

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวชนิดแขนบาง

Mathematical Modeling for a Thin Single-link Flexible Robot Arm



ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาเทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์ ภาคเทคนิคอุตสาหกรรม

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2541


เลขหม.....
เลขทะเบียน..... 34052
วัน, เดือน, ปี- 1 ต.ค. 2542

หัวข้อปริญญาานิพนธ์ แบบจำลองคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียว
ชนิดแขนบาง
Mathematical Modeling for a Thin Single-link Flexible Robot
Arm

ชื่อนักศึกษา นาย ภิรมย์ นำนานผล
นาย ภูวนาท คำรงพร
อาจารย์ที่ปรึกษา คร.ปิติเชต ผู้รักษา
ภาควิชา เทคนิคอุตสาหกรรม
ปีการศึกษา 2541

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้
นับปริญญาานิพนธ์ ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต

คณะกรรมการสอบปริญญาานิพนธ์


(ดร. ปิติเชต ผู้รักษา)

อาจารย์ที่ปรึกษา

กรรมการ

กรรมการ

กรรมการ

กรรมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลอัตโนมัติข้อต่อเดียวชนิดแขนบาง

โดย

นาย ภิรมย์ นานาผล รหัสประจำตัว 40012023

นาย ภูวนาท ดำรงพร รหัสประจำตัว 40012025

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.ปิติเขต สุรัรักษา

ปีการศึกษา 2541

บทคัดย่อ

ในโครงการนี้ใช้ทฤษฎีบีมของ ออยเลอร์-เบอร์นูลี ในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนกลอัตโนมัติข้อต่อเดียวชนิดแขนบาง และแบบจำลองที่พิจารณาผลกระทบของแฉกบั้ง รวมทั้งการวิเคราะห์และศึกษาทั่วโลก ลักษณะโครงสร้างการอ่อนตัวของแขนกลในเชิงคณิตศาสตร์ มีแฉกบั้งสองชนิดที่นำมาร่วมพิจารณาในการสร้างแบบจำลองนี้คือ แฉกบั้งโดยอากาศ (แฉกบั้งภายนอก) และแฉกบั้งแบบเคลวิน-วอจท์ (แฉกบั้งภายใน) ซึ่งจำลองผลของแบบจำลองโดยโปรแกรมแมทแล็บ(MATLAB) แสดงลักษณะการสั่นของแต่ละโหมด พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลการทดลองทางกราฟฟิก

Mathematical Modeling for a Thin Single-link Flexible Robot Arm

By

Mr. Pirom Numnaphol No. 40012023

Mr. Phuwanat Damrongporn No. 40012025

Adviser Dr. Pitikhate Sooraksa

Academic year 1998

Abstract

In this project , the Euler-Bernoulli beam theory is applied to investigate a new mathematical model for a thin single-link flexible robot arm with dampings . Detailed analysis and derivation are given to support the mathematical modeling of this particular flexible mechanism . There are to significant damping effects for the arm model , which are air damping (as the external damping) and the Kelvin-voight damping (as the internal damping) . The MATLAB simulation results for the modeling are performed to observe the significant vibration modes , and the results are compared graphically.

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ มีอาจลุดวงไปได้หากขาดความช่วยเหลือจากบุคคลต่างๆในหลายฝ่าย ดังนั้นคณะผู้จัดทำจึงใคร่ขอขอบคุณบุคคลต่างๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบคุณอาจารย์ ดร. ปิติเชต สุรักษา ที่กรุณาให้คำชี้แนะและเป็นที่ปรึกษาในโครงการนี้ด้วยดีตลอดมา พร้อมกันนี้ ขอขอบคุณอาจารย์ อรรถสิทธิ์ หล้าสกุล และคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ให้คำปรึกษาเกี่ยวกับข้อมูลต่างๆและขอบคุณเพื่อนๆ 2N ที่คอยให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจตลอดมา

สุดท้ายนี้ กราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่และครูบาอาจารย์ที่อบรมเลี้ยงดูตั้งแต่เล็กจนโตจนสำเร็จในสิ่งที่ได้มุ่งหวังไว้ ฉะนั้นคุณงามความดีใดๆก็ตามที่เกิดจากปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ขอมอบแก่ทุกๆท่านที่ได้กล่าวนามมาแล้วข้างต้น

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	I
Abstract	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูป	V
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 ทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง	3
ชนิดของแคมป์สำหรับบีม	5
บทที่ 3 แบบจำลองคณิตศาสตร์แขนงกล่อนตัวข้อต่อเดียวชนิดแขนบาง	8
สมการบีมของออยเลอร์	8
เงื่อนไขขอบเขตของบีม	15
กรณีปลายหมุนทั้งสองข้าง	17
กรณีปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน	21
กรณีปลายด้านหนึ่งหมุนและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ	27
กรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่นและปลายด้านหนึ่งอิสระ	32
ผลของการจำลองผลโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์	37
บทที่ 4 แบบจำลองคณิตศาสตร์ของแคมป์และมอเตอร์	46
แบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนกล่อนตัวข้อต่อเดียวชนิดแขนบาง	
เมื่อทำการใส่ค่าแคมป์	46
ผลการจำลองผลโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์	50
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์	59
บทที่ 5 บทสรุป	62
เอกสารอ้างอิง	
ภาคผนวก	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 3.1 บีมเอกรูป	8
รูปที่ 3.2 บีมปลายหมุนทั้งสองข้าง	17
รูปที่ 3.3 บีมติดแน่น-หมุน	21
รูปที่ 3.4 แสดงจุดตัดระหว่าง $\tan kl$ กับ $\tanh kl$	24
รูปที่ 3.5 บีมปลายหมุน-ปลายอิสระ	27
รูปที่ 3.6 แสดงจุดตัดระหว่าง $\tan kl$ กับ $\tanh kl$	30
รูปที่ 3.7 บีมปลายติดแน่น-ปลายอิสระ	32
รูปที่ 3.8 แสดงจุดตัดระหว่าง $\cos kl$ กับ $-\operatorname{sech} kl$	35
รูปที่ 3.9 แสดงการสั้นของแต่ละโหมดของบีมปลายหมุนทั้งสองข้าง	38
รูปที่ 3.10 แสดงการสั้นของบีมปลายหมุนทั้งสองข้าง	39
รูปที่ 3.11 แสดงการสั้นของแต่ละโหมดของบีมปลายติดแน่นด้านหนึ่ง และอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน	40
รูปที่ 3.12 แสดงการสั้นของบีมแบบปลายติดแน่นด้านหนึ่ง และอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน	41
รูปที่ 3.13 แสดงการสั้นของแต่ละโหมดของบีมปลายด้านหนึ่งหมุน และปลายด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ	42
รูปที่ 3.14 แสดงการสั้นของบีมปลายด้านหนึ่งหมุน และปลายด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ	43
รูปที่ 3.15 แสดงการสั้นของแต่ละโหมดของบีมกรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่น และอีกด้านหนึ่งอิสระ	44
รูปที่ 3.16 แสดงการสั้นของบีมปลายด้านหนึ่งติดแน่น และอีกด้านหนึ่งอิสระ	45
รูปที่ 4.1 แสดงชิ้นส่วนหนึ่งของแกนกล่อ้นตัวข้อต่อเดียว	46
รูปที่ 4.2 แสดงการสั้นของแต่ละโหมดของบีมแบบปลายหมุนทั้งสองข้าง ขณะทำการใส่แคมป์	51
รูปที่ 4.3 แสดงการสั้นของของบีมแบบปลายหมุนทั้งสองข้าง ขณะทำการใส่แคมป์	52

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	หน้า
รูปที่ 4.4 แสดงการสั้นของแต่ละ โหมคของบีมแบบปลายติดแน่นด้านหนึ่ง และอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุนขณะทำการใส่แคมบั้ง	53
รูปที่ 4.5 แสดงการสั้นของบีมแบบปลายติดแน่นด้านหนึ่ง และอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุนขณะทำการใส่แคมบั้ง	54
รูปที่ 4.6 แสดงการสั้นของแต่ละ โหมคของบีมแบบปลายด้านหนึ่งหมุน และปลายอีกด้านหนึ่งเป็นอิสระขณะทำการใส่แคมบั้ง	55
รูปที่ 4.7 แสดงการสั้นของบีมแบบปลายด้านหนึ่งหมุน และปลายอีกด้านหนึ่งเป็นอิสระขณะทำการใส่แคมบั้ง	56
รูปที่ 4.8 แสดงการสั้นของแต่ละ โหมคของบีมแบบปลายด้านหนึ่งติดแน่น และอีกด้านหนึ่งอิสระขณะทำการใส่แคมบั้ง	57
รูปที่ 4.9 แสดงการสั้นของบีมแบบปลายด้านหนึ่งติดแน่น และอีกด้านหนึ่งอิสระขณะทำการใส่แคมบั้ง	58
รูปที่ 4.10 แสดงการเคลื่อนที่ของฮับ	59

บทที่ 1

บทนำ

ในปัจจุบันอุตสาหกรรมได้เข้ามามีบทบาทในการพัฒนาประเทศมากขึ้น จะพบว่ามิมีโรงงานอุตสาหกรรมเกิดขึ้นมากมาย และ ในโรงงานอุตสาหกรรมเหล่านี้จะมีการใช้ทั้งแรงงานคนและเครื่องจักรกล

แขนกลก็เป็นเครื่องจักรกลอีกชนิดหนึ่งที่พบเห็นได้มากในโรงงานอุตสาหกรรมโดยทั่วไป ทั้งนี้เพื่อเป็นการลดการใช้กำลังงานของมนุษย์ ลดพลังงานทางเครื่องกล เพื่อความแม่นยำและรวดเร็วในการทำงานอย่างมีประสิทธิภาพ ความจำเป็นโดยทั่วไปที่เป็นสาเหตุหนึ่งที่ต้องนำแขนกลมาใช้ในการทำงานที่มีลักษณะดังนี้

- งานที่กระทำซ้ำกันบ่อยๆ
- งานที่ทำแล้วเกิดอันตรายได้ง่าย เช่น งานประเภทเชื่อมในที่สูงเหนือศีรษะ งานใต้ดิน และงานใต้ทะเล เป็นต้น
- งานที่ใช้ความละเอียดอ่อนข้างสูง
- งานที่สิ่งแวดล้อมไม่เอื้ออำนวย เช่น งานในอวกาศ ในที่ๆมนุษย์ไม่สามารถอยู่ได้

แนวความคิดในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวชนิดแขนบางนี้ โดยมีลักษณะทางกายภาพ ที่มีน้ำหนักเบา อ่อนตัว มีลักษณะของแขนเหมือนกันตลอดทั้งแขน ซึ่งในปัจจุบันแขนกลลักษณะดังกล่าวยังไม่มีการนำมาใช้กันโดยทั่วไป ข้อดีของแขนกลแบบนี้คือ น้ำหนักเบาจะช่วยให้การลดพลังงาน และ ในการขับเคลื่อนสามารถให้ผลตอบสนองที่รวดเร็ว ซึ่งน่าจะให้ผลที่ดีกว่าแขนกลแบบดั้งเดิม (conventional robot arm) หรือแขนกลหลายข้อต่อที่พบเห็นได้ในปัจจุบัน

แบบจำลองแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวได้ใช้สมการทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์โครงสร้าง ซึ่งในโครงงานนี้ได้นำเอาทฤษฎีบีมของ ออยเลอร์-เบอร์นูลี มาใช้ในการวิเคราะห์และแก้ปัญหา จุดประสงค์ของโครงงานนี้เป็นการศึกษาและสร้างแบบจำลองแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวโดยแบบจำลองคณิตศาสตร์ และ ปรากฏการทางกายภาพและอัตราครियाเนื่องจากผลกระทบของแอมป์ต้อแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวซึ่งการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ในแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวนี้จะสร้างภายใต้สมมติฐานดังนี้คือ

1. ลักษณะเนื้อของบีม (beam) เหมือนกันตลอดทั้งบีม มีน้ำหนักเบา และ บาง
2. การเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่งอยู่ในแนวระดับอยู่บนระนาบ x-y (x-y plan)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. แรงโน้มถ่วงของโลก แรงดึงในแนวแกน แรงอัดตัวที่ทำให้เสียรูป และความเสียดทาน ปัจจัยเหล่านี้จะไม่นำมาพิจารณา
4. มี แคมป์ปิง สองชนิดที่นำมาพิจารณาในการสร้างแบบจำลองของแขนกลนี้คือ
 - 4.1 แคมป์ปิง โดยอากาศ (Air damping)
 - 4.2 แคมป์ปิงแบบ เคลวิน-วอยท์ (Kelvin-Voight damping)

ในส่วนเนื้อหาของโครงงาน การวิเคราะห์ และ ศึกษาโครงสร้างของแขนกลได้แสดงไว้ในบทต่างๆตามลำดับดังนี้

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงทฤษฎี และ เอกสารที่เกี่ยวข้องที่ได้มีการวิจัย ศึกษา และ วิเคราะห์ โดยนักวิทยาศาสตร์ วิศวกร และ บุคคลต่างๆที่ผ่านมาตามลำดับ เพื่อเป็นแนวทาง ในการทำโครงงานนี้ รวมทั้งลักษณะ รูปแบบของทฤษฎีต่างๆ และชนิดของแคมป์ปิงสำหรับบีม

ในบทที่ 3 จะนำทฤษฎีบีม ของ ออยเลอร์-เบอร์นูลี มาวิเคราะห์และหาคำตอบสุดท้ายของสมการในกรณีต่างๆของบีม ซึ่งยังไม่ได้นำผลกระทบของ แคมป์ปิงค้อมบีมมาพิจารณา พร้อมทั้งนำสมการมาจำลองผลทางคอมพิวเตอร์ดูผลการทดลองทางกราฟฟิก

ในบทที่ 4 นำสมการที่ได้ตามเงื่อนไขต่างๆจากบทที่ 3 มาใส่สมการแคมป์ปิงหาคำตอบสุดท้ายของสมการ โดยใช้แคมป์ปิงแบบอากาศ และ แคมป์ปิงแบบเคลวิน-วอยท์ นำสมการมาจำลองผลทางคอมพิวเตอร์ ดูผลการทดลองจากกราฟฟิก พร้อมทั้งสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์

ในบทที่ 5 สรุปผลการทดลอง เปรียบเทียบผลการทดลองทางกราฟฟิกบทที่ 3 กับบทที่ 4 พร้อมทั้งสรุปผลแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์

อย่างไรก็ตามภายใต้สมมติฐานที่จำลองของแขนกลซึ่งเหมาะสมในการสร้างแขนกลที่จะนำไปใช้ในงานอวกาศ โดยโครงงานนี้ได้สร้างแบบจำลองของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดี่ยวชนิดแขนบางโดยเชิงคณิตศาสตร์เท่านั้นซึ่งน่าจะเป็นแนวทางในการพัฒนาสร้างแบบจำลองให้ดียิ่งขึ้นและสร้างแขนกลขึ้นมาใช้งานได้จริงๆ ในอันดับต่อไป

บทที่ 2

ทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ.1970 จีเวอร์เตอร์ (Gevater) ได้ศึกษาโครงสร้างแขนกลอ่อนตัวเป็นคนแรก ในระยะยี่สิบปีที่ผ่านมาแขนกลชนิดนี้ได้รับความสนใจจากนักวิทยาศาสตร์ วิศวกร และนักวิจัย จากทุกมุม โลกปัญหาการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ สำหรับแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวเป็นปัญหาที่น่าสนใจปัญหาหนึ่ง

แขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียว สามารถพิจารณาเสมือนบีม (beam) ท่อนหนึ่งในส่วนของทฤษฎีได้มีการนำเอาทฤษฎีบีมของ ออยเลอร์-เบอร์นูลลี (Euler-Bernoulli) มาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบแรกสามารถสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ อธิบายการเคลื่อนที่ของบีมดังนี้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

เมื่อ E คือ ค่ามอดูลัสของยัง (Young's modulus)

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของภาคตัดขวาง (moment of inertia of the cross section)

EI คือ ความแข็งแรงการโค้งงอ (flexural rigidity of beam)

A คือ พื้นที่หน้าตัดของบีม (area of the cross-section)

ρ คือ ความหนาแน่นของมวล (density of the material)

$y=y(x,t)$ คือ ฟังก์ชันของระยะขจัด (displacement function)

ตัวอย่างในการสร้างแบบจำลองนี้ได้แก่ การศึกษาแบบจำลองของเบลเลตซาและคณะ (bellezza et al.)

จากนั้นเรลท์ (Rayleigh) ได้พัฒนาสมการของออยเลอร์-เบอร์นูลลีให้ดีขึ้นโดยพิจารณาผลกระทบจากความเฉื่อยของการหมุน (Rotary inertia) ได้สมการการเคลื่อนที่ของบีมดังนี้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - I_\rho \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อมาในปี ค.ศ.1971 ทิมอสเซนโก (Timoshenko) ได้พัฒนาสมการของเรเลห์ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น โดยพิจารณาผลกระทบโดยเนื่องมาจากความเค้นเฉือน (transverse shear) ที่มีผลต่อบีมจนสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ของบีมได้ดังนี้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - I_p \left(1 - \frac{E}{\kappa^2 G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa^2 G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0$$

เมื่อ G คือ มอดูลัสความแข็งของเนื้อสาร (modulus of rigidity of the material)

κ คือ สัมประสิทธิ์ความเค้นของทิมอสเซนโก (Timoshenko's coefficient)

ในการศึกษาแบบจำลองคณิตศาสตร์ในระยะต่อมามีผู้ศึกษาพบว่าในบีมมีพื้นที่ตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีผลกระทบของการแปรรูปของความเค้นเฉือนต่อการสั่นของบีมมีน้ำหนักเป็นสามเท่าของผลกระทบความเฉื่อยของการหมุน ตัวอย่างของแบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวที่มีการพิจารณาผลกระทบดังกล่าวนี้ศึกษาโดย ไคว และเชน (Qi and Chen)

ซึ่งในระยะต่อมาได้มีการนำเอาทฤษฎีต่างๆมาพัฒนา รวมทั้งการนำทฤษฎีใหม่ๆมาใช้ในการแก้ปัญหาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกล ดังนี้

ในปี ค.ศ. 1984 แคนนอน และ ชมิตซ์ (Cannon and Schmitz) ได้ศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวจากแนวทางของจิวเคอร์ [1970] โดยอาศัยหลักการเคลื่อนที่ที่แบบจำลองสำหรับแขนกล และต้องการออกแบบในตำแหน่งปลายของแขนกลโดยวิเคราะห์และจัดสมการให้อยู่ในแบบต่างๆไป ในการออกแบบจำลองสำหรับบีมได้นำทฤษฎีบีมของ ฮอยเลอร์-เบอร์นูตีมาใช้ ในการสร้างแบบจำลองของ แคนนอน และ ชมิตซ์ ในครั้งนั้นยังไม่มีการศึกษาความเฉื่อยของการหมุน และการเปลี่ยนของความเค้น ทั้งนี้ได้นำหลักของ แฮมิลตัน (Hamilton's principle) ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะได้รูปแบบของสมการเริ่มต้นของอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่และสี่เงื่อนไขขอบเขต

ในปี ค.ศ. 1986 ยูโกวิช และคณะ (Yukovich et al.) ได้ศึกษาแขนกลชนิดนี้เช่นกันโดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆให้กับแขนกลขึ้นมาจริงๆ กำหนดขนาด และความยาวของวัสดุที่ใช้ที่ลักษณะต่างๆทางด้านฮาร์ดแวร์ ซึ่งได้ทดลองในห้องแล็บในส่วน of แบบจำลองคณิตศาสตร์คำนึงถึงการยืดหยุ่นของบีม (elastic beam) โดยอาศัยสมมติฐานวิธีการสมมติโหมด (the assume mode method)

