โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์

นางสาวศศิธร	สินธัญญาธรรม	38054158
นางสาวสรญา	เทียนธวัชกุล	38054159
นางสาวสุรัชนี	ศุภอรรถสิทธ์	38054169

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2541

Computer Aid Instruction For Vector Field

Miss Sasitorn	Sintunyathum	38054158
Miss Soraya	Theanthawatkul	38054159
Miss Suratchanee	Suppha-atthasitt	38054169

A Special Project Submitted in Partial Fulfillment of
the Requirement for the Degree of Bachelor of Science

Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn
Ladkrabang

1998

ปัญหาพิเศษเรื่อง	โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวศศิธร	สินธัญญาธรรม	38054158
	นางสาวสรญา	เทียนธวัชกุล	38054159
	นางสาวสุรัชนี	ศุภอรรถสิทธิ์	38054169
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์		
	อาจารย์กฤษฎา บุศรา		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์		

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ปีการศึกษา 2541

(รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล)
หัวหน้าภาค

คณะกรรมการโครงงานพิเศษ

(อาจารย์กาญจนา คำนึงกิจ)
ประธานกรรมการ

(อาจารย์พรชัย เจนจิระพงศ์เวช)
กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์กฤษฎา บุศรา)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

หัวข้อปัญหาพิเศษ โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์

นักศึกษา นางสาวศศิธร สินธัญญาธรรม รหัส 38054158
นางสาวสรญา เทียนธวัชกุล รหัส 38054159
นางสาวสุรัชนี ศุภอรรถสิทธิ์ รหัส 38054169

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์
อาจารย์กฤษฎา บุศรา

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2541

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ เป็นการนำเสนอ “โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์” ซึ่งนำเทคนิคการเขียนโปรแกรมการใช้งานทางด้านกราฟฟิก การใช้คอมพิวเตอร์เป็นสื่อในการช่วยสอนบนระบบปฏิบัติการวินโดว์ การพัฒนาต้นแบบโปรแกรม “โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์” แบ่งเป็นสามขั้นตอน คือ

1. ศึกษาและทำความเข้าใจกับเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์
2. ทำการศึกษาซอฟท์แวร์ภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรม
3. ออกแบบระบบและทำการเขียนโปรแกรม

ผลจากปัญหาพิเศษ จะได้ภาพสามมิติของเวกเตอร์ที่เห็นได้จริงตามนิยาม และทำการศึกษาเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์ผ่านทางคอมพิวเตอร์ที่สามารถใช้งานได้ง่าย

Special Topics	Computer Aid Instructions for Vector Field		
Student	Sasitorn	Sintunyathum	38054158
	Soraya	Tientavatkun	38054159
	Suratchanee	Suppha-atthasitt	38054169
Advisor	Assoc. Prof Pongpan Rattanathanawan		
	Mr. Kridsada Budsara		
Department	Mathematics and Computer Science		
Year	1998		

Abstract

The special problem is present " Computer Aid Instruction For Vector Field " by adapt a technique of writing graphics program , include how to use computer in term of media to help in technique on windows operating system . In the development prototype " Computer Aid Instruction For Vector Field " it could classified three steps.

1st Study about Topics in vector field.

2nd Study about software and computer language.

3rd To analyse and Design and implement application.

Result of the special project are three dimensional perspective of vector with is consistency with definition and we can study this topic of " Vector Field " through usable computer.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดีก็เพราะหลายเหตุปัจจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

อาจารย์กฤษฎา บุศรา

ที่ได้ให้แนวทางในการดำเนินการ ตลอดจนคำปรึกษาอันก่อให้เกิดแนวความคิดที่สามารถแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในระหว่างการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ นอกจากนี้ยังช่วยแนะนำแนวทางในการดำเนินงานและตรวจทานแก้ไขด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ให้วิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎี และภาคปฏิบัติแก่ผู้จัดทำ จนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณ

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

หน้า

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

หน้า

ลำดับที่	แผนงาน	กรกฎาคม					สิงหาคม				กันยายน					ตุลาคม				พฤศจิกายน					ธันวาคม				มกราคม				กุมภาพันธ์				มีนาคม			
		29	6	13	20	27	3	10	17	24	31	7	14	21	28	5	12	19	26	2	9	16	23	30	7	14	21	28	4	11	18	25	1	8	15	22	1	8	15	22
1	ศึกษาเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเวกเตอร์ฟิลด์ การแปลงเรขาคณิต และการวาดรูป 3 มิติ																																							
2	จัดหาซอฟแวร์ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ การวาดรูป 3 มิติ และ การทำ CAI																																							
3	ศึกษา Authorware4.02 ในการทำ CAI																																							
4	ศึกษาการเขียนโปรแกรมโดยใช้ C++Builder3																																							
5	เขียนโปรแกรมในการอินทิเกรต เพื่อใช้ในส่วนของเวกเตอร์ และ เขียนโปรแกรมเพื่อวาดรูปเวกเตอร์ใน 3 มิติ																																							
6	ทำการทดสอบโปรแกรม และหาข้อผิดพลาด เพื่อดำเนินการแก้ไข																																							
7	แก้ไขข้อผิดพลาด และ กำหนดขอบเขตข้อจำกัดของโปรแกรม																																							
8	จัดทำเอกสารประกอบโปรแกรม																																							

บทที่1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

ในปัจจุบันการศึกษาและพัฒนาวิชาทางคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ฟิลด์ (vector field) สำหรับนักศึกษาในระดับมหาวิทยาลัยนั้น บางครั้งอาจดูเป็นเรื่องที่เข้าใจยาก เนื่องจากทิศทางที่เกิดขึ้นของเวกเตอร์นั้น จะมีบางส่วนเป็นรูปในลักษณะของภาพสามมิติ ซึ่งยากแก่การวาดและจินตนาการ ปัจจุบันนี้พัฒนาการทางด้านคอมพิวเตอร์ได้พัฒนาในระดับที่สามารถเขียนโปรแกรมให้สามารถแสดงภาพในสามมิติได้ และการหมุนภาพตามแกน เช่น การหมุนตามแกน X แกน Y หรือ แกน Z ขณะเดียวกันความเร็วในการเสนอสื่อต่างๆ มีความรวดเร็วมากขึ้น พร้อมทั้งมีการนำวิทยาการคอมพิวเตอร์มาช่วยในการเรียนการสอน ซึ่งทำให้การเรียนการสอนมีความหลากหลายมากขึ้น

" **CAI** (คอมพิวเตอร์ช่วยสอน) " ซึ่งเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่ใช้เป็นเทคนิคในการช่วยสอน ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนได้เห็นภาพจริงตามทฤษฎี ด้วยเหตุผลที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น คณะผู้จัดทำจึงมีแนวความคิดที่จะทำปัญหาพิเศษดังกล่าวโดยได้เลือกทำในส่วนของวิชาคณิตศาสตร์ ในเรื่องการแสดงภาพของเวกเตอร์ และการคำนวณฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในรูปแบบการประยุกต์เบื้องต้น ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจและสามารถจินตนาการเห็นภาพเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติได้ดียิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

- เพื่อพัฒนาระบบการเรียนการสอน ให้นักศึกษาเข้าใจทิศทางของเวกเตอร์
- เพื่อให้นักศึกษาได้ศึกษาได้ด้วยตนเอง จากโปรแกรมช่วยสอน
- เพื่อสามารถนำไปแก้ปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์ และทางด้านวิศวกรรมศาสตร์

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

- สามารถแสดงทิศทางของเวกเตอร์ในระบบสามมิติ
- สามารถคำนวณอินทิกรัลตามเส้น ตามแรงที่กำหนดให้
- สามารถใช้ประกอบการสอน โดยครอบคลุมเนื้อหา เรื่อง พีชคณิตของเวกเตอร์ แคลคูลัสเชิงเวกเตอร์ และ การประยุกต์เบื้องต้นของเวกเตอร์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- ผู้ใช้โปรแกรมนี้สามารถศึกษาเรื่องเวกเตอร์ฟีลด์ได้ด้วยตัวเอง
- เพื่อพัฒนาระบบรากฐานการเขียนโปรแกรมทางด้านกราฟฟิก
- เพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในการใช้งาน และสามารถเข้าใจภาพเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

บทที่2
ความรู้พื้นฐานในการจัดสร้างซอฟท์แวร์

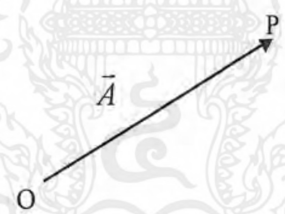
2.1 ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์

2.1.1 พีชคณิตของเวกเตอร์

นิยาม ปริมาณแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantity) คือ ปริมาณที่มีแต่ขนาดไม่มีทิศทาง เช่น มวล ความร้อน อุณหภูมิ เป็นต้น

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น ความเร็ว ความเร่ง แรง เป็นต้น



รูปที่ 2.1.1-1 สัญลักษณ์ของเวกเตอร์

เวกเตอร์จะแทนด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีลูกศรด้วย เช่น $\overrightarrow{OP}$ ซึ่งจะแทนทั้งขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ ความยาวของเส้นตรงจะบอกขนาดของเวกเตอร์ ทิศทางของลูกศรจะบอกทิศทาง (direction) ของเวกเตอร์ จุด O เรียกจุดเริ่มต้น (initial point) หรือ (origin) ของเวกเตอร์ และ จุด P เรียกจุดสิ้นสุด (terminal point) ตัวอักษรที่แทนเวกเตอร์จะมีลูกศรกำกับอยู่บนตัวอักษร เช่น $\vec{A}$ ในรูปข้างบน ส่วนขนาดของเวกเตอร์จะแทนด้วย $|\vec{A}|$

ก) คุณสมบัติของเวกเตอร์

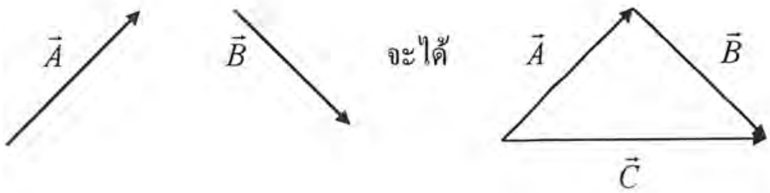
1. เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ $\vec{A}$ หรือ $\vec{B}$ จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางในทางเดียวกัน โดยไม่ต้องคำนึงถึงจุดกำเนิด เช่น

รูปที่ 2.1.1-2 เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ที่เท่ากัน

2. เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{A}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$ จะแทนด้วย $-\vec{A}$

รูปที่ 2.1.1-3 เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน

3. ผลบวกของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือเวกเตอร์ $\vec{C}$ ซึ่งจะได้จาก วางจุดเริ่มต้น $\vec{B}$ ลงบนจุดสิ้นสุดของ $\vec{A}$ แล้วเวกเตอร์ที่เชื่อมจากจุดเริ่มต้นของ $\vec{A}$ กับจุดสิ้นสุดของ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ $\vec{C}$ เขียนว่า $\vec{C} = \vec{A}+\vec{B}$



รูปที่ 2.1.1-4 ผลบวกของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

4. ผลต่างของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะแทนด้วย $\vec{A}$ - $\vec{B}$ คือ $\vec{C}$ ซึ่งเมื่อบวกกับ $\vec{B}$ แล้วจะได้เท่ากับ $\vec{A}$ หรือ $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{C}$ ดังนั้น ถ้า $\vec{A}=\vec{B}$ แล้ว $\vec{A}-\vec{B}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ และมีทิศทางไม่แน่นอน ซึ่งเวกเตอร์เช่นนี้เรียกว่าเวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector หรือ Null Vector)

5. ผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับ สเกลาร์ m จะเป็นเวกเตอร์ $m\vec{A}$ ซึ่งมีขนาดเป็น m เท่า ของขนาดของ $\vec{A}$ และ มีทิศทางไปทางเดียวกับ $\vec{A}$ ถ้า m เป็นบวก จะมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$ ถ้า m เป็นลบ และจะเป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $m = 0$

ข) กฎทางพีชคณิตของเวกเตอร์

ถ้า $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ และ m , n เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ กฎการสลับที่ของการบวก
2. $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ กฎการจัดหมู่ของการบวก
3. $m\vec{A} = \vec{A}m$ กฎการสลับที่ของการคูณ
4. $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$ กฎการจัดหมู่ของการคูณ
5. $(m+n)\vec{A} = m\vec{A}+n\vec{A}$ กฎการกระจาย
6. $(m(\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A}+m\vec{B}$ กฎการกระจาย

กฎเหล่านี้ใช้ได้เฉพาะการคูณเวกเตอร์กับสเกลาร์เท่านั้น การคูณระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์จะกล่าวต่อไป ในกฎเหล่านี้เราสามารถที่จะใช้กฎของพีชคณิตธรรมดากับสมการเวกเตอร์ได้ เช่น $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ เราสามารถเปลี่ยนเป็นสมการ $\vec{A}=\vec{C}-\vec{B}$ ได้

นิยาม เวกเตอร์ร่วมเส้นตรงเดียวกัน (Colinear Vector) คือ เวกเตอร์ที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน หรือ หมายถึง เวกเตอร์ที่ขนานกันนั่นเอง และ เวกเตอร์ไม่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน (Non – colinear Vector) คือ เวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน เมื่อจุดกำเนิดเป็นจุดเดียวกันจะทำให้เกิดระนาบ

เวกเตอร์ในระนาบแทนด้วยเลขคู่ลำดับ

เราอาจนิยามเวกเตอร์ในระนาบแบบพีชคณิตได้ว่า เวกเตอร์เป็นเลขคู่ลำดับของเลขจำนวนจริง ถ้ากำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ฐานในระนาบ เมื่อ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ซึ่ง $\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$ เมื่อ a , b เป็นสเกลาร์

ดังนั้นเราอาจกำหนดเวกเตอร์ทั้งหลายในระนาบนี้ด้วยเลขคู่ลำดับ (a, b) โดยที่เขียนแทนด้วย $\bar{w} \leftrightarrow (a, b)$ เราเรียก a และ b ว่าเป็นส่วนประกอบ (component) ของ $\bar{w}$ เมื่อเทียบกับฐานเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ตามลำดับ แต่ถ้าเราเลือกมูลฐานเวกเตอร์อื่น ส่วนประกอบของ $\bar{w}$ ก็จะเปลี่ยนเป็นค่าใหม่ที่เกิดกับมูลฐานเวกเตอร์ใหม่นั้น ๆ

การแทนเวกเตอร์ทั้งหลายด้วยเลขคู่ลำดับของเลขจำนวนหนึ่งจะมีความหมายและเป็นจริง เมื่อเรากำหนดมูลฐานที่คงที่ (fix a basis)

