของระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 3 และอันดับที่ 2 มีค่าใกล้เคียงกัน

จากนั้นทำการทดสอบเสถียรภาพของระบบทั้งสอง ซึ่งได้ผลว่า ระบบก่อนที่จะลดรูปมีเสถียรภาพ, ระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 3 มีเสถียรภาพ และระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 2 มีเสถียรภาพ



รูปที่ 3.5

การทดลองที่ 6: ระบบมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังต่อไปนี้ $G(s) = \dfrac{28s^3+496s^2+1800s+2400}{2s^4+36s^3+204s^2+360s+240}$

เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ c จากโปรแกรมที่เขียนขึ้นได้ดังนี้

$c_0 = 10$

$c_1 = -7.5$

$c_2 = 4.816667$

$c_3 = -2.233333$

$c_4 = 0.2975$

$c_5 = 0.792083$

เนื่องจากระบบเป็นระบบอันดับที่ 4 ดังนั้นเราจะลดรูปลงเป็นระบบอันดับที่ 3 และอันดับที่ 2 ซึ่งเราได้ค่าสัมประสิทธิ์ a และ b ดังนี้

ระบบอันดับที่ 3

$a_0 = 53.45$ $b_0 = 5.345$

$a_1 = -10.6687$ $b_1 = 2.9419$

$a_2 = 32.1035$ $b_2 = 2.8422$

$b_3 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{32.1035s^2-10.6687s+53.45}{s^3+2.8422s^2+2.9419s+5.345}$

ระบบอันดับที่ 2

$a_0 = 7.1982$ $b_0 = 0.71982$

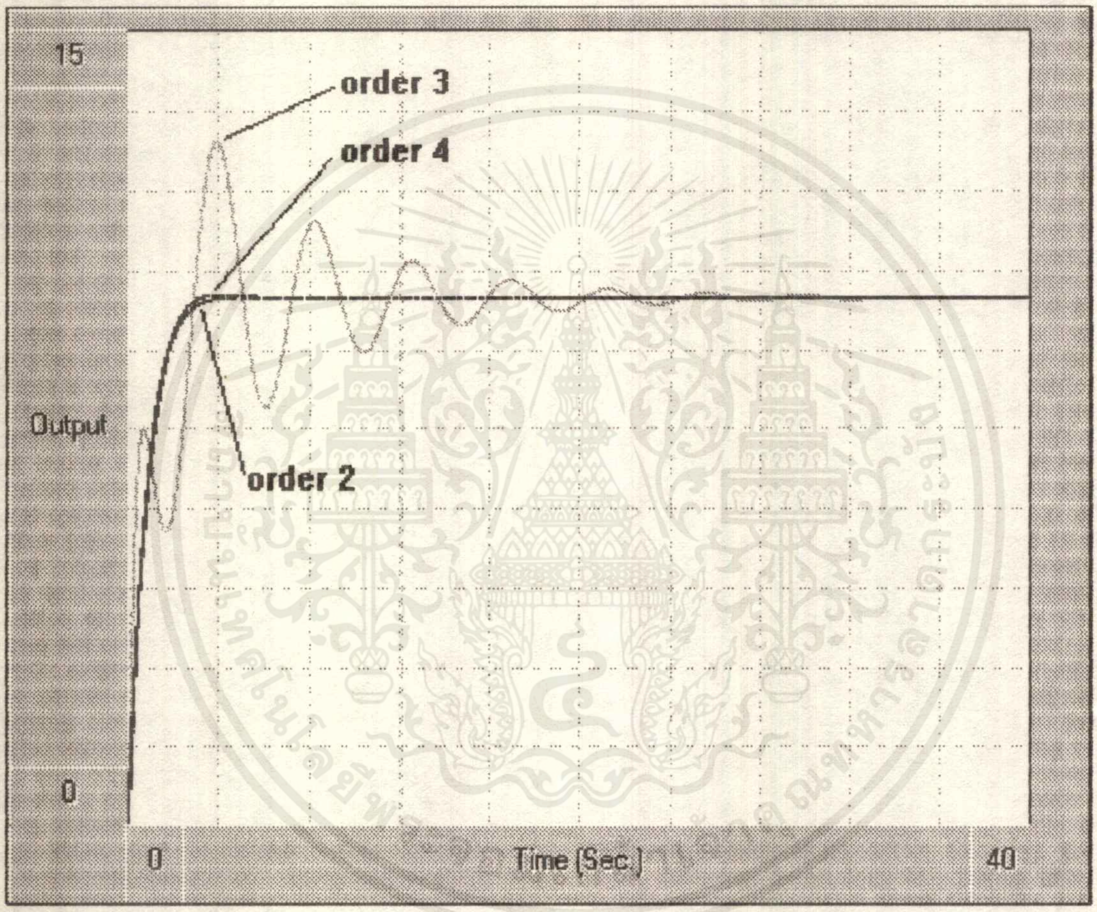
$a_1 = 12.5575$ $b_1 = 1.7956$

$b_2 = 1$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกลดรูปแล้วเป็น $\dfrac{12.5575s+7.1982}{s^2+1.7956s+0.71982}$

จากระบบทั้งสามมีผลตอบสนองของระบบก่อนลดรูปและหลังจากถูกลดรูปแล้วเป็นดังรูปที่ 3.6 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของระบบก่อนที่จะลดรูปกับผลตอบสนองของระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 3 และอันดับที่ 2 มีค่าใกล้เคียงกัน

จากนั้นทำการทดสอบเสถียรภาพของระบบทั้งสอง ซึ่งได้ผลว่า ระบบก่อนที่จะลดรูปมีเสถียรภาพ ระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 3 มีเสถียรภาพ และระบบที่ถูกลดรูปแล้วอันดับที่ 2 มีเสถียรภาพ



รูปที่ 3.6

บทที่ 4

บทสรุปและวิจารณ์

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ได้ศึกษาทฤษฎีการประมาณค่าแบบพาเด เพื่อใช้ในการหาสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองของระบบลดทอน และพัฒนาอัลกอริทึมในการคำนวณออกไป เพื่อให้ได้แบบจำลองของระบบลด-ทอน มีลักษณะผลตอบสนองของเอาท์พุทใกล้เคียงกับระบบเดิมมากที่สุด และคงไว้ซึ่งสถานะทางเสถียรภาพของระบบต้นแบบ โดยได้ใช้วิธีคงค่าโมเมนต์ของเวลา และโดมิแนนท์โพลของระบบต้นแบบ ประยุกต์ร่วมกับเทคนิคการประมาณค่าแบบพาเด

สำหรับการทดสอบระบบ ได้ทำการสร้างซอฟต์แวร์ที่ช่วยในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ ของแบบจำลองระบบลดทอน และจำลองผลตอบสนองในโดเมนของเวลาเปรียบเทียบกับระบบต้นแบบเดิม รวมทั้งการตรวจสอบสถานะทางเสถียรภาพ

จากการศึกษาถึงทฤษฎีต่าง ๆ และทำการทดสอบระบบต่าง ๆ เปรียบเทียบกัน จึงสามารถแยกวิเคราะห์ถึงอัลกอริทึมในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองระบบลดทอน และผลการทดสอบของระบบได้ดังนี้

- ส่วนทฤษฎีที่ใช้ในการคำนวณ

วิธีที่ใช้ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองระบบทอนนี้ เป็นวิธีที่ง่ายต่อการศึกษา และทำความเข้าใจ มีโครงสร้างของอัลกอริธึมที่ไม่ซับซ้อนและสามารถคำนวณได้ง่ายกว่าวิธีอื่น ดังนั้นจึงเหมาะสมในการพัฒนาซอฟต์แวร์ เพื่อช่วยในการวิเคราะห์ลดทอนตัวแบบในระบบเชิงเส้น

- ส่วนของผลการทดสอบระบบ

พิจารณาในช่วงสถานะเริ่มต้น (Transient State) เมื่อพิจารณาจากผลตอบสนอง จะเห็นว่ามีความผิดพลาดค่อนข้างสูง ซึ่งอาจจะเกิดจากการคำนวณ ที่มีการตัดสถานะบางสถานะทิ้งไป ซึ่งสถานะเหล่านี้ส่งผลในช่วงสถานะเริ่มต้น ส่วนในช่วงของสถานะคงที่ (Steady State) ซึ่งเป็นช่วงที่ระบบมีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง จากการทดสอบหลาย ๆ ระบบพบว่า ผลตอบสนองของระบบต้นแบบและ แบบจำลองระบบลดทอนมีความผิดพลาดน้อยมาก แต่จะเพิ่มขึ้นตามอันดับ (order) ของระบบ ในด้านเสถียรภาพ ระบบที่ทำการ

ทดสอบจะยังคงไว้ซึ่งสถานะทางเสถียรภาพ กล่าวคือ ถ้าระบบต้นแบบเดิม มีเสถียรภาพ แบบจำลองระบบลดทอนก็จะมีเสถียรภาพด้วย

ในส่วนของซอฟต์แวร์ที่ได้สร้างขึ้นประกอบในปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สามารถสรุปการทำงานได้ดังต่อไปนี้

- สามารถทำงานได้ภายใต้สภาวะแวดล้อมของโปรแกรมวินโดวส์
- อินพุทของระบบต้นแบบจะเป็นค่าพารามิเตอร์ หรือสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งมีสองส่วน คือ (1) อินพุทสัมประสิทธิ์เทอมเศษของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบต้นแบบ
  (2) อินพุทสัมประสิทธิ์เทอมส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบต้นแบบ
  ซึ่งอินพุทนี้จะอยู่ภายในหน้าต่างเดียวกัน
- เอาท์พุทของระบบ จะแสดงผลในรูปของผลตอบสนองเอาท์พุทในโดเมนเวลาซึ่งอยู่ในหน้าต่างหลัก
- ความสามารถในการลดทอนอันดับ สามารถลดทอนอันดับของระบบต้นแบบ มาเป็นแบบจำลองระบบลดทอน ซึ่งอันดังต่ำกว่า ได้สูงสุด 4 ครั้ง
- ความสามารถในการแสดงผล สามารถแสดงผลตอบสนองเอาท์พุทในโดเมนเวลา ของระบบต้นแบบ และแบบจำลองระบบลดทอนได้สูงสุด 5 ระบบพร้อมกัน
- ระบบต้นแบบที่นำมาลดทอนอันดับ ต้องมีอันดับสูงสุดได้ไม่เกินอันดับ 10
- สามารถทดสอบเสถียรภาพของระบบต่าง ๆ ได้ โดยใช้หลักการของเราท์เฮอร์วิทซ์

