การเขียนกราฟ 2 มิติ และ 3 มิติ ผ่านเครือข่ายอินเตอร์เน็ต

นางสาวจริยา	กำเหนิดนนท์	38054111
นายทรงคุณ	สาสนะ	38054122
นางสาวสุวิดา	กิตติพงศ์วรการ	38054171

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 33872
วัน, เดือน, ปี 17 ก.ย. 2542

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2541

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A 2D and 3D Graphs Learning Tool for the Internet Users.

Miss Chariya	Kamnerdnond	38054111
Mr. Songkun	Sasana	38054122
Miss Suwida	Kittipongvorakan	38054171

A Special Project Submitted in Partial Fulfillment of
the Requirement for the Degree of Bachelor of Science
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
1998

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาพิเศษเรื่อง	การเขียนกราฟ 2 มิติ และ 3 มิติ ผ่านเครือข่ายอินเตอร์เน็ต		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจริยา	กำเหนิดนนท์	38054111
	นายทรงคุณ	สาสนะ	38054122
	นางสาวสุวิดา	กิตติพงศ์วรการ	38054171
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์		
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ		
	อาจารย์ใจปอง วงษ์สวัสดิ์		

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2541

(รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการโครงงานพิเศษ

(รองศาสตราจารย์อุบลวรรณา เงินวิจิตร)
ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ)
กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์ใจปอง วงษ์สวัสดิ์)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การเขียนกราฟ 2 มิติ และ 3 มิติ ผ่านเครือข่ายอินเตอร์เน็ต

นักศึกษา

นางสาวจริยา	กำเหนิดนนท์	38054111
นายทรงคุณ	สาสนะ	38054122
นางสาวสุวิดา	กิตติพงศ์วรการ	38054171

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ
อาจารย์ใจปอง วงษ์สวัสดิ์

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2541

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันคอมพิวเตอร์ได้เข้ามามีบทบาทในชีวิตประจำวันมากขึ้นในหลาย ๆ ด้าน โดยเฉพาะทางการศึกษา ดังนั้นจึงมีการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอนที่เรียกว่า คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หรือ CAI ซึ่งช่วยให้ผู้ใช้สามารถเรียนรู้และทำความเข้าใจกับเนื้อหาของบทเรียนได้ดีขึ้น

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการทำ CAI ทางคณิตศาสตร์เรื่องการเขียนกราฟ 2 มิติและ 3 มิติผ่านเครือข่ายอินเตอร์เน็ต ซึ่งมีการใช้งานที่ง่ายและมีการติดต่อกับผู้ใช้เป็นภาษาไทยจึงช่วยให้ผู้ใช้มีความเข้าใจมากยิ่งขึ้น โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อรวบรวมข้อมูลทางด้านการเขียนกราฟ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถนำไปศึกษาประยุกต์ใช้ในการเรียน และทำความรู้จักกับเครือข่ายอินเตอร์เน็ต ซึ่งเป็นสื่อที่กำลังได้รับความนิยมกันอย่างกว้างขวาง โดยมีขั้นตอนการพัฒนา CAI ดังนี้ คือ การศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับ CAI การออกแบบและการพัฒนาโปรแกรมโดยการใช้ Java ซึ่งเป็นภาษาที่สามารถจัดการในส่วน Application และแสดงผลบนเว็บเพจในอินเตอร์เน็ตได้ ซึ่งผลจากการพัฒนาโปรแกรมจะได้ CAI ทางคณิตศาสตร์ ที่ประกอบด้วยเนื้อหารวมถึงแบบฝึกหัดของการวาดกราฟต่าง ๆ ซึ่งจะแสดงเป็นรูปภาพ เพื่อให้ผู้ใช้มีความเข้าใจและง่ายต่อการเรียนรู้มากยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Topic A 2D and 3D Graphs Learning Tool for the Internet Users.

Student	Miss Chariya	Kamnerdnond	38054111
	Mr. Songkun	Sasana	38054122
	Miss Suwida	Kittipongvorakan	38054171

Advisor	Miss Patcharin	Hemchote
	Miss Jaipong	Wongsawasdi

Department Mathematics and Computer Science

Year 1998

Abstract

Nowadays, computers play important roles in our lives in several ways, especially in education. A Computer Aids Instruction (CAI) is developed for the education area. It is used to aid the users to be able to gain better knowledges from what they learn from books.

In this special topic, the aim is to develop mathematical CAI about writing 2 dimension and 3 dimension graphs through the internet for the users to learn and apply to their studies. This tool is not only easy to use but also prepares Thai user interface for the users to have better understanding than in English. There are 3 steps in this development of CAI : studying the application of CAI, designing and developing programs by Java programming language. Java handles the application part and the output to the webpage part. This mathermatical CAI consist of the information and exercises of how to write graphs using graphics interface for the users to learn easier.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดีก็เพราะหลายเหตุปัจจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ

อาจารย์ใจปอง วงษ์สวัสดิ์

อาจารย์กรกช ประชุมรักษ์

ที่ได้ให้แนวทางในการดำเนินการ คำปรึกษา ตลอดจนการตรวจทานแก้ไขปัญหาพิเศษฉบับนี้ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างดียิ่ง

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำ จนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ และนอกจากนี้

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา เพื่อน ๆ รุ่นพี่ และรุ่นน้องทุกคน ที่คอยเป็นกำลังใจจนปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบพระคุณ

คณะผู้จัดทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
หน้าอนุมัติ	i
บทคัดย่อภาษาไทย	ii
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	iii
กิตติกรรมประกาศ	iv
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ความสำคัญ/ที่มาของปัญหาพิเศษ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	1
1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน	1
1.5 การวางแผนงาน	2
1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ	3
1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
1.8 งบประมาณที่คาดว่าจะใช้ในการทำปัญหาพิเศษ	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักเกณฑ์ที่เกี่ยวข้อง	
2.1 CAI (Computer Aided Instruction)	4
2.2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับอินเตอร์เน็ต	7
2.3 การติดต่อสื่อสารกันบนระบบอินเตอร์เน็ต	13
2.4 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับภาษา Java	19
2.5 จาวาสคริปท์ (JavaScript)	27
2.6 Cascade Style Sheet (CSS)	35
2.7 Perl	45
2.8 การสร้างและการแปลงภาพสองและสามมิติ	49

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
บทที่ 3 แนะนำการใช้งาน	
3.1 ก่อนใช้งาน	73
3.2 อธิบายการใช้งาน	73
บทที่ 4 สรุป วิจารณ์และแนวทางในการพัฒนา	
4.1 ความสามารถของปัญหาพิเศษ	91
4.2 ข้อจำกัดของปัญหาพิเศษ	91
4.3 แนวทางในการพัฒนาต่อไป	92
ภาคผนวก ก. หลักการพิจารณาและการเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ	
1. การเขียนกราฟของฟังก์ชั่นไม่เป็นเชิงเส้น (Graph of non-linear function)	ก-1
2. การย้ายแกน (Translation of axis)	ก-10
3. สมการทั่วไปกำลังสอง (The general second degree equation)	ก-16
4. การหมุนแกน (Rotation of axis)	ก-19
5. Invarianta and the discriminant	ก-22
ภาคผนวก ข. หลักการพิจารณาและการเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ	
1. ทรงกลม ทรงกระบอก และทรงกรวย	ข-1
2. การพิจารณาลักษณะพื้นผิวจากสมการ	ข-9
3. พื้นผิวควอดริก	ข-15
บรรณานุกรม	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

หน้า

รูปที่ 2.1	แสดงจำนวนโฮสต์ที่ต่อเข้าสู่อินเตอร์เน็ตตั้งแต่เดือนมกราคม 2534 ถึงเดือนมกราคม 2541	9
รูปที่ 2.2	แสดงจำนวนชื่อโดเมนที่ใช้ในระบบอินเตอร์เน็ตตั้งแต่เดือนธันวาคม 2534 ถึงเดือนธันวาคม 2540	9
รูปที่ 2.3	แสดงพื้นที่ที่มีการใช้งานอินเตอร์เน็ต	10
รูปที่ 2.4	แสดงการเข้าชมข้อมูลของแต่ละเว็บไซต์	14
รูปที่ 2.5	แสดงการออกแบบของเว็บเพจ	15
รูปที่ 2.6	แสดงความสามารถทางด้านการเชื่อมโยง CGI	15
รูปที่ 2.7	แสดงองค์ประกอบคร่าว ๆ ในแต่ละเว็บเพจ	16
รูปที่ 2.8	แสดงการทำงานของ HTML	17
รูปที่ 2.9	แสดงการทำงานของภาษา Java	21
รูปที่ 2.10	แสดงการทำการโต้ตอบกับผู้ใช้ในเวิร์ลด์ – ไวด์ – เว็บ	26
รูปที่ 2.11	แสดงขั้นตอนในการแสดงภาพสองมิติ	51
รูปที่ 2.12	แสดงเส้นตรง AB และ perspective projection $A'B'$	52
รูปที่ 2.13	แสดงเส้นตรง AB และ parallelS projection $A'B'$	52
รูปที่ 2.14	แสดงระบบมือขวาและระบบมือซ้ายของระบบโคออร์ดิเนต	53
รูปที่ 2.15	แสดงขั้นตอนในการสร้างรูปสามมิติในระบบแสดงผลสองมิติ	53
รูปที่ 2.16 (ก)	แสดงการโพรเจ็กต์แบบ Perspective	55
รูปที่ 2.16 (ข)	แสดงการโพรเจ็กต์แบบ Perspective	56
รูปที่ 2.17	แสดงตัวอย่างของ orthographic parallel projection	56
รูปที่ 2.18	แสดงตัวอย่างของการโพรเจ็กต์แบบ Isometric	57
รูปที่ 2.19	แสดงตัวอย่างการโพรเจ็กต์ชันแบบ Oblique	57
รูปที่ 2.20	แสดงตัวอย่างการโพรเจ็กต์แบบ Cavalier	58
รูปที่ 2.21	แสดงตัวอย่างการโพรเจ็กต์ชันแบบ Cabinet	58
รูปที่ 2.22	แสดงการคำนวณหาจุดดัดของโพรเจ็กต์เตอร์ และระนาบของการโพรเจ็กต์ของรูปสามมิติแบบ Perspective	60

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 2.23 แสดงการโพรเจ็กต์ชันแบบ Oblique Parallel จากจุด $P(0,0,1)$ ไปยังจุด $P'(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ 62

รูปที่ 2.24 แสดงการโพรเจ็กต์ชันแบบ Oblique Parallel จากจุด P ไปยัง P' (มองตามระนาบ yz และ xz) 62

รูปที่ 2.25 แสดงการย้ายจุด (1,2) ไปยังจุด (6,9) ได้ระยะทาง (5,7) 63

รูปที่ 2.26 แสดงการย่อภาพ 64

รูปที่ 2.27 แสดงลักษณะการหมุนภาพ 66

รูปที่ 2.28 แสดงขั้นตอนในการหมุนภาพรอบจุด P_1 68

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.1	แสดงหน้าจอหลัก	74
รูปที่ 3.2	แสดงปุ่ม “คำแนะนำ”	74
รูปที่ 3.3	แสดงปุ่ม “ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ”	74
รูปที่ 3.4	แสดงปุ่ม “ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ”	75
รูปที่ 3.5	แสดงปุ่ม “ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ”	75
รูปที่ 3.6	แสดงปุ่ม “ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ”	75
รูปที่ 3.7	แสดงปุ่ม “แบบฝึกหัด 2 มิติ”	76
รูปที่ 3.8	แสดงปุ่ม “แบบฝึกหัด 3 มิติ”	76
รูปที่ 3.9	แสดงปุ่ม “สมุดเยี่ยมชม”	76
รูปที่ 3.10	แสดงปุ่ม “แผนที่เว็บไซต์”	76
รูปที่ 3.11	แสดงปุ่ม “เกี่ยวกับคณะผู้จัดทำ”	77
รูปที่ 3.12	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ” ในเฟรมที่ 2	77
รูปที่ 3.13	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “วงกลม” ในหน้าจอที่แล้ว	78
รูปที่ 3.14	แสดงหน้าจอส่วนท้ายของเนื้อหาแต่ละเรื่องในเมนู “ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ”	78
รูปที่ 3.15	แสดงภาพสำหรับให้ผู้เรียนกด เพื่อดาวน์โหลดเอกสารไว้อ่านภายหลัง	79
รูปที่ 3.16	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ” ในเฟรมที่ 2	79
รูปที่ 3.17	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ทรงกลม” ในหน้าจอที่แล้ว	80
รูปที่ 3.18	แสดงหน้าจอส่วนท้ายของเนื้อหาแต่ละเรื่องในเมนู “ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ”	80
รูปที่ 3.19	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ” ในเฟรมที่ 2	81
รูปที่ 3.20	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “วงรี” ในหน้าจอที่แล้ว	81
รูปที่ 3.21	แสดงหน้าจอเมื่อผู้เรียนใส่ค่าต่าง ๆ ให้กับโปรแกรม ทำให้ได้รูปกราฟออกมาตามต้องการ	82
รูปที่ 3.22	แสดงส่วนท้ายของหน้าจอแต่ละเรื่องในเมนู “ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ”	82

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.23	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ” ในเฟรมที่ 2	83
รูปที่ 3.24	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ทรงกลม” ในหน้าจอที่แล้ว	83
รูปที่ 3.25	แสดงหน้าจอเมื่อผู้เรียนใส่ค่าต่าง ๆ ให้กับโปรแกรม ทำให้ได้รูปกราฟออกมาตามต้องการ	84
รูปที่ 3.26	แสดงส่วนท้ายของหน้าจอแต่ละเรื่องในเมนู “ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ”	84
รูปที่ 3.27	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “แบบฝึกหัด 2 มิติ” ในเฟรมที่ 2	85
รูปที่ 3.28	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ชุดที่ 1” ในหน้าจอที่แล้ว	86
รูปที่ 3.29	แสดงหน้าจอเมื่อผู้เรียนกดปุ่ม “เฉลย” ที่ด้านท้ายของโจทย์	87
รูปที่ 3.30	แสดงส่วนท้ายของหน้าจอแต่ละเรื่องในเมนู “แบบฝึกหัด 2 มิติ”	87
รูปที่ 3.31	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “แบบฝึกหัด 3 มิติ” ในเฟรมที่ 2	88
รูปที่ 3.32	แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ชุดที่ 2” ในหน้าจอที่แล้ว	89
รูปที่ 3.33	แสดงหน้าจอเมื่อผู้เรียนกดปุ่ม “เฉลย” ที่ด้านท้ายของโจทย์	90
รูปที่ 3.34	แสดงส่วนท้ายของหน้าจอแต่ละเรื่องในเมนู “แบบฝึกหัด 3 มิติ”	90

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

		หน้า
รูปที่ ก1	แสดงเส้นโค้ง AB ที่สมมาตรกับเส้นตรง L	ก-3
รูปที่ ก2	แสดงเส้นโค้ง AA' ที่สมมาตรกับจุด P	ก-3
รูปที่ ก3	แสดงจุด $P(x,y)$ บนเส้นโค้งที่สมมาตรกับจุดกำเนิด	ก-3
รูปที่ ก4	แสดงเส้นโค้งที่สมมาตรกับแกน X แต่ไม่สมมาตรกับแกน Y	ก-4
รูปที่ ก5	แสดงเส้นโค้งที่สมมาตรกับจุดกำเนิด	ก-5
รูปที่ ก6	แสดงเส้นโค้งที่มีเส้นกำกับคือ $x=2$ และ $y=3$	ก-6
รูปที่ ก7	แสดงกราฟที่มีเส้นกำกับในแนวดิ่ง $x=\pm 2$ และเส้นกำกับในแนวระดับ $y=0$	ก-9
รูปที่ ก8	แสดงกราฟที่มีเส้นกำกับในแนวดิ่ง $x=\pm 2$ และเส้นกำกับในแนวระดับ $y=1$ และ $y=\dfrac{1-\frac{25}{x^2}}{1-\frac{4}{x}}$	ก-10
รูปที่ ก9	แสดงการย้ายแกนจากจุดกำเนิดไปยังจุดพิกัด (h,k)	ก-10
รูปที่ ก10	แสดงกราฟพาราโบลาที่จุดยอด (h,k)	ก-11
รูปที่ ก11	แสดงกราฟพาราโบลาที่จุดยอด (3,1)	ก-12
รูปที่ ก12	แสดงกราฟวงรีที่จุดยอด (-3,-3) และ (7,-3)	ก-13
รูปที่ ก13	แสดงกราฟไฮเพอร์โบลาที่จุดยอด (-9,2) และ (-1,2)	ก-14
รูปที่ ก14	แสดงกราฟวงรีที่จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2,6) และจุดโฟกัสที่ (2,4)	ก-14
รูปที่ ก15	แสดงกราฟที่มีจุดยอด (2,-2) และจุดศูนย์กลาง (2,-5)	ก-15
รูปที่ ก16	แสดงกราฟพาราโบลาที่จุดยอด $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$	ก-18
รูปที่ ก17	แสดงกราฟไฮเพอร์โบลาที่จุดศูนย์กลาง (-3,3)	ก-19
รูปที่ ก18	แสดงการหมุนแกน X และแกน Y ในทิศทวนเข็มนาฬิกา	ก-19
รูปที่ ก19	แสดงกราฟไฮเพอร์โบลาที่ถูกหมุนแกน	ก-25

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ ข1	แสดงภาพทรงกลม	ข-1
รูปที่ ข2	แสดงทรงกระบอกที่มีภาคตัดขวางเป็นวงกลม	ข-3
รูปที่ ข3	แสดงทรงกระบอกที่ภาคตัดขวางอาจเป็นส่วนโค้งใด ๆ	ข-3
รูปที่ ข4	แสดงทรงกระบอกซึ่งมีเส้นโค้ง C เป็นเส้นบังคับและมีเส้นก่อกำเนิดขนานกับเวกเตอร์ A	ข-4
รูปที่ ข5	แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 3	ข-5
รูปที่ ข6	แสดงตัวอย่างรูปพื้นผิวทรงกระบอก	ข-7
รูปที่ ข7	แสดงรูปกรวยซึ่งมีเส้นโค้ง C เป็นเส้นบังคับและจุด V เป็นจุดยอด	ข-8
รูปที่ ข8	แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 4	ข-8
รูปที่ ข9	แสดงกราฟของพื้นผิวที่ได้จากการหมุนเส้นโค้งพาราโบลา $y^2 = 4x + 4,\ z = 0$ รอบแกน X	ข-10
รูปที่ ข10	แสดงแนวโน้มของภาพ เมื่อ k เพิ่มจาก –1 ขึ้นไปอย่างไม่มีขีดจำกัด	ข-13
รูปที่ ข11	แสดงกราฟของพื้นผิว S	ข-14
รูปที่ ข12	แสดงกราฟของพื้นผิว S	ข-17
รูปที่ ข13	แสดงกราฟของพื้นผิว $x^2 + (y-1)^2 - (z-2)^2 = 1$	ข-19
รูปที่ ข14	แสดงกราฟของพื้นผิวทรงรี	ข-21
รูปที่ ข15	แสดงกราฟของพื้นผิวทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นเดียว	ข-23
รูปที่ ข16	แสดงกราฟของพื้นผิวทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	ข-25
รูปที่ ข17	แสดงกราฟของพื้นผิวทรงกรวย	ข-27
รูปที่ ข18	แสดงกราฟของพื้นผิวทรงพาราโบลาเชิงวงรี	ข-29
รูปที่ ข19	แสดงกราฟของพื้นผิวทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา	ข-31

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ ข20 แสดงกราฟไฮเพอร์โบลอยด์ชนิดชิ้นเดียว ซึ่งได้จากสมการ $x^2 - 4y^2 + 3z^2 = 12$ ข-32

รูปที่ ข21 แสดงกราฟทรงพาราโบลาเชิงวงรี ซึ่งได้จากสมการ $x^2 + 5y^2 + 2z = 0$ ข-32

รูปที่ ข22 แสดงกราฟทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น ซึ่งได้จากสมการ $36(x-3)^2 - 16(y+2)^2 - 9(z-3)^2 = 144$ ข-33

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1) ความสำคัญ / ที่มาของปัญหาพิเศษ

ในปัจจุบันนี้ เทคนิคการเขียนโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะสื่อการสอนทางคณิตศาสตร์กำลังได้รับความสนใจและเป็นที่ต้องการเป็นอย่างมาก ซึ่งเราสามารถแบ่งสื่อการสอนออกเป็นหลายระดับตั้งแต่อนุบาล ประถม มัธยม ตลอดจนอุดมศึกษา ทางคณะผู้จัดทำมีความเห็นว่าสื่อการสอนทางคณิตศาสตร์สามารถนำมาประยุกต์ให้สามารถใช้ได้กับสื่อทางด้านอื่น ๆ โดยเฉพาะสื่อทางอินเตอร์เน็ต ซึ่งเป็นสื่อที่นิยมกันอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน ทางคณะผู้จัดทำจึงมีความต้องการที่จะนำเสนองานชิ้นนี้ เพื่อเป็นประโยชน์กับนักเรียนที่ต้องการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องการเขียนกราฟ 2 มิติ และ 3 มิติ ให้มีความเข้าใจในเนื้อหาเรื่องนี้มากยิ่งขึ้น

1.2) วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 ให้นักเรียนมีความเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการเขียนกราฟ 2 มิติ และ 3 มิติมากยิ่งขึ้น

1.2.2 สามารถนำสื่อการสอนนี้ไปใช้ได้อย่างกว้างขวางทางสื่ออินเตอร์เน็ต

1.2.3 สื่อการสอนนี้สามารถใช้งานได้ง่าย และมีความดึงดูดในการใช้งาน

1.3) ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

ขอบเขตของสื่อการสอนจะเน้นเนื้อหาการเขียนกราฟ 2 มิติ และ 3 มิติ เป็นหลัก เพื่อให้นักเรียนที่กำลังศึกษาเรื่องนี้ได้มีความเข้าใจที่ดียิ่งขึ้น

1.4) ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.4.1 ทำการศึกษาเนื้อหาการเขียนกราฟ 2 มิติ และ 3 มิติ

1.4.2 ทำการศึกษาภาษาทางคอมพิวเตอร์ในการใช้เขียนโปรแกรม

1.4.3 ทำการศึกษาภาษาที่สามารถนำไปเขียนบนอินเตอร์เน็ต

1.4.4 ทำการเขียนโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4.5 ทำการทดสอบและทำการแก้ไขโปรแกรมที่เขียนให้มีความถูกต้อง และสามารถใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1.4.6 ทำการรวบรวมข้อมูลและนำมาจัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

1.5) การวางแผนงาน

รายการ	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.
1.5.1 ศึกษาปัญหาและที่มาของปัญหาพิเศษ รวมถึงการจัดทำแบบอนุมัติทำปัญหาพิเศษ									
1.5.2 ศึกษาเครื่องมือ โปรแกรม ขอบเขต และความเป็นไปได้ที่จะทำ									
1.5.3 ศึกษาโปรแกรมที่ใช้ ค้นคว้าเอกสารอ้างอิง รวบรวมข้อมูล และออกแบบโครงร่างโปรแกรม									
1.5.4 ออกแบบโครงร่างโดยรวม									
1.5.5 ออกแบบหน้าจอบนอินเตอร์เน็ต และ Application ของการเขียนกราฟ									
1.5.6 เขียนโปรแกรมการเขียนกราฟและรวบรวมโปรแกรมลงในอินเตอร์เน็ต									
1.5.7 ทดสอบ, แก้ไขโปรแกรม และสรุปโครงงานปัญหาพิเศษ									
1.5.8 จัดทำเอกสารประกอบโครงงานปัญหาพิเศษ									

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6) อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1.6.1 Pentium II 266 MHz

1.6.2 Ram 64 MB

1.6.3 HDD 3.2 GB

1.6.4 Lan Card

1.6.5 External Modem 56 K

1.6.6 Windows 95 ,98 or NT

1.6.7 Laser Printer

1.6.8 High Density Disk 1.44 MB 6 boxes

1.6.9 Paper size A4 6 Packs

1.7) ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.7.1 ประโยชน์ในด้านผู้ใช้งานโปรแกรม

1.7.1.1 ได้โปรแกรมสื่อการสอนทางคณิตศาสตร์บนสื่ออินเตอร์เน็ต

1.7.1.2 สามารถพัฒนาระบบสื่อการสอนทางคณิตศาสตร์ให้มีความทันสมัยมากยิ่งขึ้น

1.7.1.3 สื่อการสอนนี้สามารถให้ความรู้ความเข้าใจ ในเรื่องการเขียนกราฟ 2 มิติ และ 3 มิติ กับนักเรียนได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง

1.7.2 ประโยชน์ในด้านผู้จัดทำ

1.7.2.1 ได้นำความรู้ทางคณิตศาสตร์และทางด้านคอมพิวเตอร์ที่ได้เรียนมาประ - ยุกต์ใช้ เพื่อให้เกิดความชำนาญมากขึ้น

1.7.2.2 มีความเข้าใจและมีการพัฒนาความคิดเกี่ยวกับสื่อการสอนผ่านเครือข่ายอินเตอร์เน็ตเพิ่มมากขึ้น

1.8) งบประมาณที่คาดว่าจะใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักเกณฑ์ที่เกี่ยวข้อง

2.1) CAI (Computer Aided Instruction)

กระบวนการเรียนการสอนคือ การสื่อสารข้อมูลระหว่างผู้สอนและผู้เรียน เมื่อผู้เรียนได้รับรู้ข้อมูลแล้ว ก็แสดงว่ามีการเรียนรู้เกิดขึ้น ซึ่งในปัจจุบันนี้กระบวนการเรียนการสอนได้พัฒนามากขึ้น โดยมีการนำคอมพิวเตอร์มาช่วยสอน หรือที่เรารู้จักกันว่า "CAI" ซึ่งได้เริ่มมีคนให้ความสนใจ และในขณะเดียวกัน การที่ไมโครคอมพิวเตอร์ราคาถูกลงมาก ขนาดเล็กลงและสามารถทำการเคลื่อนย้ายได้สะดวก จึงมีการนำคอมพิวเตอร์ไปใช้ในสถาบันการศึกษามากขึ้น ทำให้เกิดการพัฒนาของโปรแกรม "CAI" มีมากขึ้นด้วย

2.1.1 ความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI)

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนหมายถึง การนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอน การทบทวน การทำแบบฝึกหัด หรือการวัดผล นักเรียนแต่ละคนจะได้นั่งอยู่หน้าไมโครคอมพิวเตอร์แต่ละเครื่อง และทำการเรียกโปรแกรมสำเร็จรูปที่จัดเตรียมไว้เป็นพิเศษสำหรับการสอนวิชานั้น ๆ ขึ้นมาบนจอภาพ โดยปกติ จอภาพจะแสดงเรื่องราวเป็นคำอธิบาย หรืออาจแสดงเป็นรูปภาพ ซึ่งผู้เรียนจะต้องอ่านดู แต่ละคนจะใช้เวลาทำความเข้าใจไม่เท่ากัน จึงมีการทดสอบความรู้ด้วยการป้อนคำถามหรือการให้ทำแบบฝึกหัด และมีการตรวจสอบคำตอบให้ประเมินผลการเรียนบนคอมพิวเตอร์ทันที ซึ่งมีส่วนช่วยทำให้การเรียนการสอนน่าสนใจและสนุกสนานมากขึ้น รวมถึงได้วิเคราะห์หัวข้อที่สอนไปด้วยว่า บทเรียนที่เตรียมไว้นั้นมีความยากง่ายเกินไปหรือไม่และนักเรียนมีความเข้าใจในบทเรียนมากน้อยเพียงใด

2.1.2 ประเภทคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

วิธีการและประเภทงานการสอนที่ใช้กับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีดังนี้

2.1.2.1 **การฝึกทักษะและการทำแบบฝึกหัด** (Drill) วิธีนี้เป็นวิธีที่รู้จักกันดีมาตั้งแต่เริ่มแรก โดยมักจะเริ่มด้วยการเตรียมเนื้อหามาให้อ่าน แล้วใช้แบบฝึกหัดเป็นการวัดความเข้าใจ ทบทวน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และช่วยเพิ่มพูนความรู้ หรือความชำนาญ แต่แบบฝึกหัดในลักษณะนี้มักจะเป็นบทเรียนสั้น ๆ ที่นิยมกันมาก คือการเลือกข้อที่ถูกจากตัวเลือก 3-5 ตัว

2.1.2.2 **การเจรจา** (Dialogue) วิธีนี้ได้รับความนิยมมากเช่นกันถึงแม้ว่าวิธีการทำจะค่อนข้างยุ่งยาก กล่าวคือ พยายามให้เป็นการพูดคุยระหว่างผู้สอนกับผู้เรียน โดยเลียนแบบการสอนในห้องเรียน เพียงแต่ว่าแทนที่จะเป็นเสียงก็เป็นตัวอักษรบนจอภาพ แล้วมีการสอนด้วยการตั้งปัญหาถาม ลักษณะในการใช้แบบสอบถามก็เป็นการแก้ปัญหาอย่างหนึ่ง เช่น บทเรียนวิชาเคมี อาจถามหาสารเคมีบางชนิด ผู้เรียนอาจโต้ตอบด้วยการใส่ชื่อสารเคมีให้เป็นคำตอบ

2.1.2.3 **การจำลองสภาพ** (Simulation) วิธีการนี้เป็นการเสนอปรากฏการณ์ที่จำลองมาจากของจริง เพราะบางทีประสบการณ์จริงอาจเสี่ยงเกินไป เช่นการเรียนขับรถ ขับเครื่องบิน โดยการจำลองแบ่งเป็น 3 ลักษณะ คือ

- *การจำลองมีสถานะแบบการทำงาน (Task performance simulation)* เช่น การขับรถ
- *การจำลองสภาพแบบจำลองระบบ (System modeling simulation)* เช่น จำลองระบบจัดการจราจรวันเวย์ในนครหลวงดูว่า จะมีปัญหาอย่างไร ก่อนจะลงมือทำบนถนนจริง ๆ
- *การจำลองสภาพแบบประสบการณ์ (Experience encounter simulation)* เช่น การลองให้ผู้ฝึกงานได้ทดลองทำงานบางอย่าง หรือ ตัดสินใจในบางเรื่อง การทำจริง ๆ อาจยังไม่เกิด แต่ผู้เรียนจะได้เรียนรู้จากการจำลองสภาพว่า ประสบการณ์ของตนจะเป็นอย่างไร ถ้าอยู่ในสถานการณ์เช่นนั้น ทำให้คิดได้ล่วงหน้าว่า ควรพิจารณาปัจจัยอะไรบ้าง และมีความคิดเห็นอย่างไร

2.1.2.4 **เกมส์** (Games) การเรียนรู้จากการเล่น เป็นเรื่องที่เป็นที่ยอมรับกันมานานแล้ว การเล่นเกมส์เป็นกิจกรรมที่ให้ความสนุกสนาน และหากเลือกเล่นให้เป็นแล้ว เกมส์นั้นจะช่วยในการเรียนรู้เป็นอย่างมาก โรงเรียนบางแห่งจึงนำเกมส์มาเล่นในโรงเรียน โดยเห็นว่ามีคุณค่าทางการศึกษา

2.1.2.5 **การแก้ปัญหาต่าง ๆ** (Problem solving) เป็น CAI ประเภทหนึ่ง จะเน้นให้ฝึกการคิด การตัดสินใจ โดยมีการกำหนดเกณฑ์ให้ แล้วให้ผู้เรียนพิจารณาไปตามเกณฑ์ มีการให้คะแนน เป็นต้น

2.1.3 วิธีการสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การทำ CAI นั้น ควรจะทำเป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่สมบูรณ์ โดยนำรายละเอียดเกี่ยวกับการเรียนมารวมไว้ และควรพิจารณาเรื่องส่วนต่าง ๆ ของคอมพิวเตอร์ประกอบด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.3.1 เลือกคอมพิวเตอร์ให้เหมาะสมกับความต้องการ เช่น ขนาดของหน่วยความจำว่าใหญ่พอที่จะใช้กับ CAI ที่กำลังจะทำหรือไม่ หากต้องทำกราฟ มีภาพ ต้องดูว่าคอมพิวเตอร์สามารถทำได้หรือไม่ จอภาพต้องการให้เป็นสีหรือไม่ ความเร็วในการแสดงผลต้องการให้เร็วเพียงใด หน่วยความจำสำรองเป็นชนิดใดราคาถูกหรือแพง

2.1.3.2 ซอฟต์แวร์ที่จะทำจะใช้ภาษาอะไร ใช้ได้กับระบบคอมพิวเตอร์ที่มีหรือไม่ มีลักษณะของ CAI ที่ดีครบถ้วนหรือเปล่า และหากจะใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่มีขาย ก็ควรคำนึงถึงเนื้อหาว่าตรงกับที่ต้องการหรือไม่

2.1.3.3 ในกรณีลงมือทำโปรแกรมเอง ควรวิเคราะห์เนื้อหารายวิชาแต่ละวิชาให้ดีเสียก่อน โดยทำเป็นขั้นตอน ดังนี้

- แบ่งเนื้อหาทั้งหมดของวิชาที่จะเรียนเป็นขั้นตอนให้ดี ศึกษาถึงวัตถุประสงค์และจุดมุ่งหมายของการเรียนวิชานั้น ๆ
- กำหนดขั้นตอนเรียบร้อยแล้วจัดแบ่งเป็นหัวข้อ แสดงเป้าหมายของการเรียนหัวข้อนั้น ๆ ให้เด่นชัด
- ถ้าหัวข้อนั้นกว้างเกินไป แบ่งซอยให้เป็นหัวข้อย่อย ๆ เพราะบทเรียนแต่ละบทไม่ควรยาวเกินไปนัก
- กำหนดรูปแบบของการพัฒนาแต่ละหัวข้อ ว่าจะทำการสอนในรูปแบบใด แก้ปัญหา หรือเสนอเรื่องให้อ่านแล้วตอบคำถามหรือสร้างภาพจำลองให้แก้ไข
- การออกแบบ CAI ควรให้ผู้เรียนเลือกคำถามด้วยวิธีการสุ่ม จำนวนคำถามควรมีมาก ๆ ผู้เรียนแต่ละคนจะได้ตอบคำถามนี้โดยไม่ซ้ำกัน และต้องมีการเฉลยคำตอบที่ถูกไว้ให้ด้วย
- เขียนโปรแกรมให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ เลือกภาษาที่ใช้ให้เหมาะกับเครื่อง
- หลังจากทำเสร็จแล้ว ต้องนำไปให้ผู้เรียนทดลองเก็บข้อมูลมาเป็นแนวที่จะใช้แก้ไข
- เสร็จแล้วต้องมีคู่มือวิธีการใช้ให้ละเอียด และชัดเจน เพื่อคนรุ่นหลังมาใช้จะได้ไม่เกิดปัญหา

2.1.4 ประโยชน์ของ CAI

2.1.4.1 CAI ทำให้ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสูงขึ้น แม้จะมีบางแห่งไม่แสดงความแตกต่างมากนัก เมื่อเทียบกับการเรียนในห้องเรียน

2.1.4.2 CAI จะลดเวลาเรียนลง เมื่อเทียบกับการเรียนในห้องเรียน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.4.3 **ผู้เรียนจะสนใจการเรียนมากขึ้น** เมื่อเรียนด้วย CAI

2.1.4.4 **พัฒนาการของ CAI เท่าที่เป็นมา เป็นที่ยอมรับมากในวงการศึกษา**

2.1.4.5 **ผู้เรียนค่อนข้างช้าจะมีผลมาก** เพราะสามารถทำความเข้าใจได้ตามต้องการ ทำให้มีความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น

2.2) ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับอินเตอร์เน็ต

2.2.1 อินเตอร์เน็ตคืออะไร

เราสามารถสรุปความหมายของอินเตอร์เน็ตได้ดังต่อไปนี้

1. ระบบเครือข่ายที่มีขนาดใหญ่ที่สุดในปัจจุบัน
2. ระบบเครือข่ายที่ใช้โปรโตคอล TCP/IP ในการติดต่อสื่อสาร
3. เครื่องมือสื่อสารที่มีขอบเขตความสามารถสูง สามารถส่งข้อมูลได้หลายประเภท ทั้งตัวอักษร ภาพ และเสียง
4. กลุ่มของโฮสต์ทั่วโลกที่อาจจะอยู่ในสภาวะแวดล้อมที่แตกต่างกัน เช่น ขนาดต่างกัน ความเร็วต่างกัน ประสิทธิภาพต่างกัน ต่างชนิดกัน รวมถึงต่ออยู่บนเครือข่ายท้องถิ่นที่ต่างระบบกัน แต่เชื่อมโยงถึงกันและสามารถแลกเปลี่ยนข้อมูลซึ่งกันและกันได้

2.2.2 ประวัติความเป็นมาของอินเตอร์เน็ต

อินเตอร์เน็ตเริ่มต้นด้วยการจัดเครือข่ายขึ้นมาใหม่ในประมาณปี พ.ศ. 2512 โดยมีคอมพิวเตอร์เพียง 4 เครื่อง ซึ่งมีสถานที่ตั้งของแต่ละเครื่องคือ มหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนีย (ซานตาบาบารา) มหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนีย (ลอสแองเจลลิส) มหาวิทยาลัยยูทาห์ และมหาวิทยาลัยสแตนฟอร์ด และตั้งชื่อระบบเครือข่ายนี้ว่า อาร์พาเน็ต (*ARPANET : Advance Research Projects Agency NETwork*) โดยมีจุดประสงค์เพื่อใช้ในกิจการทหารของกระทรวงกลาโหม สหรัฐอเมริกา

อาร์พาเน็ต เป็นการสร้างระบบเครือข่ายที่มีการส่งข้อมูลอย่างถูกต้องมากที่สุด การเชื่อมโยงของเครื่องคอมพิวเตอร์ในระบบจะมีมากกว่า 1 เส้นทาง ข้อมูลที่ส่งจะถูกแบ่งเป็นส่วนเล็ก ๆ และแต่ละส่วนก็ไม่จำเป็นต้องใช้เส้นทางเดียวกัน เมื่อผลที่ได้เป็นที่น่าพอใจ จึงได้มีการรวบรวมมหาวิทยาลัยอื่น ๆ และสถาบันวิจัยต่าง ๆ อีกกว่า 50 แห่งเข้ามาในระบบเครือข่ายนี้ โปรโตคอลที่ใช้ในเบื้องต้นได้แก่ โปรโตคอล NCP (Network Control Protocol) ซึ่งมีปัญหาคือ ไม่สามารถทำงานกับจำนวนโฮสต์มาก ๆ ได้ และเพื่อเป็นการรองรับการขยายตัวของอาร์พาเน็ตขณะนั้น จึงได้มีการค้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คว้าโปรโตคอลชนิดใหม่ขึ้น นั่นคือ โปรโตคอล TCP/IP (Transmission Control Protocol/Internet Protocol) ซึ่งถูกนำออกมาใช้งานประมาณปี พ.ศ. 2525

หลังจากนั้นหน่วยงาน NSF (National Science Foundation) ได้จัดตั้งระบบเครือข่ายซึ่งมีชื่อว่า *NSFNET* ในปี พ.ศ. 2529 โดยมีซูเปอร์คอมพิวเตอร์ที่เชื่อมต่อกันทั้งหมด 5 เครื่อง เพื่อใช้ในการวิจัยทางด้านวิทยาศาสตร์ และที่สำคัญระบบนี้ได้ใช้โปรโตคอล TCP/IP เช่นเดียวกัน ทำให้จำนวนผู้ใช้งานในระบบทั้งสองเพิ่มมากขึ้น ต่อมา *NSFNET* และ *ARPANET* จึงรวมเข้าด้วยกันในปี พ.ศ. 2530 นอกจากนี้ยังมีเครือข่ายอื่น ๆ ซึ่งเกิดขึ้นตามมา เช่น *UUNET* *BITNET* *CSNET* และ *UUCP* โดยใช้โปรโตคอล TCP/IP ในการติดต่อเช่นเดียวกัน จากนั้นได้รวมเข้าด้วยกันโดยมี *NSFNET* เป็นเครือข่ายหลัก (Backbone)

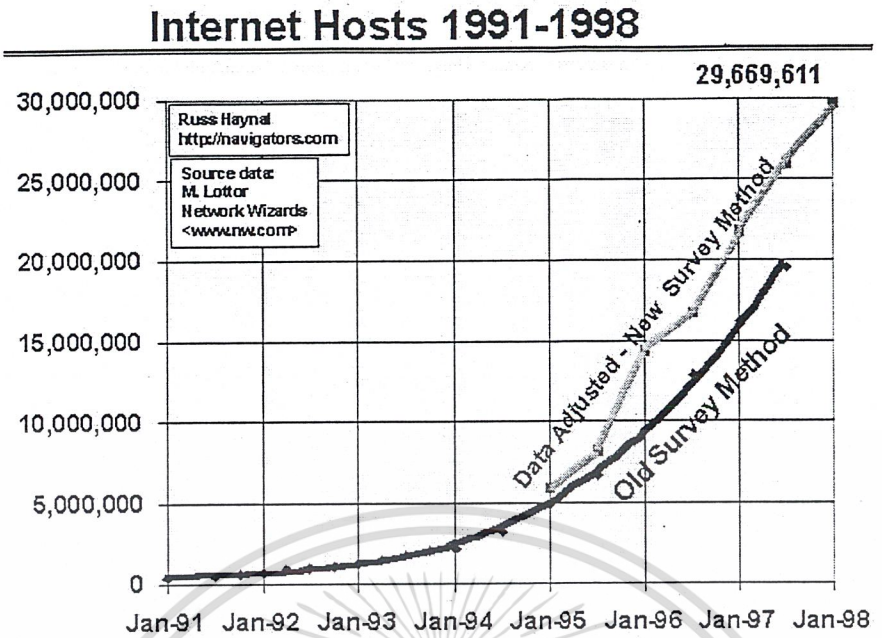
เนื่องจากงบประมาณที่มีจำกัดของ NSF ทำให้ขีดความสามารถของเครือข่ายหลักต่ำและมีการพัฒนาที่ช้า จึงได้มีหน่วยงานอื่น ๆ โดยเฉพาะหน่วยงานเอกชนบางแห่ง รวมตัวกันจัดตั้งเป็นเครือข่ายหลักขึ้นมาใหม่ เช่น CIX (Commercial Internet Exchange) เป็นต้น ทำให้ NSFNET ถูกลดบทบาทลง ดังนั้น NSF จึงหันมาร่วมมือกับ บริษัท IBM บริษัท MCI และมหาวิทยาลัยมิชิแกน ในปี พ.ศ. 2533 ตั้งเป็นบริษัทใหม่ขึ้น โดยใช้ชื่อว่า ANS (Advance Network and Service Inc.) เพื่อให้สามารถดำเนินการในเชิงพาณิชย์ได้ดียิ่งขึ้น

ปัจจุบันเรารู้จักระบบเครือข่ายเหล่านี้ในชื่อว่า อินเตอร์เน็ต (Internet) ซึ่งประกอบด้วยเครือข่ายหลักหลายแห่ง เช่น NSFNET CIX NSI (NASA Science Internet) EBONE (European IP Backbone) และ SprinLink เป็นต้น และมีโฮสต์ที่เชื่อมต่ออยู่มากกว่าสิบล้านเครื่องทั่วโลก เป็นแหล่งข้อมูลขนาดใหญ่ที่สามารถเข้าถึงได้จากทั่วทุกมุมโลก และเป็นสื่อในการติดต่อสื่อสารซึ่งถือว่ามีราคาถูกที่สุดในปัจจุบัน

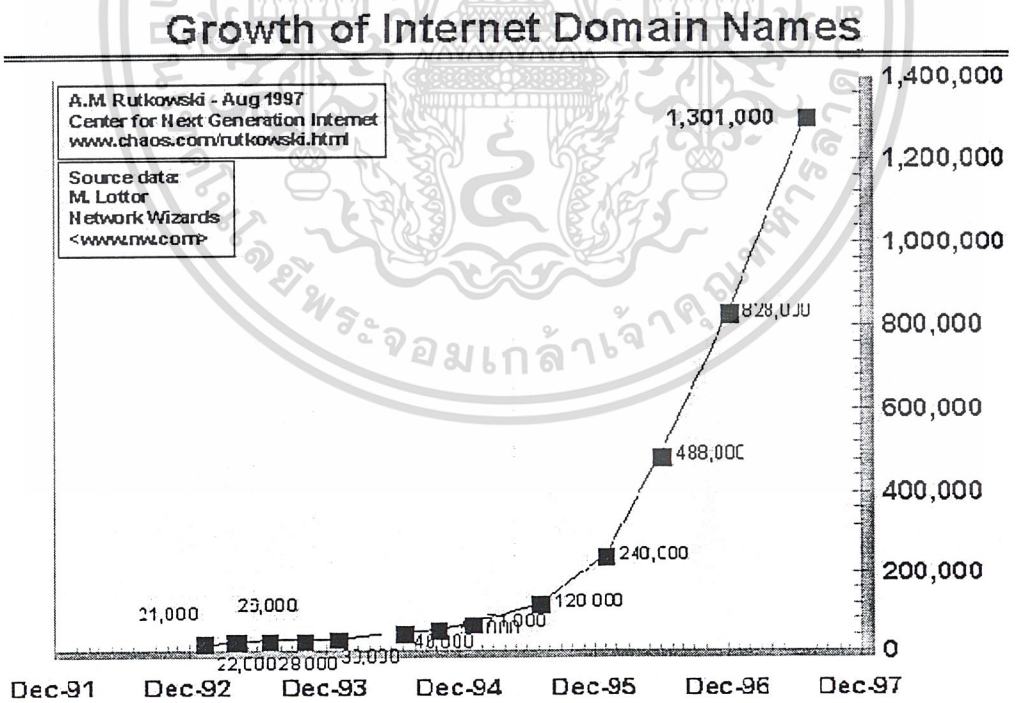
2.2.3 สถานภาพของอินเตอร์เน็ตในปัจจุบัน

ในปัจจุบัน อินเตอร์เน็ตได้กลายมาเป็นเทคโนโลยีการติดต่อสื่อสารที่มีความสามารถหลากหลายรูปแบบ มีประสิทธิภาพสูง และมีค่าใช้จ่ายที่ต่ำกว่าการสื่อสารชนิดอื่น ๆ อีกทั้งในระบบอินเตอร์เน็ตยังเป็นแหล่งรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ มากมาย ทำให้อินเตอร์เน็ตขยายตัวอย่างรวดเร็ว มีผู้ขอเข้าใช้งานมากขึ้น ไม่ว่าจะเป็นในรูปแบบธุรกิจ หน่วยงาน บริษัท ห้างร้านต่าง ๆ หรือแม้แต่ส่วนบุคคล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

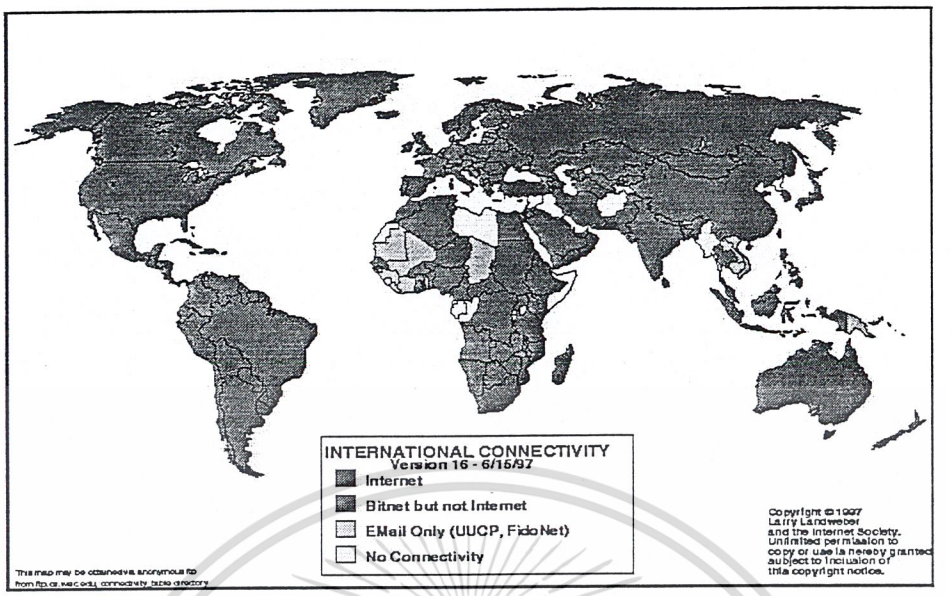


รูปที่ 2.1 แสดงจำนวนโฮสต์ที่ต่อเข้าสู่อินเตอร์เน็ต
ตั้งแต่เดือนมกราคม 2534 ถึงเดือนมกราคม 2541
(ที่มา http://navigators.com)



รูปที่ 2.2 แสดงจำนวนชื่อโดเมนที่ใช้ในระบบอินเตอร์เน็ต
ตั้งแต่เดือนธันวาคม 2534 ถึงเดือนธันวาคม 2540
(ที่มา http://www.nsf.net/nsfnet/statistics/history.hosts)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.3 แสดงพื้นที่ที่มีการใช้งานอินเตอร์เน็ต

(ที่มา http://ftp.cs.wisc.edu/connectivity_table/Connectivity_Map_color.bmp)

จะเห็นว่า ปัจจุบันอินเตอร์เน็ตได้ขยายตัวอย่างรวดเร็ว ทั้งจำนวนโฮสต์ที่ต่อเชื่อม จำนวนผู้ใช้ และจำนวนชื่อโดเมน อินเตอร์เน็ตได้กระจายอยู่แทบจะทั่วทุกมุมโลก ซึ่งช่วยในการแลกเปลี่ยนข่าวสารระหว่างกันได้โดยง่ายและรวดเร็วแต่โดยเนื้อแท้แล้วอินเตอร์เน็ตเป็นทั้งเครือข่ายของคอมพิวเตอร์และเครือข่ายของเครือข่าย เพราะอินเตอร์เน็ตประกอบด้วยเครือข่ายย่อยเป็นจำนวนมากต่อเชื่อมเข้าด้วยกัน ภายใต้มาตรฐานเดียวกันจนเป็นสังคมเครือข่ายขนาดใหญ่ อินเตอร์เน็ตทำงานภายใต้ระบบปฏิบัติการยูนิกซ์ (UNIX) โดยมีตัวที่ใช้สำหรับช่วยในการสื่อความหมายระหว่างคอมพิวเตอร์ 2 เครื่องที่ต่างกันและคนละที่กันซึ่งเรียกว่า โปรโตคอล ที่นิยมคือ TCP/IP จากรูปข้างต้น มีบริการต่าง ๆ มากมายที่เตรียมไว้สำหรับผู้เข้าใช้ระบบ ตัวอย่างเช่น จดหมายอิเลคทรอนิกส์ (E-mail : Electronic mail) การสนทนาออนไลน์ ไม่ว่าจะเป็น ทอล์ก (talk) หรือ IRC (Internet Relay Chat) ซึ่งสามารถสนทนากันเป็นกลุ่มได้ การส่งข่าวผ่านทางกลุ่มนิวส์กรุ๊ปต่าง ๆ การถ่ายโอนข้อมูล (ftp) ซึ่งอาจจะเป็นการอัพโหลดหรือดาวน์โหลด การขอเข้าใช้เครื่อง (telnet) และการค้นหาข้อมูลผ่านเครื่องผู้ให้บริการในรูปแบบต่าง ๆ เช่น Archie Gopher Hytelnet WAIS (Wide Area Information Service) และที่ขาดไม่ได้คือ World Wide Web (WWW) ซึ่งจัดได้ว่ามีผู้เข้าใช้บริการลักษณะนี้มากที่สุด เป็นแหล่งข้อมูลและแหล่งธุรกิจแห่งใหม่ที่สำคัญในปัจจุบัน สามารถสั่งสินค้า ซื้อสินค้า รวมถึงจ่ายเงินผ่านหน้าจอซึ่งเรียกว่า “โฮมเพจ” ได้ และยังเป็นแหล่งโฆษณาขนาดใหญ่ที่มีผู้คนเข้าดูไม่น้อยกว่าสื่อชนิดอื่น ๆ ทำให้ปัจจุบัน ผู้ประกอบธุรกิจต่าง ๆ มีการตื่นตัวจัดทำโฮมเพจกันมากขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การรับส่งข้อมูลในปัจจุบันยังช้าอยู่มาก เนื่องจากขีดจำกัดของอุปกรณ์ต่อเชื่อม ความเร็วของสายสื่อสาร และจำนวนผู้ใช้ซึ่งมีจำนวนมาก ทำให้การส่งข้อมูลบางประเภทที่มีขนาดใหญ่ โดยเฉพาะภาพและเสียง เป็นไปได้ไม่ดีนัก อีกทั้งการใช้งานบางประเภทที่ต้องอาศัยเวลาจริง (Real Time) คือ ไม่มีการพักข้อมูลที่ได้รับมาในดิสก์ก่อน เช่นการดูวีดีโอผ่านอินเตอร์เน็ต การใช้อินเตอร์เน็ตโฟน และการฟังรายการวิทยุผ่านอินเตอร์เน็ต ยังมีคุณภาพไม่ดีนัก เนื่องจากข้อมูลที่ส่งผ่านสายเข้ามาไม่ได้ต่อเนื่องกันตลอด ดังนั้นในปัจจุบัน หน่วยงานที่เกี่ยวข้องต่าง ๆ จึงได้เร่งเพิ่มความเร็วของสายสื่อสาร และอุปกรณ์ที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้การใช้งานอินเตอร์เน็ตในรูปแบบกราฟฟิคและเสียงเป็นไปได้เต็มรูปแบบยิ่งขึ้น

ในด้านของกฎหมายในการใช้งานอินเตอร์เน็ต ปัจจุบันยังไม่มีกฎหมายที่จะมาควบคุมการใช้งาน และการประกอบธุรกิจบนอินเตอร์เน็ตโดยตรง ทำให้มีธุรกิจบางประเภทที่ประกอบการมิชอบด้วยศีลธรรมเกิดขึ้นมากมาย และยากที่จะควบคุมได้ อีกทั้งการที่จะออกกฎหมายใดขึ้นมาควบคุมยังคงเป็นเรื่องที่ยากในระบบที่เปิดกว้าง และยังไม่มีการแบ่งแยกอาณาเขตของแต่ละประเทศในอินเตอร์เน็ตเช่นปัจจุบันนี้

2.2.4 อินเตอร์เน็ตสำคัญอย่างไร

หลายประเทศทั่วโลกกำลังให้ความสนใจกับเทคโนโลยีสารสนเทศ (Information Technology) หรือเรียกโดยย่อว่า "ไอที" ซึ่งหมายถึงความรู้ในวิธีการประมวลผล จัดเก็บรวบรวม เรียกใช้และนำเสนอข้อมูลด้วยวิธีการทางอิเลคทรอนิกส์