ในปี ค.ศ. 1988 เบโย (Bayo) ได้สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวโดยวิธีไฟไนท์ อีลิเมนต์ (finite element method)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในปี ค.ศ. 1990 บัท ทานากะ และมิอุ (Bhat, Tanaka and Miu) ได้ศึกษาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลชนิดนี้โดยใช้เทคนิคของการ Laplace transform technique) ในการแก้ปัญหา การพิจารณาในส่วนของบีมนั้นจะพิจารณาจากตำแหน่งของจุดหนึ่ง ไปยังอีกจุดหนึ่งของบีมซึ่งเปรียบเสมือนในลักษณะของบีมแบบปลายหมุน-ปลายอิสระ (pinned-free beam) ซึ่งการศึกษาคุณสมบัติทางกายภาพของบีม โดยอาศัยคำตอบของสมการทางคณิตศาสตร์ (mathematical solutions)

ในปี ค.ศ. 1992 เจียง (Jiang) ได้สร้างแบบจำลองของแขนกลอ่อนตัวชนิดนี้โดยใช้หลักของแฮมมันตัน เช่นกันซึ่งใช้หลักแคลคูลัสของการแปรผัน

ในปี ค.ศ. 1993 เล่า (Lao) ได้สร้างแบบจำลองนี้โดยศึกษาตามทฤษฎีใหม่ (new theory) และอาศัยหลักการของ เอ-ดีเพนเดนท ดิฟเฟอเรนเชียล (A-dependent differential operators) ในหลักการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และในปีเดียวกันนี้ คูบิกา และแวง (Kubica and Wang) ได้สร้างแบบจำลองชนิดนี้เช่นกันได้พิจารณาในกรณีปลายติดแน่น-ปลายอิสระ (clamp-free beam) ได้ศึกษาแนวทางการของกริชนัน โดยเอาทฤษฎีบีมออยเลอร์-เบอร์นูลีมาใช้ในการสร้างแบบจำลอง

ในปี ค.ศ. 1994 ลิน และ เลวิส (Lin and Lawis) ได้สร้างทฤษฎีโดยอาศัยสมมติฐานวิธีการสมมติโหมคเช่นกัน ซีนาน และ โครามิ (Zeinoun and Khorrami) ได้สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์โดยพิจารณาในกรณีแบบปลายติดแน่น-ปลายอิสระ เช่นกันโดยใช้หลักการของการเคลื่อนที่ของลากราง (Lagrangian dynamics) ในการแก้ปัญหาและสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทั้งหมด

ในปี ค.ศ. 1997 สุร์กษา (Sooraksa) ได้สร้างแบบจำลองแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวโดยอาศัยทฤษฎีทิมอสเซนโก โดยพิจารณาผลกระทบของความเฉื่อยในการหมุน และความเค้นเฉือนในภาคตัดขวาง (transvers shear) ซึ่งมีผลกระทบของแดมปีงแบบเคลวิน-วอจท์ และแดมปีง โดยอากาศสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของบีม

ชนิดของแดมปีงสำหรับบีม

ในที่นี้จะกล่าวถึง

- แดมปีงภายนอก (external damping)
- แดมปีงโดยอากาศ (Air Damping) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า วิสคอส แอร์ แดมปีง (Viscous air damping) ซึ่งเกิดจากผลกระทบภายนอกที่มากระทำต่อแขนกล ซึ่งในรูปฟอร์มของสม

การเขียนได้ในรูปต่างๆ ไปดังนี้ $y_t(x,t)$ ซึ่ง y เป็นค่าคงที่ของแอมป์อากาศ และ $y_t(x,t)$ เป็นค่าความเร็วของแฉกในทิศทางตัดขวาง

- แอมป์ภายใน (internal damping)

- แอมป์แบบเคลวิน-วอยท์ (Kelvin-Voigt Damping) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า สเตรน-เรต แอมป์ (strain-rate damping) ซึ่งเป็นแอมป์ที่เกิดจากกลไกภายในของเนื้อสาร รูปแบบสมการเขียนในรูปเขียนในรูปต่างๆ ไปได้ดังนี้ $\zeta \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t}$ ซึ่ง ζ คือค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยและ ζ คือค่าสัมประสิทธิ์ของแอมป์ สเตรน-เรต

- ทาม ไฮสเตอร์เรซิส แอมป์ (Time Hysteresis Damping) เป็นแอมป์ที่เกิดขึ้นภายในเนื้อสารเช่นกันซึ่งใช้แนวความคิดที่ว่าความเค้นภายในเนื้อสารเป็นสัดส่วนของความเครียดรวมกับความเครียดที่ผ่านมา ซึ่งอธิบายโดยสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\int_{-r}^0 g(s) y_{xx}(x, t+s) ds \text{ history kernel } g(s)$$

โดยที่ $g(s) = \frac{\alpha}{\sqrt{-s}} \exp(\beta s)$ โดย α และ β เป็นค่าคงที่และ $y(x,t)$ คือการเคลื่อนที่ตามขวาง

- สพาเทียล ไฮสเตอร์เรซิส แอมป์ (Spatial Hysteresis Damping) ค้นพบโดย รัสเซล (Russell) ในปีค.ศ.1992 ซึ่งเป็นแอมป์ที่เกิดขึ้นภายในเนื้อสารเช่นกันซึ่งสามารถอธิบายในทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^L h(x, \xi) (y_x(x, t) - y_x(\xi, t)) d\xi \right]$$

โดยที่ $h(x, \xi) = \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2b^2}\right]$ $a, b =$ ค่าคงที่

- เบนดิง เรต แคมปีง (Bending Rate Damping) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า สแควรูท แคมปีง (Square Root Damping ($A^{\frac{1}{2}}$ type)) ได้พัฒนาจากแนวความคิดของ รัสเซล [1992] ซึ่งศึกษาลักษณะทางกายภาพของเนื้อสาร และอธิบายโดยสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$M(t,x) = -\varepsilon \int_0^x \frac{\partial^2 y(t,\xi)}{\partial t \partial \xi} d\xi + \frac{x\varepsilon}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 y(t,\xi)}{\partial t \partial \xi} d\xi$$

ในเทอม $\varepsilon \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t \partial \xi}$ คือแรงต่ออัตราของการโค้งงอ

อย่างไรก็ตามแบบจำลองที่กล่าวมาข้างต้น และผลกระทบของแคมปีงต่างๆ ยังไม่ได้มีการศึกษาและพิจารณาในหลายๆเงื่อนไข

ซึ่งในโครงการนี้จะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดี่ยวชนิดแขนบางในส่วนที่นำทฤษฎี บีม ออยเลอร์-เบอร์นูลีมาใช้เพราะง่ายต่อการวิเคราะห์และสามารถเข้าใจได้ง่ายซึ่งแสดงไว้บทที่ 3 และจะพิจารณาผลกระทบของแคมปีงแบบเคลวิน-วอจท์ และแคมปีงโดยอากาศ จะศึกษาเพิ่มเติมจากลักษณะของบีมดังนี้

- กรณีปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)
- กรณีปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam)
- กรณีปลายด้านหนึ่งหมุนและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam)
- กรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam)

ซึ่งแสดงไว้ในบทที่ 4 จะศึกษาและเปรียบเทียบกับกรณีทดลองและงานวิจัยที่ผ่านมา

บทที่ 3

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของแกนกล่อนตัวข้อต่อเดียวชนิดแขนบาง

3.1 สมการบีบของออยเลอร์ (Euler's beam equation)

แกนกล่อนตัวข้อต่อเดียวสามารถพิจารณาได้เป็นบีบและแบบจำลองคณิตศาสตร์ของบีบสามารถบรรยายได้ด้วยทฤษฎีของออยเลอร์ (Euler's Theory) สมการบีบออยเลอร์ (Euler) เป็นสมการที่บรรยายปรากฏการณ์ทางกายภาพของบีบ ในรูปแบบง่าย ๆ โดยอธิบายถึงการสั่นตามขวางของบีบ



รูปที่ 3.1 บีบเอกกรูป (uniform beam)

พิจารณาส່วนความยาว dx ส่วนของความยาว dx ถูกกระทำโดย

1. แรงเค้นเฉือนภายใน (internal shear force)
2. โมเมนต์ (moment)

ให้ y = ตำแหน่งที่เบนจากแนวอ้างอิง (deflection)

$\frac{\partial y}{\partial x}$ = ความชัน (slope)

$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ = M โมเมนต์ (moment)

$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ = $\frac{\partial M}{\partial x}$ = V แรงเค้นเฉือน (shear)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial V}{\partial x} = W(x) \text{ ความเข้มภาระ (load intensity)}$$

พิจารณา แผนภาพอิสระ (free-body diagram) ในรูปที่ 3.1 จากความรู้พื้นฐานของบีม ที่แสดงไว้ดังรูปโดยกำหนดให้

$M(x,t)$ คือ โมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment)

$V(x,t)$ คือ แรงเค้นเฉือน (shear force)

$f(x,t)$ คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อความยาวหนึ่งหน่วยของบีม (external force per unit length of the beam)

เมื่อแรงคงที่กระทำตัวบีมแรงนี้คือ

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

โดย

ρ คือ ความหนาแน่นของมวล

$A(x)$ คือ พื้นที่หน้าตัดของบีม (beam)

เราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ตามแนวแกน y จากกฎข้อที่หนึ่งของนิวตันได้เป็น

$$\sum F_y = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

$$V - (V+dV) + f(x,t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad (3-1)$$

และสมการ โมเมนต์ (moment) คือ

$$(M+dM) - (V + dV)dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3-2)$$

โดย
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \text{ และ } dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยรวมเทอมที่เป็นกำลังอันดับที่สองของ dx (second power in dx) สมการ (3-1) และ (3-2) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

จากสมการ (3-1) จะได้

$$V - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) + f(x,t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

$$V - V - \frac{\partial V}{\partial x} dx + f(x,t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

นำ dx หารตลอด จะได้

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad (3-3)$$

จากสมการที่ (3-2) จะได้

$$(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) dx + f(x,t) dx \frac{dx}{2} - M = 0$$

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - V dx - \frac{\partial V}{\partial x} dx dx + f(x,t) dx \frac{dx}{2} - M = 0$$

นำ dx หารตลอดจะได้

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V(x,t) = 0 \quad (3-4)$$

จากความสัมพันธ์ของ $V \equiv \frac{\partial M}{\partial x}$ จากสมการ (3-3) และ (3-4) จะได้

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad (3-5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้หลักเบื้องต้นของความโค้งของบีม (bending of beam) ความสัมพันธ์ระหว่าง โมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment) และ การเบนของบีมจากแนวอ้างอิง (deflection) สามารถเขียนได้เป็น

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3-6)$$

กำหนด E = ค่ามอดูลัสของยัง (Young's modulus)

I = โมเมนต์ความเฉื่อยของภาคตัดขวาง (moment of inertia of the cross section)

หรือเรียก EI ว่า " ความแข็งแกร่งการ โค้งงอ "

แทนค่า สมการ (3-6) ลงในสมการ (3-5) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของการสั่นในแนวขวางเพิ่มเติมที่ไม่เป็นเอกรูป (lateral vibration of nonuniform beam) คือ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = f(x,t) \quad (3-7)$$

จะได้เป็น

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = f(x,t) \quad (3-8)$$

ถ้าคิดเป็น การสั่นอิสระ (free vibration) : $f(x,t) = 0$ จะได้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) = - \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} y(x,t) \quad (3-9)$$

ในสมการการเคลื่อนที่ จะมี อนุพันธ์อันดับสอง (second order derivative) ที่เทียบกับเวลาด้วย และมี สมการอนุพันธ์อันดับสี่ (fourth order derivative) เทียบกับ x ดังนั้นจึงต้องมี สองเงื่อนไขเริ่มต้น (two initial conditions) และ สี่เงื่อนไขขอบเขต (four boundary conditions) ตามที่เราต้องการสำหรับสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x)q(t) \quad (3-10)$$

จากสมการที่ (3-9) จะได้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

นำ $\rho A(x)$ ทหารตลอดจะได้

$$\frac{EI}{\rho A(x)} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

ให้

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A(x)}$$

และจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3-11)$$

เรียกสมการที่ (3-11) ว่า สมการ빔ของออยเลอร์ (Euler's beam Equation) สมการ (3-11) สามารถแก้ได้โดยวิธีการแยกตัวแปร (Separation of variable method)

สมมติให้ solution ของสมการที่ (3-11) อยู่ในรูป

$$y(x,t) = \phi(x) q(t)$$

โดย

$\phi(x)$ เป็น ฟังก์ชันระยะทาง x

$q(t)$ คือ ฟังก์ชันของเวลา

แทนสมการที่ (3-10) ลงในสมการที่ (3-11) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} [\phi(x)q(t)] + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi(x)q(t)] = 0$$

$$a^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} [\phi(x)q(t)] = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\phi(x)q(t)]$$

$$\frac{a^2}{\phi(x)} \frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2}$$

จะได้

$$\frac{a^2}{\phi(x)} \frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = \text{ค่าคงที่} = \omega^2 \quad (3-12)$$

จาก

$$-\frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = \omega^2$$

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 q(t)$$

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \omega^2 q(t) = 0 \quad (3-13)$$

จากสมการ (3-12) เรามี

$$\frac{a^2}{\phi(x)} \frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = \omega^2$$

ให้

$$\frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = \frac{\omega^2}{a^2} \phi(x)$$

$$\frac{\omega^2}{a^2} = k^4$$

จะได้

$$\frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} - k^4 \phi(x) = 0 \quad (3-14)$$

จากสมการที่ (3-13) จะได้ สมการช่วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

$$r_{(1,2)} = \pm \omega i$$

$$\therefore \text{จะได้ } q(t) = A' e^{i\omega t} + B' e^{-i\omega t}$$

$$q(t) = A' (\cos \omega t + i \sin \omega t) + B' (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$q(t) = A' \cos \omega t + i A' \sin \omega t + B' \cos \omega t - i B' \sin \omega t$$

ให้ A, B เป็น ค่าคงที่ จะได้ ความสัมพันธ์

$$(A' + B') = A$$

$$i(A' - B') = B$$

จะได้ คำตอบ เป็น

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3-15)$$

จากสมการที่ (3-14) จะได้

$$r^4 - k^4 = 0$$

$$(r^2 + k^2)(r^2 - k^2) = 0$$

$$(r - k)(r + k)(r^2 + k^2) = 0$$

$$r_{(1,2)} = \pm k$$

$$r_{(3,4)} = \pm ik$$

จะได้ คำตอบ เป็น

$$\phi(x) = C e^{kx} + D e^{-kx} + E e^{ikx} + F e^{-ikx} \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} \phi(x) = & C(\cosh kx + \sinh kx) + D(\cosh kx - \sinh kx) \\ & + E(\cos kx + i \sin kx) + F(\cos kx - i \sin kx) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}\varnothing(x) = & C \cosh kx + C \sinh kx + D \cosh kx - D \sinh kx \\ & + E \cos kx + iE \sin kx + F \cos kx - iF \sin kx\end{aligned}$$

ให้ C_1, C_2, C_3, C_4 เป็น ค่าคงที่ จะ ได้ ความสัมพันธ์

$$C + D = C_1$$

$$C - D = C_2$$

$$E + F = C_3$$

$$i(E - F) = C_4$$

จะ ได้ solution เป็น

$$\varnothing(x) = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx \quad (3-17)$$

∴ สามารถเขียน คำตอบสำหรับสมการบีบของออยเลอร์ ได้ว่า

$$y(x,t) = [C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx] q(t) \quad (3-18)$$

พิจารณา $q(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา จะ ได้

$$\omega = ak^2 = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad (3-19)$$

เราจะเห็นได้ว่าค่า ω ขึ้นอยู่กับค่าของ k เมื่อค่า k โดยฟังก์ชัน $\varnothing(x)$ ค่า k เป็นค่าคงที่ขึ้นอยู่กับ บีมและในสมการที่ (3-18) มีค่าคงตัวอยู่ 4 ค่า

3.2 เงื่อนไขขอบเขตของบีม

ก.ปลายอิสระ (free end)

$$\text{โมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment) = } EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{แรงเค้นเฉือน (shear force)} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

ข.ปลายหมุน (ตรึง) (simply supported (pinned) end)

$$\text{ระยะเบนจากแนวเดิม (deflection)} = y = 0$$

$$\text{โมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment)} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

ค.ปลายติดแน่น (fixed (clamped) end)

$$\text{ระยะเบนจากแนวเดิม (deflection)} = y = 0$$

$$\text{ความชัน (slope)} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

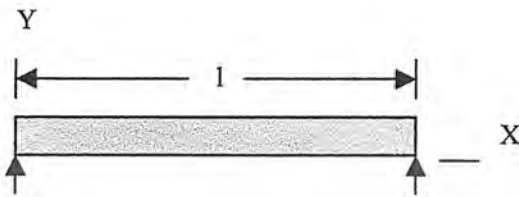
หรือสามารถได้เป็นตารางดังนี้

	Y	ความชัน	โมเมนต์	แรงเค้นเฉือน
ปลายอิสระ	✓	✓	0	0
ปลายหมุน (ตรึง)	0	✓	0	✓
ปลายติดแน่น	0	0	✓	✓

โดยทั่วไปมีค่า

✓ หมายถึง 0 (ไม่เป็นศูนย์)

3.2.1 กรณีปลายหมุนทั้งสองข้าง



รูปที่ 3.2 บีบปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)

จากรูป บีบอยู่ในแนวตรง ตามแกน x ดังนั้น

$$y = 0$$

$$M = 0$$

มีเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x = 0$ และที่ $x = l$ เราสามารถกำหนดได้ อยู่ 4 เงื่อนไข ดังนี้คือ

1. $y(0,t) = 0$
2. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = \frac{M}{EI} = 0$
3. $y(l,t) = 0$
4. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = \frac{M}{EI} = 0$

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 1 และ 2 จากสมการที่ (3-18)

$$y(x,t) = [C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx] q(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้เรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = [C_1 k \sinh kx + C_2 k \cosh kx - C_3 k \sin kx + C_4 k \cos kx] q(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = [C_1 k^2 \cosh kx + C_2 k^2 \sinh kx - C_3 k^2 \cos kx - C_4 k^2 \sin kx] q(t)$$

$$0 = [C_1 k^2 + 0 - C_3 k^2 - 0] q(t)$$

$$[C_1 - C_3] k^2 = 0$$

$$C_1 - C_3 = 0$$

(3-21)

นำสมการที่ (3-20) บวกสมการที่ (3-21)

$$2C_1 = 0$$

$$C_1 = 0$$

จะได้

$$C_1 = 0$$

และ

$$C_3 = 0$$

(3-22)

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 3 และข้อ 4 พิจารณาอย่างเดียวกัน

จากสมการที่ (3-22) และเงื่อนไข $C_1 = C_3 = 0$ จะได้

$$y(l,t) = C_2 \sinh kl + C_4 \sin kl = 0 \quad (3-23)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = [C_2 k^2 \sinh kx - C_4 k^2 \sin kx] q(t)$$

$$0 = k^2 [C_2 \sinh kl - C_4 \sin kl]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,t) = C_2 \sinh kl - C_4 \sin kl = 0 \quad (3-24)$$

พิจารณาสมการที่ (3-23) และสมการที่ (3-24) เพื่อหาค่า C_2 และ C_4

ให้ $kl = 0$ (trivial solution) จะได้

$$\sinh kl = 0 \text{ เมื่อ } kl = 0$$

จะได้ $C_2 = 0$ ด้วย

$$\therefore \sin kl = 0$$

$$knl = n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

จากสมการที่ (3-19)

$$\omega_n = ak^2 n = \frac{n^2 \pi k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad (3-25)$$

เมื่อ ω คือความถี่ธรรมชาติของการสั่น

$$\omega_n = 2\pi f_n$$

$$f_n = \frac{n^2 \pi k^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad (3-26)$$

$$\text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นรูปฟังก์ชันของโหมดความถี่ธรรมชาติ (natural mode shape function) จะเป็น

$$\phi(x) = C_4 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ทำรูปฟังก์ชันให้เป็นโหมดปกติ (normalizing the mode shape function)