ถ้าเรากำหนดฐานคงที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ และ

$$\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v} \quad \leftrightarrow \quad (a,b)$$

$$\bar{z} = x\bar{u} + y\bar{v} \quad \leftrightarrow \quad (x,y)$$

แล้วเราจะมีคุณสมบัติสำหรับการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ ดังนี้

$$\bar{w} + \bar{z} = (a + x)\bar{u} + (b + y)\bar{v} \quad \leftrightarrow \quad (a+x, b+y)$$

$$c\bar{w} = c(a\bar{u} + b\bar{v}) = (ca\bar{u} + cb\bar{v}) \quad \leftrightarrow \quad (ca, cb)$$

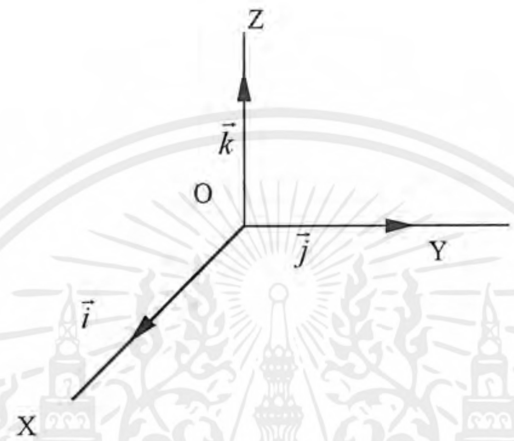
ดังนั้น $(a,b) + (x,y) = (a+x, b+y)$

$$c(a,b) = (ca,cb)$$

นิยาม เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector) คือ เวกเตอร์ใดๆ ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ดังนั้น ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ ที่มีขนาดไม่เป็นศูนย์ หรือ $|\vec{A}| \neq 0$ แล้ว $\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ จะเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

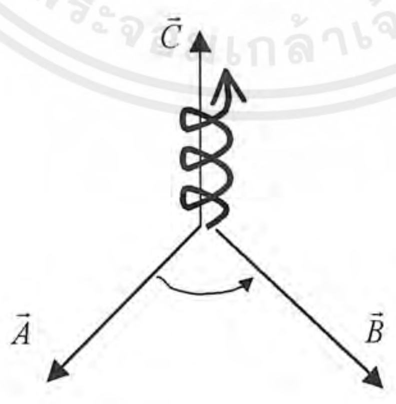
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก

ชุดของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญคือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางไปทาง แกน X แกน Y และ แกน Z ทางบวก ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ตามลำดับ



รูปที่ 2.1.1-5 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่แทนแกน X , Y , Z ทางบวก

นิยาม เวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ จะเรียกว่าอยู่ในระบบมือขวาถ้า 3 เวกเตอร์นั้น ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน และถ้าหมุนสกรูเป็นมุมน้อยกว่า 180° จาก $\vec{A}$ ไป $\vec{B}$ แล้วสกรูเคลื่อนที่ไปทาง $\vec{C}$



รูปที่ 2.1.1-6 เวกเตอร์ในระบบมือขวา

หรือ อาจจะนิยามได้อีกอย่างว่า ถ้ากำมือขวาจาก $\vec{A}$ ไป $\vec{B}$ แล้วนิ้วหัวแม่มือจะชี้ไปทาง $\vec{C}$ ถ้า $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ อยู่ในระบบมือขวาแล้ว $\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}$ และ $\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}$ จะอยู่ในระบบมือขวาด้วย

เงื่อนไขของการเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

เวกเตอร์ 2 จำนวน $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันได้เมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง ถ้า $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$
ถ้าเงื่อนไขดังกล่าวไม่เป็นจริงเราจะพบว่า a และ b จะไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่

ดังนั้นจาก $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$

เราจะได้ $\bar{u} = -\dfrac{b}{a}\bar{v}$ หรือ $\bar{v} = -\dfrac{a}{b}\bar{u}$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่ขึ้นต่อกัน

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันแล้วเราจะได้ว่า
ถ้า $a\bar{u} + b\bar{v} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$ แล้ว $a = \alpha$ และ $b = \beta$
ทั้งนี้เพราะว่า จาก $a\bar{u} + b\bar{v} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$

แล้ว $(a - \alpha)\bar{u} + (b - \beta)\bar{v} = \bar{0}$

เนื่องจาก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ดังนั้น $a - \alpha = 0$ และ $b - \beta = 0$

นั่นคือ $a = \alpha$ และ $b = \beta$

ในที่นี้เราจะเรียก $a\bar{u} + b\bar{v}$ ว่าเป็นผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

ถ้า $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบที่ประกอบด้วย $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เขียนได้ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ กล่าวคือ $\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$ เราเรียก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ว่าเป็นเวกเตอร์ที่สร้างมูลฐานสำหรับเวกเตอร์ทั้งหลาย (Form a basis for vectors) ในระนาบ

ดังนั้นเวกเตอร์คู่ใด ๆ ในระนาบที่เป็นเวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน จะไม่สร้างมูลฐานสำหรับเวกเตอร์ในระนาบ

ส่วนเวกเตอร์คู่ใด ๆ ในระนาบที่เป็นเวกเตอร์ที่ขึ้นต่อกัน จะไม่สร้างมูลฐานสำหรับเวกเตอร์เลย

ทฤษฎีมูลฐาน (Basis Theorem)

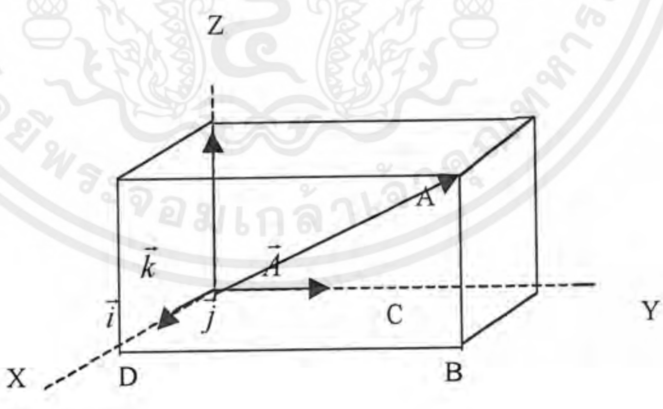
ถ้าเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันในระนาบแล้ว เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะสร้างมูลฐานสำหรับเวกเตอร์ทั้งหลายในระนาบ

เวกเตอร์มูลฐาน (Basis Vector)

ถ้าทุกๆเวกเตอร์สามารถจะแทนได้ด้วยผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ในระบบระนาบเดียวกันได้วิธีเดียว แล้วเวกเตอร์ชุด S เรียก มูลฐาน (Basis) ของทุกๆ เวกเตอร์ในระบบนั้น และแต่ละเวกเตอร์ในชุด S เรียก เวกเตอร์มูลฐาน (Basis Vector)

มูลฐาน $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

เวกเตอร์มูลฐานที่นิยมใช้มากที่สุดใน 3 มิติ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ถ้าให้จุด $A(a_x, a_y, a_z)$ เป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก ให้จุด $B(a_x, a_y, 0)$ เป็นภาพฉาย (projection) ของจุด A บนระนาบ XY จากจุด B แล้ว ลาก BC และ BD ให้ขนานกับแกน X และแกน Y ตามลำดับ จะได้ว่า



รูปที่ 2.1.1-7 เวกเตอร์มูลฐาน i , j , k

OD = a_x , BD = a_Y, AB = a_z และ $\vec{OD}$ = $a_x\vec{i}$
$\vec{DB} = \vec{OC} = a_y\vec{j}$ และ $\vec{BA} = a_z\vec{k}$ และจะเห็นว่า

$$\vec{A} = \vec{OD} + \vec{DB} + \vec{BA}$$
$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

แล้วเวกเตอร์ $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$ เรียก เวกเตอร์ส่วนประกอบ (Component Vector) เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ a_x, a_y, a_z เรียก ส่วนประกอบ (Component) ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และจากรูปที่ 2.1.1-7 จะพบว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A} = \left|\vec{A}\right| = OA$ จากสามเหลี่ยมมุมฉาก OAB มีมุม OBA เป็นมุมฉาก

$$\therefore \quad OA = \sqrt{OB^2 + BA^2}$$

และจากสามเหลี่ยมมุมฉาก ODB มีมุม OBD เป็นมุมฉาก

$$\therefore \quad OA = \sqrt{OD^2 + DB^2}$$

ดังนั้น $\left|\vec{A}\right| = OA = \sqrt{OD^2 + DB^2 + BA^2} = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$
จะเห็นว่า ขนาดของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก จะหาได้จากพิกัด (coordinates) ของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์นั้น หรือจากองค์ประกอบของเวกเตอร์นั้น

เวกเตอร์บอกตำแหน่งหรือเวกเตอร์รัศมี **(Position Vector or Radius Vector)**

เรียกเวกเตอร์ OP ที่จุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และมีจุดสิ้นสุดที่จุด P ว่าเวกเตอร์บอกตำแหน่งหรือ เวกเตอร์รัศมีขอจุด P

Vector field

ถ้าแต่ละจุด (x, y, z) ของขอบเขต R ในปริภูมิสมนัยกับเวกเตอร์ $\vec{V}(x, y, z)$ แล้ว $\vec{V}(x, y, z)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเวกเตอร์ของตำแหน่ง (Vector function of position) และกล่าวว่า Vector field กำหนดได้ในอาณาบริเวณ R (Vector $\vec{V}$ defined in R)

ค่าคงที่ของ Vecter field ก็คือ เวกเตอร์ที่มีส่วนประกอบเป็นตัวคงที่ทั้งหมด เช่น $8i - j + 2k$ หรือ $i + 3j$ และฟังก์ชันใน Vector field คือ เวกเตอร์ที่มีส่วนประกอบเป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x^2\vec{i} - zy\vec{j} + y^{2\vec{k}}$, $e^x\vec{i} - \cos y\vec{j} + 2\vec{k}$ และ ถึงแม้ว่าจะมีบางส่วนประกอบจะเป็นค่าคงที่บ้าง แต่ถ้ายังมีตัวแปรเป็นส่วนประกอบแล้ว เวกเตอร์นั้นก็จะเป็นเวกเตอร์ฟังก์ชัน เช่น $\vec{v} = 3\vec{i} - y\vec{j} + x^2\vec{k}$

การคูณระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์

การคูณระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์ได้ผล 2 แบบ คือ ผลคูณสเกลาร์และผลคูณเวกเตอร์ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดดังนี้

ค) ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ (Scalar or dot or inner product)

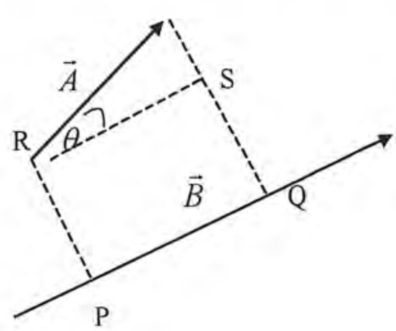
นิยาม ผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{A}\cdot\vec{B}$ (อ่านว่า เวกเตอร์ $\vec{A}$ dot เวกเตอร์ $\vec{B}$) กำหนดว่าจะเท่ากับ ผลคูณระหว่างขนาดของ $\vec{A}$ ขนาดของ $\vec{B}$ กับ โคซายน์ของมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ เวกเตอร์ $\vec{B}$ ถ้า ทำให้ θ แทนมุมระหว่างทั้งสอง จะเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta \ ; \ 0 \le \theta \le \pi$$

ดังนั้นจะเห็นว่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่าง 2 เวกเตอร์ใดๆ จะมีค่าเป็นสเกลาร์ไม่ใช่เวกเตอร์

คุณสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ผลคูณเชิงสเกลาร์มีคุณสมบัติการสลับที่ $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
2. ภาพฉายของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ จะมีค่าเท่ากับผลคูณสเกลาร์ของ $\vec{A}$ กับเวกเตอรหนึ่งหน่วยมีทิศทางเดียวทางเดียวกับ $\vec{B}$



รูปที่ 2.1.1-8 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใด ๆ

ตามรูป ถ้า θ คือมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ภาพฉายของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ จะเท่ากับระยะ PQ

$$
\begin{aligned}
&= \text{RS} \\
&= \left|\vec{A}\right|\cos\theta \\
&= \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\theta \\
&= \vec{A}\cdot\vec{B}
\end{aligned}
$$

เมื่อ $\vec{b}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{B}$

3. ถ้า m เป็นปริมาณสเกลาร์

$$m\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = m\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot m\vec{B}$$

4. ผลคูณเชิงสเกลาร์จะเป็นไปตามกฎการกระจาย

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

5. $\vec{i}\cdot\vec{i} = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{i}\right|\cos 0^\circ = 1$ ในทำนองเดียวกัน $\vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

แต่ $\vec{i}\cdot\vec{j} = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{j}\right|\cos 90^\circ = 0$ ในทำนองเดียวกัน $\vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

6. กำหนดองค์ประกอบของเวกเตอร์ให้ จะหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ได้โดยไม่ต้องทราบมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

7. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ $\vec{A}\cdot\vec{0} = 0$ แต่ถ้า $\vec{A}$, $\vec{B}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์นั้นคือ $\vec{A}\cdot\vec{B}$ มีหมายความว่า

$$\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\theta = 0 \text{ โดยที่ } \left|\vec{A}\right| \neq 0,\ \left|\vec{B}\right| \neq 0$$

ดังนั้นที่เป็นไปได้คือ $\cos\theta = 0$ หรือ $\theta = 90^\circ$ นั่นคือ ถ้าผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ มีค่าเป็นศูนย์แสดงว่าเวกเตอร์ทั้งสองจะตั้งฉากกัน

มุมแสดงทิศทางและโคซายน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์

(Direction angle and Direction cosine)

นิยาม มุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และแกน X แกน Y แกน Z ทางบวก ซึ่งแทนด้วยมุม α, β, γ ตามลำดับ และโคซายน์ (cosine) ของมุมเหล่านี้ คือ $\cos\theta, \cos\beta, \cos\gamma$ เรียกว่า โคซายน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ (Direction cosine)

ง) ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector or Cross Product)

นิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{A}\times\vec{B}$ จะเป็นเวกเตอร์ซึ่งจะเรียก $\vec{C}$ และ $\vec{C}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับผลคูณของขนาด $\vec{A}$ ขนาด $\vec{B}$ และ ซายน์ (sine) ของมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$, $\vec{C}$ จะมีทิศทางตั้งฉากกับทั้ง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ที่จะทำให้ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นระบบมือขวา หรือ จะเขียนเป็นสมการ ได้ว่า

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\,\vec{u} \qquad ,\theta \text{ คือมุมระหว่าง } \vec{A} \text{ และ } \vec{B} \qquad 0\le\theta\le\pi$$

$\vec{u}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ที่ทำให้ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{u}$ เป็นระบบมือขวา จะเห็นว่า ถ้า $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ แล้ว $\vec{A}\times\vec{B} = 0$

คุณสมบัติของผลคูณเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

1. $\vec{A}\times\vec{B}$ และ $\vec{B}\times\vec{A}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้นกฎการสลับที่จะใช้ไม่ได้ในผลคูณเชิงเวกเตอร์

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

2. ถ้า m เป็นสเกลาร์แล้ว

$$m(\vec{A}\times\vec{B}) = m\vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\times m\vec{B}$$

3. กฎการกระจายจะใช้ได้กับผลคูณเชิงเวกเตอร์

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

4. ผลคูณของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

โดยที่ $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

5. ถ้าทราบองค์ประกอบของ 2 เวกเตอร์ จะสามารถหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ 2 เวกเตอร์ ได้ $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ และ $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ จะสามารถเขียน $\vec{A} \times \vec{B}$ เพื่อให้เข้าใจและจำได้ง่ายจะได้ว่า

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

6. ขนาดของผลคูณเชิงเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ จะมีค่าเท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็นเวกเตอร์ทั้งสอง

7. ถ้า $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ โดยที่ ทั้ง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ หมายความว่า

$$\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta = 0 \quad \text{โดยที่} \left|\vec{A}\right| \neq 0, \left|\vec{B}\right| \neq 0$$

เป็นไปได้คือ $\sin\theta = 0$ หรือ $\theta = 0, \pi$ ซึ่งหมายความว่า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ขนานกันในทางกลับกัน 2 เวกเตอร์ใดๆ ที่ขนานกัน เช่น $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$ แล้ว

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\vec{u} = \vec{0}$$

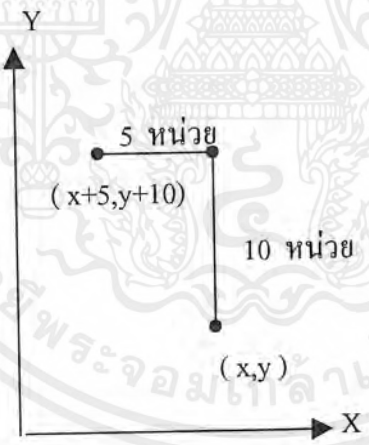
2.2 การแปลงเรขาคณิต

2.2.1 การแปลงเรขาคณิตใน 2 มิติ

การแปลงเรขาคณิต (Geometric transformation) หมายถึง ภาพที่วาดขึ้นมานั้น สามารถนำมาเปลี่ยนแปลง แก้ไขตำแหน่งหรือขนาดของมันได้ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงที่จะกล่าวนี้ ได้แก่ การย้ายภาพ (translation) การหมุนภาพ (rotation) การย่อขยายภาพ (scaling) และ การบิดภาพ (shearing)

ก) การย้ายภาพ (translation)

จุดใดๆก็ตามในระบบพิกัดโลกจะถูกเคลื่อนย้ายไปที่ตำแหน่งอื่นๆ ได้โดยการเปลี่ยนค่าพิกัด (x ,y) ของมัน เช่น ในรูปที่ 2.2.1-1 ถ้าเราต้องการย้ายจุด(x , y) ไปยังจุดที่อยู่ข้างบน 10 หน่วย และไปทางซ้ายอีก 5 หน่วยพิกัดของจุดใหม่ที่ได้ คือ (x – 5 , y + 10) ซึ่งก็คือการย้ายจุด (x , y) นั่นเอง



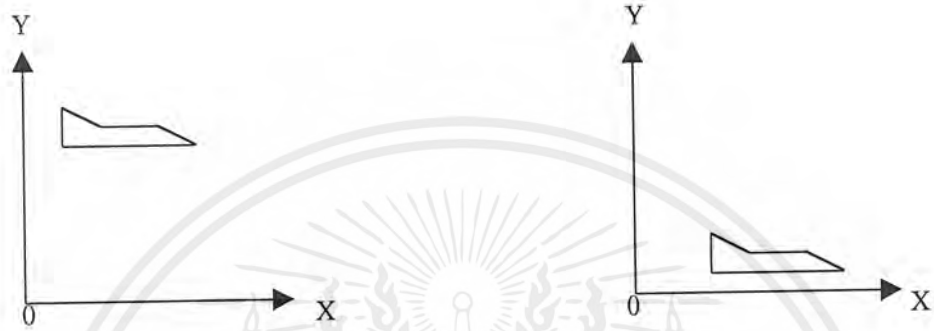
รูปที่ 2.2.1-1 การย้ายจุด (x,y)

โดยทั่วไปการย้ายจุดจากจุด (x,y) ไปยังจุด (x', y') โดยย้ายในแนวนอน H หน่วย และย้ายในแนวตั้ง V หน่วย สามารถเขียนแทนด้วยสูตรคณิตศาสตร์ดังนี้

$$x' = x + H$$

$$y' = y + H$$

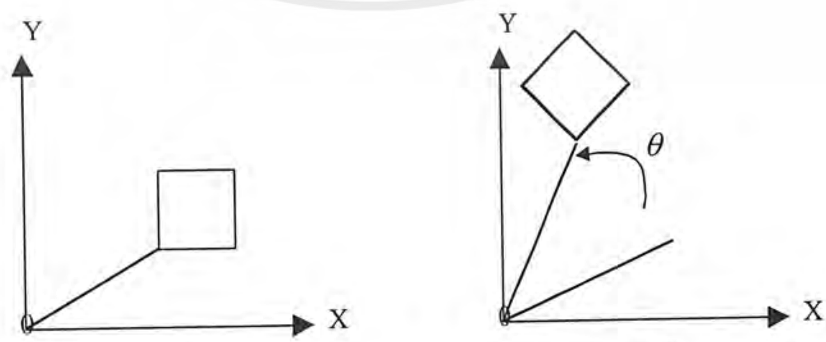
ในทางปฏิบัติจริงๆนั้นเราต้องย้ายทุกๆ จุดที่ใช้สำหรับนิยามภาพ จึงจะสามารถย้ายภาพทั้งหมดไปยังจุดที่ต้องการได้ รูปที่ 2.2.1-2 แสดงการย้ายภาพเครื่องบินจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง ทุกจุดที่ใช้สำหรับนิยามภาพจะถูกย้ายไปยังตำแหน่งที่ต้องการก่อนแล้วจึงทำการวาดภาพนั้นใหม่ที่ตำแหน่งนั้น



รูปที่ 2.2.1-2 การย้ายภาพ

ข) การหมุนภาพ (rotation)

การหมุนภาพเป็นการเปลี่ยนแปลงอีกแบบหนึ่ง สำหรับการหมุนภาพต้องกำหนดว่าจุดใดเป็นจุดหมุนเสมอ รูปที่ 2.2.1-3 แสดงการหมุนภาพสี่เหลี่ยมรอบจุดหมุน(pivot point) ซึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด หรือจุด (0,0) นั่นเอง หลังจาดภาพถูกหมุนไปแล้ว ระยะห่างระหว่างจุดหมุนกับภาพยังคงมีค่าเท่าเดิม แต่ภาพจะมีการจัดวางที่แตกต่างไปจากอันเดิมเนื่องจากการหมุนนั่นเอง การหมุนภาพนี้อาจจะหมุนทีละหลายๆภาพก็ได้ จะหมุนแบบทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้ และจุดหมุนที่ใช้จะอยู่ภายในภาพหรือภายนอกภาพก็ได้



จุดหมุน ก่อน จุดหมุน หลัง

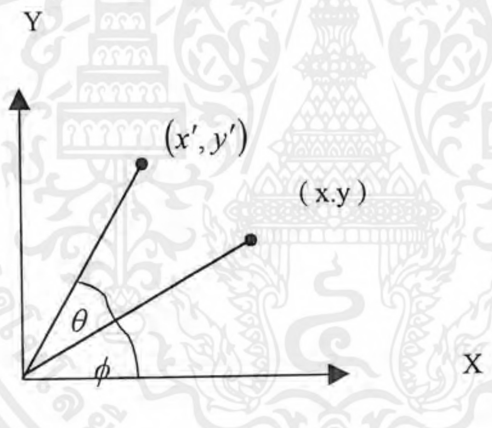
รูปที่ 2.2.1-3 การหมุนภาพรอบจุดหมุน

การอ้างถึงจุดพิกัด (x , y)นั้น นอกจากจะใช้ระบบพิกัดฉากแล้ว (คือการกำหนดตำแหน่งจุดโดยการบอกระยะทางในแนวนอนและในแนวดิ่ง) เราอาจจะใช้ระบบพิกัดโพลาร์ก็ได้ (ระบบพิกัดโพลาร์คือการบอกตำแหน่งจุดโดยใช้เวกเตอร์) ทั้งสองระบบมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$

ถ้า (x.y) ถูกหมุนไปจากจุดเดิมเป็นมุม θ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจะได้จุดหมุนใหม่คือ (x', y') ดังรูปที่ 2.2.1-4 เราจะได้ว่า

$$x' = r\cos(\phi + \theta)$$
$$y' = r\sin(\phi + \theta)$$



รูปที่ 2.2.1-4 การหมุนภาพโดยที่จุดหมุนอยู่ที่จุดกำเนิด

ซึ่งอาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

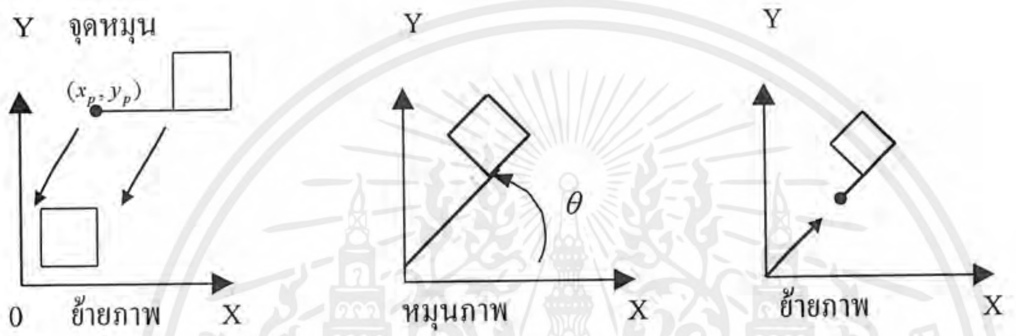
$$x' = r\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)$$
$$y' = r\sin(\phi)\cos(\theta) + r\sin(\theta)\cos(\theta)$$

และแทนค่า $r\cos\phi$ ด้วย x, $r\sin\phi$ ด้วย y จะได้

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$$
$$y' = y\cos(\theta) + x\sin(\theta)$$

สมการข้างต้นคือสมการที่ใช้แปลงค่าพิกัด จากจุด (x,y) ไปเป็นจุดใหม่ (x', y') โดยการหมุนจุดกำเนิดไปเป็นมุม θ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา การหมุนภาพทำได้โดยการแปลงค่าพิกัดทุกจุดที่ใช้นิยามภาพนั้นไปเป็นพิกัดใหม่โดยใช้สมการข้างต้นแล้วค่อยวาดภาพเดิมที่จุดพิกัดใหม่

ในทางปฏิบัติเราอาจจะต้องหมุนภาพรอบจุดใดๆ ก็ได้ซึ่งไม่ใช้จุดกำเนิดสำหรับกรณีนี้จะต้องใช้ 3 ขั้นตอน ดังนี้ (รูปที่ 2.2.1-5)



รูปที่ 2.2.1-5 การหมุนภาพรอบจุดหมุนใดๆ

1. ย้ายจุดหมุน (x_p, y_p) ไปยังจุดกำเนิด (0 , 0) เมื่อย้ายทุกๆจุด (x , y) ที่ใช้นิยามภาพก็จะถูกย้ายไปยังจุดใหม่ (x', y') โดยที่

$$x' = x - x_p$$
$$y' = y - y_p$$

ในตอนนี้จุดหมุนจะย้ายไปยังจุดกำเนิด (0 , 0)

2. จัดการหมุนภาพรอบจุดกไเนิด นั่นคือจุด (x', y') ถูกย้ายไปเป็นมุม θ ได้จุดใหม่เป็น (x'', y'') โดยที่

$$x'' = x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta)$$
$$y'' = y'\cos(\theta) + x'\sin(\theta)$$

แทนค่า (x', y') จะได้

$$x'' = (x - x_p)\cos(\theta) - (y - y_p)\sin(\theta)$$
$$y'' = (y - y_p)\cos(\theta) + (x - x_p)\sin(\theta)$$

3. ย้ายจุดหมุนจากจุดกำเนิด $(0,0)$ กลับไปยังจุดเดิม (x_p, y_p) ดังนั้นจุด (x'', y'') ก็จะถูกย้ายไปยังจุด (x^*, y^*) โดยที่

$$x^* = x'' - x_p$$
$$y^* = y'' - y_p$$

แทนค่า x'' และ y'' จะได้ว่า

$$x'' = (x - x_p)\cos(\theta) - (y - y_p)\sin(\theta) + x_p$$
$$y'' = (y - y_p)\cos(\theta) + (x - x_p)\sin(\theta) + y_p$$

สมการนี้คือสมการสำหรับหาค่าพิกัดใหม่ เมื่อหมุนภาพไปเป็นมุม θ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา โดยหมุนรอบจุดหมุน (x_p, y_p) นั่นเอง

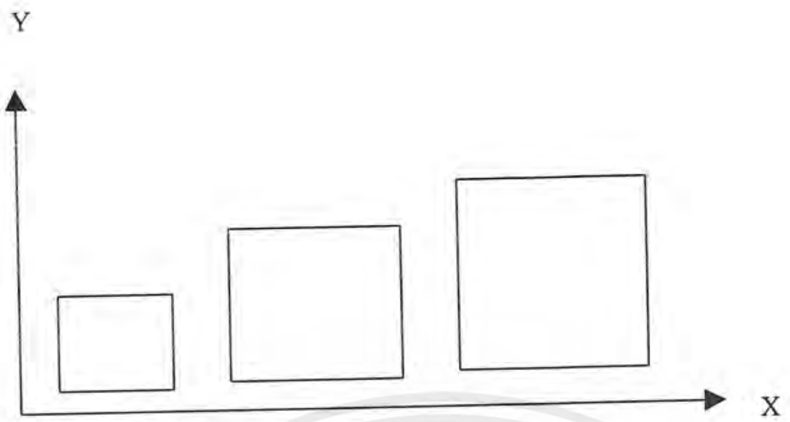
เรามักจะนิยามการหมุนภาพรอบจุดโดยหมุนทวนเข็มนาฬิกาเสมอ เนื่องจากว่าในทางคณิศาสตร์จะกำหนดว่า ทิศทางการหมุนที่เป็นบวกจะเป็นทิศทวนเข็มนาฬิกา ถ้าเราต้องการจะหมุนตามเข็มนาฬิกาก็สามารถทำได้โดยการใช้ค่า $(-\theta)$ แทน θ ในสมการ ผลที่ได้จะเหมือนกัน

ค) การย่อขยายภาพ (scaling)