อินเตอร์เน็ตนับเป็นเครื่องมือสำคัญอย่างหนึ่งในการประยุกต์ใช้ไอที การที่เราจำเป็นต้องอาศัยข้อมูลข่าวสารในการทำงานประจำวัน อินเตอร์เน็ตจึงเป็นแหล่งข่าวที่ทันสมัยและช่วยให้รับรู้ข่าวสารที่เกิดขึ้นในมุมอื่น ๆ ของโลกได้อย่างรวดเร็วกว่าสื่ออื่น ไม่ว่าจะเป็นหนังสือพิมพ์ วิทยุ หรือแม้แต่โทรทัศน์

2.2.5 ใครเป็นผู้ดูแลอินเตอร์เน็ต

การเชื่อมต่อเข้าเป็นอินเตอร์เน็ต อาศัยการบริหารแบบกระจายอำนาจ อินเตอร์เน็ตจึงไม่มีใครเป็นเจ้าของหรือควบคุมดูแลอย่างแท้จริง แต่ในทางปฏิบัติแล้ว มีองค์การระหว่างประเทศที่จัดตั้งขึ้นเพื่อประสานความร่วมมือระหว่างสมาชิก องค์การนี้ได้แก่ ISOC หรือสมาคมอินเตอร์เน็ต (Internet Society) ไอซอคเป็นองค์การเพื่อความร่วมมือและประสานงานของสมาชิก ทำหน้าที่พัฒนามาตรฐาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเทคโนโลยีเพื่อใช้ในอินเตอร์เน็ต ทุก ๆ ปี ไอซอคจะจัดประชุมอินเตอร์เน็ตที่เรียกว่า INET และออกวารสาร Internet Society News รายสามเดือนให้แก่สมาชิก

2.2.6 ชื่อต่าง ๆ ในอินเตอร์เน็ต

อินเตอร์เน็ตประกอบไปด้วยเครือข่ายย่อย ๆ จำนวนมากต่อเชื่อมเข้าด้วยกันอีกเป็นจำนวนมากจนกลายเป็นเครือข่ายมหึมา เครือข่ายย่อยในอินเตอร์เน็ตมักเป็นเครือข่ายย่อยเฉพาะบริเวณ (Local Area Network) ที่อาจใช้เทคโนโลยีทางฮาร์ดแวร์แตกต่างกันไป แต่ซอฟแวร์ในเครือข่ายอาจจะทำงานภายใต้หลักสากล ทำให้ทุกเครือข่ายสามารถแลกเปลี่ยนและส่งผ่านข้อมูลระหว่างกันได้

2.2.7 ชื่อเครื่อง

ภายในอินเตอร์เน็ตมีวิธีแยกแยะเครื่องแต่ละเครื่องโดยการกำหนดชื่อเรียก คอมพิวเตอร์ทุกเครื่องที่ต่ออยู่ในอินเตอร์เน็ตจะต้องมีชื่อที่ไม่ซ้ำกัน ชื่อเครื่องหรือที่เรียกว่า ชื่อโฮสต์ (host name) มีวิธีเขียนเป็นมาตรฐาน เช่น chaokhun.kmitl.ac.th เป็นเครื่อง chaokhun ที่สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ชื่อจะแบ่งออกเป็นส่วน ๆ โดยมีเครื่องหมายจุดเป็นตัวแบ่ง

2.2.8 ที่อยู่ทางอิเลคทรอนิกส์

หากนำชื่อเครื่องมาประกอบกับรหัสประจำตัวของผู้ใช้ซึ่งเรียกว่า account name ก็จะกลายเป็นที่อยู่ประจำตัวของผู้ใช้อินเตอร์เน็ต ซึ่งใช้สำหรับการรับส่งจดหมายอิเลคทรอนิกส์ได้ เช่น s8054122@kmitl.ac.th คือผู้ใช้ที่มีบัญชีชื่อ s8054122 บนเครื่อง kmitl.ac.th ส่วนหลังของสัญลักษณ์ @ เรียกว่า โดเมน (Domain) ที่อยู่ทางอิเลคทรอนิกส์มีรูปแบบดังนี้คือ ชื่อบัญชีผู้ใช้@โดเมน ที่อยู่ตามนี้เรียกว่า FQDN (Fully – Qualified Domain Name) ถือว่าอักษรตัวเล็กตัวใหญ่ไม่มีความสำคัญ

2.2.9 เลขที่อยู่ไอพี

ในการติดต่อสื่อสารที่เกิดขึ้นจริง คอมพิวเตอร์จำเป็นต้องใช้เลขที่อยู่ประจำเครื่องในรูปแบบของรหัสตัวเลข โฮสต์ทุกเครื่องที่ต่อเชื่อมเข้ากับอินเตอร์เน็ตจึงต้องมีหมายเลขประจำตัวที่ไม่ซ้ำกับเครื่องอื่นใด เช่น โฮสต์ chaokhun.kmitl.ac.th มีหมายเลขประจำเครื่องคือ 161.246.10.21 เลขนี้เรียกว่า เลขที่อยู่ไอพี (IP Address) หรือเลขที่อยู่อินเตอร์เน็ต (Internet Address) เลขที่อยู่ไอพี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประจำเครื่องคอมพิวเตอร์ในอินเตอร์เน็ตทุกเครื่องมีขนาด 32 บิต การเขียนเลขที่อยู่นิยมเขียนแยกออกเป็นส่วน ๆ ละ 8 บิต แต่ละส่วนจึงมีค่าไม่เกิน 255 และเขียนเรียงต่อกันไปโดยใช้เครื่องหมายจุดคั่นระหว่างตัวเลข

2.3) การติดต่อสื่อสารกันบนระบบอินเตอร์เน็ต

2.3.1 เวิร์ลด์-ไวด์-เว็บ (World-Wide-Web)

บริการต่าง ๆ ในระบบอินเตอร์เน็ตในปัจจุบันนี้มีบริการที่ทันสมัย และมีผู้ใช้บริการมากกว่าบริการอื่น ๆ บนอินเตอร์เน็ตคือ World-Wide-Web ด้วยเหตุที่ว่า บริการนี้เป็นบริการที่ใช้งานง่าย มีการติดต่อกับผู้ใช้แบบกราฟฟิค (Graphic User Interface) สามารถแสดงรูปภาพได้ ทั้งที่เป็นภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว และแม้กระทั่งเสียง หากเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้มีระบบมัลติมีเดีย

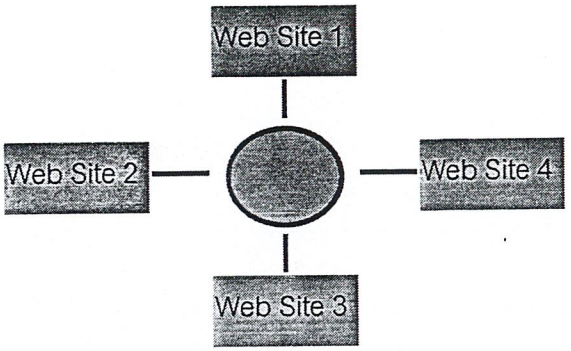
ในการทำงานของ World-Wide-Web นั้น ใช้การติดต่อที่โยงใยกันทั่วโลกถึงทุกเครื่องทั่วโลกที่อยู่บนเครือข่ายอินเตอร์เน็ต ลักษณะการเชื่อมโยงกันนี้ ถูกเปรียบเทียบกับการโยงใยของแมงมุม จึงใช้คำว่า Web ส่วนการเชื่อมโยงเป็นเครือข่ายขนาดใหญ่ ติดต่อกันได้ไม่จำกัดระยะทาง ก็มีการกำหนด คำว่า World-Wide ขึ้นมานั่นเอง

ระบบเว็บจะมีการทำงานหลัก 2 ส่วนคือ *ส่วนที่ให้บริการ* หรือเว็บเซิร์ฟเวอร์ ได้แก่ เครื่องคอมพิวเตอร์ของศูนย์บริการที่เราสมัครเป็นสมาชิกอินเตอร์เน็ต และ*ส่วนขอใช้บริการ* คือ เครื่องที่เราใช้ติดต่อเข้าสู่ระบบอินเตอร์เน็ต ซึ่งทั้งสองส่วนจะติดต่อสื่อสารกันผ่านโปรโตคอล HTTP (HyperText Transfer Protocol) ดังนั้นเวลาเราป้อนชื่อเว็บไซต์ที่ต้องการเข้าไปดูข้อมูลจึงต้องมี HTTP นำหน้า

2.3.2 เว็บไซต์ (Web Site)

เรามักได้ยินคำพูดว่า "เว็บไซต์" อยู่บ่อย ๆ ซึ่งก็คือตำแหน่งที่อยู่ของผู้ที่มีเว็บเพจของตัวเองบนระบบอินเตอร์เน็ต ซึ่งได้จากการลงทะเบียนกับผู้ให้บริการเช่าพื้นที่บนระบบอินเตอร์เน็ต เมื่อได้ลงทะเบียนแล้ว ก็สามารถจัดทำเว็บเพจ และส่งให้ศูนย์บริการนำขึ้นไปไว้บนอินเตอร์เน็ต ก็จะทำให้ผู้อื่นสามารถเข้ามาดูข้อมูลของเราได้ นอกจากนั้นยังมีบริการเสริมอีกหลายด้าน เช่น บริการรับ-ฝากข้อความ เป็นต้น จะเห็นว่าการใช้งานผ่านอินเตอร์เน็ต มีประโยชน์และคุ้มค่ามาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.4 แสดงการเข้าชมข้อมูลของแต่ละเว็บไซต์

2.3.3 โฮมเพจ (Home Page)

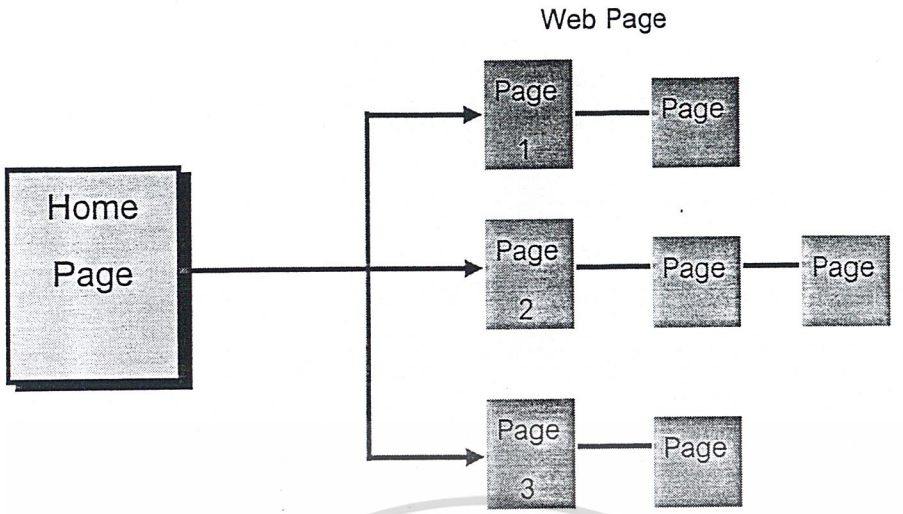
เมื่อต้องการจะไปที่ใดในระบบอินเตอร์เน็ตก็แล้วแต่ เพียงแต่พิมพ์ที่อยู่ที่ต้องการเข้าไป (กรณีที่มีการต่อเข้าระบบอินเตอร์เน็ตแล้ว และกำลังใช้โปรแกรมบราวเซอร์อยู่) แล้วรอสักพัก ก็จะได้เห็นสิ่งต่าง ๆ ปรากฏบนจอภาพ สิ่งที่เห็นหน้าแรกจะเรียกว่า "โฮมเพจ" ซึ่งเปรียบได้กับเอกสารหน้าแรกที่ผู้ใช้อินเตอร์เน็ตทุกคนจะได้เห็นเมื่อเข้าไปยังเว็บไซต์ต่าง ๆ

2.3.4 เว็บเพจ (Web Page)

ในการเข้าไปยังเว็บไซต์ต่าง ๆ บนอินเตอร์เน็ตนั้น เราจะได้เห็นโฮมเพจของแต่ละไซต์ ซึ่งโฮมเพจของแต่ละแห่งนั้น จะมีการสร้างจุดเชื่อมโยง หรือที่เรียกว่า "Link" ไปยังที่ต่าง ๆ ได้ ไม่ว่าจะเป็นหน้าอื่น ๆ ของไซต์นั้น สำหรับเอกสารหน้าใด ๆ ในเว็บไซต์แต่ละแห่งนั้น ถูกเรียกว่า "เว็บเพจ" มักถูกใช้ในการกล่าวถึงหน้า (page) ต่าง ๆ โดยรวมของเว็บไซต์ใด ๆ ที่สามารถเข้าไปในแต่ละหน้านั้นได้โดยการลิงค์จากหน้าอื่นในไซต์เดียวกัน

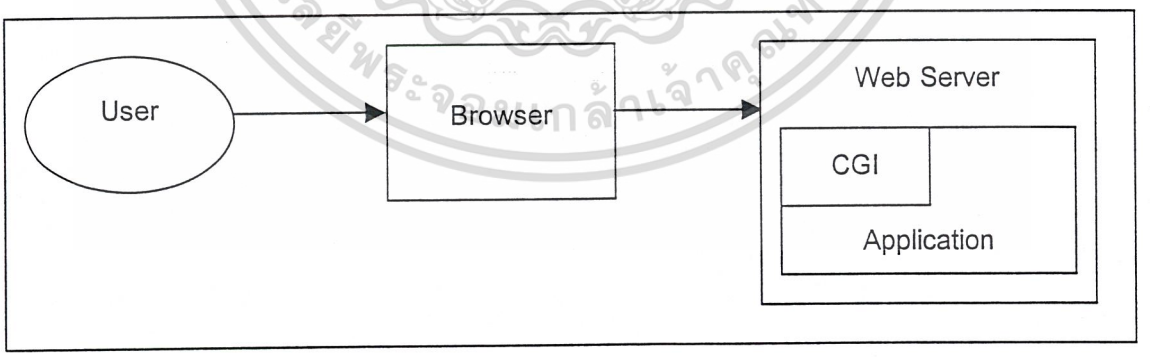
การออกแบบเว็บเพจที่ดีนั้น ไม่ควรมีเว็บเพจมากเกินไป เนื่องจากจะทำให้ผู้ที่เข้าชม สับสนในการไปมาระหว่างหน้ากันได้ จำนวนหน้าที่มีไม่ควรเกิน 10 หน้า หรือหากมากกว่านั้น ควรมีการวางโครงสร้างทั้งหมด เพื่อความสะดวกในการปรับปรุงข้อมูลได้อย่างทั่วถึง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.5 แสดงการออกแบบของเว็บเพจ

ในการจัดทำแต่ละเว็บเพจนั้น สามารถจัดทำขึ้นโดยการเขียนโปรแกรมภาษา HTML อาจจะมีไฟล์รูปภาพและไฟล์เสียงเป็นองค์ประกอบรวมอีกเพื่อเพิ่มจุดสนใจ นอกจากภาษา HTML จะสามารถจัดลักษณะการนำเสนอข้อมูลเป็นลำดับชั้นเชื่อมโยงไปยังที่ต่าง ๆ ได้แล้ว HTMLยังมีความสามารถทางด้านการเชื่อมโยง CGI ซึ่งเป็นโปรโตคอลเพื่อติดต่อกับส่วน Client ในการตอบสนองการร้องขอข้อมูลโดย CGI Application จะถูกเรียกให้ปฏิบัติงานในรูปแบบของ Process โดยรับข้อมูลผ่าน อินพุต มาตรฐานจากเว็บเซิร์ฟเวอร์หลังจากการประมวลผลของ CGI Application แล้วข้อมูลผลลัพธ์จะถูกส่งไปยังเว็บเซิร์ฟเวอร์ผ่านทาง เอาต์พุต มาตรฐาน เพื่อส่งกลับไปยัง Client ต่อไป

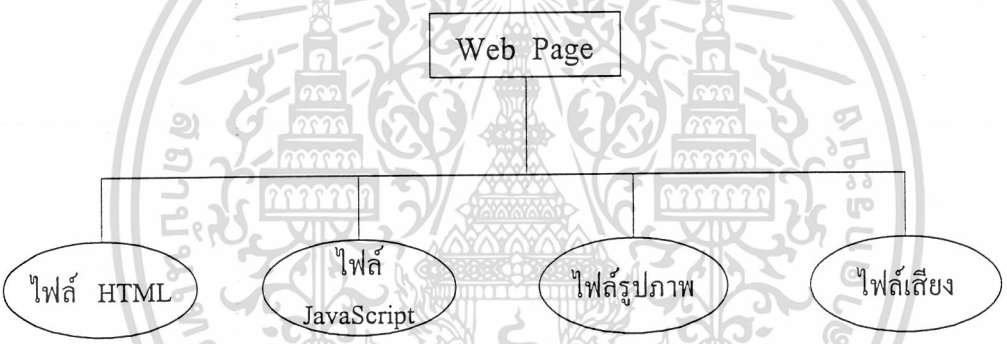


รูปที่ 2.6 แสดงความสามารถทางด้านการเชื่อมโยง CGI

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.5 เอกสาร HTML (HyperText Markup Language)

รูปแบบไฟล์ต่าง ๆ ที่เราเห็นบนจอภาพในระบบอินเตอร์เน็ตนั้น ถูกจัดเก็บในรูปแบบ HTML ซึ่งเป็นเอกสารแบบไฮเปอร์เท็กซ์ มีความสามารถในการเชื่อมโยงข้อมูลไปยังเอกสารอื่นได้แล้วยังสามารถผนวกรูปภาพกราฟฟิค เสียง และภาพวีดีโอได้ด้วย เป็นเอกสารที่มีความสามารถสูงกว่าเอกสารธรรมดาทั่วไป จากที่บอกว่าเป็นเอกสารแบบไฮเปอร์เท็กซ์นั้น ก็เนื่องจากสามารถเปิดดูข้อความภายในได้ โดยใช้โปรแกรมเอดิเตอร์ใด ๆ เปิดดูได้ ส่วนความสามารถในการเชื่อมโยงข้อมูลไปยังเอกสารอื่นนั้น ทำได้โดยการใส่สัญลักษณ์พิเศษเข้าไปในเอกสาร (Markup) หรือที่เรียกว่า "แท็ก" (Tag) นั่นเอง แท็กจะเป็นข้อความหรือคำสั่งที่มีเครื่องหมาย < > ครอบเอาไว้ และใช้เครื่องหมาย / เป็นตัวลบ ถูกอ่านและกระทำตามแต่ละคำสั่งโดยโปรแกรมบราวเซอร์ต่าง ๆ เช่น Netscape Navigator, Microsoft Internet Explorer



รูปที่ 2.7 แสดงองค์ประกอบคร่าว ๆ ในแต่ละเว็บเพจ

ปัจจุบัน HTML ถูกถือว่าเป็นภาษาคอมพิวเตอร์ ที่ใช้ในการสร้างหน้าเอกสารเพื่อแสดงผลบนจอภาพในระบบอินเตอร์เน็ต เพราะมีรากฐานจากภาษา SGML (Standard General Markup Language) ซึ่งเป็นอีกภาษาหนึ่ง ที่ใช้ในการสร้างหน้าเอกสารในระบบอินเตอร์เน็ตในระยะแรก ๆ ของการใช้งานอินเตอร์เน็ต และได้มีการพัฒนา HTML กันตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา จนกระทั่งถึงเวอร์ชั่นล่าสุดนี้ เป็นเวอร์ชั่น 4.0 แล้ว สามารถกำหนดแท็กค่าคำสั่งรองรับบริการต่าง ๆ บนระบบอินเตอร์เน็ตได้มาก ไม่ว่าจะเป็น FTP, Telnet, E-Mail เป็นต้น ทั้งยังสามารถที่จะเชื่อมโยงข้อมูลกับรูปภาพ เสียง หรือภาพเคลื่อนไหวได้อีกด้วย

ในภาษา HTML นี้ ยังมีข้อดีกว่าภาษาคอมพิวเตอร์อื่น ๆ อีกคือ เมื่อเราสร้างงานเสร็จแล้วสามารถนำไปเรียกดูผลการทำงานบนบราวเซอร์ได้เลย โดยไม่ต้องผ่านการคอมไพล์ก่อน และโอกาส

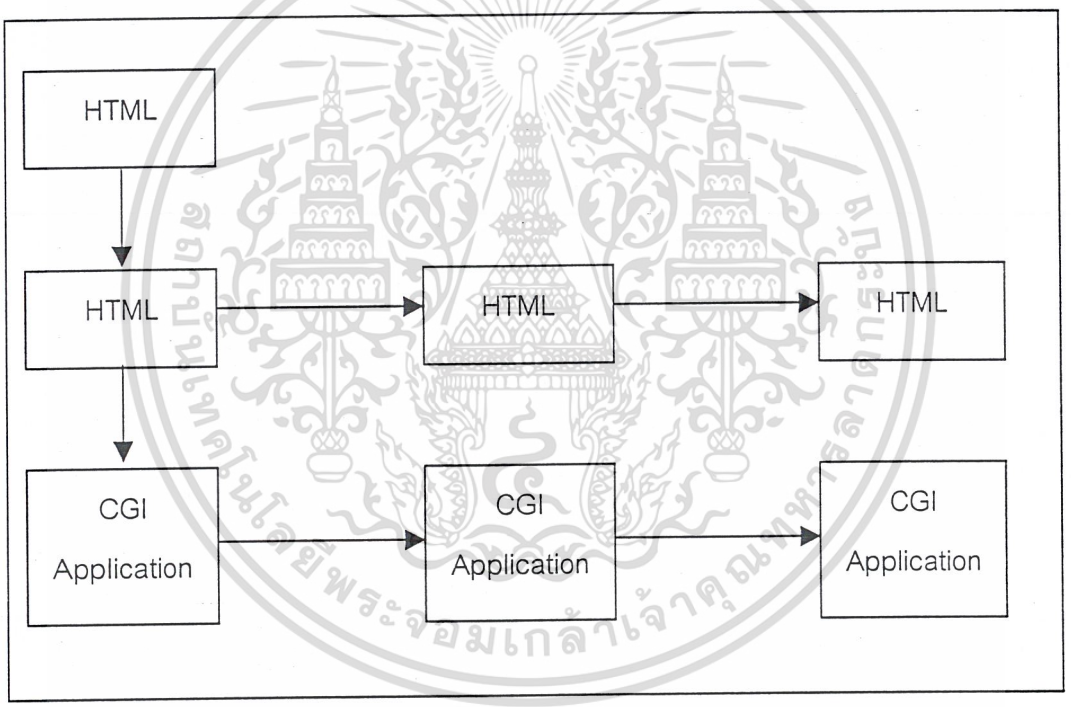
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ที่จะเกิดข้อผิดพลาดจากการเขียนคำสั่งผิดมีน้อยมาก เพราะหากคำสั่งใดที่พิมพ์ผิด เมื่อโปรแกรมบราวเซอร์อ่านแล้วไม่รู้จัก ก็จะไม่สนใจคำสั่งนั้นจะแสดงผลเอกสารปกติ

สำหรับการใช้งานเอกสาร HTML นี้จะมีการทำงานเปรียบได้กับการทำงานของโปรแกรม HELP บนวินโดว์ คือ เวลาที่เราเลื่อนตัวชี้เมาส์ไปยังคำที่มีสีเขียว และขีดเส้นใต้ ตัวชี้เมาส์จะเปลี่ยนเป็นรูปมือ ในจุดนี้เองคือ จุดที่มีการเชื่อมโยงข้อมูล (Link) ไปยังเอกสารอื่น เช่นเดียวกับการเชื่อมโยงเอกสาร HTML ก็ใช้หลักการนี้เช่นกัน หรือแม้กระทั่งเว็บไซต์ใด ๆ ในระบบอินเตอร์เน็ต นอกจากนี้หากมีการติดต่อกับระบบอินเตอร์เน็ตอยู่ เราสามารถเชื่อมโยงไปยังบริการต่าง ๆ ในระบบอินเตอร์เน็ตได้

2.3.5.1 HTML ทำงานอย่างไร



รูปที่ 2.8 แสดงการทำงานของ HTML

WWW แบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือส่วนที่เป็น Client และส่วนที่เป็น Server ทั้งสองส่วนจะถูกเชื่อมถึงกันผ่านทางอินเตอร์เน็ตโดยมี HTML เป็นส่วนฐานข้อมูลสำคัญ เมื่อเว็บบราวเซอร์ส่งข้อความร้องขอข้อมูลที่อยู่ในรูปไฟล์ HTML จากเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งานอยู่ผ่านโมเด็มหรืออุปกรณ์สื่อสารข้อมูลอื่นไปยังศูนย์บริการอินเตอร์เน็ต (ISP) ตามโปรโตคอล TCP/IP ผ่านทาง URL ศูนย์บริการปลายทางที่ผู้ใช้ต้องการ ณ ที่นี้เครื่องเว็บเซิร์ฟเวอร์จะทำการอ่านข้อมูลที่ถูกส่งมา และจะทำงานตามคำสั่งที่กำหนด หลังจากจบสิ้นกระบวนการแล้วจะทำการจัดส่งข้อมูลคำตอบย้อนกลับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

33872

มายังเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งานอยู่ โปรแกรมเว็บบราวเซอร์ที่เครื่องคอมพิวเตอร์ของเราก็จะแปลงสัญญาณคำสั่งและแสดงผลเป็นข้อความ รูปภาพ เสียง ให้เราได้ใช้งานกันต่อไป ส่วน CGI Application ทำงานบนเว็บเซิร์ฟเวอร์แต่ทำงานแยก Process จากเว็บเซิร์ฟเวอร์เราจึงสามารถแก้ไข Application โดยที่ไม่มีการแทรกแซงการทำงานของเว็บเซิร์ฟเวอร์หรือ Process อื่น ๆ เลย

2.3.5.2 **การใช้งาน HTML**

คำสั่งพื้นฐานของ HTML ที่จำเป็นต้องใช้ในการสร้างเว็บเพจมีดังนี้

- *คำสั่งโครงสร้าง* จะกำหนดให้ข้อมูลต่าง ๆ ที่จะถูกสร้างเป็นไฟล์ HTML ต้องมีโครงสร้างอยู่ในรูปแบบข้อกำหนดของ HTML
- *คำสั่งในการจัดรูปแบบของย่อหน้า* กำหนดระดับของเฮดดิ้ง และการสิ้นสุดย่อหน้า
- *คำสั่งในการกำหนดรูปแบบของตัวอักษร* ช่วยให้สามารถใช้งานตัวอักษรต่าง ๆ ได้ ในหลายรูปแบบ เช่น ตัวหนา ตัวเอียง เป็นต้น
- *คำสั่งในการกำหนดลิสต์* HTML สนับสนุนรูปแบบของลิสต์ในหลาย ๆ แบบ เช่น ลิสต์แบบลำดับ ลิสต์แบบไม่ลำดับ เมนูลิสต์ เป็นต้น
- *คำสั่งไฮเปอร์ลิงก์* สามารถย้ายการทำงานจากข้อมูลหนึ่งไปยังอีกข้อมูลหนึ่งได้โดยใช้คำสั่งนี้
- *คำสั่ง Asset Integration* สามารถใช้คำสั่งนี้ในการแสดงผลข้อมูลแบบมัลติมีเดียได้ เช่น การแสดงผลกราฟฟิค เสียง และดิจิตอลวีดีโอ เป็นต้น

2.3.5.3 **ข้อดีของ HTML**

นักออกแบบเว็บมีภาษาให้เลือกมากมายในการใช้สำหรับเว็บเพจ ถึงแม้ว่า HTML จะมีข้อจำกัดบางประการ แต่ HTML ยังมีข้อดีดังต่อไปนี้

- *ไฟล์ HTML สามารถทำงานได้บนเว็บบราวเซอร์ทุกตัว* ไฟล์ HTML สามารถทำงานได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ทุกประเภทที่สนับสนุน HTML
- *ไฟล์ HTML มีรากฐานมาจากโครงสร้างที่สามารถกำหนดลิสต์ตัวเลข* และสามารถระบุได้ว่าจะดูลิสต์ตัวเลขแบบโรมันหรืออารบิก
- *คำสั่งที่ใช้ใน HTML มีขนาดเล็ก* ทำให้ไฟล์ HTML มีขนาดเล็กด้วย โดยไม่จำเป็นต้องใช้ไฟล์แบบบีบอัด
- *HTML เป็นภาษาที่ง่ายต่อการเรียนรู้* ไม่จำเป็นต้องรู้จักและใช้คำสั่งทุก ๆ ตัว และโปรแกรมเอดิเตอร์โดยทั่วไปก็สามารถสร้างไฟล์ HTMLได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.5.4 **ข้อเสียของ HTML**

- *การเพิ่มเติมอ๊อปเจ็กต์หรือส่วนประกอบต่าง ๆ ใน HTML* เป็นไปอย่างจำกัด
- *มีข้อจำกัดในการใช้คำสั่ง* เนื่องจากไม่สามารถสร้างคำสั่งใหม่ ๆ ขึ้นมาใช้เองได้ จึงจำเป็นต้องใช้คำสั่งเท่าที่มีอยู่เท่านั้น
- *HTML สนใจโครงสร้างของข้อมูล* และในการสร้างไฟล์ HTML จะสร้างเป็นไฟล์ตัวอักษร ทำให้ไม่สามารถทราบได้ว่าบราวเซอร์จะทำการแสดงผลไฟล์ HTML ที่สร้างขึ้นมานั้นได้อย่างไร

2.3.5.5 HTML และมัลติมีเดีย

HTML ได้จัดเตรียม Built-in เพื่อรองรับข้อมูลแบบมัลติมีเดีย ไว้ดังนี้

- *การแสดงภาพกราฟฟิค* ข้อมูลบนเว็บที่มีภาพกราฟฟิคจะมีการขนส่งข้อมูลช้ากว่าข้อมูลแบบตัวอักษร เนื่องจากมีขนาดใหญ่จึงจำเป็นต้องใช้เวลาในการขนส่งข้อมูลนาน ฉะนั้นการใช้ภาพกราฟฟิคจึงควรใช้ในกรณีที่จำเป็นเท่านั้น HTML มีคำสั่ง <IMG> เพื่อใช้ในการแสดงภาพกราฟฟิคบนเว็บเพจ
- *Image Map* ภาพกราฟฟิคอีกชนิดหนึ่งที่รู้จักกันในชื่อ Image Map ซึ่งเป็นระบบที่อนุญาตให้สามารถออกแบบพื้นที่ของภาพกราฟฟิคในการสร้างไฮเปอร์ลิงก์ไปยังตำแหน่งที่แตกต่างกัน
- *การแสดงเสียงบนเว็บ* เว็บบราวเซอร์ไม่ได้รองรับการแสดงข้อมูลเสียงโดยตรง จึงจำเป็นต้องใช้โปรแกรมจากภายนอกบราวเซอร์ในการแสดงเสียง ข้อกำหนดในการแสดงไฟล์เสียงใช้คำสั่งไฮเปอร์ลิงก์ <A>

2.4) ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับภาษา Java

ภาษา Java เป็นภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรม โดยรูปแบบของโปรแกรมมีลักษณะเป็นแบบ Object-Oriented Programming อาจจะเรียกภาษา Java ว่าเป็น Object-Oriented Programming Language ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกันกับภาษา C++ หรือ Visual Basic ซึ่งภาษา Java ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Sun MicroSystem ซึ่งได้ออกแบบภาษาให้มีการสนับสนุนการทำงานแบบ Distributed Computing และเนื่องจากภาษา Java เป็นภาษาในระดับ 32 บิต ที่ต้องการความสามารถในการทำ Multitasking (Multitasking คือการที่ระบบปฏิบัติการยอมให้มีการทำงานหลาย ๆ งานไปพร้อม ๆ กัน โดยจัดให้มีการจัดสรรการใช้ resource ให้เกิดความเหมาะสม) ในระบบปฏิบัติการที่มีการยอมให้แอพพลิเคชันมีการทำงานแบบ Multitasking ได้ จำเป็นที่จะต้องเป็นระบบปฏิบัติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การในระดับ 32 บิตเท่านั้น เราจึงไม่สามารถที่จะใช้แอพพลิเคชันของ Java บนระบบปฏิบัติการรุ่นเก่า ๆ อย่างเช่น DOS หรือ Windows 3.x ได้ ระบบปฏิบัติการที่สามารถใช้แอพพลิเคชันของ Java ได้แก่ Windows 9x, Windows NT, MacOS และระบบปฏิบัติการใน Unix อย่างเช่น Linux, Solaris 2.x ขึ้นไป ซึ่งลักษณะของภาษา Java โดยทั่วไปเป็นดังนี้

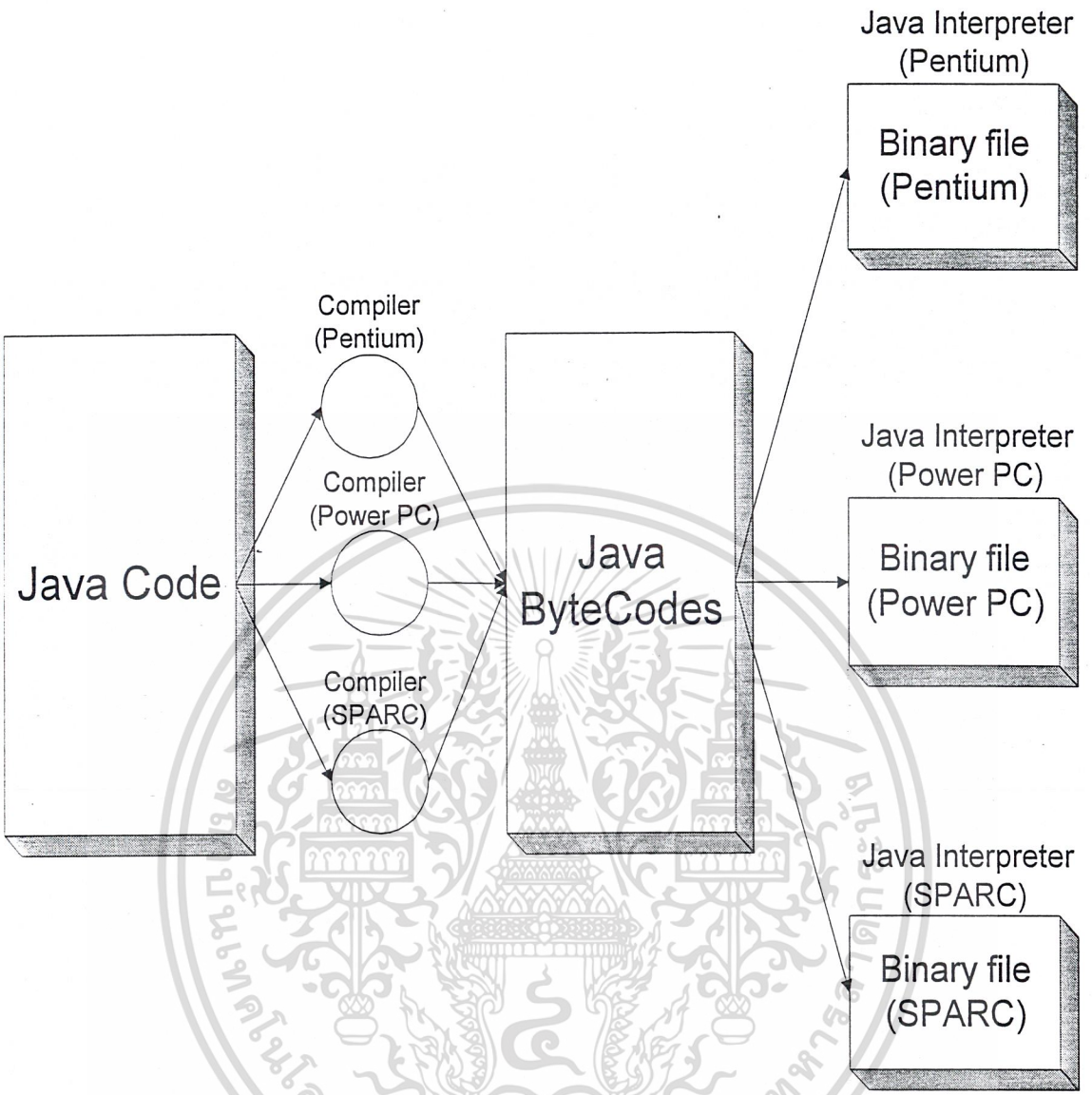
2.4.1 การทำงานของคอมไพเลอร์ (Compiler) ในภาษา Java จะมีการทำงานออกเป็นส่วนคือ

2.4.1.1 Java Compiler จะทำการแปลงโปรแกรมที่เขียนขึ้นด้วยภาษา Java จะเป็นไฟล์ที่มีนามสกุลเป็น *.java ให้ออกมาอยู่ในรูปแบบของ Byte Code เป็นไฟล์ที่มีนามสกุลเป็น *.class ซึ่งยังไม่สามารถที่จะทำการ run ได้ในทันที

2.4.1.2 Java Interpreter เป็นตัวที่ทำให้โปรแกรมที่เขียนด้วยภาษา Java สามารถที่จะ run ได้เมื่อผ่านการคอมไพล์มาแล้วด้วย Java Compiler โดยจะทำการแปลง Byte Code ออกมาในรูปแบบของคำสั่งที่แต่ละ Processor ที่อยู่บนเครื่องนั้น ๆ สามารถที่จะเข้าใจ และสามารถที่จะดำเนินการตามคำสั่ง เพื่อแสดงผลของการดำเนินการนั้นออกมาได้

2.4.2 ง่ายในการเขียนและการทำความเข้าใจ ภาษา Java เป็นภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมแบบ Object-Oriented ซึ่งทาง Sun MicroSystem และทีมงานที่ทำการออกแบบภาษาต้องการที่จะให้ภาษา Java เป็นภาษาที่เรียนรู้ได้ง่ายและรวดเร็ว ดังนั้นจึงได้ทำการออกแบบภาษาที่มีโครงสร้างทางภาษาคล้ายคลึงกับภาษา C++ ที่เป็นภาษายอดนิยมในการเขียนโปรแกรมแบบ Object-Oriented และนักพัฒนาโปรแกรมแบบ Object-Oriented ก็มีความคุ้นเคยในการเขียนโปรแกรมแบบนี้ด้วย C++

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.9 แสดงการทำงานของภาษา Java

อีกทั้งการเขียนโปรแกรมภาษา Java นี้สามารถที่จะทำการเขียนด้วยเท็กซ์เอดิเตอร์ใดก็ได้ ไม่ว่าจะเป็น Edit บน DOS, Notepad บน Windows 9x หรือ Windows NT และ vi หรือ pico บน Unix เพียงแค่ทำการจัดเก็บโปรแกรมที่ทำการเขียนมาลงบนไฟล์ที่มีนามสกุลเป็น java ก็สามารถที่จะนำมาทำการคอมไพล์ได้ ซึ่งไม่เหมือนกับภาษาอื่น ๆ ที่จะมีเท็กซ์เอดิเตอร์เป็นของตัวเอง

2.4.3 **มีคุณสมบัติของ** Platform-Independent Platform-Independent คือความสามารถของโปรแกรมที่เขียนขึ้นมาและทำการคอมไพล์บนเครื่องหนึ่ง แล้วสามารถนำมาทำงานกับอีกเครื่องหนึ่งที่อาจจะแตกต่างกันหรือเหมือนกันก็ได้ โดยที่ไม่จำเป็นที่จะต้องคอมไพล์ใหม่ (recompile) ทุก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ครั้งที่มีการเปลี่ยนเครื่องในการใช้โปรแกรม เนื่องจากการคอมไพล์โปรแกรมทุกครั้งจะใส่คุณสมบัติต่าง ๆ บนเครื่องนั้นลงไปใน binary code ซึ่งเครื่องที่ใช้ในการคอมไพล์นั้น อาจจะมีระบบปฏิบัติการที่แตกต่างกัน อีกทั้งทรัพยากร (resource) ที่มีอยู่ในแต่ละเครื่องมีไม่เหมือนกันและไม่เท่ากัน ซึ่งจะทำให้การทำงานของโปรแกรมสามารถที่จะทำได้ในเครื่องหนึ่ง แต่เมื่อนำไปใช้งานกับอีกเครื่องหนึ่งที่มีระบบปฏิบัติการหรือทรัพยากรที่แตกต่างกันก็ไม่สามารถทำงานได้

ด้วยเหตุนี้ทางทีมงานผู้ทำการออกแบบภาษา Java จึงได้ใส่คุณสมบัติของการเป็น Platform-Independent ให้กับภาษา Java โดยการให้โปรแกรมที่คอมไพล์แล้วเป็นชุดคำสั่งพิเศษที่เรียกว่า Byte Codes (Byte Codes คือ ชุดคำสั่งพิเศษที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับ Machinecode แต่ชุดคำสั่งพิเศษนี้ไม่ได้กำหนดลักษณะของคำสั่งเฉพาะแต่ละ Processor ลงไป ดังนั้นถ้าโปรแกรมที่เขียนด้วยภาษา Java ที่คอมไพล์บน Pentium นั้นก็สามารถที่จะทำงานได้ทั้งระบบที่ใช้ Pentium และระบบที่ใช้ Processor อื่น ๆ เช่น SPARC เป็นต้น รวมไปถึงสามารถใช้ได้ในระบบปฏิบัติการที่แตกต่างกันได้อีกด้วย) ซึ่งข้อด้อยของการทำเช่นนี้ จะทำให้โปรแกรมที่เขียนด้วยภาษา Java มีความเร็วในการทำงานลดลงกว่าภาษาอื่น ๆ เนื่องจากเมื่อทำการ run โปรแกรมภาษา Java Byte Codes จะต้องถูกทำการแปลงให้เป็นชุดคำสั่งที่แต่ละ Processor เข้าใจด้วย Java Interpreter ก่อน

2.4.4 เป็นภาษาที่ถูกออกแบบให้สามารถทำ Interactive กับผู้ใช้บนเว็บเพจ ภายในตัวภาษา Java มีเครื่องมือในการทำ GUI (Graphic User Interface) อย่างเช่น การสร้างปุ่ม การสร้าง dialog box การสร้างเมนู การสร้าง text area เป็นต้น และเพิ่มความสามารถในการทำให้เกิดความเคลื่อนไหวได้ด้วยตัวโปรแกรมที่เขียนด้วยภาษา Java ที่ทำงานอยู่บนเว็บเพจ จะเรียกว่า "Applet"

อีกทั้งเพิ่มความเร็วในการโต้ตอบกับผู้ใช้เมื่อก่อนนี้เมื่อต้องการที่จะทำการ Interactive กับผู้ใช้บนเว็บเพจนั้น จะต้องอาศัยการส่ง request มาให้ที่เซิร์ฟเวอร์ให้เป็นตัวประมวลผล และทำการตัดสินใจในการตอบสนองกับผู้ใช้ ซึ่งในการสื่อสารระหว่างผู้ใช้กับเซิร์ฟเวอร์ในบางครั้ง การส่งข้อมูลอาจจะใช้เวลานาน ทำให้เกิดการล่าช้าในการตอบสนองต่อ request ของผู้ใช้ที่ส่งเข้ามา

แต่ในภาษา Java นั้น จะทำการตอบสนองต่อ request ของผู้ใช้ทันที โดยไม่ต้องส่ง request นี้กลับไปที่ตัวเซิร์ฟเวอร์ โดยอาศัยความสามารถของเว็บบราวเซอร์ที่รองรับการทำงานของภาษา Java เพื่อให้สามารถทำการประมวลผลการตอบสนองบนเครื่องของผู้ใช้ ซึ่งเว็บบราวเซอร์ที่รองรับต่อการทำงานของ Applet ได้แก่ Netscape Navigator 3.0 และ Microsoft Internet Explorer 3.0 ขึ้นไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4.5 ความน่าเชื่อถือของโปรแกรม ทาง Sun MicroSystem และทีมงานผู้ออกแบบภาษาต้องการที่จะให้โปรแกรมที่เขียนขึ้นด้วยภาษา Java สามารถที่จะทำงานได้ตลอด โดยไม่ขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมของระบบ ด้วยการ

2.4.5.1 **ได้ทำการไม่ให้มีการใช้พอยน์เตอร์** ถึงแม้ว่า โครงสร้างทางภาษาจะมีลักษณะที่คล้ายคลึงกับภาษา C/C++ แต่การที่มีการใช้พอยน์เตอร์จะทำให้เกิดปัญหาได้มากมาย เพราะว่าโดยส่วนใหญ่ ปัญหาของการเขียนโปรแกรมและการทำงานของโปรแกรมนั้นเกิดขึ้นมาจากการใช้พอยน์เตอร์เข้าไปอ้างอิงถึง array, string, object ต่าง ๆ ในหน่วยความจำ ซึ่งการใช้พอยน์เตอร์ที่ไม่ถูกต้องนั้นจะทำให้ระบบเกิดความเสียหายจนระบบไม่สามารถที่จะทำงานต่อไปได้ หรือที่เรียกว่าเครื่อง hang และเป็นการยากที่จะตรวจสอบหาข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้น

2.4.5.2 **ในภาษา Java ไม่ยินยอมให้ทำการจองพื้นที่หน่วยความจำ ในขณะทำการ run** นั่นคือ โปรแกรมไม่สามารถที่จะทำ Dynamic Allocation ได้ ในการจองพื้นที่ในหน่วยความจำจะต้องกระทำในช่วงของการคอมไพล์ ซึ่งทำให้มั่นใจได้ว่า เมื่อทำการ run โปรแกรมนั้นจะมีหน่วยความจำที่มากพอ อีกทั้งภาษา Java ไม่ได้มีฟังก์ชันในการปลดปล่อยหน่วยความจำที่ได้ถูกจองไปแล้วจากผู้ที่เขียนโปรแกรม เพื่อป้องกันไม่ให้มีการปลดปล่อยหน่วยความจำที่ไม่ถูกต้องได้ แต่จะมีฟังก์ชันที่ทำงานเองโดยอัตโนมัติในการจัดการหน่วยความจำที่ได้ถูกจองไปแล้ว

2.4.5.3 **ในภาษา Java ได้ทำการเพิ่มฟังก์ชัน และ/หรือ ไบนารี** ที่คอยตรวจสอบความเป็นไปได้ที่จะทำให้เกิดข้อผิดพลาดได้ทั้งในขณะคอมไพล์และขณะ run อีกทั้งได้ฟังก์ชันที่เรียกว่า Exception Exception คือ เหตุการณ์ที่ไม่สามารถคาดการณ์ได้ว่า จะเกิดเหตุการณ์อะไรขึ้นในขณะ run โปรแกรม หรือผลกระทบอันเนื่องมาจากความบกพร่องของตัวแอพพลิเคชันเอง และ/หรือ แอพ - พลิเคชันอื่น ๆ ตลอดจนส่วนต่าง ๆ ของระบบคอมพิวเตอร์ตั้งแต่ทางฮาร์ดแวร์ไปจนถึงระบบปฏิบัติการ จนทำให้แอพพลิเคชันนั้น ๆ ไม่สามารถที่จะทำงานต่อไปได้

2.4.6 ความสามารถในการทำ Multithread จะมีลักษณะที่คล้ายคลึงกับ Multitasking (Multitasking คือการทำงานในระดับแอพพลิเคชัน หรือสามารถที่จะทำการ run โปรแกรมได้หลาย ๆ โปรแกรมในเวลาเดียวกันได้) Multithread คือ แอพพลิเคชันเดียวแต่ได้มีการแบ่งการทำงานภายในแอพพลิเคชันออกเป็นส่วนย่อย ๆ อย่างเช่น ส่วนที่คอยจัดการกับ user interface ส่วนที่คอยจัดการกับอุปกรณ์อินพุตและเอาต์พุต และส่วนที่ใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ของโปรแกรม โดยการแบ่งการทำงานภายในออกเป็นส่วนย่อย ๆ โดยในแต่ละส่วนไม่ขึ้นแก่กันนี้ ทำให้สามารถที่จะทำการ run

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ไปได้พร้อม ๆ กัน เป็นหลาย ๆ process ในแอพพลิเคชันเดียว ซึ่งข้อดีก็คือ ความเร็วที่เพิ่มขึ้นในการทำงานของโปรแกรม

2.4.7 ยูทิลิตี้ที่มีให้ใช้ในภาษา Java มีอยู่จำนวนมาก แต่จะขอกล่าวถึงที่สำคัญดังนี้

2.4.7.1 appletviewer.exe เป็นยูทิลิตี้สำหรับ Java Applet โดยแปลงมาจาก Byte Codes ที่คอมไพล์มาจากภาษา Java

2.4.7.2 java.exe เป็นยูทิลิตี้สำหรับ run แอพพลิเคชันจาก Byte codes ที่คอมไพล์มาจากภาษา Java

2.4.7.3 javadoc.exe เป็นยูทิลิตี้สำหรับสร้างไฟล์เอกสารจาก Comment ที่เขียนขึ้นในตัว Source Code โดยเริ่มต้นด้วยเครื่องหมาย "/*" และลงท้ายด้วย "*/"

2.4.7.4 jdb.exe เป็นยูทิลิตี้สำหรับ Debug แอพพลิเคชัน Java โปรแกรม

2.4.7.5 javap.exe เป็นยูทิลิตี้สำหรับแสดงรายการ Method และตัวแปรต่าง ๆ ใน class ที่เป็นตัวแปรแบบ Public

2.4.7.6 javah.exe เป็นยูทิลิตี้สำหรับสร้าง Header file (*.h) สำหรับอินเตอร์เฟสภาษา Java กับภาษา C/C++

2.4.8 แอพพลิเคชันของภาษา Java สามารถที่จะแบ่งได้เป็น 2 แอพพลิเคชัน คือ

2.4.8.1 Java Application เป็นแอพพลิเคชันโปรแกรมที่สามารถที่จะทำงานได้โดยทันทีที่มีการผ่านการคอมไพล์จาก Java Compiler และเวลาที่จะทำการ run ต้องทำการ run กับ Java Interpreter เพื่อให้แอพพลิเคชันนั้นทำงาน ซึ่งลักษณะนี้จะคล้ายกับแอพพลิเคชันโปรแกรมทั่วไปของ Programming Language ที่มีลักษณะเป็นแบบ Object – Oriented Program Java Application สามารถที่จะทำงานได้ในระบบปฏิบัติการที่เป็นแบบ 32 บิต อย่างเช่น Windows 9x / NT และระบบปฏิบัติการ Unix อย่างเช่น Solaris, Linux เป็นต้น

2.4.8.2 Java Applet เป็นแอพพลิเคชันที่ต้องทำงานอยู่บนเว็บเพจ โดยผ่านทางเว็บบราวเซอร์ ซึ่งเว็บบราวเซอร์นั้นจะต้องรองรับการทำงานของ Java Applet ได้ ตัวอย่างของเว็บบราวเซอร์ที่สามารถทำการ run แอพพลิเคชัน Java Applet ได้เช่น Netscape Navigator 3.0 หรือ Microsoft Internet Explorer 3.0 ขึ้นไป เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.9. **ความแตกต่างระหว่าง Java Applet และ Java Application** แตกต่างกันดังนี้

2.4.9.1 **ลักษณะการทำงาน** Java Application เป็น Stand alone คือสามารถที่จะทำงานได้ด้วยตัวเองเพียงแค่ใช้ Java Interpreter และสามารถที่จะทำการ run ที่ใดก็ได้ บน DOS, Windows 9x / NT, Linux เป็นต้น ในขณะที่ Java Applet ต้องการ run บนเว็บบราวเซอร์เท่านั้น โดยจะถูกเรียกโดยการใช้แท็กพิเศษของไฟล์ HTML เมื่อเว็บบราวเซอร์ที่สามารถทำการ run Java Applet ได้ ก็จะทำการโหลด Applet Class จากเว็บเซิร์ฟเวอร์และทำการประมวลผลบนเครื่องของผู้ใช้

2.4.9.2 **ประสิทธิภาพ** Java Applet จะมีข้อได้เปรียบกว่า Java Application ในด้านประสิทธิภาพหรือความสามารถของโครงสร้างและ User Interface เพราะว่าระบบปฏิบัติการที่ Applet ทำงานนั้นสนับสนุนการทำ Graphic ทำให้การสร้าง User Interface ง่ายและมีประสิทธิภาพมากกว่า อีกทั้งสามารถที่จะจัดการกับ Event (เหตุการณ์) ที่เกิดขึ้นกับ Applet อีกทั้งในตัวภาษา Java ได้มีฟังก์ชันที่สนับสนุนการสร้าง Graphic User Interface อย่างเช่น การสร้างปุ่มรับเหตุการณ์ การสร้าง text area ที่จะแสดงข้อความออกมา

2.4.9.3 **การรักษาความปลอดภัย** Java Applet ไม่มีความสามารถทางด้านการรักษาความปลอดภัยของระบบที่ผู้ใช้เรียก Applet Class ไปประมวลผลอย่างเพียงพอ เพราะว่า Applet สามารถที่จะถูกเรียกจากสถานที่ต่าง ๆ บน WWW โดยตัวเครื่องของผู้ใช้ไม่สามารถที่จะทราบได้ว่า Applet นั้นมีอันตรายมากน้อยเพียงใด ซึ่งอาจจะทำให้เกิดความเสียหายแก่ระบบที่ผู้ใช้ทำการ run Applet อยู่ได้

2.4.9.4 **การอ่านเขียน** File System Applet ไม่สามารถที่จะอ่านหรือเขียน File System ของเครื่องที่เรียกใช้ Applet ได้ ยกเว้นแต่เครื่องที่เรียกใช้จะทำการสร้าง Directory ที่อนุญาตให้ Applet สามารถที่จะทำการอ่านและเขียน File System ได้

2.4.9.5 **การติดต่อกับเซิร์ฟเวอร์** โดยปรกติ Applet ไม่สามารถติดต่อกับเซิร์ฟเวอร์อื่นได้นอกเหนือจากเซิร์ฟเวอร์ที่ Applet นั้นถูกเรียกมาเท่านั้น