จะได้ $\int_0^l (\phi(x))^2 dx = 1$

แต่ $\phi(x) = C_4 \sin \frac{n\pi x}{l}$

$$\int_0^l C_4^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1$$

$$\frac{C_4^2}{2} \int_0^l \left[1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right] dx = 1$$

$$\frac{C_4^2}{2} \left[x - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \right]_0^l = 1$$

$$\frac{C_4^2}{2} \left[1 - \frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi \right] = 1 \quad ; n = 1$$

$$\frac{C_4^2}{2} [1 - 0] = 1$$

$$\frac{C_4^2}{2} = 1$$

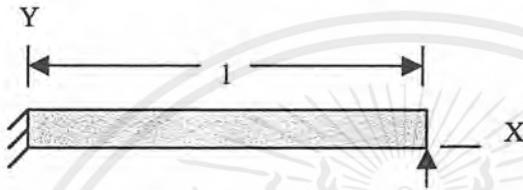
$$\therefore C_4 = \sqrt{2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

∴

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3-27)$$

3.2.2 กรณีปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน



รูปที่ 3.3 บีบติดแน่น-หมุน (clamp-pinned beam)

จากรูปกำหนดเงื่อนไข ดัง 4 ข้อต่อไปนี้

1. $y(0,t) = 0$
2. $\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$
3. $y(l,t) = 0$
4. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = \frac{M}{EI} = 0$

ให้เงื่อนไขข้อ 1 และข้อ 2 จากสมการที่ (3-18)

$$y(x,t) = [C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx] q(t)$$

$$y(0,t) = C_1 + C_3 = 0 \quad (3-28)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = [C_1 k \sinh kx + C_2 k \cosh kx - C_3 k \sin kx + C_4 k \cos kx] q(t)$$

$$0 = 0 + k C_2 + 0 + k C_4$$

$$0 = k [C_2 + C_4]$$

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (3-29)$$

จากสมการที่ (3-27) และที่ (3-28) จะได้

$$C_3 = -C_1 \quad (3-30)$$

$$C_4 = -C_2$$

$$y(1,t) = 0$$

$$0 = C_1 \cosh kl + C_2 \sinh kl + C_3 \cos kl + C_4 \sin kl \quad (3-31)$$

นำสมการที่(3-30) แทนในสมการที่ (3-31) จะได้

$$0 = C_1 \cosh kl + C_2 \sinh kl - C_1 \cos kl - C_2 \sin kl$$

$$0 = C_1 [\cosh kl - \cos kl] + C_2 [\sinh kl - \sin kl] \quad (3-32)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1,t) = [C_1 k \sinh kx + C_2 k \cosh kx - C_3 k \sin kx + C_4 k \cos kx] q(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,t) = [C_1 k^2 \cosh kx + C_2 k^2 \sinh kx - C_3 k^2 \cos kx - C_4 k^2 \sin kx] q(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$0 = [C_1 \cosh kl + C_2 \sinh kl - C_3 \cos kl - C_4 \sin kl] \quad (3-33)$$

นำสมการที่ (3-30) แทนในสมการที่ (3-33) จะได้

$$0 = C_1 \cosh kl + C_2 \sinh kl + C_1 \cos kl + C_2 \sin kl$$

$$0 = C_1 [\cosh kl + \cos kl] + C_2 [\sinh kl + \sin kl] \quad (3-34)$$

แก้สมการหาค่า C_1 และ C_2 โดยใช้ เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} (\cosh kl - \cos kl) & (\sinh kl - \sin kl) \\ (\cosh kl + \cos kl) & (\sinh kl + \sin kl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0$$

จะได้ค่า $C_1 = 0$ และ $C_2 = 0$ ซึ่งเป็น trivial solution

ดังนั้นใช้ transcendental frequency equation เพื่อหาค่า kl

$$\begin{vmatrix} (\cosh kl - \cos kl) & (\sinh kl - \sin kl) \\ (\cosh kl + \cos kl) & (\sinh kl + \sin kl) \end{vmatrix} = 0$$

$$[(\cosh kl - \cos kl)(\sinh kl + \sin kl)] - [(\cosh kl + \cos kl)(\sinh kl - \sin kl)] = 0$$

$$[\cosh kl \sinh kl + \cosh kl \sin kl - \cos kl \sinh kl - \cos kl \sin kl] -$$

$$[\cosh kl \sinh kl + \cosh kl \sin kl - \cos kl \sinh kl + \cos kl \sin kl] = 0$$

$$2 \cosh kl \sin kl - 2 \cos kl \sinh kl = 0$$

$$2 \cosh kl \sin kl = 2 \cos kl \sinh kl$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

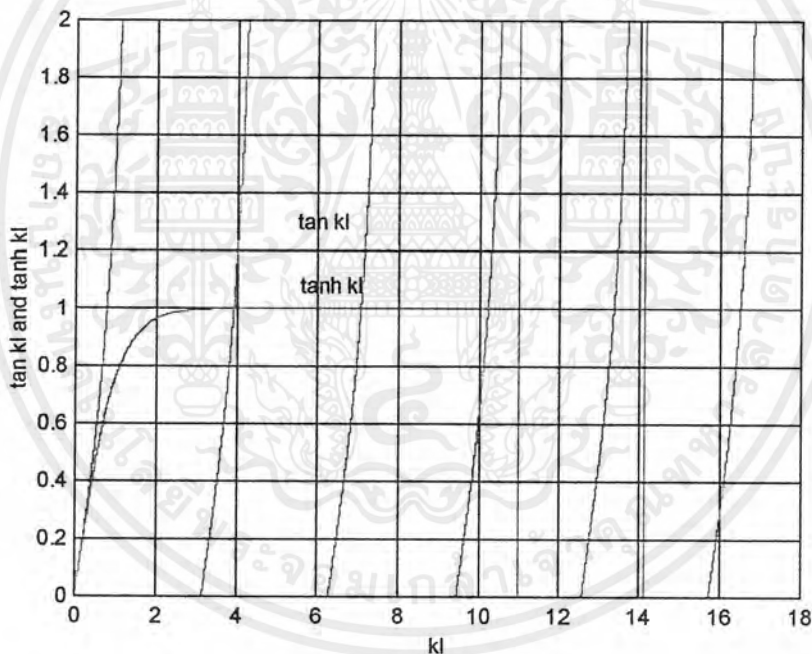
เอา $2\cosh kl \cos kl$ หาคลอด

$$\frac{\sin kl}{\cos kl} = \frac{\sinh kl}{\cosh kl}$$

$$\tan kl = \tanh kl$$

(3-35)

แก้สมการหาค่า หาโดยการเขียนกราฟพบว่า



รูปที่ 3.4 แสดงจุดตัดระหว่าง $\tan kl$ กับ $\tanh kl$

$$k_1 l = 3.9266$$

$$k_2 l = 7.0685$$

$$k_3 l = 10.2101$$

$$k_4 l = 13.3517$$

$$k_5 l = 16.4798$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (3-24) และสมการที่ (3-25)

$$\omega_n = ak^2 = \sqrt{\frac{k^2 n EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s} \quad (3-36)$$

$$\omega_1 = k_1^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}}$$

$$k_1 l = 3.926602$$

$$k_1 = \frac{3.926602}{l}$$

$$\omega_1 = \frac{15.4182}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{15.4182}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$= \frac{2.4539}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

จะได้

$$\omega_2 = \frac{49.9651}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$f_2 = \frac{7.9522}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$\omega_3 = \frac{104.2461}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$f_3 = \frac{16.591}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\omega_4 = \frac{178.2697}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$f_4 = \frac{28.3725}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$\omega_5 = \frac{271.5838}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$f_5 = \frac{43.2239}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

จากสมการที่ (3-32) และ ที่ (3-34) ให้ $C_2 = 1$ จะได้

$$C_1[\cosh kl + \cos kl] + \sinh kl + \sin kl = 0$$

$$C_1 = \frac{-(\sinh kl + \sin kl)}{(\cosh kl + \cos kl)} = 0$$

จาก $C_3 = -C_1$ และ $C_4 = -C_2$

ให้ $\alpha_1 = -C_1$ จะได้

$$\therefore \alpha_1 = \frac{(\sinh kl + \sin kl)}{(\cosh kl + \cos kl)}$$

จากสมการที่ (17)

$$\varnothing(x) = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx$$

$$= \cosh kx - \alpha_1 \sinh kx - \cos kx + \alpha_1 \sin kx$$

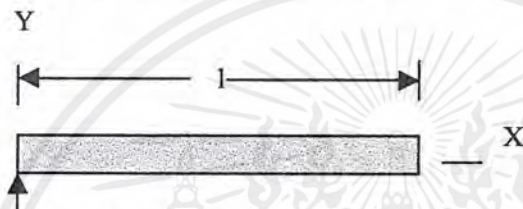
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\phi_1(x) = (\cosh k_1 x - \cos k_1 x) - \alpha_1 (\sinh k_1 x - \sin k_1 x)$$

สมการ normal mode สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\phi_1(l) = (\cosh k_1 l - \cos k_1 l) - \alpha_1 (\sinh k_1 l - \sin k_1 l)$$

3.2.3 กรณีปลายด้านหนึ่งหุนและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ



รูปที่ 3.5 บีบปลายหุน-ปลายอิสระ (pinned-free beam)

จากรูปมีเงื่อนไขกำหนดอยู่ 4 เงื่อนไขคือ

1. $y(0,t) = 0$
2. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = \frac{M}{EI} = 0$
3. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = \frac{M}{EI} = 0$
4. $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) = \frac{V}{EI} = 0$

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 1 และข้อที่ 2 จากสมการที่ (18)

$$y(x,t) = [C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx] q(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y(0,t) = C_1 + C_3 = 0 \quad (3-37)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = [C_1 k \sinh kx + C_2 k \cosh kx - C_3 k \sin kx + C_4 k \cos kx] q(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = [C_1 k^2 \cosh kx + C_2 k^2 \sinh kx - C_3 k^2 \cos kx - C_4 k^2 \sin kx] q(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = (C_1 k^2 + 0 - C_3 k^2 - 0)$$

$$(C_1 - C_3) k^2 = 0$$

$$C_1 - C_3 = 0$$

(3-38)

นำสมการที่ (3-37) บวกสมการที่ (3-38)

$$2C_1 = 0$$

∴

$$C_1 = 0 \text{ และ } C_3 = 0$$

(3-39)

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 3 และข้อที่ 4 พิจารณาอย่างเดียวกัน

จากสมการที่ (3-39)

$$C_1 = 0 \text{ และ } C_3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = [C_2 k^2 \sinh kx - C_4 k^2 \sin kx] q(t)$$

$$C_2 \sinh kl - C_4 \sin kl = 0 \quad (3-40)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) = [C_2 k^3 \cosh kx - C_4 k^3 \cos kx] q(t)$$

$$C_2 \cosh kl - C_4 \cos kl = 0 \quad (3-41)$$

แก้สมการค่า C_2 และ C_4 โดยใช้ เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \sinh kl & -\sin kl \\ \cosh kl & -\cos kl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{แทนค่า } C_2 \text{ และ } C_4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sinh kl & -\sin kl \\ \cosh kl & -\cos kl \end{vmatrix} = 0$$

$$\cosh kl \sin kl - \sinh kl \cos kl = 0$$

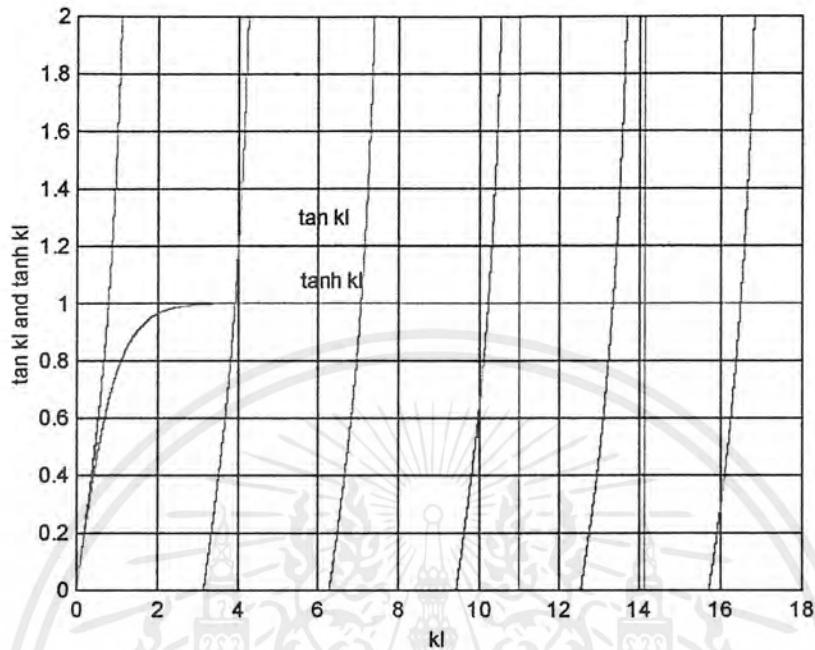
$$\cosh kl \sin kl = \sinh kl \cos kl$$

$$\frac{\sinh kl}{\cosh kl} = \frac{\sin kl}{\cos kl}$$

$$\boxed{\tanh kl = \tan kl}$$

แก้สมการค่า δ จากการเขียนกราฟพบว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.6 แสดงจุดตัดระหว่าง $\tan kl$ กับ $\tanh kl$

$$k_1/l = 3.9266$$

$$k_2/l = 7.0685$$

$$k_3/l = 10.2101$$

$$k_4/l = 13.3517$$

$$k_5/l = 16.4798$$

จากสมการที่ (3-24) และสมการที่ (3-25) จะได้

$$\omega_1 = \frac{15.4182}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{49.9651}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_3 = \frac{104.2461}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\omega_4 = \frac{178.2697}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_5 = \frac{271.5838}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$f_1 = \frac{2.4539}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$f_2 = \frac{7.9522}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$f_3 = \frac{16.591}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$f_4 = \frac{28.3725}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$f_5 = \frac{43.2239}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

จากสมการที่ (3-40) และสมการที่ (3-41) ให้ $C_4 = 1$ จะได้

$$C_2 \cosh kl + \cos kl = 0$$

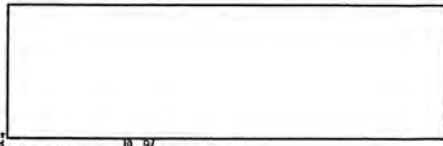
$$C_2 = \frac{\cos kl}{\cosh kl}$$

ให้

$$C_2 = \alpha_i$$

$$\alpha_i = \frac{\cos k_i l}{\cosh k_i l}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



จากสมการที่ (3-17) จะได้

$$\phi(x) = \sin kx - \alpha_1 \sinh kx$$

$$\therefore \phi(l) = \sin k_l l - \alpha_1 \sinh k_l l$$

3.2.4 กรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ



รูปที่ 3.7 บีบปลายติดแน่น-ปลายอิสระ (clamp-free beam)

จากรูปมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. $y(0,t) = 0$
2. $\phi(0,t) = 0$
3. $\phi(l,t) = 0$
4. $\phi(l,t) = 0$

ใช้เงื่อนไขข้อ 1 และ ข้อ 2 จากสมการที่ (3-18)

$$y(x,t) = [C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx] q(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y(0,t) = C_1 + C_3 = 0 \quad (3-42)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = [C_1 k \sinh kx + C_2 k \cosh kx - C_3 k \sin kx + C_4 k \cos kx] q(t)$$

$$k(C_2 + C_4) = 0$$

$$C_2 + C_4 = 0 \quad (3-43)$$

จากสมการที่ (3-42) และ สมการที่ (3-43) จะได้

$$C_3 = -C_1$$

$$C_4 = -C_2$$

ใช้เงื่อนไขข้อ 3 และ ข้อ 4 พิสูจน์แบบเดิม

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = [C_1 k^2 \cosh kx + C_2 k^2 \sinh kx - C_3 k^2 \cos kx - C_4 k^2 \sin kx] q(t)$$

$$0 = C_1 \cosh kl + C_2 \sinh kl - C_3 \cos kl - C_4 \sin kl$$

$$0 = C_1 \cosh kl + C_2 \sinh kl + C_1 \cos kl + C_2 \sin kl$$

$$0 = C_1 (\cosh kl + \cos kl) + C_2 (\sinh kl + \sin kl) \quad (3-44)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) = [C_1 k^3 \sinh kx + C_2 k^3 \cosh kx + C_3 k^3 \sin kx - C_4 k^3 \cos kx] q(t)$$

$$0 = C_1 \sinh kl + C_2 \cosh kl + C_3 \sin kl - C_4 \cos kl$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$0 = C_1 \sinh kl + C_2 \cosh kl - C_1 \sin kl + C_2 \cos kl$$

$$0 = C_1 (\sinh kl - \sin kl) + C_2 (\cosh kl + \cos kl) \quad (3-45)$$

แก้สมการ เมตริกซ์ หาค่า C_1 และ C_2

$$\begin{bmatrix} (\cosh kl + \cos kl) & (\sinh kl + \sin kl) \\ (\sinh kl - \sin kl) & (\cosh kl + \cos kl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0$$

ได้ค่า C_1 และ $C_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} (\cosh kl + \cos kl) & (\sinh kl + \sin kl) \\ (\sinh kl - \sin kl) & (\cosh kl + \cos kl) \end{bmatrix} = 0$$

$$(\cosh kl + \cos kl)(\cosh kl + \cos kl) - (\sinh kl - \sin kl)(\sinh kl + \sin kl) = 0$$

$$\cosh^2 kl + \cos kl \cosh kl + \cos kl \cosh kl + \cos^2 kl - \sinh^2 kl - \sin kl \sinh kl - \sin kl \sinh kl - \sin^2 kl = 0$$

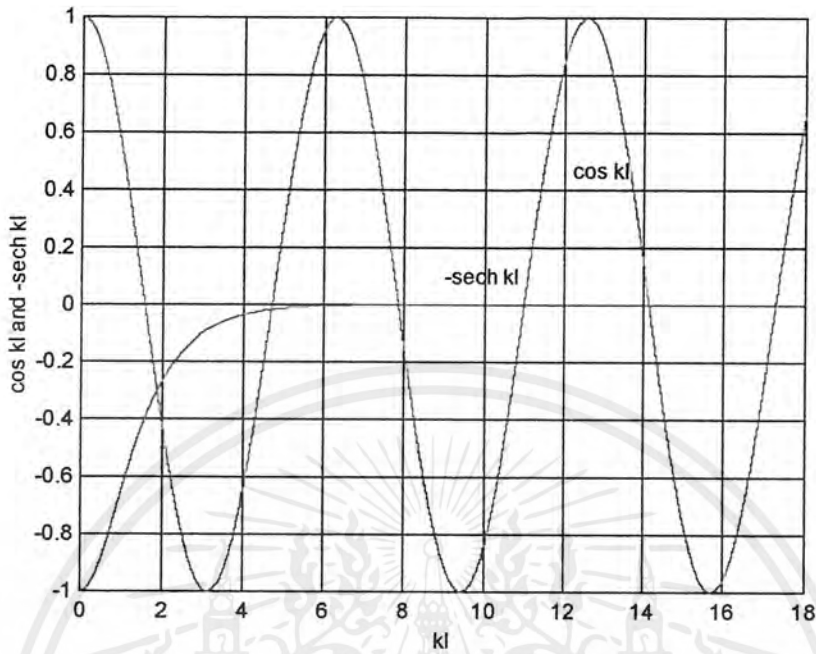
$$2 \cos kl \cosh kl + 1 - 1 = 0$$

$$2 \cos kl \cosh kl = 0$$

$$\therefore \cos kl \cosh kl = 0$$

แก้สมการหาค่า kl จากการเขียนกราฟพบว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.8 แสดงจุดตัดระหว่าง $\cos kl$ กับ $-\text{sech} kl$

$$\begin{aligned}
 k_1 l &= 1.8751 \\
 k_2 l &= 4.6940 \\
 k_3 l &= 7.08547 \\
 k_4 l &= 10.9955 \\
 k_5 l &= 14.1305
 \end{aligned}$$

$$\omega_n = ak^n n = k^2 n \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}}$$

$$f_n = \frac{ak^n n}{2\pi} = \frac{kn^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}}$$

จากสมการที่ (3-25) และสมการที่ (3-26) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\omega_1 = \frac{3.5160}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{22.0344}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_3 = \frac{61.6972}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_4 = \frac{120.9019}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_5 = \frac{199.671}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{rad/s}$$

$$f_1 = \frac{0.5595}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$f_2 = \frac{3.5068}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$f_3 = \frac{9.8194}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$f_4 = \frac{19.2421}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

$$f_5 = \frac{31.7786}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A(x)}} \quad \text{Hz}$$