เราสามารถเปลี่ยนขนาดของภาพได้ โดยเปลี่ยนขนาดของหน้าต่างแสดงภาพหรือเปลี่ยนขนาดของช่องภาพ เทคนิคนี้ไม่สามารถใช้ได้ในบางกรณี เช่น ถ้าเราต้องการเปลี่ยนขนาดของภาพภาพหนึ่งในหน้าต่างเท่านั้น ถ้าเราขยายหรือย่อขนาดของหน้าต่าง ภาพทั้งหมดในหน้าต่างก็จะขยายหรือย่อไปด้วย

ภาพวัตถุภาพหนึ่ง สามารถเปลี่ยนขนาดได้ โดยการเปลี่ยนระยะห่างระหว่างจุด ดังรูปที่ 2.2.1-6 โดยทั่วไปเราสามารถเปลี่ยนขนาดของวัตถุได้โดยการคูณระยะห่างระหว่างจุดด้วยค่าซึ่งทำให้ระยะห่างมากขึ้น หรือทำให้ระยะห่างลดลง ค่านี้เราเรียกว่า สเกลลิงแฟกเตอร์ (scaling factor) ถ้าค่าสเกลลิงแฟกเตอร์มากกว่าหนึ่งก็ได้ภาพที่ขยาย ถ้าค่านี้น้อยกว่าหนึ่งก็ได้ภาพย่อ ถ้าเท่ากับหนึ่งก็จะไม่มีผลต่อวัตถุ

เมื่อใดก็ตามที่มีการย่อหรือขยายภาพ จะต้องมีจุด ๆ หนึ่งซึ่งเรียกว่า เป็นจุดประจำที่ (fixed point) ของการย่อขยายภาพซึ่งใช้สำหรับเป็นจุดอ้างอิง



รูปที่ 2.2.1-6 การย่อขยายภาพ

ถ้าให้จุดกำเนิด (0 , 0) เป็นจุดประจำที่จุด (x , y)ใดๆของภาพ ก็จะสามารถย่อ หรือ ขยายได้ โดยการคูณด้วยแฟกเตอร์ Sx สำหรับทิศทางในแกน x และ แฟกเตอร์ Sy สำหรับทิศทางในแกน y ก็จะได้จุดใหม่ (x',y') ดังนี้

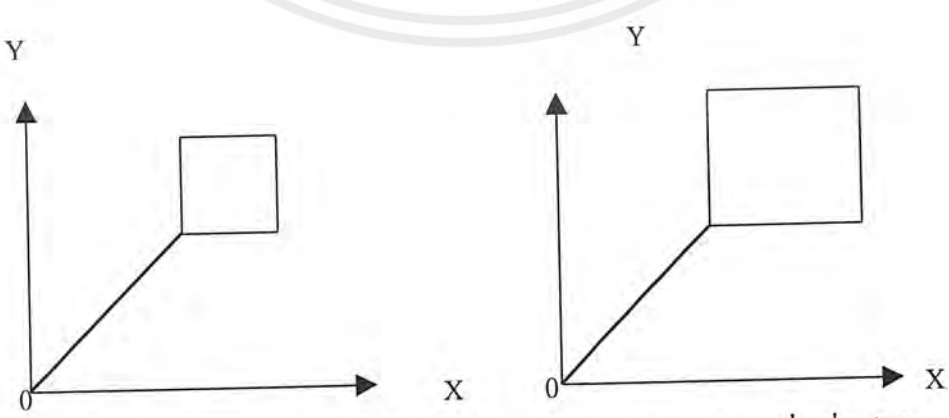
$$x' = x * Sx$$

$$y' = y * Sy$$

Sx คือสเกลลิงแฟกเตอร์ในแนวนอน

Sy คือสเกลลิงแฟกเตอร์ในแนวตั้ง

ถ้า Sx ไม่เท่ากัน Sy ผลก็คือภาพที่ได้จากการย่อหรือขยายจะเกิดการผิดเพี้ยนไปจากภาพเดิม ถ้าสเกลลิงแฟกเตอร์มากกว่า 1 ภาพที่ถูกขยายแล้วจะเคลื่อนย้ายออกจากจุดประจำที่มากขึ้น ซึ่งแสดงในรูป 2.2.1-7



รูปที่ 2.2.1-7 การย่อขยายภาพทำให้ระยะห่างระหว่างภาพกับจุดประจำที่เปลี่ยนไป

จุดประจำที่สำหนับย่อขยายภาพอาจไม่ใช่จุดกำเนิดก็ได้ ถ้าเป็นจุดใด ๆ เราต้องใช้ 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. ย้ายจุดประจำที่ (x_p, y_p) ไปยังจุดกำเนิด จุดอื่นๆ ของภาพ (x , y) ก็จะถูกย้ายไปที่จุดใหม่ (x', y') และ

$$x' = x - x_p$$
$$y' = y - y_p$$

2. จัดการย่อ หรือขยายภาพ โดยที่จุดประจำที่อยู่ที่จุดกำเนิดก็จะได้จุดที่นิยามภาพจุดใหม่เป็น (x'', y'')

$$x'' = x' * Sx$$
$$y'' = y' * Sy$$

3. ย้ายจุดประจำที่ จากจุดกำเนิดไปยังจุดประจำที่เดิม (x_p, y_p)

$$x^* = x'' + x_p$$
$$y^* = y'' + y_p$$

แทนค่า x', y', x'', y'' จะได้ว่า

$$x^* = (x - x_p)Sx + x_p$$
$$y^* = (y - y_p)Sy + y_p$$

สมการนี้ก็คือ สมการสำหรับการย่อหรือขยายภาพ โดยที่จุดประจำที่อยู่ที่จุด (x_p, y_p)

ง) การบิดภาพ (shearing)

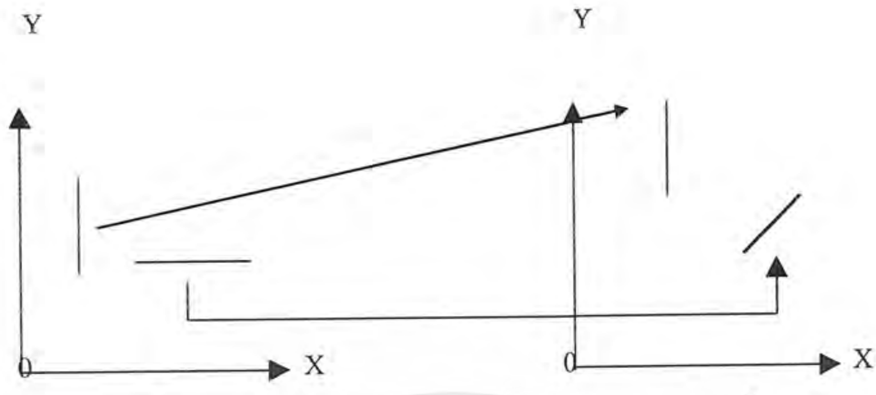
การบิดภาพจะทำให้ทั้งหมดของภาพหรือบางส่วนของภาพเกิดการบิดเบือนขึ้น เราจะพิจารณาเพียง 2 แบบ คือ การบิดภาพทางแกน x และการบิดภาพทางแกน y

การบิดภาพทางแกนy จะทำให้เกิดการย้ายจุด (x , y) ไปยังจุด (x', y') โดยที่

$$x' = x$$
$$y' = Shy * x + y, Shy \neq 0$$

Shy = แฟกเตอร์ของการบิดภาพทางแกน y , Shx = แฟกเตอร์ของการบิดภาพทางแกน x

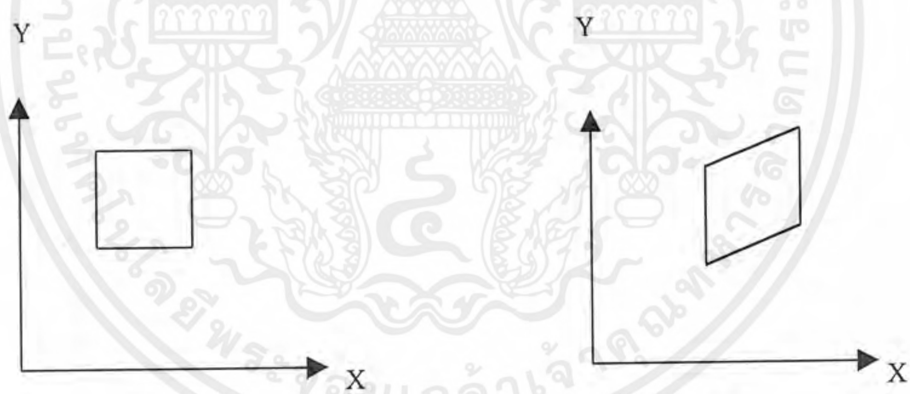
การบิดภาพทางแกน y จะทำให้จุดต่างๆ ในแกน y เลื่อนขึ้นหรือเลื่อนลงขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของแฟกเตอร์ Shy (รูปที่ 2.2.1-8) เส้นตรงในแนวนอนจะถูกเปลี่ยนให้เป็นเส้นตรงในแนวเฉียง ด้วยความลาดชันเท่ากับ Shy



ก่อน หลัง

รูปที่ 2.2.1-8 การบิดภาพทางแกน y ทำให้เส้นในแนวนอนเปลี่ยนไปเป็นเส้นในแนวเฉียง

ในรูปที่ 2.2.1-9 จะเป็นการแสดงการบิดภาพสี่เหลี่ยมทางแกน y ซึ่งทำให้ภาพเดิมซึ่งเป็นภาพสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



ก่อน หลัง

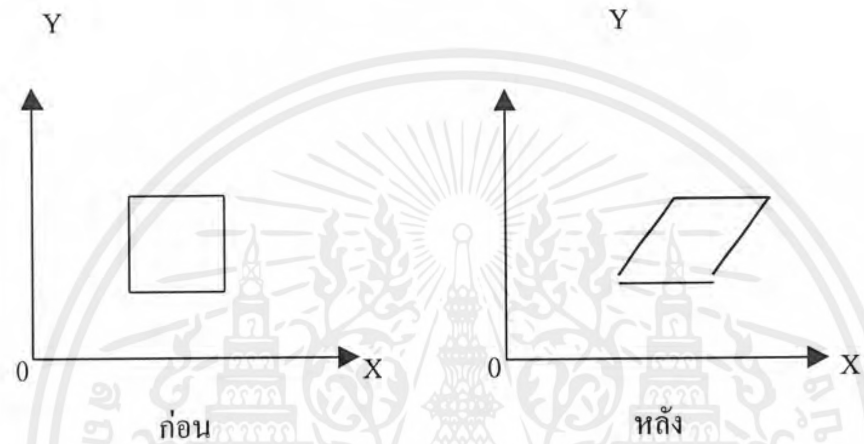
รูปที่ 2.2.1-9 การบิดภาพสี่เหลี่ยมทางแกน y

สำหรับการบิดภาพสี่เหลี่ยมทางแกน x จะให้ผลตรงกันข้ามกับการบิดภาพทางแกน y กล่าวคือ จุด (x , y) ของภาพจะถูกเปลี่ยนเป็นจุด (x', y') โดยที่

$$x' = x + Shx * y \quad , Shx \neq 0$$
$$y' = y$$

ในกรณีเส้นในแนวนอนก็จะถูกย้ายไปทางซ้ายหรือขวา ขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของแฟกเตอร์ *Shx* ส่วนเส้นตรงในแนวดิ่งก็จะถูกเปลี่ยนเป็นเส้นตรงในแนวเฉียงด้วยความลาดชัน *Shx*

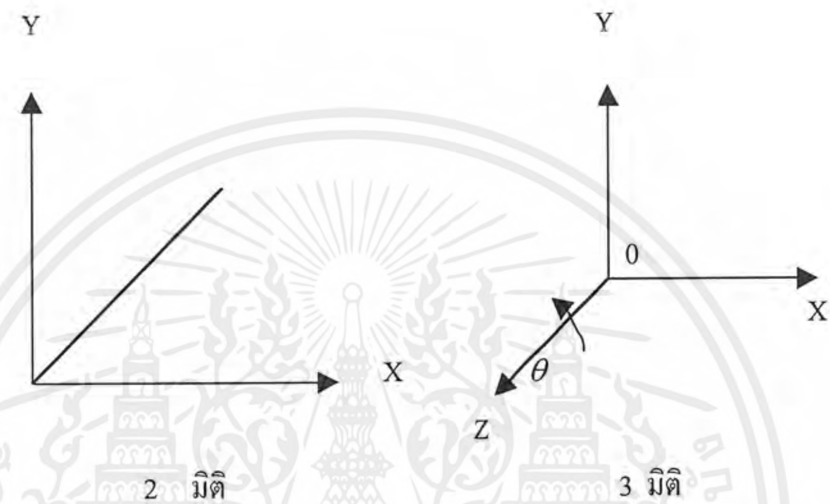
ในรูปที่ 2.2.1-10 จะเป็นการบิดภาพสี่เหลี่ยมทางแกน x ภาพจะเปลี่ยนจากสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้กลายเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



รูปที่ 2.2.1-10 การบิดภาพสี่เหลี่ยมทางแกน x

2.2.2 การแปลงเรขาคณิต 3 มิติ

จากทฤษฎีบทการหมุนภาพใน 2 มิติ ข้างต้น สามารถนำมาประยุกต์สำหรับการย้ายแกนใน 3 มิติ ได้ ดังนี้

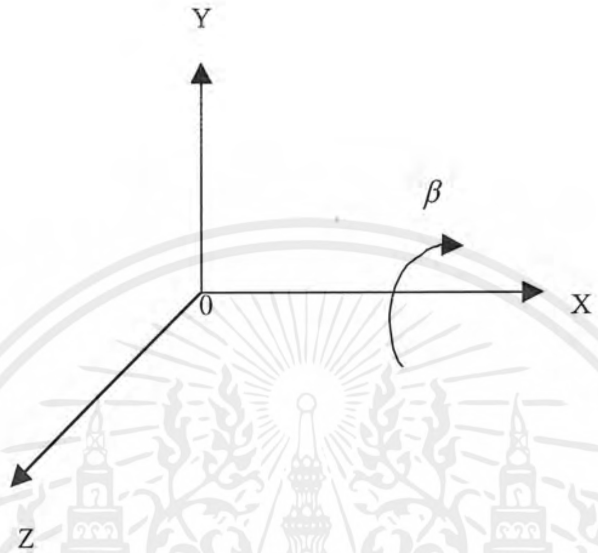


รูปที่ 2.2.2-1 การเปรียบเทียบการหมุนภาพใน 2 มิติ และ 3 มิติ

จากรูป พิจารณาว่า มุม θ เป็นการยายจุดรอบแกน Z ทำให้ตัวแปรในแกน x และ y มีค่าเปลี่ยนแปลงไป