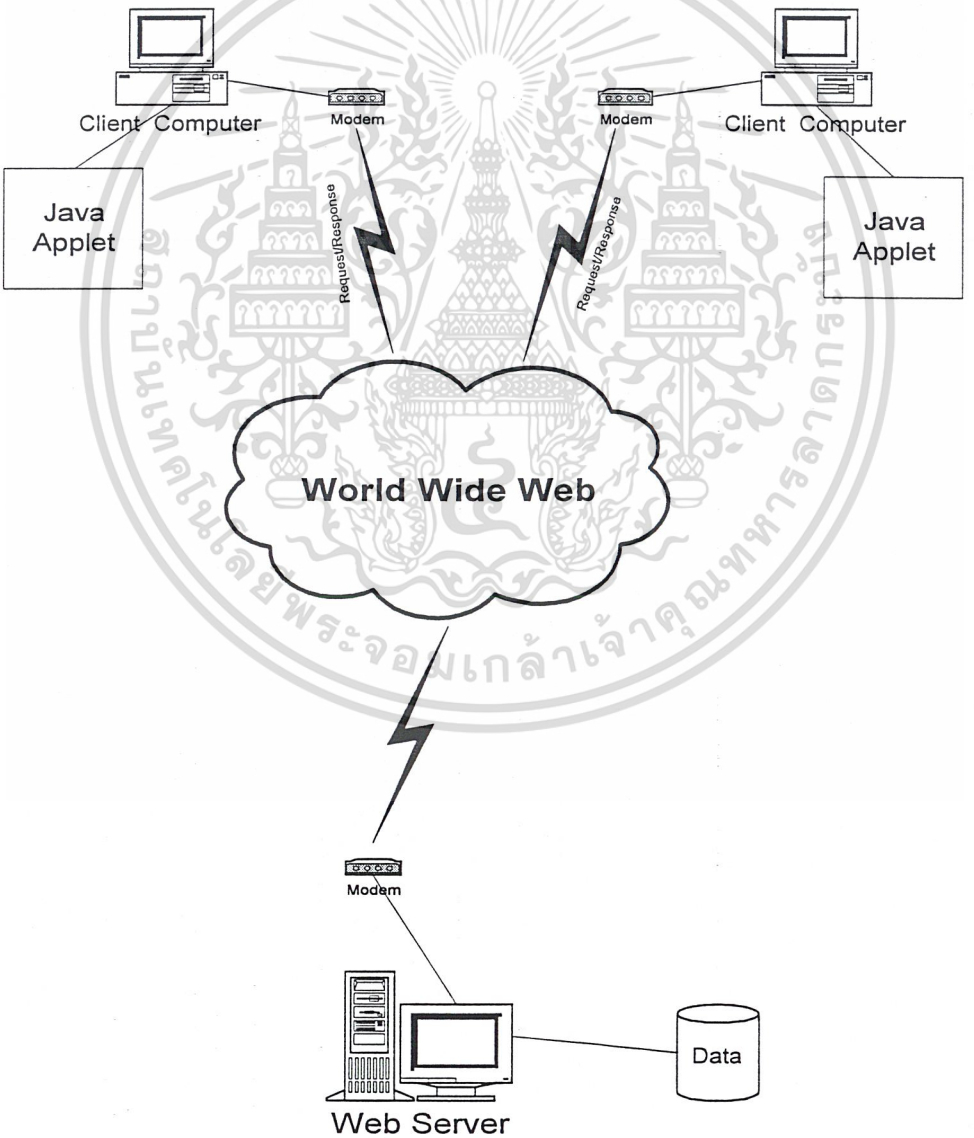
2.4.9.6 **การ run แอพพลิเคชัน** Applet ไม่สามารถที่จะ run แอพพลิเคชันใด ๆ ของระบบของผู้ใช้ได้

2.4.10 **ความสามารถในการทำการโต้ตอบกับผู้ใช้ได้ (Interaction)** โดยทั่วไปแล้วการเขียนเว็บเพจจะใช้ภาษาที่เขียนด้วย HTML (Hypertext Markup Language) เป็นส่วนใหญ่ซึ่งภาษายังไม่มีความซับซ้อนเพียงพอในการทำการโต้ตอบกับผู้ใช้เพียงแต่เป็นกรณีแล้วให้ผู้ใช้เลือกแล้วค่อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ไปดึงเว็บเพจที่เกี่ยวข้องไปให้ผู้ใช้ซึ่งจะเป็นการช้าอย่างมากในการดึงแต่ละหน้าเว็บเพจ หรือมีการใส่ภาษา CGI เข้าไปในตัวเว็บเพจ เพื่อให้มีการทำการโต้ตอบกับผู้ใช้ได้แต่ด้วยลักษณะของภาษา CGI เมื่อรับ request จากผู้ใช้แล้วก็จะทำการส่ง request นั้นไปยังผู้ใช้ ซึ่งการทำเช่นนี้จะทำให้การโต้ตอบกับผู้ใช้นั้นช้า เพราะว่าความเร็วในการที่จะตอบสนองกับผู้ใช้นั้นขึ้นอยู่กับความเร็วในการส่ง request และผลลัพธ์ไปยังผู้ใช้

แต่ Java Applet จะทำการประมวลผลต่อ request ของผู้ใช้บนเครื่องของผู้ใช้ โดยทำงานผ่านเว็บบราวเซอร์ที่สนับสนุนการทำงานของ Applet ดังนั้นเมื่อผู้ใช้ทำการโหลด Applet Class ไปแล้วก็อาจจะไม่ต้องติดต่อกับเซิร์ฟเวอร์อีก นอกจากตัว Applet นั้นต้องการข้อมูลจากเซิร์ฟเวอร์ ทำให้การประมวลผลและการควบคุมเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็นไปได้อย่างรวดเร็วยิ่งขึ้น



รูปที่ 2.10 แสดงการทำการโต้ตอบกับผู้ใช้ในเวิร์ลด์-ไวด์-เว็บ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5) จาวาสคริปท์ (JavaScript)

จาวาสคริปท์ (JavaScript) คือ ภาษาคอมพิวเตอร์แบบ Object-Oriented Programming หรือ OOP สำหรับใช้บนโฮมเพจเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพให้กับภาษา HTML (HyperText Markup Language) เช่น การตอบสนองต่อเหตุการณ์ (Events) หรืออินพุตต่าง ๆ ที่โฮมเพจได้รับ ไม่ว่าจะเป็นเหตุการณ์จากเม้าส์ ควบคุมรูปแบบการแสดงผล เล่นไฟล์เสียง ควบคุมการทำงานของแบบฟอร์ม (Form) และกรอบเฟรม (Frame) ของโฮมเพจเป็นต้น จาวาสคริปท์ถูกสร้างขึ้นเป็นครั้งแรกสำหรับใช้ในเว็บบราวเซอร์ Netscape Navigator เวอร์ชั่น 2.0 เว็บบราวเซอร์จะทำหน้าที่แปลความหมายคำสั่งต่าง ๆ ของจาวาสคริปท์ซึ่งได้ฝังตัวอยู่ในเนื้อความของสคริปท์ภาษา HTML โดยการใช้คำสั่ง (Tag) ของ HTML จาวาสคริปท์คล้ายกับเป็นตัวกลางคอยจัดการ และเชื่อมโยงข้อมูลระหว่างหน้าโฮมเพจกับบราวเซอร์ ความหมายของคำว่า "สคริปท์" คือ เป็นไฟล์ข้อมูลตัวอักษรธรรมดาที่เก็บรวบรวมคำสั่งต่าง ๆ ของภาษาคอมพิวเตอร์นั้น ๆ เรียงต่อกันแล้วนำไปรันหรือปฏิบัติงานได้เลย โดยไม่ต้องผ่านการถูกคอมไพล์ก่อน แต่อย่างไรก็ตามการรันนั้นจำเป็นต้องใช้อินเตอร์เพรทเตอร์เป็นตัวรัน หรือเป็นตัวแปลสคริปท์ อินเตอร์เพรทเตอร์สำหรับจาวาสคริปท์ในที่นี้ก็คือ การทำงานส่วนหนึ่งของบราวเซอร์นั่นเอง ภาษาจาวาสคริปท์เป็นลูกหลานของภาษาจาวา ทำให้จาวาสคริปท์มีความคล่องตัวมากกว่าจาวา เพราะได้ตัดเอาส่วนประกอบบางอย่างที่ยุ่งยากออกไป เช่น การต้องกำหนดชนิดของตัวแปรก่อนการใช้งาน และความเข้มงวดในการตรวจสอบชนิดของข้อมูล

วิธีปฏิบัติงานของภาษาจาวาสคริปท์ภายในเว็บบราวเซอร์มีอยู่ 2 แนวทางด้วยกันคือ จาวาสคริปท์สามารถเข้าถึงข้อมูลอ๊อปเจ็กต์ของระบบภายใน Netscape Navigator ขณะที่กำลังปฏิบัติงานอยู่ได้ เช่น ข้อมูลเกี่ยวกับหน้าเอกสารโฮมเพจไม่ว่าจะเป็นข้อมูลของเฟรม ตำแหน่งของ Link, Anchor และแบบฟอร์มต่าง ๆ และอีกแนวทางหนึ่งคือ การตรวจสอบเหตุการณ์ (Event) หรือข่าวสารต่าง ๆ จากผู้ใช้ เช่น การตรวจสอบตำแหน่งของเม้าส์ การตรวจสอบการคลิ๊กปุ่มเม้าส์หลังจากการยอมรับ (Submit) ข้อความภายในแบบฟอร์ม เพื่อส่งข้อมูลไปให้ CGI เซิร์ฟเวอร์ เป็นต้น สรุปแล้วจาวาสคริปท์จะทำงานในสองแนวทางคือ ติดต่อกับเว็บบราวเซอร์และติดต่อกับผู้ใช้ สิ่งเหล่านี้เองที่ทำให้จาวาสคริปท์เป็นเครื่องมือที่ง่ายต่อการใช้งาน สำหรับการสร้างโฮมเพจแบบไดนา - มิค (Dynamic) หรือโฮมเพจที่เก่งและฉลาดขึ้น เช่น สามารถตรวจสอบเหตุการณ์อินพุต จากผู้ใช้แล้วคำนวณความถูกต้อง ก่อนที่จะแสดงผลที่เว็บบราวเซอร์หรือส่งข้อมูลที่ได้ให้กับเซิร์ฟเวอร์ต่อไป

ในที่นี้เราจะกล่าวถึงจาวาสคริปท์ขั้นเริ่มต้นซึ่งมีสิ่งที่เราต้องเรียนรู้ดังต่อไปนี้คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.1 ชนิดของข้อมูล (Data type)

ชนิดของข้อมูลพื้นฐานสำหรับการใช้กับจาวาสคริปท์มีอยู่ดังนี้ คือ

- Number หรือ ตัวเลขธรรมดา (จำนวนเต็มและจำนวนจริง ; Integer และ Real เช่น 1, -75, 0.32, -8.9045)
- Boolean หรือ จำนวนตรรกะ (จริง หรือ เท็จ ; True หรือ False)
- String หรือ ข้อความตัวอักษร (เช่น “abc”, “School”)
- Null สำหรับการกำหนดอ๊อปเจ็กต์ว่างเปล่า

สำหรับการตั้งชื่อตัวแปร (Variable name) จาวาสคริปท์ยอมรับตัวอักษรภาษาอังกฤษ (a-z, A-Z) , ตัวเลข (0-9) และเครื่องหมายขีดใต้ (Underscore) ‘_’ อักขระตัวแรกของชื่อตัวแปรต้องเป็นตัวอักษรหรือเครื่องหมายขีดใต้เท่านั้น (เช่น speedValue, high2_3, vName เป็นต้น) อักษรตัวเดียวกันแต่เป็นอักษรตัวใหญ่ตัวเล็ก (เช่น a กับ A, p กับ P) สำหรับการใช้ตั้งชื่อตัวแปรจะแตกต่างกัน (Case-sensitive) เช่น N_Name กับ n_name จะเป็นคนละคำกัน การกำหนดตัวแปรกระทำผ่านคำหลัก var ดังนี้

```
var my_param = 2
// และภายหลังเราสามารถกำหนดข้อมูลอีกชนิดหนึ่งให้กับตัวแปรตัวเดิมได้โดย
// ไม่ผิดอะไร ดังนี้
my_param = “Hi...everybody!”
```

ภาษาจาวาสคริปท์ไม่จำเป็นต้องมีการประกาศชนิดของตัวแปรเหมือนกับภาษาอื่น เพราะการกำหนดชนิดและการแปลงชนิดของตัวแปรของภาษาจาวาสคริปท์จะกระทำให้โดยอัตโนมัติ เช่น การกำหนด a=2 ; b=5 ; x=a+b สามารถทำได้เลย ถ้าเป็นภาษาอื่นต้องประกาศชนิดก่อน เช่น int a ; int b ; int x ; x=a+b ; จึงถือว่าถูกต้อง ไม่เช่นนั้นจะคอมไพล์ให้เป็นภาษาเครื่องไม่ผ่าน

2.5.2 ฟังก์ชัน (Function)

“ฟังก์ชัน” กำหนดโดยใช้คำหลัก function แล้วตามด้วยชื่อฟังก์ชันและรายการพารามิเตอร์ (Parameter หรือ ข้อมูลอินพุต) ซึ่งจะถูกปิดล้อมด้วยวงเล็บ ( ) และแบ่งแยกแต่ละพารามิเตอร์ด้วยเครื่องหมายคอมม่า (,) เช่น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

function addnumber (a, b, c) { return a+b+c }

ถ้าฟังก์ชันนั้นไม่มีการตอบรับพารามิเตอร์ใด ๆ ก็จะกำหนดดังนี้

function no_param( ) { ... }

สำหรับการกำหนดขอบเขตหรือบล็อค (Block) ของฟังก์ชันจะใช้วงเล็บปีกกา { } ซึ่งจะบรรจุคำสั่งต่างไว้ภายใน การส่งค่าข้อมูลกลับคืนจากฟังก์ชั่นทำได้โดยใช้คำหลัก return ภายในบล็อคของฟังก์ชัน การกำหนดของฟังก์ชันแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

```
function testfunc(a, b, c)   {
    x=a+b-c
    document.write('a+b-c = ' ,  x,  '\n'
}
testfunc(1, 2, 3)                  // เรียกฟังก์ชัน
testfunc(4.5, -8, 0.004)           // เรียกฟังก์ชัน
```

ภาษาจาวาสคริปท์ไม่จำเป็นต้องใช้เครื่องหมายเซมิโคล่อน (;) เพื่อแสดงการจบคำสั่งเหมือนดังเช่นภาษาจาวาหรือ C/C^{++} แต่ก็สามารถใช้ได้ในกรณีที่ต้องรวมหลาย ๆ คำสั่งให้อยู่ภายในบรรทัดเดียวกัน ดังเช่นตัวอย่างการกำหนดค่าตัวแปรในหัวข้อที่แล้ว (ชนิดของข้อมูล) สำหรับเครื่องหมาย // คือการแสดง Comment เพื่ออธิบายการทำงานของข้อความใด ๆ ที่อยู่หลังเครื่องหมายนี้ภายในหนึ่งบรรทัดจะไม่ถูกเว็บบราวเซอร์แปลเพื่อปฏิบัติงานแต่อย่างใด และสำหรับคำสั่ง document.write(..) คือ ฟังก์ชันของระบบภายในเว็บบราวเซอร์ ที่ทำหน้าที่แสดงผลข้อความหรือข้อมูลออกที่หน้าโฮมเพจของเว็บบราวเซอร์และมีการทำงานคล้ายกับฟังก์ชัน printf() ของภาษา C หรือ write() ของภาษา Pascal

2.5.3 อ๊อปเจ็กต์ (Object)

"อ๊อปเจ็กต์" คือ ข้อมูลในรูปแบบหนึ่งของภาษาจาวาสคริปท์ ซึ่งเป็นข้อมูลที่ประกอบขึ้นด้วยคุณสมบัติหรือพ็อปเปอร์ตี้ (Property) ต่าง ๆ ซึ่งมีอยู่ 2 ชนิด คือ ตัวแปร และฟังก์ชัน (หรือเม็ทธอด) โดยในความเป็นจริง อ๊อปเจ็กต์เปรียบเสมือน "วัตถุ" เช่น รถยนต์ย่อมมีคุณสมบัติที่บ่งบอกถึงเอกลักษณ์ของตัวเองเช่น มีล้อ มีเครื่องยนต์ (ตัวแปรของอ๊อปเจ็กต์จะเก็บข้อมูลของล้อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเครื่องยนต์) และรถยนต์มีหน้าที่เป็นพาหนะสำหรับใช้สัญจรไปมา โดยใช้ล้อเพื่อเคลื่อนที่ และมีเครื่องยนต์ที่เผาผลาญเชื้อเพลิง เพื่อส่งแรงขับเคลื่อนไปสู่ล้อให้สามารถพุ่งทะยานไปข้างหน้าได้ (ฟังก์ชันของอ๊อปเจ็กต์ทำหน้าที่นำเอาข้อมูลจากตัวแปรที่มีอยู่ไปใช้คำนวณ เพื่อทำให้เกิดกิจกรรมในที่นี้คือ ทำให้รถยนต์เคลื่อนที่ไปได้) และนี่คือหลักการของ OOP ซึ่งพยายามจำลองโลกแห่งความเป็นจริงมาสู่การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นคุณสมบัติหนึ่งของภาษาจาวาสคริปท์ การอ้างอิงอินสแตนซ์ (Instance) หรือตัวตนหนึ่ง ๆ ของอ๊อปแจ็กต์ในหน่วยความจำทำได้โดยกำหนดตามรูปแบบนี้ ObjectName.PropertyName ดังตัวอย่างที่ผ่านมา document.write(..) คือ การเรียกใช้ฟังก์ชันซึ่งเป็นพ็อปเปอร์ตี้หนึ่งของอ๊อปเจ็กต์ document นอกจากนั้นเว็บบราวเซอร์ยังมีวิธีการสำหรับให้พ็อปเปอร์ตี้สามารถอ้างอิงถึงตัวอ๊อปเจ็กต์ที่เป็นเจ้าของตัวมันได้โดยใช้คำหลัก this และใช้คำหลัก new ในการสร้างอ๊อปเจ็กต์ขึ้นใหม่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

```
function obj (a, b)   {
  this.a = a
  this.b = b
}
xx = new  obj (3, 4)
```

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการสร้างอ๊อปเจ็กต์ xx โดยใช้คำหลัก new ให้เป็นชนิด obj (สร้างอ๊อปเจ็กต์โดยใช้ฟังก์ชัน) ซึ่งมีพ็อปเปอร์ตี้ตั้งต้นอยู่ 2 ตัว คือ a และ b ฉะนั้นอ๊อปเจ็กต์ที่ this ใช้อ้างอิงถึงในฟังก์ชัน obj() ในที่นี้คืออ๊อปเจ็กต์ xx และถ้ามีการสร้างอินสแตนซ์ของอ๊อปเจ็กต์ขึ้นมาใหม่เช่น abc ด้วยคำหลัก new อีกเช่นเคย ดังนี้

```
abc  =  new obj (5, 6)
```

อ๊อปเจ็กต์ที่ this จะอ้างอิงถึงก็คืออ๊อปเจ็กต์ abc ตัวใหม่นั่นเอง ถ้าเราจะใช้ฟังก์ชัน document.write ('xx.a', xx.a, 'xx.b', xx,b) เพื่อแสดงผลลัพธ์ของทั้งตัวแปร xx.a และ xx.b ก็จะได้คำตอบคือ xx.a = 3 และ xx.b = 4 หลังจากที่เราได้สร้างอ๊อปเจ็กต์ใด ๆ โดยใช้คำหลัก new แล้วนั้น เราสามารถที่จะเพิ่มพ็อปเปอร์ตี้ให้แก่อ๊อปเจ็กต์นั้นได้โดยวิธีการกำหนดค่าให้แก่ตัวแปรตัวใหม่ดังนี้ xx.c = 9 หลังจากนั้นพ็อปเปอร์ตี้ของอ๊อปเจ็กต์ xx ทั้งหมดก็จะเพิ่มเป็น 3 ตัว คือ xx.a = 3, xx.b = 4 และ xx.c = 9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.4 อาร์เรย์ (Array)

ในภาษาจาวาสคริปท์อ๊อปเจ็กต์สามารถถูกกำหนดให้เป็นข้อมูลในรูปแบบของ "อาร์เรย์" ได้ นั่นหมายความว่า พ็อปเปอร์ตี้หรือตัวแปรตัวแรกของอาร์เรย์อ๊อปเจ็กต์ จะถูกกำหนดดัชนีให้เริ่มจาก 0 และตัวถัด ๆ ไปเป็น 1, 2, 3, ... ไปเรื่อย ๆ เมื่อเป็นเช่นนี้ เราจึงสามารถเพิ่มพ็อปเปอร์ตี้ให้แก่อ๊อปเจ็กต์โดยที่ยังไม่ได้ตั้งชื่อได้

เราสามารถเข้าถึงข้อมูลภายในอาร์เรย์ได้หลายรูปแบบ ทั้งตัวเลขและตัวอักษร (ซึ่งภาษาจาวาสคริปท์ได้หยิบยืมคุณสมบัตินี้มาจากภาษา Perl)

2.5.5 เม็ทธอด (Method)

"เม็ทธอด" คือ พ็อปเปอร์ตี้ของอ๊อปเจ็กต์ที่เป็นฟังก์ชัน (Function Property) (ในภาษาจาวาต้นแบบจะเรียกฟังก์ชันว่าเป็น "เม็ทธอด" ซึ่งจริง ๆ แล้วก็คือตัวเดียวกัน) ซึ่งเวลาเรียกใช้งานจะถูกกำหนดเหมือน ๆ กับพ็อปเปอร์ตี้อื่น ๆ (เช่น พ็อปเปอร์ตี้ที่เป็นตัวแปร) ของอ๊อปเจ็กต์ ตัวอย่างต่อไปนี้เราจะเพิ่มพ็อปเปอร์ตี้ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ชื่อ show_a() สำหรับการแสดงค่าของพ็อปเปอร์ตี้ตัวแปร a ภายในอ๊อปเจ็กต์ xx ดังตัวอย่างต่อไปนี้

```
function show_a ()  { document.write('a is ', this.a) }
    xx.show_a = show_a
    xx.show_a ()
    // ผลลัพธ์คือ a is 3
```

จากตัวอย่างในบรรทัดแรก คือ ตัวตนของฟังก์ชัน show_a( ) ทั้งหมด สำหรับบรรทัดที่สองคือ การเพิ่มพ็อปเปอร์ตี้ซึ่งเป็นฟังก์ชัน show_a ให้แก่อ๊อปเจ็กต์ xx และบรรทัดสุดท้ายก็คือการเรียกฟังก์ชัน xx.show_a() ใช้งานหลังจากการเพิ่มเรียบร้อยแล้ว นอกจากนั้นเราสามารถเพิ่มพ็อปเปอร์ตี้ฟังก์ชันให้แก่อ๊อปเจ็กต์ได้โดยตรงอีกวิธีหนึ่ง คือ

```
xx.show_a = function show_a ()  {
      document.write ( 'a  is ', this.a )
}
xx.set_b  =   function  set_b (b)   { this.b = b }
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.6 ตัวสร้างอ๊อปเจ็กต์ว่าง (Undocument Object Creator)

จาวาสคริปท์มีฟังก์ชันอยู่ตัวหนึ่งชื่อ Object() สำหรับการสร้างโครงร่างเปล่า ๆ ของอ๊อป - เจ็กต์ซึ่งยังไม่มีพ็อปเปอร์ตี้ใด ๆ บรรจุอยู่ภายในเลย และอ๊อปเจ็กต์ว่างนี้จะสามารถถูกเพิ่มเติมพ็อปเปอร์ตี้ใหม่ ๆ เข้าไปได้ในภายหลัง การสร้างอ๊อปเจ็กต์แบบนี้ทำได้โดยใช้คำหลัก new ดังตัวอย่างต่อไปนี้

```
nn = new object()        // สร้างอ๊อปเจ็กต์ว่าง nn
nn.a = 'first'           // เพิ่มตัวแปร a ให้แก่อ๊อปเจ็กต์ nn
nn.show_a = show_a       // เพิ่มฟังก์ชัน show_a() ให้แก่อ๊อปเจ็กต์ nn
nn.show_a()              // เรียกใช้ฟังก์ชัน show_a() ตัวเดียวกันกับที่ใช้กับ
                         // อ๊อปเจ็กต์ xx
for ( m in nn )          { document.write ( 'nn.', m, '=', nn[m], '\n' }
// ผลลัพธ์คือ  nn.a = first
```

2.5.7 อ๊อปเจ็กต์และการอ้างอิงถึง (Object and Reference)

ต่อไปนี้คือตัวอย่างการกำหนดอ๊อปเจ็กต์ให้แก่ตัวแปรอ๊อปเจ็กต์อื่น ๆ

```
function obj (a, b)   {
    this.a = a
    this.b = b
}
zz = null
xx = new obj(1, 2)              // สร้างอ๊อปเจ็กต์ใหม่เพียงครั้งเดียว
zz = yy
```

จากตัวอย่างการกำหนดอ๊อปเจ็กต์ yy = xx; zz = yy ไม่ได้มีความหมายสำหรับการคัดลอก (Copy) ข้อมูลภายในอ๊อปเจ็กต์หนึ่งไปสู่อีกอ๊อปเจ็กต์หนึ่งแต่อย่างใด ดังเช่นการกำหนดค่าตัวแปรธรรมดาทั่วไป แต่เป็นการกำหนดจุดอ้างอิง (Reference) ของอ๊อปเจ็กต์ ซึ่งจากตัวอย่างการสร้างอ๊อปเจ็กต์ใหม่โดยใช้คำหลัก new ได้เกิดขึ้นเพียงแค่ครั้งเดียว ดังนั้นทั้งอ๊อปเจ็กต์เดียวกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(คือ xx) และการอ้างอิงถึงพ็อปเปอร์ตี้ภายในอ๊อปเจ็กต์ก็คือ ตัวเดียวกันเช่นกัน การกำหนด xx = yy เป็นการกำหนดตัวชี้ (Pointer) ของ yy ให้ชี้ไปที่อ๊อปเจ็กต์ xx (ซึ่งภายในอ๊อปเจ็กต์ก็มีการอ้างอิงถึงตัวมันเองโดยใช้คำหลัก this) ดังนั้นถ้ากำหนด yy.c = 5 ก็จะมีค่าเท่ากับการกำหนด xx.c = 5 แต่การที่ทั้งอ๊อปเจ็กต์ xx, yy และ zz มีจุดอ้างอิงเดียวกันนี้จะสิ้นสุดลง ก็ต่อเมื่ออ๊อปเจ็กต์ใดอ๊อปเจ็กต์หนึ่งถูกกำหนดให้ไปชี้ หรืออ้างอิงถึงอ๊อปเจ็กต์อื่น หรือถูกสร้างอ๊อปเจ็กต์ขึ้นมาใหม่

2.5.8 การเปรียบเทียบอ๊อปเจ็กต์ (Comparing Object)

เครื่องหมายการเปรียบเทียบ '==' (เท่ากัน) และ '!=' (ไม่เท่ากัน) ทั้งสองมีไว้สำหรับใช้กับตัวแปรที่เป็นชนิดสเกลล่า (Scalar) เช่น ตัวเลข ตัวอักษร สตริง ฯลฯ แต่สำหรับอ๊อปเจ็กต์แล้ว ถ้าเราจะทำการเปรียบเทียบ ลองดูตัวอย่างต่อไปนี้

```
x1 = new obj(1, 2)
x2 = x1
y1 = new obj(1, 2)
y2 = new obj(1, 3)
```

และเราจะสร้างฟังก์ชันสำหรับการเปรียบเทียบอ๊อปเจ็กต์สองอ๊อปเจ็กต์ได้ดังนี้

```
function comp (x, xn, y, yn)     {
    var result = (x = = y)  ?  '= ='   :   '!='
    //  ใช้ตัวดำเนินการ = ? : แบบภาษา C
    document.write ('Compare : ', xn, ' ', result, ' ', yn, '\n')
}  // x และ y คือตัวแปรอ๊อปเจ็กต์ ส่วน xn และ yn คือ ตัวแปรสตริง
```

ผลลัพธ์ที่ได้จากการเปรียบเทียบอ๊อปเจ็กต์ทั้งหมดคือ

```
Compare : x1 = = x2
Compare : x1 ! = y1
Compare : x1 ! = y2
Compare : x1 ! = null
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อ๊อปเจ็กต์ x == y (อ่านว่า x เท่ากับ y) เมื่อ x และ y ได้อ้างอิงไปที่อ๊อปเจ็กต์เดียวกัน อย่างไรก็ตาม ทั้งสองอ๊อปเจ็กต์มีโครงสร้างของอ๊อปเจ็กต์ที่เหมือนกัน มีข้อมูลในพ็อปเปอร์ตี้ที่เหมือนกันทุกประการ แต่ต่างฝ่ายก็ต่างถูกสร้างขึ้นใหม่ไม่ได้ถูกอ้างอิงถึงกันและกัน จึงถือว่าไม่เท่ากัน

2.5.9 อ๊อปเจ็กต์และความซับซ้อน (Object and Complexity)

ความซับซ้อนที่ว่านี้ก็คือ อ๊อปเจ็กต์สามารถมีพ็อปเปอร์ตี้เป็นอ๊อปเจ็กต์ได้

```
zz = new obj (0, 5)
xx = new obj (11, zz)
document.write('xx.a = ' , xx.a, ' xx.b.a = ' , xx.b.a, '\n')
bb = xx.b   // เหมือนกับ bb = zz
bb.a = 6    // เหมือนกับ zz.a = 6 ซึ่ง xx.b.a ได้อ้างถึง
document.write('xx.a = ' , xx.a, ' xx.b.a = ' , xx.b.a, '\n')
```

ผลลัพธ์ที่ได้คือ

```
xx.a = 11    xx.b.a = 0
xx.a = 11    xx.b.a = 6
```

2.5.10 ตัวแปรฟังก์ชัน (Function Variable)

เราสามารถกำหนดตัวแปรให้ทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันได้ "ตัวแปรฟังก์ชัน" จึงสามารถถูกเรียกใช้งานได้ โดยเรียกชื่อของตัวแปรนั้น แล้วตามด้วยพารามิเตอร์อินพุต เหมือนการเรียกใช้งานฟังก์ชัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

```
function func_1 (a)    {
    document.write('func_1 : a = ' , a, '\n')
}
function func_2 (a, b)    {
    document.write('func_2 : a = ' , a, ' b = ' , b, '\n')
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
}
x = func_1 ;     x(1)
x = func_2 ;     x(5, 'Hello')     // เรียกตัวแปรฟังก์ชัน x ตัวเดิม
// ผลลัพธ์ คือ
// func_1 : a = 1
// func_2 : a = 5   b = Hello
```

2.6) Cascade Style Sheet (CSS)

เป็นคุณสมบัติที่จะทำงานอยู่บนกฎและรูปแบบของสไตล์ชีต โดยที่กฎจะเป็นส่วนที่บอกลักษณะรูปแบบของส่วนที่เป็นรายการที่ใช้แสดงผล ส่วนสไตล์ชีตจะเป็นกฎตั้งแต่หนึ่งข้อขึ้นไปที่ใช้กำกับเอกสาร HTML ได้ตามที่เราต้องการ โดยไม่ต้องขึ้นกับการตั้งค่าในเว็บบราวเซอร์ของเครื่องแต่ละเครื่อง ซึ่งการใช้งาน CSS นี้ ต้องเลือกใช้กับบราวเซอร์ที่สามารถใช้งานกับ CSS ได้ (CSS-enhanced browser) อย่าง Microsoft Internet Explorer 3.0 (MSIE3) และ Netscape Communicator 4.x ขึ้นไป แต่สำหรับ Netscape Navigator 2.x และ 3.x จะไม่สามารถใช้งานกับสไตล์ชีตได้ ซึ่งมันจะทำงานโดยข้ามส่วนที่เป็น Style ไป ในขณะที่ Navigator 1.x และ MSIE2 จะแสดงข้อความของสไตล์ชีตแทน

2.6.1 โครงสร้างของกฎและรูปแบบของสไตล์ชีต

จะประกอบด้วย 2 ส่วนดังตัวอย่างต่อไปนี้

```
H1      {color : red}
|_|     |_____|
Selector  Declaration
```

2.6.1.1 **ส่วนที่เป็นตัวเลือก** (Selector) คือส่วนที่อยู่ก่อนหน้าเครื่องหมายวงเล็บปีกกา จะเป็นส่วนเชื่อมระหว่างเอกสาร HTML และ Style ซึ่งจะเป็นส่วนที่ใช้กำหนดว่า จะให้ส่วนใดแสดงผลอย่างไรภายใต้ส่วนที่ประกาศ

2.6.1.2 **ส่วนที่เป็นส่วนประกาศ** (Declaration) คือส่วนที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายวงเล็บปีกกา จะเป็นส่วนของกฎที่ให้แสดงผล อย่างเช่น ในตัวอย่าง ส่วนที่เป็นข้อความจะมีขนาดเป็นหัวเรื่อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระดับที่ 1 (Heading 1) โดยถูกกำหนดให้มีสีแดงโดยกฎอยู่ภายใต้ Declaration ภายในวงเล็บแทน ซึ่งในส่วนประกาศนี้จะประกอบไปด้วยสองส่วน แยกกันด้วยเครื่องหมาย ":" ประกอบด้วย

- คุณสมบัติหรือ Property คือส่วนที่อยู่ก่อนเครื่องหมาย ":"
- ค่าที่กำหนดหรือ Value คือส่วนที่อยู่หลังเครื่องหมาย ":" นั่นเอง

```
H1      {color : red}
        |___|  |__|
      Property  Value
```

2.6.2 วิธีการจัดกลุ่มของส่วนที่เป็นตัวเลือกและกฎ

สำหรับผู้ที่ออกแบบการใช้งาน CSS จุดประสงค์หนึ่งก็เพื่อให้ช่วยให้ออกแบบของรายการที่แสดงในโฮมเพจง่ายขึ้นและไม่ต้องเสียเวลานานในการ load คำสั่งที่ใช้กำหนดรูปแบบการแสดงผล ซึ่งทำได้โดยการลดขนาดชุดคำสั่งโดยการจัดกลุ่ม ลองพิจารณากฎต่อไปนี้ดู

```
H1  {font-weight : bold}
H2  {font-weight : bold}
H3  {font-weight : bold}
```

จะเห็นว่ากฎที่ใช้กำหนดรูปแบบนี้มีการประกาศเหมือนกัน โดยการกำหนดให้แสดงผลตัวอักษรเป็นตัวหนา ในการใช้งานจริงเราสามารถใช้การจัดกลุ่มตัวเลือก (Group Selector) ได้ดังนี้

```
H1,H2,H3  {font-weight : bold}
```

ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เหมือนกันกับแบบแรก แต่ถ้าเป็นกรณีที่ส่วนที่เป็น Selector แตกต่างกันเช่น

```
H1  {color : red}
H1  {text-align : center}
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีนี้ ส่วนที่เป็น Heading ระดับที่ 1 ถูกกำหนดให้มีสีแดงและจัดให้อยู่ตรงกลาง โดยคำสั่ง text-align แต่เพื่อให้ง่ายขึ้น เราจะอาศัยการจัดกลุ่มส่วนประกาศที่สัมพันธ์กันกับตัวเลือกหรือ Selector ตัวเดียวกันแล้วคั่นด้วยเครื่องหมาย ";" จะได้เป็น

```
H1 {
        Color : red;
        Text-align : center;
}
```

2.6.3 การทำงานของสไตล์ชีต มี 3 แบบคือ

2.6.3.1 Linking Style Sheet หมายถึง การกำหนดสไตล์ชีตให้แก่ข้อความโดยการเขียนสไตล์ชีตเก็บไว้เป็นไฟล์หนึ่ง แยกออกมาจากเอกสาร HTML โดยเขียนในโปรแกรม Editor ใด ๆ ก็ได้ แล้วบันทึกเป็นนามสกุล ".css" ซึ่งวิธีการนี้เราจะเขียนสไตล์ชีตไว้เพียงแค่ไฟล์เดียว แต่สามารถควบคุมเอกสาร HTML ได้หลายเอกสาร โดยเมื่อเราสร้างสไตล์ชีตเสร็จแล้ว (สมมติว่าชื่อ test.css) ให้เขียนคำสั่งในเอกสาร HTML ที่เราต้องการใช้สไตล์ชีตว่า

```
<LINK REL="stylesheet" TYPE="text/css" HREF="test.css">
```

เพื่อเป็นการเรียกสไตล์ชีตนั้นมาใช้งาน โดยไฟล์ที่ชื่อ test.css มีรายละเอียดดังนี้

```
H1 {font-family : Arial; font-size : 40pt; Color : red}
P {font-size : 12pt; line-height : 20pt}
```

ดังนั้นตัวอย่างเอกสาร HTML ที่ได้ในกรณีนี้คือ

```
<HTML>
<HEAD>
<LINK REL="stylesheet" TYPE="text/css" HREF="test.css">
</HEAD>
<BODY>
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
<H1>What is cookies?</H1>
<P>
Cookies are bits of information
that your browser picks up
and carries around with it internally.
</P>
</BODY>
</HTML>
```

2.6.3.2 Embedding Style Sheet เป็นการเขียนสไตล์ชีตไว้ในเอกสาร HTML แต่ละเอกสาร โดยเขียนไว้ภายในคำสั่ง <HEAD>...</HEAD> การใช้สไตล์ชีตแบบ Embedding นี้จะทำหน้าที่ควบคุมเอกสาร HTML ได้เพียงเอกสารเดียวเท่านั้น การเขียนสไตล์ชีตแบบ Embedding มีวิธีการเขียนดังต่อไปนี้

```
<HEAD>
<STYLE TYPE="text/css">
Selector1 {Property : Value}
Selector2 {Property : Value}
.....
Selectorn {Property : Value}
</STYLE>
</HEAD >
```

ตัวอย่างเช่น

```
<HTML>
<HEAD>
<STYLE TYPE="text/css">
H1 {
        font-family : Arial;
        font-size : 40pt;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
        Color : red;
        }
P {
        font-size : 12pt;
        line-height : 20pt;
        }
</STYLE>
</HEAD >
<BODY>
<H1>What is cookies?</H1>
<P>
Cookies are bits of information
that your browser picks up
and carries around with it internally.
</P>
</BODY>
</HTML>
```

2.6.3.3 Inline Style Sheet หมายถึงการเขียนสไตล์ชีตแบบ Inline เป็นการใช้สไตล์ชีตเพื่อควบคุมเอกสาร HTML เฉพาะบรรทัดนั้นบรรทัดเดียว มีวิธีการเขียนดังต่อไปนี้

```
<Selector STYLE="Property : Value">...</Selector>
```

ตัวอย่างเช่น

```
<HTML>
<BODY>
<H1  STYLE="font-family : Arial; font-size : 40pt; Color : red">
What is cookies?</H1>
<P STYLE="font-size : 12pt; line-height : 20pt">
Cookies are bits of information
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
that your browser picks up
and carries around with it internally.
</P>
</BODY>
</HTML>
```

2.6.4 การใช้ Selector

หลังจากที่ได้ศึกษาสไตล์ชีตทั้ง 3 แบบแล้ว ต่อไปเราจะพิจารณาเรื่องเกี่ยวกับ Selector ซึ่งเราสามารถแบ่งประเภทของการใช้ Selector ร่วมกับสไตล์ชีตออกเป็น 3 ประเภทคือ

2.6.4.1 **การใช้ Selector ตัวเดียว** เช่น

```
H1  {font-family : Arial; font-size : 40pt; Color : red}
```

หรือ

```
P  {font-size : 12pt; line-height : 20pt}
```

2.6.4.2 **การใช้ Selector หลายตัวร่วมกับสไตล์ชีตเดียวกัน** ทำได้โดยการใส่เครื่องหมายคอมม่า (,) ระหว่าง Selector แต่ละตัวเช่น H1, H2, H3 {font-family : Arial; font-size : 40pt; Color : red} หรือ

```
P, I, B  {font-size : 12pt; line-height : 20pt}
```

2.6.4.3 **การใช้สไตล์ชีตกับ Selector ตัวที่สอง ซึ่งอยู่ใน Selector ตัวที่หนึ่งเท่านั้น** ทำได้โดยเขียนต่อกันไปเลย โดยไม่ต้องมีคอมม่าคั่น เช่น

```
H1B  {font-family : BrowalliaNewThai; font-size : 14pt; Color : blue}
```

ตัวอย่างเช่น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
<HTML>
<HEAD>
<STYLE TYPE="text/css">
H1I { font-family : Arial; font-size : 14pt; Color : red }
</STYLE>
</HEAD >
<BODY>
<H1>What is <I>cookies</I>?</H1>
<I>Cookies are bits of information
that your browser picks up
and carries around with it internally. </I>
</BODY>
</HTML>
```

2.6.5 การใช้ Class

Class คือการตั้งชื่อให้กับ Selector เพื่อความสะดวกในการเรียกใช้งาน การใช้ Class แบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

2.6.5.1 **การใช้ Class เฉพาะกับ Selector ตัวใดตัวหนึ่ง** มีลักษณะดังต่อไปนี้

```
Selector.#1 {Property : Value}
Selector.#2 {Property : Value}
.....
Selector.#n {Property : Value}
```

เมื่อกำหนด Class ได้แล้วให้เขียนคำสั่งลงในเอกสาร HTML ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
<Selector Class="#1">
<Selector Class="#2">
...
<Selector Class="#n">
```

ตัวอย่างเช่น

```
<HTML>
<HEAD>
<STYLE TYPE="text/css">
H3.apple { font-family : Arial; font-size : 10pt; Color : red }
H3.cherry { font-family : TimesNewRoman; font-size : 14pt; Color : green }
</STYLE>
</HEAD >
<BODY>
<H3 Class="apple">What is cookies?</H3>
<H3 Class="cherry">What is cookies?</H3>
</BODY>
</HTML>
```

2.6.5.2 การใช้ Class ร่วมกับคำสั่ง HTML คำสั่งใดก็ได้ สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

```
.#1 {Property : Value}
.#2 {Property : Value}
.....
.#n {Property : Value}
```

เมื่อกำหนด Class ได้แล้วให้เขียนคำสั่งลงในเอกสาร HTML ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
<ANYSelector Class="#1">
<ANYSelector Class="#2">
...
<ANYSelector Class="#n">
```

ตัวอย่างเช่น

```
<HTML>
<HEAD>
<STYLE TYPE="text/css">
.apple  { font-family : Arial; font-size : 10pt; Color : red }
.cherry  { font-family : TimesNewRoman; font-size : 14pt; Color : green }
</STYLE>
</HEAD >
<BODY>
<H3 Class="cherry">What is cookies?</H3>
<H3 Class="apple">What is cookies?</H3>
<DIV Class="cherry"> What is cookies?</DIV>
</BODY>
</HTML>
```

2.6.6 การใช้ ID

ID เป็นการอนุญาตให้เราตั้งชื่อที่เฉพาะเจาะจงให้แต่ละสไตล์ชีต เพื่อความสะดวกในการเรียกใช้งาน โครงสร้างของ ID มีลักษณะดังต่อไปนี้

```
.#id1  {Property : Value}
.#id2  {Property : Value}
.....
.#idn  {Property : Value}
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อกำหนด ID ได้แล้วให้เขียนคำสั่งลงในเอกสาร HTML ดังต่อไปนี้

```
<Selector1 ID="id1">
<Selector2 ID=" id2">
...
<Selectorn ID=" idn">
```

ตัวอย่างเช่น

```
<HTML>
<HEAD>
<STYLE TYPE="text/css">
#id1  { font-family : Arial; font-size : 10pt; Color : red }
#id2  { font-family : TimesNewRoman; font-size : 14pt; Color : green }
</STYLE>
</HEAD >
<BODY>
<H3 ID="id1">What is cookies?</H3>
<DIV ID="id2"> What is cookies?</DIV>
</BODY>
</HTML>
```

2.6.7 การเขียนคำอธิบายประกอบ

คำอธิบายประกอบหรือ comment เป็นส่วนที่ช่วยทำให้เข้าใจความหมายของ coding หรือคำสั่งภาษาคอมพิวเตอร์ หรืออาจใช้ในกรณีที่ไม่ต้องการให้โปรแกรมทำชุดคำสั่งก็ใส่เครื่องหมาย comment กำกับเอาไว้ ในกรณีที่ไม่ต้องการให้เกิดปัญหากับบราวเซอร์รุ่นเก่า แสดงข้อความในส่วนที่เป็นสไตล์ชีตออกมา ก็สามารถทำได้โดยใส่ไว้ใน comment ส่วนบราวเซอร์ที่มีการเพิ่มความสามารถของ CSS นั้นจะแยกออกมาได้ว่าส่วนนี้เป็นคำสั่งของสไตล์ชีต โดย comment ของภาษา HTML จะเขียนเริ่มต้นด้วย <!-- และจบด้วย --> ในขณะที่คำอธิบายหรือ comment ของ CSS จะเป็น "/*" และ "*/"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
<HTML>
<HEAD>
<STYLE TYPE="text/css">
<!--
H1  { font-family : Arial; font-size : 40pt;Color : red}
P  { font-size : 12pt; line-height : 20pt} /* Set Style of P */
-->
</STYLE>
</HEAD >
<BODY>
    ...
</BODY>
</HTML>
```

การประยุกต์ใช้ในด้านอื่น ๆ เช่น ด้านตัวอักษร ด้านพื้นหลังของภาพ ด้านการใส่กรอบให้กับข้อความ และอื่น ๆ อีกมากมาย ซึ่งจะไม่ขอกล่าวในที่นี้

จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้จะเห็นได้ว่า สไตล์ชีตเป็นเครื่องมือที่ช่วยในการออกแบบเว็บเพจได้มากทีเดียว เพราะโครงสร้างของภาษา HTML นั้น ยังขาดลักษณะที่ช่วยในการกำหนดรูปแบบการนำเสนอข้อมูลที่ต้องการความหลากหลาย ซึ่งสไตล์ชีททำให้การกระทำดังกล่าวสามารถทำได้สะดวกขึ้น และสร้างได้ตามที่ต้องการแทนการใช้รูปล้วน ๆ ซึ่งทำให้ขนาดหน้าโฮมเพจขนาดใหญ่เกินไป

2.7) Perl

Perl ย่อมาจากคำว่า Pratical Extraction and Report Language สร้างขึ้นโดย Larry Wall เพื่อช่วยงานเขียนโปรแกรมในระบบ UNIX โดยกำเนิดในปี ค.ศ. 1986 เมื่อ Larry ทำหน้าที่เป็นโปรแกรมเมอร์ในระบบ UNIX เขาจำเป็นต้องจัดการกับแฟ้มเอกสารที่อยู่ในรูปแฟ้มตัวอักษร (Text File) จำนวนมากที่มีความเกี่ยวโยงกัน เอกสารเหล่านี้สร้างความยุ่งยากให้กับเขาเป็นอย่างมาก จึงได้พยายามหาวิธีจัดการกับแฟ้มข้อมูลดังกล่าวโดยเริ่มจากการใช้ awk มาช่วยงาน แต่พบในเวลาต่อมาว่า awk ไม่สามารถตอบสนองความต้องการของเขาได้มากนัก เขาจึงได้เริ่มต้นพัฒนาโปรแกรมเพื่อมาช่วยงานของเขาขึ้นมาเอง โดยเขียนเป็นโปรแกรมยูทิลิตี้เพื่อช่วยจัดการกับเอกสารต่าง ๆ เช่นเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กับที่โปรแกรมเมอร์ในระบบ UNIX ทั่ว ๆ ไปทำกัน หลังจากนั้นไม่นานเขาก็พัฒนาขึ้นเป็นภาษาใหม่ โดยเขียนเป็น Interpreter เพื่อใช้ในการจัดการกับเอกสารที่อยู่ในรูปของตัวอักษร โดยเฉพาะต่อมาได้พัฒนาให้มีความสามารถเพิ่มขึ้น โดยการเพิ่มความสามารถในการกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ เช่นเดียวกับที่มีในภาษาโปรแกรมอื่น ๆ รวมถึงความสามารถในการทำงานบนเครือข่ายคอมพิวเตอร์ ภาษานี้ต่อมารู้จักกันในนามของ Perl และเป็นที่นิยมใช้งานกันอย่างรวดเร็วในหมู่โปรแกรมเมอร์ในระบบ UNIX ที่ต้องการความสะดวกรวดเร็วและง่ายในการเขียนโปรแกรม

Perl เลียนแบบเครื่องมือหลายอย่างใน sed และ awk แต่พัฒนาให้ทำงานได้ดีกว่า Perl เขียนขึ้นด้วยภาษา C แต่รูปแบบภาษาสั้นและกระชับกว่าภาษา C มาก เป็นภาษาที่มีความยืดหยุ่นสูง เช่นเดียวกับภาษาระดับสูงทั่วไป Perl ได้ยืมคุณสมบัติหลายอย่างจากภาษา C มาใช้ และทำงานคล้าย Shell Script โดยเขียนโปรแกรมแล้วสั่งให้ตัวแปลภาษา Perl ทำการแปลแล้วทำงานตามคำสั่งนั้น ๆ ได้ทันที ทำให้การพัฒนาโปรแกรมประยุกต์ทำได้ง่าย และรวดเร็วที่สำคัญ Perl แจกจ่ายให้ใช้งานฟรี และมีเวอร์ชันที่ทำงานในเกือบทุกระบบปฏิบัติการ ไม่ว่าจะเป็น UNIX, Window, Linux หรือ Macintoch สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับ Perl รวมถึงดาวน์โหลดโปรแกรมมาติดตั้งใช้งานได้จาก http://www.perl.com/ และ http://language.perl.com/

เมื่อ WWW ได้รับความนิยมอย่างมากจากผู้ใช้อินเตอร์เน็ต และมีการเปิดช่องทางให้ผู้ใช้งานสามารถเรียกใช้โปรแกรมประยุกต์บนเซิร์ฟเวอร์ได้โดยผ่านทาง CGI ของโปรแกรมที่ทำหน้าที่เป็นเว็บเซิร์ฟเวอร์ Perl ซึ่งถูกสร้างขึ้นเพื่อดำเนินการกับเอกสารที่เป็นตัวอักษรโดยเฉพาะ จึงเหมาะกับเอกสารแบบ HTML ซึ่งเป็นเอกสารแบบตัวอักษรด้วยเช่นกัน รวมถึงการที่ Perl เป็นอินเตอร์พรีตเตอร์ จึงไม่ต้องผ่านขั้นตอนการคอมไพล์โปรแกรมที่ยุ่งยากอย่างการใช้ภาษาอื่น ทำให้ง่ายในการใช้งาน Perl จึงกลายเป็นภาษายอดนิยมบนเครือข่ายอินเตอร์เน็ตอย่างรวดเร็ว มีการพัฒนาโปรแกรมประยุกต์ต่าง ๆ ขึ้นใช้งานเป็นจำนวนมากด้วย Perl และมีการแจกจ่ายโปรแกรมเหล่านี้ให้ใช้งานฟรีด้วย ไม่ว่าจะเป็นโปรแกรมสำหรับกรอกแบบฟอร์มต่าง ๆ โปรแกรมนับจำนวนผู้มาใช้บริการของเว็บไซต์ โปรแกรมค้นหาเอกสาร และอื่น ๆ อีกมากมาย

2.7.1 Perl จะต้องใช้อะไรบ้างในการเขียนโปรแกรมเป็น CGI (Common Gateway Interface)

คือต้องมีโฮสต์ (Host) หรือเครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งทำหน้าที่เป็นอินเตอร์เน็ตเซิร์ฟเวอร์ (Internet Server) ผู้ให้บริการข้อมูลแก่ระบบอินเตอร์เน็ต บนเซิร์ฟเวอร์ต้องมี "อินเตอร์เพรทเตอร์" (Interpreter) หรือโปรแกรมสำหรับแปลความหมายคำสั่งของภาษา Perl โปรแกรมนี้ชื่อว่า "Perl" บน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบปฏิบัติการ UNIX โดยทั่วไปสามารถพบได้ที่ไดเร็กทอรี "/usr/local/bin/perl" เพื่อทดสอบว่ามีอินเตอร์เพรทเตอร์อยู่หรือไม่บนโฮสต์นั้นให้ใช้คำสั่งดังนี้

```
$ /usr/local/bin/perl –version
```

ถ้าปรากฏว่าไม่มีโปรแกรม perl อยู่ในไดเร็กทอรีนี้ ก็ให้ติดต่อไปยังผู้ดูแลระบบ (System Administrator) ของโฮสต์นั้น เพราะอาจจะถูกเก็บไว้ที่ไดเร็กทอรีอื่น หรือถ้าไม่มีเลยก็ต้องบอกผู้ดูแลระบบให้ทำการติดตั้งโปรแกรมนี้

2.7.2 จะติดตั้ง Perl เพื่อใช้งานได้อย่างไร

จริง ๆ แล้วหน้าที่ในการติดตั้ง Perl บนระบบปฏิบัติการ UNIX ต้องเป็นหน้าที่ของผู้ดูแลระบบเพราะเป็นผู้มีสิทธิ์แต่เพียงผู้เดียวที่จะติดตั้งหรือลบโปรแกรมใด ๆ แต่อย่างไรก็ตามในกรณีที่ท่านเป็นผู้ดูแลระบบเสียเองก็สามารถดาวน์โหลด (Download) อินเตอร์เพรทเตอร์ของ Perl เวอร์ชั่นล่าสุด 5.005 ได้จากหลาย ๆ เว็บไซต์ แต่ที่แนะนำคือเว็บไซต์ "http://www.perl.com/" และ "http://perl.guru.org/" นอกจากนั้นยังมีคำแนะนำในการติดตั้งให้เหมาะสมในแต่ละระบบด้วย

หากต้องการที่จะนำ Perl มาใช้งานบนระบบปฏิบัติการ Microsoft Window NT 4.0 Server นั้นสามารถทำได้ โดยรายละเอียดทุกขั้นตอนของการติดตั้ง Perl บนระบบ Win 32 รวมไปถึงซอฟต์แวร์ต่าง ๆ สามารถหาได้ที่เว็บไซต์ "http://www.endcontsw.com/people/evangelo.Perl-for-Win32-FAQ.html" แต่อย่างไรก็ตามต้นกำเนิดของ Perl นั้นได้ถูกพัฒนาอยู่บนระบบ UNIX ซึ่งแน่นอนว่าเราสามารถใช้ Perl ได้อย่างเต็มประสิทธิภาพบนระบบ UNIX การใช้งานบนระบบ Windows 9x / NT หรือแม้กระทั่งบน DOS นั้นก็สามารถทำได้แต่ก็ได้เพียงบางส่วนเท่านั้น

2.7.3 โปรแกรมทำงานได้อย่างไร

เราสามารถตั้งชื่อและนามสกุล (Filename.Extension) ของไฟล์ Perl ยังไงก็ได้ แต่โดยมากแล้วก็มักจะตั้งนามสกุลให้เป็น .pl เช่น HelloWorld.pl, Search.pl หรืออาจจะไม่มีนามสกุลเลยก็ได้ ในกรณีที่เราจะทำให้เป็นโปรแกรม CGI ก็เพียงแค่เปลี่ยนนามสกุลเป็น .cgi เช่น guestbook.cgi, counter.cgi เป็นต้น โดยปรกติเว็บเซิร์ฟเวอร์จะรู้จักโปรแกรมที่เป็น CGI ในนามสกุล .cgi นี้ แต่อย่างไรก็ตามผู้ดูแลระบบเว็บ (Webmaster) ก็สามารถกำหนดให้เว็บเซิร์ฟเวอร์รู้จัก .pl หรือนามสกุลอื่น ๆ ได้ เพื่อใช้เป็นโปรแกรม cgi โดยการกำหนดชนิดของ MIME (Multiperpose Internet Mail