แต่อย่างไรก็ดี ซอฟต์แวร์นี้ ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่คือ

- ข้อจำกัดจากการอินพุทระบบ โดยการใส่ค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน เป็นไปได้ว่า ค่าที่ได้จากการคำนวณอาจเกิดข้อผิดพลาด (Over Flow !) ได้ เนื่องจากเกิดการหารด้วยศูนย์ในระหว่างการคำนวณ สัมประสิทธิ์เทอมส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอน
- ข้อจำกัดในการเลือกอันดับที่จะลดของแบบจำลองระบบลดทอน ถ้าระบบต้นแบบเดิมมีอันดับ n แล้วอันดับของแบบจำลองระบบลดทอน k จะต้องสอดคล้องกับความสัมพันธ์ $(2k-1) \leq n$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขแล้ว จะไม่สามารถได้แบบจำลองระบบลดทอนที่สอดคล้องกับระบบต้นแบบเดิมได้

บรรณานุกรม

[1] Katsuhiko Ogata , *Modern Control Engineering* , Prentice-Hall International, Inc. (1990)

[2] Gene H. Hostetter, Clement J. Savant Jr. , Raymond T. Stefani , *Design of Feedback Control Systems* , Saunders College Publishing (1989)

[3] Jack Golten, Andy Verwer, *Control System Design and Simulation* , McGraw-Hill Book Company (1991)

[4] John Billingsley , *Controlling with Computers : Control Theory and Practical Digital Systems* , McGraw-Hill Book Company (1989)

[5] Thomas Kailath , *Linear Systems* , Prentice-Hall International Inc. (1980)

[6] Y. Shamash , *Linear system reduction using Pade' approximation to allow retention of dominant modes* , INT. J. Control, 1975, vol 21, No. 2, 257-272

[7] Y. Shamash , *Model reduction using the Routh stability criterion and the Pade' approximation technique* , INT. J. Control, 1975, vol 21, No. 3, 475-484

[8] F.R. Ruckdeschel , *Basic Scientific Subroutines Vol. 1* , McGraw-Hill Book Company (1981)

[9] Melvin J. Maron , Robert J. Lopez , *Numerical Analysis : A Practical Approach* , Wadsworth Publishing Company (1991)

[10] H.R. Schwarz , J. Waldvogel , *Numerical Analysis : A Comprehensive Introduction* , John Wiley & Sons (1989)

[11] Alkis Constantinides , *Applied Numerical Methods with Personal Computers* , McGraw-Hill Book Company (1987)

[12] *Microsoft Visual Basic : Language Reference , Programer's Guide* , Microsoft Corperation (1991)

[13] Steve Holzner and The Peter Norton Computing Group , *Advanced Visual Basic* , Brady (1992)

[14] William H. Murray , Chris H. Pappas , *Using Visual Basic : Writing Windows Applications* , Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1992)

[15] ดร. จเร สุรวัฒน์ปัญญา , *การคำนวณเชิงตัวเลขด้วย Basic* , บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (2531)

ภาคผนวก ก.

การทดสอบเสถียรภาพด้วย Routh-Hurwitz

เกริ่นนำ

ในการลดรูปโมเดลหรือฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบหนึ่ง ๆ นั้น เราต้องยอมรับว่า เราไม่สามารถที่จะรักษาคุณสมบัติของระบบเดิมได้อย่างครบถ้วน ดังนั้นวิธีที่ดีที่สุดที่เราพอจะทำได้ นั่นก็คือการรักษาคุณสมบัติเดิมของระบบเอาไว้ให้มากที่สุด และคุณสมบัติอันหนึ่งของระบบที่ควรจะต้องรักษา เอาไว้ให้ได้เมื่อมีการลดรูปโมเดลหรือฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ นั่นก็คือเสถียรภาพของระบบ ถ้าระบบเดิมก่อนที่จะถูกลดรูปมีเสถียรภาพ เมื่อทำการลดรูปโมเดลหรือฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ แล้วโมเดลใหม่ของระบบก็ควรที่จะมีเสถียรภาพด้วย หนทางที่จะทราบได้ว่าโมเดลของระบบใหม่มี เสถียรภาพเหมือนระบบ เดิมหรือไม่นั้นก็จะสามารถทำได้โดยการทดสอบทางเสถียรภาพ (Stability Testing) ของระบบซึ่งมี อยู่หลายวิธีดังต่อไปนี้

การทดสอบสัมประสิทธิ์

(Coefficient Test)

สำหรับระบบอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองนั้น เสถียรภาพของระบบถูกกำหนดโดยการพิจารณาจากคุณลักษณะของโพลิโนเมียล ซึ่งโพลิโนเมียลอันดับที่หนึ่ง หรืออันดับที่สองมีรากทั้งหมดอยู่ในฝั่งซ้ายมือของระนาบเชิงซ้อน ก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ทุกค่าของโพลิโนเมียลมีเครื่องหมายทางพีชคณิตแบบเดียวกัน คือเป็นบวกหมดหรือเป็นลบหมดนั่นเอง ตัวอย่างเช่น

$$3s^2 + s + 10$$

เป็นคุณลักษณะโพลิโนเมียลของระบบที่มีเสถียรภาพ ในขณะที่

$$3s^2 + s - 10$$

แทนระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ

สำหรับโพลิโนเมียลอันดับสูง ๆ เครื่องหมายทางพีชคณิตของสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียลอาจจะเป็นหรืออาจจะไม่เป็นไปตามเงื่อนไขของเสถียรภาพดังที่กล่าวมาแล้ว โพลิโนเมียลกับรากทั้งหมดในฝั่งซ้ายของระนาบ (LHP) มีองค์ประกอบอยู่ในรูป

$(s + a)$, $a > 0$ (มีรากเป็นแกนจริงใน LHP)

และ

$(s^2 + bs + c)$, $b > 0$ และ $c > 0$

(ค่ารากทั้งสองใน LHP อาจจะเป็นคอมเพล็กซ์คอนจูเกจ)

เมื่อคูณกันออกมาจะได้ว่า โพลิโนเมียลต้องมีสัมประสิทธิ์ทุกตัว มีเครื่องหมายทางพีชคณิตเหมือนกัน คือเป็นบวกหมดหรือลบหมด และจะต้องไม่มีสัมประสิทธิ์ตัวใดในระบบราก LHP มีค่าเป็นศูนย์เพราะว่าไม่มีเครื่องหมายที่ต่างกันในแต่ละสัมประสิทธิ์จึงไม่มีสัมประสิทธิ์ตัวใดตัดกัน

ถ้ามีรากที่เป็นแกนจินตภาพเกิดขึ้นในโพลิโนเมียล องค์ประกอบของรูปต่าง ๆ เหล่านี้ สามารถถูกแสดงได้ดังนี้

(s) (รากที่จุดกำเนิด)

และ

$(s^2 + a)$, $a > 0$ (รากคอมเพล็กซ์คอนจูเกจบนแกนจินตภาพ)

จากรากที่แสดง ทุกสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียลต้องเป็นเครื่องหมายทางพีชคณิตเหมือนกัน แต่มีบางค่าสามารถเป็นศูนย์ได้

รากทางฝั่งขวาของระนาบ (RHP) เกี่ยวข้องกับองค์ประกอบของรูปแบบ

$(s - a)$, $a > 0$ (มีรากเป็นแกนจริงใน RHP)

และ

$$(s^2 - as + b) \ , \ a > 0 \text{ และ } b > 0$$

(รากทั้งสองใน RHP อาจจะเป็นคอมเพล็กซ์คอนจูเกจ)

ที่แสดงมานี้ทำให้เห็นว่าองค์ประกอบอาจจะเป็น หรืออาจจะไม่เป็นเหตุของการที่มีเครื่องหมายต่างกันของสัมประสิทธิ์และสัมประสิทธิ์ที่มีค่าเป็นศูนย์

ตารางที่ A.1 ได้สรุปเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกันโดยการทดสอบสัมประสิทธิ์ สำหรับตัวอย่างต่อไปนี้เป็นโพลิโนเมียล

$$7s^6 + 5s^4 - 3s^3 - 2s^2 + s + 10$$

กำหนดว่ามีราก RHP หนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งตัว แสดงให้เห็นโดยเครื่องหมายทางพีชคณิตที่ต่างกันของสัมประสิทธิ์ การทดสอบของเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ยอมให้ไม่มีคำแนะนำเกี่ยวกับตำแหน่งของราก สำหรับโพลิโนเมียลต่อไปนี้

$$8s^6 + 6s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 7s + 10$$

Table A.1 POLYNOMIAL COEFFICIENT TESTS

Properties of the Polynomial Coefficients	Conclusion about Roots from the Coeffient Test
Differing algebraic signs	At least one RHP root
Zero-valued coefficients	Imaginary axis or RHP roots or both
All of the same algebraic sign, none zero	No direct information

สำหรับโพลิโนเมียล

$$s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 8s^2 + 3s + 17$$

มีรากเป็นแกนจินตภาพหรือเป็นราก RHP หรือเป็นทั้งคู่ ซึ่งเห็นได้จากการที่ไม่มีเทอม s^3

การทดสอบโดยวิธี Routh-Hurwitz

วิธีทดสอบของ Routh-Hurwitz เป็นกระบวนการทางตัวเลข สำหรับกำหนดจำนวนของราก RHP และรากที่แกนจินตภาพ (IA) ของโพลิโนเมียลของระบบที่ต้องการจะทดสอบ

ตัวอย่างของวิธีทดสอบ Routh-Hurwitz ของโพลิโนเมียล

$$p(s) = 2s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 6$$

เป็นดังนี้ เริ่มด้วยส่วนเริ่มต้นของอะเรย์ที่เป็นดังรูป กำลังของ s ถูกเขียนทางซ้ายและสัมประสิทธิ์ถูกเขียนสลับกันระหว่างแถวที่หนึ่งและสองดังที่แสดงไว้ มันช่วยให้คิดว่าแถวที่ต่อเนื่องสู่ทางขวาด้วยค่าของซีโร่