การหมุนภาพรอบแกนในระนาบ 3 มิติ สามารถแบ่งได้เป็น 3 กรณี คือ

1. การหมุนภาพรอบแกน x ซึ่งสามารถแสดงได้ ดังรูป

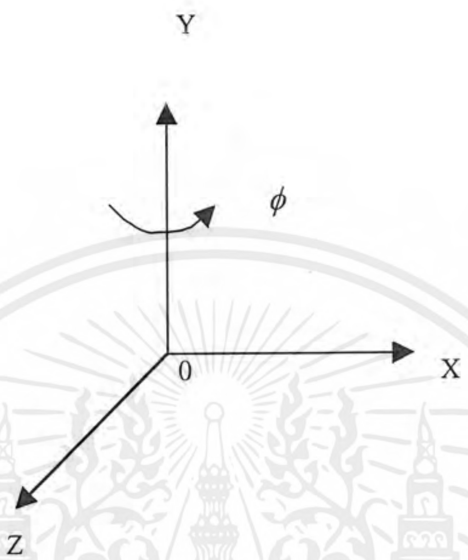


รูปที่ 2.2.2-2 การหมุนภาพรอแกน x

จากรูปที่ 2.2.2-2 จะได้ว่าการหมุนภาพรอบแกน x ให้จุดต่างๆเปลี่ยนไป โดยจะได้สมการดังนี้

$$x' = x$$
$$y' = \cos\beta + x\sin\beta$$
$$z' = z\cos\beta + z\sin\beta\varphi$$

2. การหมุนภาพรอบแกน y ซึ่งจะแสดงได้ดังรูป

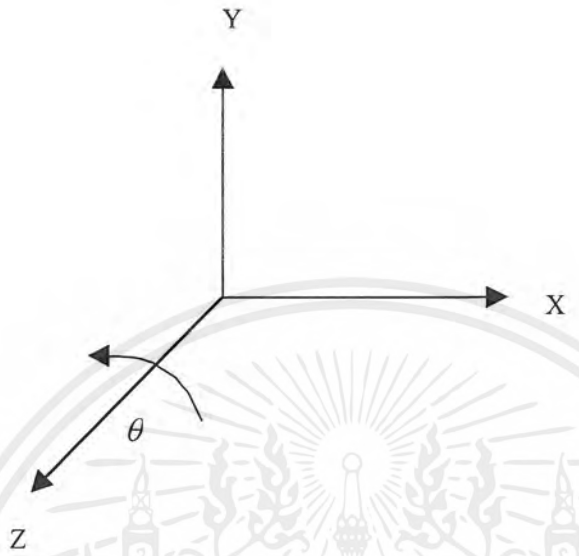


รูปที่ 2.2.2-3 การหมุนภาพรอบแกน y

จากรูปที่ 2.2.2-3 จะได้ว่าการหมุนภาพรอบแกน y ทำให้จุดต่างๆเปลี่ยนไป โดยจะได้สมการดังนี้

$$x' = x\cos\phi + y\sin\phi$$
$$y' = y$$
$$z' = z\cos\phi + z\sin\phi$$

3. การหมุนภาพรอบแกน z ซึ่งแสดงได้ ดังรูป

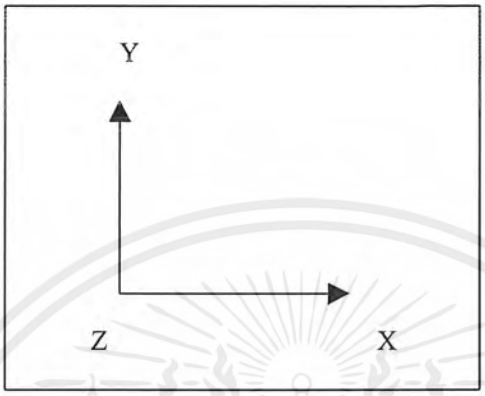


รูปที่ 2.2.2-4 การหมุนภาพรอบแกน z

จากรูปที่ 2.2.2-4 จะได้ว่าการหมุนภาพรอบแกน z ทำให้จุดต่างๆ เปลี่ยนไป โดยจะได้สมการดังนี้

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = y\cos\theta + x\sin\theta$$
$$z' = z$$

เมื่อทำการแสดงรูปทรงทางเรขาคณิตบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ โดยเริ่มแรกจะได้ทุกมุมมีค่า 0 องศาและการและการแสดงผลบนหน้าจอนั้นจะมีให้เห็นเป็นระบบ 2 มิติ



หน้าจอมอนิเตอร์

รูปที่ 2.2.2-5 แสดงหน้าจอ Monitor ของเครื่องคอมพิวเตอร์

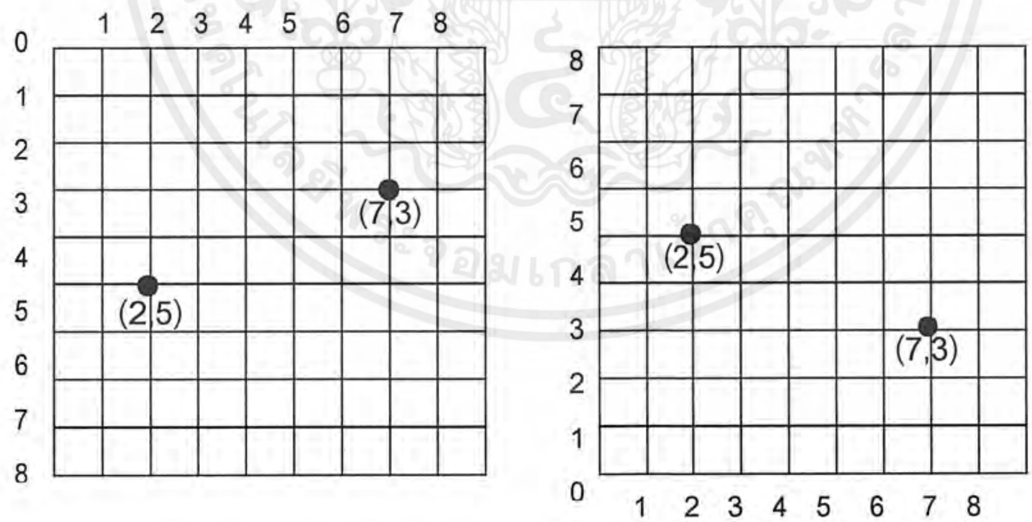
จากหน้าจอคอมพิวเตอร์ จะได้ว่า แกน z จะแสดงความลึกที่พุ่งออกมานอกจอ

2.3 การสร้างภาพกราฟฟิกเบื้องต้น

ภาพกราฟฟิกที่คอมพิวเตอร์ สร้างขึ้นมานั้นจะสร้างได้โดยใช้กราฟฟิกเบื้องต้นต่างๆ ซึ่งได้แก่ จุด (point) เส้นตรง (straight line) เส้นโค้ง(curves) และ ภาพรูปทรงเรขาคณิตต่างๆ(geometric figures) เช่น วงกลม วงรี หรือรูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น นอกจากนี้ยังจะต้องประกอบด้วยคำสั่งเกี่ยวกับการจัดการหน้าจอ เช่น การลบหน้าจอ การวางภาพที่กำหนดไว้ในตำแหน่งที่ต้องการบนจอภาพเป็นต้น

2.3.1 การสร้างจุด

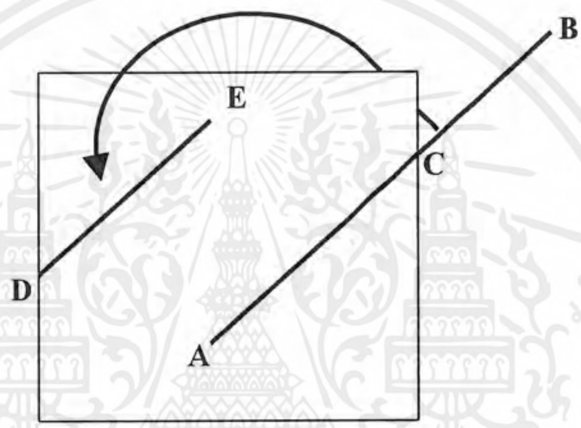
ภาพบนจอภาพแบบแรสเตอร์สแกนเกิดจากจุดสว่างหลาย ๆ จุด ซึ่งจะถูกกำหนดตำแหน่งได้โดยกำหนดตำแหน่งในเฟรมบัฟเฟอร์ที่สอดคล้องได้จริงบนจอภาพ ทั้งจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์จะใช้จุดพิกัด 2 มิติ ในการอ้างถึงจุดต่างๆ โดยมีจุดกำเนิดหรือจุด (0 , 0) อยู่ที่มุมซ้ายของจอภาพ ดังรูปที่ 2.3.1-1 (ก) ซึ่งต่างจากระบบพิกัดที่มักใช้ในการเขียนกราฟ กล่าวคือ จุดกำเนิดที่อยู่ที่มุมล่างซ้ายและในรูปที่ 2.3.1-1 (ข) การอ้างถึงพิกเซลใดจะใช้คู่ลำดับ (x , y) โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์



(ก) (ข)

รูปที่ 2.3.1-1 ระบบพิกัดของจอภาพและเฟรมบัฟเฟอร์เทียบกับระบบพิกัดที่ใช้ในการเขียนกราฟ

ค่าของจุดพิกัด x และ y จะต้องมีค่าไม่เกินขอบเขตของจอภาพที่ใช้ ถ้ามีการกำหนดค่าเกินขอบเขตจะต้องมีการจัดการอย่างใดอย่างหนึ่งเพื่อกันเหตุการณ์เช่นนี้ ตัวอย่างเช่น ให้จุดที่มีค่าอยู่เกินขอบเขตไม่ว่าจะเป็นขอบเขตบน ล่าง ซ้าย หรือขวา ถูกเปลี่ยนค่าให้เป็นค่าที่ขอบเขต นั่นคือภาพที่มีค่าเกินขอบเขตจะถูกตัดไปเลย(clipping) อีกวิธีหนึ่งเป็นการให้ค่าที่เกินขอบเขตไปเริ่มจากจุดเริ่มต้นอีกที ดังนั้นจุดต่าง ๆ ของภาพส่วนที่เกินขอบเขตทางขวาไปมาจะปรากฏทางด้านซ้ายของจอภาพแทน ซึ่งเรียกว่า ผลวนรอบ



รูปที่ 2.3.1-2 ผลวนรอบ

2.4 ทฤษฎีที่ใช้ในการอินทิเกรต

2.4.1 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ในการประมาณค่า $\int_a^b f(x)dx$ โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูนี้เป็นวิธีที่ง่ายที่สุด โดยการแทนพื้นที่ใต้เส้นโค้งด้วยรูปสี่เหลี่ยมคางหมู วิธีนี้แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงเท่าๆกัน และความยาวของแต่ละช่วงคือ $\frac{(b-a)}{n}$ จุดปลายของช่วงใดๆ $[n_{k+1}, n_k]$ คือ $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ และ $(x_k, f(x_k))$ โดยหารลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดปลายทั้งสองจะได้รูปสี่เหลี่ยมคางหมู พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูคือ

$$\frac{f(x_{k-})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{2n}[f(x_{k-1})+f(x_k)] \qquad (1)$$

เนื่องจาก $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx + \ldots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad (2)$$

โดยการแทน (1) ใน (2) ได้

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\begin{bmatrix} (f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2))+\ldots+(f(x_{k-1})+f(x_k))+ \\ \ldots+(f(x_{n-1})+f(x_n)) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_k)+\ldots+f(x_n)]$$

$$= h\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots f_k + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n)\right]$$

เมื่อ $h = \frac{(b-a)}{n}$ และ $f_k = f(x_k)$ เรียก (3) ว่า กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

2.4.2 กฎของซิมป์สัน

วิธีนี้แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น 2 ช่วงที่จุด C โดย $c = \dfrac{a+b}{2}$ แล้วจะใช้พหุนามกำลังสองประมาณ f(x) ที่ a , c และ b แล้ว

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_2(x)dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) \right] dx \qquad (4)$$

ให้ $h = \dfrac{(b-a)}{2}$ และ u = x − a

แล้ว

$$\int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} dx = \frac{1}{2h^2} \int_a^{a+2h} (x-c)(x-b)dx$$

$$= \frac{1}{2h^2} \int_a^{2h} (u-h)(u-2h)du$$

$$= \frac{1}{2h^2} \left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^{2h}}{2} + 2h^2 u \right]_0^{2h}$$

$$= \frac{h}{3}$$

ในทำนองเดียวกัน $\displaystyle\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} dx = \frac{4h}{3}$

และ $\displaystyle\int_a^b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} dx = \frac{h}{3}$

แทนค่าใน (4) ได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + \frac{4f(a+b)}{2} + f(b) \right] \qquad (5)$$

ถ้า $[a,b] = [x_0\ ,\ x_n]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \tag{6}$$

ในการแทน (5) ใน (6) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right] \\ &\quad + \ldots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right] \\ &= \frac{h}{3}\begin{bmatrix} f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_1)+4f(x_1)+\ldots \\ +2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

เรียก (7) ว่ากฎของซิมป์สัน ซึ่งมีข้อกำหนดว่า n ต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น

2.5 CAI

การเชื่อมต่อคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลเป็นเทอร์มินอล เหมาะกับการใช้งานประจำบ้าน ซึ่งติดตั้งและดูแลได้โดยง่ายโดยใช้อุปกรณ์น้อยชิ้น และซอฟท์แวร์ที่ใช้งานก็ไม่สลับซับซ้อน ซอฟท์แวร์จำลองเทอร์มินอลมีเป็นจำนวนมาก เช่น เทลิกซ์ โปรคอม

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หรือ CAI (Computer Assisted Instruction) หมายถึง การนำเครื่องคอมพิวเตอร์มาใช้เป็นเครื่องช่วยในการเรียนการสอนทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตัวเอง คอมพิวเตอร์ช่วยสอนนับได้ว่าเป็นเครื่องช่วยสอนที่มีประสิทธิภาพสูงสุด ทั้งนี้เพราะคอมพิวเตอร์สามารถทำงานได้แทบทุกอย่างขึ้นอยู่กับว่าเราตั้งโปรแกรมไว้อย่างไร

ในบทเรียน CAI นั้น คอมพิวเตอร์จะเสนอเนื้อหาแบบต่างๆ เพื่อการเรียนการสอน เป็นการสอนโดยตรงไปยังผู้เรียนผ่านทางจอ หรือ แป้นพิมพ์ โดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วม วัสดุการสอนซึ่งก็คือโปรแกรมจะถูกเก็บไว้ในหน่วยความจำของเครื่องและพร้อมที่จะเรียกใช้ได้ตลอดเวลา

ลักษณะของเครื่องช่วยสอน

ในปัจจุบันมีการผลิตเครื่องช่วยสอนออกมามากมาย แต่ละชนิดก็มีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไปอย่างไรตามลักษณะของเครื่องช่วยสอนสามารถสรุปได้ดังนี้