ให้ $C_1 = 1$ จะได้

$$\sinh kl - \sin kl + C_2 (\cosh kl + \cos kl) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C_2 = \frac{-(\sinh kl + \sin kl)}{(\cosh kl + \cos kl)} = 0$$

จาก $C_3 = -C_1$ และ $C_4 = -C_2$

ให้ $\alpha_1 = C_2 =$ จะได้

$$\alpha_1 = \frac{(\sinh k_1 l + \sin k_1 l)}{(\cosh k_1 l + \cos k_1 l)} = 0$$

จากสมการที่ (3-17)

$$\phi_1(x) = (\cosh k_1 x - \cos k_1 x) - \alpha_1 (\sinh k_1 x - \sin k_1 x)$$

$$\phi_1(l) = (\cosh k_1 l - \cos k_1 l) - \alpha_1 (\sinh k_1 l - \sin k_1 l)$$

3.3 ผลของการจำลองผลโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

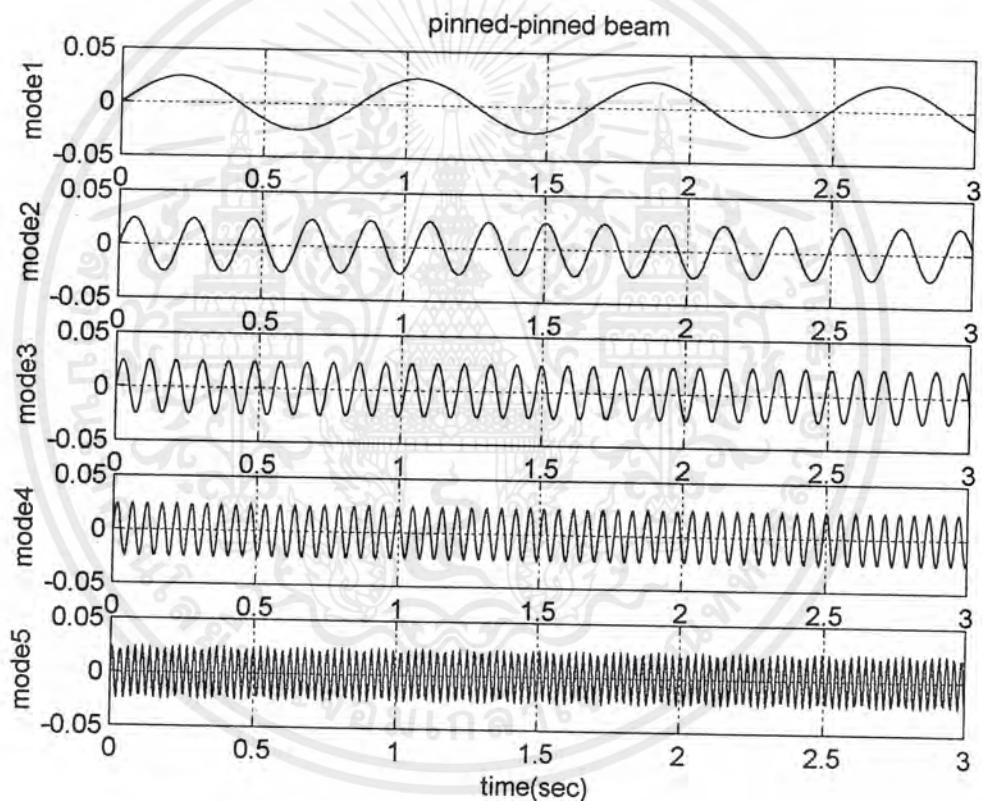
ผลของการจำลองผล โดยใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์เรียงตามลำดับสมการตามเงื่อนไขของบีมที่ศึกษาและวิเคราะห์ได้ ดังนี้

- กรณีปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)
- กรณีปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam)
- กรณีปลายด้านหนึ่งหมุนและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam)
- กรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam)

3.3.1 กรณีปลายหุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)

รูปแบบสมการแยกพิจารณาเป็น โหมดของการสั่น

$$y_n(x,t) = \sqrt{2} \sin w_n t \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1,2,3,4,\dots \quad (3-46)$$

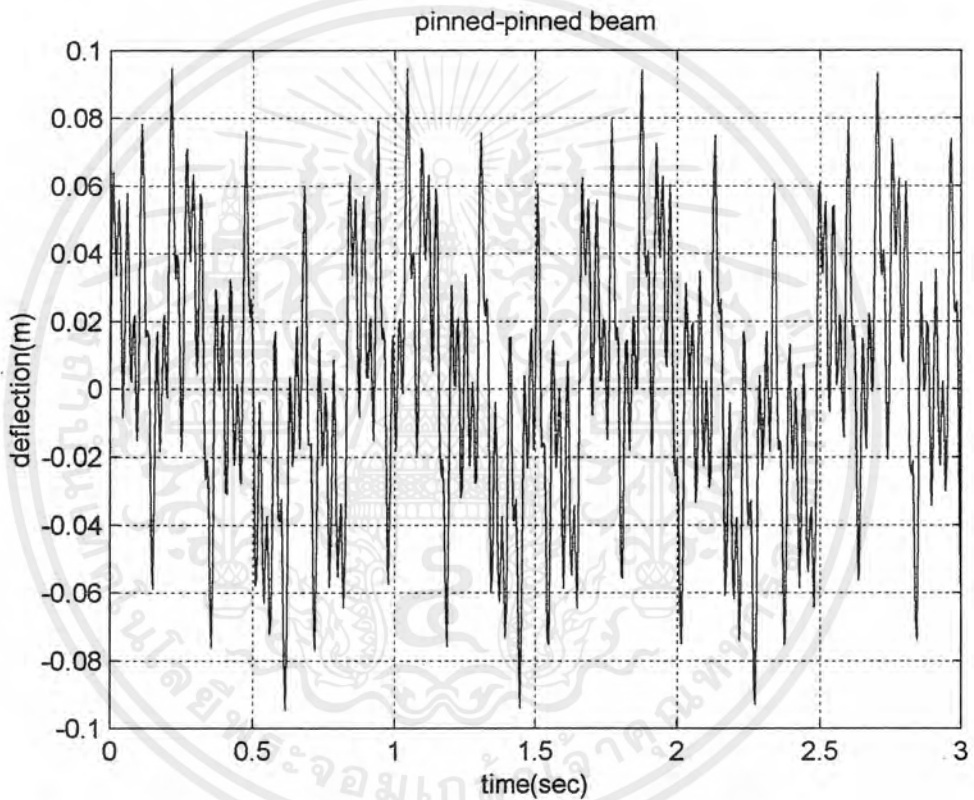


รูปที่ 3.9 แสดงการสั่นของแต่ละโหมดของบีม
แบบปลายหุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลรวมของโหมดของการสั่นเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n \sqrt{2} \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1,2,3,4,\dots \quad (3-47)$$



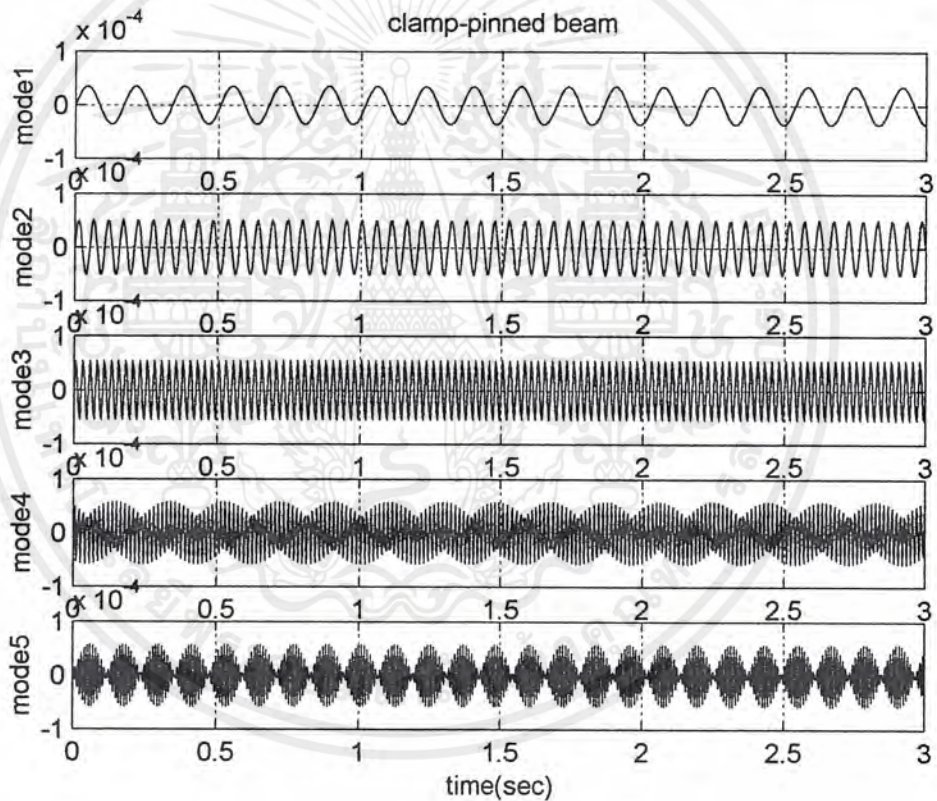
รูปที่ 3.10 แสดงการสั่นของ빔แบบปลาย
หมุนทั้งสองข้าง(pinned-pinned beam)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.2 กรณีปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam) รูปแบบสมการแยกพิจารณาเป็น โหมดของการสั่น

$$y_n(x,t) = \sin \omega_n t [\cosh k_i x - \cos k_i x - \alpha_i (\sinh k_i x - \sin k_i x)] \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3-48)$$

$$\text{กำหนดให้} \quad \alpha_i = \frac{(\sinh k_i l + \sin k_i l)}{(\cosh k_i l + \cos k_i l)}$$



รูปที่ 3.11 แสดงการสั่นของแต่ละ โหมดของบีมแบบปลายติดแน่น
ด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam)

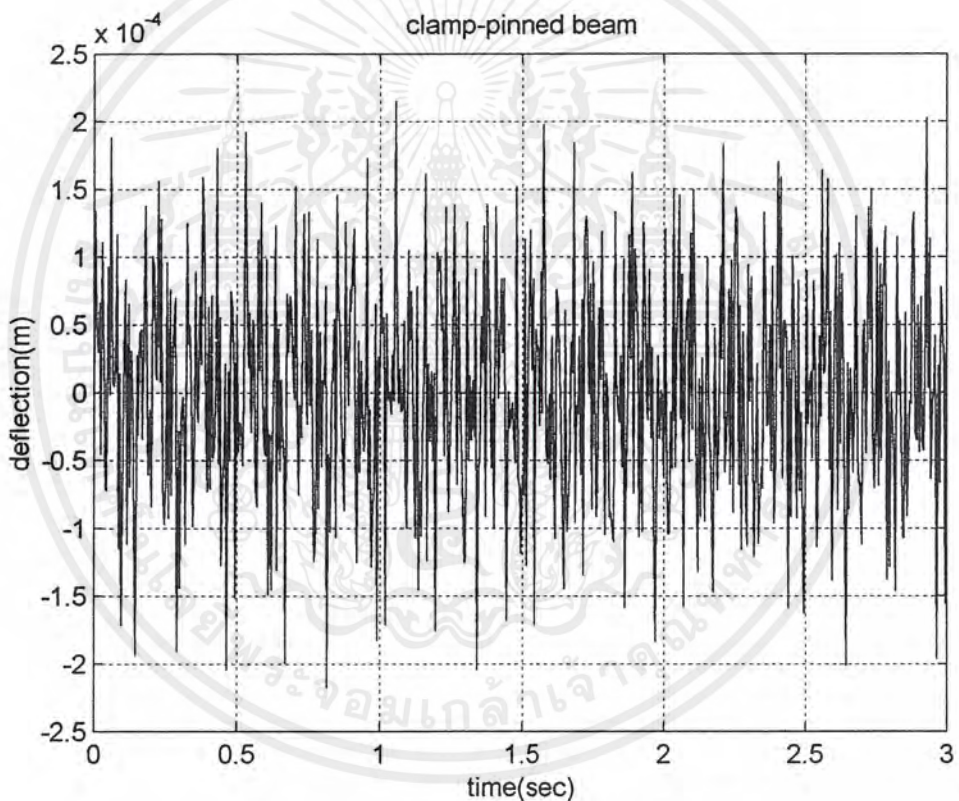
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลรวมของโหมดของการสั่นเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n \sin \omega_n t [(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x)] \quad n=1,2,3,4,\dots$$

(3-49)

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{(\sinh k_n l + \sin k_n l)}{(\cosh k_n l + \cos k_n l)}$



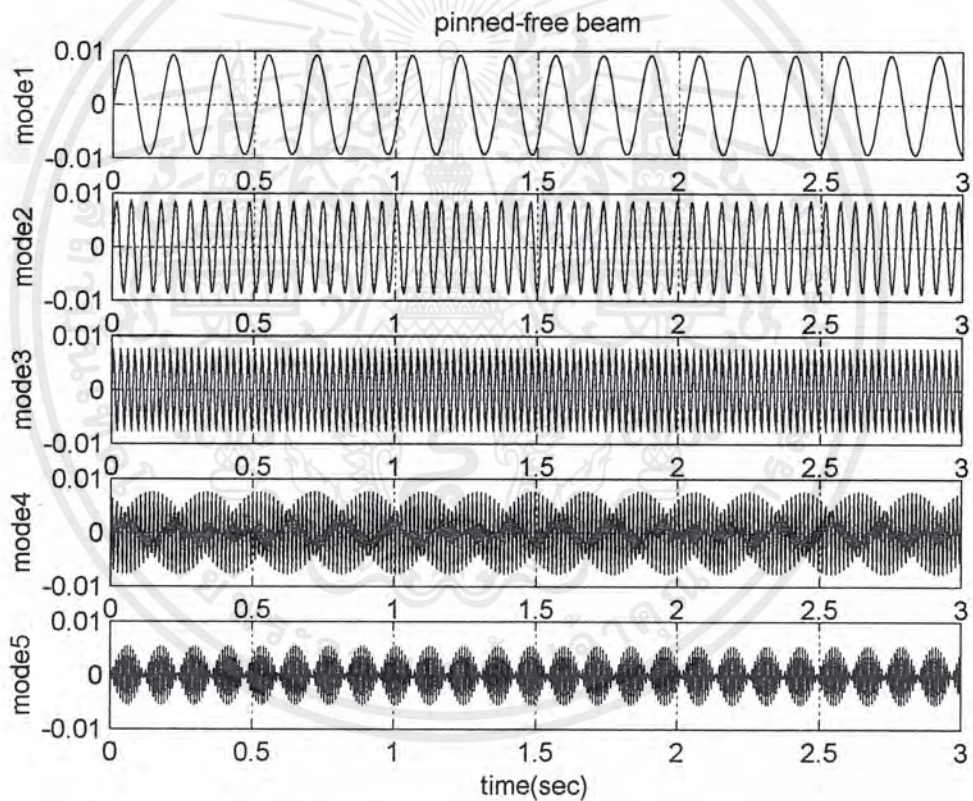
รูปที่ 3.12 แสดงการสั่นของ빔แบบปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.3 กรณีปลายด้านหนึ่งหนูนและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam)
รูปแบบสมการแยกพิจารณาเป็นโหมดของการสั่น

$$y_n(x,t) = \sin \omega_n t [\sin k_n x - \alpha_n \sinh k_n x] \quad n = 1,2,3,4,\dots \quad (3-50)$$

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{\cos k_n l}{\cosh k_n l}$



รูปที่ 3.13 แสดงการสั่นของแต่ละโหมดของบีมแบบปลายด้าน
หนึ่งหนูนและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam)

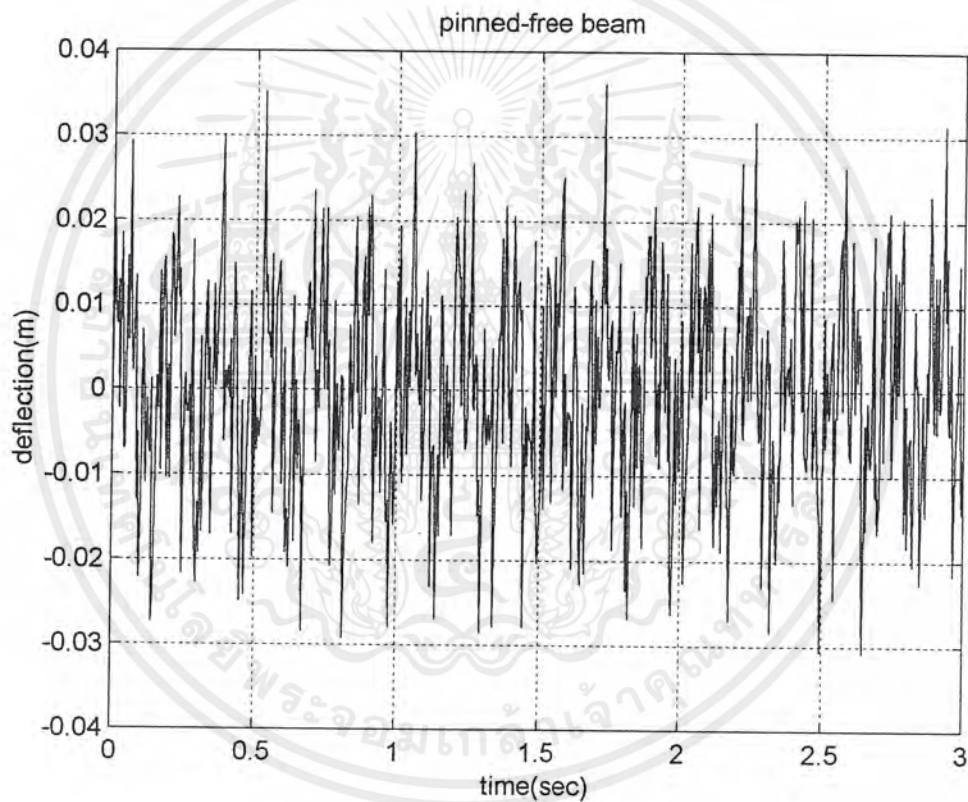
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลรวมของโหมดของการสั่นเขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n \sin \omega_n t [\sin k_n x - \alpha_n \sinh k_n x] \quad n = 1,2,3,4,\dots$$

(3-51)

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{\cos k_n l}{\cosh k_n l}$



รูปที่ 3.14 แสดงการสั่นของบีมแบบปลายด้านหนึ่งหมุน
และปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam)

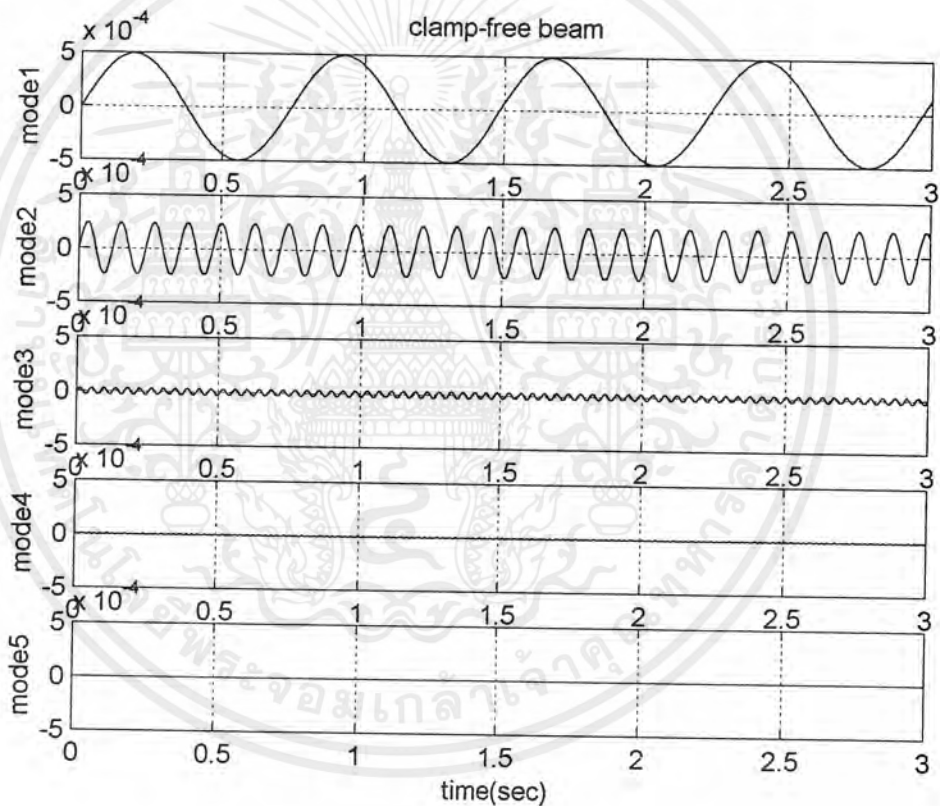
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.4 กรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam)