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 5 & 6 \\ s^3 & 3 & 2 & \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

อะเรย์จะถูกเติมให้เต็มด้วยการคำนวณแถวต่อแถว โดยสมาชิกของแถวก่อนหน้ามัน ซึ่งแต่ละสมาชิกในแถวใหม่จะถูกคำนวณจาก สมาชิก 4 ตัวของสองแถวก่อนหน้า โดยคิดจากค่าลบของดีเทอร์มิแนนท์ของพวกมัน แล้วหารด้วยสมาชิกตัวที่อยู่มุมล่างซ้าย ดังนี้

ยกตัวอย่างเช่น สมาชิกตัวแรกของแถว s^2 คือ

$$-\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{11}{3}$$

สมาชิกตัวที่สองของแถว s^2 คือ

$$-\frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} = 6$$

สมาชิกตัวแรกของแถว s^1 คือ

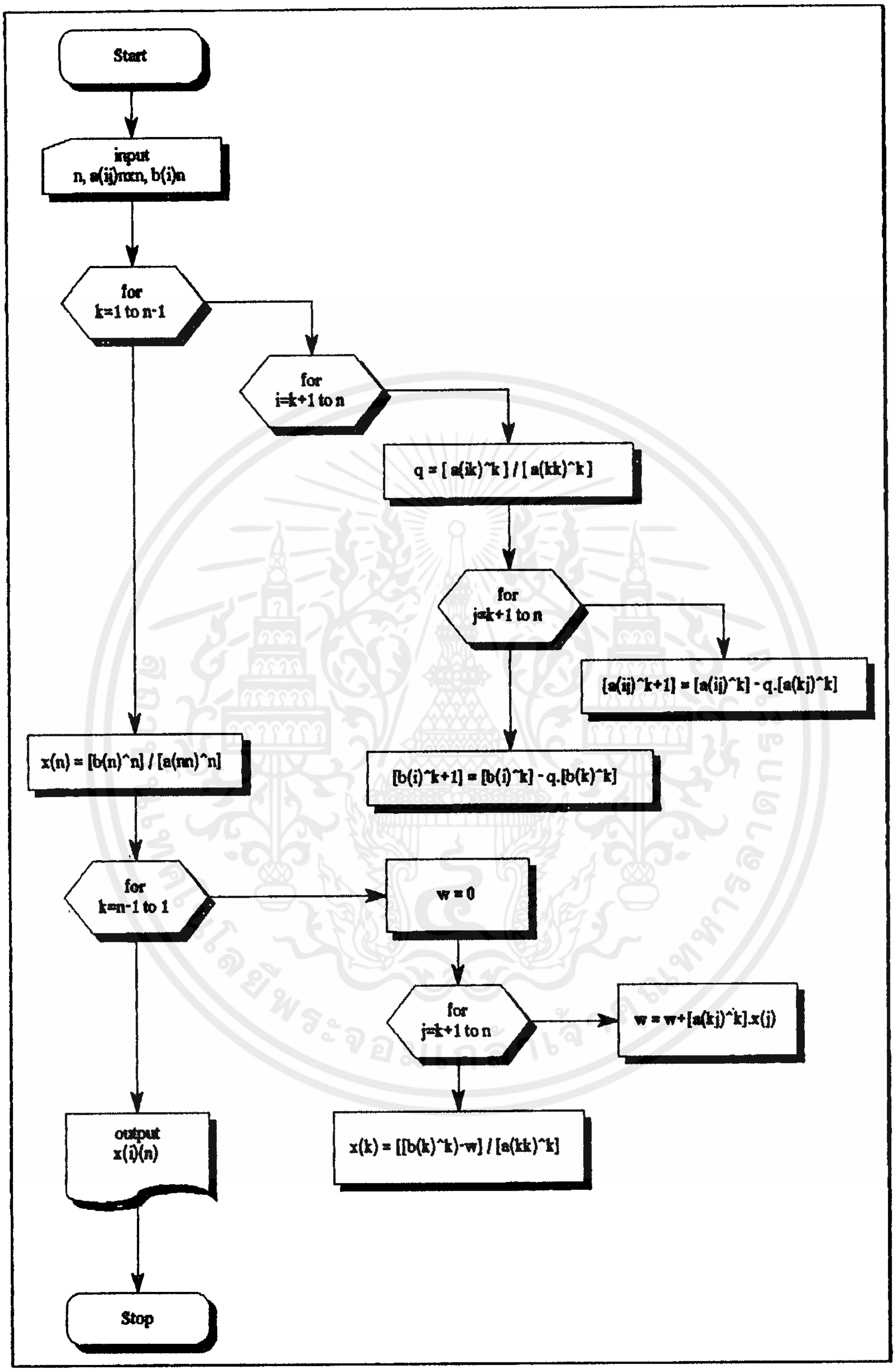
$$-\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \frac{11}{3} & 6 \end{vmatrix}}{\frac{11}{3}} = -\frac{32}{11}$$

และดังนั้น

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 5 & 6 \\ s^3 & 3 & 2 & \\ s^2 & \frac{11}{3} & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 5 & 6 \\ s^3 & 3 & 2 & 0 \\ s^2 & \frac{11}{3} & 6 & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 5 & 6 \\ s^3 & 3 & 2 & \\ s^2 & \frac{11}{3} & 6 & \\ s^1 & -\frac{32}{11} & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

และอะเรย์ของ Routh-Hurwitz ที่สมบูรณ์เป็นดังนี้

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 5 & 6 \\ s^3 & 3 & 2 & \\ s^2 & \frac{11}{3} & 6 & \\ s^1 & -\frac{32}{11} & 0 & \\ s^0 & 6 & & \end{array}$$



รูป ข.1 โฟลว์ชาร์ตสำหรับวิธีลดสัมประสิทธิ์ของเกาส์

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 3 & 2 & 5 \\
s^3 & 6 & 4 & \\
s^2 & e & 5 & \\
s^1 & \frac{4e-30}{e} & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

เราจะหาลิมิตโดยที่ e เข้าใกล้ 0 โดยใช้ค่าบวก e ซึ่งค่าที่ได้ในหลักซ้ายสุดจะเป็นดังนี้

$$
\begin{array}{c|c}
s^4 & 3 \\
s^3 & 6 \\
s^2 & 0 \\
s^1 & -\infty \\
s^0 & 3
\end{array}
$$

จากการดูการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายทางพีชคณิตในหลักซ้ายสุด ปรากฏว่ามีการเปลี่ยนแปลง 2 ครั้ง แสดงว่ามีราก RHP 2 ค่า

ในกรณีที่มีแถวใด ๆ มีค่าเป็นศูนย์หมด

(Premature Termination of the Array)

นอกจากเหตุการณ์ที่สมาชิกตัวใดตัวหนึ่งในหลักซ้ายสุดมีค่าเป็น 0 แล้ว ยังมีอีกเหตุการณ์หนึ่งที่เราจำเป็นต้องพิจารณา ก็คือ สมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งมีค่าเป็น 0 หมด ซึ่งเราจะเรียกอะเรย์ของ Routh-Hurwitz นั้นว่า premature termination ตัวอย่างเช่นการทดสอบโพลิโนเมียลต่อไปนี้

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + 8s^3 + 11s^2 + 16s + 12$$

ซึ่งจะเกิด premature termination ขึ้นที่แถว s^1 ดังนี้

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 8 & 16 \\
s^4 & 2 & 11 & 12 \\
s^3 & \frac{5}{2} & 10 & \\
s^2 & 3 & 12 & \\
s^1 & 0 & 0 & \\
s^0 & & &
\end{array}
$$

อย่างไรก็ตามจะเห็นว่า มีการแบ่งเป็นโพลิโนเมียลคู่ หรือโพลิโนเมียลคี่ออกจากโพลิโนเมียลเดิมค่าสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียลคู่ หรือค่าสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียลคี่ ถูกให้ค่าในแถวที่อยู่ก่อนแถวที่ เป็น 0 ดังนี้

$$p_{divisor}(s) = 3s^2 + 12 = 3(s^2 + 4) = 3(s + 2j)(s - 2j)$$

จากสมการข้างต้นดังนั้นจะมีรากบนแกนจินตภาพเกิดขึ้น 2 รากที่ $s = +2j$ และ $s = -2j$ โดยการทดสอบดังนี้

$$
\begin{array}{r|l}
 & s^3 + 2s^2 + 4s + 3 \\
\hline
s^2 + 4 & s^5 + 2s^4 + 8s^3 + 11s^2 + 16s + 12 \\
 & \underline{s^5 \qquad + 4s^3} \\
 & \qquad 2s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 16s + 12 \\
 & \qquad \underline{2s^4 \qquad + 8s^2} \\
 & \qquad\qquad 4s^3 + 3s^2 + 16s + 12 \\
 & \qquad\qquad \underline{4s^3 \qquad + 16s} \\
 & \qquad\qquad\qquad 3s^2 \qquad + 12 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{3s^2 \qquad + 12} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

เพื่อที่จะทำให้อะเรย์สมบูรณ์ เราจะแทนแถวที่เป็น 0 ด้วยสัมประสิทธิ์ของอนุพันธ์ของโพลิโนเมียลคู่ หรือโพลิโนเมียลคี่

$$\frac{dp_{divisor}(s)}{ds} = 6s$$

จะได้อะเรย์ที่สมบูรณ์เป็น

s^5	1	8	16
s^4	2	11	12
s^3	$\frac{5}{2}$	10	
s^2	3	12	
s^1	6		
s^0	12		

จากอะเรย์ข้างต้น แสดงว่าโพลิโนเมียลไม่มีราก RHP เพราะไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายเลย

ภาคผนวก ข.