1. ให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเอง ตามความสามารถของตนเอง
2. การสอนเริ่มตามขั้นตอนทีละขั้น ผู้เรียนตอบสนองแตกต่างกัน วิธีการเรียนขึ้นอยู่กับลักษณะพฤติกรรมของแต่ละคน
3. ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนตลอดเวลา คือ มีดการสื่อสารระหว่างผู้เรียนกับเครื่องช่วยสอน
4. ผู้เรียนได้ทราบรายงานผลการเรียน และความก้าวหน้าของคนในขณะที่เริ่มนั้นทันที
5. การเรียบเรียงบทเรียน และวิธีการสอนได้ปรับปรุงมาอย่างดีแล้ว

การสอนแบบต่างๆ

ปัญหาที่สำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยการสอน แต่ยังไม่มีคำตอบที่แน่นอนคือ จะใช้วิธีการสอนแบบใดจึงจะดีที่สุด ทั้งนี้เพราะวิธีการสอนแต่ละแบบก็มีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันอย่างไรก็ตามวิธีการสอนแบบต่าง ๆ ก็พอจะแยกตามระดับความซับซ้อนได้ดังนี้

1) การสอนแบบฝึกหัดทักษะขั้นพื้นฐาน (Drill and Practice)

เป็นการสอนแบบง่าย ๆ ใช้สอนได้กับวิชาที่มีการฝึกทักษะ หรือ มีการแก้ปัญหาแบบตายตัว เช่น การฝึกบวก ลบ คูณ หาร เป็นต้น การสอนโดยวิธีนี้โดยมากเป็นวิธีที่น่าเบื่อสำหรับผู้ศึกษา ปกติใช้สอนในระดับประถมศึกษา ซึ่งมีเวลาการสอนสั้นๆ เท่านั้นไม่เหมาะกับการสอนระดับสูง การสอนอาจเป็นได้ดังนี้

- การสอนเนื้อหาโดยคอมพิวเตอร์

คอมพิวเตอร์จะเสนอเนื้อหาวิชาทีละบทเรียน ผู้ศึกษาจะต้องศึกษาให้เข้าใจเมื่อผู้ศึกษาผ่านบทเรียนนั้นแล้วเครื่องจะบันทึกไว้ว่าเรียนถึงบทที่เท่าไร

- การถามคำถามโดยคอมพิวเตอร์

เป็นการถามคำถามแบบง่าย ๆ ที่ผู้ศึกษามีอิสระในการตอบน้อยมาก เช่น คำถามแบบถูกผิด แบบเลือกตอบ หรือแบบเติมคำที่คำตอบที่ถูกมีเพียงข้อเดียว

- การตอบคำถามโดยผู้ศึกษา

เมื่อผู้ศึกษาตอบถูกต้องก็จะได้คะแนน ถ้าตอบผิดเครื่องจะตอบคำถามที่ถูก และไม่ได้คะแนน

จะเห็นว่าการสอนแบบนี้ทำให้เกิดความเบื่อหน่าย และจำกัดความคิดของผู้ศึกษามากผู้ศึกษาไม่มีโอกาสใช้ความคิดในทางสร้างสรรค์ได้เต็มที่ ในด้านอุปกรณ์การสอนก็มีแต่จอภาพแค่เพียงอย่างเดียว ข้อดีของการสอนแบบนี้คือ ราคาถูก สร้างได้ง่าย และใช้ได้แพร่หลายกว่า

2.) การสอนแบบสนทนา (tutorial)

การสอนแบบนี้เป็นการสนทนาระหว่างคอมพิวเตอร์กับผู้ศึกษาอย่างเป็นธรรมชาติ โดยการศึกษาภาษาที่คล้ายคลึงกับภาษาที่ใช้ในชีวิตประจำวัน การสนทนาจะเปลี่ยนไปเรื่อยๆ ตามเนื้อหาวิชา ทำให้ไม่เกิดความเบื่อหน่าย ผู้ศึกษามีโอกาสศึกษาได้อย่างเสรี บางครั้งอาจตอบในรูปประโยคที่ซับซ้อน หรือในรูปเมตริกซ์ บางครั้งอาจมีการสร้างภาพกราฟฟิกต่าง ๆ ด้วย ดังนั้นระบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนต้องมีความยืดหยุ่นพอ และต้องสามารถ

ตรวจสอบคำถามอันซับซ้อนได้ การเปิดโอกาสให้ผู้ศึกษาตอบโต้ได้โดยเสรีนั้นจะต้องระวังมาก เพราะคำตอบที่ถูกมีได้มากมาย หลักสำคัญคือ คำตอบที่ถูกต้องของผู้ศึกษาคอมพิวเตอร์จะต้องไม่ถือว่าเป็นคำตอบที่ผิด ระบบจะต้องสามารถพิจารณาได้ว่า จะจัดการสอนอย่างไรแก่ผู้ศึกษาเป็นอันดับต่อไป โดยคำนึงถึงหลักที่ว่าการสอนที่ดีนั้นต้องสอด-คล้องกับเนื้อหาวิชา และพฤติกรรมการเรียนของผู้ศึกษา เช่น การสอนคณิตศาสตร์ต้องไม่ใช้การบรรยายแต่เพียงอย่างเดียว ต้องมีการแนะนำแนวทางในการแก้ปัญหาด้วย นอกจากนี้ระบบต้องสามารถออกแบบฝึกหัดหรือมอบหมายงานให้ผู้ศึกษาทำตามความเหมาะสมได้ดีจะเห็นว่าระบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบนี้จะต้องมีโปรแกรมการสอนที่ซับซ้อน มีอุปกรณ์การสอนหลายอย่าง เช่น จอภาพ เทป ภาพยนตร์ ภาพนิ่ง หรือ อื่น ๆ แล้วแต่ความเหมาะสมจึงทำให้ระบบการสอนมีราคาแพงกว่าแบบแรกระบบการสอนแบบนี้สามารถนำไปใช้ในระบบการสอนในระดับสูงได้ และยังสามารถใช้แนะแนวแก่ผู้ศึกษาในปัญหาทั่วไปได้อย่างไรก็ตามระบบการสอนแบบนี้ก็มีปัญหามาก เช่น การสร้างโปรแกรมการสอนต้องใช้ความระวังมากเพื่อให้ครอบคลุมทุกปัญหาที่เกิดขึ้นในการสอน ในด้านการสนทนากับผู้ศึกษาโปรแกรมจะต้องสามารถเข้าใจภาษาที่ใช้กันทั่วไปได้ และสามารถสร้างประโยคเพื่อให้สนทนาโต้ตอบได้ ซึ่งเป็นปัญหามากทางด้านโครงสร้างทางไวยากรณ์ของภาษา จุดบกพร่องอีกอย่างของการสอนแบบนี้ คือไม่สามารถสอนวิชาที่มีการทดลองได้เพราะต้องมีการออกแบบทดลองโดยผู้ศึกษา ซึ่งระบบนี้ยังทำไม่ได้

3.) การสอนโดยการจำลองปัญหา (Simulation)

เป็นวิธีการสอนโดยคอมพิวเตอร์สร้างสถานการณ์จำลอง เพื่อให้ผู้ศึกษาเผชิญกับปัญหาต่างๆ และให้ผู้ศึกษามีโอกาสทดลองแก้ปัญหาคล้ายกับการทดลองในห้องปฏิบัติการจริง ซึ่งผู้ศึกษาสามารถจะควบคุมสถานการณ์การทดลองได้ทุกอย่าง คอมพิวเตอร์จะรายงานข้อมูลจากการทดลองนั้นให้ผู้ศึกษาทราบตลอดเวลาคล้ายกับการทดลองจริงๆ ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่าย ประหยัดเวลา และปลอดภัยจากอุบัติเหตุการทดลอง

- <u>การจำลองปัญหาแบบตายตัว (Static simulation)</u>

เป็นการจำลองปัญหาที่มีโครงสร้างตายตัว ผู้ศึกษาไม่สามารถเปลี่ยนโครงสร้างของการทดลองได้ ผู้ศึกษาเพียงแต่ใส่ค่าของตัวแปรซึ่งเป็นส่วนประกอบของโมเดลลงไปเท่านั้น และสังเกตการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลที่ได้จากการทดลอง เพื่อค้นหากฎเกณฑ์ หรือทฤษฎีจากการทดลองนั้น ตัวอย่างเช่น การสอนการเดินเรือคอมพิวเตอร์จะสมมติเรือขนาดหนึ่งขึ้นมาซึ่งมีลักษณะต่าง ๆ แล้วแต่คอมพิวเตอร์

กำหนด เช่น แบบของเรือ ระวางขับเรือ ระวางขับน้ำ กำลังของเครื่องจักร ขนาดของหางเสือและอื่นๆ ซึ่งเป็นลักษณะของเรือลำนั้น ผู้ศึกษาไม่มีสิทธิ์เปลี่ยนแปลงลักษณะของเรือเลย เพียงแต่สามารถเก็บข้อมูลเกี่ยวกับการบังคับเรือได้ เช่น การปรับทิศทางของหางเสือ อัตราการเร่งของเครื่องจักร ทิศทางการเคลื่อนที่ อัตราเร็วเชิงมุม เป็นต้น เมื่อผู้ศึกษาใส่ข้อมูลเหล่านั้นลงไปแล้วคอมพิวเตอร์จะแสดงรูปภาพการเคลื่อนที่ของเรือให้เห็นทางจอภาพว่า ผู้ศึกษาสามารถบังคับเรือได้ดีเพียงใด ทั้งนี้คอมพิวเตอร์จะคำนวณความล่าช้าในการตัดสินใจของผู้ศึกษา ด้วยระบบนี้สามารถทำให้ผู้ศึกษาสามารถฝึกฝนความชำนาญในการบังคับเรือ โดยไม่ต้องขับเรือจริงๆ เลย ทำให้ประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายตลอดจนสะดวก และปลอดภัยกว่าการทดลองจริง ๆ มาก

- การจำลองปัญหาแบบไม่ตายตัว (Dynamic Simulation)

เป็นการจำลองปัญหาโดยผู้ศึกษามีส่วนร่วมในการออกแบบการทดลองได้ สามารถนิยาม หรือ สร้างความสัมพันธ์ใหม่ๆ ระหว่างตัวแปร ในที่สุดอาจอาจคิดโครงสร้างใหม่ ๆ ที่ดีกว่าเดิมก็ได้ ตัวอย่างการสอน เช่น การสอนเดินเรือที่กล่าวมา ผู้ศึกษาไม่มีสิทธิ์เปลี่ยนแปลงโครงสร้างของเรือได้แต่สำหรับการจำลองปัญหาแบบไม่ตายตัวแล้ว ผู้ศึกษาสามารถออกแบบเรือแบบต่างๆได้ โดยกำหนดแบบของเรือ รูปทรง ระวางขับน้ำ ขนาดของหางเสือเรือ กำลังของเครื่องจักร และอื่นๆ นอกจากนี้ผู้ศึกษาสามารถลองขับเรือในสภาพการต่างๆกันได้หลายแบบ คอมพิวเตอร์จะต้องสร้างแบบของการทดลองแล้วแสดงผลให้ผู้ศึกษาทราบผลการทดลองตลอดเวลา อาจโดยรูปแบบทางจอภาพ หรือข้อมูลอื่น ๆ แล้วแต่กรณี ด้วยวิธีการเหล่านี้ นอกจากผู้ศึกษาจะสามารถฝึกฝนความชำนาญในการบังคับเรือ ยังสามารถออกแบบเรือที่มีคุณภาพดีในสภาพการณ์ต่างๆได้อีกด้วย

4) ข้อดีและข้อจำกัดของคอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอน

อรพันธ์ ประสิทธิรัตน์ (2530 : 7-8) ได้กล่าวถึงข้อดีหรือข้อได้เปรียบ และข้อจำกัดของคอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอนดังนี้

<u>ข้อได้เปรียบทางคอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอน</u>

1. ข้อได้เปรียบของคอมพิวเตอร์เมื่อเปรียบเทียบกับเครื่องคิดเลขคือ คอมพิวเตอร์มีหน่วยความจำ ซึ่งสามารถจำได้ เรียกข้อมูลความจำได้ทั้งตัวเลข ตัวอักษร ข้อความ สามารถคำนวณ และคิดอย่างมีเหตุผลได้ดีกว่าเครื่องคำนวณธรรมดา

2. คอมพิวเตอร์มีลักษณะเด่นที่จะช่วยให้ระบบการศึกษามีประสิทธิภาพ โดยเฉพาะการนำมาใช้ช่วยสอน ซึ่งเป็นการเรียนการสอนรายบุคคล โดยใช้บทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีลักษณะเดียวกันกับการเรียนการสอนเป็นรายบุคคล ด้วยแบบเรียนโปรแกรม (Program Text Book) การใช้คอมพิวเตอร์จะได้เปรียบกว่าแบบเรียนโปรแกรมคือ ให้ข้อมูลย้อนกลับได้รวดเร็วกว่า ผู้เรียนมีโอกาสทราบคำตอบที่ถูกต้องก่อนที่จะลงมือทำกิจกรรมหรือเรียนในลำดับถัดไป และเมื่อผู้เรียนทำผิดก็สามารถแก้ไขข้อผิดพลาดได้ทันที ซึ่งเป็นการเปลี่ยนพฤติกรรมเพื่อให้เกิดการเรียนรู้

3. บทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ มีจุดเด่นอีกประการคือ ผู้เรียนสามารถเรียกกรอบการเรียนได้รวดเร็วมาก ไม่ว่าเป็นการเรียนย้อนหลัง หรือ กระโดดข้ามไปข้างหน้า ทำให้ช่วยประหยัดเวลาในการเรียนทันท่วงที

4. พัฒนาการของ CAI เท่าที่เรียนมาเป็นที่ยอมรับมากในวงการศึกษา และวงการครู

5. ผู้เรียนค่อนข้างช้า จะมีผลสัมฤทธิ์สูงขึ้นมากกว่าผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียนปกติ แม้ว่าสิ่งที่คงเหลือจากการเรียนรู้จะต่ำกว่า เมื่อเปรียบเทียบจากการเรียนในห้อง

6. ไม่ว่า CAI จะมีลักษณะใด (ทบทวน ฝึกหัด เกมส์ สร้างสถานการจำลอง) ความแตกต่างทางด้านผลสัมฤทธิ์มีไม่มากนัก ไม่ว่าจะเรียนอยู่ในชั้นประถม มัธยม หรือผู้ใหญ่ที่ได้รับการอบรม ผู้เรียนส่วนใหญ่ต้องการพบครูผู้สอนเป็นครั้งคราว หรือไม่ก็ต้องการให้ครูอยู่ในชั้นเรียนด้วย เพราะบางทีอยากอภิปรายในเรื่องบางเรื่องเป็นพิเศษ แต่ผลการวิจัยกลับพบว่า การมีครูเข้าไปยุ่งมากเท่าใดกลับทำให้การเรียนช้าลง มหาวิทยาลัยบางแห่งจึงทำการวิจัยอยู่ว่าครูควรเข้าไปมีบทบาทร่วมด้วยมากน้อยเพียงใด จึงจะพอดี