รูปแบบสมการแยกพิจารณาเป็น โหมดของการสั่น

$$y_n(x,t) = \sin \omega_n t \left[(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x) \right] \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3-52)$$

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{(\sinh k_n l + \sin k_n l)}{(\cosh k_n l + \cos k_n l)}$



รูปที่ 3.15 แสดงการสั่นของแต่ละ โหมดของบีมแบบปลาย
ด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam)

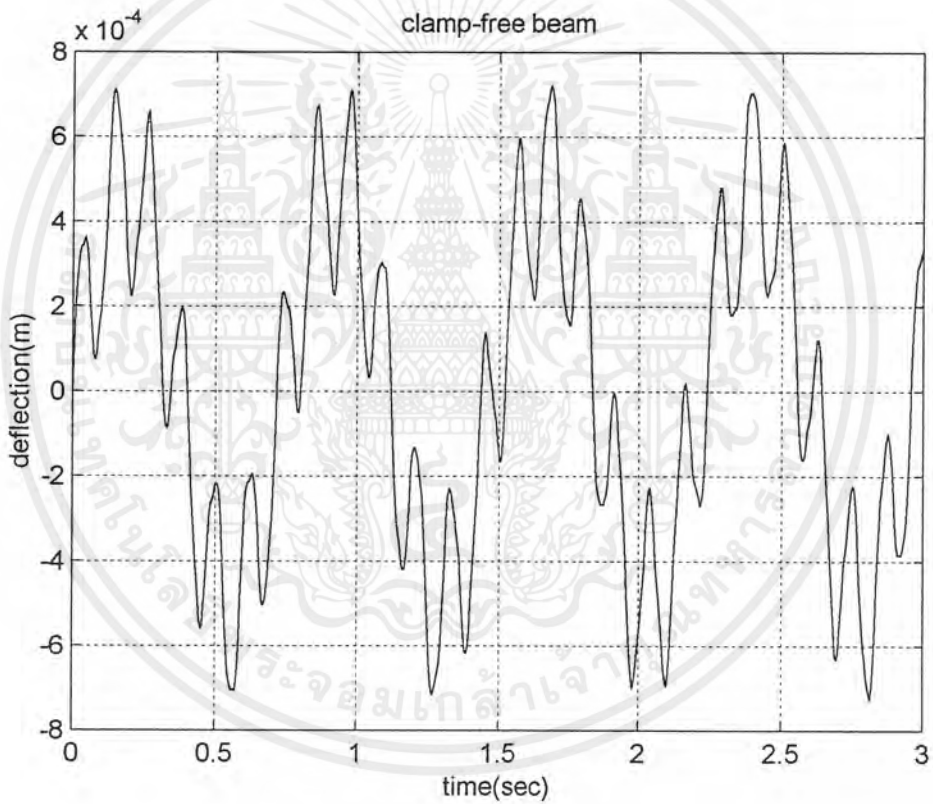
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลรวมของโหมดของการสั่นเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n \sin \omega_n t [(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x)] \quad n=1,2,3,4,\dots$$

(3-53)

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{(\sinh k_n l + \sin k_n l)}{(\cosh k_n l + \cos k_n l)}$



รูปที่ 3.16 แสดงการสั่นของ빔แบบปลายด้านหนึ่ง
ติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของแฉมปีงและมอเตอร์

4.1 แบบจำลองคณิตศาสตร์ของแฉมกล่อ่นตัวข้อต่อเดี่ยวชนิดแฉมยาวเมื่อทำการใส่ค่าแฉมปีง

พิจารณาดีงรูป (4.1) ส่วนหนึ่ของแฉมกล่อ่นตัวข้อต่อเดี่ยวเมื่อคิดผลกระทบของแฉมปีงจะได้อสมการใหม่จากการ รวมแรงทั้งหมดที่มากกระทำต่อบีม (beam) จากกฎข้อสองของนิวตันจะได้อ



รูปที่ 4.1 รูปแสดงชิ้นส่วนหนึ่ของแฉมกล่อ่นตัวข้อต่อเดี่ยว

$$V - (V + dV) - \gamma \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad (4-1)$$

โดย $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$

$$V - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) - \gamma \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

นำ dx หารตลอดจะได้อ

$$-\frac{\partial V}{\partial x} - \gamma \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad (4-2)$$

จากความสัมพันธ์ของ $V \equiv \frac{\partial M}{\partial x}$ แทนในสมการที่ (4-2) จะได้อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \quad (4-3)$$

โมเมนต์ใหม่จาก แคมป์แบบ เคลวิน-วอยท์(Kelvin-Voight damping (M_{KV})) ได้สมการคือ

$$M_{KV}(x, t) = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \zeta_M I \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2}(x, t) \quad (4-4)$$

โดยที่ ζ_M คือค่าสัมประสิทธิ์ของ แคมป์แบบ เคลวิน-วอยท์

แทนสมการที่ (4-4) ลงในสมการที่ (4-3) จะได้สมการดังนี้

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \zeta_M I \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = 0 \quad (4-5)$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \zeta_M I \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4}(x, t) + \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = 0 \quad (4-6)$$

กำหนดให้

$$a = \frac{EI}{\rho A(x)} \quad b = \frac{\zeta_M I}{\rho A(x)} \quad c = \frac{\gamma}{\rho A(x)}$$

จัดสมการให้ง่ายขึ้น

$$ay_{xxxx} + by_{xxxxt} + y_{tt} + cy_t = 0 \quad (4-7)$$

$$aX^{IV}T + bX^{IV}T' + XT'' + cXT' = 0 \quad (4-8)$$

$$X^{IV}(aT + bT') = X(cT' + T'') = \omega^2 \quad (4-9)$$

$$\frac{X^{IV}}{X} = \frac{cT' + T''}{aT + bT'} = \omega^2 \quad (4-10)$$

จาก

$$\frac{cT' + T''}{aT + bT'} = \omega^2 \quad (4-11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$cT' + T'' = \omega^2(aT + bT')$$

$$cT' + T'' = \omega^2 aT + \omega^2 bT'$$

$$T'' + \omega^2 bT' + cT' + \omega^2 aT = 0$$

$$T'' + (\omega^2 b + c)T' + \omega^2 aT = 0$$

ซึ่งมีสมการช่วยคือ

$$\lambda^2 + (\omega^2 b + c)\lambda + \omega^2 a = 0$$

จัดสมการอยู่ในรูป

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

λ

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

λ

$$= \frac{-(\omega^2 b + c) \pm \sqrt{(\omega^2 b + c)^2 - 4\omega^2 a}}{2}$$

เราให้ λ เป็น เทอมของ $q(t)$ สามารถแยกพิจารณาได้ 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $(\omega^2 b + c)^2 - 4\omega^2 a > 0$

จะได้คำตอบของสมการเป็น $q(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ (4-12)

กรณีที่ 2 $(\omega^2 b + c)^2 - 4\omega^2 a = 0$

จะได้คำตอบของสมการเป็น $q(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 x e^{\lambda t}$ (4-13)

กรณีที่ 3 $(\omega^2 b + c)^2 - 4\omega^2 a < 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้คำตอบของสมการเป็น

$$q(t) = c_1 e^{\lambda t} (\cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t) \quad (4-14)$$

พิจารณาเทอมของ $\varnothing(x)$ จาก

$$\frac{X^{IV}}{X} = \omega^2$$

กำหนดให้ $\omega^2 = k^4$ จะได้

$$\begin{aligned} r^4 - k^4 &= 0 \\ (r^2 + k^2)(r^2 - k^2) &= 0 \\ (r - k)(r + k)(r^2 + k^2) &= 0 \\ r_{(1,2)} &= \pm k \\ r_{(3,4)} &= \pm ik \end{aligned} \quad \text{จะได้คำตอบเป็น}$$

$$\varnothing(x) = C e^{kx} + D e^{-kx} + E e^{ikx} + F e^{-ikx}$$

$$\begin{aligned} \varnothing(x) &= C(\cosh kx + \sinh kx) + D(\cosh kx - \sinh kx) \\ &+ E(\cos kx + i \sin kx) + F(\cos kx - i \sin kx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varnothing(x) &= C \cosh kx + C \sinh kx + D \cosh kx - D \sinh kx \\ &+ E \cos kx + i E \sin kx + F \cos kx - i F \sin kx \end{aligned}$$

ให้ C_1, C_2, C_3, C_4 เป็น ค่าคงที่ จะ ได้ความสัมพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C + D = C_1$$

$$C - D = C_2$$

$$E + F = C_3$$

$$i(E - F) = C_4$$

จะได้ solution เป็น

$$\varnothing(x) = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx \quad (4-15)$$

ในเทอมของ $\varnothing(x)$ ทำการพิจารณาตามเงื่อนไขเดียวกับบทที่ 3 ที่เคยกล่าวมาแล้ว

4.2 ผลของการจำลองผลโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

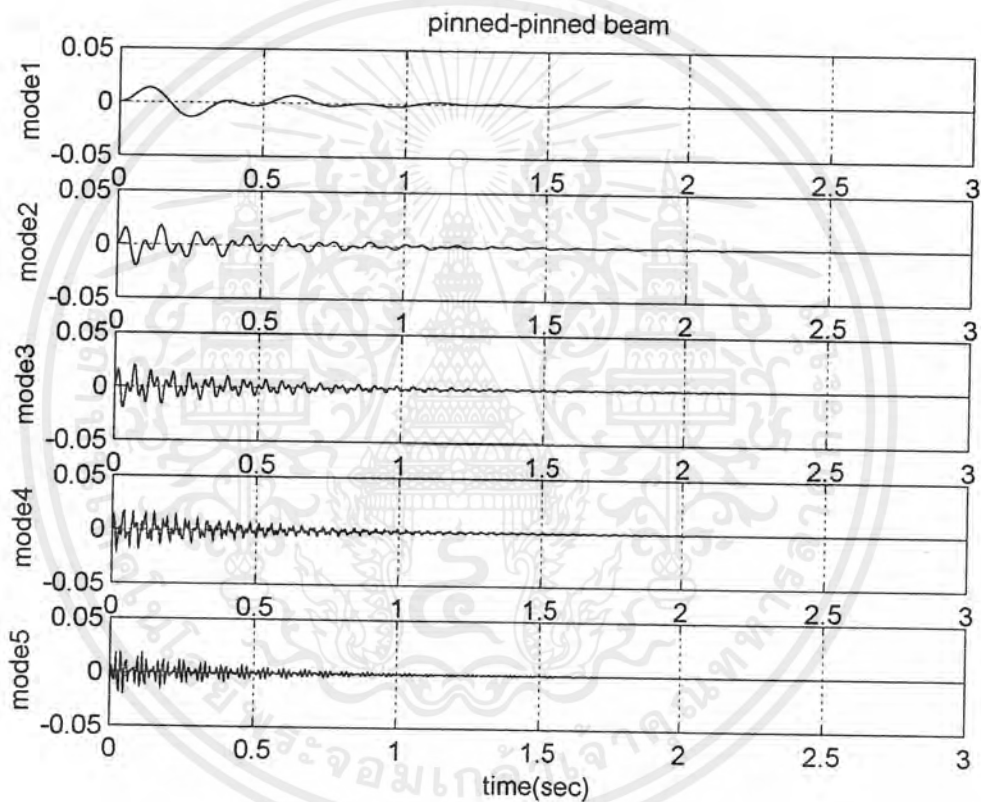
ผลของการจำลองผลโดยใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์เรียงตามลำดับสมการตามเงื่อนไขของบีบที่ศึกษาและวิเคราะห์ได้ ดังนี้

- กรณีปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)
- กรณีปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam)
- กรณีปลายด้านหนึ่งหมุนและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam)
- กรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam)

4.2.1 กรณีปลายหุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)

รูปแบบสมการแยกพิจารณาเป็น โหมดของการสั่น

$$y_n(x,t) = \sqrt{2}e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin w_n t \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1,2,3,4,\dots \quad (4-16)$$

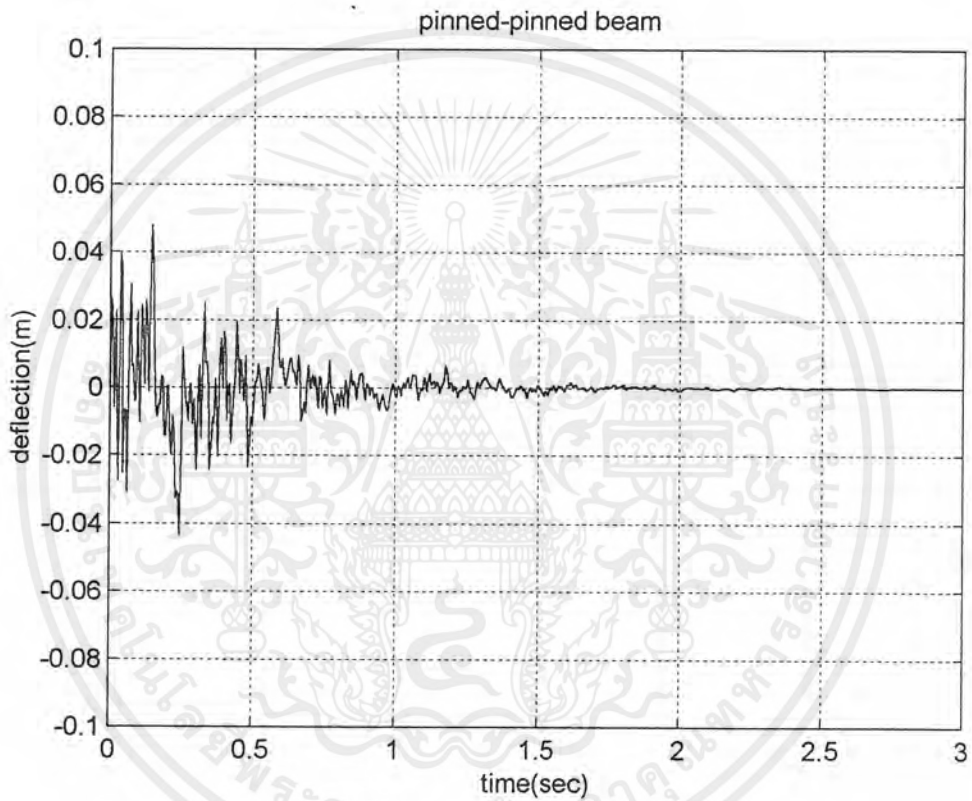


รูปที่ 4.2 แสดงการสั่นของแต่ละโหมดของบีมแบบปลายหุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam) ขณะทำการใส่แอมป์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลรวมของโหมดของการสั่นเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4-17)$$



รูปที่ 4.3 แสดงการสั่นของ빔แบบปลายหุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam) ขณะทำการใส่แฉมบั้ง

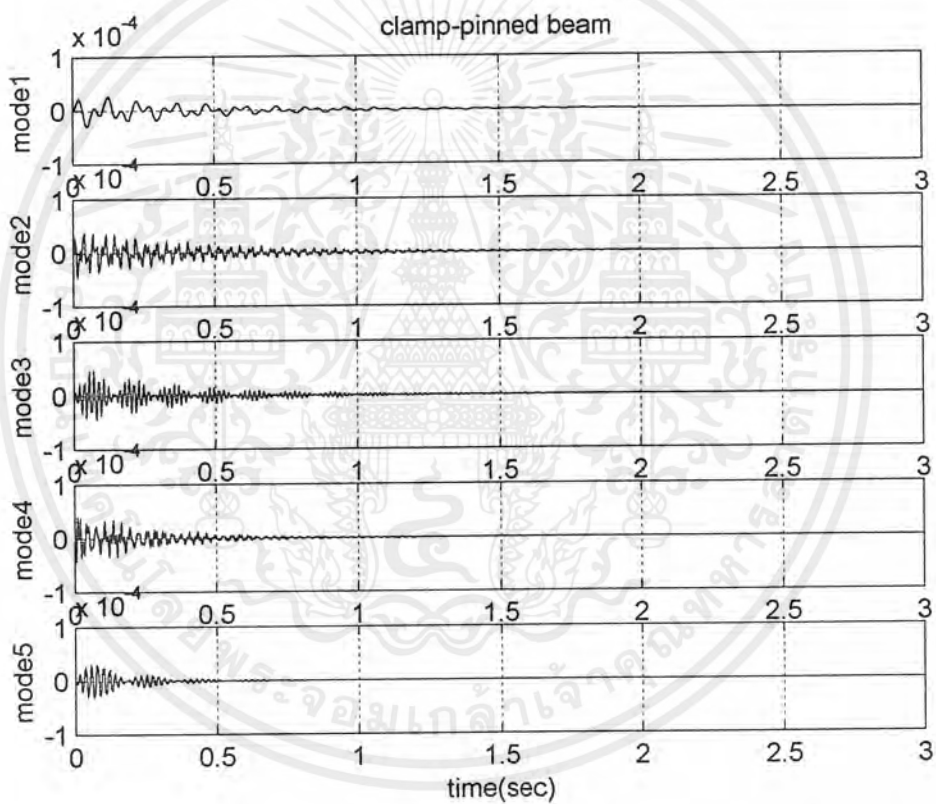
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2 กรณีปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam)
รูปแบบสมการแยกพิจารณาเป็น โหมดของการสั่น

$$y_n(x,t) = e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x)]$$

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$ (4-18)

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{(\sinh k_n l + \sin k_n l)}{(\cosh k_n l + \cos k_n l)}$



รูปที่ 4.4 แสดงการสั่นของแต่ละ โหมดของบีมแบบปลายติดแน่นด้านหนึ่ง
และอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam) ขณะทำการใส่แอมป์

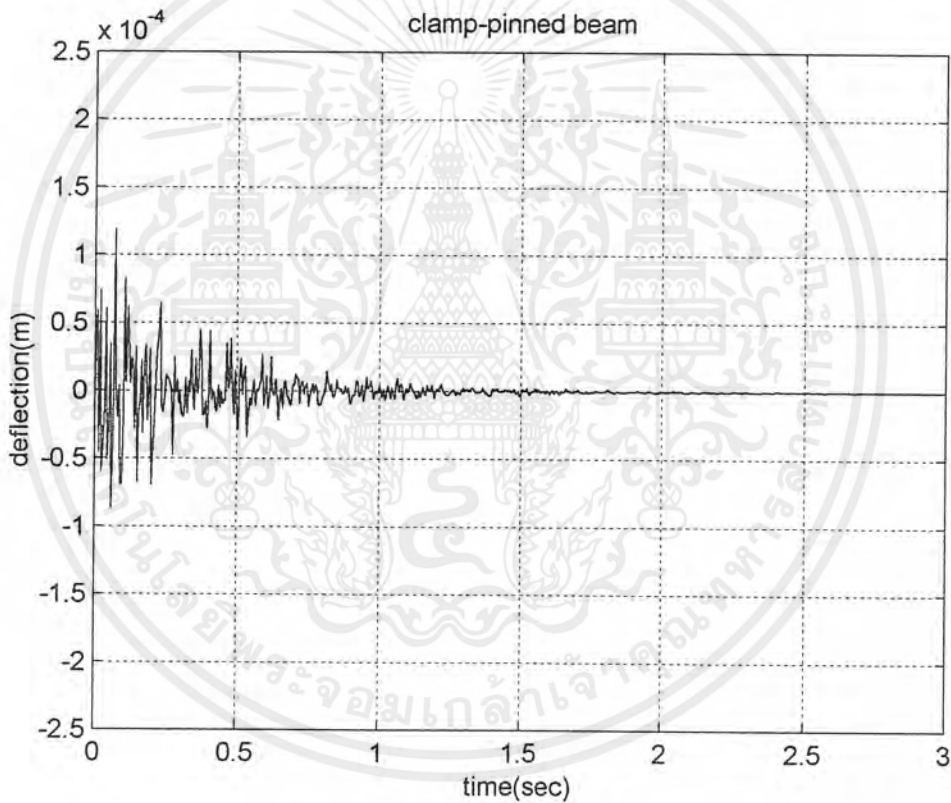
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลรวมของโหมดของการสั่นเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x)]$$

n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4-19)