การคำนวณเชิงตัวเลข

ในซอฟต์แวร์ Mr.Sim (Model Reduction Simulation) ได้โปรแกรมโดยภาษา Visual Basic for Windows ซึ่งโครงสร้างของภาษามีความคล้ายคลึงกับ ภาษา Quick BASIC มาก โดยในส่วนโมดูลย่อยของ 1 โปรแกรม มีหลายโมดูลที่ต้องทำหน้าที่ในการคำนวณ เช่น ส่วนของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ, การแก้ สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นและสมการพีชคณิต และการแก้สมการเชิงเส้น

โมดูลเหล่านี้ จะนำวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขมาใช้ ซึ่งรายละเอียดของอัลกอลริธึมในการคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อนำมาแก้ปัญหาในการโปรแกรม จะขอกล่าวเรื่องที่สำคัญดังต่อไปนี้

การแก้สมการเชิงเส้น

<u>วิธีลดสัมประสิทธิ์ของเกาส์</u> (Gausian Elimination Method)

เป็นวิธีในการแก้สมการเชิงเส้นโดยจะ สมมติ มีสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรที่ไม่รู้ค่า x_i , มีสัมประสิทธิ์ (coefficient) a_{ij} และแทนค่าคงที่ที่อยู่ด้านขวาของสมการด้วย b_i สามารถแสดงสมการเชิงเส้นในรูปทั่วไปได้ในรูป

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (ข1) \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

จากสมการ (ข1) ถ้าคูณแถวที่ 1 ด้วย $\frac{-a_{i1}}{a_{11}}$ (i = 2,3,...,n) โดยที่ $a_{11} \neq 0$ แล้วนำไปบวกกับแถวที่ i เราจะสามารถกำจัดเทอมที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ x_1 ในแถวที่ i (i = 2,3,...,n) ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (ข2) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}
\end{aligned}
$$

จากสมการที่ (ข2) ถ้าเราคูณแถวที่ 2 ด้วย $-a_{i2}^{(2)}/\,a_{22}^{(2)}$ (i = 3,4,...,n) โดยที่ $a_{22}^{(2)} \neq 0$ แล้วไปบวกกับแถวที่ i เราจะสามารถกำจัดเทอมที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในแถวที่ i (i = 3,4,...,n) ได้ ในทำนองเดียวกันเทอมที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ x_2, x_3, ... ในแถวถัดไปจะสามารถกำจัดได้โดยวิธีเดียวกัน และได้สมการสุดท้ายเป็น

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (ข3) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(n)}
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะสามารถหาค่า x_n ได้ทันทีจากแถวสุดท้าย เมื่อแทนค่าที่หาได้ในแถวถัดไปที่อยู่ข้างบน เราจะหาค่า x_{n-1}, x_{n-2} ,. . .,x_1 ได้ตามลำดับดังนี้

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}}\left(b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j\right) \quad ; k = n-1,n-2,...,1 \quad \dots\dots\dots\dots (ข4)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ในแถวต่าง ๆ จะหาได้จากสมการทั่วไปดังนี้

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot b_k^{(k)} \qquad ; \; j = k+1, k+2, ..., n$$

....(ข5)

$$b_i^{(k+1)} = b_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot b_k^{(k)} \qquad ; \; i = k+1, k+2, ..., n$$

$$k = 1, 2, ..., n-1$$

ข้อสำคัญข้อหนึ่งสำหรับวิธีลดสัมประสิทธิ์ของเกาส์ก็คือ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ในแนวเส้นทแยงมุม คือ a_{kk} มีค่าเป็นศูนย์หรือใกล้เคียงศูนย์มาก วิธีนี้จะทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนสูงมาก แต่เราก็มีวิธีแก้โดยการเปลี่ยนแถวหรือคอลัมน์หรือทั้งแถวและคอลัมน์ ให้ค่าสัมประสิทธิ์ที่มีค่าน้อยอยู่นอกแนวเส้นทแยงมุม วิธีการเช่นนี้เรียกว่าการทำไพวอตติง (Pivoting)

ซึ่งจำนวนของรากของ RHP ของ p(s) จะเท่ากับจำนวนครั้งของการเปลี่ยนเครื่องหมายทางพีชคณิตในสมาชิกของหลักซ้ายมือสุดของอะเรย์ โดยดูจากบนลงล่าง จากตัวอย่างมีการเปลี่ยนเครื่องหมายสองครั้งในหลักซ้ายสุด แสดงว่า p(s) มีราก RHP สองตัว และถ้า p(s) เป็นโพลิโนเมียลตัวส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบใดแล้วละก็ แสดงว่าระบบนั้นไม่มีเสถียรภาพ

กรณีที่หลักซ้ายสุดเป็นศูนย์

(Left-Column Zeros of the Array)

ในบางครั้ง สัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียลมีค่าเป็นศูนย์เกิดขึ้นในหลักซ้ายมือสุดของอะเรย์ ดังนั้นอะเรย์จะไม่สามารถทำให้สมบูรณ์ได้ เงื่อนไขนี้เราเรียกว่า Left-column zero ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$p(s) = 3s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 4s + 5$$

ซึ่งมีอะเรย์เป็นดังนี้

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 3 & 2 & 5 \\ s^3 & 6 & 4 & \\ s^2 & 0 & 5 & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

อะเรย์ไม่สามารถทำให้สมบูรณ์ได้ด้วยวิธีทั่วไป เพราะจะมีการหารด้วย 0 เกิดขึ้น ดังนั้นในการที่จะแก้ไขปัญญหาที่เกิดขึ้น ทำได้โดยการแทน 0 ที่เกิดขึ้นด้วยค่าที่มีค่าน้อย ๆ จะเป็นบวกหรือลบ ขึ้นอยู่กับว่าสมาชิกในหลักซ้ายสุดก่อนหน้ามัน มีค่าเป็นบวกหรือลบ ถ้าเป็นบวกก็ใช้ค่าที่เป็นบวกน้อย ๆ แต่ถ้าเป็นลบก็ใช้ ค่าที่เป็นลบน้อย ๆ ซึ่งเราคิดว่าวิธีนี้จะทำให้สัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียล มีค่าเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อย ดังนั้น ค่าที่ได้จะไม่ใช่ค่าจริงของหลักซ้ายสุด

ในการคำนวณจริง เราจะใช้ e แทน 0 ที่เกิดขึ้น แล้วใช้ e คำนวณตามปกติ แล้วติดค่า e นั้นไว้ก่อน เมื่อจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมาย ก็ใช้วิธีหาลิมิตของสมาชิกตัวนั้น โดยให้ e มีค่าเข้าสู่ 0 (ทางบวกหรือลบ ให้พิจารณาจากเหตุผลข้างต้น) ดังแสดงได้ดังนี้

การแก้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น และพีชคณิต

<u>วิธีของนิวตัน</u> (Newton's Method)

วิธีของนิวตันเป็นวิธีที่นิยมใช้กันอย่างทั่วไป ในการหาค่าประมาณของค่ารากของสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น f(x) = 0 ในวิธีนี้จะใช้วิธีสมมติ x_i เป็นค่าประมาณของค่ารากของสมการ f(x) = 0 และประมาณฟังก์ชัน f(x) ด้วยฟังก์ชันของเส้นสัมผัส (tangent) ของ f(x) ที่ $x = x_i$ ดังรูปที่ (ข2) หรือกล่าวอีกอย่างได้ว่าเราจะประมาณฟังก์ชัน f(x) ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่หนึ่ง (First order Taylor series) ของฟังก์ชัน f(x) รอบจุด x_i นั่นเอง ถ้าเราให้จุดตัดของเส้นสัมผัสนี้กับแกน x (จุดที่ f(x) = 0) เป็น $(x_{i+1},0)$ เราจะได้ความสัมพันธ์ ว่า

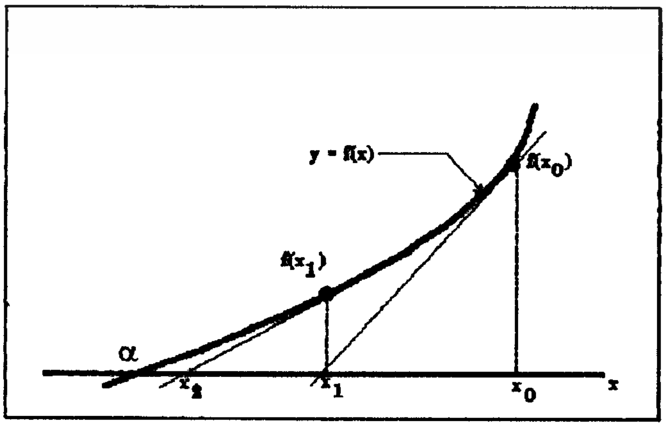
$$x_{i+1} = x_i - f(x) / f'(x) \quad ; i = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(ข6)}$$