<u>สำหรับในแง่ของผู้ศึกษาโปรแกรมช่วยสอน พอจะสรุปได้ว่า</u>

1. การได้เจรจาโต้ตอบกับคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้เรียนพอใจมาก

2. นอกจากนั้นผู้เรียนสามารถควบคุมวิธีการเรียนของตัวเองได้

3. ผู้เรียนใช้ความถนัดของตัวเองให้มากที่สุด ถ้าสนใจก็อาจใช้เวลามาก สนใจน้อยก็ใช้เวลาน้อยลง

เราอาจกำหนดวิธีการสอนให้ตรงกับความต้องการของผู้เรียนได้ เพราะคำตอบที่เรียกใช้อาจเป็นแนวให้กำหนดบทเรียนให้ไปช้า เร็ว หรือมีความแตกต่างอย่างนั้นอย่างนี้ก็ได้

ในการเรียนด้วย CAI ผู้เรียนจะต้องมีสมาธิอยู่ที่คอมพิวเตอร์ และจอภาพตลอดเวลา การได้นำคำตอบของผู้เรียนมาวิจัยได้ นับว่าเป็นประโยชน์ที่สุดในการทำบทเรียนหรือแก้ไขบทเรียนในโอกาสต่อไป

บทที่ 3
การออกแบบโปรแกรม

3.1 แนวคิดในการออกแบบโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์ที่สร้างขึ้นนี้ ประกอบด้วย 4 ส่วนหลัก ดังนี้

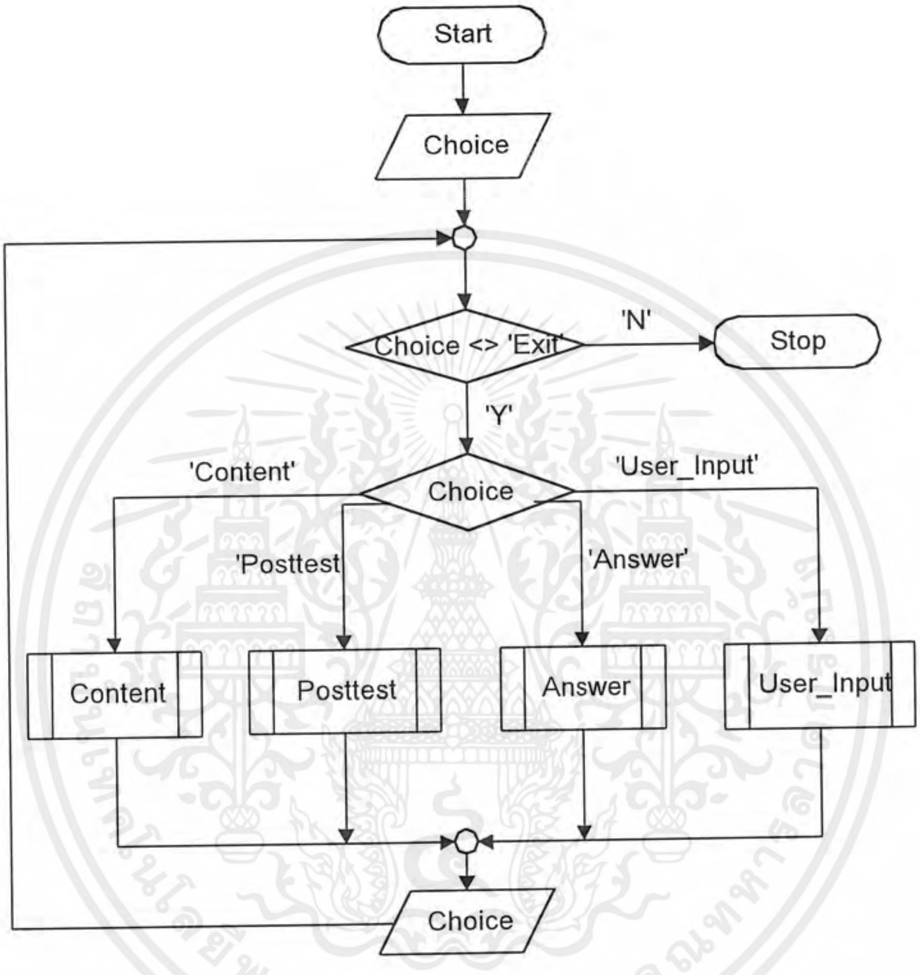
3.1.1 เป็นส่วนของเนื้อหาในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์

3.1.2 เป็นส่วนของแบบทดสอบ

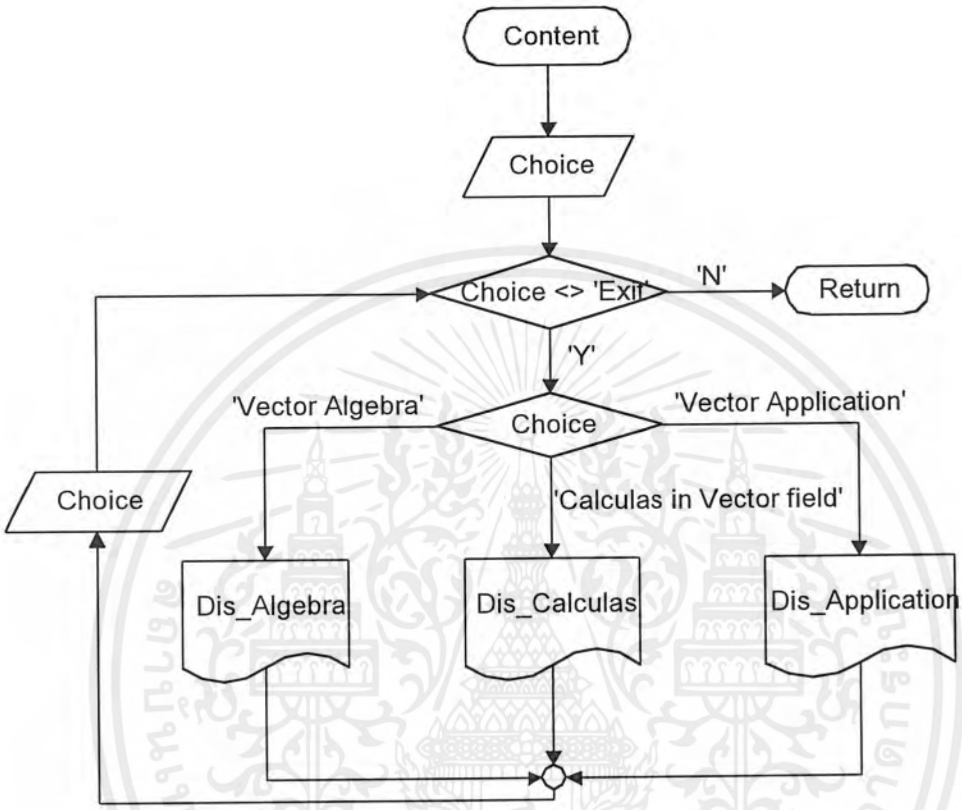
3.1.3 เป็นส่วนของการเฉลยแบบทดสอบ

3.1.4 เป็นส่วนของการรับค่าเวกเตอร์ และ แสดงผล

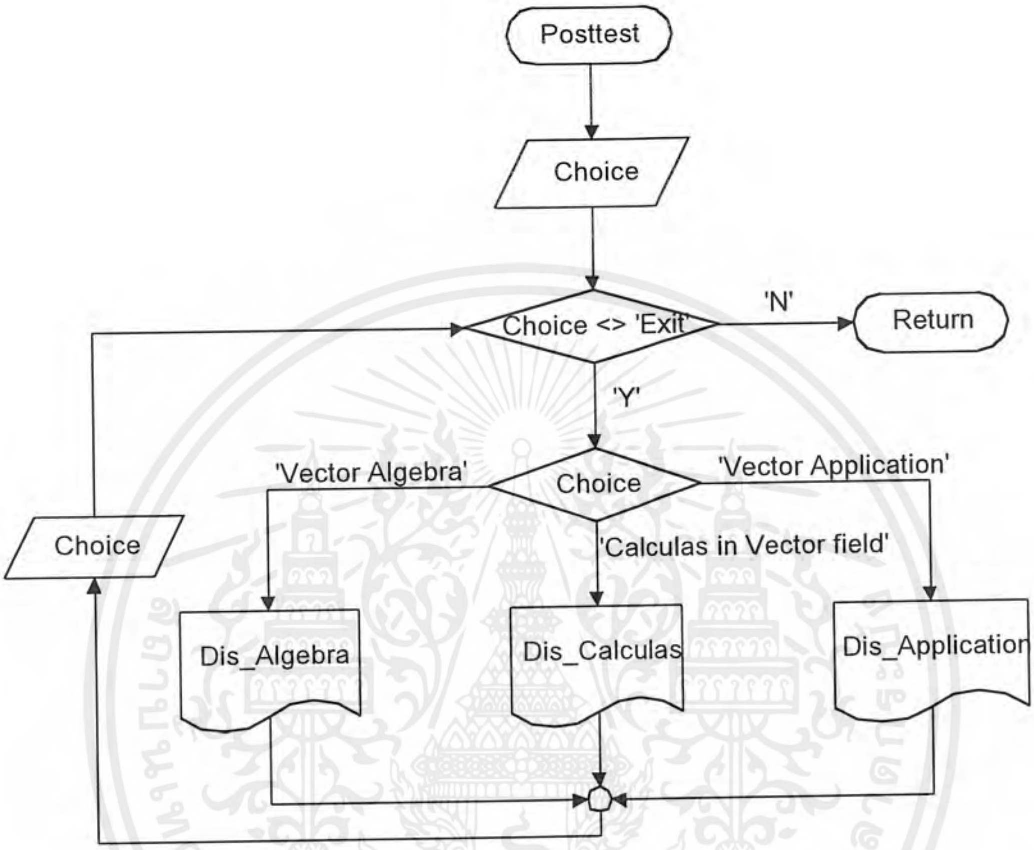
3.2 ผังงานของโปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์