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{(\sinh k_n l + \sin k_n l)}{(\cosh k_n l + \cos k_n l)}$



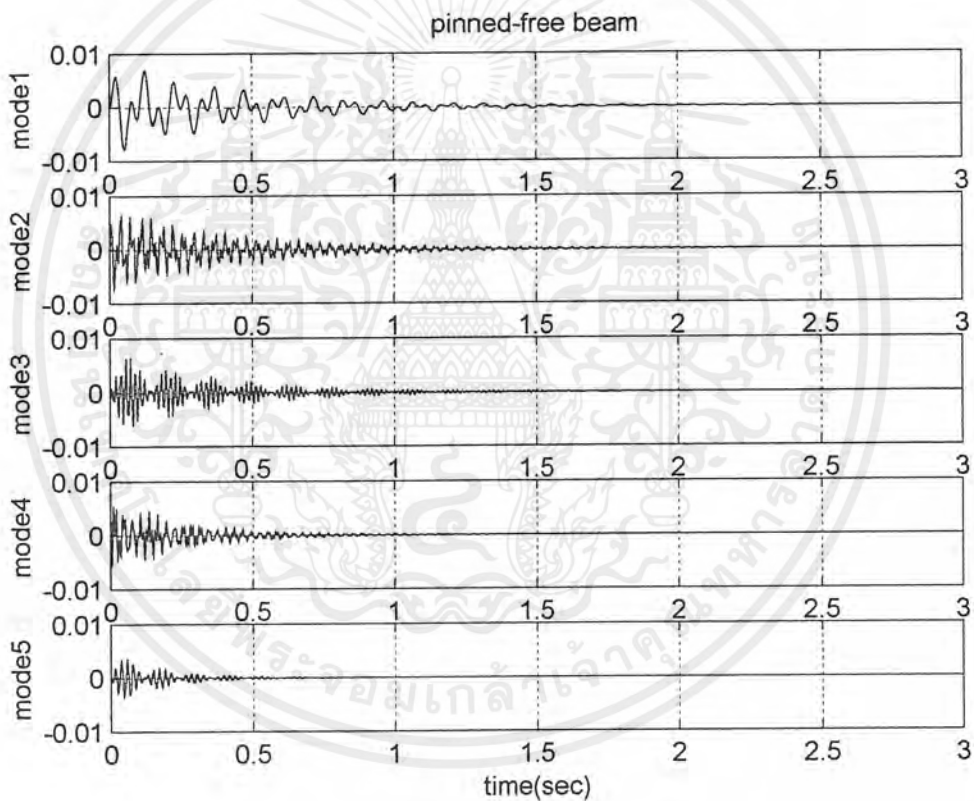
รูปที่ 4.5 แสดงการสั่นของบีมแบบปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam) ขณะทำการใส่แฉกบั้ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.3 กรณีปลายด้านหนึ่งหุนและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam)
รูปแบบสมการแยกพิจารณาเป็น โหมดของการสั่น

$$y_n(x,t) = e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [\sin k_n x - \alpha_n \sinh k_n x] \quad n = 1,2,3,4,\dots \quad (4-20)$$

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{\cos k_n l}{\cosh k_n l}$



รูปที่ 4.6 แสดงการสั่นของแต่ละ โหมดของบีมแบบปลายด้านหนึ่งหุน และปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam) ขณะทำการใส่แฉกบีม

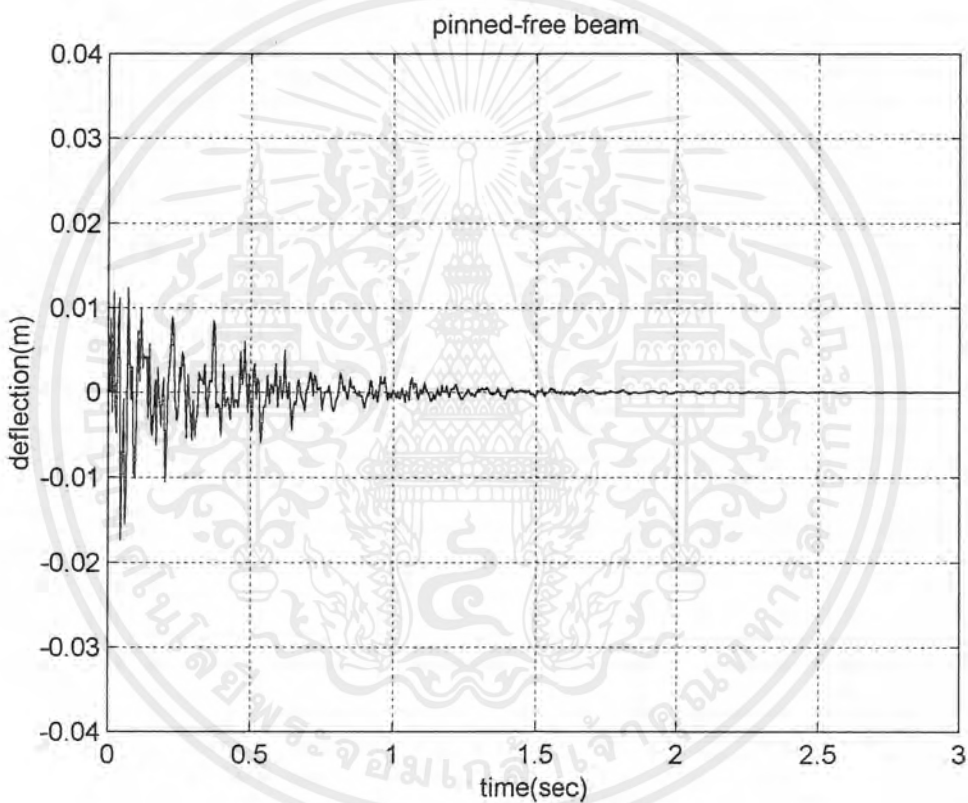
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลรวมของโหมดของการสั่นเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n e^{\lambda_n t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [\sin k_n x - \alpha_n \sinh k_n x] \quad n = 1,2,3,4,\dots$$

(4-21)

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{\cos k_n l}{\cosh k_n l}$



รูปที่ 4.7 แสดงการสั่นของบีมแบบปลายค้ำด้านหนึ่งหมุนและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam) ขณะทำการใส่เคมปีง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

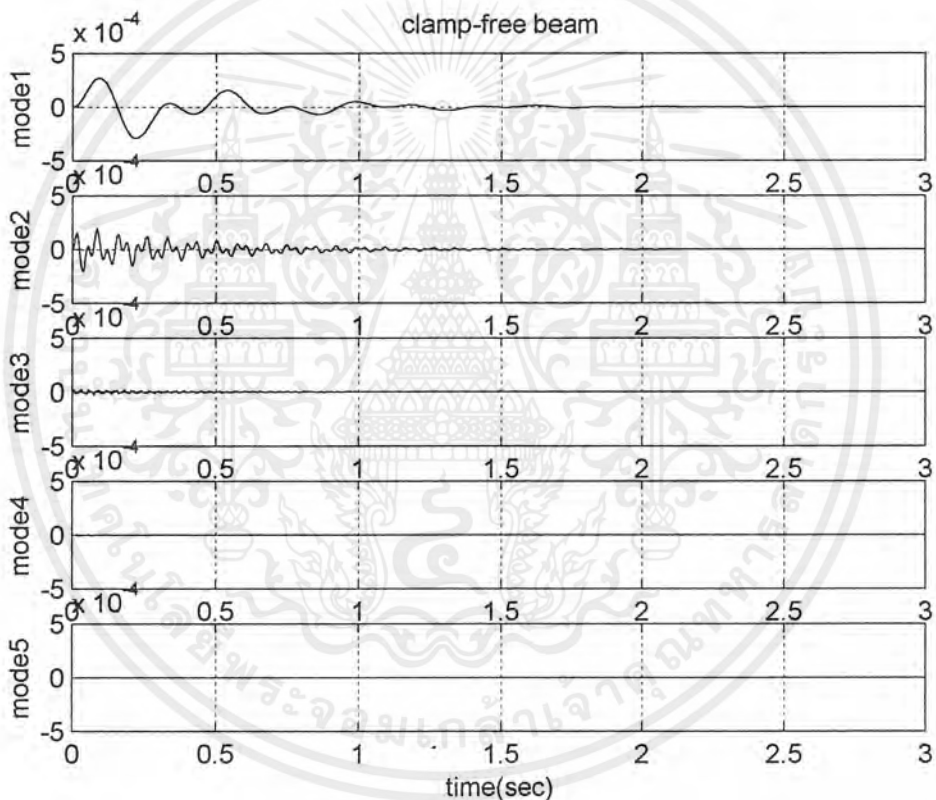
4.2.4 กรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam)

รูปแบบสมการแยกพิจารณาเป็น โหมดของการสั่น

$$y_n(x,t) = e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x)]$$

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$ (4-22)

กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{(\sinh k_n l + \sin k_n l)}{(\cosh k_n l + \cos k_n l)}$



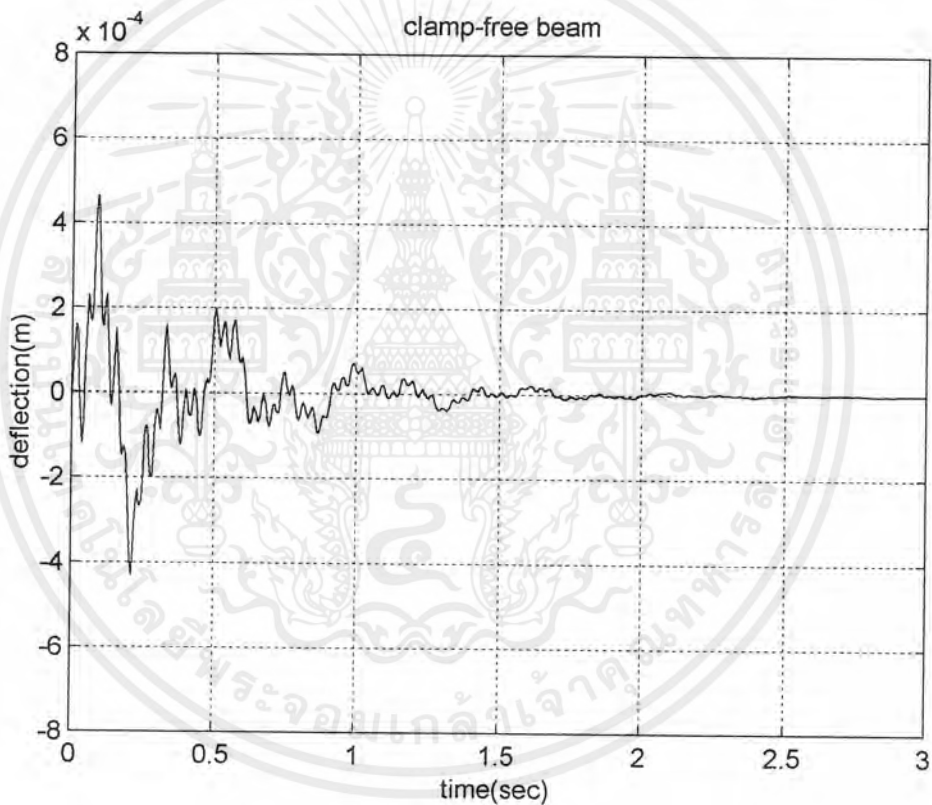
รูปที่ 4.8 แสดงการสั่นของแต่ละโหมดของบีมแบบปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam) ขณะทำการใส่แฉกบั้ง

ผลรวมของโหมดของการสั่นเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n e^{\lambda_n t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x)]$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4-23)$$

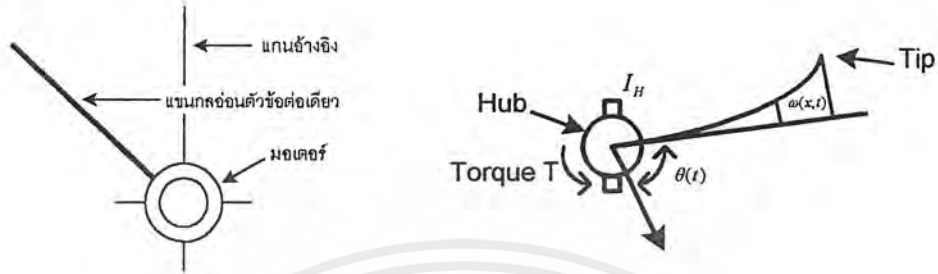
กำหนดให้ $\alpha_n = \frac{(\sinh k_n l + \sin k_n l)}{(\cosh k_n l + \cos k_n l)}$



รูปที่ 4.9 แสดงการสั่นของบีมแบบปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam) ขณะทำการใส่แฉกบีม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์



รูปที่ 4.10 แสดงการเคลื่อนที่ของฮับ (hub)

จากสมการการเคลื่อนที่ของ ฮับ (hub)

$$EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + T = I_H \ddot{\theta} \tag{4-24}$$

โดย T = แรงบิด (Torque)
 I_H = ความเฉื่อยของ ฮับ (Inertia of Hub)
 $\ddot{\theta}$ = ความเร่งเชิงมุม

4.3.1 กรณีปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)

จากสมการ (4-17)

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n \sqrt{2} e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi x}{l}$$

แทนสมการที่ (4-17) ลงในสมการที่ (4-24) จะได้

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^n \sqrt{2} e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi x}{l} + T = I_H \ddot{\theta} \tag{4-25}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้คำตอบของสมการ

$$-EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^n \sqrt{2} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi x}{l} + T = I_H \ddot{\theta} \quad (4-26)$$

4.3.2 กรณีปลายติดแน่นด้านหนึ่งและอีกด้านหนึ่งเป็นปลายหมุน (clamp-pinned beam)

จากสมการ (4-19)

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x)]$$

แทนสมการ (4-19) ลงในสมการที่ (4-24) จะได้

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^n e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [(\cosh k_n x - \cos k_n x) - \alpha_n (\sinh k_n x - \sin k_n x)] + T = I_H \ddot{\theta} \quad (4-27)$$

จะได้คำตอบของสมการ

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^n e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [(-\cosh k_n x + \cos k_n x) - \alpha_n (-\sinh k_n x + \sin k_n x)] + T = I_H \ddot{\theta} \quad (4-28)$$

4.3.3 กรณีปลายด้านหนึ่งหมุนและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ (pinned-free beam)

จากสมการ (4-21)

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n e^{\lambda t} \sin \mu_n t \sin \omega_n t [\sin k_n x - \alpha_n \sinh k_n x]$$

แทนสมการ (4-21) ลงในสมการที่ (4-24) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^n e^{\lambda_i t} \sin \mu_i t \sin \omega_n t [\sin k_i x - \alpha_i \sinh k_i x] + T = I_H \ddot{\theta} \quad (4-29)$$

จะได้คำตอบของสมการ

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^n e^{\lambda_i t} \sin \mu_i t \sin \omega_n t [\sin k_i x - \alpha_i \sinh k_i x] = I_H \ddot{\theta} \quad (4-30)$$

4.3.2 กรณีปลายด้านหนึ่งติดแน่นและอีกด้านหนึ่งอิสระ (clamp-free beam)

จากสมการ (4-23)

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^n e^{\lambda_i t} \sin \mu_i t \sin \omega_n t [(\cosh k_i x - \cos k_i x) - \alpha_i (\sinh k_i x - \sin k_i x)]$$

แทนสมการ (4-23) ลงในสมการที่ (4-24) จะได้

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^n e^{\lambda_i t} \sin \mu_i t \sin \omega_n t [(\cosh k_i x - \cos k_i x) - \alpha_i (\sinh k_i x - \sin k_i x)] + T = I_H \ddot{\theta} \quad (4-31)$$

จะได้คำตอบของสมการ

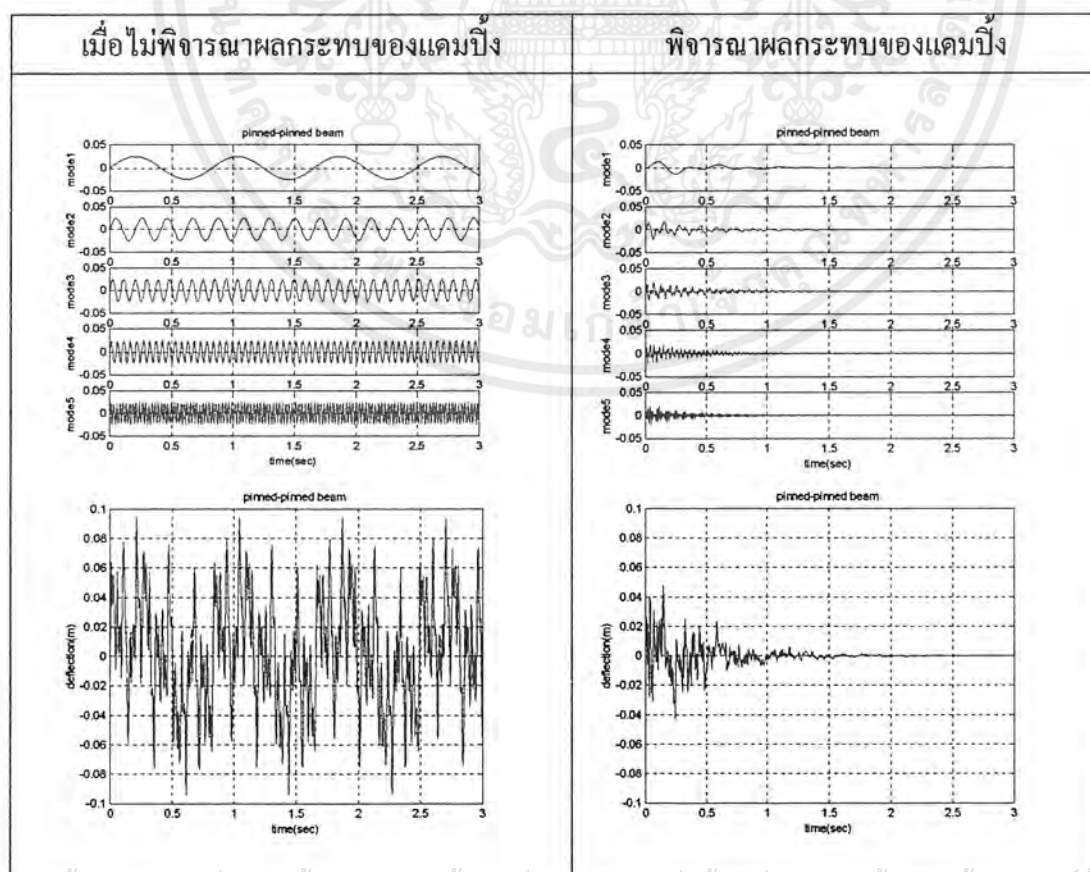
$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^n e^{\lambda_i t} \sin \mu_i t \sin \omega_n t [(-\cosh k_i x + \cos k_i x) - \alpha_i (-\sinh k_i x + \sin k_i x)] + T = I_H \ddot{\theta} \quad (4-32)$$