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Extension) ให้แก่โปรแกรม HTTPd (HyperText Transfer Protocol daemon) ซึ่งทำหน้าที่ให้บริการเอกสาร WWW

ภาษา Perl นั้นเป็นภาษาแบบถูกแปลในขณะที่ปฏิบัติงาน (Interpreted Language) ไม่ต้องมีการคอมไพล์ (Compile) ก่อนปฏิบัติงาน (Execute) เช่นเดียวกับ Shell Script (csh, ksh, bash) ของ UNIX อย่างไรก็ตามก็มีทีมพัฒนาซอร์ฟแวร์บางกลุ่มเหมือนกันที่ได้สร้าง Compiler สำหรับ Perl ขึ้นมาเช่นกัน แต่ไม่ได้รับความนิยมเท่าที่ควรเพราะยุ่งยากและเสียเวลามากกว่า

เราสามารถใช้โปรแกรมเอดิเตอร์ (Editor) ทั่ว ๆ ไปเพื่อสร้างสคริปท์ภาษา Perl ขึ้นมา เสร็จแล้วก็สามารถปฏิบัติงานได้เลย นอกจากวิธีการปฏิบัติงานแบบนี้แล้ว Perl ยังสนับสนุนอีกหนึ่งวิธีคือสามารถเรียกชื่อไฟล์แล้วปฏิบัติงานได้เลย แต่ก่อนอื่นต้องกำหนดคุณสมบัติของไฟล์นี้ให้สามารถปฏิบัติงานด้วยตัวมันเองได้เสียก่อน โดยการใช้คำสั่ง "ls-l" (list long) บน UNIX ทำงานเหมือนคำสั่ง "dir"(Directory) บน DOS คือดูรายละเอียดคุณสมบัติของไฟล์ ในที่นี้เราต้องการดูว่าเราได้กำหนดให้ไฟล์นี้เป็นไฟล์ที่สามารถปฏิบัติงานด้วยตัวเองได้หรือไม่ ผลปรากฏว่าไม่สามารถทำได้ เพราะข้อความสัญลักษณ์ "-rw-rw-rw" แสดงให้เห็นว่าไฟล์นี้มีคุณสมบัติให้ผู้ใช้ทุกคนบนโฮสต์นี้สามารถเขียนอ่านไฟล์นี้ได้แต่ไม่สามารถปฏิบัติงานได้ ฉะนั้นเราต้องกำหนดให้มันสามารถทำงานได้โดยใช้โปรแกรมหรือคำสั่ง "chmod" (Change mode) ทำหน้าที่คล้าย ๆ กับโปรแกรม "attrib"(Attribute) บน DOS คือเพื่อกำหนดคุณสมบัติของไฟล์ ในที่นี้เรากำหนดอ๊อปชันพารามิเตอร์เป็น "a+x"(All users can execute) ซึ่งเป็นการกำหนดให้ไฟล์ HelloWorld.pl นี้สามารถถูกสั่งให้ปฏิบัติงานได้โดยผู้ใช้ทุกคน ซึ่งเราสามารถที่จะตรวจดูคุณสมบัติของไฟล์ที่เราได้กำหนดไว้โดยใช้คำสั่ง ls-l เช่นเดิม จากนั้นเราก็สามารถปฏิบัติงานไฟล์ HelloWorld.pl ได้โดยการเรียกชื่อไฟล์ตรง ๆ ไม่ต้องเรียกอินเทอร์เพรทเตอร์ Perl นำหน้า แต่บางที UNIX บางระบบก็จำเป็นต้องกำหนดไดเร็กทอรีนำหน้าเพื่อแสดงที่อยู่ของไฟล์นั้นด้วยคือ "../HelloWorld.pl"