ข้อดีของวิธีนิวตันคือ

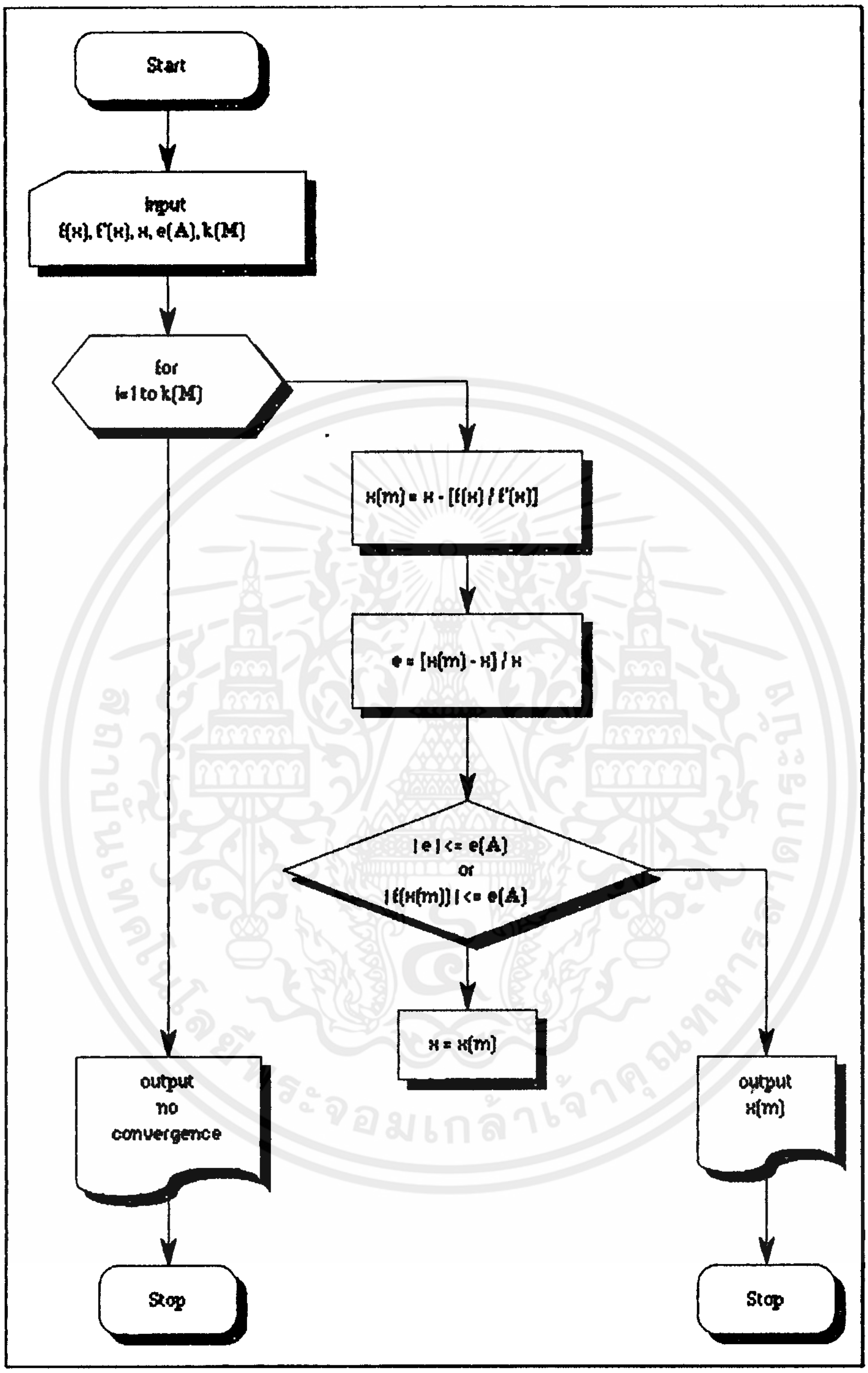
1. วิธีนี้จะคอนเวอร์จอย่างรวดเร็ว สำหรับค่าเริ่มต้นที่ใกล้เคียงกับค่ารากของ f(x) = 0
2. จะมีประโยชน์มากในกรณีที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ (derivative) f'(x) ได้ง่ายเช่น f(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม

แต่ก็มีข้อเสียอยู่เหมือนกันคือ

1. ถ้าเงื่อนไขของการคอนเวอร์จไม่เหมาะสม จะไม่หยุดไอเทอเรท
2. วิธีนี้อาจจะไดเวอร์จ (deverge) อย่างรวดเร็ว ถ้ากำหนดค่าเริ่มต้นห่างไกลจากค่าราก มากเกินไป
3. ต้องหาค่าอนุพันธ์ f'(x) โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเลือกค่าเริ่มต้น ทำได้ยาก เพราะถ้าไม่เลือกค่าเริ่มต้น x_0 ให้อยู่ภายในขอบเขตที่มีค่ารากอยู่ วิธีนี้จะไดเวอร์จอย่างรวดเร็ว



รูป ข.3 การหาค่ารากของสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีของนิวตัน



รูป ข.3 โฟลว์ชาร์ตสำหรับวิธีของนิวตัน

วิธีของแบร์สโตว (Bairstow's Method)

วิธีของแบร์สโตว เป็นวิธีที่ใช้หาค่ารากของสมการโพลิโนเมียลอันดับ n

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad \text{(ข7)}$$

ที่มีสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นเลขจริง โดยการแยกสมการเดิม (ข7) ออกเป็นผลคูณของสมการ กำลัง 2 กับสมการกำลัง (n-2) ดังนี้

$$f(x) = (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \ldots + b_{n-3}x + b_{n-2}) \qquad \text{(ข8)}$$

จากการแยกแฟกเตอร์ดังนี้ทำให้เราสามารถหาค่ารากในขั้นแรกได้ 2 ค่า โดยการแก้สมการกำลัง 2 ต่อจากนั้นก็อาศัยวิธีการเดียวกันนี้แยกแฟกเตอร์ของสมการโพลิโนเมียลอันดับ (n-2) ที่เหลือต่อไปอีกเราก็จะสามารถหาค่ารากอีก 2 ค่าถัดไป ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งสมการโพลิโนเมียลที่เหลือมีอันดับ ไม่ถึง 2 แล้วเราก็จะสามารถหาค่ารากได้ทั้งหมด ข้อดีของวิธีนี้ก็คือ ค่ารากของสมการที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นเลขจริงนี้ทั้ง ค่ารากจริงและรากเชิงซ้อน จะสามารถหาได้ทั้งหมด

ค่าสัมประสิทธิ์ p และ q สมการกำลัง 2 จะหาได้โดยใช้วิธีของนิวตันสำหรับตัวแปร 2 ตัว กล่าวคือ ขั้นแรกเราจะเลือก ค่า p และ q ที่เหมาะสมในสมการ $x^2 + px + q$ แล้วนำไปหารสมการที่ (ข7) สมมติเหลือ เศษเป็น $rx + s$ จากนั้นเปลี่ยนค่า p และ q ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งค่าสัมประสิทธิ์ของ $rx + s$ เป็นศูนย์ไปด้วย กันพร้อมกัน นั่นคือ

$$r(p,q) = 0$$
$$s(p,q) = 0 \qquad \text{(ข9)}$$

เราจะใช้วิธีของนิวตันในการแก้สมการ (ข9) ซึ่งโดยวิธีการนี้เราจำเป็นต้องหาอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของ r และ s เทียบกับ p และ q

ถ้าเราสมมติให้ g(x) เป็นผลหารของ f(x) ด้วย $x^2 + px + q$ เราจะได้ว่า

$$(x^2 + px + q)\,g(x) + rx + s = 0 \qquad \text{(ข10)}$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (ข10) เทียบกับ p และ q ตามลำดับ จะได้

$$xg(x) + (x^2 + px + q)\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial p}x + \frac{\partial s}{\partial p} = 0$$

$$g(x) + (x^2 + px + q)\frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial q}x + \frac{\partial s}{\partial q} = 0 \quad \text{...(ข11)}$$

ในที่นี้ค่าสัมประสิทธิ์ b_i ของ g(x) ในสมการ (ข10) และค่าสัมประสิทธิ์ c_i ของผลหารของ g(x) ด้วย $x^2 + px + q$ จะหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$b_0 = a_0 \quad , b_1 = a_1 - pb_0$$

$$b_i = a_i - pb_{i-1} - qb_{i-2} \quad ; i = 2, 3, \dots , n \quad \text{...(ข12)}$$

$$c_0 = b_0 \quad , c_1 = b_1 - pc_0$$

$$c_i = b_i - pc_{i-1} - qc_{i-2} \quad ; i = 2, 3, \dots , n-1 \quad \text{...(ข13)}$$

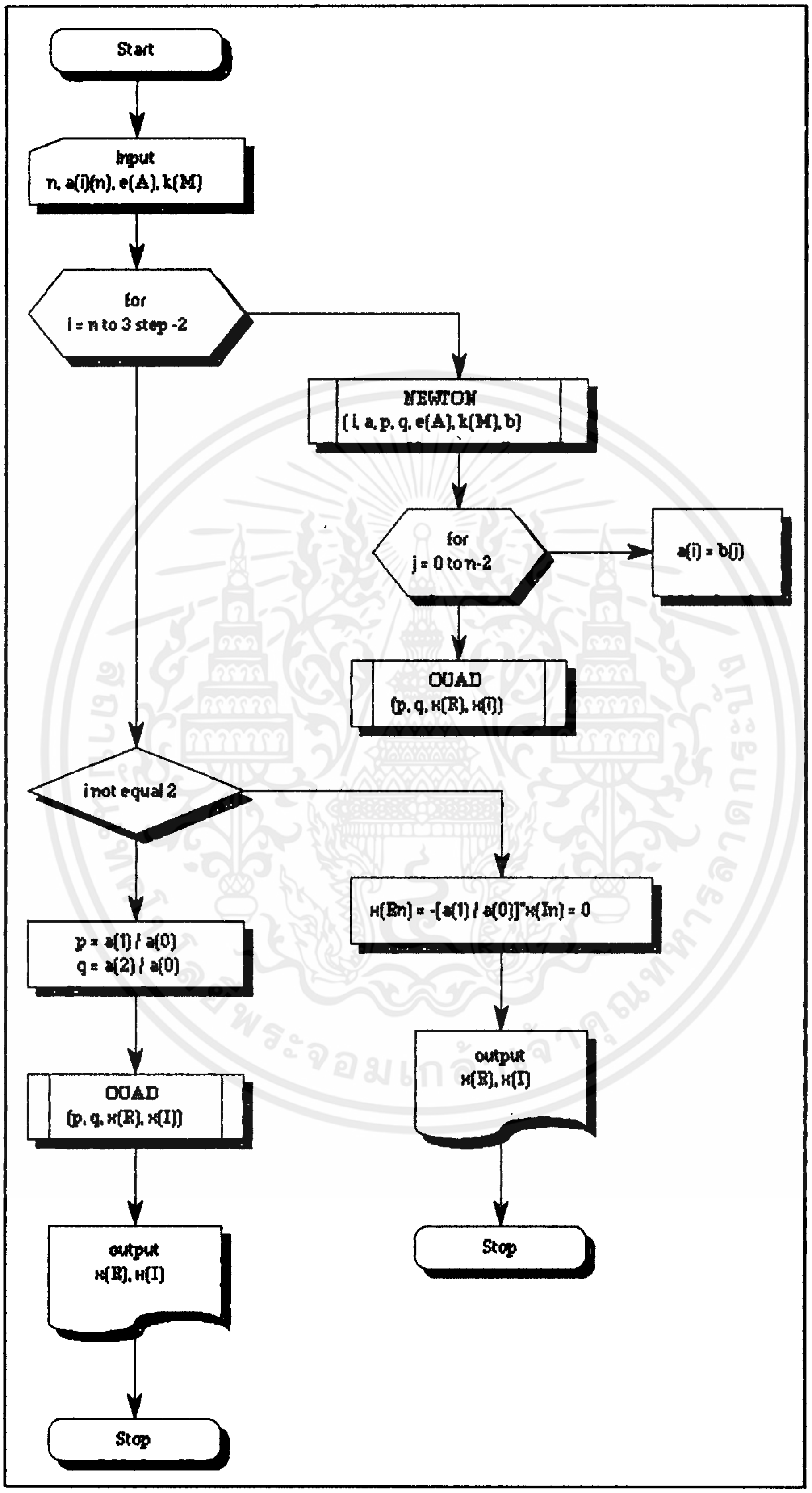
จากสมการเหล่านี้เราจะได้

$$\frac{\partial r}{\partial p} = -c_{n-2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial q} = -c_{n-3}$$

$$\frac{\partial s}{\partial p} = c_{n-1}b_{n-1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial q} = -c_{n-2} \quad \text{...(ข14)}$$