บทที่ 5

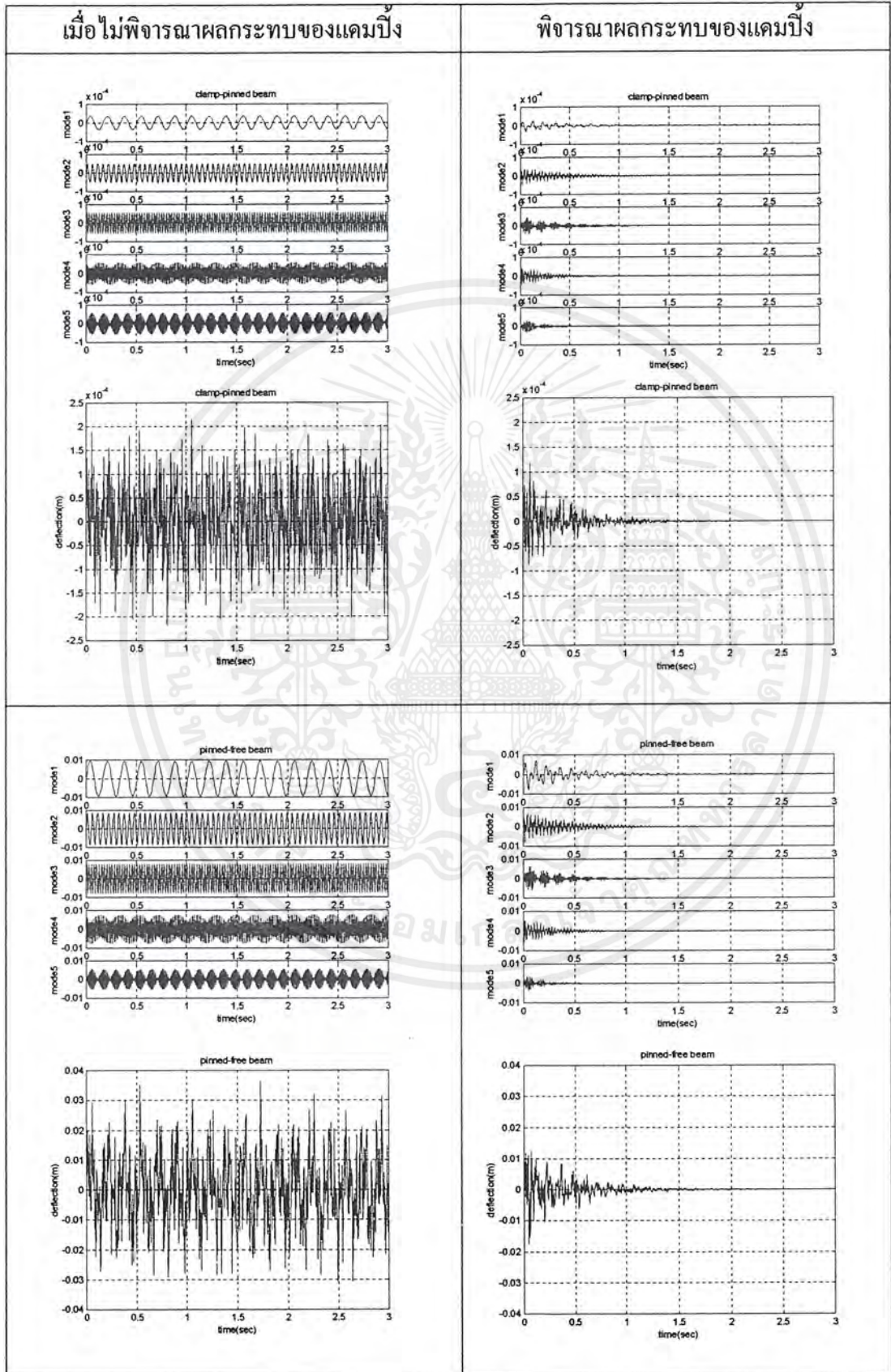
บทสรุป

จากโครงการนี้เราจะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวชนิดแขนบาง โดย บทที่ 3 จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ยังไม่ได้พิจารณาผลกระทบของแฉกบั้ง เมื่อจำลองผลทางกราฟฟิค ซึ่งแสดงให้เห็นว่ากลไกการทำงานของแขนกลแบบอ่อนตัวข้อต่อเดียวโดยเสมือนแขนกลมีการสั่นตลอดเวลา ในส่วนของบทที่ 4 จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่พิจารณาผลกระทบของแฉกบั้งเมื่อจำลองผลตามกราฟฟิคซึ่งแสดงให้เห็นกลไกการทำงานของแขนกลแบบอ่อนตัวข้อต่อเดียวโดยเสมือนมีผลกระทบให้แขนค่อยๆหยุดสั่นเมื่อได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้วสามารถไปสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ไว้ในส่วนท้ายของบทที่ 4

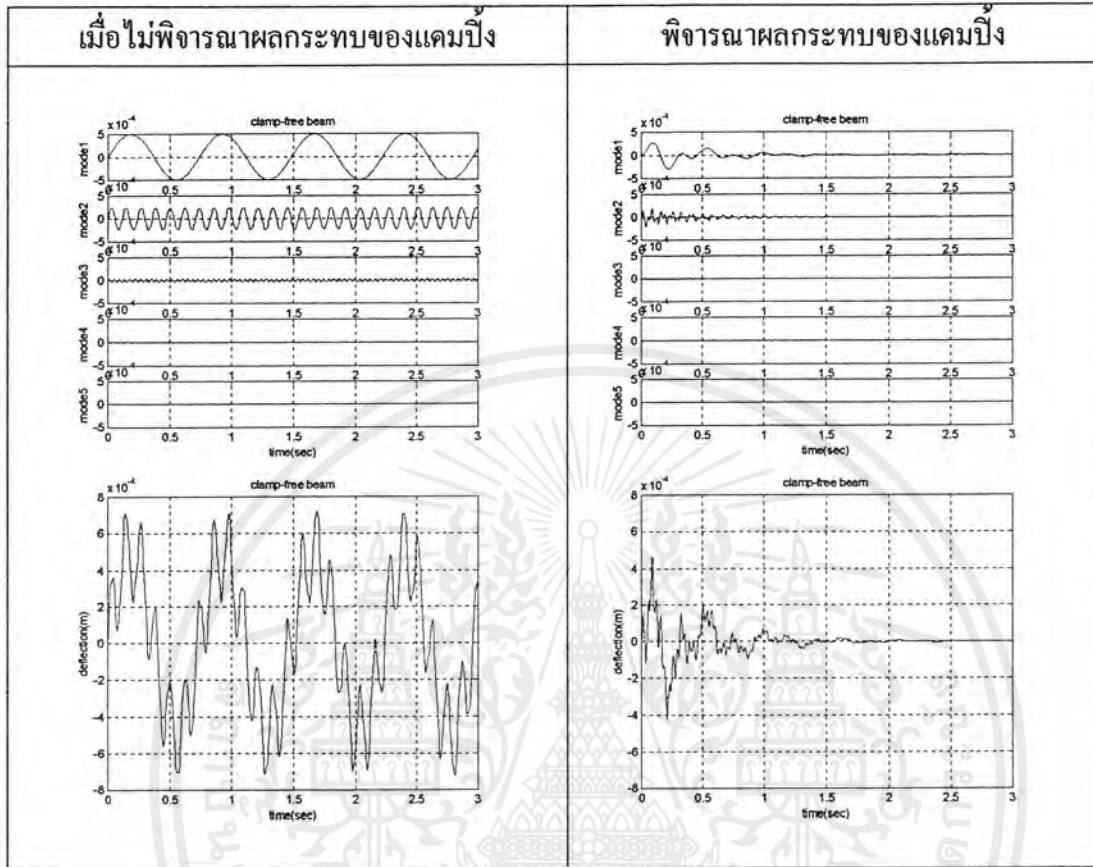
จะแสดงการเปรียบเทียบผลทางกราฟฟิค ระหว่าง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวที่ยังไม่ได้พิจารณาผลกระทบของแฉกบั้งกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวที่พิจารณาผลกระทบของแฉกบั้ง รวมทั้งรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ที่จะนำไปใช้กับชนิดของมอเตอร์ซึ่งสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่บนสื่อออนไลน์
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไมอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ตารางที่ 5.1 แสดงผลเปรียบเทียบแบบจำลองแสดงผลทางกราฟฟิก

ชนิดของมอเตอร์	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ (ตามชนิดของบีม)
HIGHT GEAR MOTOR	CLAMP-PINNED BEAM CLAMP-FREE BEAM
DIRECT DRIVE MOTOR	PINNED-PINNED BEAM PINNED-FREE BEAM

ตารางที่ 5.2 แสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
ของมอเตอร์ที่จะนำไปใช้กับชนิดของมอเตอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Canon, R.H.Jr.,Schmitz, E., "Inertial Experiment on the End-Point Control of flexible One-Link Robot," The International Journal of Robotic Research, Vol.3, No.3, pp.62-75 fall, 1984.
- [2] Gevater. W.B., "Basic Relations for Control of Flexible Vehicles," AIAA Journal. Vol.8, No.4, pp. 666-672, April,1970.
- [3] E. Bayo, "Computed torque for the position control of open-chain flexible robots," in Proceedings of the 5th IEEE international Conference on Robotics and Automation, (Philadelphia,Pa.), pp. 316-321, Apr. 1988.
- [4] J. Lin and F. Lewis, "Dynamic equation of manipulator with rigid and flexible links : Derivation and Symbolic Computation," Proc. Of American Control Conf. ,San Francisco, CA , pp.2868-2872, 1993.
- [5] X. Qi, and G. Chen, "Mathematical modeling of kinematics and dynamics of certain single flexible link robot arms," First IEEE Conf. on Control Applications, Vol.1, pp. 288-293 ,1993.
- [6] I. Zeinoun and F. Khorrami, "Fuzzy based adaptive control for flexible-link manipulators actuated by piezoceramics," In Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Vol. 1, pp.643-648, 1994.
- [7] P. sooraksa, " Mathematical Modeling of a Single Flexible-Link Robot Arm with Damping," 20 th Electrical Engineering Conference, Vol.1,pp.313-319,Nov 1997.
- [8] S. Yukovich, U. Oquner, A. Tzes. P. T. Konik, "Flexible manipulator control experiment and analysis," Thechnical Report CLR-1008-Su86-P , The ohio state University, Control Research Laboratory,1986.
- [9] Z. H. Loa, "Direct Strain Feedback Control of flexible robot arm : New Theorecal and experiment result," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 38, No.11, pp.1610-1622,1993.
- [10] E.Kubica and D.Wang, "A fuzzy control strategy for a flexible link robot ," in Proc.IEEE, Int., Conf., Robotic Automation, Atlanta, GA. Vol.2, pp. 236-231, May2-6,1993.
- [11] S.P.,Bhat, M. Tanaka and Denney, K. Miu, "Experiments on Point-to-Point Position Control of a Flexible Beam using Laplace transfer technique :Part I-Open-Loop," Dsc-Vol.26,Robotics Research in the ASME, pp. 39-45,1990.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [12] Pota, H.R. "A prototype flexible robot arm-an interdisciplinary undergraduate."IEEE Transactions on Education. Vol. 35, pp. 83-9 , Feb. 1992
- [13] Moudgal, V.G., Passino, K.M. , Yurkovich, S. "Rule-based control for a flexible-link robot," IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol. 2,pp. 392-405, 1994.
- [14] Wen-Jien Wang , Shui-Shong Lu, and Chen-Fa Hsu "Experiments on the Position of a One-Link Flexible Robot Arm," IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 5, pp. 373-376, June, 1994.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ

Description	Natation	Value	Unit
Modulus of inertia	E	$7.1 \cdot 10^{10}$	Pa
Moment of inertia	I	$2 \cdot 10^{-11}$	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
Arm cross-section area	A	$9 \cdot 10^{-5}$	m^2
Effective arm length	L	1.0	m
Mass density	ρ	2712.6	$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Shear modulus	G	$1.2 \cdot 10^9$	Pa
Shape contant	κ	5/6	-

Table 1 Flexible-link robot arm data

Description	Natation	Value	Unit
Inertia of the hub	I_H	$1.7628 \cdot 10^{-3}$	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
Hub radius	R	0.09525	m
Viscous air damping	γ	1.024	$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}$
Kelvin-Voight damping	ζ	$2.05 \cdot 10^5$	$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}$
Shear modulus	R_t	0.09525	m
Shape contant	M_t	5/6	-

Table 2 Hub, damping , and workload data

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนโปรแกรม

pinned-pinned beam

```
t=0:0.005:3
a=0.0246*(sin(7.5743*t));
b=0.0246*(sin(30.2975*t));
c=0.0246*(sin(68.1694*t));
d=0.0246*(sin(121.190*t));
e=0.0246*(sin(242.3801*t));
subplot(511),plot(t,a),ylabel('mode1'),grid
v=[0,3,-0.05,0.05];
V=axis(v);
title('pinned-pinned beam')
subplot(512),plot(t,b),ylabel('mode2'),grid
subplot(513),plot(t,c),ylabel('mode3'),grid
subplot(514),plot(t,d),ylabel('mode4'),grid
subplot(515),plot(t,e),ylabel('mode5'),grid
xlabel('time(sec)')
```

sum pinned-pinned beam

```
t=0:0.005:3
a=0.0246*(sin(7.5743*t));
b=0.0246*(sin(30.2975*t));
c=0.0246*(sin(68.1694*t));
d=0.0246*(sin(121.190*t));
e=0.0246*(sin(242.3801*t));
f=a+b+c+d+e
plot(t,f),grid
title('pinned-pinned beam')
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
xlabel('time(sec)')
ylabel('deflection(m)')
```

damp pinned-pinned beam

```
t=0:0.005:3
y1=-2.0976*t;
y2=-2.1049*t;
y3=-2.1362*t;
y4=-2.2204*t;
y5=-2.5903*t;
x1=exp(y1);
x2=exp(y2);
x3=exp(y3);
x4=exp(y4);
x5=exp(y5);
z1=sin(18.1456*t);
z2=sin(73.0362*t);
z3=sin(164.386*t);
z4=sin(292.258*t);
z5=sin(584.5274*t);
a=0.0246*(sin(7.5743*t)).*x1.*z1;
b=0.0246*(sin(30.2975*t)).*x2.*z2;
c=0.0246*(sin(68.1694*t)).*x3.*z3;
d=0.0246*(sin(121.190*t)).*x4.*z4;
e=0.0246*(sin(242.3801*t)).*x5.*z5;
subplot(511),plot(t,a),ylabel('mode1'),grid
v=[0,3,-0.05,0.05];
a=axis(v);
title('pinned-pinned beam')
subplot(512),plot(t,b),ylabel('mode2'),grid
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

v=[0,3,-0.05,0.05];
a=axis(v);
subplot(513),plot(t,c),ylabel('mode3'),grid
v=[0,3,-0.05,0.05];
a=axis(v);
subplot(514),plot(t,d),ylabel('mode4'),grid
v=[0,3,-0.05,0.05];
a=axis(v);
subplot(515),plot(t,e),ylabel('mode5'),grid
v=[0,3,-0.05,0.05];
a=axis(v);
xlabel('time(sec)')

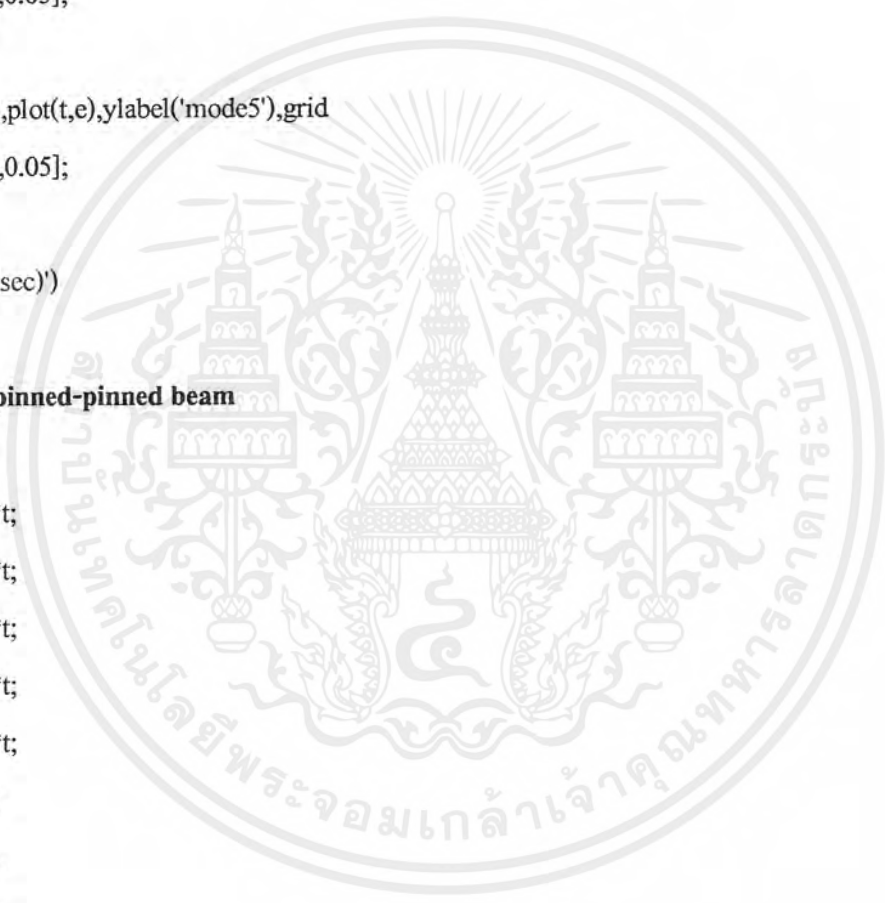
```

sum damp pinned-pinned beam

```

t=0:0.005:3
y1=-2.0976*t;
y2=-2.1049*t;
y3=-2.1362*t;
y4=-2.2204*t;
y5=-2.5903*t;
x1=exp(y1);
x2=exp(y2);
x3=exp(y3);
x4=exp(y4);
x5=exp(y5);
z1=sin(18.1456*t);
z2=sin(73.0362*t);
z3=sin(164.386*t);
z4=sin(292.258*t);
z5=sin(584.5274*t);

```



```

a=0.0246*(sin(7.5743*t)).*x1.*z1;
b=0.0246*(sin(30.2975*t)).*x2.*z2;
c=0.0246*(sin(68.1694*t)).*x3.*z3;
d=0.0246*(sin(121.190*t)).*x4.*z4;
e=0.0246*(sin(242.3801*t)).*x5.*z5;
f=a+b+c+d+e
plot(t,f),grid
v=[0,3,-0.1,0.1];
V=axis(v);
title('pinned-pinned beam')
xlabel('time(sec)')
ylabel('deflection(m)')