2.7.4 ตัวอย่าง Hello World โดย Perl

```
#!/usr/local/bin/perl
# This is my first Perl program.
# I'm so pround of it.
Print 'Hello World!\n';                    # Print a Message
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7.4.1 **บรรทัดแรกของสคริปท์**

ทุก ๆ โปรแกรม Perl จะต้องขึ้นต้นด้วยข้อความ #!/usr/local/bin/perl เสมอ บรรทัดแรกนี้เป็นการบอกให้ระบบปฏิบัติการทราบว่าจะทำอะไรกับไฟล์นี้ เมื่อถูกสั่งให้ปฏิบัติงาน ในที่นี้ก็คือการบอกให้ระบบปฏิบัติการรับทราบว่าให้ปฏิบัติงานไฟล์นี้ผ่านอินเตอร์เพรทเตอร์ perl

2.7.4.2 **การปกปิดข้อความและการจบคำสั่ง**

- *การปกปิดข้อความ (Comment)* ทำได้โดยการใช้เครื่องหมาย "#" นำหน้าข้อความที่ต้องการจะปกปิดการถูกแปลความหมายของอินเตอร์เพรทเตอร์ ข้อความต่าง ๆ ที่อยู่หลังเครื่องหมายนี้จะไม่ได้รับความสนใจจากอินเตอร์เพรทเตอร์ "ยกเว้นบรรทัดแรกของโปรแกรม" การที่จะปกปิดข้อความเพื่อแสดงคำอธิบายต่าง ๆ ในโปรแกรมซึ่งใช้เนื้อที่หลายบรรทัด จำเป็นต้องกำหนดเครื่องหมายนี้ไว้ที่หน้าบรรทัดทุกบรรทัด เพราะเครื่องหมายนี้ 1 อันใช้ได้เพียง 1 บรรทัดเท่านั้น
- *การจบคำสั่ง (End Statement)* ทุกคำสั่งของภาษา Perl ต้องจบด้วยเครื่องหมาย ";" เท่านั้น ดังตัวอย่างในบรรทัดสุดท้าย (เหมือนกับภาษา C, C++, Java ฯลฯ)

2.7.4.3 **การแสดงข้อความ**

ฟังก์ชัน print ทำหน้าที่แสดงผลข้อความและข้อมูลที่เอาท์พุท (ในที่นี้คือจอภาพ) ดังตัวอย่างเป็นการใช้ฟังก์ชัน print เพื่อแสดงข้อความ "Hello World!" แล้วขึ้นบรรทัดใหม่โดยใช้พารามิเตอร์ "\n" และสุดท้ายจบคำสั่งโดยเครื่องหมาย ";"

2.8) <u>การสร้างและการแปลงภาพสองมิติและสามมิติ</u>

ในระบบคอมพิวเตอร์นั้น อาจจะกล่าวได้ว่าการสร้างรูปต่าง ๆ ก็คือการเรียกคำสั่ง (หรือโพร - ซีเดอร์) ที่ใช้สำหรับสร้างรูปนั้น ๆ ขึ้นมา หรือในกรณีของการสร้างรูปที่ซับซ้อนที่ไม่มีคำสั่งในการสร้างอยู่แล้ว เช่น รูปสามมิติ เราจะต้องใช้อัลกอริทึมสำหรับสร้างรูปนั้น ๆ โดยยังคงใช้คำสั่งสร้างรูปทรงพื้นฐาน เช่น จุด เส้นตรง เป็นพื้นฐานของคำสั่งอยู่

ในที่นี้เราจะมาศึกษาถึงวิธีการสร้างภาพ ทั้งภาพสองมิติและสามมิติ (อย่างง่าย) นอกจากนั้นเราจะมาศึกษาถึงกรรมวิธีในการแปลงภาพ (Transformation) ซึ่งประกอบไปด้วย

1. การย้ายภาพ (Translate)
2. การขยายหรือย่อภาพ (Scale)
3. การหมุนภาพ (Rotate)

โดยเราจะมาเริ่มกันที่การสร้างรูปสองมิติและสามมิติตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.1 การสร้างรูปสองมิติและสามมิติ

2.8.1.1 การสร้างรูปสองมิติ

ในการสร้างรูปสองมิตินั้น ขั้นตอนในการสร้างจะง่ายกว่าการสร้างภาพสามมิติเป็นอย่างมาก การคำนวณต่าง ๆ สามารถทำความเข้าใจได้อย่างตรงไปตรงมา เนื่องจากระบบการแสดงภาพเป็นระบบสองมิติอยู่แล้ว โดยโคออร์ดิเนตของตำแหน่งบนจอภาพประกอบขึ้นมาจากตำแหน่งตามแนวระดับ (x-ordinate) และตำแหน่งตามแนวตั้ง (y-ordinate)

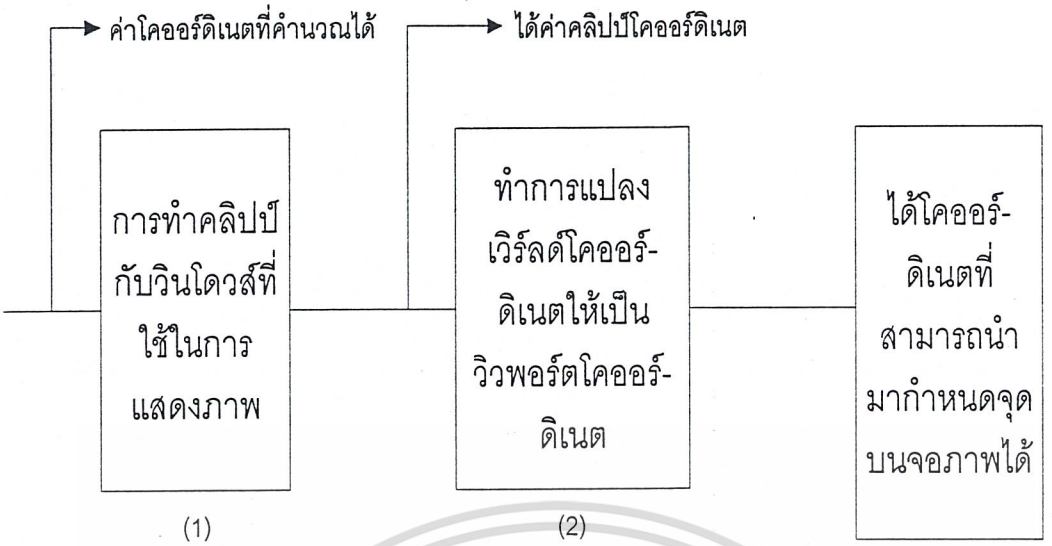
ดังนั้นในการสร้างภาพต่าง ๆ ขึ้นมา เราสามารถกล่าวคร่าว ๆ ได้ว่า เราสามารถกำหนดจุดต่าง ๆ ในภาพว่าอยู่ ณ ตำแหน่งใดบนจอภาพได้โดยตรง (หลังจากผ่านการแปลงจากโคออร์ดิเนตในวินโดว์ลงมายังวิวพอร์ตแล้ว) โดยไม่ต้องมีการนำโคออร์ดิเนตมาแปลงลดมิติเหมือนกับการแสดงภาพในระบบสามมิติ

ตัวอย่างเช่น ในกรณีของเส้นตรง : กำหนดโคออร์ดิเนต x,y ของจุดปลายทั้งสองด้านแล้วใช้คำสั่งเชื่อมระหว่างจุดสองจุดนั้น ๆ

ในกรณีของรูปทรงอื่น : กำหนดโคออร์ดิเนตที่จำเป็นในการสร้างภาพ แล้วใช้คำสั่งหรืออัลกอริทึมในการสร้างรูปทรงนั้น ๆ

ซึ่งโดยทั่วไปแล้วขั้นตอนในการสร้างภาพสองมิตินั้นเริ่มด้วยการคำนวณหาโคออร์ดิเนตของส่วนประกอบของภาพในเวิร์ลด์โคออร์ดิเนต (หรือยูสเซอร์โคออร์ดิเนต) แล้วขั้นตอนต่อไปคือการคลิปป์กับวินโดว์ที่ใช้ในการแสดงภาพ และขั้นตอนสุดท้ายคือ การแปลงโคออร์ดิเนตจากเวิร์ลด์โคออร์ดิเนตที่อุปกรณ์แสดงภาพใช้ ดังแผนภูมิต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



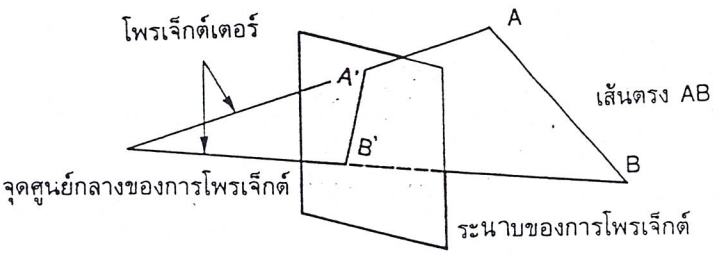
รูปที่ 2.11 แสดงขั้นตอนในการแสดงภาพสองมิติ

หลักการในการคลิปป์นั้นจะเกี่ยวข้องกับการหาจุดตัดของภาพกับวินโดว์ (ซึ่งจะไม่ขอกล่าวในที่นี้) สำหรับการเขียนโปรแกรมด้วยกราฟยูนิตเราสามารถให้มีการคลิปป์ได้ แต่ขั้นตอนการแสดงภาพนั้นจะไม่ตรงตามแผนภูมินี้ เนื่องจากกราฟยูนิตนั้นรวมเอาวินโดว์และวิวพอร์ตเข้าไว้ด้วยกัน ดังนั้นถ้าเราต้องการแยกวินโดว์ออกจากวิวพอร์ต เราจะต้องเขียนโปรแกรมเพิ่มเติมเพื่อรับเวิร์ลด์โคออร์ดิเนตที่เรากำหนดแล้วแปลงให้เป็นวิวพอร์ตโคออร์เนต แล้วเราจึงจะสามารถทำการคลิปป์ได้ เนื่องจากการคลิปป์นั้นกราฟยูนิตจะกระทำกับวิวพอร์ตไม่ใช่กับวินโดว์ ดังแผนภูมิ

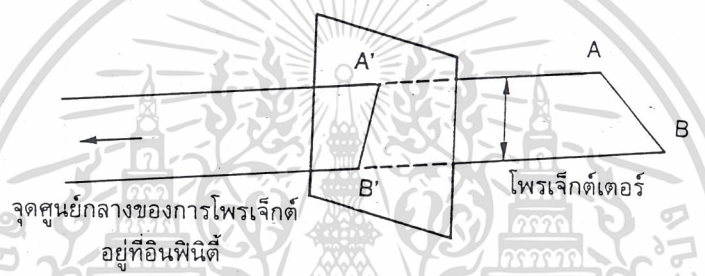
2.8.1.2 **การสร้างรูปสามมิติ**

สำหรับการสร้างภาพสามมิตินั้นมีขั้นตอนในการสร้างที่ค่อนข้างซับซ้อน โดยเริ่มต้น เราต้องมีการกำหนดข้อมูลที่สำคัญต่าง ๆ ที่จำเป็นในการสร้างภาพสามมิติบนระบบแสดงภาพแบบสองมิติ ซึ่งได้แก่จุดศูนย์กลางของการโพรเจ็กต์ (center of projection) ระนาบของการโพรเจ็กต์ (projection plane) และลำแสง (projector) ดังรูปที่ 2.12 และ 2.13 ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้เป็นสิ่งจำเป็นในการกำหนด (คำนวณหา) จุดที่ประกอบขึ้นมาเป็นภาพสามมิติบนระบบแสดงภาพแบบสองมิติ ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.12 และ 2.13 ซึ่งจุด A' และ B' คือจุดบนระนาบสองมิติของจุด A และ B ในระบบสามมิติ แต่ยังเป็นโชคดีอยู่อย่างหนึ่งว่าในการคำนวณนั้น เราไม่จำเป็นต้องคำนวณทุก ๆ จุดที่ประกอบขึ้นเป็นภาพ เราเพียงแต่คำนวณจุดมุมก็เพียงพอ เนื่องจากความจริงที่ว่าโพรเจ็กต์ชันของเส้นตรงก็ยังเป็นเส้นตรงอยู่นั่นเอง แต่ถ้าเป็นเส้นโค้งหรือวงกลม เราจะต้องคำนวณทุก ๆ จุดที่ประกอบขึ้นมาเป็นภาพนั้น ๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.12 แสดงเส้นตรง AB และ perspective projection $A'B'$

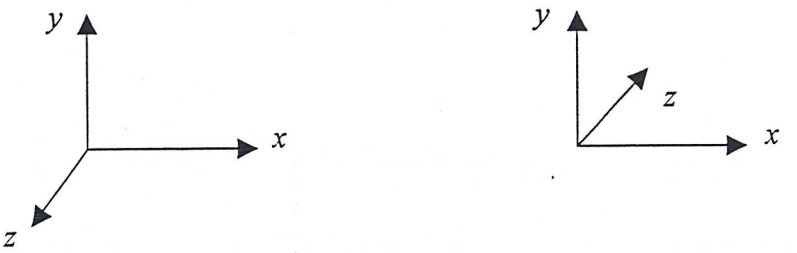


รูปที่ 2.13 แสดงเส้นตรง AB และ parallel projection $A'B'$

จากรูปที่ 2.12 และ 2.13 นั้น จะต้องทำความเข้าใจให้ได้ก่อนว่า รูปทั้งสองนั้นคือ วัตถุที่ลอยอยู่ในอากาศไม่ใช่อยู่ในแผ่นกระดาษ โดยที่แผ่นกระดาษเราในที่นี้คือ projection plane ที่บรรจุเส้นตรง $A'B'$ อยู่ หรือกล่าวอีกลักษณะหนึ่งก็คือว่ารูปทั้งสองเป็นรูปสามมิตินั่นเอง

ก่อนที่จะเริ่มการอธิบายต่อไป เราจะกำหนดสมมติฐานว่าระบบโคออร์ดิเนตสามมิติที่เราจะใช้ในการศึกษาเรื่องสามมิติกันนี้ เราจะใช้ระบบมือขวา (right-handed system) สำหรับกำหนดทิศทางของแกน X , Y และ Z ดังรูปที่ 2.14 (ก) สำหรับการแปลงสามมิติ เนื่องจากทำให้ผู้มองสามารถนึกถึงภาพสามมิติได้ง่าย และระบบโคออร์ดิเนตที่ใช้ในการแสดงภาพบนจอภาพ (ใช้ในการโปรเจ็กต์) เป็นระบบมือซ้าย (left-handed system) เนื่องจากระบบมือซ้ายจะมีความเป็นธรรมชาติมากกว่าในการแสดงภาพบนจอภาพ เพราะจอภาพมีลักษณะที่มีความลึก ดังรูปที่ 2.14 (ข) โดยที่ในการสร้างภาพสามมิติขึ้นมานั้น เราจะสร้างภาพขึ้นมาโดยใช้ระบบโคออร์ดิเนตมือขวา ทำการคำนวณแปลงภาพต่าง ๆ แล้วเมื่อเราจะแสดงภาพลงบนจอภาพ เราก็จะทำการแปลงให้ภาพอยู่ในระบบโคออร์ดิเนตแบบมือซ้าย แล้วจึงทำการโพรเจ็กต์ไปยังระนาบของการโพรเจ็กต์ ซึ่งทำให้เราได้ศึกษาขั้นตอนในการแปลงระบบโคออร์ดิเนตไปในตัวด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

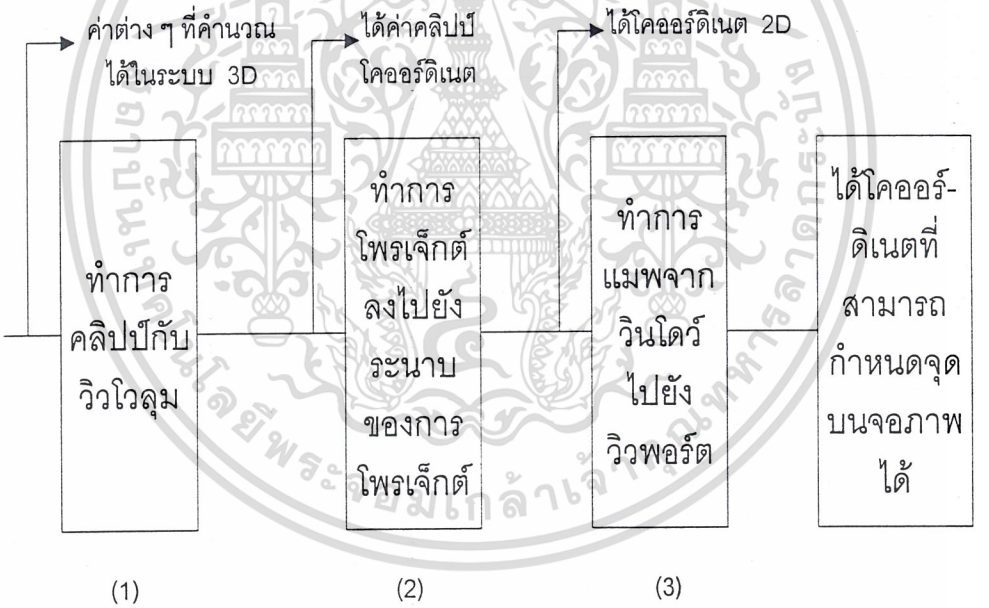


(ก) ระบบมือขวา (ข) ระบบมือซ้าย

รูปที่ 2.14 แสดงระบบมือขวาและระบบมือซ้ายของระบบโคออร์ดิเนต

2.8.2 ขั้นตอนการสร้างภาพสามมิติในระบบแสดงผลแบบสองมิติ

ขั้นตอนในการสร้างภาพสามมิติบนระบบแสดงผลแบบสองมิตินั้นมีขั้นตอนใหญ่ ๆ ดังแผนภูมิต่อไปนี้



รูปที่ 2.15 แสดงขั้นตอนในการสร้างรูปสามมิติในระบบแสดงผลแบบสองมิติ

เราจะมาพิจารณากันในรายละเอียดของขั้นตอนที่ 1 และ 2 คือการคลิปป์กับวิวโวลุมและการโพรเจ็กต์ลงไปยังระนาบของการโพรเจ็กต์ เนื่องจากขั้นตอนที่เหลือนั้นเป็นขั้นตอนเดียวกับการแสดงภาพแบบสองมิติ

หมายเหตุ : การแปลงระบบโคออร์ดิเนตจากระบบมือขวาไประบบมือซ้ายนั้น จะรวมอยู่ในขั้นตอนที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.2.1 **การคลิปป์กับวิวโวลุม**

การคลิปป์กับวิวโวลุมนั้นก็มีลักษณะเดียวกับการคลิปป์กับวินโดว์ในระบบสองมิติ โดยมีข้อแตกต่างกันตรงที่ว่าการคลิปป์ในระบบสองมิตินั้น เราจะกำหนดพื้นที่ของการแสดงภาพ แล้วทำการคำนวณหาว่าภาพที่เราสร้างขึ้นมานั้นอยู่นอกพื้นที่ของการแสดงภาพหรือไม่ ถ้ามีส่วนใดส่วนหนึ่งนอกพื้นที่ เราก็ต้องทำการตัดส่วนของภาพนั้นออกไป แต่ในระบบสามมิตินั้นจะต้องกำหนดเป็นปริมาตรของการแสดงภาพ และเราจะต้องทำการคำนวณว่ามีส่วนใดของภาพของเราที่อยู่นอกปริมาตรที่กำหนดขึ้นหรือไม่

โดยการคำนวณหาจุดตัดของส่วนต่าง ๆ ของภาพของเรากับปริมาตรที่กำหนด ซึ่งการทำการคลิปป์กับวิวโวลุมนี้จะต้องใช้การคำนวณอย่างมาก เนื่องจากเราจะต้องหาว่าส่วนใด ๆ ของรูปทรงของเราอยู่นอกปริมาตรที่ใช้เป็นวิวโวลุม เราไม่สามารถนำเฉพาะส่วนใดส่วนหนึ่งของรูปทรงมาทำการคำนวณได้ ซึ่งไม่เหมือนกับที่เรามองภาพก็สามารถพิจารณาได้ว่า เราควรจะคำนวณการคลิปป์กับส่วนใดบ้าง เพราะในระบบคอมพิวเตอร์ ข้อมูลมีรูปร่างหน้าตาเหมือนกัน ไม่มีข้อแตกต่างที่สามารถบอกได้โดยทันที ข้อมูลทั้งหมดจะต้องผ่านการเปรียบเทียบ (วิเคราะห์) ก่อนจึงสามารถจะนำข้อมูลที่ได้มาช่วยในการพิจารณาได้

2.8.2.2 **การโพรเจ็กต์**

โดยหลักการแล้ว การโพรเจ็กต์จะแปลงจุดที่อยู่ในระบบโคออร์ดิเนตหนึ่งที่มีมิติ N ให้เป็นจุดในอีกระบบโคออร์ดิเนตที่มีมิติที่น้อยกว่า N สำหรับในกรณีที่เราศึกษากันนี้ การโพรเจ็กต์จะกระทำกันจากระบบโคออร์ดิเนตแบบ 3 มิติ ให้เป็นโคออร์ดิเนตในระบบ 2 มิติ

การโพรเจ็กต์ของอ๊อปเจ็กต์ในระบบ 3 มิติ (ซึ่งในกรณีที่ใช้ศึกษานี้คือกลุ่มของจุดนั่นเอง) จะถูกกำหนดโดยลำแสง (projector) ที่เป็นเส้นตรงที่ออกมาจากจุดศูนย์กลางของการโพรเจ็กต์ (center of projection) ผ่านจุดต่าง ๆ บนอ๊อปเจ็กต์ที่เราต้องการทำโพรเจ็กต์ไปตัดกับระนาบของการโพรเจ็กต์เพื่อสร้างโพรเจ็กต์ชันขึ้นมา

การทำโพรเจ็กต์ไปยังระนาบหนึ่งหรือที่เรียกว่า planer geometric projection นั้นยังแบ่งย่อยออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ Perspective projection และ Parallel projection ซึ่งข้อแตกต่างของการโพรเจ็กต์ทั้งสองประเภทนี้อยู่ที่ความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลางของการโพรเจ็กต์กับระนาบของการโพรเจ็กต์ คือถ้าระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังระนาบสามารถวัดได้ จะเป็นการโพรเจ็กต์ประเภท Perspective แต่ถ้าระยะทางนั้นไม่สามารถกำหนดได้จะเป็นการโพรเจ็กต์ประเภท Parallel (ดูรูปที่ 2.12 และ 2.13 ประกอบ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ถ้าเราจะทำโพรเจ็กต์แบบ Perspective เราจะต้องระบุจุดศูนย์กลางของการโพรเจ็กต์ลงไป ในขณะที่ถ้าเราจะทำการโพรเจ็กต์แบบ Parallel เราต้องกำหนดทิศทางของการโพรเจ็กต์

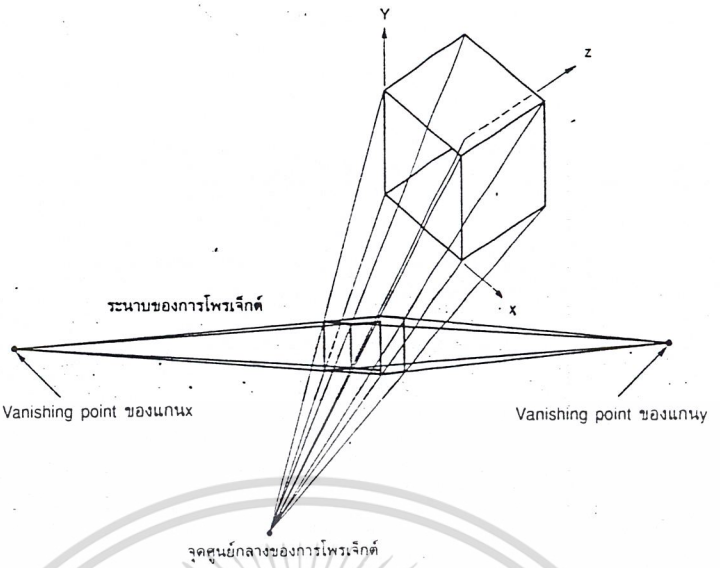
เราจะมาศึกษาถึงข้อแตกต่างระหว่างการโพรเจ็กต์ประเภทต่าง ๆ ดังนี้

- *การโพรเจ็กต์แบบ Perspective* โพรเจ็กต์ชันกลุ่มของเส้นขนานที่จะถูกโพรเจ็กต์ที่ไม่ได้ขนานกับระนาบของการโพรเจ็กต์จะไปรวมกัน ณ จุด ๆ หนึ่งที่ถูกเรียกกันว่า vanishing point ดังรูปที่ 2.16 ซึ่งถ้ากลุ่มของเส้นขนานนี้ขนานกับแกน x,y และ z แกนใดแกนหนึ่ง เราจะเรียกว่า principal vanishing point ซึ่งจะมีได้มากที่สุดเพียง 3 จุดเท่านั้น ยกตัวอย่างเช่น ถ้าระนาบของการโพรเจ็กต์ตัดตั้งฉากกับแกน z แกน z เท่านั้นที่จะมี principal vanishing point เพราะกลุ่มของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x หรือแกน y จะขนานกับระนาบของการโพรเจ็กต์

รูปที่ 2.16 (ก) แสดงการโพรเจ็กต์แบบ Perspective

โพรเจ็กต์ชันแบบ Perspective จะแบ่งออกตามจำนวนของ principal vanishing point ที่มี ซึ่งก็หมายถึงจำนวนแกนหลักที่ระนาบของการโพรเจ็กต์ตัดนั้นเอง ลักษณะของภาพที่แตกต่างกันนั้น ขอให้สังเกตได้จากรูปที่ 2.16

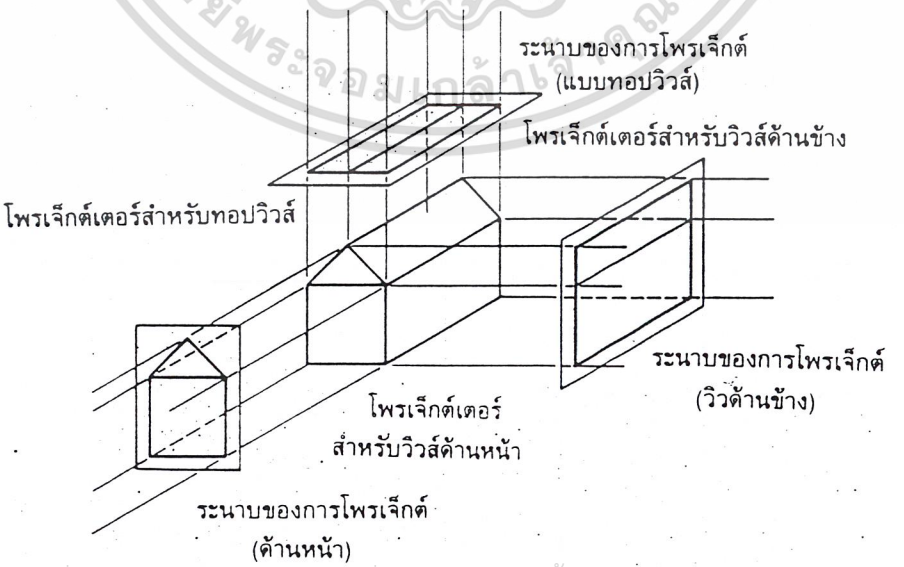
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.16 (ข) แสดงการโพรเจ็กต์แบบ Perspective

- *การโพรเจ็กต์แบบ Parallel* แบ่งย่อยตามความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางของการโพรเจ็กต์และนอร์มัลเวกเตอร์ (normal vector) ซึ่งหมายถึงเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบของการโพรเจ็กต์ดังนี้

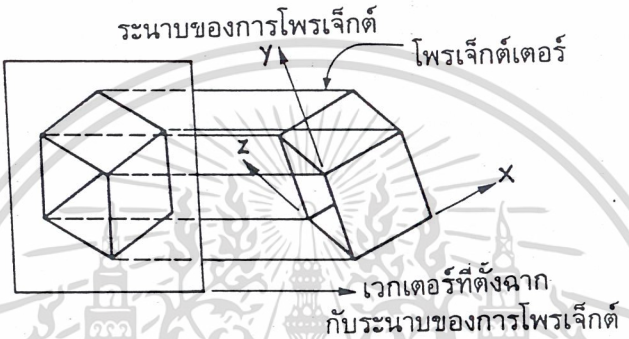
- Orthographic parallel projection จะมีทิศทางของการโพรเจ็กต์และทิศทางของนอร์มัลเวกเตอร์ของระนาบการโพรเจ็กต์เป็นทิศทางเดียวกัน (ทิศทางของการโพรเจ็กต์ตั้งฉากกับระนาบของโพรเจ็กต์) ชนิดของ Orthographic projections ที่ใช้กันมากก็คือการโพรเจ็กต์ของ top front และ side projection ดังรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 แสดงตัวอย่างของ orthographic parallel projection

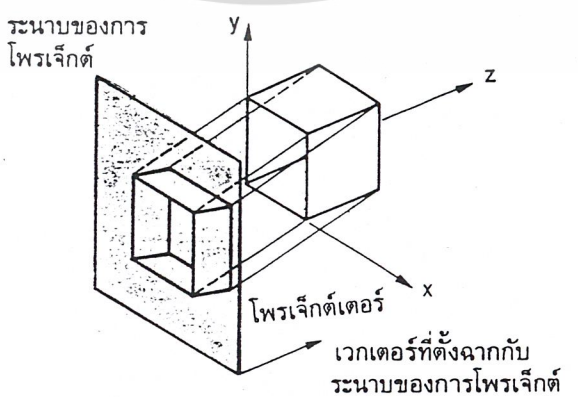
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และมี Axonometric orthographic parallel projection ซึ่งมีคุณสมบัติคือการโพรเจ็กต์แบบนี้นั้นทิศทางของระนาบของการโพรเจ็กต์จะไม่ตั้งฉากกับแกนใด ๆ (แกน X, Y และ Z) ซึ่งทำให้เราสามารถเห็นภาพต่าง ๆ ของอ๊อปเจ็กต์ได้มากกว่าหนึ่งด้านในเวลาเดียวกันคล้าย ๆ กับโพรเจ็กต์ชันแบบ Perspective นั่นเอง โดยที่โพรเจ็กต์ชันแบบ Isometric ก็เป็นโพรเจ็กต์ชันแบบ Axometric ประเภทที่ถูกเลือกใช้กันมากที่สุด ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นนอร์มัลเวกเตอร์ของระนาบของการโพรเจ็กต์ที่ทำมุมกับแกน X, Y และ Z เท่า ๆ กัน ดังตัวอย่างจากรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2.18 แสดงตัวอย่างของการโพรเจ็กต์แบบ Isometric

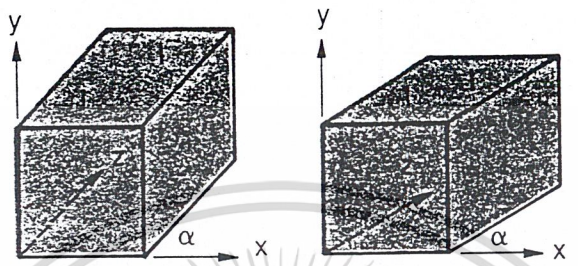
- Oblique parallel projection เป็นชนิดที่สองของ Parallel projection ซึ่งมีคุณลักษณะที่สำคัญคือ ระนาบของการโพรเจ็กต์จะตั้งฉากกับแกนหลัก (X, Y และ Z) แกนใดแกนหนึ่งซึ่งจะทำให้เราสามารถวัดมุมและความยาวของการโพรเจ็กต์ของด้านของอ๊อปเจ็กต์ที่ขนานกับระนาบของการโพรเจ็กต์ ส่วนโพรเจ็กต์ชันของด้านอื่น ๆ นั้น เราสามารถวัดระยะตามแกน X, Y และ Z ได้เท่านั้น ดังรูปที่ 2.19



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 2.19 แสดงตัวอย่างการโพรเจ็กต์ชันแบบ Oblique

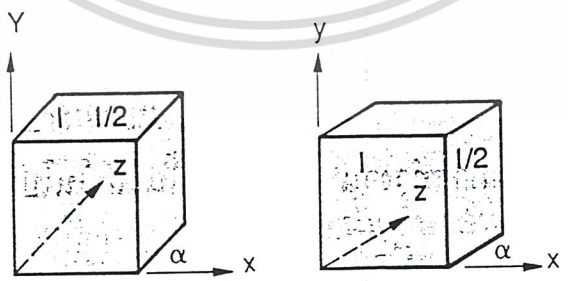
ชนิดของการโพรเจ็กต์ชันแบบ Oblique ที่เป็นที่นิยมใช้กันมากคือ Cavalier และ Cabinet ซึ่งการโพรเจ็กต์แบบ Cavalier นั้น จะมีทิศทางการโพรเจ็กต์ทำมุม 45 องศากับระนาบของการโพรเจ็กต์ ซึ่งจะทำให้การโพรเจ็กต์ชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบของการโพรเจ็กต์ที่ความยาวเท่ากับเส้นตรงนั้น



รูปที่ 2.20 แสดงตัวอย่างการโพรเจ็กต์แบบ Cavalier

หมายเหตุ : โดยปกติมุม α มักจะมีขนาด 30 หรือ 45 องศา

ส่วนการโพรเจ็กต์ชันแบบ Cabinet จะมีทิศทางของการโพรเจ็กต์ทำมุม $arc\cot\left(\frac{1}{2}\right)$ องศากับระนาบของการโพรเจ็กต์ ซึ่งทำให้โพรเจ็กต์ชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบของการโพรเจ็กต์มีความยาวครึ่งหนึ่งของเส้นตรงนั้น ดังนั้นรูปที่ได้จะดูเป็นธรรมชาติมากกว่าการโพรเจ็กต์ชันแบบ Cavalier



รูปที่ 2.21 แสดงตัวอย่างการโพรเจ็กต์ชันแบบ Cabinet

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.3 หลักพื้นฐานในการเขียนโปรแกรมเพื่อการสร้างภาพสองมิติ

ดังที่กล่าวมาแล้วในตอนต้นของหัวข้อนี้ว่าหลักพื้นฐานในการเขียนโปรแกรมเพื่อการสร้างภาพสองมิตินั้นไม่มีอะไรซับซ้อนเหมือนการสร้างภาพแบบสามมิติ สิ่งที่สำคัญคือเราจะต้องกำหนดอัลกอริทึมที่เหมาะสมให้ได้ (ในกรณีที่เราต้องการเขียนโพรซีเดอร์สร้างภาพต่าง ๆ ขึ้นมาเอง มิฉะนั้นเราก็สามารถใช้โพรซีเดอร์ที่มีมาแล้วได้เลย) ซึ่งข้อดีและข้อเสียของอัลกอริทึมพื้นฐานต่าง ๆ ในการสร้างเส้นตรง วงกลม รูปหลายเหลี่ยม การระบายสีพื้นที่ ขั้นต่อไปคือทำการคลิปป์และแปลงโคออร์ดิเนตจากเวิร์ลด์โคออร์ดิเนตไปยังวิวพอร์ตโคออร์ดิเนตดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังนั้นในการสร้างภาพสองมิตินั้นสิ่งที่เรายังไม่ได้กล่าวถึงก็คือ ลักษณะของการติดต่อกับผู้ใช้โปรแกรมหรือที่เรียกกันว่า ยูสเซอร์อินเตอร์เฟซ (user interface) ซึ่งสิ่งนี้นับว่าเป็นสิ่งสำคัญมากส่วนหนึ่งของโปรแกรม โดยยูสเซอร์อินเตอร์เฟซของโปรแกรมที่ดีนั้นจะต้องมีลักษณะที่ผู้ใช้สามารถใช้ได้โดยง่าย ไม่สับสน ไม่ต้องใช้เวลานานมาก ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราจะเขียนโปรแกรมเพื่อใช้ในการวาดรูปทรงทางเรขาคณิตขึ้นมา เราก็อาจจะกำหนดให้มีแม่แบบ (template) ของรูปทรงต่าง ๆ เอาไว้ โดยที่ผู้ใช้สามารถที่จะเลือกว่าต้องการสร้างรูปทรงอะไรช่วยให้ผู้ใช้ประหยัดเวลาในการทำงาน นอกจากนั้นแล้วในโปรแกรมควรจะมีความสามารถที่จะใช้อุปกรณ์ในการอินพุตที่นอกเหนือจากคีย์บอร์ดได้ เช่น เมาส์ เพราะจะทำให้ผู้ใช้สามารถสร้างภาพได้สะดวกขึ้น ที่กล่าวมานี้เป็นหลักพื้นฐานส่วนหนึ่งในการเขียนโปรแกรมเพื่อสร้างภาพสองมิติ ซึ่งหลักการนี้ก็สามารถนำไปใช้ในการเขียนโปรแกรมเพื่อสร้างภาพสามมิติได้ด้วยเช่นกัน

2.8.4 หลักพื้นฐานในการเขียนโปรแกรมเพื่อสร้างภาพสามมิติ (อย่างง่าย)

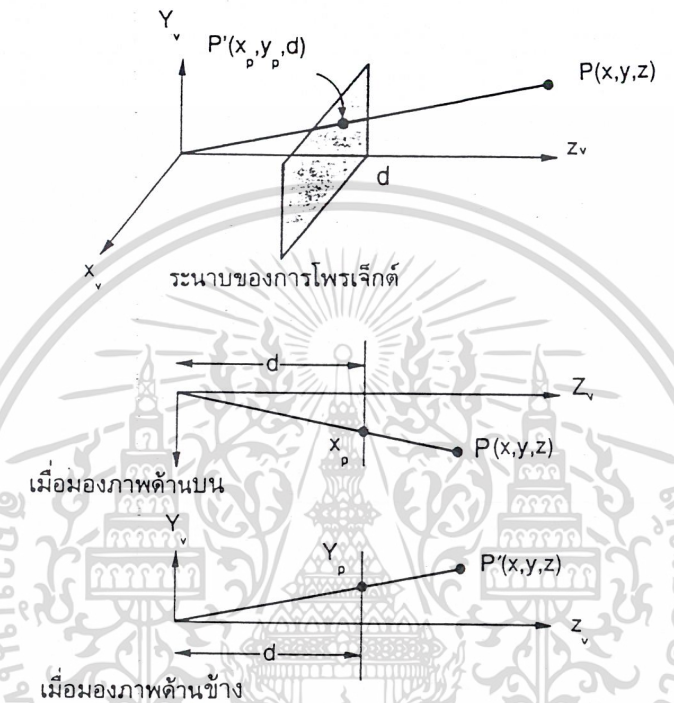
คราวนี้เราจะมากล่าวกันถึงหลักในการเขียนโปรแกรมเพื่อสร้างภาพสามมิติ (บนระบบแสดงผลแบบสองมิติ) ซึ่งในที่นี้เราจะมาดูในรายละเอียดของหลักการเขียนโปรแกรมสำหรับสร้างภาพสามมิติอย่างง่าย คือ เราจะไม่กล่าวถึงการคลิปป์ด้วยวิวโวลุม และเราจะใช้ระนาบของการโพรเจ็กต์อยู่บน xy-plane (คือ ทุกจุดมีค่า z เท่ากัน) เท่านั้น โดยสมมติฐานของเรานั้นก็คือ วัตถุที่เราจะใช้เป็นแบบในการสร้างภาพสามมิตินั้นมีขนาดเล็กกว่าวิวโวลุม (อยู่ภายใน) ที่เรากำหนดเสมอ

2.8.4.1 การสร้างภาพสามมิติแบบ Perspective

ในการสร้างภาพสามมิติแบบ Perspective นั้น ขั้นตอนแรกก็คือการกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด center of projection และการกำหนดระนาบของการโพรเจ็กต์ (ในที่นี้เราจะใช้ระนาบ xy ที่มีค่า $z = d$ (one point perspective projection) และใช้จุด center of projection อยู่ที่จุด (0,0,0) (เพื่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความง่ายต่อการทำความเข้าใจ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วไม่จำเป็น) จากนั้นเราก็จะต้องทำการคำนวณหาจุดตัดของโพรเจ็กต์เตอร์กับระนาบของการโพรเจ็กต์ของแต่ละจุดมุมของอ๊อปเจ็กต์หลักจากได้จุดต่าง ๆ นี้แล้ว เราจึงสามารถออกคำสั่งเชื่อมต่อจุดที่เราคำนวณมาได้เพื่อสร้างภาพขึ้นมาอีกทีหนึ่ง (โดยนำเอาเฉพาะโคออร์ดิเนตในแกน xy มาใช้เท่านั้น เนื่องจากค่า z จะเท่ากันหมด คือเท่ากับ d)



รูปที่ *2.22* แสดงการคำนวณหาจุดตัดของโพรเจ็กต์เตอร์และระนาบของการโพรเจ็คต์ของรูปสามมิติแบบ Perspective

ในการคำนวณหาค่าโคออร์ดิเนตที่ได้จากการโพรเจ็กต์ (จุด P' จากการโพรเจ็กต์ของจุด P) ดังรูปข้างต้น เราสามารถใช้คุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายได้ดังนี้

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}$$

และ $$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}$$

หรือ $$x_p = d \cdot \frac{x}{z} = \frac{x}{\frac{z}{d}} \qquad (1)$$

$$y_p = d \cdot \frac{y}{z} = \frac{y}{\frac{z}{d}} \qquad (2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเราจะต้องนำสมการ (1) และ (2) นี้ไปคำนวณกับจุดมุมทุกจุดของภาพของเรา แล้วเราจึงออกคำสั่งเชื่อมจุดต่อจุดมุมต่าง ๆ ที่คำนวณได้โดยใช้คำสั่งในการลากเส้นสองมิติ คือใช้เฉพาะโคออร์ดิเนต X,Y เท่านั้น เพราะภาพสามมิติที่เราทำการโพรเจ็กต์มานี้อยู่ในระนาบ xy ที่มีค่า $z = d$

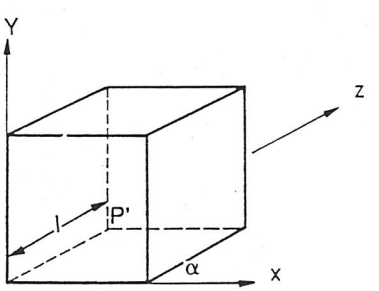
2.8.4.2 **การสร้างภาพสามมิติแบบ** Orthographic

การสร้างภาพสามมิติแบบ Orthographic ลงบนระนาบของการโพรเจ็กต์ที่มีค่า $z = 0$ นั้น ทิศทางของการโพรเจ็กต์จะเป็นทิศทางเดียวกับทิศทางตั้งฉากกับระนาบของการโพรเจ็กต์ ซึ่งในที่นี้ก็คือ แกน z นั่นเอง ดังนั้น จุด P จะโพรเจ็กต์ไปยังจุดที่มีโคออร์ดิเนต $x_p = x, y_p = y$ และ $z_p = 0$ หรือก็คือแค่ตัดค่า z ออกไปนั่นเอง ซึ่งตามรูปที่ 2.17 เราก็จะได้ภาพด้านหน้า (Front View) จากภาพบ้านสามมิติ และถ้าต้องการโพรเจ็กต์ลงบนระนาบที่มีค่า $x = 0$ เรากำหนดให้ค่าของ $x_p = 0$ หรือตัดค่า x ออกไป โดยนำเอาเฉพาะโคออร์ดิเนต zy มาใช้ แต่เนื่องจากเราไม่มีแกน zy ในระบบสองมิติ เราจึงต้องแปลงโคออร์ดิเนต zy ของเราให้เป็นโคออร์ดิเนตในแกน xy โดยให้ค่า z แทนค่า x และค่าของ y ยังคงเดิม แต่ถ้าสังเกตให้ดีจะเห็นได้ว่าภาพที่ได้จากการแปลงดังกล่าวเป็นภาพที่กลับจากซ้ายไปขวา เนื่องจากระบบที่เราใช้ในการคำนวณนี้เป็นระบบมือขวา ทำให้ค่า z ที่ชี้ออกนอกกระดาษมีค่าเป็นบวก เราจึงต้องทำการแปลงโดยคูณด้วย -1 เข้าไปกับค่า x ของทุก ๆ จุดมุมของภาพที่ได้จากการโพรเจ็กต์ ซึ่งก็คือ การแปลงจากระบบมือขวาเป็นระบบมือซ้ายนั่นเอง ซึ่งจะได้กล่าวในรายละเอียดอีกครั้งหนึ่ง

2.8.4.3 **การสร้างภาพสามมิติแบบ** Oblique

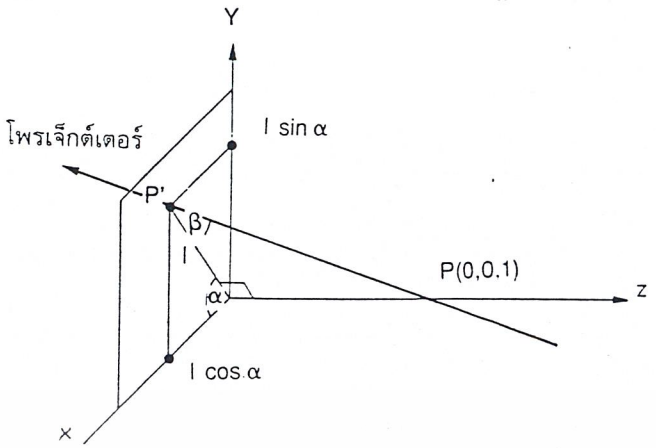
ในการคำนวณหาโพรเจ็กต์ชันแบบ Oblique ในที่นี้เราจะกำหนดให้ระนาบของการโพรเจ็กต์คือระนาบ xy ที่มีค่า $z = 0$ ซึ่งมีทิศทางของการโพรเจ็กต์แทนด้วยเวกเตอร์ที่ผ่านจุด P ไปยังจุด P' โดยทิศทางของโพรเจ็กต์นี้ทำมุม β กับระนาบของการโพรเจ็กต์และทำมุม α กับแกน x

(ก)

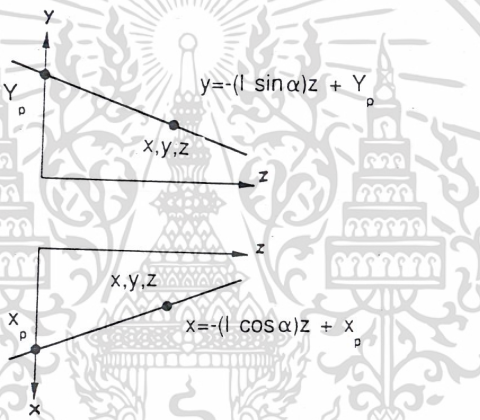


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ข)



รูปที่ 2.23 แสดงการโพรเจ็กต์ชันแบบ Oblique Parallel จากจุด $P(0,0,1)$ ไปยังจุด $P'(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$



รูปที่ 2.24 แสดงการโพรเจ็กต์ชันแบบ Oblique Parallel จากจุด P ไปยัง P'
(มองตามระนาบ yz และ xz)

จากรูปที่ 2.24 และสมการเส้นตรง เราจะได้ว่า

$$x_p = z + z(I\cos\alpha)$$

$$y_p = y + z(I\sin\alpha)$$

2.8.5 หลักพื้นฐานในการเขียนโปรแกรมเพื่อการแปลงภาพสองมิติ

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าการแปลงภาพนั้นประกอบไปด้วย

1. การย้ายภาพ (Translate)
2. การขยายภาพหรือย่อภาพ (Scale)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. การหมุนภาพ (Rotate)

โดยเราจะมาศึกษาวิธีการคำนวณเพื่อการแปลงภาพสองมิติกันก่อน

2.8.5.1 การย้ายภาพ

การย้ายภาพ (Translate) ในที่นี้ก็คือการย้ายภาพจากตำแหน่งเดิมไปยังตำแหน่งใหม่ด้วยระยะทางที่เรากำหนด ซึ่งระยะทางนี้เราจะกำหนดเป็นสองส่วนด้วยกัน คือระยะทางตามแกน x และระยะทางตามแกน y ดังสมการต่อไปนี้

$x' = x + Dx$

x คือค่า x ordinate ของจุดเดิม

x' คือค่า x-ordinate ของจุดใหม่

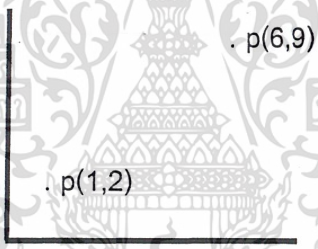
Dx คือค่าระยะทางตามแกน x

$y' = y + Dy$

y คือค่า y-ordinate ของจุดเดิม

y' คือค่า y-ordinate ของจุดเดิม

Dy คือค่าระยะทางตามแกน y



รูปที่ 2.25 แสดงการย้ายจุด (1,2) ไปยังจุด (6,9)ได้ระยะทาง (5,7)

ถ้าเราเขียนในรูปของเมตริกจะได้

$P = [x \quad y]$ และ $P' = [x' \quad y']$ โดย P คือ จุดเดิม และ P' คือจุดใหม่

และถ้าเราให้ $T = [Dx \quad Dy]$

ดังนั้นเราจะได้ $[x' \quad y'] = [x \quad y] + [Dx \quad Dy]$

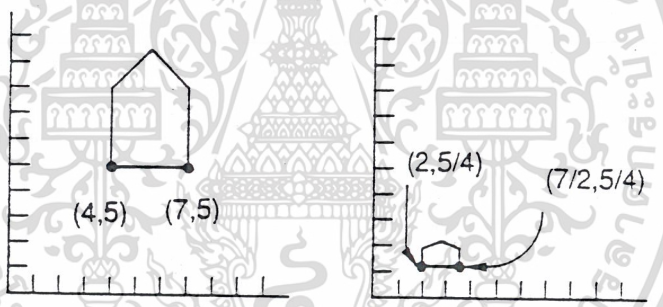
หรือ $P' = P + T$

เราสามารถย้ายภาพได้โดยใช้สมการดังกล่าวนี้กับจุดมุมทั้งหมดของภาพ โดยที่เราไม่จำเป็นต้องย้ายเส้นตรงทั้งเส้น เราสามารถย้ายเฉพาะจุดมุมเท่านั้น แล้วจึงใช้คำสั่งเชื่อมจุดมุมต่าง ๆ เข้าด้วยกันดังเดิม แต่สำหรับภาพที่ประกอบด้วยส่วนโค้งหรือพื้นที่ สิ่งที่สามารถทำได้ก็คือ เราจะต้องทำการย้ายจุดสำคัญที่ใช้ในการสร้างภาพ เช่น ย้ายจุดศูนย์กลางของวงกลมสำหรับรูปที่ประกอบด้วยวงกลม แล้วจึงสร้างวงกลมขึ้น ณ ตำแหน่งใหม่ ซึ่งจะใช้เวลาน้อยกว่าการย้ายจุดบนเส้นรอบวงทั้งหมด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.5.2 การขยายหรือย่อภาพ

การขยายหรือย่อภาพ (Scale) ในที่นี้ก็คือการทำการเปลี่ยนแปลงขนาดของภาพให้ใหญ่ขึ้นหรือเล็กลงตามค่าของ Scale Factor ที่เรากำหนด ตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการขยายภาพให้มีขนาดใหญ่กว่าเดิมหนึ่งเท่า เราก็ต้องกำหนด Scale Factor = 2 หรือถ้าเราต้องการย่อภาพให้มีขนาดเล็กลงกว่าเดิมหนึ่งเท่า เราก็ต้องกำหนดให้ Scale Factor = 0.5 เป็นต้น โดย Scale Factor นี้เราจะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ Scale Factor ตามแกน x และ Scale Factor ตามแกน y ซึ่งถ้าเราต้องการขยายหรือย่อภาพให้มีการขยายหรือย่อในอัตราส่วนที่เท่ากันทั้งทางแกน x และแกน y แล้ว เราต้องกำหนดให้ค่าของ Scale Factor ทั้งทางแกน x และแกน y เท่ากัน ถ้า Scale Factor ทางแกน x และแกน y ไม่เท่ากันแล้ว จะมีผลให้รูปทรงของภาพเปลี่ยนแปลงไปด้วย ในลักษณะเดียวกันกับการเปลี่ยนแปลง aspect ratio โดยในการขยายหรือย่อภาพนี้ เราจะกระทำกับจุดมุมของภาพลักษณะเดียวกับการย้ายภาพ



รูปที่ 2.26 แสดงการย่อภาพ

เราสามารถเขียนสมการในการขยายภาพหรือย่อภาพได้ดังนี้

$x' = x \cdot Sx$

x คือ ค่า x-ordinate ของจุดเดิม

x' คือ ค่า x-ordinate ของจุดใหม่

Sx คือ ค่า scale factor ตามแกน x

$y' = y \cdot Sy$

y คือ ค่า y-ordinate ของจุดเดิม

y' คือ ค่า y-ordinate ของจุดใหม่

Sy คือ ค่า scale factor ตามแกน y

โดยถ้าเราเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกลักษณะเดียวกับการย้ายภาพข้างต้น เราจะได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้ากำหนดให้ S คือ $\begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$

จากสูตรดังกล่าว เราจะได้ว่า

$$[x' \quad y'] = [x \cdot y]\begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$$

หรือ $$P' = P \cdot S$$

สมการดังกล่าวนี้เป็นการทำการขยายหรือย่อภาพ โดยใช้จุด (0,0) เป็นจุดเปรียบเทียบ ดังนั้นเมื่อเราทำการย่อหรือขยายขนาดแล้ว จะทำให้ระยะห่างของภาพที่ได้จากจุด (0,0) เปลี่ยนไปด้วย เนื่องจากการคำนวณนี้เป็นการอาศัยจุด (0,0) เป็นหลักในการคำนวณ ดังรูปที่ 2.26 ถ้าเราต้องการคงตำแหน่งของภาพไว้ ณ ตำแหน่งเดิม เราจะต้องทำการขยายหรือย่อภาพ โดยอาศัยจุดศูนย์กลางของภาพเดิมเป็นจุดเปรียบเทียบ โดยเราจะต้องย้ายภาพมาให้จุดศูนย์กลางของภาพที่เรากำหนดให้เป็นจุดเปรียบเทียบ อยู่ที่จุด (0,0) แล้วจึงทำการขยายหรือย่อภาพ หลังจากนั้นเราจึงจะย้ายภาพกลับไปตำแหน่งเดิมโดยย้ายภาพให้จุดมุมที่ใช้เป็นจุดเปรียบเทียบกลับไปยังตำแหน่งเดิม

2.8.5.3 การหมุนภาพ

การหมุนภาพ (Rotate) ในที่นี้ก็คือ การทำการหมุนภาพและเปลี่ยนตำแหน่งของภาพไปตามมุมที่เรากำหนด โดยในการหมุนภาพนี้ เราจะหมุนจุดมุมของภาพในลักษณะเดียวกับการย้ายภาพและการขยายหรือย่อภาพ และเราจะกำหนดให้มุมเป็นบวกเมื่อเราหมุนทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งเราสามารถเขียนสมการในการหมุนภาพได้ดังนี้

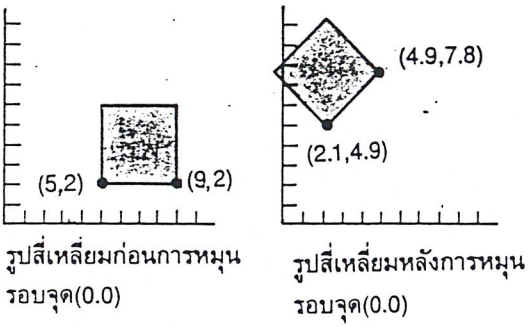
$$x' = x\cos(\phi) - y\sin(\phi)$$
$$y' = x\sin(\phi) - y\cos(\phi)$$

โดย (x, y) คือ จุดเดิม

(x', y') คือ จุดหลังจากการหมุน

และมุมที่ใช้ในการหมุนมีค่าเท่ากับ ϕ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.27 แสดงลักษณะการหมุนภาพ

ซึ่งถ้าเราเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกลักษณะเดียวกันกับการย้ายภาพที่กล่าวมาแล้ว เราจะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

หรือ $$P' = P \cdot R$$

โดยการหมุนภาพในที่นี้เราจะใช้จุด (0,0) เป็นจุดศูนย์กลางของการหมุน ดังนั้นถ้าเราใช้สมการข้างต้นนี้ในการคำนวณภาพที่ไม่ได้มีจุดศูนย์กลางภาพอยู่ที่จุด (0,0) เราจะไม่ได้ภาพในลักษณะที่เราต้องการแน่ สิ่งที่เราจะต้องทำก็คือ ก่อนที่เราทำการหมุนภาพ เราจะต้องทำการย้ายภาพให้จุดศูนย์กลางของภาพมาอยู่ที่จุด (0,0) เสียก่อนแล้วจึงทำการหมุน แล้วย้ายภาพกลับไปอยู่ ณ ตำแหน่งเดิมอีกทีหนึ่ง

จากสมการต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาทั้งหมดในการแปลงภาพและเมตริกต่าง ๆ ที่ใช้สำหรับการแปลงภาพนั้น ในการเขียนโปรแกรมเพื่อการแปลงภาพที่เราได้สร้างขึ้นมาแล้ว (ภาพที่กล่าวถึงนี้หมายถึง กลุ่มของจุดมุมของภาพ) เราก็จะต้องทำการเขียนโปรแกรมที่นำจุดมุมแต่ละจุดมาคูณกับเมตริกที่ใช้ในการแปลงภาพที่เราต้องการ (หรือบวกในกรณีของการย้ายภาพ) ทีละเมตริกเพื่อให้ได้จุดมุมของภาพหลังจากการแปลงแล้ว ซึ่งค่อนข้างจะเสียเวลาในกรณีที่เราต้องทำการแปลงที่มากกว่าหนึ่งชนิดหรือหนึ่งครั้ง ในเรื่องต่อไปเราจะมาพิจารณาวิธีที่ทำให้เราสามารถประหยัดการคำนวณได้ โดยการรวมเอาเมตริกที่ใช้ในการแปลงเข้าด้วยกัน ซึ่งเราอาจจะนำเอาเมตริกในการทำการโพรเจ็กต์เข้าไปรวมด้วยก็ได้ ถ้าเราจะทำการโพรเจ็กต์หลังจากที่เราได้ทำการแปลงภาพแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.5.4 ระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous และการใช้เมตริกในการคำนวณ

ต่อไปเราจะทำความรู้จักกับระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous เนื่องจากถ้าเรานำระบบนี้มาใช้งานแล้วเราก็จะสามารถคำนวณหาเมตริกรวมของการแปลงทั้งหมด (การย้าย การย่อ การขยายขนาด และการหมุน)

ระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous นี้ได้มีการเริ่มใช้ในเรขาคณิตก่อน แล้วจึงมีการนำมาใช้ในงานทางด้านกราฟฟิค โดยที่ในระบบนี้จุด (x, y) จะถูกเก็บไว้ในรูปแบบ $(W.x \quad W.y \quad W)$ โดยที่ W คือ Scale Factor ซึ่งไม่เท่ากับ 0 ดังนั้นถ้าเรามีจุดที่มีโคออร์ดิเนตในระบบ Homogeneous เป็น (X, Y, W) เราจะสามารถหาค่าของ x, y ได้จาก

$$x = \frac{X}{W} \qquad y = \frac{Y}{W}$$

ซึ่งในการใช้งานของเรานี้ เราจะกำหนดให้ W มีค่าเป็น 1 เสมอ ดังนั้นเราไม่จำเป็นจะต้องคำนวณหาค่า x และ y จากโคออร์ดิเนตในโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous หรือเราอาจจะคิดอีกแง่หนึ่งก็ได้ว่า โคออร์ดิเนตของเรานี้เป็นจุดใน 3 มิติ โดยที่มีค่า $z = 1$ เสมอ นั่นก็คือเป็นจุดที่อยู่บนระนาบที่มีค่า $z = 1$ นั่นเอง

เนื่องจากจุด ๆ หนึ่งถูกเก็บไว้ในลักษณะของ (X, Y, W) ดังนั้นการเก็บข้อมูลของแต่ละจุดในรูปของเมตริกเราจะต้องเก็บไว้ในเมตริกขนาด 1×3 และเมตริกสำหรับใช้คำนวณในการแปลงทั้งสามประเภท จึงสามารถแทนด้วยเมตริกขนาด 3×3 ทั้งหมด ซึ่งเราจะได้คุณสมบัติเพิ่มเติมขึ้นมาจากระบบเดิมที่จุด ๆ หนึ่งแทนด้วยเมตริก 1×2 และเมตริกการแปลงแบบเดิมคือ เราสามารถนำเมตริกทั้งหมดมาคูณกันเพื่อหาเมตริกของการโพรเจ็กต์และเมตริกของการแปลงระบบโคออร์ดิเนตมาคูณร่วมเข้าไปด้วยเพื่อหาผลลัพธ์สุทธิได้ ซึ่งข้อควรจำอย่างหนึ่งก็คือ ในการคูณเมตริกนั้น อันดับในการคูณไม่สามารถจะสลับกันได้ ยกเว้นในบางกรณีเท่านั้น ดังนั้นในการหาเมตริกผลลัพธ์นั้น เราจะต้องคำนึงถึงลำดับของการคูณเป็นสำคัญด้วย

โดยเมตริกการแปลงในระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous เป็นดังนี้

การย้ายภาพ

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & 1 \end{bmatrix}$$

การขยายหรือย่อภาพ

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหมุนภาพด้วยมุม ϕ

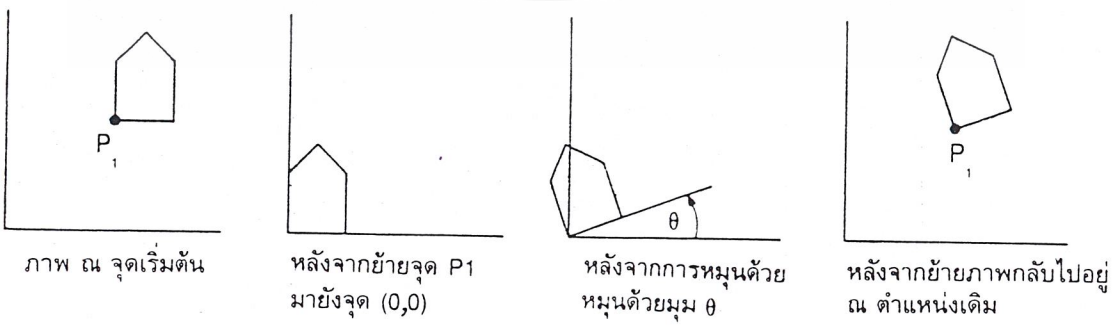
$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งถ้าเราต้องการแปลงภาพของเราโดยการย้ายภาพ การขยายภาพหรือย่อภาพ และการหมุนภาพอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือทำการแปลงทั้งสามประเภท เราก็สามารถทำการคำนวณหาเมตริกรวมของการแปลงได้ โดยการนำเมตริกของการแปลงต่าง ๆ ที่เราต้องการใช้กับภาพมาคูณกับเมตริกที่เราคำนวณได้

ข้อดีของวิธีนี้คือ ทำให้เราสามารถลดการคำนวณในการแปลงภาพไปได้อย่างมากเนื่องจากถ้าเราไม่ใช้ระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous กับภาพของเรา เราจะต้องทำการคำนวณทีละขั้นกับทุก ๆ จุดในภาพ แต่ถ้าเราใช้โคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous แล้ว เราก็เพียงคำนวณหาเมตริกซึ่งใช้แทนการแปลงทั้งหมดที่ต้องการเพียงครั้งเดียวแล้วนำเมตริกที่คำนวณได้ไปคูณกับจุดแต่ละจุด ดังนั้นการคำนวณของแต่ละจุดจะเป็นเพียงการคูณระหว่างเมตริกขนาด 1×3 กับเมตริกขนาด 3×3 เพียงครั้งเดียว

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าเราต้องการหมุนภาพดังรูปที่ 2.28 รอบจุด P_1 ซึ่งขั้นตอนในการแปลงนั้น จะต้องทำดังนี้คือ

1. ย้ายภาพโดยให้จุด $P_1(x_1, y_1)$ มาอยู่ที่จุด (0,0)
2. ทำการหมุนภาพตามมุมที่กำหนด
3. ย้ายภาพกลับไปโดยให้จุด P_1 กลับไปอยู่ในโคออร์ดิเนต (x_1, y_1)



รูปที่ 2.28 ขั้นตอนในการหมุนภาพรอบจุด P_1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมตริกสำหรับการแปลงในขั้นตอนที่ 1 (ย้ายภาพ) คือ

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกสำหรับการแปลงในขั้นตอนที่ 2 (หมุนภาพด้วยมุม ϕ) คือ

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเมตริกสำหรับการแปลงในขั้นตอนที่ 3 (ย้ายภาพกลับ) คือ

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}$$

เราสามารถหาเมตริกในการแปลงสุทธิได้โดยการนำเมตริก $T_1 R_2 T_3$ มาคูณกัน ซึ่งเมตริกของการแปลงสุทธินี้จะเท่ากับ

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ x_1(1-\cos\phi)+y_1\sin\phi & y_1(1-\cos\phi)+x_1\sin\phi & 1 \end{bmatrix}$$

2.8.6 หลักพื้นฐานในการเขียนโปรแกรมเพื่อการแปลงภาพสามมิติ

ในระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous จะมีลักษณะเดียวกับการเปลี่ยนแปลงภาพสองมิติ โดยที่จุด ๆ หนึ่งจะมีโคออร์ดิเนตเป็น $[X \quad Y \quad Z \quad W]$ ซึ่งในการคำนวณเรากำหนดให้ $W = 1$ เราจะได้เมตริกในการแปลงภาพสามมิติดังนี้

การย้ายภาพ

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & Dz & 1 \end{bmatrix}$$

การขยายหรือย่อภาพ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การหมุนภาพ

การหมุนภาพในระบบ 3 มิตินั้นสามารถแบ่งย่อยออกมาเป็นการหมุนรอบแกน X, Y, Z เช่นเดียวกับโคออร์ดิเนตในระบบสามมิติ ซึ่งสามารถกำหนดให้เป็นโคออร์ดิเนตตามแกน x แกน y และแกน z ได้

หมุนรอบแกน Z ด้วยมุม α

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หมุนรอบแกน X ด้วยมุม θ

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หมุนรอบแกน Y ด้วยมุม ϕ

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สำหรับในกรณีที่เราต้องการแปลงภาพโดยการย้ายภาพ ขยายหรือย่อภาพ หรือการหมุนภาพ หรือทำการแปลงมากกว่าหนึ่งประเภทติดต่อกัน เราก็สามารถนำเมตริกในการแปลงของแต่ละขั้นตอนมาทำการคูณกันในลักษณะเดียวกับการแปลงภาพสองมิติ โดยที่เราจะสามารถประหยัดการคำนวณไปได้เช่นเดียวกับการแปลงภาพสองมิติที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.6.1 การเขียนโปรแกรมเปลี่ยนระบบโคออร์ดิเนต

สำหรับการแปลงระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous จากระบบมือขวาเป็นระบบมือซ้ายนั้น ถ้าเราสังเกตจากรูปที่ 2.14 เราจะเห็นว่าข้อแตกต่างระหว่างทั้งสองระบบก็คือ ค่าของ z ซึ่งจะมีเครื่องหมายตรงกันข้ามเท่านั้น ดังนั้นในการแปลงเราก็เพียงทำการคูณค่าของ z ด้วย -1 เท่านั้น หรือสามารถเขียนในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$M_{rtol} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8.6.2 การเขียนโปรแกรมเพื่อทำการโพรเจ็กต์

ในระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous จากวิธีการโพรเจ็กต์ที่เราได้กล่าวมาแล้วข้างต้น เราสามารถแทนการโพรเจ็กต์แบบ Perspective โดยมีระนาบของการโพรเจ็กต์ตั้งฉากกับแกน z (ระนาบ xy) ที่ระยะ d ดังกล่าวด้วยเมตริกต่อไปนี้

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเมื่อนำเมตริกนี้มาคูณกับเมตริก $\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}$ เราจะได้เมตริกผลลัพธ์คือ $\begin{bmatrix} x & y & z & \frac{z}{d} \end{bmatrix}$ ซึ่งเราสามารถนำมาทำให้อยู่ในรูปที่สามารถนำไปใช้ได้ ($W = 1$) โดยนำ $\frac{z}{d}$ หารทุกค่าก็จะได้ $\begin{bmatrix} \frac{x}{\frac{z}{d}} & \frac{y}{\frac{z}{d}} & d & 1 \end{bmatrix}$

ในกรณีของการโพรเจ็กต์แบบ Orthographic ลงบนระนาบ $z = 0$ โดยที่ทิศทางของการโพรเจ็กต์คือแกน z

เมตริกของการโพรเจ็กต์คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$M_{ort} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ในกรณีของการโพรเจ็กต์แบบ Oblique โดยระนาบของการโพรเจ็กคือระนาบ xy ที่ $z = 0$ ทิศทางของการโพรเจ็กต์ทำมุม β กับระนาบของการโพรเจ็กต์ และทำมุม α กับแกน x

เมตริกของการโพรเจ็กต์คือ

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l \cdot \cos(\alpha) & l \cdot \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สรุปขั้นตอนในการเขียนโปรแกรมเพื่อสร้างภาพสามมิติบนจอภาพแบบสองมิติ

จากเนื้อหาที่ได้กล่าวมาในหัวข้อนี้ทั้งหมด สามารถสรุปเป็นขั้นตอนที่จะต้องกระทำในโปรแกรมเพื่อสร้างภาพสามมิติบนระบบแสดงภาพสองมิติได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดโคออร์ดิเนตของจุดมุมของภาพ (ในระบบมือขวา)

ขั้นที่ 2 ทำการแปลง ย้าย ขยาย/ลดขนาด และการหมุน

ขั้นที่ 3 การแปลงโคออร์ดิเนตจากระบบมือขวาเป็นระบบมือซ้าย

ขั้นที่ 4 ทำการโพรเจ็กต์ลงบนระนาบของการโพรเจ็กต์

ขั้นที่ 5 นำโคออร์ดิเนต (x, y) ที่ได้ไปใช้ในคำสั่งของการสร้างรูป (โดยใช้คำสั่งต่าง ๆ ที่ใช้สำหรับสร้างภาพสองมิติ)

ซึ่งเมตริกที่ใช้ในขั้นตอนที่ 2, 3 และ 4 สามารถนำมาคูณกันเพื่อหาเมตริกที่ใช้แทนการปฏิบัติทั้งหมดได้ ถ้าเราใช้ระบบโคออร์ดิเนตแบบ Homogeneous $(X \quad Y \quad Z \quad W)$ ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว โดยมีสมมติฐานว่าวิวโวลุมของเรามีขนาดที่สามารถครอบคลุมรูปภาพได้ทั้งหมด (ไม่มีการคลิปป์)

หมายเหตุ : สำหรับเรื่องต่าง ๆ ในหัวข้อนี้ จะเห็นได้ว่าไม่เป็นไปตามขั้นตอนที่กล่าวมานี้ คือ มีการอธิบายถึงการโพรเจ็กต์ก่อนการแปลงภาพ เนื่องจากการต้องการให้เข้าใจถึงหลักแสดงภาพของสามมิติก่อนว่าเป็นอย่างไร แล้วจึงกลับมากล่าวถึงวิธีการแปลงภาพ เพราะในการโพรเจ็กต์อย่างง่ายที่ได้กล่าวมานี้ ไม่จำเป็นต้องใช้การแปลงภาพประกอบ ดังเช่นการโพรเจ็กต์ลงบนระนาบใด ๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
แนะนำการใช้งาน

3.1) ก่อนใช้งาน

ในการพัฒนาปัญหาพิเศษนี้ ทางคณะผู้จัดทำได้ทำการจำลองเครื่องที่ใช้พัฒนาเป็นเว็บเซิร์ฟเวอร์ โดยใช้โปรแกรม Sambar Server version 4.2 เพื่อทดลองการทำงานให้เหมือนกับการทำงานอยู่บนเครือข่ายอินเตอร์เน็ตจริง ๆ และพัฒนาบนมาตรฐานบราวเซอร์ของ Netscape Communicator version 4.0 ขึ้นไป ซึ่งการตั้งค่าต่าง ๆ นั้น ขอให้ผู้เรียนศึกษาวิธีใช้ได้จาก Help ของแต่ละโปรแกรม

ส่วนการนำปัญหาพิเศษนี้ขึ้นเผยแพร่ผ่านเครือข่ายอินเตอร์เน็ต นั้นก็มีวิธีทำได้หลายวิธี ซึ่งหากมีผู้สนใจก็สามารถหาความรู้ทางด้านนี้อ่านได้ตามเว็บไซต์ต่าง ๆ ซึ่งมีอยู่มากมายในปัจจุบัน

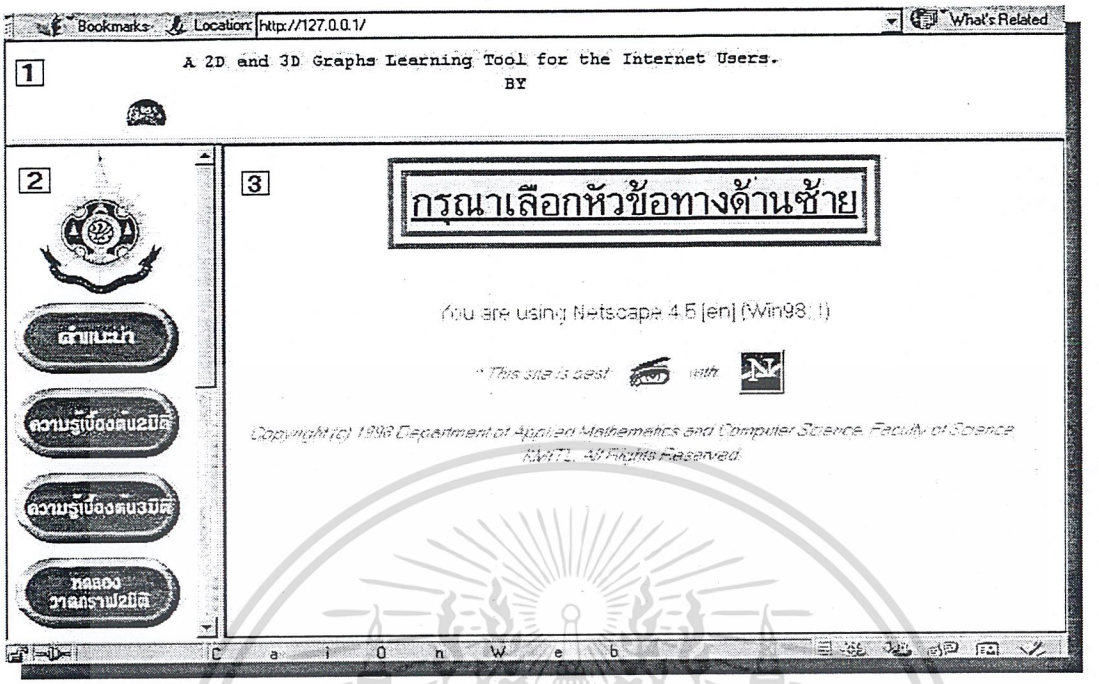
3.2) อธิบายการใช้งาน

หน้าจอหลัก

ในหน้าจอของปัญหาพิเศษนี้ จะแบ่งออกเป็น 3 ส่วนหลัก ๆ ดังรูปที่ 3.1 ซึ่งเรียกในแต่ละส่วนว่า “เฟรม”

เฟรมที่ 1 จะทำหน้าที่แนะนำปัญหาพิเศษนี้ ซึ่งจะวนรอบทำงานไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะออกจากโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.1 แสดงหน้าจอหลัก

เฟรมที่ 2 จะทำหน้าที่เป็นเมนูหลักของโปรแกรม ซึ่งประกอบไปด้วยเมนูต่าง ๆ ดังนี้

1. คำแนะนำ

รูปที่ 3.2 แสดงปุ่ม "คำแนะนำ"

จะเป็นส่วนแสดงข้อมูลทั่วไปของปัญหาพิเศษนี้

2. ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ

รูปที่ 3.3 แสดงปุ่ม "ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ"

จะเป็นส่วนแสดงเนื้อหาความรู้เบื้องต้นในการเขียนกราฟ 2 มิติ ใช้สำหรับผู้เรียนที่ยังไม่มีพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับกราฟรูปต่าง ๆ ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่อนุญาตให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ

รูปที่ 3.4 แสดงปุ่ม "ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ"

จะเป็นส่วนแสดงเนื้อหาความรู้เบื้องต้นในการเขียนกราฟ 3 มิติ ใช้สำหรับผู้เรียนที่ยังไม่มีพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับกราฟรูปต่าง ๆ ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

4. ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ

รูปที่ 3.5 แสดงปุ่ม "ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ"

จะเป็นส่วนที่เหมาะสำหรับผู้ที่มีพื้นฐานทางด้านการเขียนกราฟมาบ้าง ซึ่งในเมนูนี้จะกำหนดให้ผู้เรียนสามารถป้อนค่าต่าง ๆ ให้กับตัวโปรแกรม แล้วโปรแกรมก็จะวาดภาพที่ได้ออกมาให้อย่างคร่าว ๆ

5. ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ

รูปที่ 3.6 แสดงปุ่ม "ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ"

มีลักษณะเดียวกับข้อที่ 4 แต่จะเป็นในส่วนของระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. แบบฝึกหัด 2 มิติ

รูปที่ 3.7 แสดงปุ่ม "แบบฝึกหัด 2 มิติ"

ในส่วนนี้จะเหมาะสำหรับผู้เรียนที่มีความรู้ทางการเขียนกราฟที่ดี โดยจะแบ่งแบบฝึกหัดออกเป็น 3 ชุด ในรูปสมการที่คละกัน ซึ่งในบางข้อผู้เรียนจะต้องแก้สมการต่าง ๆ เอง แล้วทดลองวาดรูปออกมา เพื่อเทียบกับเฉลยที่มีให้

7. แบบฝึกหัด 3 มิติ

รูปที่ 3.8 แสดงปุ่ม "แบบฝึกหัด 3 มิติ"

จะมีลักษณะเดียวกับข้อที่ 6 แต่จะเป็นในส่วนของระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

8. สมุดเยี่ยมชม

รูปที่ 3.9 แสดงปุ่ม "สมุดเยี่ยมชม"

จะเป็นส่วนที่อนุญาตให้ผู้เรียนสามารถเขียนและอ่านสมุดเยี่ยมชมของเราได้ โดยผู้เรียนอาจจะให้คำแนะนำหรือติชมแก่คณะผู้จัดทำก็ได้

9. แผนที่เว็บไซต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.10 แสดงปุ่ม "แผนที่เว็บไซต์"

จะเป็นส่วนการเชื่อมโยงโดยรวมของเว็บไซต์ของเรา

10. เกี่ยวกับคณะผู้จัดทำ

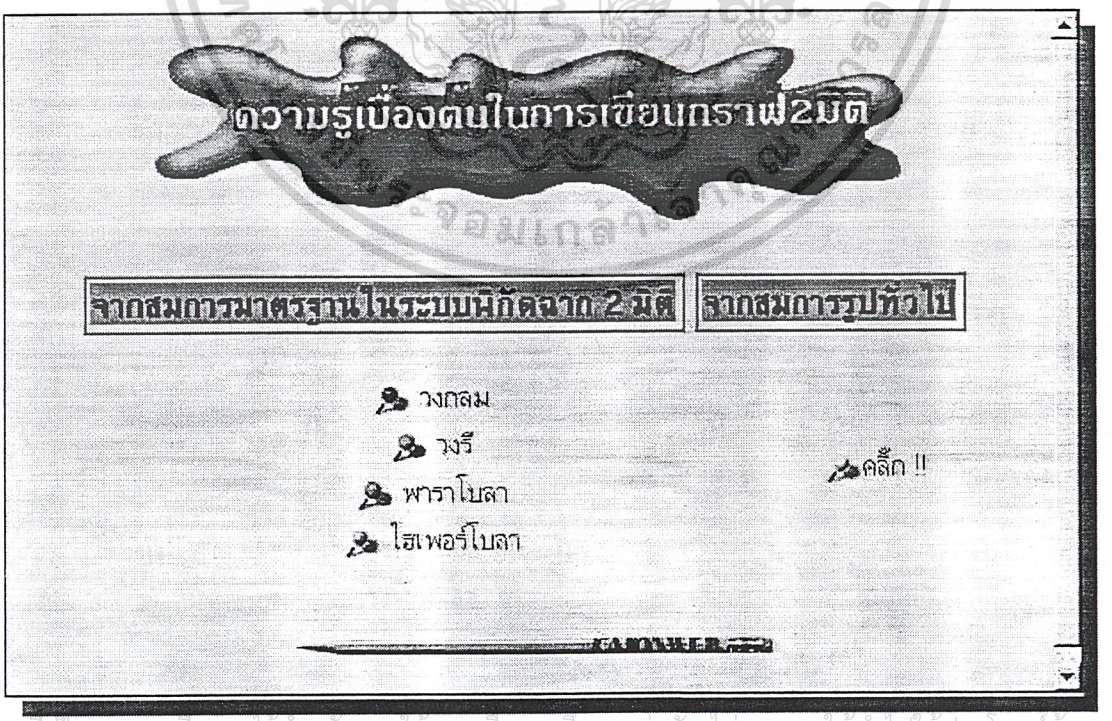
รูปที่ 3.11 แสดงปุ่ม "เกี่ยวกับคณะผู้จัดทำ"

จะเป็นส่วนที่ผู้เรียนสามารถส่ง e-mail ถึงคณะผู้จัดทำได้โดยตรง

เฟรมที่ 3 จะทำหน้าที่แสดงผลเมื่อผู้เรียนเลือกเมนูใด ๆ ในเฟรมที่ 2 หรือในเฟรมที่ 3

โดยในที่นี้จะขอแนะนำการใช้งานในกรณีที่ผู้เรียนเลือกเมนูในข้อที่ 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 จากเฟรมที่ 2 ดังต่อไปนี้

1. **เมื่อกด "ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ" ในเฟรมที่ 2** ส่วนของเฟรมที่ 3 จะเปลี่ยนเป็นดังรูป



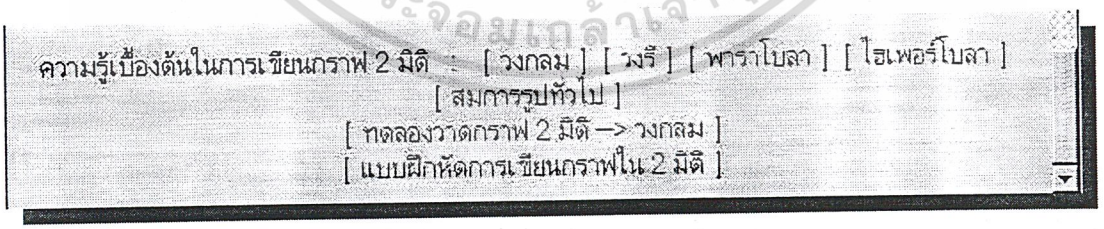
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.12 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ" ในเฟรมที่ 2

เลือกหัวข้อที่ต้องการเรียนรู้ ในที่นี้เลือก “วงกลม” ซึ่งหน้าจอเมื่อกด “วงกลม” แล้ว ในเฟรมที่ 3 จะปรากฏหน้าจอดังรูป

รูปที่ 3.13 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “วงกลม” ในหน้าจอที่แล้ว

ซึ่งในส่วนท้ายของเนื้อหาแต่ละเรื่อง จะมีหัวข้อให้ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงไปยังหัวข้อนั้น ๆ ได้โดยตรง ดังรูป



รูปที่ 3.14 แสดงหน้าจอส่วนท้ายของเนื้อหาแต่ละเรื่องในเมนู “ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ”

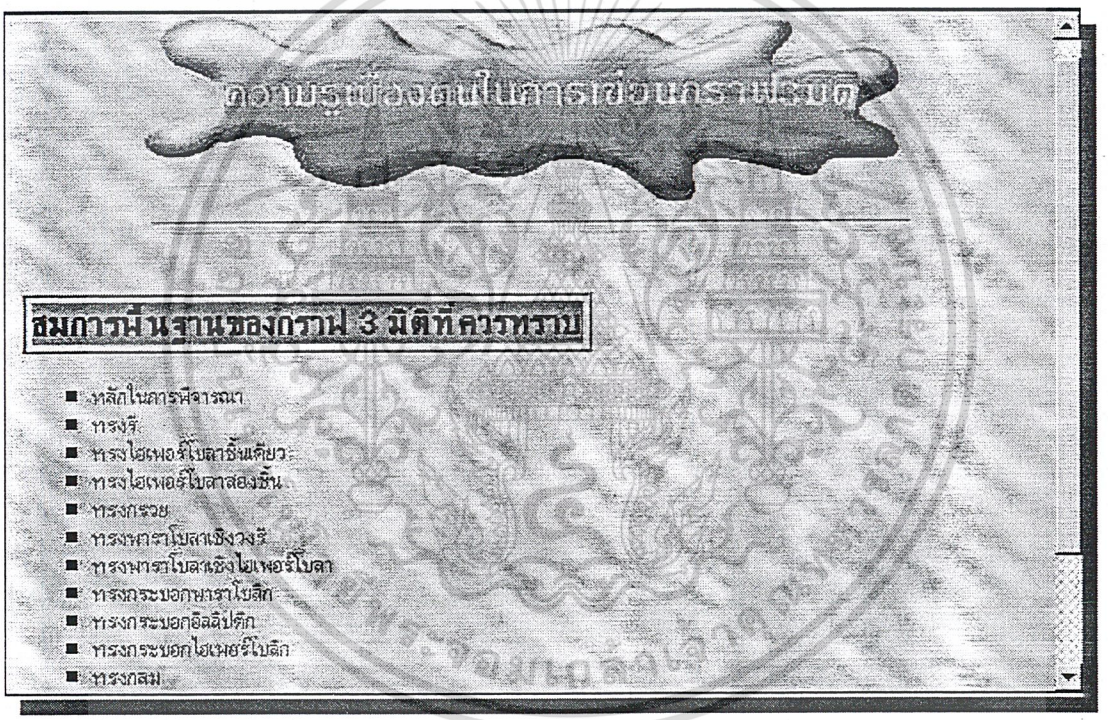
และถ้าผู้เรียนกดที่รูปด้านล่าง จะเป็นการดาวน์โหลดเอกสารของเนื้อหาในเรื่องนั้น ๆ ไว้อ่านทบทวนด้วยตนเองอีกครั้ง โดยมิต้องเชื่อมต่อกับเครือข่ายอินเตอร์เน็ต (เป็นไฟล์ในฟอร์แมตของ Microsoft Word)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.15 แสดงภาพสำหรับให้ผู้เรียนกด เพื่อดาวน์โหลดเอกสารไว้อ่านภายหลัง

ซึ่งจากเมนู "ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ" นี้ เมื่อเลือกในหัวข้ออื่น ๆ ก็จะมีหน้าจอในลักษณะเดียวกัน

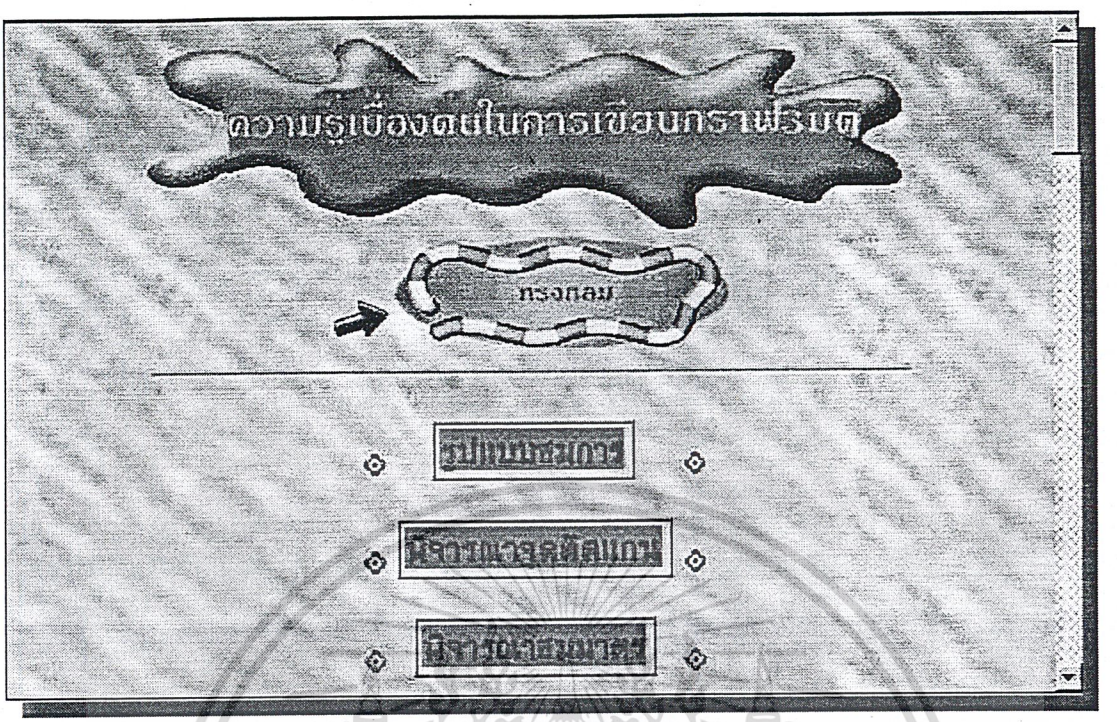
2. **เมื่อกด "ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ" ในเฟรมที่ 2** ส่วนของเฟรมที่ 3 จะเปลี่ยนเป็นดังรูป



รูปที่ 3.16 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ" ในเฟรมที่ 2

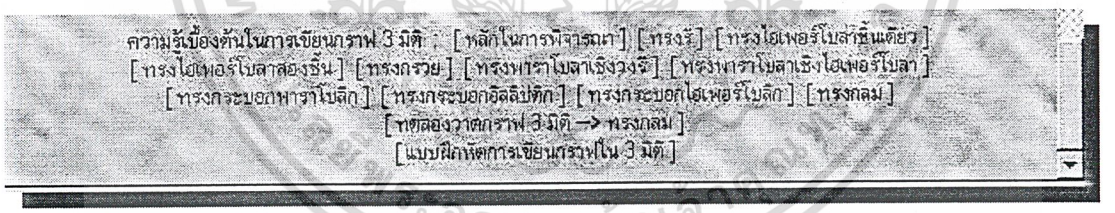
เลือกหัวข้อที่ต้องการเรียนรู้ ในที่นี้เลือก "ทรงกลม" ซึ่งหน้าจอเมื่อกด "ทรงกลม" แล้ว ในเฟรมที่ 3 จะปรากฏหน้าจอดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.17 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "ทรงกลม" ในหน้าจอที่แล้ว

ซึ่งในส่วนท้ายของเนื้อหาแต่ละเรื่อง จะมีหัวข้อให้ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงไปยังหัวข้อนั้น ๆ ได้โดยตรง ดังรูปที่ 3.18



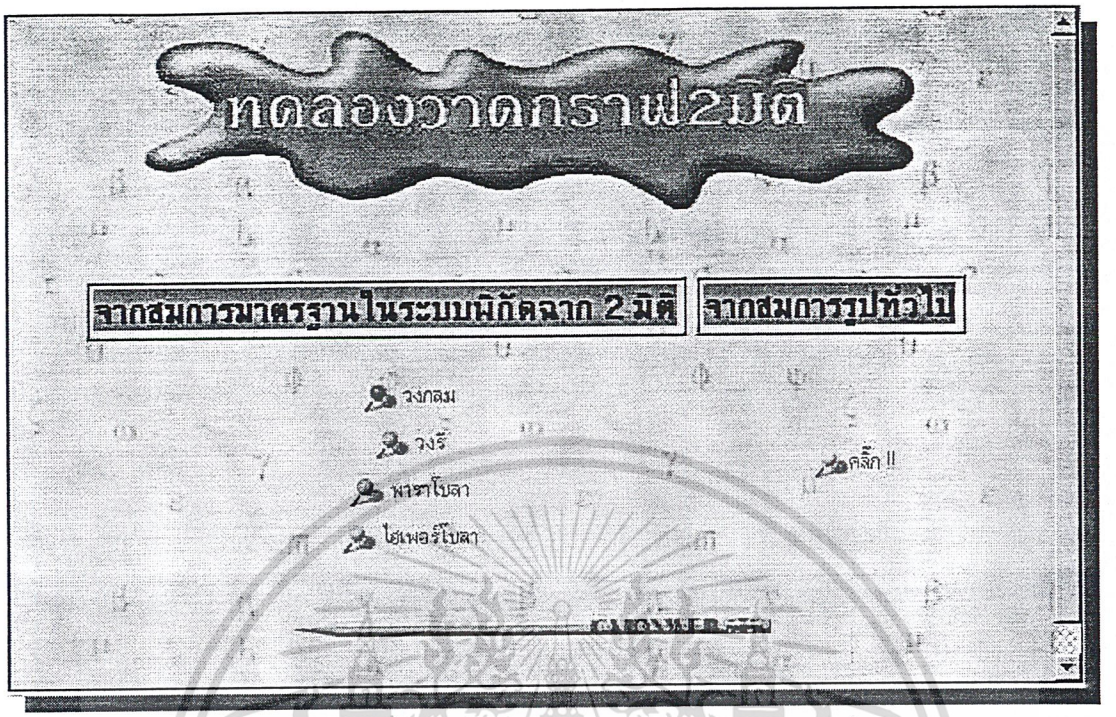
รูปที่ 3.18 แสดงหน้าจอส่วนท้ายของเนื้อหาแต่ละเรื่องในเมนู "ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ"

และถ้าผู้เรียนกดที่รูปที่ 3.15 จะเป็นการดาวน์โหลดเอกสารของเนื้อหาในเรื่องนั้น ๆ เช่นเดียวกับในเมนู "ความรู้เบื้องต้น 2 มิติ"

ซึ่งจากเมนู "ความรู้เบื้องต้น 3 มิติ" นี้ เมื่อเลือกในหัวข้ออื่น ๆ ก็จะมีหน้าจอในลักษณะเดียวกัน

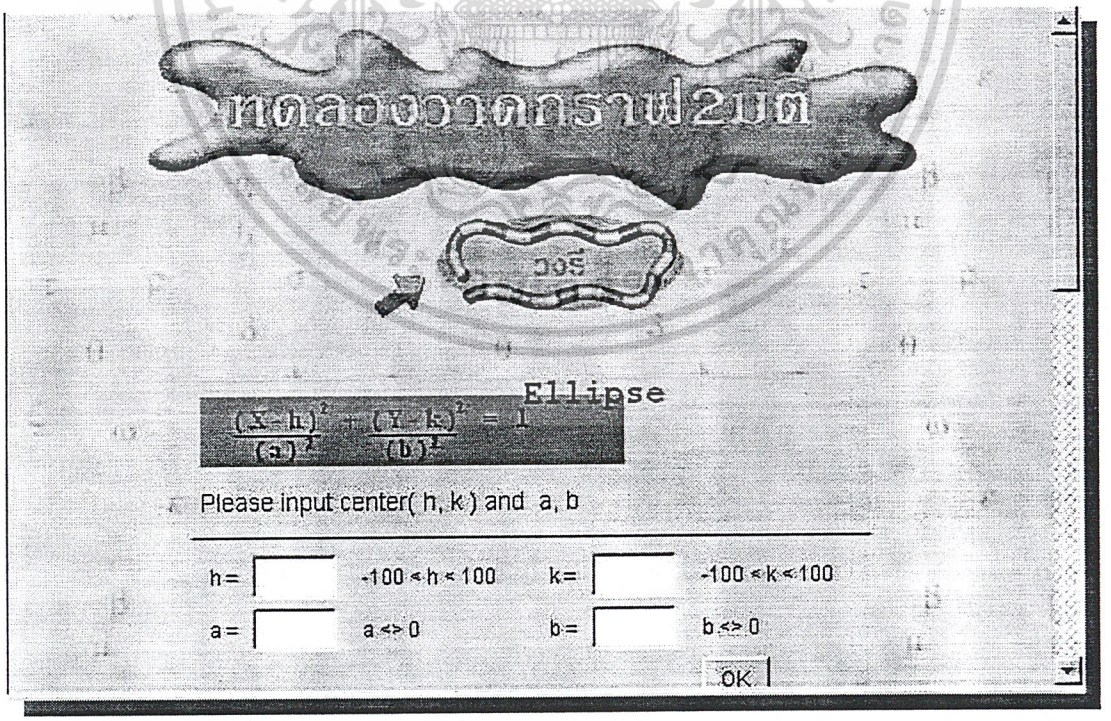
3. **เมื่อผู้เรียนเลือกเมนู "ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ"** หน้าจอในเฟรมที่ 3 จะเปลี่ยนเป็นดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.19 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ" ในเฟรมที่ 2

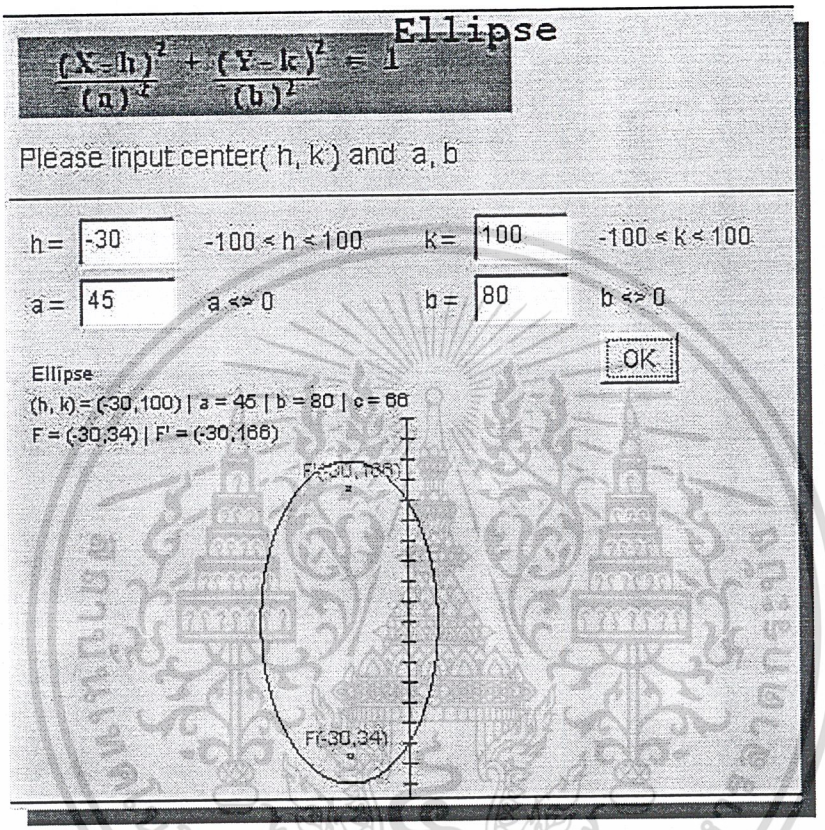
เลือกรูปที่ต้องการทดลองวาด ในที่นี้เลือก "วงรี" จะได้หน้าจอเป็นดังรูป



รูปที่ 3.20 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "วงรี" ในหน้าจอที่แล้ว

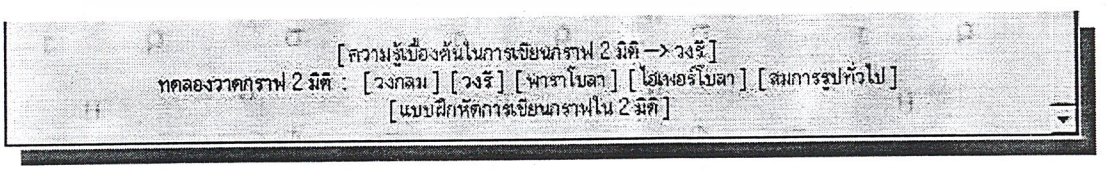
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นให้ผู้เรียนทดลองใส่ค่าต่าง ๆ เอง แล้วกดปุ่ม "OK" ซึ่งจะได้กราฟตามค่าที่ผู้เรียนใส่เข้าไป ดังรูปที่ 3.21 โดยจะมีประโยชน์มากสำหรับผู้เรียนที่มีสมการ แต่ไม่สามารถวาดรูปกราฟออกมาได้ หรือใช้ตรวจสอบว่าผู้เรียนวาดกราฟจากสมการต่าง ๆ ได้ถูกต้องหรือไม่



รูปที่ 3.21 แสดงหน้าจอเมื่อผู้เรียนใส่ค่าต่าง ๆ ให้กับโปรแกรม ทำให้ได้รูปกราฟออกมาตามต้องการ

ทั้งนี้ในส่วนท้ายของแต่ละหน้าก็จะยังคงมี link ที่สามารถเชื่อมโยงไปยังหัวข้อต่าง ๆ ได้โดยตรงอีกเช่นกัน ดังรูปที่ 3.22

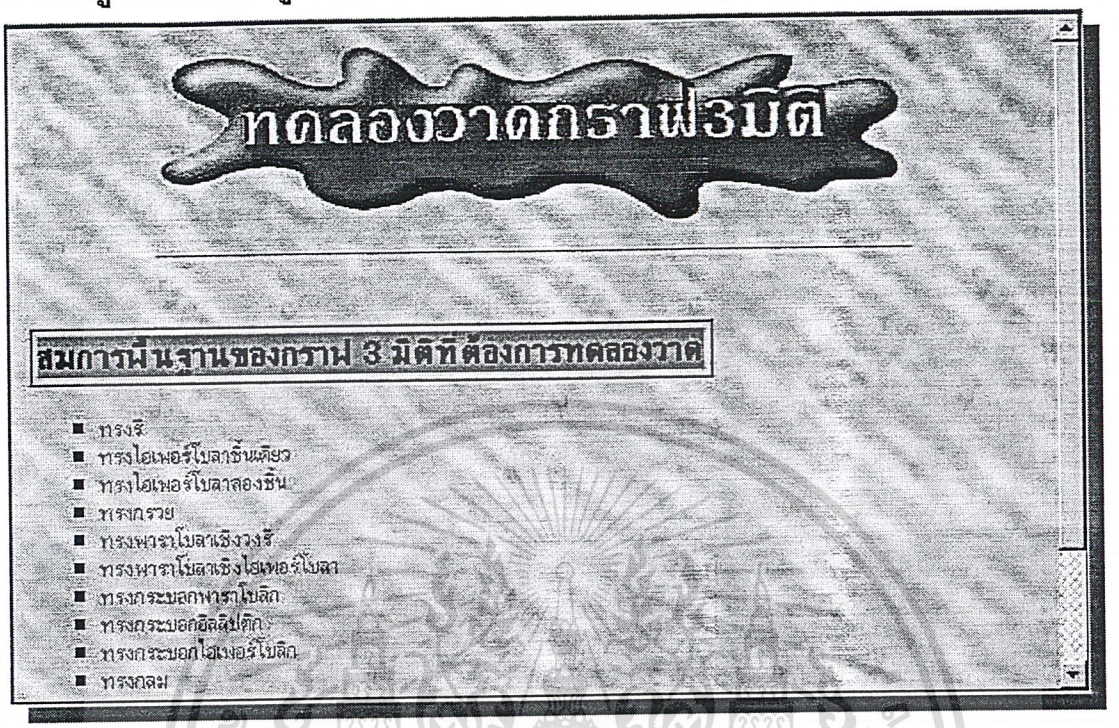


รูปที่ 3.22 แสดงส่วนท้ายของหน้าจอแต่ละเรื่องในเมนู "ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ"

ซึ่งจากเมนู "ทดลองวาดกราฟ 2 มิติ" นี้ เมื่อเลือกในหัวข้ออื่น ๆ ก็จะมีหน้าจอในลักษณะเดียวกับที่กล่าวมา

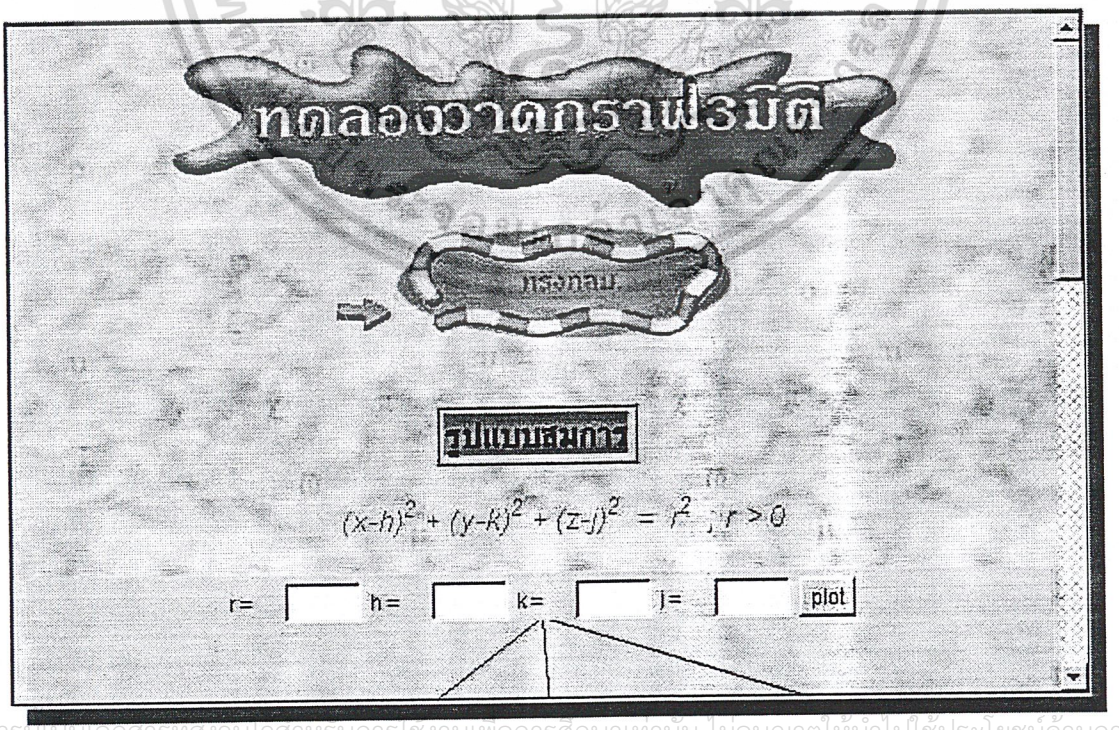
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. เมื่อผู้เรียนเลือกเมนู “ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ” หน้าจอในเฟรมที่ 3 จะเปลี่ยนเป็นดังรูป



รูปที่ 3.23 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ” ในเฟรมที่ 2

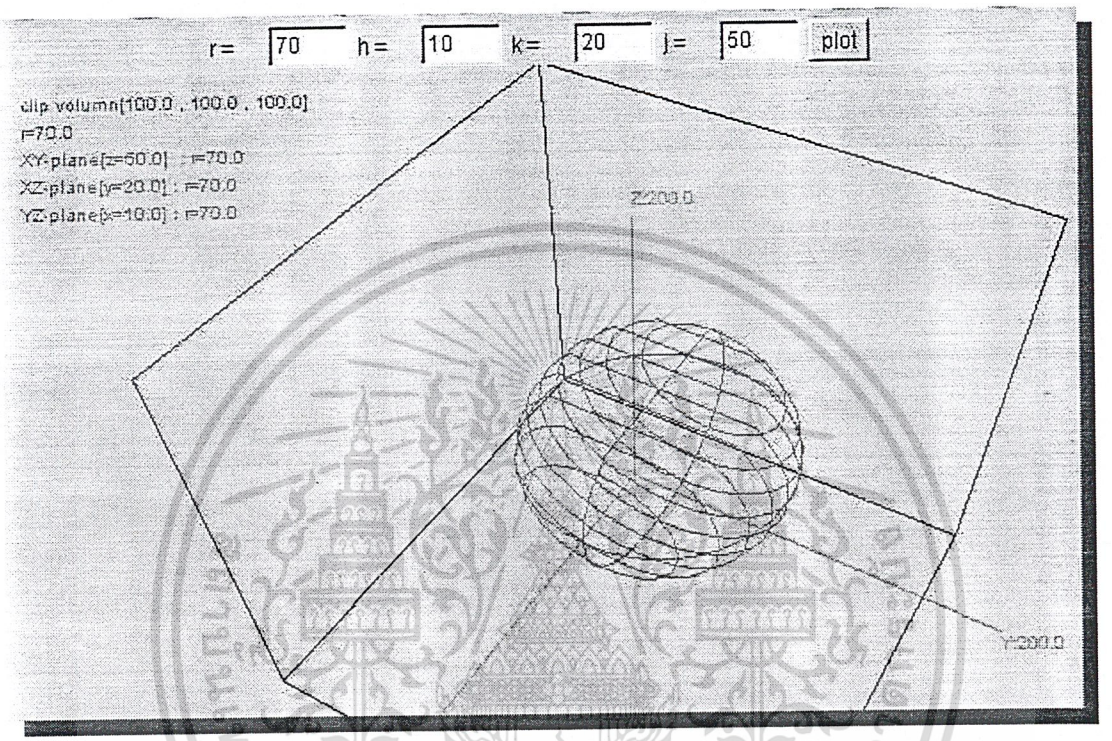
เลือกรูปที่ต้องการทดลองวาด ในที่นี้เลือก “ทรงกลม” จะได้หน้าจอเป็นดังรูป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งไม่อนุญาตให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

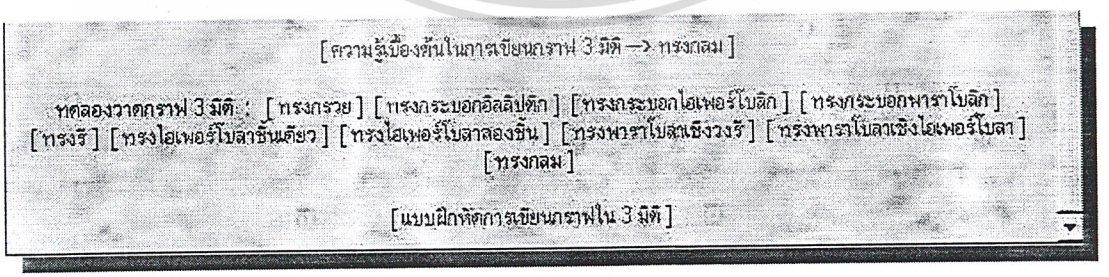
รูปที่ 3.24 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม “ทรงกลม” ในหน้าจอที่แล้ว

จากนั้นให้ผู้เรียนทดลองใส่ค่าต่าง ๆ เอง แล้วกดปุ่ม "OK" ซึ่งจะได้กราฟตามค่าที่ผู้เรียนใส่เข้าไป ดังรูปที่ 3.25 โดยจะมีประโยชน์มากสำหรับผู้เรียนที่มีสมการ แต่ไม่สามารถวาดรูปกราฟออกมาได้ หรือใช้ตรวจสอบว่าผู้เรียนวาดกราฟจากสมการต่าง ๆ ได้ถูกต้องหรือไม่



รูปที่ 3.25 แสดงหน้าจอเมื่อผู้เรียนใส่ค่าต่าง ๆ ให้กับโปรแกรม ทำให้ได้รูปกราฟออกมาตามต้องการ

ทั้งนี้ในส่วนท้ายของแต่ละหน้าก็จะยังคงมี link ที่สามารถเชื่อมโยงไปยังหัวข้อต่าง ๆ ได้โดยตรงอีกเช่นกัน ดังรูปที่ 3.26

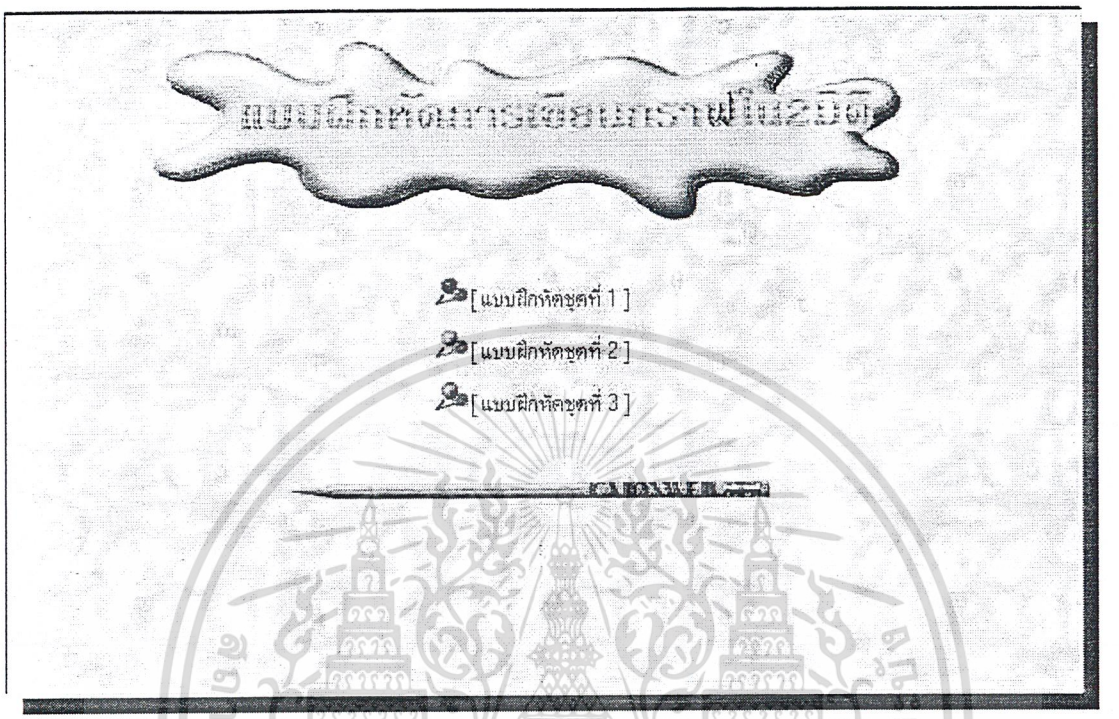


รูปที่ 3.26 แสดงส่วนท้ายของหน้าจอแต่ละเรื่องในเมนู "ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ"

ซึ่งจากเมนู "ทดลองวาดกราฟ 3 มิติ" นี้ เมื่อเลือกในหัวข้ออื่น ๆ ก็จะมีหน้าจอในลักษณะเดียวกันนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

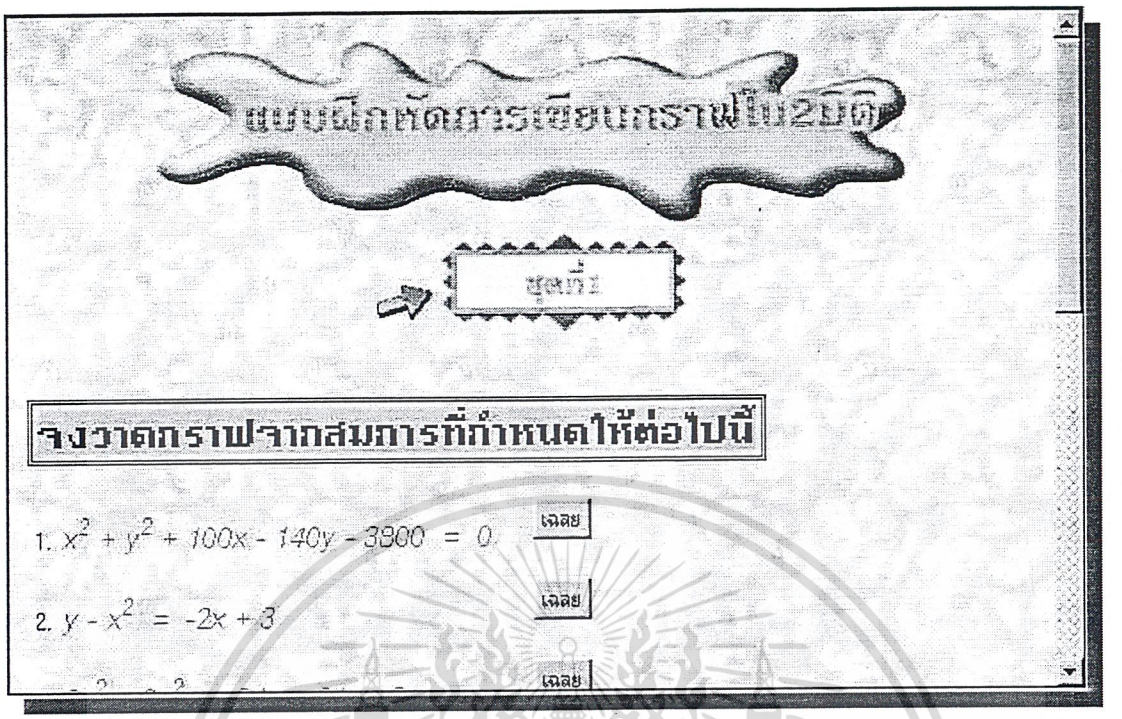
5. **เมื่อผู้เรียนเลือกเมนู "แบบฝึกหัด 2 มิติ"** หน้าจอในเฟรมที่ 3 จะเป็นดังรูป



รูปที่ 3.27 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "แบบฝึกหัด 2 มิติ" ในเฟรมที่ 2

ซึ่งจะมีแบบฝึกหัดคละรูปกันอยู่ 3 ชุด เมื่อผู้เรียนเลือกชุดใดชุดหนึ่ง ในกรณีนี้เลือก "ชุดที่ 1" จะปรากฏหน้าจอเป็นดังรูป

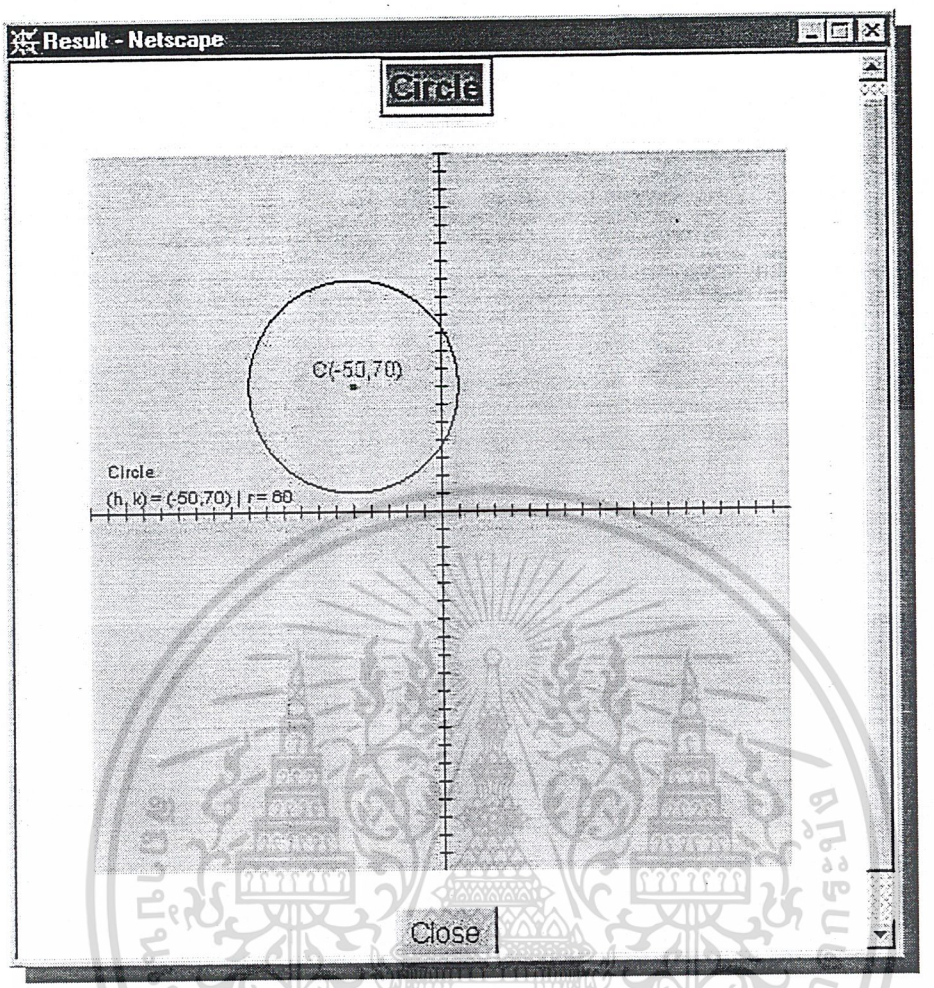
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.28 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "ชุดที่ 1" ในหน้าจอที่แล้ว

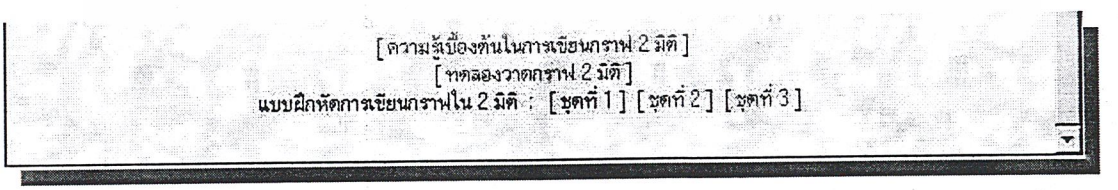
ผู้เรียนจะต้องลองวาดกราฟดูจากสมการที่โจทย์กำหนดให้ โดยใช้ความรู้เบื้องต้นที่ได้ศึกษามา เมื่อได้รูปกราฟแล้วลองกดปุ่ม เฉลย ดู ซึ่งโปรแกรมจะเปิดหน้าต่างขึ้นมาใหม่ เพื่อเฉลยคำตอบเป็นกราฟของแต่ละข้ออย่างคร่าว ๆ ดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.29 แสดงหน้าจอเมื่อผู้เรียนกดปุ่ม เฉลย ที่ด้านท้ายของโจทย์

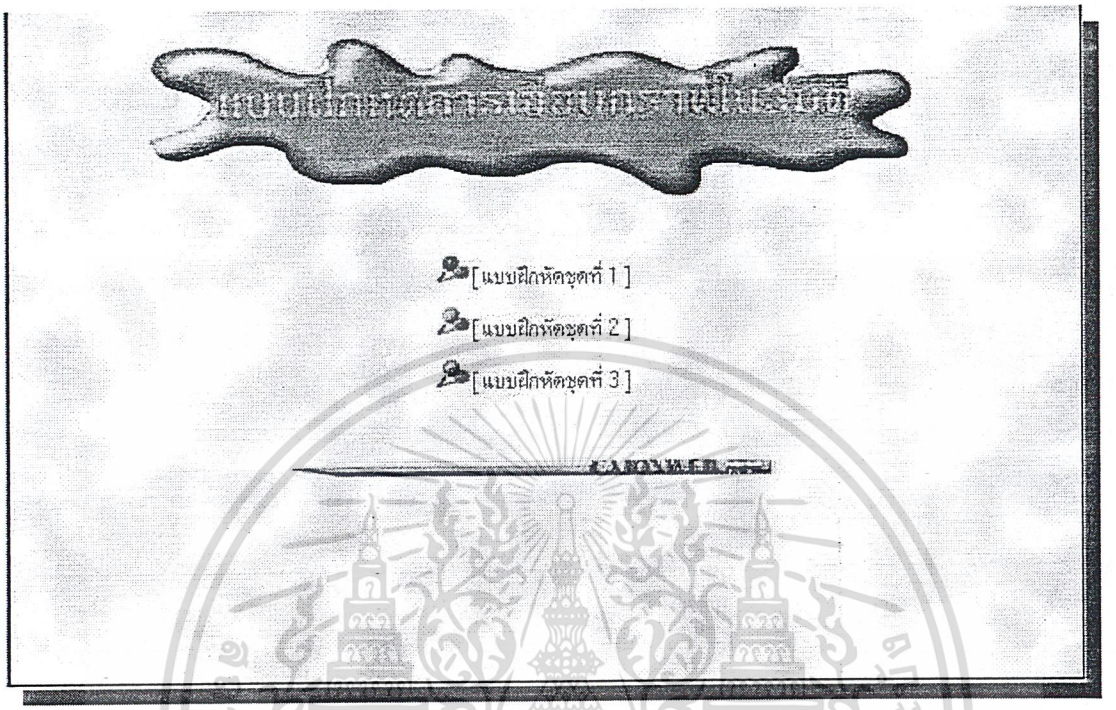
ซึ่งเมื่อดูเฉลยจนพอใจแล้วก็สามารถปิดหน้าต่างดังกล่าวทิ้งไปได้ แล้วผู้เรียนก็ทำแบบฝึกหัดข้ออื่นต่อไป และเช่นเดียวกับเมนูอื่น คือจะในส่วนท้ายของแต่ละหน้าก็จะยังคงมี link ที่สามารถเชื่อมโยงไปยังหัวข้อต่าง ๆ ได้โดยตรงอีกเช่นเดิม ดังรูปที่ 3.30



รูปที่ 3.30 แสดงส่วนท้ายของหน้าจอแต่ละเรื่องในเมนู "แบบฝึกหัด 2 มิติ"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. **เมื่อผู้เรียนเลือกเมนู "แบบฝึกหัด 3 มิติ"** หน้าจอในเฟรมที่ 3 จะเปลี่ยนเป็นดังรูป



รูปที่ 3.31 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "แบบฝึกหัด 3 มิติ" ในเฟรมที่ 2

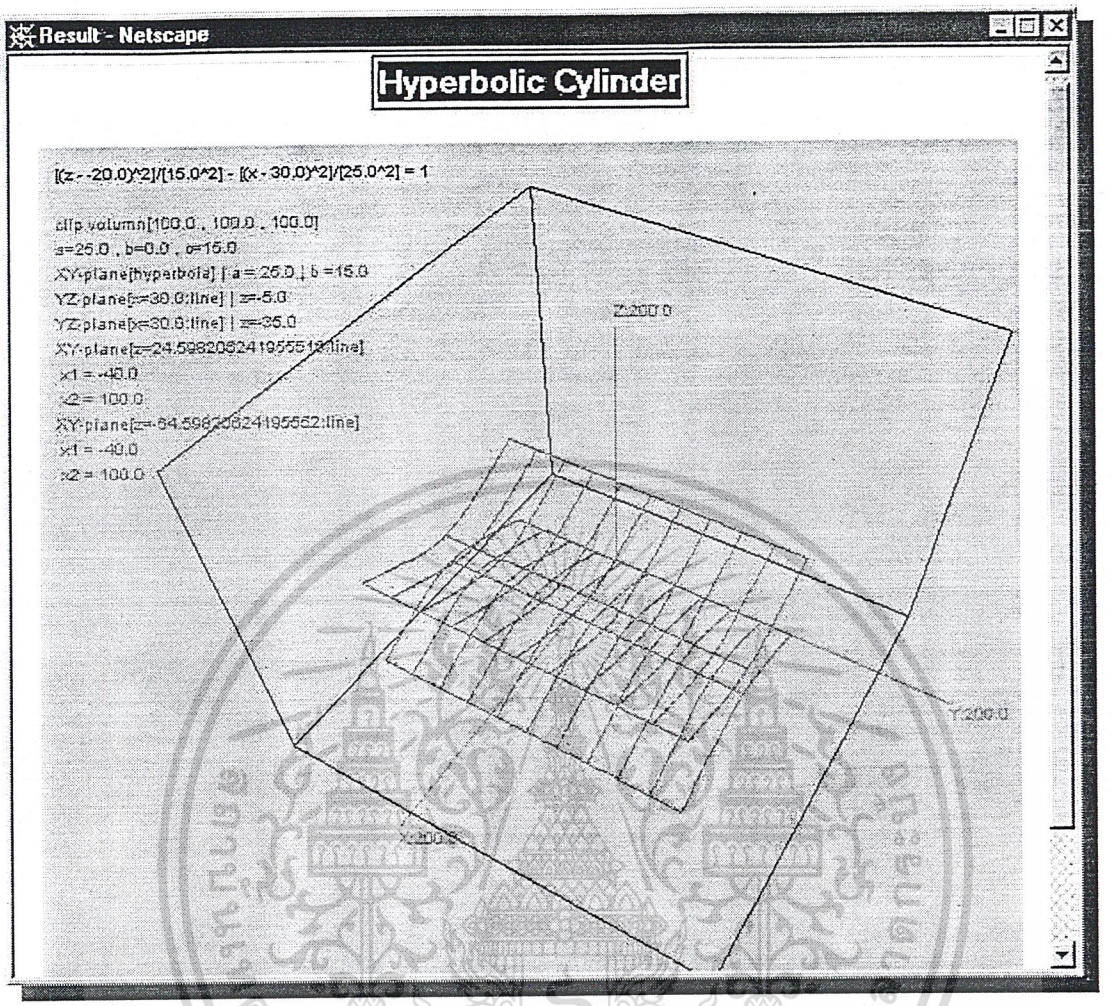
ซึ่งจะมีแบบฝึกหัดคละรูปกันอยู่ 3 ชุด เมื่อผู้เรียนเลือกชุดใดชุดหนึ่ง ในกรณีนี้เลือก "ชุดที่ 2" จะปรากฏหน้าจอเป็นดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.32 แสดงหน้าจอที่เปลี่ยนไปในเฟรมที่ 3 เมื่อกดปุ่ม "ชุดที่ 2" ในหน้าจอที่แล้ว

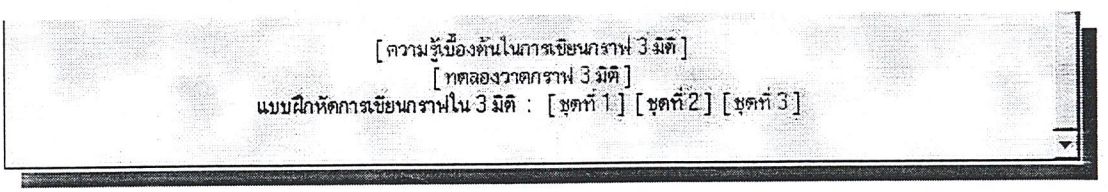
ผู้เรียนจะต้องลองวาดกราฟดูจากสมการที่โจทย์กำหนดให้ โดยใช้ความรู้เบื้องต้นที่ได้ศึกษามา เมื่อได้รูปกราฟแล้วลองกดปุ่ม เฉลย ดู ซึ่งโปรแกรมจะเปิดหน้าต่างขึ้นมาใหม่ เพื่อเฉลยคำตอบเป็นกราฟของแต่ละข้ออย่างคร่าว ๆ ดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.33 แสดงหน้าจอเมื่อผู้เรียนกดปุ่ม เฉลย ที่ด้านท้ายของโจทย์

ซึ่งเมื่อดูเฉลยจนพอใจแล้วก็สามารถปิดหน้าต่างดังกล่าวทิ้งไปได้ แล้วผู้เรียนก็ทำแบบฝึกหัดข้ออื่นต่อไป และเช่นเดียวกับเมนูอื่น คือจะในส่วนท้ายของแต่ละหน้าก็จะยังคงมี link ที่สามารถเชื่อมโยงไปยังหัวข้อต่าง ๆ ได้โดยตรงอีกตามรูปแบบปกติ ดังรูปที่ 3.34



รูปที่ 3.34 แสดงส่วนท้ายของหน้าจอแต่ละเรื่องในเมนู "แบบฝึกหัด 3 มิติ"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
สรุป วิจารณ์และแนวทางในการพัฒนา

4.1) ความสามารถของปัญหาพิเศษ

4.1.1 ผู้ใช้สามารถเรียนรู้หลักพื้นฐานในการเขียนกราฟทั้งใน 2 มิติและ 3 มิติได้ดียิ่งขึ้น

4.1.2 ผู้ใช้สามารถทดลองวาดกราฟในรูปแบบต่าง ๆ ได้ โดยสามารถกำหนดค่าต่าง ๆ ได้ด้วยตนเอง

4.1.3 ผู้ใช้สามารถทดสอบตนเองจากแบบฝึกหัดที่กำหนดให้ได้

4.2) ข้อจำกัดของปัญหาพิเศษ

4.2.1 ความเร็วในการสื่อสารผ่านอินเตอร์เน็ตที่ค่อนข้างจำกัด ทำให้ไม่เหมาะสมในการเพิ่มภาพหรือความสามารถพิเศษต่าง ๆ เข้าไปในปัญหาพิเศษ เพื่อช่วยให้ผู้ใช้เรียนรู้ได้ง่ายขึ้นได้ เพราะจะทำให้ความเร็วในการโหลดข้อมูลไปยังผู้ใช้ลดลงอย่างมาก

4.2.2 เนื่องจากระยะเวลาที่มีจำกัด จึงได้ทำการพัฒนาปัญหาพิเศษได้เพียงในรูปแบบของภาษาไทยเท่านั้น ยังมิได้พัฒนาปัญหาพิเศษนี้ให้เป็นภาษาสากลเช่น ภาษาอังกฤษ เพื่อให้การศึกษาไม่จำกัดกับชนชาติใดชาตินึง

4.2.3 ปัญหาพิเศษนี้พยายามจะใช้มาตรฐาน HTML 4.0 ซึ่งเป็นมาตรฐานล่าสุดที่ทาง W3C ประกาศออกมาใช้ โดยในปัจจุบัน (ขณะทำปัญหาพิเศษ) ยังไม่มีบราวเซอร์ของบริษัทใดรองรับได้อย่างถูกต้องทุกประการ โดยปัญหาพิเศษนี้คณะผู้จัดทำได้พัฒนาบน Netscape Communicator 4.5 ของบริษัท Netscape จำกัด เป็นหลัก ซึ่งทำให้บางคำสั่งอาจจะไม่สามารถเข้ากันได้กับบราวเซอร์ของบริษัทอื่น

4.2.4 ในการวาดกราฟ ปัญหาพิเศษนี้ยังมิได้มีการจัดการในเรื่องของการย่อขยายภาพ (Scale) จึงทำให้ขนาดของกราฟที่ได้ออกมาขึ้นอยู่กับค่าต่าง ๆ ที่ผู้ใช้กำหนดเข้าไป คือหากค่าที่กำหนดเข้าไปไม่เหมาะสมพอก็จะทำให้ได้ภาพออกมาไม่ดีเท่าที่ควร และในการตัดขอบภาพ (Clip) นั้น ในปัญหาพิเศษนี้ยังทำได้ไม่ดีเท่าที่ควร

4.2.5 แบบฝึกหัดที่ใช้ในปัญหาพิเศษนี้ จะเป็นเหมือนกันทุกครั้งที่ผู้ใช้ทำแบบฝึกหัดชุดนั้น ๆ ทำให้ผู้ใช้อาจจะไม่สนใจที่จะทำเท่าใดนักในครั้งต่อ ๆ ไป หากทราบเฉลยคำตอบในครั้งแรกแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3) แนวทางในการพัฒนาต่อไป

จากข้อจำกัดของปัญหาพิเศษจะเห็นว่า บางข้อจะเป็นปัญหาที่เราไม่สามารถแก้ไขได้เองดังเช่นข้อที่ 4.2.1 แต่ในข้ออื่น ๆ นั้น เราสามารถพัฒนาให้ทำงานได้ดียิ่งขึ้นได้เช่นการนำภาษาโปรแกรมต่าง ๆ ที่ใช้บนเว็บเพจเช่น VB Script, JavaScript รวมถึง ASP มาแก้ไขปัญหาในข้อ 4.2.3 และ 4.2.5 เป็นต้น และหากทำการศึกษาภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรม (Java) ให้ดียิ่งขึ้นก็จะสามารถแก้ปัญหาในข้อ 4.2.4 ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก.
หลักการพิจารณาและการเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

1) การเขียนกราฟของฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น (Graphs of non linear functions)

ฟังก์ชันไม่เป็นเชิงเส้น (non linear function) คือฟังก์ชันซึ่งกราฟไม่เป็นเส้นตรง ซึ่งในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยการกำหนดจุดหลาย ๆ จุดแล้วลากเส้นต่อระหว่างจุดอาจทำให้รูปกราฟบางส่วนขาดหายไป ดังนั้นจึงมีวิธีสังเกตและหลักการต่าง ๆ ช่วยในการเขียนกราฟ อันได้แก่

1. ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า (Concavity and point of inflection) ซึ่งจะไม่กล่าวถึงในที่นี้
2. ส่วนตัดแกน (Intercept)
3. สมมาตร (Symmetry)
4. ขอบเขต (Extent)
5. เส้นกำกับ (Asymptote)

1.1 ส่วนตัดแกน (Intercept)

ส่วนตัดแกน คือ ระยะจากจุดกำเนิดถึงจุดที่เส้นโค้งตัดแกนทั้งสอง ถ้ากราฟตัดแกน x เรียกว่า "ส่วนตัดแกน x" (x-intercept) และถ้ากราฟตัดแกน y เรียกว่า "ส่วนตัดแกน y" (y-intercept) ดังนั้นค่าของส่วนตัดแกน จะมีเครื่องหมายบวกหรือลบแล้วแต่ว่าส่วนตัดอยู่บนส่วนที่เป็นบวกหรือลบของแกน จะเห็นว่าส่วนตัดแกน x ค่า y จะมีค่าเป็นศูนย์ และส่วนตัดแกน y ค่า x จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นการหาส่วนตัดแกนหาได้ดังนี้

1.1.1 **ส่วนตัดแกน x** หาได้โดยแทนค่า $y = 0$ ในสมการที่กำหนดให้ ค่า x ที่ได้คือส่วนตัดแกน x

1.1.2 **ส่วนตัดแกน y** หาได้โดยแทนค่า $x = 0$ ในสมการที่กำหนดให้ ค่า y ที่ได้คือส่วนตัดแกน y

ตัวอย่างที่ 1 จงหาส่วนตัดแกนของกราฟ $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$

วิธีทำ ให้ $y = 0$ จะได้ $x = \pm 3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $x=0$ จะได้ $y=-1$

ดังนั้นส่วนตัดแกน x คือ 3 และ -3

และส่วนตัดแกน y คือ -1

ตัวอย่างที่ 2 จงหาส่วนตัดแกนของกราฟ $xy=1$

วิธีทำ จะเห็นว่า เมื่อแทนค่า $x=0$ หรือ $y=0$

ทำให้สมการที่กำหนดให้อยู่ในรูปของ $0=1$ ซึ่งไม่มีคำตอบ

ดังนั้น แสดงว่ากราฟไม่ตัดแกน x และไม่ตัดแกน y

ตัวอย่างที่ 3 จงหาส่วนตัดแกนของกราฟ $x^2-y^2=4$

วิธีทำ ให้ $y=0$ จะได้ $x=\pm 2$

ให้ $x=0$ จะได้ $y^2=-4$ ซึ่งไม่สามารถหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริงได้

ดังนั้น แสดงว่ากราฟไม่ตัดแกน y และส่วนตัดแกน x คือ 2 และ -2

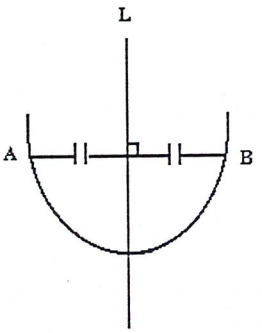
1.2 สมมาตร (Symmetry)

นิยาม จุด 2 จุดใด ๆ มีสมมาตรกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถ้าเส้นตรงเส้นนั้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นที่ต่อจุดปลายทั้งสอง และจุด 2 จุดใด ๆ มีสมมาตรกับจุดที่ 3 ถ้าจุดที่ 3 เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ต่อจุดปลายทั้งสองนั้น

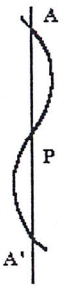
นิยาม เส้นโค้งใด ๆ มีสมมาตรกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถ้าจากจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง ลากเส้นตั้งฉากกับเส้นตรง แล้วต่อออกไปเป็นระยะเท่ากัน จะพบจุดอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้งเสมอ และเส้นตรงนี้เรียกว่า "แกนสมมาตร" (axis of symmetry) ดังรูปที่ ก1 เส้นโค้ง AB มีสมมาตรกับเส้นตรง L

นิยาม เส้นโค้งใด ๆ มีสมมาตรกับจุด ๆ หนึ่ง ถ้าจากจุดใด ๆ บนเส้นโค้งลากไปยังจุดนั้นแล้วต่อออกไปเป็นระยะทางเท่ากัน จะพบจุดอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้งเสมอ จุดที่มีสมมาตรกับเส้นโค้งเรียกว่า "จุดสมมาตร" (point of symmetry) ดังรูปที่ ก2 เส้นโค้ง AA' มีสมมาตรกับจุด P

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



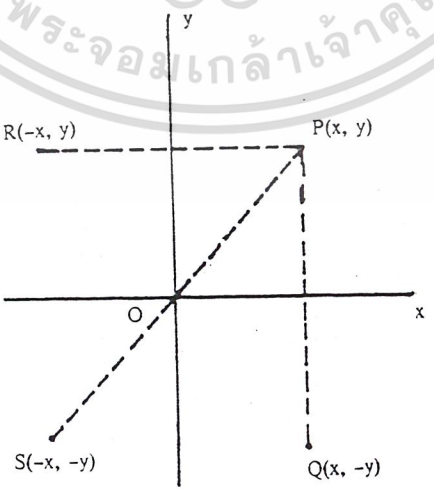
รูปที่ ก1
แสดงเส้นโค้ง AB ที่สมมาตรกับเส้นตรง L



รูปที่ ก2
แสดงเส้นโค้ง AA' ที่สมมาตรกับจุด P

ในการเขียนกราฟ จะพิจารณาว่าเส้นโค้งสมมาตรกับแกน x แกน y และจุดกำเนิดหรือไม่ โดยใช้นิยามดังกล่าวข้างต้นจะเห็นว่า

- ถ้าจุด $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้งแล้ว เส้นโค้งนี้จะสมมาตรกับแกน x เมื่อจุด $Q(x,-y)$ อยู่บนเส้นโค้งด้วยดังรูปที่ ก3
- ถ้าจุด $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้งแล้ว เส้นโค้งนี้จะสมมาตรกับแกน y เมื่อจุด $R(-x,y)$ อยู่บนเส้นโค้งด้วยดังรูปที่ ก3
- ถ้าจุด $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้งแล้ว เส้นโค้งนี้จะสมมาตรกับจุดกำเนิด เมื่อจุดกำเนิดเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P(x,y)$ และ $S(-x,-y)$ ดังรูปที่ ก3 ดังนั้นจุด $S(-x,-y)$ จะต้องอยู่บนเส้นโค้งด้วย



รูปที่ ก3 แสดงจุด $P(x,y)$ บนเส้นโค้งที่สมมาตรกับจุดกำเนิด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นการพิจารณาการสมมาตรของเส้นโค้งทำได้ดังนี้

- ถ้าแทน y ด้วย $-y$ ในสมการเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม จะได้ว่าเส้นโค้งมีสมมาตรกับแกน x
- ถ้าแทน x ด้วย $-x$ ในสมการเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม จะได้ว่าเส้นโค้งมีสมมาตรกับแกน y
- ถ้าแทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ ทั้งคู่ในสมการเส้นโค้งแล้วสมการคงเดิม จะได้ว่าเส้นโค้งมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาสมมาตรของกราฟ $y^2-4x+4=0$

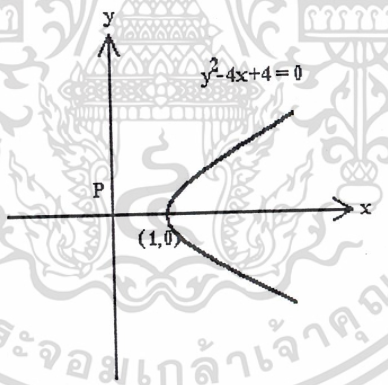
วิธีทำ จากสมการของเส้นโค้ง $y^2-4x+4=0$

แทน y ด้วย $-y$ สมการคงเดิม

แทน x ด้วย $-x$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

ดังนั้นเส้นโค้งมีสมมาตรกับแกน x แต่ไม่สมมาตรกับแกน y และจุดกำเนิด



รูปที่ ก4 แสดงเส้นโค้งที่สมมาตรกับแกน X แต่ไม่สมมาตรกับแกน Y

ตัวอย่างที่ 5 จงพิจารณาสมการของกราฟ $xy=1$

วิธีทำ จากสมการของเส้นโค้ง $xy=1$

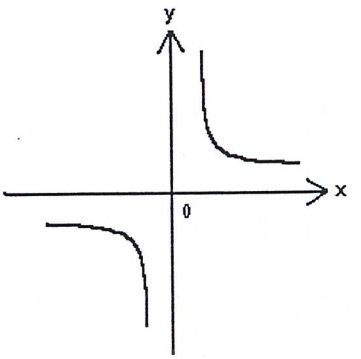
แทน y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการคงเดิม

ดังนั้นเส้นโค้งมีสมมาตรกับจุดกำเนิด แต่ไม่สมมาตรกับแกน x และแกน y

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ก5 แสดงเส้นโค้งที่สมมาตรกับจุดกำเนิด

ข้อสังเกต : ถ้าเส้นโค้งมีสมมาตรกับแกน x และแกน y แล้ว เส้นโค้งจะมีสมมาตรกับจุดกำเนิดด้วย แต่บทกลับไม่เป็นจริง (ดังตัวอย่างที่ 5)

1.3 ขอบเขต (Extent)

การหาขอบเขตเพื่อพิจารณาลักษณะขอบเขตของเส้นโค้งว่าควรจะอยู่ในช่วงใด ดังนั้นการหาขอบเขตจึงพิจารณาจากค่าจริง x และ y ซึ่งทำให้ (x,y) คล้องตามสมการที่กำหนดให้ นั่นคือการหาโดเมนและพิสัยของฟังก์ชันนั่นเอง ดังได้ทราบแล้วว่าถ้า r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B

$$\text{โดเมน} = \{x \mid x \in A, (x,y) \in r\} \quad \text{และ}$$
$$\text{พิสัย} = \{y \mid y \in B, (x,y) \in r\}$$

ดังนั้นการหาโดเมนก็คือ การพิจารณาค่า x ทั้งหลายที่ทำให้ y มีค่าจริง จึงควรจัดสมการที่กำหนดให้ใหม่ โดยจัด y ให้อยู่ในเทอมของ x และการหาพิสัยหาได้โดยจัด x ให้อยู่ในเทอมของ y แล้วพิจารณาค่า y ทั้งหลายที่ทำให้ x มีค่าจริง ดังตัวอย่าง

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงหาขอบเขตของเส้นโค้ง $y^2 + x = 4$

<u>วิธีทำ</u> $y = \pm\sqrt{4-x}$ และ $x = 4 - y^2$

จะเห็นว่า $x \le 4$ จึงจะทำให้ y มีค่าจริง

และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ ที่ทำให้ x มีค่าจริงเสมอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นขอบเขตของ x คือ $(-\infty, 4]$ และขอบเขตของ y คือ R

ตัวอย่างที่ 7 จงหาขอบเขตของเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = 1$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ดังนี้ $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ และ $x = \pm\sqrt{1 + y^2}$

จะเห็นว่า y มีค่าจริง เมื่อ $x^2 - 1 \geq 0$ นั่นคือ $x \leq -1$ หรือ $x \geq 1$

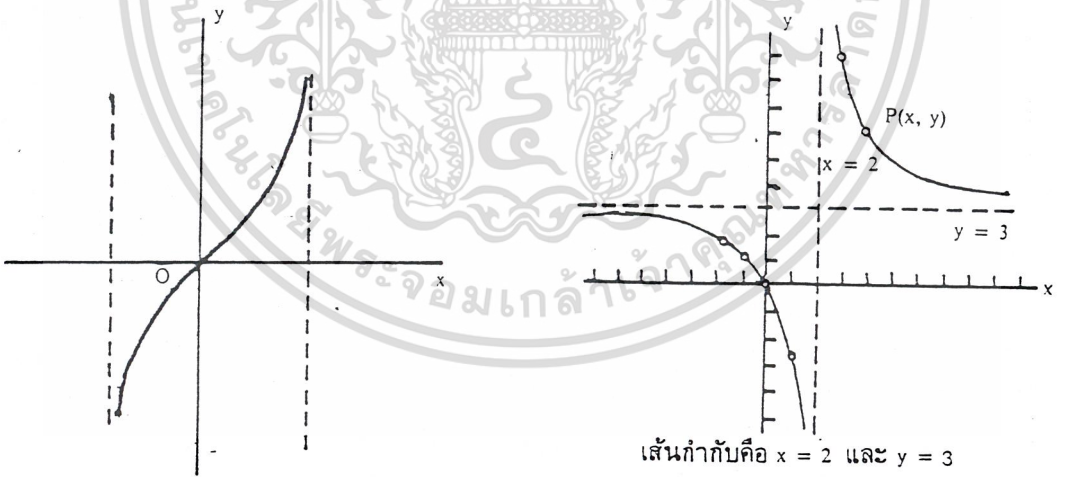
และ x มีค่าจริง สำหรับทุกค่าจริงของ y

ดังนั้นขอบเขตของ $x = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ และขอบเขตของ $y = R$

1.4 เส้นกำกับ (Asymptotes)

เส้นกำกับมีประโยชน์ในการเขียนกราฟเพื่อบอกให้ทราบว่า เส้นกราฟที่เราเขียนเมื่อต่อปลายออกไป จะโค้งเข้าหาเส้นตรงใด

นิยาม เส้นตรง l เป็นเส้นกำกับของเส้นโค้ง C เมื่อให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง C และให้จุด P เคลื่อนไปตามเส้นโค้ง C ระยะทางตั้งฉากจากจุด P ไปยังเส้นตรง l จะลดลงและมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ไปทุกขณะ ดังรูปที่ ก6



รูปที่ ก6 แสดงเส้นโค้งที่มีเส้นกำกับคือ $x = 2$ และ $y = 3$

ในที่นี้จะพิจารณาเส้นกำกับในแนวระดับ (horizontal asymptote) และเส้นกำกับในแนวดิ่ง (vertical asymptote) เท่านั้น

ถ้าสมการของเส้นโค้งอยู่ในรูปของ

$$y = \frac{N(x)}{D(x)} \quad (1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $N(x)$ และ $D(x)$ เป็นพหุนาม (Polynomial) ที่ไม่มีตัวประกอบร่วม

1.4.1 **การหาเส้นกำกับในแนวดิ่ง** ของสมการ (1) โดยหาค่า x ซึ่งทำให้ $D(x)=0$ ดังนั้นถ้า $D(k)=0$ จะได้ว่าเส้นตรง $x=k$ เป็นเส้นกำกับในแนวดิ่ง ถ้าไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $D(x)=0$ ได้ จะกล่าวว่ากราฟนั้น ไม่มีเส้นกำกับในแนวดิ่ง

ตัวอย่างที่ 8 จงหาเส้นกำกับในแนวดิ่งของ $y=\dfrac{2x^2+5}{x^2-9}$

วิธีทำ จะเห็นว่า เมื่อ $x^2-9=0$ จะได้ $x=3$ และ $x=-3$

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวดิ่งของกราฟมี 2 เส้น คือ $x=3$ และ $x=-3$

1.4.2 **การหาเส้นกำกับในแนวระดับ** วิธีที่ง่ายที่สุดของการหาเส้นกำกับในแนวระดับ ซึ่งกราฟคือฟังก์ชันในรูปสมการ (1) โดยการเอาเทอมที่มีกำลังสูงสุดของ x ซึ่งปรากฏในฟังก์ชันนั้นหารทั้ง $N(x)$ และ $D(x)$ ถ้าผลลัพธ์เข้าใกล้เลขจำนวนจริง c เมื่อ x มีค่ามาก ($x\to\infty$) จะได้ว่า $y=c$ คือเส้นกำกับในแนวระดับ แต่ถ้า y ไม่เข้าใกล้เลขจำนวนจริงค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อ $x\to\infty$ จะกล่าวว่าไม่มีเส้นกำกับในแนวระดับ

ดังนั้นจากตัวอย่างที่ 8 จะเห็นว่า $y=\dfrac{2x^2+5}{x^2-9}$

ในที่นี้ x มีกำลังสูงสุดเป็น 2 ดังนั้นเอา x^2 หารทั้งเศษและส่วน

$$y=\frac{2+\dfrac{5}{x^2}}{1-\dfrac{9}{x^2}}$$

เมื่อ $x\to\infty$ จะได้ว่า $\dfrac{5}{x^2}$ และ $\dfrac{9}{x^2}$ เข้าใกล้ศูนย์ และ y เข้าใกล้ 2

ดังนั้น เส้นกำกับในแนวระดับ คือ $y=2$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาเส้นกำกับของ $y=\dfrac{x^3+4}{3x+2}$

วิธีทำ เมื่อ $3x+2=0$ จะได้ $x=-\dfrac{2}{3}$

และเอา x^3 หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$y=\frac{1+\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $x \to \infty, \frac{3}{x^2}$ และ $\frac{1}{x^3}$ เข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นไม่มีเลขจำนวนจริงที่ทำให้ y เป็นจริง ดังนั้น เส้นกำกับในแนวดิ่งคือ $x = -\frac{2}{3}$ และไม่มีเส้นกำกับในแนวระดับ

เมื่อเราได้ทราบหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ของการเขียนกราฟแล้ว เราจะทำการวิเคราะห์ และเขียนกราฟจากกฎเกณฑ์เหล่านี้

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของ $y = \frac{4x}{x^2 - 4}$

<u>วิธีทำ</u> *ส่วนตัดแกน*

แทนค่า $y = 0$ จะได้ $x = 0$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = 0$

ดังนั้น ส่วนตัดแกน x คือ 0 และส่วนตัดแกน y คือ 0

สมมาตร

แทน y ด้วย $-y$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ สมการเปลี่ยน

แทน x ด้วย $-x$ และ y ด้วย $-y$ สมการคงเดิม

ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิดอย่างเดียว

ขอบเขต

ค่า x ที่ทำให้ y เป็นจริงคือ $x^2 - 4 \neq 0$ นั่นคือ $x \neq \pm 2$

ค่า y ทุกค่าทำให้ x มีค่าจริง

ดังนั้น ขอบเขตของ x คือ $\{x \mid x \neq \pm 2\}$ และขอบเขตของ y คือ R

เส้นกำกับ

ให้ $x^2 - 4 = 0$ จะได้ $x = \pm 2$

ดังนั้นเส้นกำกับในแนวดิ่งคือ $x = 2$ และ $x = -2$

จาก $y = \frac{4x}{x^2 - 4}$

เอา x^2 หารทั้งเศษและส่วน

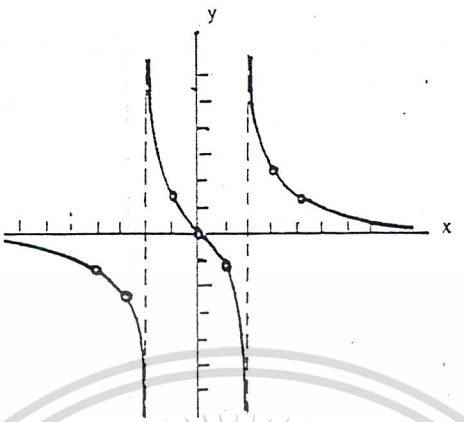
$$y = \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

จะเห็นว่า เมื่อ $x \to \infty$ แล้ว y จะเข้าใกล้ศูนย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นเส้นกำกับในแนวระดับคือ $y = 0$

จากข้อมูลทั้งหมดสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ ก7 แสดงกราฟที่มีเส้นกำกับในแนวดิ่ง $x = \pm 2$ และเส้นกำกับในแนวระดับ $y = 0$

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของ $x^2y - x^2 - 4y + 25 = 0$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการที่กำหนดให้ $y = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 4}$

ส่วนตัดแกน

ดังนั้นส่วนตัดแกน x คือ ± 5 และส่วนตัดแกน y คือ $\dfrac{25}{4}$

สมมาตร

กราฟมีสมมาตรกับแกน y แต่ไม่มีสมมาตรกับแกน x และจุดกำเนิด

ขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $\{x \mid x \neq \pm 2\}$

ขอบเขตของ y คือ $\left\{y \mid y \geq \dfrac{25}{4} \cup y < 1\right\}$

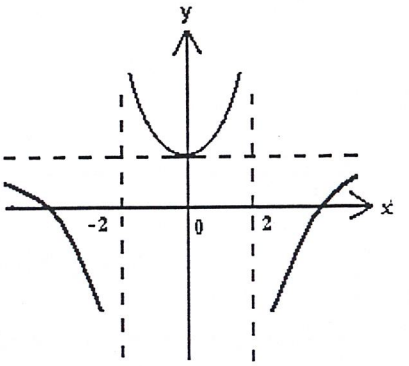
เส้นกำกับ

เส้นกำกับในแนวดิ่ง คือ $x = \pm 2$

เส้นกำกับในแนวระดับ คือ $y = \dfrac{1 - \dfrac{25}{x^2}}{1 - \dfrac{4}{x}}$ และ $y = 1$

จากข้อมูลทั้งหมดสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

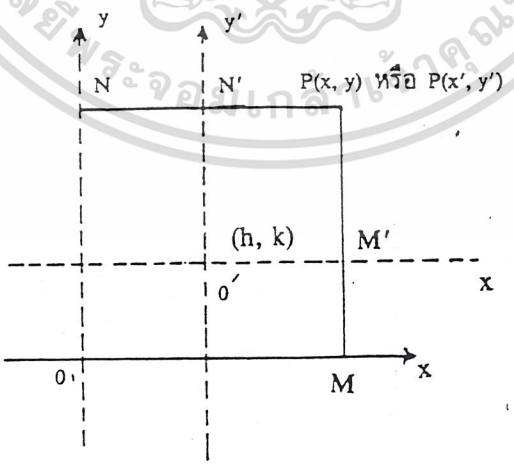


รูปที่ ก8 แสดงกราฟที่มีเส้นกำกับในแนวดิ่ง $x=\pm 2$ และเส้นกำกับในแนวระดับ $y=1$ และ $y=\dfrac{1-\dfrac{25}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}}$

2) <u>การย้ายแกน (Translation of axes)</u>

เราได้ศึกษาภาคตัดกรวยในระบบพิกัดฉากโดยที่จุดศูนย์กลางของรูปอยู่ที่จุดกำเนิดมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะศึกษาถึงการหาสมการภาคตัดกรวยเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ใด ๆ และแกนขนานกับแกนพิกัด

ถ้าต้องการย้ายแกนจากเดิมที่จุดกำเนิด o ไปยังจุดกำเนิดในระบบพิกัดใหม่ o' ซึ่งมีพิกัด (h,k) ในระบบแกนพิกัดเดิม ทำได้โดยที่จุด (h,k) ลากเส้นขนานและให้มีทิศทางเดียวกับแกน x และแกน y ได้แกนพิกัดใหม่คือแกน x' และ y' ดังรูปที่ ก9



รูปที่ ก9 แสดงการย้ายแกนจากจุดกำเนิดไปยังจุดพิกัด (h,k)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาจุด $P(x,y)$ ใด ๆ ในระนาบ xy แต่เมื่อเทียบกับแกนชุดใหม่ x', y' พิกัดของจุด P คือ (x', y') จากจุด P ลากเส้นขนานกับแกน x และแกน y ตัดแกน x และแกน y ที่ M และ N ตามลำดับ และตัดแกน x' และ y' ที่ M' และ N' ตามลำดับ

ดังนั้น $PN = PN' + NN'$

และ $PM = PM' + MM'$

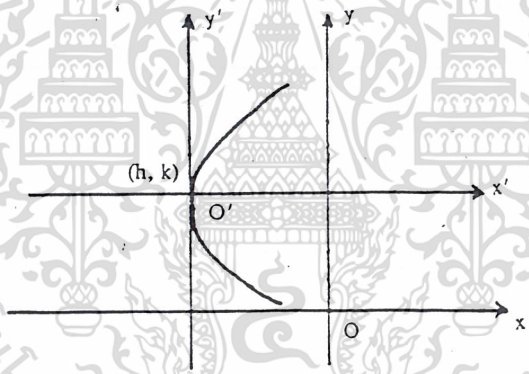
นั่นคือ $x = x' + h$ และ $y = y' + k$

หรือ $x' = x - h$ และ $y' = y - k$ (2)

ดังนั้นถ้าเราต้องการย้ายแกนจากแกน x และแกน y เดิม ไปสู่แกน x' และแกน y' ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของแกนเดิม และแกนใหม่จะเป็นไปดังสมการย้ายแกน (2)

วิธีการหาสมการพาราโบลา เมื่อจุดยอดอยู่ที่ (h,k) และแกนขนานกับแกนพิกัด

ให้ o' เป็นจุดกำเนิดของแกนพิกัดใหม่ ซึ่งขนานกับแกน x และแกน y



รูปที่ ก10 แสดงกราฟพาราโบลาที่จุดยอด (h,k)

1. เมื่อแกนของพาราโบลาขนานแกน x

เมื่อเทียบกับแกนใหม่ สมการพาราโบลาคือ

$$y'^2 = 4ax'$$

แต่ $x' = x - h$

$$y' = y - k$$

ดังนั้นสมการพาราโบลาเทียบกับแกนเดิม คือ

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

2. เมื่อแกนของพาราโบลาขนานแกน y

ในทำนองเดียวกัน สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ (h,k) คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

โดยวิธีเดียวกัน จะเห็นว่าสมการมาตรฐานของวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) จะอยู่ในรูปของ

1. ถ้าแกนเอกขนานกับแกน x จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \ , \ a>b$$

2. ถ้าแกนเอกขนานกับแกน y จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \ , \ a>b$$

และสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) คือ

1. ถ้าแกนตามขวางขนานกับแกน x จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

2. ถ้าแกนตามขวางขนานกับแกน y จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}-\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ (3,1) และสมการเส้นบังคับ คือ $y=-2$

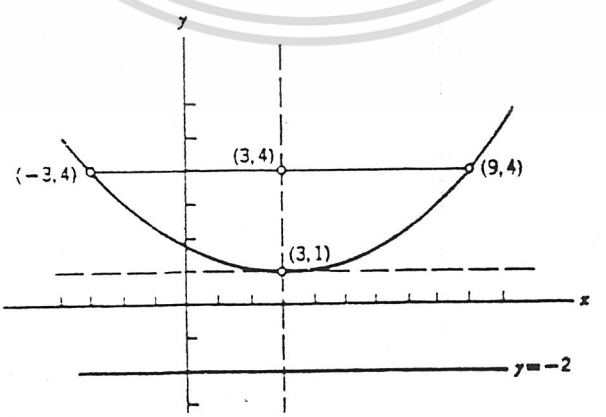
วิธีทำ จากสมการเส้นบังคับ ทำให้ทราบว่ารูปของสมการพาราโบลา คือ

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

ในที่นี้ $h=3$, $k=1$