รูป ข.4 โฟลว์ชาร์ตสำหรับวิธีของแบร์สโตว

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

<u>วิธีของรุงเง-คุตตา</u> (Runge-Kutta Method)

วิธีของรุงเง-คุตตา เป็นวิธีที่ได้มาจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ ดังนั้นอันดับต่าง ๆ ของวิธีนี้จึงขึ้นอยู่ กับจำนวนเทอมที่ใช้จากอนุกรมเทย์เลอร์ เช่น วิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2,3,4,5,.... เป็นต้น วิธีที่นิยมใช้กันมาก คือวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4 ซึ่งจะให้ค่าผิดพลาดอยู่ในอันดับ h^5 จึงเป็นวิธีที่ให้ค่าที่เที่ยงตรงมากวิธีหนึ่ง

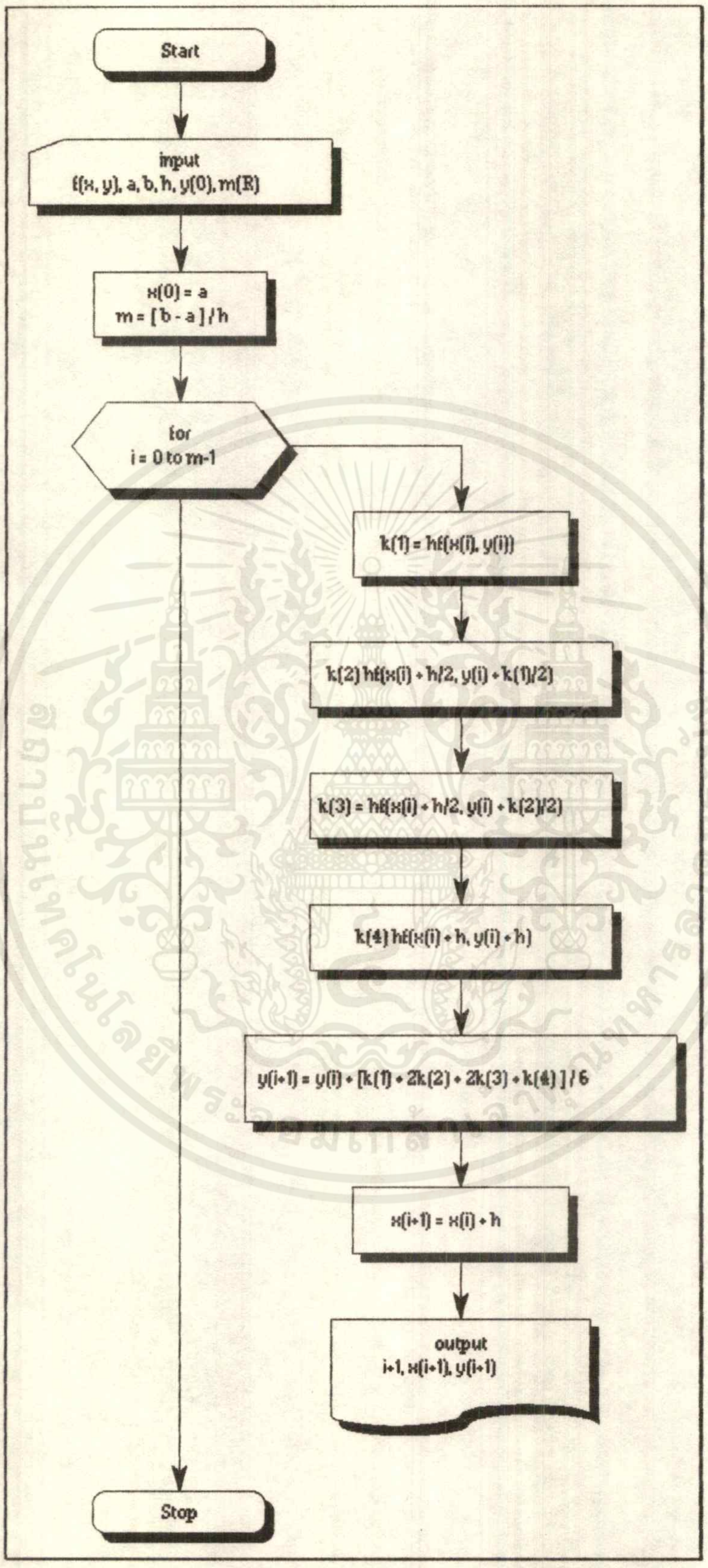
ในวิธีนี้เมื่อกำหนดจุดเริ่มต้น (x_i,y_i) ให้คำนวณค่า y_{i+1} ได้จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y_{i+1} = y_i + 1/6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{(ข15)}$$

ค่าของ k_1, k_2, k_3 และ k_4 หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i,y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + h/2,\ y_i + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_i + h/2,\ y_i + k_2/2) \quad \text{(ข16)} \\ k_4 &= hf(x_i + h,\ y_i + k_3) \end{aligned}$$

วิธีนี้เป็นวิธีมัลติสเต็ป (multi step) เนื่องจากใช้จุด $x = x_i$, $x_i = x_i + h/2$ และ $x_i + h$ ในการคำนวณ และค่าที่สเต็ปกลาง $(x_i + h/2,\ x_i + h)$ เหล่านี้จะถูกสร้างขึ้นมาเองโดยไม่ต้องอาศัยข้อมูลจากการคำนวณในสเต็ปก่อน



รูป ข.5 โฟลว์ชาร์ตสำหรับวิธีของรุงเง-คุตตา

ภาคผนวก ค.

การใช้งานโปรแกรม Mr.Sim

บทนำ

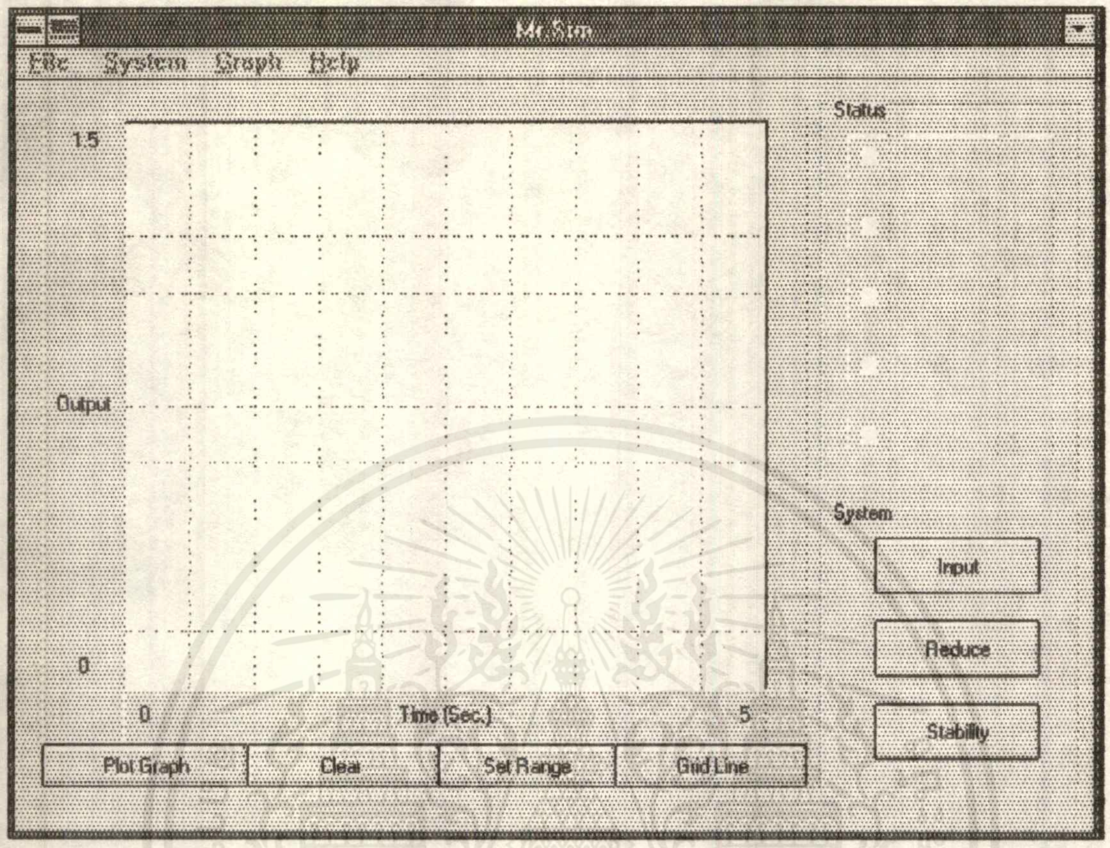
สำหรับโปรแกรม Mr.Sim (Model Reduction Simulation) นั้น เป็นโปรแกรมที่เขียนขึ้นมาเพื่อใช้ประกอบการศึกษาและวิเคราะห์การลดทอนระบบควบคุมใด ๆ ซึ่งเป็นโปรแกรมที่เขียนขึ้น ภายใต้สภาพแวดล้อมของโปรแกรมวินโดวส์ นั่นหมายความว่า เราจำเป็นต้องใช้งานโปรแกรม Mr.Sim ผ่านทางโปรแกรมวินโดวส์ ไม่สามารถที่จะใช้งานโปรแกรมนี้เพียงลำพังได้