```

clamp-pinned beam

```

t=0:0.005:3
a1=37.1732*t;
a2=120.4652*t;
a3=251.3411*t;
a4=429.8082*t;
a5=654.7885*t;
b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
c1=0.0355e-3*b1;
c2=0.0514e-3*b2;
c3=0.0576e-3*b3;
c4=0.0576e-3*b4;
c5=0.0576e-3*b5;

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

subplot(511),plot(t,c1),ylabel('mode1'),grid
v=[0,3,-1e-4,1e-4];
V=axis(v);
title('clamp-pinned beam')
subplot(512),plot(t,c2),ylabel('mode2'),grid
subplot(513),plot(t,c3),ylabel('mode3'),grid
subplot(514),plot(t,c4),ylabel('mode4'),grid
subplot(515),plot(t,c5),ylabel('mode5'),grid
xlabel('time(sec)')

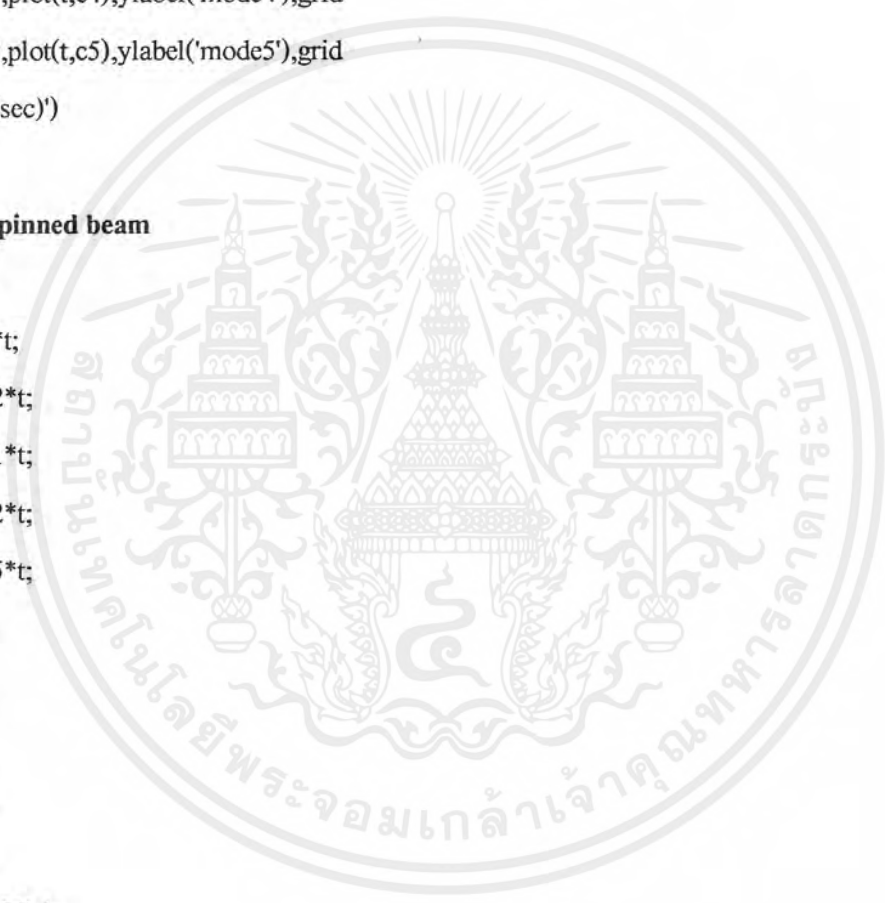
```

sum clamp-pinned beam

```

t=0:0.005:3
a1=37.1732*t;
a2=120.4652*t;
a3=251.3411*t;
a4=429.8082*t;
a5=645.7885*t;
b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
c1=0.0355e-3*b1;
c2=0.0514e-3*b2;
c3=0.0576e-3*b3;
c4=0.0576e-3*b4;
c5=0.0576e-3*b5;
d=c1+c2+c3+c4+c5
plot(t,d),grid
title('clamp-pinned beam')

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
xlabel('time(sec)')
```

```
ylabel('deflection(m)')
```

damp clamp-pinned beam

```
t=0:0.005:3
```

```
a1=37.1732*t;
```

```
a2=120.4652*t;
```

```
a3=251.3411*t;
```

```
a4=429.8082*t;
```

```
a5=645.7885*t;
```

```
b1=sin(a1);
```

```
b2=sin(a2);
```

```
b3=sin(a3);
```

```
b4=sin(a4);
```

```
b5=sin(a5);
```

```
y1=-2.1088*t;
```

```
y2=-2.219*t;
```

```
y3=-2.6275*t;
```

```
y4=-3.648*t;
```

```
y5=-5.6965*t;
```

```
x1=exp(y1);
```

```
x2=exp(y2);
```

```
x3=exp(y3);
```

```
x4=exp(y4);
```

```
x5=exp(y5);
```

```
z1=sin(89.6235*t);
```

```
z2=sin(290.51*t);
```

```
z3=sin(606.1381*t);
```

```
z4=sin(1036.5355*t);
```

```
z5=sin(1579.1028*t);
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

c1=0.0355e-3*b1.*x1.*z1;
c2=0.0514e-3*b2.*x2.*z2;
c3=0.0576e-3*b3.*x3.*z3;
c4=0.0576e-3*b4.*x4.*z4;
c5=0.0576e-3*b5.*x5.*z5;
subplot(511),plot(t,c1),ylabel('mode1'),grid
v=[0,3,-1e-4,1e-4];
V=axis(v);
title('clamp-pinned beam')
subplot(512),plot(t,c2),ylabel('mode2'),grid
v=[0,3,-1e-4,1e-4];
V=axis(v);
subplot(513),plot(t,c3),ylabel('mode3'),grid
v=[0,3,-1e-4,1e-4];
V=axis(v);
subplot(514),plot(t,c4),ylabel('mode4'),grid
v=[0,3,-1e-4,1e-4];
V=axis(v);
subplot(515),plot(t,c5),ylabel('mode5'),grid
v=[0,3,-1e-4,1e-4];
V=axis(v);
xlabel('time(sec)')

```

sum damp clamp-pinned beam

```

t=0:0.005:3
a1=37.1732*t;
a2=120.4652*t;
a3=251.3411*t;
a4=429.8082*t;
a5=645.7885*t;

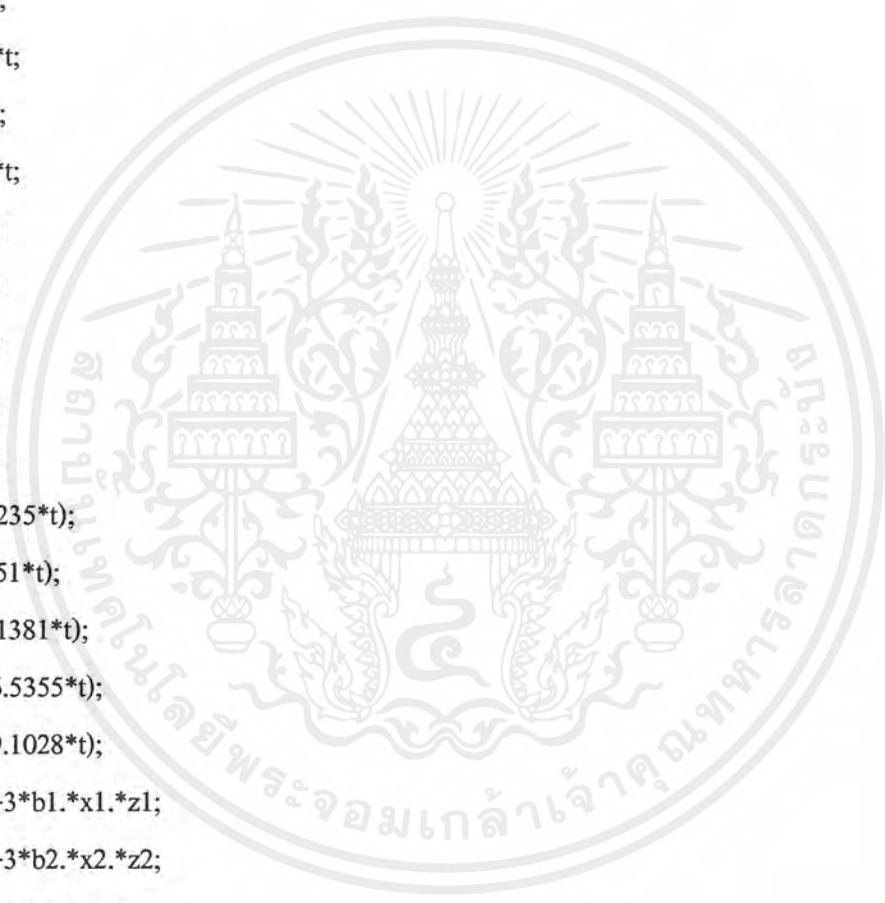
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
y1=-2.1088*t;
y2=-2.219*t;
y3=-2.6275*t;
y4=-3.648*t;
y5=-5.6965*t;
x1=exp(y1);
x2=exp(y2);
x3=exp(y3);
x4=exp(y4);
x5=exp(y5);
z1=sin(89.6235*t);
z2=sin(290.51*t);
z3=sin(606.1381*t);
z4=sin(1036.5355*t);
z5=sin(1579.1028*t);
c1=0.0355e-3*b1.*x1.*z1;
c2=0.0514e-3*b2.*x2.*z2;
c3=0.0576e-3*b3.*x3.*z3;
c4=0.0576e-3*b4.*x4.*z4;
c5=0.0576e-3*b4.*x4.*z5;
e=c1+c2+c3+c4+c5
plot(t,e),grid
v=[0,3,-2.5e-4,2.5e-4];
V=axis(v);
title('clamp-pinned beam')

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
xlabel('time(sec)')
ylabel('deflection(m)')
```

pinned-free beam

```
t=0:0.005:3
a1=37.1732*t;
a2=120.4652*t;
a3=251.3411*t;
a4=429.8082*t;
a5=654.7885*t;
b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
c1=0.00928*b1;
c2=0.00869*b2;
c3=0.00806*b3;
c4=0.00762*b4;
c5=0.00548*b5;
subplot(511),plot(t,c1),ylabel('mode1'),grid
title('pinned-free beam')
subplot(512),plot(t,c2),ylabel('mode2'),grid
subplot(513),plot(t,c3),ylabel('mode3'),grid
subplot(514),plot(t,c4),ylabel('mode4'),grid
subplot(515),plot(t,c5),ylabel('mode5'),grid
xlabel('time(sec)')
```

sum pinned-free beam

```
t=0:0.005:3
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

a1=37.1732*t;
a2=120.4652*t;
a3=251.3411*t;
a4=429.8082*t;
a5=654.7885*t;
b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
c1=0.00928*b1;
c2=0.00869*b2;
c3=0.00806*b3;
c4=0.00762*b4;
c5=0.00548*b5;
d=c1+c2+c3+c4+c5
plot(t,d),grid
title('pinned-free beam')
xlabel('time(sec)')
ylabel('deflection(m)')

```

sum damp pinned-free beam

```

t=0:0.005:3
a1=37.1732*t;
a2=120.4652*t;
a3=251.3411*t;
a4=429.8082*t;
a5=654.7885*t;
b1=sin(a1);
b2=sin(a2);

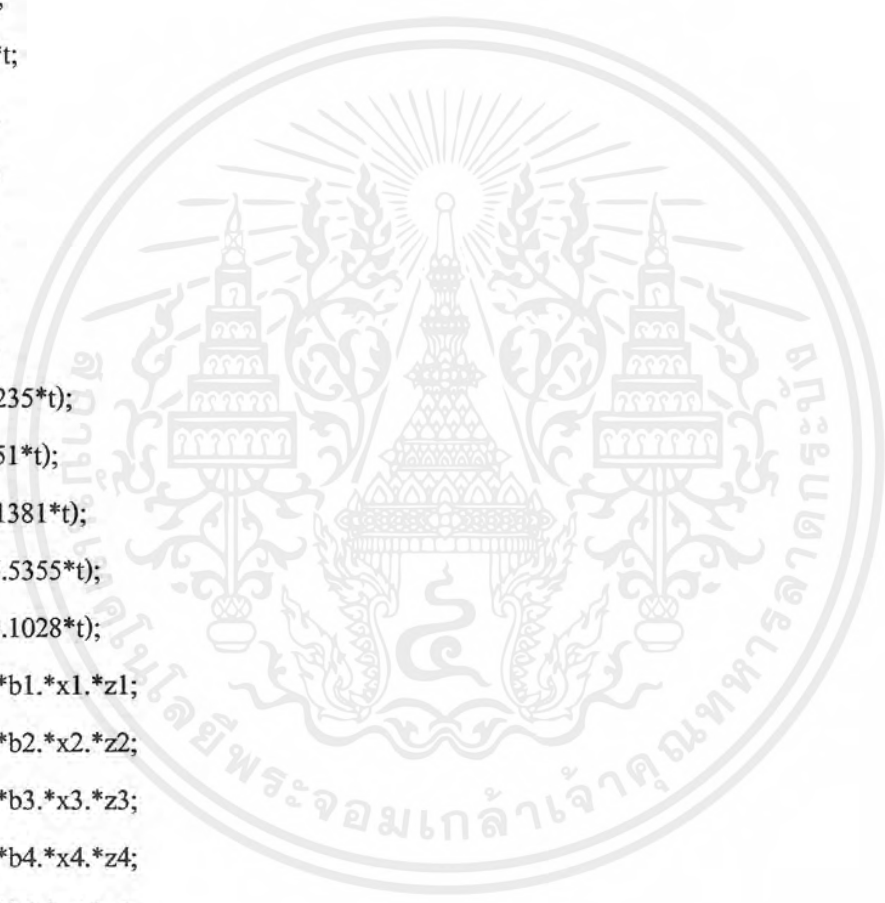
```



```

b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
y1=-2.1088*t;
y2=-2.219*t;
y3=-2.6275*t;
y4=-3.648*t;
y5=-5.6965*t;
x1=exp(y1);
x2=exp(y2);
x3=exp(y3);
x4=exp(y4);
x5=exp(y5);
z1=sin(89.6235*t);
z2=sin(290.51*t);
z3=sin(606.1381*t);
z4=sin(1036.5355*t);
z5=sin(1579.1028*t);
c1=0.00928*b1.*x1.*z1;
c2=0.00869*b2.*x2.*z2;
c3=0.00806*b3.*x3.*z3;
c4=0.00762*b4.*x4.*z4;
c5=0.00548*b5.*x5.*z5;
e=c1+c2+c3+c4+c5
plot(t,e),grid
v=[0,3,-0.04,0.04];
V=axis(v);
title('pinned-free beam')
xlabel('time(sec)')
ylabel('deflection(m)')

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

clamp-free beam

```
t=0:0.005:3
a1=8.4771*t;
a2=53.1251*t;
a3=148.7519*t;
a4=291.4945*t;
a5=481.4068*t;
b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
c1=0.4937e-3*b1;
c2=0.2406e-3*b2;
c3=0.0288e-3*b3;
c4=0.0043e-3*b4;
c5=0.0021e-3*b5;
subplot(511),plot(t,c1),ylabel('mode1'),grid
title('clamp-free beam')
subplot(512),plot(t,c2),ylabel('mode2'),grid
subplot(513),plot(t,c3),ylabel('mode3'),grid
v=[0,3,-5e-4,5e-4];
V=axis(v);
subplot(514),plot(t,c4),ylabel('mode4'),grid
v=[0,3,-5e-4,5e-4];
V=axis(v);
subplot(515),plot(t,c5),ylabel('mode5'),grid
v=[0,3,-5e-4,5e-4];
V=axis(v);
xlabel('time(sec)')
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

sum clamp-free beam

```
t=0:0.005:3
a1=8.4771*t;
a2=53.1251*t;
a3=148.7519*t;
a4=291.4945*t;
a5=481.4068*t;

b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
c1=0.4937e-3*b1;
c2=0.2406e-3*b2;
c3=0.0288e-3*b3;
c4=0.0043e-3*b4;
c5=0.0021e-3*b5;
d=c1+c2+c3+c4+c5
plot(t,d),grid
title('clamp-free beam')
xlabel('time(sec)')
ylabel('deflection(m)')
```

damp clamp-free beam

```
t=0:0.005:3
a1=8.4771*t;
a2=53.1251*t;
a3=148.7519*t;
a4=291.4945*t;
a5=481.4068*t;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
y1=-2.0978*t;
y2=-2.1208*t;
y3=-2.2829*t;
y4=-2.8105*t;
y5=-4.0427*t
x1=exp(y1);
x2=exp(y2);
x3=exp(y3);
x4=exp(y4);
x5=exp(y5);
z1=sin(20.3357*t);
z2=sin(128.1009*t);
z3=sin(358.7285*t);
z4=sin(702.9737*t);
z5=sin(1160.9721*t);
c1=0.4937e-3*b1.*x1.*z1;
c2=0.2406e-3*b2.*x2.*z2;
c3=0.0288e-3*b3.*x3.*z3;
c4=0.0043e-3*b4.*x4.*z4;
c5=0.0021e-3*b5.*x5.*z5;
subplot(511),plot(t,c1),ylabel('mode1'),grid
title('clamp-free beam')
subplot(512),plot(t,c2),ylabel('mode2'),grid
subplot(513),plot(t,c3),ylabel('mode3'),grid
v=[0,3,-5e-4,5e-4];

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

V=axis(v);
subplot(514),plot(t,c4),ylabel('mode4'),grid
v=[0,3,-5e-4,5e-4];
V=axis(v);
subplot(515),plot(t,c5),ylabel('mode5'),grid
v=[0,3,-5e-4,5e-4];
V=axis(v);
xlabel('time(sec)')

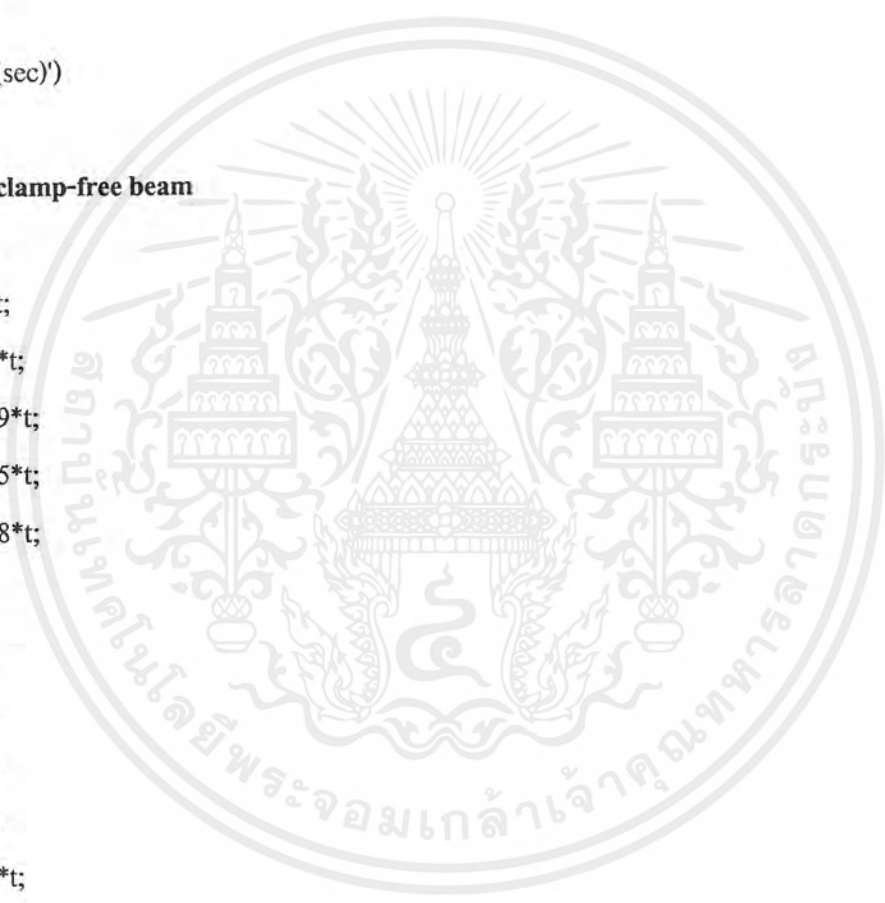
```

sum damp clamp-free beam

```

t=0:0.005:3
a1=8.4771*t;
a2=53.1251*t;
a3=148.7519*t;
a4=291.4945*t;
a5=481.4068*t;
b1=sin(a1);
b2=sin(a2);
b3=sin(a3);
b4=sin(a4);
b5=sin(a5);
y1=-2.0978*t;
y2=-2.1208*t;
y3=-2.2829*t;
y4=-2.8105*t;
y5=-4.0427*t
x1=exp(y1);
x2=exp(y2);
x3=exp(y3);
x4=exp(y4);

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

x5=exp(y5);
z1=sin(20.3357*t);
z2=sin(128.1009*t);
z3=sin(358.7285*t);
z4=sin(702.9737*t);
z5=sin(1160.9721*t);
c1=0.4937e-3*b1.*x1.*z1;
c2=0.2406e-3*b2.*x2.*z2;
c3=0.0288e-3*b3.*x3.*z3;
c4=0.0043e-3*b4.*x4.*z4;
c5=0.0021e-3*b5.*x5.*z5;
d=c1+c2+c3+c4+c5
plot(t,d,grid
v=[0,3,-8e-4,8e-4];
V=axis(v);
title('clamp-free beam')
xlabel('time(sec)')
ylabel('deflection(m)')

```

tan kl_tanh kl

```

x=0:0.001:18;
y=tan(x);
z=tanh(x);
plot(x,y,'r',x,z,'r'),grid
v=[0,18,0,2];
a=axis(v);
xlabel('kl'),ylabel('tan kl and tanh kl')
hold on
gtext('tan kl')
gtext('tanh kl')

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
[X,Y]=ginput
```

2

```
coskl_-sechkl
```

```
x=0:0.001:18;
```

```
y=-sech(x);
```

```
z=cos(x);
```

```
plot(x,y,'r',x,z,'r'),grid
```

```
%v=[0,12,1,8];
```

```
%a=axis(v);
```

```
xlabel('kl'),ylabel('cos kl and -sech kl')
```

```
hold on
```

```
gtext('-sech kl')
```

```
gtext('cos kl')
```

```
[X,Y]=ginput
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้