ระยะจากจุดยอดถึงเส้นเส้นบังคับ $=3$ ดังนั้น $a=3$ สมการพาราโบลา คือ

$$(x-3)^2 = 12(y-1)$$



รูปที่ ก11 แสดงกราฟพาราโบลาที่จุดยอด (3,1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 13 จงหาสมการวงรี ซึ่งมีแกนโทยาว 4 หน่วย และจุดยอดที่ (-3,-3) และ (7,-3)

วิธีทำ แกนโทยาว $2b = 4$ ดังนั้น $b = 2$

จุดศูนย์กลางของวงรีคือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดยอดทั้งสอง

ดังนั้น จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3+\frac{7}{2},-3-\frac{3}{2}) = (2,-3)$

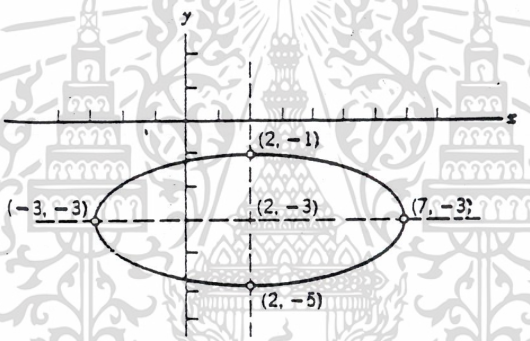
a = ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด ดังนั้น $a = 5$

สมการวงรี ซึ่งมีแกนเอกขนานกับแกน x คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y+3)^2}{2^2}=1$$

หรือ $4x^2+25y^2-16x+150y+141=0$



รูปที่ ก12 แสดงกราฟวงรีที่จุดยอด $(-3,-3)$ และ $(7,-3)$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ (-9, 2) และ (-1, 2) จุดโฟกัสที่ (-10, 2) และ(0, 2)

วิธีทำ เนื่องจากแกนตามขวางขนานกับแกน x ดังนั้นสมการ คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-5, 2)

a = ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอดเท่ากับ 4

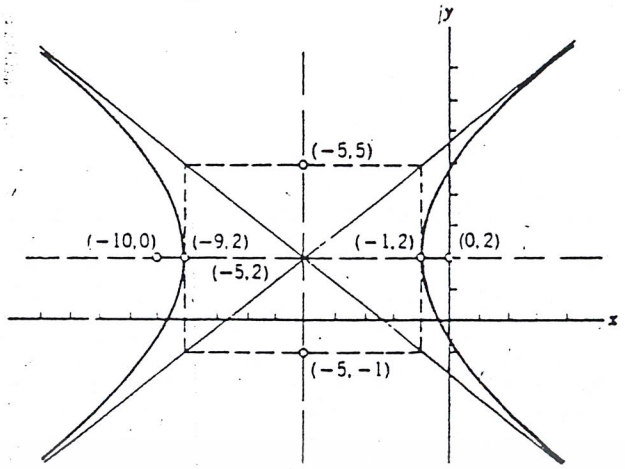
c = ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัสเท่ากับ 5

$b^2 = c^2 - a^2 = 25-16 = 9$

ดังนั้นสมการ คือ $\frac{(x+5)^2}{4^2}-\frac{(y-2)^2}{3^2}=1$

หรือ $9x^2-16y^2+90x+64y+17=0$

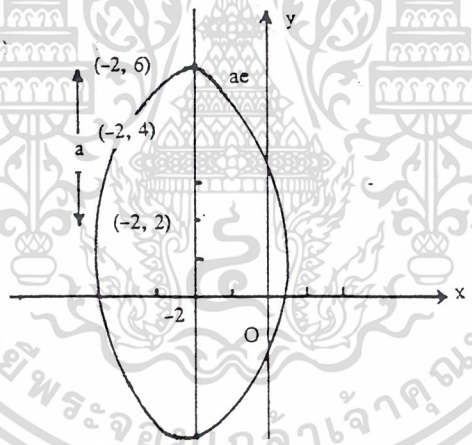
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ก13 แสดงกราฟไฮเพอร์โบลาที่จุดยอด (–9,2) และ (–1,2)

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> จงหาสมการวงรี ซึ่งมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, 6) และจุดโฟกัสซึ่งอยู่ใกล้กับจุดยอดคือ (-2, 4) ถ้าค่า e คือ $\frac{1}{2}$ และหาสมการเส้นบังคับ

<u>วิธีทำ</u> จากจุดยอดและจุดโฟกัสทำให้ทราบว่าแกนเอกของวงรีขนานกับแกน y



รูปที่ ก14 แสดงกราฟวงรีที่จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2,6) และจุดโฟกัสที่ (2,4)

ดังนั้นสมการ คือ

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

จะได้ว่า $a-c=2$

จาก $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $a=4, c=2$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(h,k)=(-2,2)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และจาก $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$ ดังนั้นสมการวงรีที่ต้องการคือ

$$\frac{(x+2)^2}{12} - \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$$

สมการเส้นบังคับ คือ $y = \pm\frac{a}{e} = \pm 8$.

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> จงหาสมการไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (2, -2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, -5) และมีค่า $e = \frac{5}{3}$ และหาสมการเส้นกำกับ

<u>วิธีทำ</u> จากจุดยอด และจุดศูนย์กลาง ทำให้ทราบว่า สมการคือ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$(h,k) = (2,-5)$ ดังนั้น $a = 3$

จาก $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

$c = 5$ ดังนั้น $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$

จะได้สมการคือ

$$\frac{(y+5)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{4^2} = 1$$

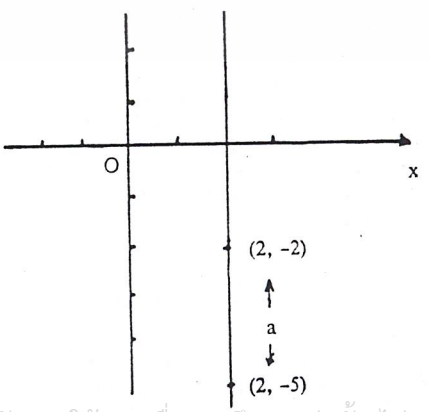
สมการเส้นกำกับ หาได้จาก

$$\frac{(y+5)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{4^2} = 0$$

$$(y+5)^2 = \frac{9}{16}(x-2)^2$$

$$y+5 = \pm\frac{3}{4}(x-2)$$

สมการเส้นกำกับ คือ $4y - 3x + 26 = 0$ และ $3x + 4y + 14 = 0$



รูปที่ ก15 แสดงกราฟที่มีจุดยอด (2,–2) และจุดศูนย์กลาง (2,–5)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) สมการทั่วไปกำลังสอง (The general second degree equation)

สมการทั่วไปกำลังสองจะอยู่ในรูปของ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

เมื่อ A,B,C,D,E และ F คือค่าคงที่

สมการภาคตัดกรวย ซึ่งแกนของรูปขนานกับแกนพิกัด เมื่อกระจายจะได้สมการอยู่ในรูปของ

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4)$$

ซึ่งไม่มีเทอม xy $(B = 0)$ แต่ในทางกลับกัน ถ้ามีสมการใดอยู่ในรูป (4) อาจจะไม่ใช่สมการภาคตัดกรวยก็ได้ ดังนั้นจึงต้องอาศัยวิธีกำลังสองสมบูรณ์ ทำสมการที่กำหนดให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เราจะทราบชนิดของสมการภาคตัดกรวยได้จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 สมการดีกรีสองของ x และ y ในรูปของ $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

1. ถ้า $AC = 0$ แล้วกราฟเป็นพาราโบลา หรือเส้นตรงสองเส้นขนานกัน หรือเป็นเส้นตรง 1 เส้น หรือไม่มีกราฟ

2. ถ้า $AC > 0$ แล้วกราฟเป็นวงรี (ถ้า $A \neq C$) หรือเป็นวงกลม (ถ้า $A = C$) เป็นจุด ๆ หนึ่ง หรือไม่มีกราฟ

3. ถ้า $AC < 0$ แล้วกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

พิสูจน์ จัดสมการ $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ให้อยู่ในรูปของ $A(x-h)^2 + C(y-k)^2 = K$

หรือ
$$\frac{(x-h)^2}{\frac{1}{A}} + \frac{(y-k)^2}{\frac{1}{C}} = k \qquad (5)$$

1. ถ้า $AC = 0$

1.1 ถ้า $A = 0$ และ $C \neq 0$ (4) คือ

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้า $D \neq 0$ สมการจะอยู่ในรูปของ

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

ซึ่งเป็นสมการของพาราโบลา แต่ถ้า $D = 0$ จะได้สมการ

$$Cy^2 + Ey + F = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเป็นสมการของกราฟเส้นตรง 2 เส้นขนานกัน (ถ้า $y = \pm k$ ค่าคงที่) หรือเป็นเส้นตรง 1 เส้น (ถ้า y มีรากซ้ำ) หรือไม่มีกราฟ (ถ้า y หาค่าจริงไม่ได้)

1.2 ถ้า $A \neq 0$ และ $C = 0$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 1.1

2. ถ้า $AC > 0$ (A และ C มีเครื่องหมายเหมือนกัน)

2.1 ถ้า $A=C$ กราฟของ (5) เป็นวงกลม วงกลมจุด หรือไม่มีกราฟ

2.2 ถ้า $A \neq C$ และมีเครื่องหมายเหมือนกัน และเหมือนกับเครื่องหมายของ K ในสมการ (5) อยู่ในรูปของ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

2.3 ถ้า A และ C มีเครื่องหมายเหมือนกัน แต่ต่างจากเครื่องหมายของ K จะเห็นว่าไม่สามารถหาค่าจริงของ x และ y ที่คล้องตามสมการ (5) ได้ ดังนั้นจึงไม่มีกราฟ

2.4 ถ้า $K = 0$ จะได้ว่า $x=h$ และ $y=k$ เท่านั้น ซึ่งจะได้กราฟเป็นจุด เรียกว่า Point Ellipse

3. ถ้า $AC < 0$ (A และ C มีเครื่องหมายต่างกัน)

3.1 ถ้า $K \neq 0$ (5) จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

หรือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ซึ่งเป็นกราฟของไฮเพอร์โบลา

3.2 ถ้า $K=0$ (5) จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

หรือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$ ซึ่งเป็นสมการของเส้นตรงสองเส้น

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> จงเขียนกราฟของสมการ $2y^2 - 2y + x - 1 = 0$ หาจุดยอด โฟกัส และเลตัสเรกตัม

<u>วิธีทำ</u>

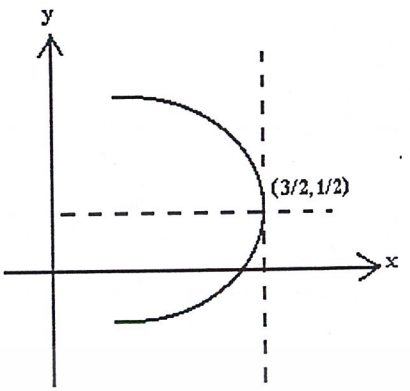
$$2y^2 - 2y = -x + 1$$

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

สมการนี้คือ พาราโบลาจุดยอดอยู่ที่จุด $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ และรูปเปิดด้านซ้าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ก16 แสดงกราฟพาราโบลาที่จุดยอด $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$4a = -\frac{1}{2}$$

$a = \frac{1}{8}$, a = ระยะจากจุดยอดถึงจุดโฟกัส

ดังนั้น จุดโฟกัส คือ $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{11}{8},\frac{1}{2}\right)$

ความยาวเลตัสเรกตัม = $\frac{1}{2}$

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> โดยการย้ายแกน จงบอกชื่อของภาคตัดกรวย ซึ่งมีสมการ $x^2-4y^2+6x+24y-43=0$ แล้วหาโฟกัส จุดยอด

<u>วิธีทำ</u> จากสมการทั่วไป (4) ในที่นี้ $A=1$, $C=-4$ ดังนั้น $AC<0$ กราฟควรจะเป็นไฮเพอร์โบลา หรือสมการเส้นตรง 2 เส้น โดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์

$$(x^2+6x)-4(y^2-6y)=43$$

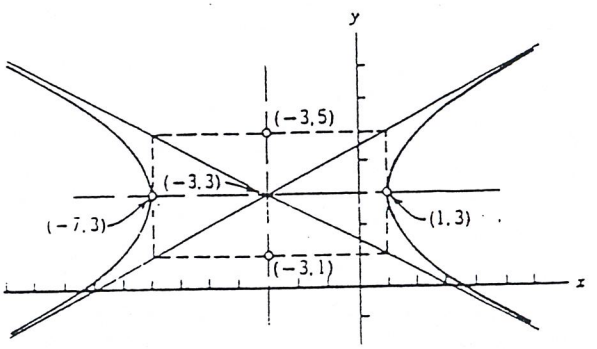
$$(x^2+6x+9)-4(y^2-6y+9)=43+9-36$$

$$(x+3)^2-4(y-3)^2=16$$

$$\frac{(x+3)^2}{4^2}-\frac{(y-3)^2}{2^2}=1$$

สมการนี้คือไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-3,3) แกนตามขวางขนานกับแกน x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ก17 แสดงกราฟไฮเพอร์โบลาที่จุดศูนย์กลาง $(-3,3)$

จะได้ $a=4,\ b=2$ จุดยอดอยู่ที่ (1,3) และ (-7,3)

จุดปลายของแกนสังยุค คือ (-3 ,5) และ (-3,1)

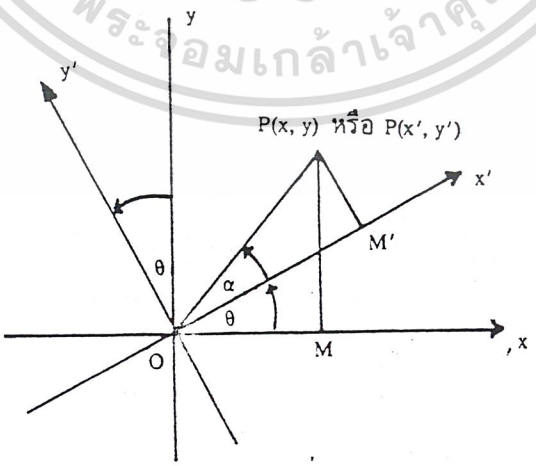
$c=$ โฟกัส คือ $2\sqrt{5}$

โฟกัส คือ $(-3+2\sqrt{5},5),(-3-2\sqrt{5},3)$

4) <u>การหมุนแกน (Rotation of axes)</u>

การที่แกน x และแกน y ในระนาบ หมุนรอบจุดกำเนิดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ ไปยังแกน x' และ y' เรากล่าวว่ามีการหมุนแกนดังรูปที่ ก18

ถ้า (x,y) เป็นพิกัดของจุด P ในระบบ xy และ $x'y'$ เป็นพิกัดของจุด P ในระบบ $x'y'$ ถ้าหมุนแกน x และแกน y ในระนาบเป็นมุม θ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



รูปที่ ก18 แสดงการหมุนแกน X และแกน Y ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $x = OM = OP\cos(\theta + \alpha)$

$$y = MP = OP\sin(\theta + \alpha) \quad (6)$$

และ $x' = OM' = OP\cos\alpha$

$$y' = M'P = OP\sin\alpha \quad (7)$$

แทนค่า $\cos(\theta + \alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

และ $\sin(\theta + \alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha$

จะได้ $x = OP\cos\alpha\cos\theta - OP\sin\alpha\sin\theta$

$$y = OP\cos\alpha\sin\theta + OP\sin\alpha\cos\theta$$

นั่นคือสมการการหมุนแกน คือ

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \quad (8)$$

หรือ $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

<u>ตัวอย่างที่ 19</u> กำหนดให้เส้นโค้งมีสมการเป็น $x^2 + xy + y^2 = 3$ จงหาสมการของเส้นโค้งในระนาบ $x'y'$ เมื่อแกนหมุนไปจากเดิม $\frac{\pi}{4}$

<u>วิธีทำ</u> $\theta = \frac{\pi}{4}$ แทนค่าในสมการ (8) จะได้

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

แทนค่า x, y ในสมการที่กำหนดให้

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 3$$

หรือ $3x'^2 + y'^2 = 6$

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรี มีโฟกัสอยู่บนแกน y'

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ถ้าเราหมุนแกนไปเป็นมุม θ ที่เหมาะสม จะทำให้สมการในระบบ $x'y'$ ไม่มีเทอม $x'y'$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับสมการทั่วไปกำลังสอง

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เราจะแสดงให้เห็นว่าควรจะเลือก θ อย่างไร เพื่อทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ ในระบบ $x'y'$ และสมการทั่วไปกำลังสองอยู่ในรูปของ

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

เมื่อ A', C' ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

<u>วิธีหา</u> θ หมุนแกน x และแกน y เป็นมุม θ

แทนค่า $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

ในสมการ (4) จะได้สมการ

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

เมื่อ $A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$

$$B' = 2(C - A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$C' = A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$

$$D' = D\cos\theta + E\sin\theta$$

$$E' = -D\sin\theta + E\cos\theta$$

$$F' = F$$

เราต้องการหา θ เพื่อให้ $x'y'$ หมดไป ดังนั้นให้ $B' = 0$

นั่นคือ $2(C - A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$

$$(C - A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta = 0$$

เมื่อ $B \neq 0$ จะได้ $\cot 2\theta = \dfrac{A - C}{B}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> สมการทั่วไปกำลังสอง

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $B \neq 0$, A และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเปลี่ยนเป็นสมการ

$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ เมื่อ A', C' ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน โดยหมุนแกนพิกัดเป็นมุม θ เมื่อ $\cot 2\theta = \dfrac{A - C}{B}$

นอกจากนี้ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ในสมการหมุนแกน หาได้จาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{และ} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

หมายเหตุ : ค่า $\cos 2\theta$ หาได้จาก $\cot 2\theta$ โดยการเขียนรูป

<u>ตัวอย่างที่ 20</u> จงหาค่า θ และสมการใหม่ที่ไม่มีเทอม $x'y'$ ของสมการ

$$2x^2 + 8xy - 4y^2 - 7 = 0$$

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $A = 2$, $B = 8$, $C = -4$

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{2-(-4)}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

จากรูป $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$

จาก $\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$ แทนค่า จะได้ $\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$ แทนค่า จะได้ $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

แทนค่า x, y ในสมการที่กำหนดให้

$$2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) = 7$$

$$4x'^2 - 6y'^2 = 7$$

$$\cot 2\theta = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$2\theta = 53^\circ$$

$$\theta = \frac{53^\circ}{2} = 26.5^\circ$$

5) <u>Invariants and The Discriminant</u>

จากสมการกำลังสอง

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (9)$$

เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม θ จะได้สมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad (10)$$

เมื่อ $$A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta \quad (11)$$

$$B' = 2(C - A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (12)$$

$$C' = A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \quad (13)$$

(11) + (13); $$A' + C' = A + C \quad (14)$$

(11) - (13); $$A' - C' = A(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - C(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + B\sin 2\theta$$

หรือ $$A' - C' = (A - C)\cos 2\theta + B\sin 2\theta \quad (15)$$

จาก (12) $$B' = -(A - C)\sin 2\theta + B\cos 2\theta \quad (16)$$

$(15)^2 + (16)^2$; $$(A' - C')^2 + B'^2 = (A - C)^2 + B^2$$

$$\left[(A' + C')^2 - 4A'C'\right] + B'^2 = (A - C)^2 + B^2$$

แต่ $$A' + C' = A + C$$

ดังนั้น $$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

พจน์ $A + C$ และ $B^2 - 4AC$ เรียกว่ามีคุณสมบัติ Invariant ภายใต้การหมุนแกน ซึ่งเป็นพจน์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงถึงแม้จะเกิดการหมุนแกน

นอกจากนี้ จะเรียกพจน์ $B^2 - 4AC$ ว่า Discriminant ของสมการ (9)

$$\text{Discriminant} = B^2 - 4AC$$

จาก (9) เราทราบแล้วว่า ถ้า $B = 0$ จะบอกชนิดของภาคตัดกรวยได้ โดยพิจารณาจากค่า AC ในทำนองเดียวกัน จาก (10) ถ้าเราหมุนแกนไปเป็นมุม θ ตามทฤษฎีบทที่ 1 จะทำให้ $B' = 0$ ได้

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 1 ถ้ากราฟของ (10) เป็นภาคตัดกรวย

ภาคตัดกรวยนั้น เป็นพาราโบลา เมื่อ $A'C' = 0$

เป็นวงรี เมื่อ $A'C' > 0$

และเป็นไฮเพอร์โบลา เมื่อ $A'C' < 0$

เนื่องจาก $$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

เมื่อ $B' = 0$ ดังนั้น $B^2 - 4AC = -4A'C'$

เนื่องจากกราฟของ (9) และ (10) เหมือนกัน และ $B^2 - 4AC = -4A'C'$

ดังนั้น จึงสามารถบอกชนิดของสมการกำลังสองทั่วไปจากเทอม $B^2 - 4AC$ ได้ดังนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 3</u> สมการทั่วไป $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. ถ้า $B^2-4AC=0$ แล้วกราฟเป็นพาราโบลา เส้นตรงสองเส้นขนานกัน หรือเส้นตรงหนึ่งเส้น หรือไม่มีกราฟ

2. ถ้า $B^2-4AC<0$ แล้วกราฟเป็นวงรี วงกลม จุด หรือไม่มีกราฟ

3. ถ้า $B^2-4AC>0$ แล้วกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

<u>ตัวอย่างที่ 21</u> จงทำสมการให้อยู่ในรูปง่ายขึ้นโดยการหมุนแกน และเขียนกราฟ สมการคือ

$$6x^2-12xy+y^2=30$$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการทั่วไป $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

ในที่นี้ $A=6$, $B=-12$, $C=1$, $F=30$

$$B^2-4AC=144-24>0$$

สมการควรจะเป็นไฮเพอร์โบลา

ถ้าหมุนแกนไปเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{6-1}{-12}=\frac{-5}{12} \quad \text{ซึ่ง } 0<2\theta<\pi$$

และจาก $\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$ และ $\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$

จะได้ $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$

จาก $$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}x'-\frac{3}{\sqrt{13}}y'$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}x'+\frac{2}{\sqrt{13}}y'$$

แทนค่า x,y ในสมการที่กำหนดให้

$$\frac{6}{13}(2x'-3y')^2-\frac{12}{13}(2x'-3y')(3x'+2y')+\frac{1}{13}(3x'+2y')^2=30$$

$$-39x'^2+130y'^2=390$$

$$\frac{y'^2}{3}-\frac{x'^2}{10}=1$$

ดังนั้นกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ครึ่งแกนตามขวาง $=\sqrt{3}$

ครึ่งแกนสังยุค $=\sqrt{10}$

เมื่อเทียบกับแกนใหม่ พิกัดของจุดยอดคือ $(0,\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3})$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+10}=\sqrt{13}$$

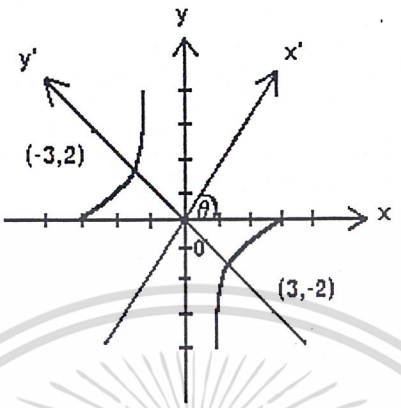
โฟกัสคือ $(0,\sqrt{13}),(0,-\sqrt{13})$

โดยใช้สูตร $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

จุดยอดเทียบกับแกนเดิมคือ



รูปที่ ก19 แสดงกราฟไฮเพอร์โบลาที่ถูกหมุนแกน

แทนค่า $x' = 0, y' = \sqrt{3}$ จะได้จุดยอดที่ $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)$ และ

แทนค่า $x' = 0, y' = \sqrt{3}$ จะได้จุดยอดที่ $\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)$

จุดโฟกัสเทียบกับแกนเดิมคือ $(-3,2)$ และ $(3,-2)$

<u>ตัวอย่างที่ 22</u> จงพิจารณาว่าสมการ $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y - 6 = 0$ มีกราฟเป็นรูปอะไร

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $A = 1$, $B = -4$, $C = 4$

$$B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$$

กราฟอาจจะเป็นพาราโบลา หรือเส้นตรง

วิธีที่ 1 $(x^2 - 4xy + 4y^2) - 5(x - 2y) - 6 = 0$

$$(x - 2y)^2 - 5(x - 2y) - 6 = 0$$

$$\{(x - 2y) - 6\}\{(x - 2y) + 1\} = 0$$

กราฟจะเป็นเส้นตรงสองเส้นขนานกัน มีสมการเป็น

$$x - 2y - 6 = 0$$

และ $x - 2y + 1 = 0$

วิธีที่ 2 โดยการหมุนแกนไปเป็นมุม θ

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 4}{-4} = \frac{3}{4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้น $x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

แทนค่า x, y ในสมการ จะได้

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) +$$

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 10\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 6 = 0$$

$$5y'^2 + 5\sqrt{5}y' - 6 = 0$$

$$(\sqrt{5}y' + 6)(\sqrt{5}y' - 1) = 0$$

กราฟคือเส้นตรงสองเส้น $y' = \frac{-6}{\sqrt{5}}$ และ $y' = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

ดังนั้น $\frac{-6}{\sqrt{5}} = \frac{-x}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}y$ หรือ $x - 2y - 6 = 0$

และ $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-x}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}y$ หรือ $x - 2y + 1 = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข.
หลักการพิจารณาการเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

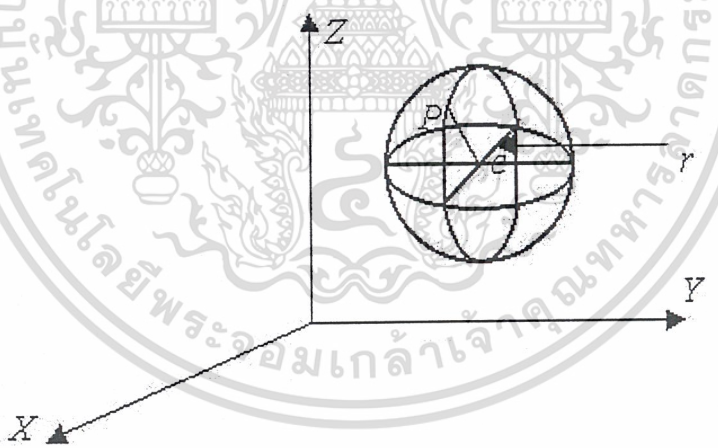
1) ทรงกลม ทรงกระบอก และทรงกรวย

ลำดับแรกเราจะศึกษาการหาสมการของพื้นผิวบางอย่างที่เราคุ้นเคยอยู่แล้ว พื้นผิวที่จะนำมาศึกษาในหัวข้อนี้ได้แก่ ทรงกลม ทรงกระบอก และทรงกรวย

บทนิยามที่ 1 ทรงกลมคือเซตของจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่เป็นระยะคงที่ที่กำหนดให้จะเรียกจุดคงที่ว่า "จุดศูนย์กลาง" เรียกระยะคงที่ว่า "รัศมี" ของวงกลม

1.1 การหาสมการของวงกลม

ให้ $C(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และ r เป็นรัศมีของวงกลม



รูปที่ ข1 แสดงภาพทรงกลม

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ

จุด P จะอยู่บนวงกลมต่อเมื่อ

$$\|CP\| = r$$

แต่ $$\|CP\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$$

เอกสารนี้จัดทำขึ้นที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2 \qquad (1)$$

จะเห็นได้ว่าจุดทุกจุดบนทรงกลมต้องสอดคล้องสมการ (1) และกลับกัน ทุก ๆ จุด (x,y,z) ที่สอดคล้องสมการ (1) ย่อมเป็นจุดบนทรงกลม (เพราะอยู่ห่างจาก C ด้วยระยะทาง r) ดังนั้นสมการ (1) จึงเป็นสมการของทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (x_0,y_0,z_0) และมีรัศมีเท่ากับ r

ถ้าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมีเท่ากับ r จะได้สมการเป็น

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (2)$$

โดยการกระจายพจน์กำลังสองในสมการ (1) จะได้สมการของทรงกลมเขียนอยู่ในรูป

$$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Kz+L=0 \qquad (3)$$

จะเห็นได้ว่าสมการของวงกลมย่อมเขียนได้ในรูป (3) เสมอไป อย่างไรก็ตามสมการในรูป (3) ไม่จำเป็นต้องเป็นสมการของทรงกลม เช่นสมการ

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+4=0$$

เป็นสมการในรูปของสมการ (3) แต่ไม่มีทรงกลมใด ๆ ที่มีสมการแบบนี้ ทั้งนี้เพราะเราอาจเขียนสมการนี้เสียใหม่ในรูป

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+1=0$$

หรือ $$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=-1$$

ซึ่งเห็นได้ว่าไม่มีจุด (x,y,z) ใด ๆ ที่สอดคล้องสมการนี้ (เพราะค่าทางซ้ายมือของสมการต้องเป็นบวกเสมอ)

การพิจารณาว่าสมการ (3) เป็นสมการของทรงกลมหรือไม่อาจทำได้โดยการเขียนพจน์ x,y,z ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ซึ่งจะแสดงในตัวอย่างที่ 2

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาสมการของทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1,6,2) และมีรัศมีเท่ากับ 6

<u>วิธีทำ</u> ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกลม จะได้สมการของทรงกลมเป็น

$$(x-1)^2+(y-6)^2+(z-2)^2=36$$

หรือ $$x^2+y^2+z^2-2x-12y-4z+5=0$$ #

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงพิจารณาว่าสมการ $3x^2+3y^2+3z^2+x+y+z=6$ เป็นสมการของทรงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นสมการของทรงกลม จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

<u>วิธีทำ</u> ลำดับแรกเราเขียนสมการที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูปสมการ (3) เสียก่อน ซึ่งจะได้เป็น

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการเขียนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{1}{6}\right)^2+\left(z+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{25}{12}$$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการของทรงกลมและจุดศูนย์กลางของทรงกลมคือ

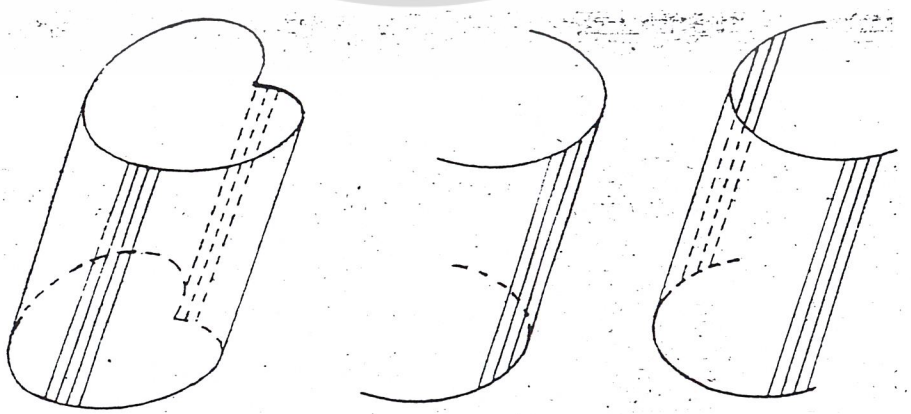
$$\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right)$$

รัศมีของทรงกลมคือ $\frac{5}{6}\sqrt{3}$ #

ทรงกระบอกที่เราเคยพบเห็นมักจะเป็นทรงกระบอกที่มีภาคตัดขวางเป็นวงกลมดังรูป

รูปที่ ข2 แสดงทรงกระบอกที่มีภาคตัดขวางเป็นวงกลม

แต่ทรงกระบอกที่จะกล่าวถึงในที่นี้มีความหมายกว้างกว่านี้มากมายคือ จะกล่าวถึงทรงกระบอกที่ภาคตัดขวางอาจเป็นส่วนโค้งใด ๆ ก็ได้ดังรูป



รูปที่ ข3 แสดงทรงกระบอกที่ภาคตัดขวางอาจเป็นส่วนโค้งใด ๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

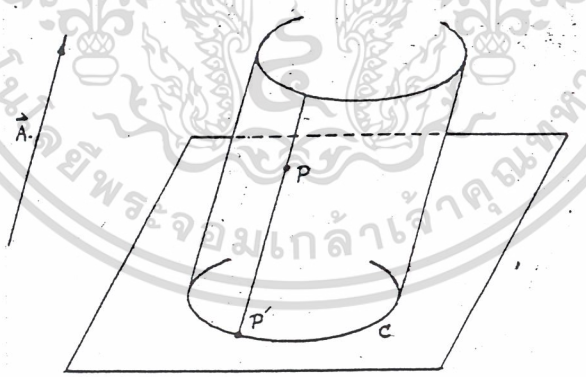
อย่างไรก็ตามเราอาจอธิบายความหมายของทรงกระบอกได้ด้วยของสองสิ่ง คือส่วนโค้งที่เป็นรอยตัด และแนวเส้นตรงบนผิวของทรงกระบอก เราเรียกเส้นโค้งว่า "เส้นบังคับ" ของทรงกระบอก เรียกเส้นตรงว่า "เส้นก่อกำเนิด" ของทรงกระบอก เราอาจให้บทนิยามของทรงกระบอกไว้ดังนี้

บทนิยามที่ 2 ให้ C เป็นเส้นโค้งในระนาบเส้นหนึ่ง และ L เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกับ C และไม่ขนานกับระนาบของ C เราจะเรียกเซตของจุดทั้งหลายบนเส้นตรงที่ขนานกับ L และตัดเส้นโค้ง C ว่า "ทรงกระบอก" เรียกเส้นตรงที่ขนานกับ L และตัด C ว่า "เส้นก่อกำเนิด" ของทรงกระบอก และเรียกเส้นโค้ง C ว่า "เส้นบังคับ" ของทรงกระบอก

หมายเหตุ : เนื่องจากเส้นบังคับ C เป็นตัวบอกลักษณะของทรงกระบอกว่ามีรูปร่างอย่างไร ดังนั้นเราจึงอาจใช้ C เป็นตัวจำแนกประเภทของทรงกระบอก เช่น ถ้า C เป็นวงกลม เราจะเรียกทรงกระบอกว่าเป็นทรงกระบอกกลม เป็นต้น

1.2 การหาสมการของทรงกระบอก

ต่อไปนี้เราจะศึกษาถึงวิธีหาสมการของทรงกระบอกที่เราทราบเส้นบังคับและเส้นก่อกำเนิด



รูปที่ ข4 แสดงทรงกระบอกซึ่งมีเส้นโค้ง C เป็นเส้นบังคับ และมีเส้นก่อกำเนิดขนานกับเวกเตอร์ A

ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกระบอก ในที่นี้เราต้องการหาสมการที่เป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับค่า x,y,z เพราะสมการที่ได้นี้ก็คือสมการของทรงกระบอกนั่นเอง

สมมติว่าเส้นก่อกำเนิดผ่าน P ตัดกับ C ที่ P' ดังแสดงในรูปที่ ข4 จากรูปนี้เราจะได้เงื่อนไขสองประการคือ

(ก) PP' ขนานกับ A

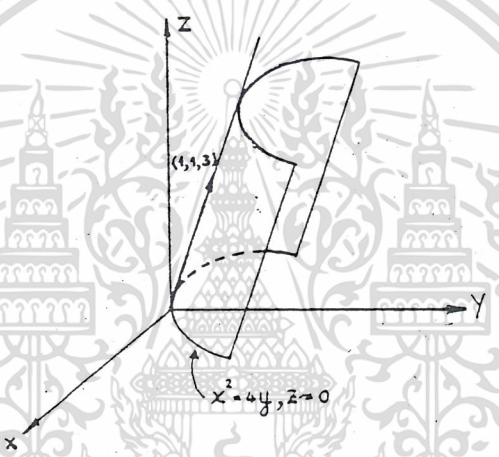
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ (ข) P' สอดคล้องสมการของ C

โดยอาศัยเงื่อนไข (ก) และ (ข) ประกอบกันเราจะสามารถหาเงื่อนไขจำเป็นสำหรับ x, y, z ซึ่งเป็นส่วนประกอบของพิกัดของ P ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงวิธีการหาสมการของทรงกระบอกโดยอาศัยหลักการดังกล่าว

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาสมการของทรงกระบอกมีเส้นบังคับเป็นพาราโบลา $x^2 = 4y$, $z = 0$ และเส้นก่อกำเนิดขนานกับเวกเตอร์ (1,1,3)

<u>วิธีทำ</u> ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกระบอก ซึ่งมีเส้นโค้งพาราโบลา $x^2 = 4y$, $z = 0$ เป็นเส้นบังคับ และเส้นก่อกำเนิดขนานกับเวกเตอร์ (1,1,3)



รูปที่ ข5 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 3

จากรูปที่ ข5 เส้นก่อกำเนิดที่ผ่าน P ฉะนั้น P' จึงอยู่บนระนาบ $z = 0$ ดังนั้น P' ย่อมมีพิกัดเป็น $(x', y', 0)$

เนื่องจาก $P'P \parallel (1,1,3)$ (จากเงื่อนไขข้อ ก.)

ดังนั้น $P'P = t\,(1,1,3)$ เมื่อ t เป็นสเกลาร์ใด ๆ

แต่ $P'P = (x - x', y - y', z)$

จะได้ $x - x' = t$, $y - y' = t$, $z = 3t$

โดยการกำจัด t จากสมการจะได้

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z}{3} \qquad \text{(A)}$$

และเนื่องจาก P' อยู่บนพาราโบลา $x^2 = 4y$, $z = 0$ จะได้

$$x'^2 = 4y' \qquad \text{(B)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก (A) จะได้ $x' = \dfrac{3x - z}{3}$

$$y' = \frac{3y - z}{3}$$

แทน x', y' ใน (B) จะได้สมการของทรงกระบอกเป็น

$$\frac{(3x - z)^2}{9} = \frac{4(3y - z)}{3}$$

$$\frac{1}{9}\left(9x^2 - 6xy + z^2\right) = 4y - \frac{4}{3}z$$

$$9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0 \qquad \#$$

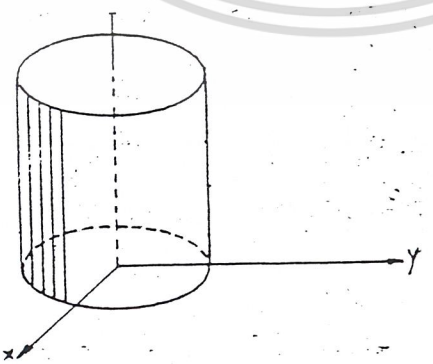
เราอาจสรุปได้ว่า หากสมการของพื้นผิวใน R^3 มีตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งไม่ปรากฏในสมการแล้วสมการนั้นจะเป็นสมการของพื้นผิวทรงกระบอกซึ่งขนานกับแกนพิกัดที่ตัวแปรไม่ปรากฏนั้น

ตัวอย่างของสมการพื้นผิวทรงกระบอกที่มีเพียงสองตัวแปร x, y

1. $x^2 + y^2 = a^2$ สมการของทรงกระบอกกลมขนานกับแกน Z
2. $x^2 = 4ay$ สมการของทรงกระบอกพาราโบลิกขนานกับแกน Z
3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ สมการของทรงกระบอกไฮเพอร์โบลิกขนานกับแกน Z

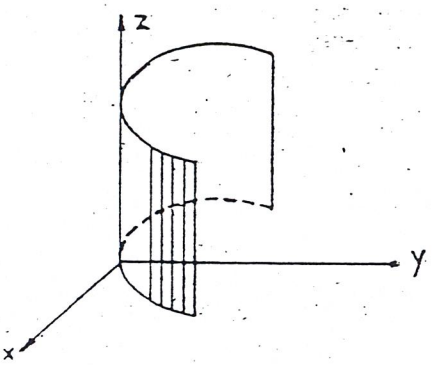
การเขียนรูปพื้นผิวทรงกระบอก $f(x, y) = 0$ ก็ทำได้ง่าย โดยการเขียนเส้นรอยตัดบนระนาบ XY ตามสมการ $f(x, y) = 0$, $z = 0$ ที่กำหนดให้ก่อน เส้นตรงทุกเส้นที่ขนานกับแกน Z และผ่านเส้นโค้งนั้นจะอยู่บนพื้นผิวที่ต้องการ ใช้หลักเดียวกันนี้สำหรับการเขียนรูปทรงกระบอก $g(x, z = 0)$ และ $h(x, z = 0)$

ตัวอย่างรูปพื้นผิวทรงกระบอก

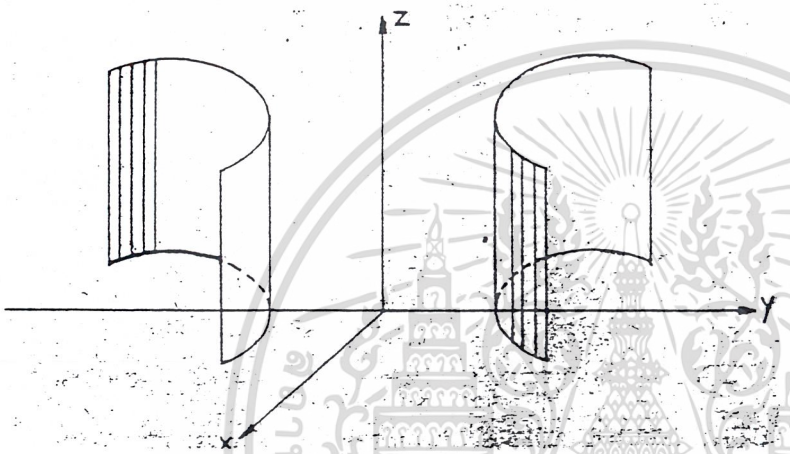


ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = a^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



. ทรงกระบอก $x^2 = 4ay, a > 0$



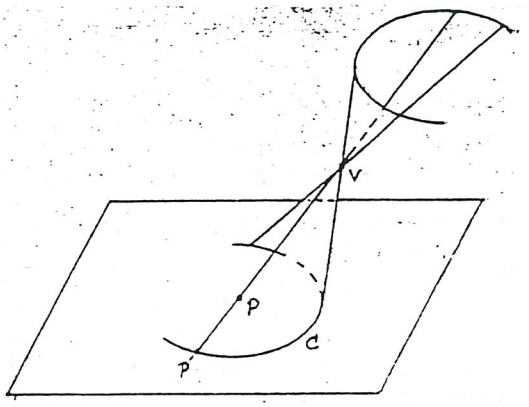
ทรงกระบอก $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

รูปที่ ข6 แสดงตัวอย่างรูปพื้นผิวทรงกระบอก

<u>*บทนิยามที่ 3*</u> ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่งในระนาบ และ V เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง จะเรียกเซตของจุดทั้งหลายบนเส้นตรงบนเส้นตรงทุกเส้นที่ลากผ่านจุด V ไปตัดเส้นโค้ง C ว่า "กรวย" เรียกเส้นโค้ง C ว่า "เส้นบังคับ" เรียกจุด V ว่า "จุดยอด" ของกรวย เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ผ่าน V และตัดเส้นโค้ง C ว่า "เส้นก่อกำเนิด" ของกรวย

1.3 การหาสมการของกรวย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ข7 แสดงรูปกรวยซึ่งมีเส้นโค้ง C เป็นเส้นบังคับและจุด V เป็นจุดยอด

ต่อไปเราจะหาสมการของกรวยโดยทำนองเดียวกับวิธีการหาสมการของทรงกระบอก

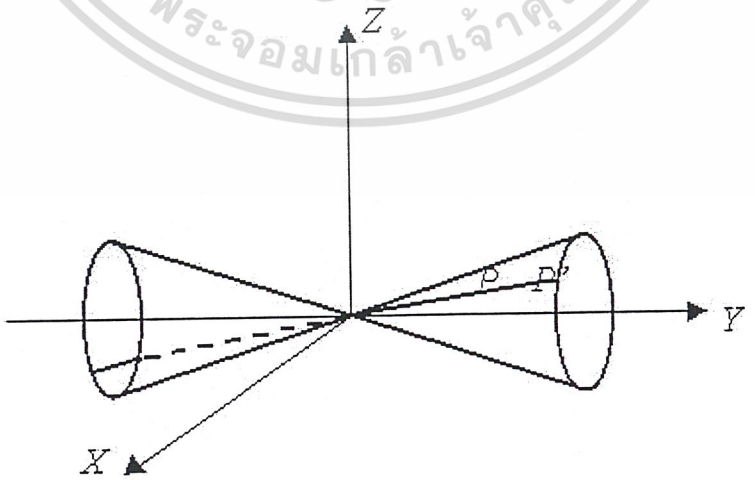
ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนกรวยดังกล่าวข้างต้น ฉะนั้นย่อมจะมีจุด P บน C ซึ่งอยู่บนเส้นก่อกำเนิดเดียวกันที่ผ่านจุด P และจุด V ดังรูปที่ ข7 และจากรูปจะได้เงื่อนไขสองประการคือ

(ก) VP ขนานกับ VP'

(ข) P' สอดคล้องสมการของ C

โดยเงื่อนไขดังกล่าวทำให้เราได้สมการของกรวยที่ต้องการดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาสมการของกรวยซึ่งมีเส้นบังคับ เป็นรูปวงรีมีสมการเป็น $4x^2+z^2=1, y=4$ และมีจุดกำเนิดเป็นจุดยอด



รูปที่ ข8 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>วิธีทำ</u> ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกรวยซึ่งมีวงรี $4x^2+z^2=1$, $y=4$ เป็นเส้นบังคับ และมีจุดกำเนิดเป็นจุดยอด ดังนั้นจะมีจุด P' บนเส้นบังคับซึ่งอยู่บนเส้นก่อกำเนิดเดียวกันที่จุด P และ V ดังรูปที่ ข8 และจากรูปจะได้

$$OP = tOP' \qquad \text{(A)}$$

และ P' อยู่บนวงรี

$$4x^2+z^2=1\ ,\ y=4 \qquad \text{(B)}$$

แต่ $OP=(x,y,z)$

และ $OP'=(x',4,z')$

จาก (A) จะได้ $4x^2+z^2=1$ (C)

จาก (B) จะได้ $(x,y,z)=t(x',4,z')$

ดังนั้น $x=tx'\ ,\ y=4t\ ,\ z=tz'$

โดยการจำกัดค่า t

จะได้ $\frac{x}{x'}=\frac{y}{4}=\frac{z}{z'}$

และ $x'=\frac{4x}{y}\ ,\ z'=\frac{4z}{y}$

แทน x',z' ในสมการ (C)

จะได้ $4\left(16\frac{x^2}{y^2}\right)+16\frac{z^2}{y^2}=1$

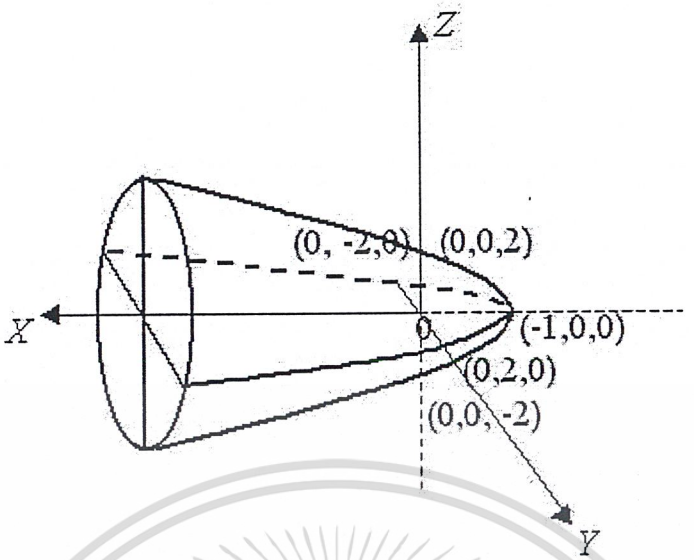
หรือ $64x^2+16z^2=y^2$ เป็นสมการของทรงกรวยที่ต้องการ #

2) <u>การพิจารณาลักษณะพื้นผิวจากสมการ</u>

เป็นการศึกษาถึงวิธีการพิจารณาเขียนรูปของพื้นผิวที่มีสมการที่กำหนดให้ โดยใช้จุดตัดแกน, ขอบเขตของตัวแปร, รอยตัดบนระนาบ และสมมาตรช่วยในการพิจารณา

2.1 การพิจารณาจุดตัดแกน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ข9 แสดงกราฟของพื้นผิวที่ได้จากการหมุนเส้นโค้งพาราโบลา $y^2 = 4x + 4,\ z = 0$ รอบแกน X

จากรูปที่ ข9 จะพบว่าพื้นผิวนี้มีสมการเป็น

$$y^2 + z^2 = 4x + 4$$

จากรูปจะเห็นว่าพื้นผิวนี้ตัดพิกัดทั้งสาม เราอาจหาจุดตัดแกนเหล่านี้ได้ดังนี้

ที่จุดตัดแกน X พิกัดจะต้องอยู่ในรูป $(x,0,0)$ และต้องสอดคล้องกับสมการ (1) กล่าวคือ เราจะได้ว่า $0 + 0 = 4x + x$

ซึ่งจะได้ $x = -1$

ดังนั้นจุดตัดแกน X คือ $(-1,0,0)$ เราอาจพิจารณาจุดตัดแกน Y และ Z ได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งจะได้ว่า จุดตัดแกน Y คือ $(0,\pm 2,0)$ และ จุดตัดแกน Z คือ $(0,0,\pm 2)$

โดยทั่วไปเราจะสรุปวิธีหาจุดตัดแกนของพื้นผิวได้ดังต่อไปนี้

สมมติ $f(x,y,z) = 0$ เป็นสมการของพื้นผิว ถ้าพื้นผิวตัดแกน X แสดงว่าจุด $f(x,0,0)$ อยู่บนพื้นผิว และในทำนองเดียวกันกับการที่พื้นผิวตัดแกน Y และ Z จะได้ว่า

$f(x,0,0) = 0$ เท่านั้น , เมื่อพื้นผิวตัดแกน X (1)

$f(0,y,0) = 0$ เท่านั้น , เมื่อพื้นผิวตัดแกน Y (2)

$f(0,0,z) = 0$ เท่านั้น , เมื่อพื้นผิวตัดแกน Z (3)

เราจะเรียกค่า x, y และ z จากสมการ (1), (2) และ (3) ว่า ระยะตัดแกน X ระยะตัดแกน Y และระยะตัดแกน Z ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 5 จงพิจารณาหาจุดตัดแกนพิกัดของพื้นผิว $(x-1)^2-y^2+(z+2)^2=1$

วิธีทำ ให้ $f(x,y,z)=(x-1)^2-y^2+(z+2)^2-1=0$

เมื่อแทน $y=0,\quad z=0$ ในสมการ จะได้

$$f(x,0,0)=(x-1)^2+3=0$$

ซึ่งไม่มีค่า x ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการนี้ แสดงว่าพื้นผิวไม่ตัดแกน X

เมื่อแทน $x=0,\quad z=0$ ในสมการ จะได้

$$f(0,y,0)=4-y^2=0$$

แก้สมการได้ $y=\pm 2$

แสดงว่าพื้นผิวตัดแกน Y ที่จุด $(0,\pm 2,0)$

เมื่อแทน $x=0,\quad y=0$ ในสมการ จะได้

$$f(0,0,z)=(z+2)^2=0$$

แก้สมการได้ $z=-2$

แสดงว่าพื้นผิวตัดแกน Z ที่จุด $(0,0,-2)$

สรุปคำตอบคือ พื้นผิวไม่ตัดแกน X แต่ตัดแกน Y และแกน Z ที่จุด $(0,\pm 2,0)$ และ $(0,0,-2)$ ตามลำดับ #

2.2 การพิจารณาขอบเขตตัวแปร

สังเกตจากกราฟของพื้นผิว $y^2+z^2=4x+4$ (รูปที่ ข9) จะพบว่าค่าของ x ที่ทำให้จุด (x,y,z) อยู่บนพื้นผิวคือ $x\geq -1$ เท่านั้น ส่วนค่าของ y และ z ที่ทำให้จุด (x,y,z) อยู่บนพื้นผิวคือ $-\infty<y<+\infty$ และ $-\infty<z<+\infty$ ตามลำดับ

เราจะเรียกเซตของ x, เซตของ y และเซตของ z ดังกล่าวว่าขอบเขตของ x, ขอบเขตของ y และขอบเขตของ z สำหรับพื้นผิว $y^2+z^2=4x+4$

โดยทั่วไปถ้า $f(x,y,z)=0$ เป็นสมการของพื้นผิว

ขอบเขตของ x คือเซต $\{x|\ \exists y,\ z\in R \ni f(x,y,z)=0\}$ (1)

ขอบเขตของ y คือเซต $\{y|\ \exists x,\ z\in R \ni f(x,y,z)=0\}$ (2)

ขอบเขตของ z คือเซต $\{z|\ \exists x,\ y\in R \ni f(x,y,z)=0\}$ (3)

ตัวอย่างที่ 6 จงพิจารณาขอบเขตของตัวแปรค่าของพื้นผิวซึ่งมีสมการเป็น $x^2+y^2-4z=0$

วิธีทำ พิจารณาสมการของพื้นผิว $x^2+y^2-4z=0$ (1)