สำหรับสาเหตุที่เราเลือกที่จะเขียนโปรแกรม ภายใต้สภาวะแวดล้อมของโปรแกรมวินโดวส์นั้น ก็เพราะว่า ในปัจจุบันโปรแกรมวินโดวส์ได้เป็นที่นิยมใช้ไปทั่วโลก ดังนั้นการที่เราได้เขียนโปรแกรมภายใต้สภาวะแวดล้อม ของโปรแกรมวินโดวส์ จะเป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้พัฒนาการทางด้านการเขียนโปรแกรมของเราได้ก้าวทันต่างประเทศ และยังช่วยให้โปรแกรมของเราเป็นที่ยอมรับมากยิ่งขึ้น

นอกจากสาเหตุดังกล่าวแล้ว ตัวแปลภาษาที่เราเลือกใช้นั้น เป็นตัวแปลภาษาที่มีการจัดการทางด้านการติดต่อกับผู้ใช้ที่ดีมาก แต่ตัวมันเองจำเป็นที่จะต้องทำงานภายใต้สภาวะแวดล้อมของวินโดวส์ ดังนั้นโปรแกรมของเราจึงต้องทำงานภายใต้สภาวะแวดล้อมของวินโดวส์ไปโดยปริยาย

เริ่มใช้งาน

เนื่องจากโปรแกรมนี้ต้องทำงานบนวินโดวส์ ดังนั้นในขั้นแรก เราต้องเรียกโปรแกรมวินโดวส์ขึ้นมาใช้งานก่อน จากนั้นเราจึงเรียกโปรแกรมของเราขึ้นมาใช้งาน โดยผ่านทางโปรแกรมวินโดวส์ เมื่อโปรแกรมเริ่มทำงานแล้วจะเป็นดังรูป ค.1 ซึ่งจะเห็นว่าพื้นที่ส่วนใหญ่ถูกใช้ไปในการแสดงผลตอบสนองทางเวลาของระบบทั้งที่ยังไม่ ได้ลดทอน และถูกลดทอนแล้ว ส่วนพื้นที่ในส่วนที่เหลือ จะถูกใช้เป็นตัวรับคำสั่งต่าง ๆ จากผู้ใช้

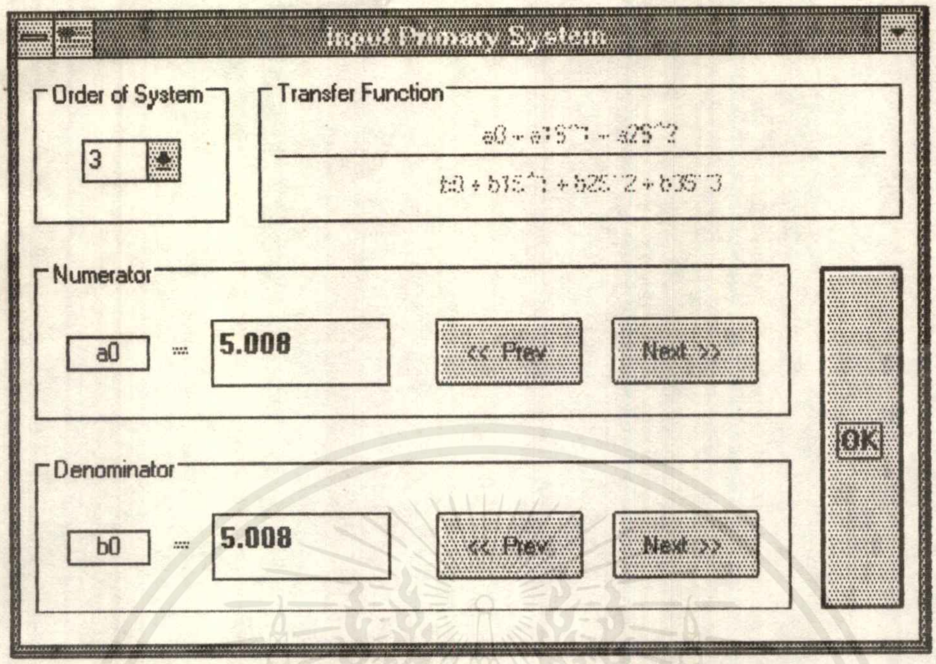


รูป ค.1 หน้าตาของโปรแกรมหลัก

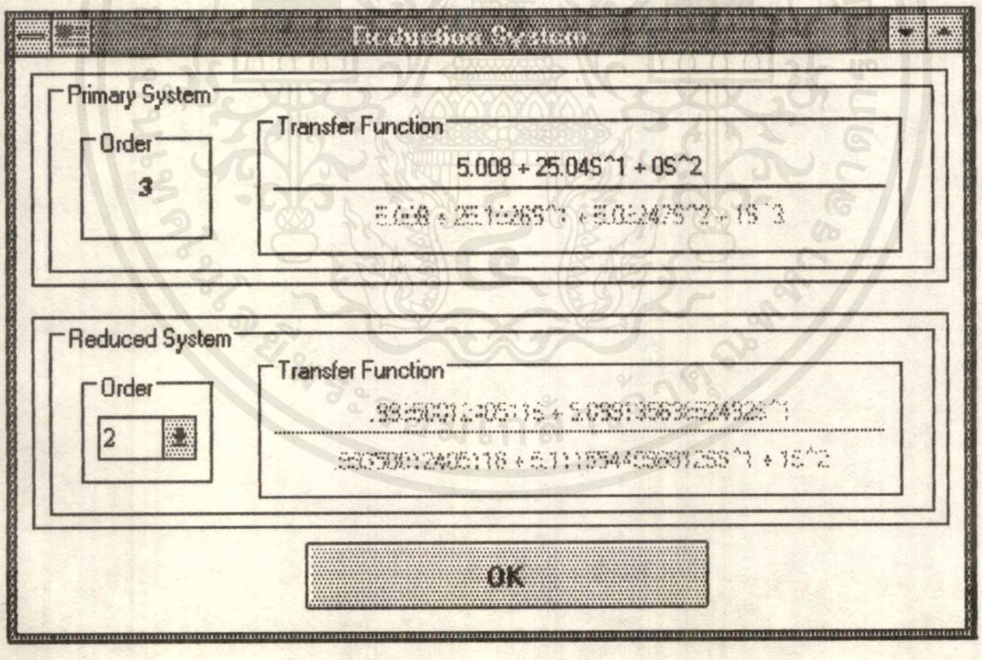
สำหรับขั้นตอนการใช้โปรแกรม วิเคราะห์ระบบทั่วไป และระบบที่ถูกลดทอนแล้ว สามารถทำได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. ใส่ระบบที่ต้องการวิเคราะห์และลดทอน โดยการคลิกที่ Input System หรือเราสามารถที่จะเลือกได้จากเมนู เมื่อเลือกแล้วจะมีหน้าต่างใหม่เปิดขึ้นมาเพื่อรับค่าอันดับ และสัมประสิทธิ์ของทั้งตัวเศษและตัวส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนตามลำดับ ดังรูป ค.2 โดยที่อันดับของระบบที่จะให้ทำการลดทอน จะต้องมีอันดับไม่เกินอันดับ 10 หลังจากที่เราใส่ค่าต่าง ๆ เป็นที่เรียบร้อยแล้ว คลิกที่ OK หน้าต่างอินพุตก็จะถูกปิดไป

2. ทำการลดทอนระบบโดยการคลิกที่ Reduce System เมื่อคลิกแล้วจะมีหน้าต่างใหม่เปิดขึ้นมาเพื่อให้เราใส่ค่าอันดับของระบบใหม่ที่ถูกลดทอนแล้ว ดังรูป ค.3 หลังจากที่เราใส่ค่าอันดับของระบบใหม่ที่ถูกลดทอนแล้ว โปรแกรมจะทำการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ทั้งตัวเศษและตัวส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบใหม่ แล้วแสดงผลให้ดูในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอน หลังจากนั้นถ้าเราต้องการที่จะทำการลดทอนอันดับของระบบให้เป็นอันดับอื่นอีก ก็สามารถทำได้ โดยการเลือกอันดับของระบบใหม่ โปรแกรมก็จะทำการคำนวณค่าของสัมประสิทธิ์ใหม่อีกครั้งหนึ่ง แล้วแสดงผลให้ดูในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอน หลังจากนั้นเมื่อเราคลิกที่ OK หน้าต่างก็จะถูกปิดไป



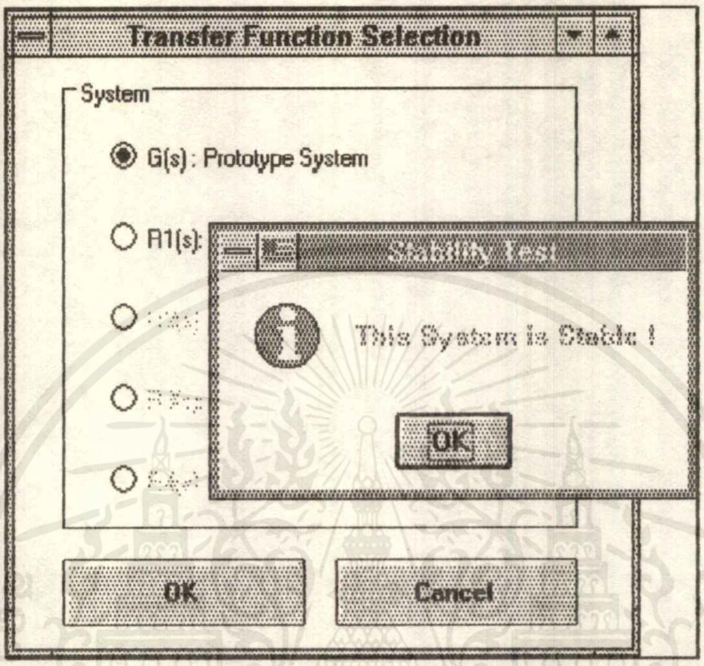
รูป ค.2 หน้าต่างอินพุต



รูป ค.3 หน้าต่างการลดอันดับของระบบ

3. ต่อไปจะเป็นการตรวจดูเสถียรภาพของระบบทั้งที่ยังไม่ถูกลดทอน และระบบที่ถูกลดทอนอันดับแล้ว ได้โดยการคลิกที่ Stability Test เมื่อคลิกแล้วจะมีหน้าต่างใหม่เปิดขึ้นมา ดังรูป ค.4 ซึ่งจะมีระบบให้เลือกที่จะทดสอบได้ 5 ระบบ โดยระบบที่ 1 จะเป็นระบบหลักที่ยังไม่ถูกลดทอนอันดับ ส่วนระบบถัดมาก็จะเป็นระบบที่ถูกลดทอนอันดับครั้งที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ เมื่อทำการเลือกระบบแล้วโปรแกรมก็จะ