ก. พิจารณาขอบเขตของ z

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (1) เราจะเห็นว่า $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)\geq 0$

แสดงว่า z ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ในทางกลับกัน ถ้า $z\geq 0$ เราจะสามารถเลือก x, y ที่ทำให้ x, y, z สอดคล้องกับสมการ (1) ได้เสมอไป เช่น ในการเลือก $x=2\sqrt{z}$, $y=0$ เป็นต้น

ดังนั้นทุก ๆ ค่า $z\geq 0$ ย่อมมี x, y ซึ่ง x, y, z สอดคล้องกับสมการ (1) ได้เสมอไป นั่นคือ ขอบเขตของ z เป็น $[0,+\infty)$

ข. พิจารณาขอบเขตของ x

จากสมการ (1) เราจะเห็นว่า $x=\pm\sqrt{4z-y^2}$

แสดงว่า x อาจมีค่าได้ทั้งค่าบวก ค่าลบ และค่าศูนย์ (คือเมื่อ $4z=y^2$) สำหรับค่า x ใด ๆ ถ้าเราเลือก $y=0$, $z=\frac{x^2}{4}$

เราจะได้ว่า x, y, z สอดคล้องกับสมการ (1) เสมอไป ดังนั้น x มีค่าเป็นจำนวนจริงได้ทุกค่า นั่นคือขอบเขตของ x เป็น $(-\infty,\ +\infty)$

ค. พิจารณาขอบเขตของ y

จากสมการ (1) เราจะเห็นว่า $y=\pm\sqrt{4z-x^2}$

โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกันกับการพิจารณาขอบเขตของ x ในข้อ ข. จะได้ขอบเขตของ y เป็น $(-\infty,\ +\infty)$

สรุปจาก ก. ข. และ ค. จะได้

ขอบเขตของ x คือ $(-\infty,\ +\infty)$

ขอบเขตของ y คือ $(-\infty,\ +\infty)$

ขอบเขตของ z คือ $[0,\ +\infty)$

2.3 การพิจารณารอยตัดบนระนาบ

พิจารณาสมการของพื้นผิวในรูปที่ ข9 ซึ่งมีสมการเป็น

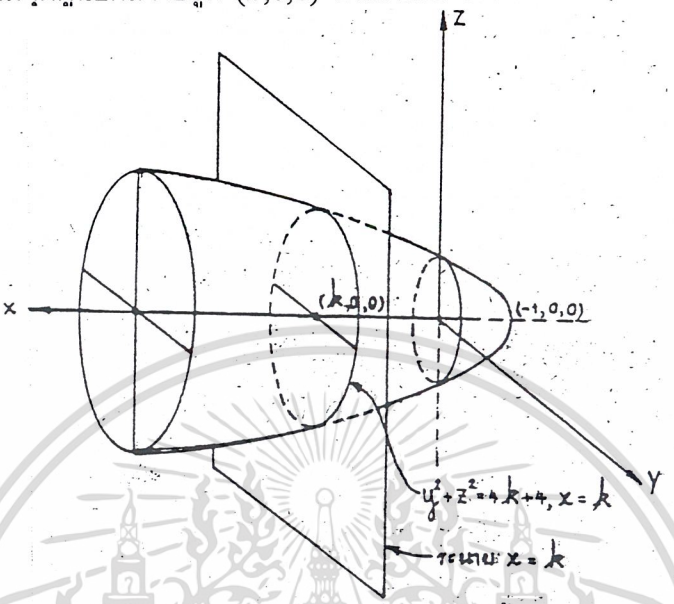
$$y^2+z^2=4x+4$$

ถ้าเราให้ k เป็นค่าใด ๆ ในขอบเขตของ x และแทน $x=k$ ในสมการ จะได้สมการเป็น

$$y^2+z^2=4k+4,\quad k\geq -1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการที่ได้เป็นสมการของเส้นโค้งบนระนาบ $x=k$ ซึ่งเป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ YZ เราจะเรียกเส้นโค้งดังกล่าวว่า "เส้นโค้งรอยตัดของพื้นผิวโดยระนาบขนานกับระนาบ YZ" ในที่นี้เส้นโค้งดังกล่าวเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k,0,0)$ บนแกน X รัศมีเท่ากับ $\sqrt{4k+4}$



รูปที่ ข10 แสดงแนวโน้มของภาพ เมื่อ k เพิ่มจาก -1 ขึ้นไปอย่างไม่มีขีดจำกัด

ในกรณีตัวอย่างนี้ รอยตัดบนระนาบ $x=k$ ซึ่งเป็นวงกลมจะมีขนาดเล็กที่สุดเมื่อ $k=-1$ และวงกลมจะมีขนาดใหญ่ขึ้น ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด เมื่อ k เพิ่มจาก -1 ขึ้นไปอย่างไม่มีขีดจำกัด ดังรูปที่ ข10

โดยการพิจารณารอยตัดบนระนาบ $x=k$ (หรือระนาบ YZ) หลาย ๆ ระนาบทำให้เราสามารถจินตนาการภาพพื้นผิวได้ และทำให้เราเขียนกราฟของพื้นผิวได้ในที่สุด

ในทำนองเดียวกันเราอาจจะเขียนกราฟของพื้นผิวได้จากการพิจารณารอยตัดโดยระนาบแบบ $y=k$ หรือโดยระนาบแบบ $z=k$ หรือพิจารณารอยตัดแบบต่าง ๆ ประกอบกัน

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> กำหนดให้ $x^2+2y^2-4z-8=0$ เป็นสมการพื้นผิว S

ก. จงพิจารณาหาขอบเขตของ z

ข. จงพิจารณารอยตัดบนระนาบ $x=0$ และบนระนาบ $y=0$

ค. จงพิจารณารอยตัดบนระนาบ $z=k$

ง. ร่างกราฟของพื้นผิว S

<u>วิธีทำ</u> ก. พิจารณาจากสมการ $x^2+2y^2-4z-8=0$ เขียนสมการเสียใหม่เป็น

$$z=-2+\frac{x^2+2y^2}{4} \quad \text{(A)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก (A) จะได้ว่า $z \geq -2$ และถ้า $z \geq -2$ จะมี x, y ที่ทำให้ x, y, z สอดคล้องสมการ (A) ได้เสมอ เช่นเราอาจเลือก $y = 0$, $x = 2\sqrt{z+2}$ เป็นต้น แสดงว่าทุก ๆ $z \geq -2$ ย่อมมี x, y ซึ่ง x, y, z สอดคล้องสมการ (A) เสมอไป

นั่นคือ ขอบเขตของ z เป็น $[-2, +\infty)$

ข. โดยการแทน $x = 0$ ในสมการ (A) จะได้

รอยตัดบนระนาบ $x = 0$ เป็นพาราโบลา $2y^2 = 4z + 8$, $x = 0$

แทน y ในสมการจะได้รอยตัดบนระนาบ $y = 0$ เป็นพาราโบลา $x^2 = 4z + 8, y = 0$

ค. โดยการแทน $z = k$ ในสมการจะได้เส้นโค้งรอยตัดบนระนาบ $z = k$ มีสมการเป็น $x^2 + 2y^2 = 4k + 8$, $z = k$, $k \geq -2$

เมื่อ $z \geq -2$ ได้รอยตัดบนระนาบ $z = k$ เป็นวงรี $\frac{x^2}{4k+8} + \frac{y^2}{2k+4} = 1$, $z = k$

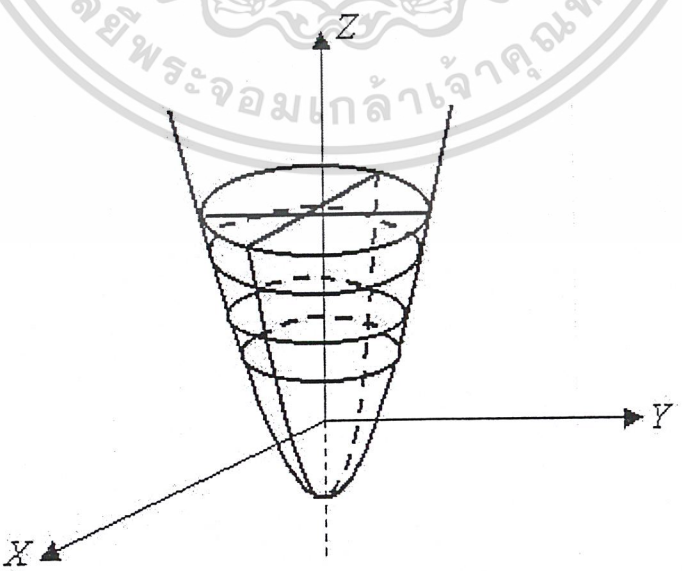
เมื่อ $k = -2$ จะได้รอยตัดบนระนาบ $z = -2$ เป็นจุด $(0,0,-2)$

วงรีมีขนาดใหญ่ขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด เมื่อ k เพิ่มขึ้นจาก -2 อย่างไม่มีขีดจำกัด

เช่น รอยตัดบนระนาบ $z = 1$ มีสมการเป็น $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$, $z = 1$

รอยตัดบนระนาบ $z = 2$ มีสมการเป็น $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$, $z = 2$ เป็นต้น

ง. โดยจินตนาการจากรอยตัดบนระนาบ $z = k$ ณ ค่า k ต่าง ๆ บน $[-2, +\infty)$ ประกอบกับรอยตัดบนระนาบ $x = 0$ และ $y = 0$ จะเขียนกราฟบนพื้นผิว ดังแสดงด้วยรูปที่ ข11



รูปที่ ข11 แสดงกราฟของพื้นผิว S

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 การพิจารณาสมมาตร

สังเกตจากกราฟบนพื้นผิว $x^2+2y^2-4z-8=0$ ในตัวอย่างที่ 11 (รูปที่ ข15) จะเห็นว่าพื้นผิวส่วนที่อยู่ทางขวามือของระนาบ XZ กับพื้นผิวส่วนที่อยู่ทางซ้ายของระนาบ XZ เป็นภาพของกระจกเงาของกันและกัน กรณีเช่นนี้เรากล่าวว่าพื้นผิวมีสมมาตรกับระนาบ XZ นั่นคือ

พื้นผิว S มีสมมาตรกับระนาบ XZ ก็ต่อเมื่อจุด (x,y,z) อยู่บน S แล้วจุด $(x,-y,z)$ อยู่บน S ด้วยเท่านั้น

เราให้ความหมายของการสมมาตรกับระนาบ YZ และระนาบ XY ได้ในทำนองเดียวกันกล่าวคือ

พื้นผิว S มีสมมาตรกับระนาบ YZ ก็ต่อเมื่อจุด (x,y,z) อยู่บน S แล้วจุด $(-x,y,z)$ อยู่บน S ด้วยเท่านั้น

พื้นผิว S มีสมมาตรกับระนาบ XY ก็ต่อเมื่อจุด (x,y,z) อยู่บน S แล้วจุด $(x,y,-z)$ อยู่บน S ด้วยเท่านั้น

เราอาจทดสอบสมมาตรของพื้นผิวกับระนาบต่าง ๆ ได้ดังนี้

กำหนดให้ $f(x,y,z)=0$ เป็นสมการของพื้นผิว S

1. ถ้าแทน z ด้วย $-z$ ในสมการ แล้วสมการไม่เปลี่ยนแปลง คือ
   ถ้า $f(x,y,z)=0$ แล้ว $f(x,y,-z)=0$ ด้วย สรุปว่า S สมมาตรกับระนาบ XY
2. ถ้าแทน x ด้วย $-x$ ในสมการ แล้วสมการไม่เปลี่ยนแปลง คือ
   ถ้า $f(x,y,z)=0$ แล้ว $f(-x,y,z)=0$ ด้วย สรุปว่า S สมมาตรกับระนาบ YZ
3. ถ้าแทน y ด้วย $-y$ ในสมการ แล้วสมการไม่เปลี่ยนแปลง คือ
   ถ้า $f(x,y,z)=0$ แล้ว $f(x,-y,z)=0$ ด้วย สรุปว่า S สมมาตรกับระนาบ XZ

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวในตัวอย่างที่ 11 จงพิจารณาสมมาตรของ S กับระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้สมการของพื้นผิว S คือ

$$x^2+2y^2-4z-8=0$$

ให้ $$f(x,y,z)=x^2+2y^2-4z-8=0$$

จะได้ $$f(x,y,-z)=x^2+2y^2-4z-8\neq 0 \qquad \text{(A)}$$

แสดงว่า พื้นผิวของ S ไม่สมมาตรกับระนาบ XY

$$f(-x,y,z)=(-x)^2+2y^2-4z-8=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= x^2 + 2y^2 - 4z - 8 = 0 \qquad \text{(B)}$$

แสดงว่า พื้นผิวของ S ไม่สมมาตรกับระนาบ YZ

$$f(x,-y,z) = x^2 + 2(-y)^2 - 4z - 8 = 0$$
$$= x^2 + 2y^2 - 4z - 8 \quad = 0 \qquad \text{(C)}$$

แสดงว่า พื้นผิวของ S ไม่สมมาตรกับระนาบ XZ

จากการทดลองสรุปได้ว่าพื้นผิวที่กำหนดให้สมมาตรกับระนาบ YZ และระนาบ XZ แต่ไม่สมมาตรกับระนาบ XY #

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> กำหนดให้พื้นผิว S มีสมการเป็น $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

ก. จงแสดงว่า S มีสมมาตรกับระนาบ XY

ข. จงพิจารณาขอบเขตของตัวแปร z

ค. จงพิจารณารอยตัดบนระนาบ $z = k$

ง. จงเขียนรูปของพื้นผิว

<u>วิธีทำ</u> ก. จงแสดงว่า S มีสมมาตรกับระนาบ XY

จากสมการของพื้นผิว คือ $f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 \quad = 0$

แทน z ด้วย $-z$ จะได้ $f(x,y,-z) = x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{(-z)^2}{4} - 1 = 0$

$$= x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 \quad = 0$$

แสดงว่า พื้นผิวสมมาตรกับระนาบ XY

ข. จากสมการที่กำหนดให้เราเขียนเสียใหม่เป็น

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{z^2}{4}$$

พิจารณาจากสมการนี้จะได้ขอบเขตของ z คือ $[-2,2]$

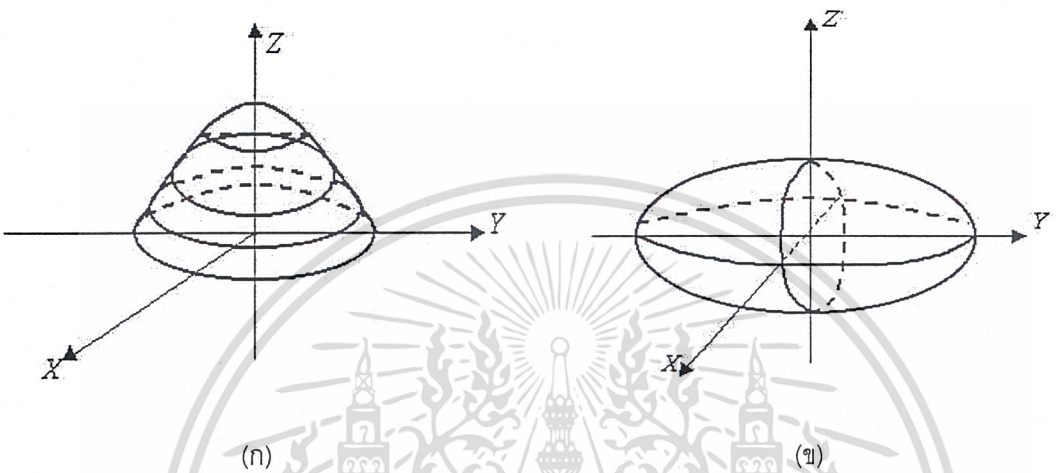
ค. พิจารณารอยตัดบนระนาบ $z = k$ เมื่อ $-2 \le k \le 2$ จะได้รอยตัดบนระนาบ $z = k$ เป็นวงรี $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{z^2}{4}, \quad z = k$

เมื่อ $k = 0$ รอยตัดบนระนาบ $z = 0$ เป็นวงรี $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1, \quad z = 0$ ซึ่งมีขนาดใหญ่ที่สุด

เมื่อ $|k|$ เพิ่มขึ้นจาก 0 ไปสู่ 2 จะได้รอยตัดบนระนาบ $z = k$ เป็นวงรีขนาดเล็กลง ๆ จนกระทั่งเป็นจุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ง. โดยการพิจารณารอยตัดบนระนาบ $z = k$ จากข้อ ค. เฉพาะเมื่อ $0 \le k \le 2$ หลาย ๆ ระนาบ ทำให้ได้รูปพื้นผิวส่วนที่อยู่เหนือระนาบ XY ดังรูปที่ ข12 (ก) และเนื่องจากพื้นผิวสมมาตรกับระนาบ XY ทำให้เราทราบว่าพื้นผิวส่วนที่อยู่ใต้ระนาบ XY เป็นภาพในกระจกเงาของพื้นผิวส่วนที่อยู่เหนือระนาบ XY ซึ่งเมื่อเขียนกราฟแล้วจะได้กราฟของพื้นผิวดังรูปที่ ข12 (ข)



(ก) (ข)

รูปที่ ข12 แสดงกราฟของพื้นผิว S

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> กำหนดให้ $x^2 + (y-1)^2 - (z-2)^2 = 1$ เป็นสมการของพื้นผิว

ก. จงพิจารณาหาจุดตัดแกน

ข. จงพิจารณาสมมาตรกับระนาบพิกัด

ค. จงหาขอบเขตของตัวแปร z

ง. จงพิจารณารอยตัดบนระนาบ $z = k$

จ. จงเขียนกราฟของพื้นผิว

<u>วิธีทำ</u> ก. หาจุดตัดแกน

แทนใน $y = 0$, $z = 0$ ในสมการ จะได้ $z = \pm 2$

แทนใน $x = 0$, $z = 0$ ในสมการ จะได้ $y = 1 \pm \sqrt{5}$

แทนใน $x = 0$, $y = 0$ ในสมการ จะได้ $z = 2$

ฉะนั้น จะได้ จุดตัดแกน X คือ $(2,0,0)$ และ $(-2,0,0)$

จุดตัดแกน Y คือ $(0,1+\sqrt{5},0)$ และ $(0,1-\sqrt{5},0)$

จุดตัดแกน Z คือ $(0,0,2)$

ข. พิจารณาสมมาตรกับระนาบพิกัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 - (z-2)^2 - 1 = 0$

แทน z ด้วย $-z$ ในสมการ จะได้

$$f(x,y,-z) = x^2 + (y-1)^2 - (-z-2)^2 - 1$$
$$= x^2 + (y-1)^2 - (z+2)^2 - 1 \neq 0$$

ฉะนั้น พื้นผิวไม่สมมาตรกับระนาบ XY

แทน x ด้วย $-x$ ในสมการ จะได้

$$f(-x,y,z) = (-x)^2 + (y-1)^2 - (z-2)^2 - 1 = 0$$

ฉะนั้น พื้นผิวสมมาตรกับระนาบ YZ

แทน y ด้วย $-y$ ในสมการ จะได้

$$f(x,-y,z) = x^2 + (-y-1)^2 - (z-2)^2 - 1 \neq 0$$

ฉะนั้น พื้นผิวไม่สมมาตรกับระนาบ XZ

สรุปได้ว่า พื้นผิวสมมาตรกับระนาบ YZ ระนาบเดียว

ค. หาขอบเขตของตัวแปร z

พิจารณาจากพื้นผิว $x^2 + (y-1)^2 - (z-2)^2 = 1$

จะได้ว่า ขอบเขตของ z คือ $(-\infty,+\infty)$

ง. พิจารณารอยตัดบนระนาบ $z = k$ เมื่อ $k \in (-\infty,+\infty)$

จากสมการที่กำหนดให้ $x^2 + (y-1)^2 - (z-2)^2 = 1$

แทน $z = k$ จะได้รอยตัดบนระนาบขนานกับระนาบ XY คือ

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 + (k-2)^2 \ , \ z = k$$

รอยตัดเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,1,k)$ มีรัศมีเท่ากับ $\sqrt{1+(k-2)^2}$

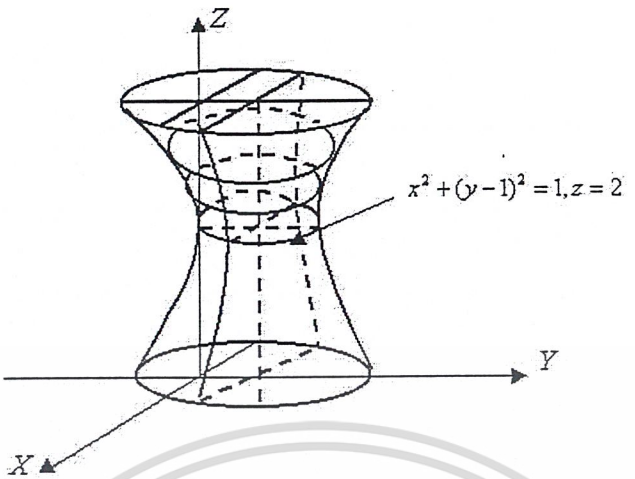
วงกลมมีขนาดเล็กที่สุดเมื่อ $|k-2| = 0$ หรือ $k = 2$ และมีสมการเป็น

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \ , \ z = 2$$

เมื่อ $|k-2|$ เพิ่มจากจุดศูนย์อย่างไม่มีขีดจำกัด วงกลมจะมีขนาดใหญ่ขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัดด้วย และเราจะพบว่าวงกลมซึ่งเป็นรอยตัดบนระนาบ $z = k$ เมื่อ $k > 2$ กับวงกลมซึ่งเป็นรอยตัดบนระนาบ $z = k$ เมื่อ $k < 2$ จะเป็นภาพในกระจกเงาของกันและกันโดยมีระนาบ $z = 2$ เป็นกระจกเงา ในกรณีนี้แสดงว่า "พื้นผิวมีสมมาตรกับระนาบ $z = 2$"

จ. เขียนกราฟของพื้นผิวได้ดังรูปที่ ข13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ข13 แสดงกราฟของพื้นผิว $x^2+(y-1)^2-(z-2)^2=1$

3) <u>พื้นผิวควอดริก</u>

ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณาลักษณะของกราฟของสมการกำลังสองสามตัวแปร x, y, z ในรูปแบบ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0 \qquad (1)$$

เมื่อ A, B, C ไม่เป็น 0 พร้อมกัน ถ้ากราฟของสมการนี้เป็นพื้นผิว เราเรียกพื้นผิวนี้ว่า "พื้นผิวควอดริก" หรือ โคนิคอยด์ พื้นผิวที่เราได้กล่าวในหัวข้อที่แล้ว เช่น พาราโบลอยด์ ทรงรี และไฮเพอร์โบลอยด์ เป็นตัวอย่างของพื้นผิวควอดริก ต่อไปนี้จะได้พิจารณาพื้นผิวควอดริก 6 แบบได้แก่ ทรงรี ทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นเดียว ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น ทรงกรวย ทรงพาราโบลาเชิงวงรี และทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

การพิจารณาพื้นผิวควอดริกว่าเป็นแบบใดนั้นอาจพิจารณาได้จากเส้นโค้งรอยตัดของพื้นผิวกับระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัดทั้งสาม นั่นคือในการพิจารณาชนิดของพื้นผิวก็ดี หรือการเขียนกราฟก็ดี สิ่งที่เป็นเครื่องมือช่วยในการพิจารณาก็คือ รอยตัดระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัดนั่นเอง เพราะเส้นโค้งรอยตัดบนระนาบดังกล่าว หลาย ๆ ระนาบจะช่วยให้สามารถเขียนรูปพื้นผิวได้ดังได้กล่าวแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราสามารถแปลงสมการ (1) โดยการเปลี่ยนแกนพิกัดให้อยู่ในรูปสมการอย่างง่ายแบบใดแบบหนึ่ง ต่อไปนี้

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + L = 0 \qquad (2)$$

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z' = 0 \qquad (3)$$

$$A'x'^2 + C'z'^2 + B'y' = 0 \qquad (4)$$

$$B'y'^2 + C'z'^2 + A'x' + = 0 \qquad (5)$$

ต่อไปนี้จะพิจารณากราฟของพื้นผิวควอดริกซึ่งมีสมการในรูปแบบ (2) – (5) โดยอาศัยหลักการพิจารณาที่กล่าวแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา ส่วนวิธีแปลงสมการทั่วไปในรูปแบบ (1) ให้เป็น สมการในรูปแบบ (2) – (5) นั้นจะได้กล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

3.1 ทรงรี

ทรงรี คือ พื้นผิวซึ่งสมการอย่างง่ายเขียนได้ในรูป

$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 = D$ เมื่อ $A, B, C, D > 0$

หรือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ เมื่อ $a, b, c > 0$

- **พิจารณาจุดตัดแกน**

จุดตัดแกน X คือ $(\pm a, 0, 0)$

จุดตัดแกน Y คือ $(0, \pm b, 0)$

จุดตัดแกน Z คือ $(0, 0, \pm c)$

- **พิจารณาสมมาตร**

กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

กราฟมีสมมาตรกับแกน X แกน Y และแกน Z

กราฟมีสมมาตรกับระนาบ XY ระนาบ YZ ระนาบ XZ

- **พิจารณาขอบเขต**

ขอบเขตของ X คือ $[-a, a]$

ขอบเขตของ Y คือ $[-b, b]$

ขอบเขตของ Z คือ $[-c, c]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- **พิจารณารอยตัด**

รอยตัดบนระนาบ XY เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=0$

รอยตัดบนระนาบ YZ เป็นวงรี $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, x=0$

รอยตัดบนระนาบ XZ เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, y=0$

รอยตัดบนระนาบ $x=k$ เป็นวงรี

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}, x=k \text{ เมื่อ } |k|<a$$

ได้รอยตัดเป็นจุด $(k,0,0)$ เมื่อ $|k|=a$

รอยตัดบนระนาบ $y=k$ เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}, y=k \text{ เมื่อ } |k|<b$$

ได้รอยตัดเป็นจุด $(0,k,0)$ เมื่อ $|k|=b$

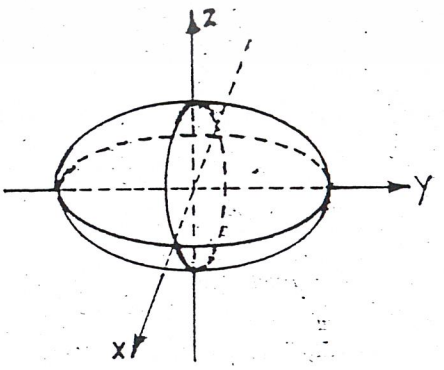
รอยตัดบนระนาบ $z=k$ เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}, z=k \text{ เมื่อ } |k|<c$$

ได้รอยตัดเป็นจุด $(0,0,k)$ เมื่อ $|k|=c$

พิจารณารอยตัดบนระนาบ $z=k$ เมื่อ $|k|\le c$ จะเห็นว่าวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0,k)$ บนแกน z ความยาวของครึ่งแกนมีค่าเท่ากับ $\sqrt{a^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}$ และ $\sqrt{b^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}$ ซึ่งเห็นได้ว่าวงรีจะใหญ่ที่สุดบนระนาบ XY (เมื่อ $k=0$) และขนาดของวงรีจะเล็กลงเรื่อย ๆ จนกลายเป็นจุดจุดเดียวเมื่อ $|k|$ เพิ่มขึ้นจากศูนย์ไปสู่ค่า c

เมื่อนำข้อมูลต่าง ๆ ที่พิจารณาแล้วข้างต้นประมวลเข้าด้วยกัน จะเขียนกราฟทรงรีได้ ดังรูปที่ ข14



รูปที่ ข14 แสดงกราฟของพื้นผิวทรงรี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ : 1. ถ้า $a=b$ หรือ $b=c$ หรือ $c=a$ คู่ใดคู่หนึ่ง กราฟจะเป็นทรงรีที่เกิดจากหมุน

2. ถ้า $a=b=c$ กราฟจะเป็นรูปทรงกลม

3. เราอาจจะพิจารณารอยตัดบนระนาบ $x=k$ หรือระนาบ $y=k$ ก็จะเขียนกราฟของพื้นผิวได้เช่นกัน

3.2 ทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นเดียว

ทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นเดียว คือ พื้นผิวซึ่งมีสมการอย่างง่ายแบบใดแบบหนึ่งในสามแบบข้างล่างนี้

3.2.1 $Ax^2+By^2-Cz^2=D$ หรือ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

3.2.2 $Ax^2-By^2+Cz^2=D$ หรือ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

3.2.3 $-Ax^2+By^2+Cz^2=D$ หรือ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

เมื่อ $A,B,C,D>0$ หรือ $a,b,c>0$

เราจะพิจารณาเขียนกราฟของพื้นผิวซึ่งมีสมการแบบที่ 3.2.1

- **พิจารณาจุดตัดแกน**

จุดตัดแกน X คือ $(\pm a,0,0)$

จุดตัดแกน Y คือ $(0,\pm b,0)$

จุดตัดแกน Z ไม่มี (เนื่องจากเมื่อแทน $x=0,y=0$ แล้วได้ค่า Z เป็นจำนวนจินตภาพ)

- **พิจารณาสมมาตร**

กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

กราฟมีสมมาตรกับแกน X แกน Y และแกน Z

กราฟมีสมมาตรกับระนาบ XY ระนาบ YZ ระนาบ XZ

- **พิจารณาขอบเขต**

ขอบเขตของ X คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Y คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Z คือ $(-\infty,+\infty)$

- **พิจารณารอยตัด**

รอยตัดบนระนาบ XY เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รอยตัดบนระนาบ YZ เป็นไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$

รอยตัดบนระนาบ XZ เป็นไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ XY เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}, z=k \text{ เมื่อ } |k|<c \text{ ทุกค่า } k$$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ YZ เป็นไฮเพอร์โบลา

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}, x=k \text{ ทุกค่า } k$$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ XZ เป็นไฮเพอร์โบลา

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}, y=k \text{ ทุกค่า } k$$

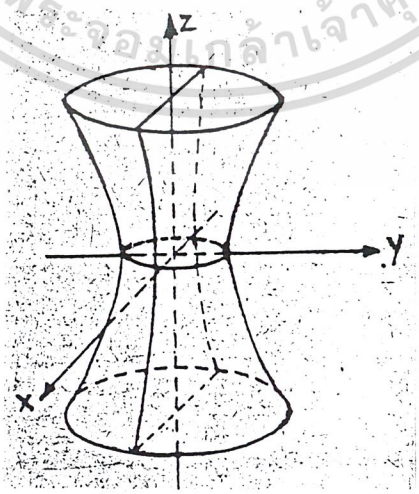
พิจารณารอยตัดบนระนาบทั้งหลายที่ขนานกับระนาบ XY ซึ่งเป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2} \text{ , } z=k$$

หรือ $$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}=1 \text{ , } z=k$$

จะเห็นได้ว่าวงรีมีขนาดเล็กสุดบนระนาบ XZ (เมื่อ $k=0$) และวงรีจะมีขนาดใหญ่ขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัดเมื่อ $|k|$ เพิ่มขึ้นจากศูนย์อย่างไม่มีขีดจำกัด

การพิจารณารอยตัดบนระนาบ $z=k$ หลาย ๆ ระนาบประกอบกับรอยตัดบนแกนระนาบพิกัดและข้อมูลที่พิจารณาไว้แล้วข้างต้น จะเขียนกราฟของพื้นผิวทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นเดียวได้ ดังรูปที่ ข15



รูปที่ ข15 แสดงกราฟของพื้นผิวทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ : เราอาจพิจารณารอยตัดบนระนาบ $x=k$ หลาย ๆ ระนาบ หรือระนาบ $y=k$ หลาย ๆ ระนาบ ก็จะสามารถเขียนกราฟของพื้นผิวได้เช่นเดียวกัน

3.3 ทรงไฮเพอร์โบลาสองชั้น

ทรงไฮเพอร์โบลาสองชั้น คือ พื้นผิวซึ่งมีสมการอย่างง่ายเป็นแบบหนึ่งแบบใดในสามแบบต่อไปนี้

3.3.1 $Ax^2-By^2-Cz^2=D$ หรือ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

3.3.2 $-Ax^2+By^2-Cz^2=D$ หรือ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

3.3.3 $-Ax^2-By^2+Cz^2=D$ หรือ $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

เมื่อ $A,B,C,D>0$ หรือ $a,b,c>0$

เราจะพิจารณาเขียนกราฟของพื้นผิวซึ่งมีสมการแบบที่ 3.3.3

- **พิจารณาจุดตัดแกน**

จุดตัดแกน X ไม่มี

จุดตัดแกน Y ไม่มี

จุดตัดแกน Z คือ จุด $(0,0,c)$ และ $(0,0,-c)$

- **พิจารณาสมมาตร**

กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

กราฟมีสมมาตรกับแกน X แกน Y และแกน Z

กราฟมีสมมาตรกับระนาบ XY ระนาบ YZ ระนาบ XZ

- **พิจารณาขอบเขต**

ขอบเขตของ X คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Y คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Z คือ $(-\infty,-c]\cup[c,+\infty)$

- **พิจารณารอยตัด**

รอยตัดบนระนาบ XY ไม่มี

รอยตัดบนระนาบ YZ เป็นไฮเพอร์โบลา $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$

รอยตัดบนระนาบ XZ เป็นไฮเพอร์โบลา $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ XY เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1, z=k \quad \text{ทุกค่า } k$$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ YZ เป็นไฮเพอร์โบลา

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{a^2}, x=k \quad \text{ทุกค่า } k$$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ XZ เป็นไฮเพอร์โบลา

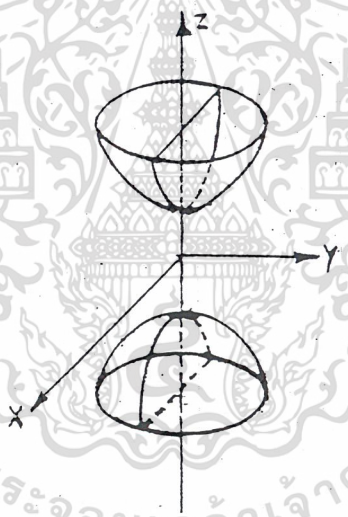
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2}, y=k \quad \text{ทุกค่า } k$$

พิจารณารอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ XY อย่างละเอียดจะเห็นว่า

เมื่อ $|k|=c$ รอยตัดเป็นจุด $(0,0,c)$ และ $(0,0,-c)$

เมื่อ $|k|>c$ รอยตัดเป็นวงรี และมีขนาดใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ $|k|$ เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด

นำข้อมูลที่พิจารณาข้างต้นเขียนกราฟจะได้กราฟของทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น ดังรูปที่ ข16



รูปที่ ข16 แสดงกราฟของพื้นผิวทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น

3.4 ทรงกรวย

ทรงกรวย คือ พื้นผิวซึ่งมีสมการอย่างง่ายเป็นแบบใดแบบหนึ่งในสามแบบต่อไปนี้

3.4.1 $Ax^2+By^2-Cz^2=0$ หรือ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

3.4.2 $Ax^2-By^2+Cz^2=0$ หรือ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

3.4.3 $-Ax^2+By^2+Cz^2=0$ หรือ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $A,B,C,D>0$ หรือ $a,b,c>0$

เราจะพิจารณาเขียนกราฟของพื้นผิวซึ่งมีสมการแบบที่ 3.4.1

- **พิจารณาจุดตัดแกน**

จุดตัดแกน X คือ จุด $(0,0,0)$

จุดตัดแกน Y คือ จุด $(0,0,0)$

จุดตัดแกน Z คือ จุด $(0,0,0)$

- **พิจารณาสมมาตร**

กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

กราฟมีสมมาตรกับแกน X แกน Y และแกน Z

กราฟมีสมมาตรกับระนาบ XY ระนาบ YZ ระนาบ XZ

- **พิจารณาขอบเขต**

ขอบเขตของ X คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Y คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Z คือ $(-\infty,+\infty)$

- **พิจารณารอยตัด**

รอยตัดบนระนาบ XY คือ จุดกำเนิด

รอยตัดบนระนาบ YZ คือ เส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกันที่จุดกำเนิดมีสมการเป็น

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, x=0 \quad \text{หรือ} \quad y=\pm\frac{b}{z}z \ , \ x=0$$

รอยตัดบนระนาบ XZ คือ เส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกันที่จุดกำเนิดมีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, y=0 \quad \text{หรือ} \quad z=\pm\frac{c}{a}x \ , \ y=0$$

รอยตัดบนระนาบ $x=k$ เป็นไฮเพอร์โบลา

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{k^2}{a^2}, x=k \quad \text{ทุกค่า } k$$

รอยตัดบนระนาบ $y=k$ เป็นไฮเพอร์โบลา

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{k^2}{b^2}, y=k \quad \text{ทุกค่า } k$$

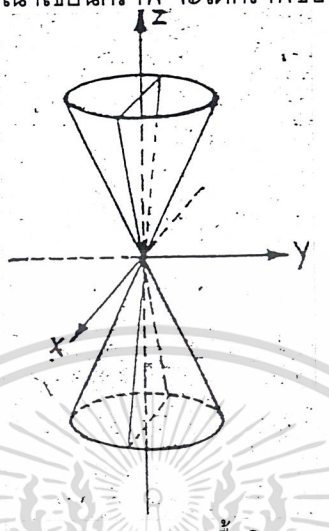
รอยตัดบนระนาบ $z=k$ เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}, z=k \quad \text{ทุกค่า } k$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณารอยตัดบนระนาบ $z = k$ ซึ่งเป็นวงรี จะเห็นว่าเมื่อ $|k|$ เพิ่มขึ้นจากศูนย์อย่างไม่มีขีดจำกัด ขนาดของวงรีจะใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัดเช่นกัน

เมื่อนำข้อมูลข้างต้นมาพิจารณาเขียนกราฟ จะได้กราฟของทรงกรวยดังรูปที่ ข17



รูปที่ ข17 แสดงกราฟของพื้นผิวทรงกรวย

หมายเหตุ : ถ้า $a = b$ กราฟจะเป็นกรวยกลมซึ่งเป็นพื้นผิวเกิดจากการหมุนเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดรอบแกน z

ข้อสังเกต : พื้นผิวที่กล่าวมาแล้วทั้ง 4 ชนิด ต่างก็มีสมมาตรกับจุดกำเนิด มีพื้นผิวบางรูปซึ่งไม่สมมาตรกับจุดกำเนิด แต่สมมาตรกับจุดอื่น เช่น จุด (h,k,l) สมการของพื้นผิวจะอยู่ในรูป

$$A(x-h)^2 + B(y-k)^2 + C(z-l)^2 + D = 0 \quad \text{เมื่อ } A,B,C,D \neq 0$$

ซึ่งเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

เราเรียกจุดสมมาตรของพื้นผิวเหล่านั้นว่า "จุดศูนย์กลาง" ของพื้นผิว

ต่อไปจะพิจารณาพื้นผิวซึ่งเป็นพื้นผิวที่ไม่มีจุดศูนย์กลาง

3.5 ทรงพาราโบลาเชิงวงรี

ทรงพาราโบลาเชิงวงรี คือ พื้นผิวซึ่งมีสมการอย่างง่ายเป็นแบบใดแบบหนึ่งในสามแบบต่อไปนี้

3.5.1 $Ax^2 + By^2 = Cz$ เมื่อ $A,B > 0$ และ $C \neq 0$ หรือ

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cz$ เมื่อ $a,b > 0$ และ $c \neq 0$

3.5.2 $Ax^2 + Cz^2 = By$ เมื่อ $A,C > 0$ และ $B \neq 0$ หรือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by \qquad \text{เมื่อ} \quad a,c>0 \quad \text{และ} \quad b\neq 0$$

3.5.3 $By^2+Cz^2=Ax$ เมื่อ $B,C>0$ และ $A\neq 0$ หรือ

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax \qquad \text{เมื่อ} \quad b,c>0 \quad \text{และ} \quad a\neq 0$$

เราจะพิจารณาเขียนกราฟของพื้นผิวซึ่งมีสมการแบบที่ 3.5.1 เมื่อ $c>0$

- **พิจารณาจุดตัดแกน**

จุดตัดแกน X คือ จุด $(0,0,0)$

จุดตัดแกน Y คือ จุด $(0,0,0)$

จุดตัดแกน Z คือ จุด $(0,0,0)$

- **พิจารณาสมมาตร**

กราฟมีสมมาตรกับแกน Z

กราฟมีสมมาตรกับระนาบ YZ ระนาบ XZ

- **พิจารณาขอบเขต**

ขอบเขตของ X คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Y คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Z คือ $[0,+\infty)$

- **พิจารณารอยตัด**

รอยตัดบนระนาบ XY คือ จุด $(0,0,0)$

รอยตัดบนระนาบ YZ เป็นพาราโบลา $y^2=b^2cz$, $x=0$

รอยตัดบนระนาบ XZ เป็นพาราโบลา $x^2=a^2cz$, $y=0$

รอยตัดบนระนาบ $x=k$ เป็นพาราโบลา

$$y^2=b^2\left(cz-\frac{k^2}{a^2}\right) \quad \text{ทุกค่า } k$$

รอยตัดบนระนาบ $y=k$ เป็นพาราโบลา

$$x^2=a^2\left(cz-\frac{k^2}{b^2}\right) \quad \text{ทุกค่า } k$$

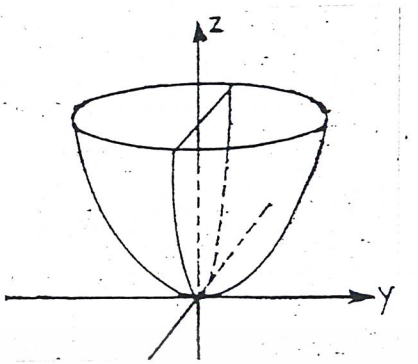
รอยตัดบนระนาบ $z=k$ เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y2}{b^2}=ck \quad \text{ทุกค่า } k>0$$

พิจารณารอยตัดบนระนาบ $z=k$, $k>0$ ซึ่งเป็นวงรี จะเห็นว่า เมื่อ k เพิ่มขึ้นจากศูนย์อย่างไม่มีขีดจำกัด รอยตัดบนระนาบจะเป็นวงรีที่มีขนาดใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัดเช่นกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากข้อมูลข้างต้นนำมาเขียนกราฟ จะได้กราฟของทรงพาราโบลาเชิงวงรี ดังรูปที่ ข18



รูปที่ ข18 แสดงกราฟของพื้นผิวทรงพาราโบลาเชิงวงรี

หมายเหตุ : จากรูป เราจะเรียกจุดกำเนิดว่าเป็นจุดยอดของพาราโบลอยด์ พาราโบลอยด์ซึ่งมีจุด (h,k,l) เป็นจุดยอดจะมีสมการอย่างง่ายในรูป

$$A(x-h)^2+B(y-k)^2=C(z-l) \qquad \text{เมื่อ } A,B>0 \text{ และ } C\neq 0$$

หรือ $$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=c(z-l) \qquad \text{เมื่อ } a,b>0 \text{ และ } c\neq 0$$

3.6 ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา คือ พื้นผิวซึ่งมีสมการอย่างง่ายเป็นแบบใดแบบหนึ่งในสามแบบต่อไปนี้

3.6.1 $Ax^2-By^2=Cz$ เมื่อ $A,B>0$ และ $C\neq 0$ หรือ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad \text{เมื่อ } a,b>0 \text{ และ } c\neq 0$$

3.6.2 $Ax^2-Cz^2=By$ เมื่อ $A,C>0$ และ $B\neq 0$ หรือ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=by \qquad \text{เมื่อ } a,c>0 \text{ และ } b\neq 0$$

3.6.3 $By^2-Cz^2=Ax$ เมื่อ $B,C>0$ และ $A\neq 0$ หรือ

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=ax \qquad \text{เมื่อ } b,c>0 \text{ และ } a\neq 0$$

เราจะพิจารณาเขียนกราฟของพื้นผิวซึ่งมีสมการแบบที่ 3.6.1

- **พิจารณาจุดตัดแกน**

จุดตัดแกน X คือ จุด $(0,0,0)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดตัดแกน Y คือ จุด (0,0,0)

จุดตัดแกน Z คือ จุด (0,0,0)

- **พิจารณาสมมาตร**

กราฟมีสมมาตรกับแกน Z

กราฟมีสมมาตรกับระนาบ YZ ระนาบ XZ

- **พิจารณาขอบเขต**

ขอบเขตของ X คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Y คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ Z คือ $(-\infty,+\infty)$

- **พิจารณารอยตัด**

รอยตัดบนระนาบ XY เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุดกำเนิดมีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ หรือ } y=\pm\frac{b}{z}a \ , \ z=0$$

รอยตัดบนระนาบ YZ เป็นพาราโบลา $y^2=-cb^2z \ , \ x=0$

รอยตัดบนระนาบ XZ เป็นพาราโบลา $x^2=ca^2z \ , \ y=0$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ XY เป็นไฮเพอร์โบลา

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=ck \ , \ z=k \text{ ทุกค่า } k$$

เนื่องจาก $c<0$ ฉะนั้นไฮเพอร์โบลาจะมีแกน Y เป็นแกนผ่า เมื่อ $k>0$ และมีแกน X เป็นแกนผ่าเมื่อ $k<0$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ YZ เป็นพาราโบลา

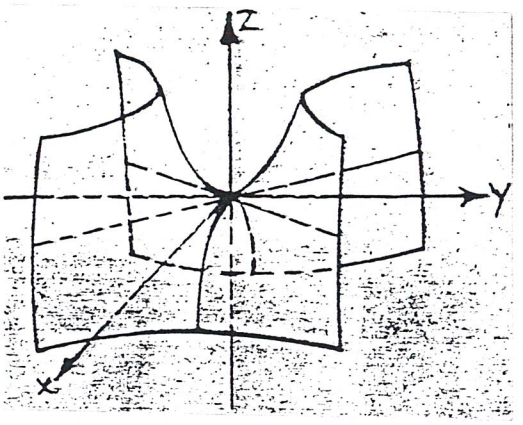
$$y^2=-cb^2\left(z-\frac{k^2}{a^2c}\right) \ , \ y=k \text{ ทุกค่า } k$$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ XZ เป็นพาราโบลา

$$x^2=ca^2\left(z+\frac{k^2}{b^2c}\right) \ , \ x=k \text{ ทุกค่า } k$$

โดยการพิจารณารอยตัดบนระนาบต่าง ๆ ดังกล่าวแล้ว จะเขียนกราฟของทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลาได้ดังรูปที่ ข19 ซึ่งมีลักษณะคล้ายอานม้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ข19 แสดงกราฟของพื้นผิวทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

สำหรับพื้นผิวรูปอานม้าซึ่งมีจุด (h,k,l) เป็นจุดอานม้าจะมีสมการอย่างง่าย คือ

$A(x-h)^2 - B(y-k)^2 = K(z-l)$ เมื่อ $A,B,K>0$

ข้อสังเกต : ทั้งรูปพาราโบลอยด์และรูปอานม้าที่กล่าวมาข้างต้นจะมีสมการทั่วไปเขียนได้ในรูป

$Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$ เมื่อ $A,B,K \neq 0$

ซึ่งเป็นสมการทั่วไปกำลังสองของพื้นผิวที่ไม่มีจุดศูนย์กลาง

ตัวอย่างที่ 11 จงบอกชื่อและเขียนกราฟอย่างคร่าว ๆ ของสมการต่อไปนี้

ก. $x^2 - 4y^2 + 3z^2 = 12$

ข. $x^2 + 5y^2 + 2z = 0$

ค. $36(x-3)^2 - 16(y+2)^2 - 9(z-3)^2 = 144$

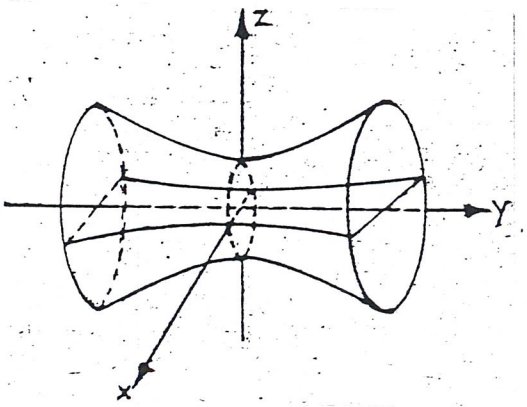
วิธีทำ

ก. จากสมการที่กำหนดให้ $x^2 - 4y^2 + 3z^2 = 12$

เขียนใหม่ได้เป็น $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$

เป็นสมการของไฮเพอร์โบลอยด์ชนิดชิ้นเดียว ดังรูปที่ ข20

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้.

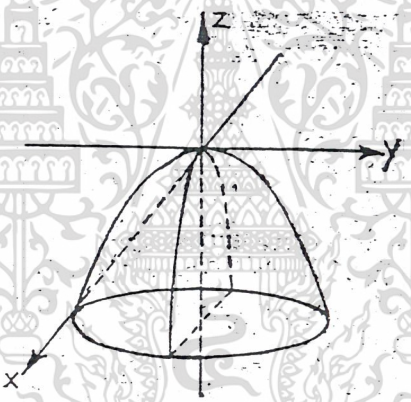


รูปที่ ข20 แสดงกราฟไฮเพอร์โบลอยด์ชนิดชิ้นเดียว ซึ่งได้จากสมการ $x^2 - 4y^2 + 3z^2 = 12$

ข. จากสมการที่กำหนดให้ $x^2 + 5y^2 + 2z = 0$

เขียนใหม่ได้เป็น $x^2 + 5y^2 = -2z$

เป็นสมการของพื้นผิว "ทรงพาราโบลาเชิงวงรี" ดังรูปที่ ข21



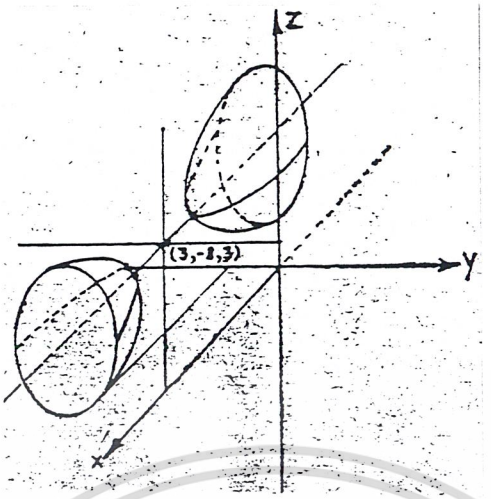
รูปที่ ข21 แสดงกราฟทรงพาราโบลาเชิงวงรี ซึ่งได้จากสมการ $x^2 + 5y^2 + 2z = 0$

ค. จากสมการที่กำหนดให้ $36(x-3)^2 - 16(y+2)^2 - 9(z-3)^2 = 144$

เขียนใหม่ได้เป็น $\dfrac{(x-3)^2}{2^2} - \dfrac{(y+2)^2}{3^2} - \dfrac{(z-3)^2}{16} = 1$

เป็นสมการของพื้นผิว "ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น" มีจุดศูนย์กลางที่จุด (3,-2,3) ดังรูปที่ ข22

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ข22 แสดงกราฟทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น ซึ่งได้จากสมการ

$$36(x-3)^2-16(y+2)^2-9(z-3)^2=144$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

โฆสิต ชาติกำแหง, รองศาสตราจารย์. มหาวิทยาลัยรามคำแหง, คณะวิทยาศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์. (2536). ***เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส 3*** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

จิตเกษม พัฒนาศิริ. (2539). ***เริ่มสร้างโฮมเพจด้วย HTML***. กรุงเทพฯ : บริษัท วิตตี้ กรุ๊ป จำกัด.

ทักษิณา สวนานนท์, รองศาสตราจารย์. (2539). ***คอมพิวเตอร์เพื่อการศึกษา.*** กรุงเทพฯ : องค์การค้าครุสภา.

ต้น ตัณฑ์สุทธิวงศ์. (2539). ***รอบรู้ Internet และ World Wide Web.*** กรุงเทพฯ : โปรวิชั่น.

ปิยวิท เจนกิจจาไพบูลย์. (2540). ***เรียนรู้การสร้างโฮมเพจด้วย HTML.*** กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.

พรทิพย์ โล่ห์เลขา. (2539). ***การใช้ INTERNET ระบบ UNIX & WINDOWS.*** กรุงเทพฯ : อุษาการพิมพ์.

ยุทธนา สวนสุข. (มิถุนายน 2541). แทคติก...Cascade Style Sheet. ***วารสาร INTERNET TOD@Y.*** 127 – 130.

สัณฑวุฒิ ตุลารักษ์. (สิงหาคม 2541). Cascading Style Sheet. ***วารสาร Internet Magazine.*** (26), 76 – 80.

สุรศักดิ์ สงวนพงษ์. (2538). ***คู่มืออินเทอร์เน็ต.*** กรุงเทพฯ : ซีเอ็ด ยูเคชั่น.

สุรัตน์ เลิศล้ำ, ร.อ.. ***เรียนการเขียนโปรแกรมด้านกราฟฟิคด้วยเทอร์โบปาสคาล เวอร์ชัน 6.0.*** กรุงเทพฯ : บริษัท พี.โอ.เอ็น.วาย. จำกัด.

สุลักษณ์ สุ่มมาตย์. (มกราคม-กุมภาพันธ์ 2540). Perl "อัปลักษณ์แต่มีประโยชน์". ***วารสารอินเทอร์เน็ต-อินทราเน็ต.*** *1*(4), 93 – 96.

สุลักษณ์ สุ่มมาตย์. (ตุลาคม-พฤศจิกายน 2540). JavaScript ตอนที่ 5 เรื่องของฟังก์ชัน. ***วารสารอินเทอร์เน็ต-อินทราเน็ต.*** *2*(8), 73 – 80.

หน่วยพัฒนาคณาจารย์. ***การผลิตและการใช้มัลติมีเดียเพื่อการศึกษา.*** กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์.

อรรคชัย กัมลาศพิทักษ์. (ตุลาคม 2541). JavaScript VS Perl. ***วารสาร ไมโครคอมพิวเตอร์.*** (159), 176 – 180.

อรุณี เจริญราช. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, คณะวิทยาศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์. (2538). ***แคลคูลัสเล่มที่ 3*** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด พิทักษ์การพิมพ์.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น และไม่อนุญาตให้ดัดแปลงเนื้อหา รวมทั้งต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Kevin Ready. (1996). *Java Script.* Indiana : New Riders Publishing.

Ratrick Naughton. *The Java Handbook.* Founder of the Java team of Sun Microsystems.

Thomas Finney. *Calculus* (9th Ed.). Addison – Wesley.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้