ทำการคำนวณเสถียรภาพของระบบนั้น แล้วแสดงให้ผู้ใช้ทราบว่า ระบบนั้นมีเสถียรภาพหรือไม่อย่างไร จากนั้นเมื่อคลิกที่ OK หน้าต่าง ก็จะถูกปิดไป

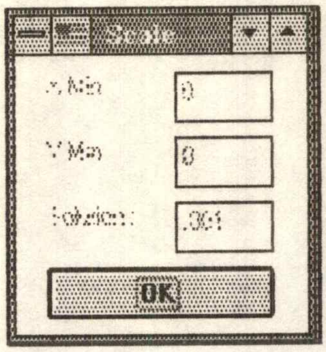


รูป ค.4 หน้าต่างแสดงเสถียรภาพของระบบใด ๆ

4. จากนั้นจะเป็นการเปรียบเทียบลักษณะของระบบ ระหว่างระบบเดิมที่ไม่ถูกลดทอน กับระบบที่ถูกลดทอนแล้ว โดยใช้ผลตอบสนองทางเวลาของระบบทั้งสอง เป็นตัวเปรียบเทียบ ซึ่งการแสดงผลตอบสนองทางเวลาของระบบทั้งสองมีขั้นตอนสำคัญดังต่อไปนี้

4.1 การกำหนดช่วงที่จะทำการแสดงผล เป็นการบอกให้โปรแกรมรู้ว่าจะทำการคำนวณผลตอบสนองทางเวลาในช่วงเวลาใด ซึ่งทำได้โดยการคลิกที่ Set Range หลังจากคลิกแล้วจะมีหน้าต่างใหม่เปิดขึ้นมาดังรูป ค.5 ซึ่งจะรอรับค่าต่ำสุดและสูงสุดในแนวแกน t หรือแกนเวลา และจะรอรับค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดในแนวแกน y จะเห็นว่าเมื่อเราใส่ค่า t, y ลงไป ที่ส่วนแสดงผลจะเปลี่ยนค่าต่ำสุดและสูงสุดตามค่าที่เราใส่ จากนั้นจะเห็นว่า มีการรอรับค่า Solution ซึ่งเป็นค่าที่บอกให้โปรแกรมรู้ว่าจะทำการคำนวณละเอียดมากน้อยเพียงใด จากนั้นเมื่อ เราคลิกที่ OK หน้าต่างก็จะถูกปิดไป

4.2 การกำหนดกริดบนส่วนแสดงผล หลังจากที่หน้าต่างการกำหนดช่วงปิดไป โปรแกรมจะทำการเปิดหน้าต่างการกำหนดกริดให้โดยทันที แต่ในกรณีที่เราต้องการจะทำการกำหนดกริดภายหลังก็สามารถทำได้ โดยการคลิกที่ Set Grid โปรแกรมก็จะเปิดหน้าต่างการกำหนดกริดให้เหมือนกัน ดังรูป ค.6 ซึ่งจะมีการรอรับค่าของช่วงห่างของแต่ละกริด ทั้งในแนวแกน t และแกน y จากนั้นเมื่อคลิกที่ OK หน้าต่างจะถูกปิดไป และที่ส่วนแสดงผล จะมีกริดปรากฏขึ้นมาให้เห็น

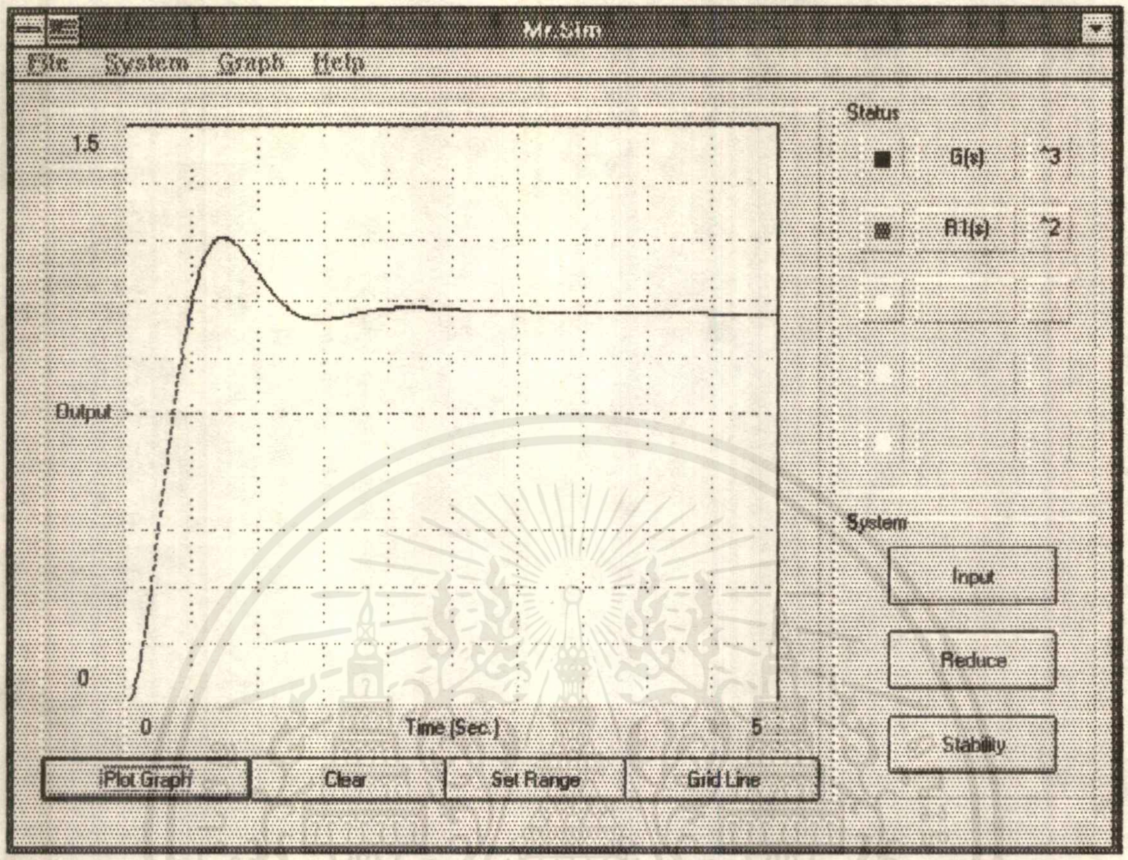


รูป ค.5 หน้าต่างการกำหนดช่วงแสดงผล

รูป ค.6 หน้าต่างแสดงการกำหนดระยะห่างของกริด

4.3 หลังจากที่เรากำหนดช่วงของการแสดงผล และกำหนดกริดแล้ว ก็จะเป็นการแสดงผลตอบสนองทางเวลาของระบบ ซึ่งทำได้โดยการคลิกที่ Plot Graph เมื่อคลิกแล้ว ก็จะมีหน้าต่างใหม่เปิดขึ้น เพื่อให้ผู้ใช้ทำการเลือกว่าจะ ทำการแสดงผลตอบสนองทางเวลาของระบบใด โดยการคลิกที่ระบบนั้น จากนั้น เมื่อคลิกที่ OK หน้า ต่างนั้นก็จะถูกปิดลงไป แล้วระบบที่เลือกก็จะถูกพล็อตในส่วนแสดงผล ดังรูป ค.7 ซึ่งเราสามารถทำการพล็อตผลตอบสนองของระบบที่ยังไม่ถูกลดทอน เปรียบเทียบกับระบบที่ถูกลดทอนแล้ว ได้ในเวลาเดียวกัน สำหรับการที่เราจะดูว่ากราฟเส้นใดเป็นของระบบใด ให้ดูที่สีของกราฟนั้น เพราะจะมีบอกอยู่ทางมุมบนขวาของจอ และเมื่อเราต้องการที่จะลบกราฟทั้งหมดออกจากส่วนที่แสดงผล ก็สามารถทำได้โดยการคลิกที่ Clear กราฟทั้งหมดที่แสดงผลอยู่ จะถูกลบไปหมด เหลือแต่กริดเท่านั้น

5. ในกรณีที่เราต้องการจะเริ่มใส่ระบบใหม่ก็ทำได้โดยคลิกที่ New System ในเมนู ค่าต่าง ๆ ในโปรแกรมจะถูกรีเซทหมด แล้วโปรแกรมก็จะเปิดหน้าต่างอินพุตให้โดยทันที เพื่อให้เราใส่ค่าอันดับ และสัมประสิทธิ์ ต่าง ๆ ของตัวเศษและตัวส่วน ของระบบใหม่ต่อไป



รูป ค.7 รูปแสดงการพล็อตผลตอบสนองทางเวลา

นอกจากขั้นตอนทั้งหมดที่กล่าวมาแล้วนั้น เรายังสามารถที่จะทำการเก็บข้อมูลต่าง ๆ ของระบบที่เราวิเคราะห์และลดทอนได้ พร้อมทั้งสามารถนำกลับมาใช้ใหม่ได้อีกด้วย โดยการคลิกที่ Save System กับ Open System และนอกจากนั้น เรายังสามารถที่จะพิมพ์ส่วนแสดงผลออกทางเครื่องพิมพ์ได้ โดยการคลิกที่ Print ในเมนู หลังจากที่เราทำการวิเคราะห์และลดรูปเสร็จเรียบร้อยแล้ว และต้องการออกจากโปรแกรมก็ทำได้โดยการ คลิกที่ Exit ในเมนูอีกเช่นเดียวกัน โปรแกรมก็จะยุติการทำงานแล้วกลับคืนออกไปสู่วินโดวส์