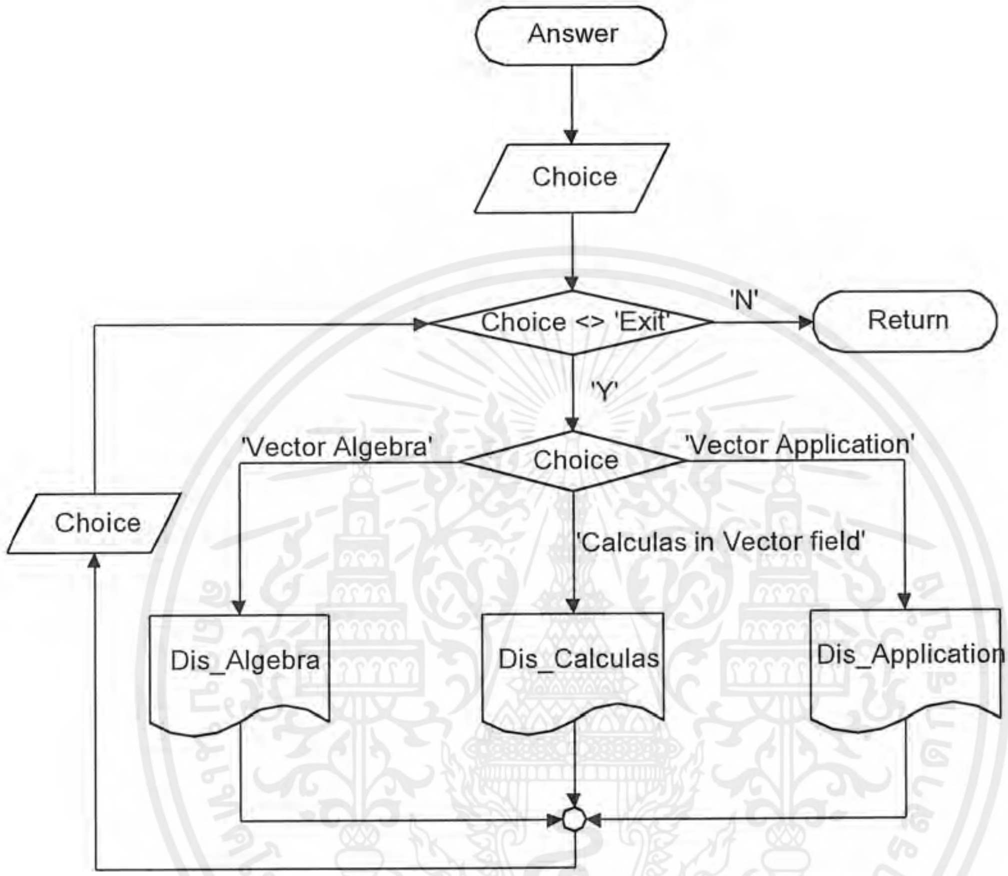
รูปที่ 3.2-1 Flow Chart ของหน้าจอหลัก



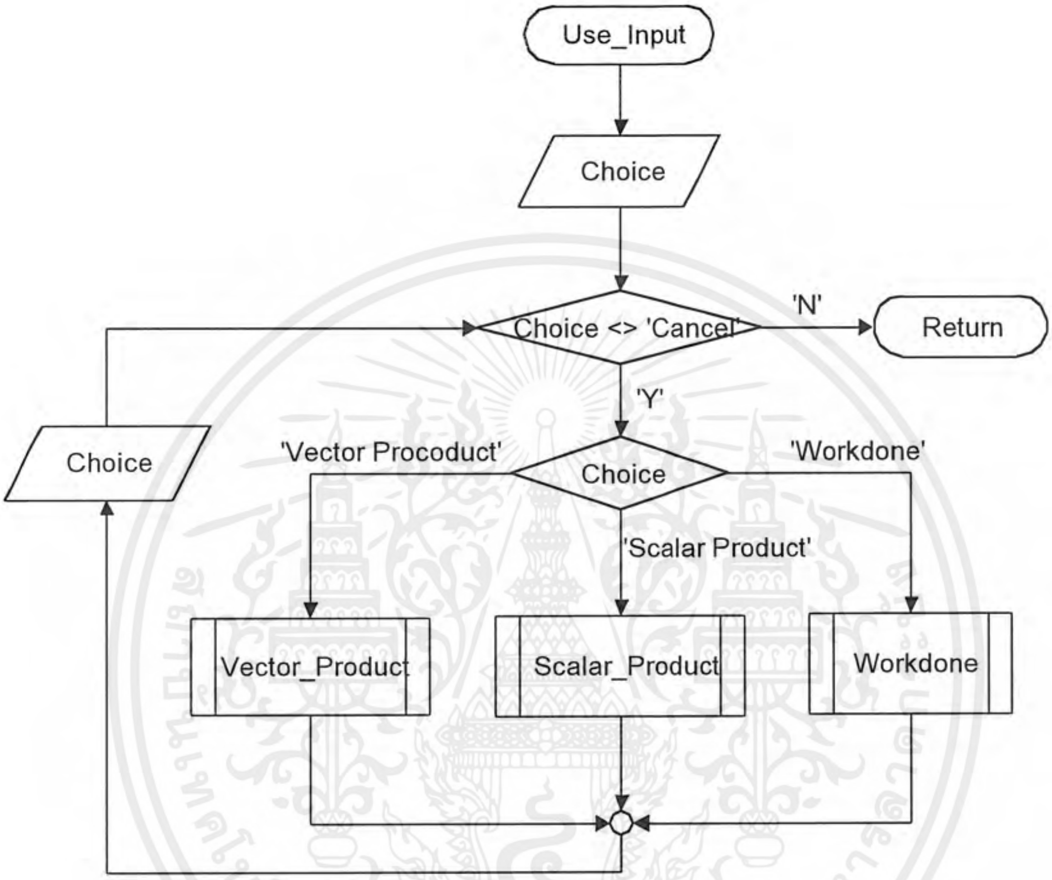
รูปที่ 3.2-2 Flow Chart ส่วนของเนื้อหา



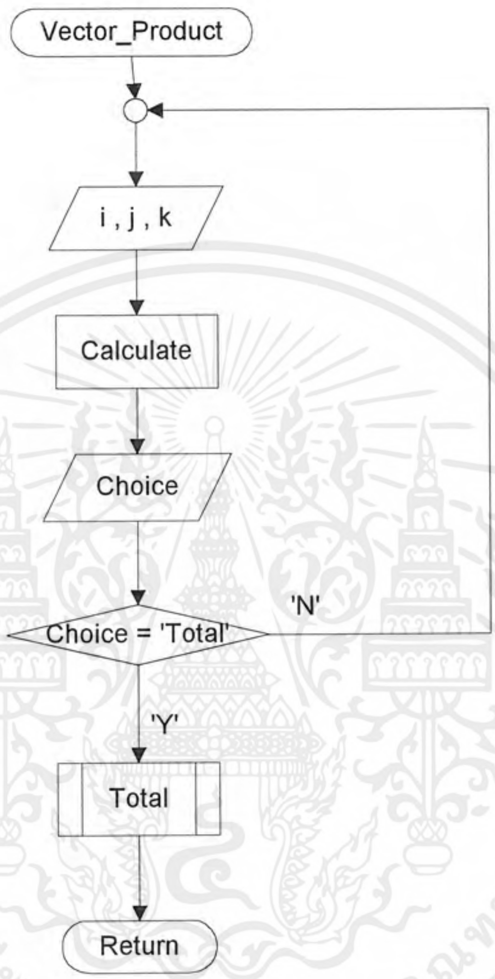
รูปที่ 3.2-3 Flow Chart ส่วนของแบบทดสอบ



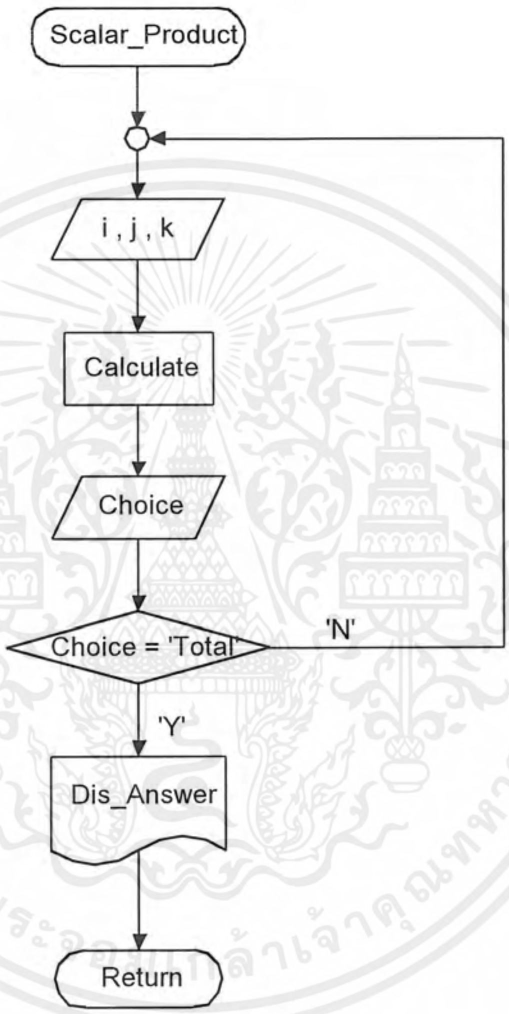
รูปที่ 3.2-4 Flow Chart ส่วนของการเฉลยแบบทดสอบ



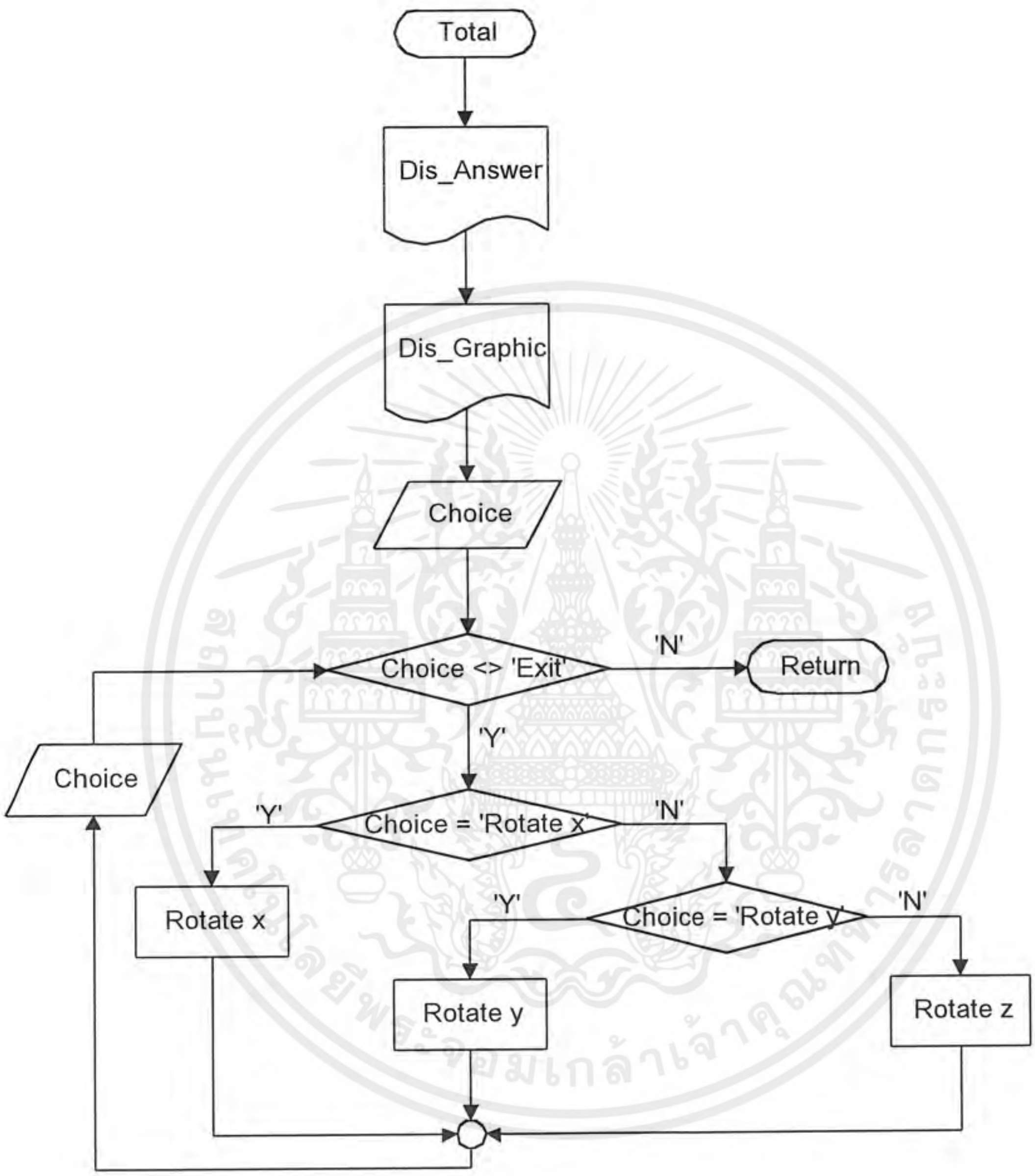
รูปที่ 3.2-5 Flow Chart ส่วนของการรับค่าและแสดงผล



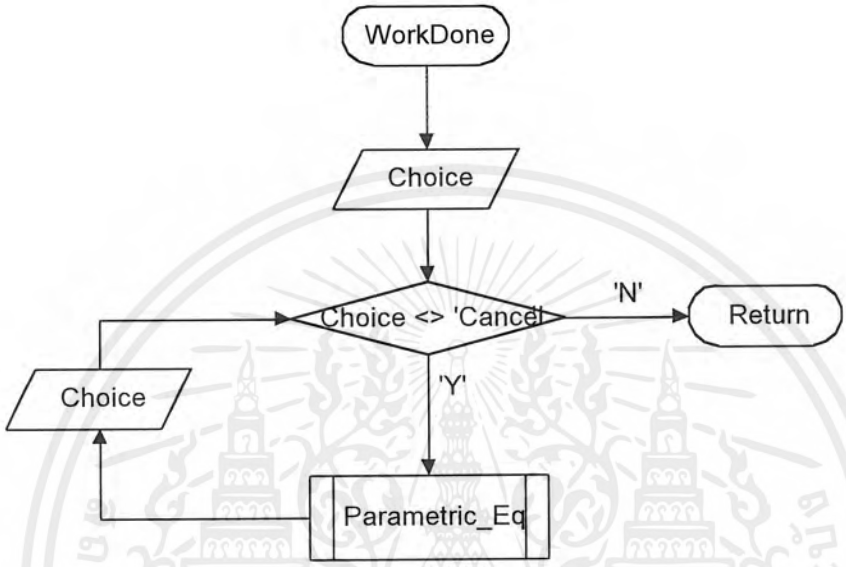
รูปที่ 3.2-6 Flow Chart ส่วนของการคำนวณหา Vector Product



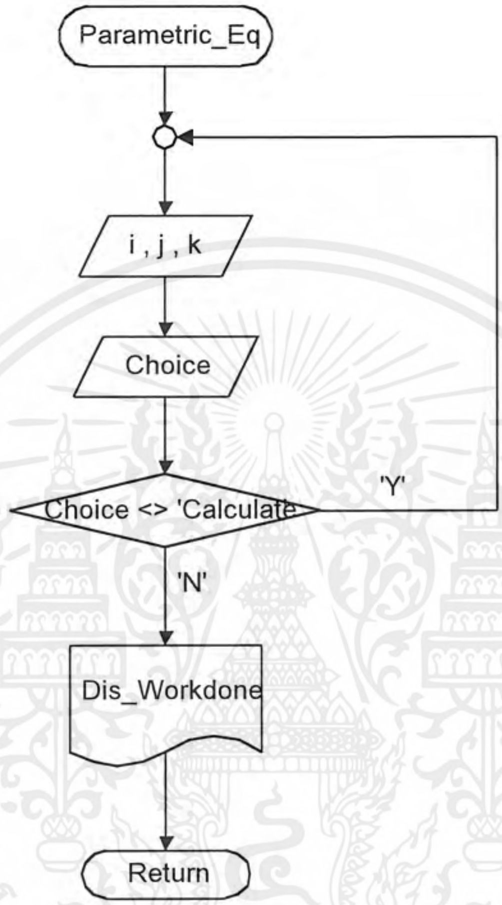
รูปที่ 3.2-7 Flow Chat ส่วนของการคำนวณหา Scalar Product



รูปที่ 3.2-8 Flow Chart ส่วนของการแสดงภาพของเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ



รูปที่ 3.2-9 Flow Chart ส่วนของการเลือกสมการแรงเพื่อจะนำไปคำนวณหา Workdone



รูปที่ 3.2-10 Flow Chart แสดงส่วนของการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการหา WorkDone

บทที่4
การประเมินผล

ผลลัพธ์ที่ได้จากการพัฒนาโปรแกรม สามารถประเมินผลในแต่ละด้านได้ดังนี้

4.1 ส่งเสริมให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจรูปของเวกเตอร์มากขึ้น

การเรียนการสอนเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์นั้น อาจเป็นเรื่องที่เข้าใจยากสำหรับเวกเตอร์ที่เกิดขึ้นในปริภูมิสามมิติ เนื่องจากการวาดรูปสามมิตินั้นเป็นเรื่องที่ค่อนข้างยาก และต้องใช้จินตนาการในแง่ของสามมิติด้วย จากสาเหตุนี้เองอาจทำให้นักศึกษาเกิดความไม่เข้าใจ และไม่ใส่ใจในการแก้ปัญหาเรื่องเวกเตอร์ ซึ่งเป็นรากฐานที่สำคัญที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาในทางฟิสิกส์ชั้นสูงต่อไป เช่น การไหลของของไหล ฟลักซ์ โมเมนต์ งาน เป็นต้น หรือจะเป็นการเขียนโปรแกรมทางกราฟฟิกก็ต้องอาศัยเรื่องเวกเตอร์เช่นกัน ดังนั้นการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอนทางคณิตศาสตร์ในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์นั้น จะทำให้นักศึกษาสามารถศึกษา , เข้าใจรูปร่างและทิศทางของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติได้ง่ายยิ่งขึ้น เนื่องจากการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์นั้นจะใช้เวลาน้อยกว่ามาก และรูปที่เกิดขึ้นสามารถมองเห็นได้ในสามมิติทำให้เกิดความเข้าใจได้ดีกว่า จากสาเหตุดังกล่าวทำให้นักศึกษาสามารถศึกษา และทำความเข้าใจเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์ได้มากขึ้น

4.2 ใช้งานง่ายและมีความเข้าใจง่าย

เนื่องจากโปรแกรมที่จัดทำขึ้นเป็นโปรแกรมที่ใช้งานบนระบบปฏิบัติการวินโดวส์ซึ่งแสดงส่วนการติดต่อกับผู้ใช้แบบกราฟฟิก (Graphics User Interface) จึงทำให้การใช้งานง่าย ผู้ใช้สามารถเลือกคำสั่งการทำงานต่างๆได้โดยใช้ตัวควบคุม (mouse) นอกจากนี้ยังเข้าใจง่าย กล่าวคือ โปรแกรมที่จัดทำขึ้นนี้สามารถมองภาพของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติได้ทุกมุมมอง นักศึกษาจึงเห็นภาพได้จริงโดยไม่ต้องจินตนาการ

4.3 นักศึกษาสามารถทำการศึกษาได้ด้วยตนเอง

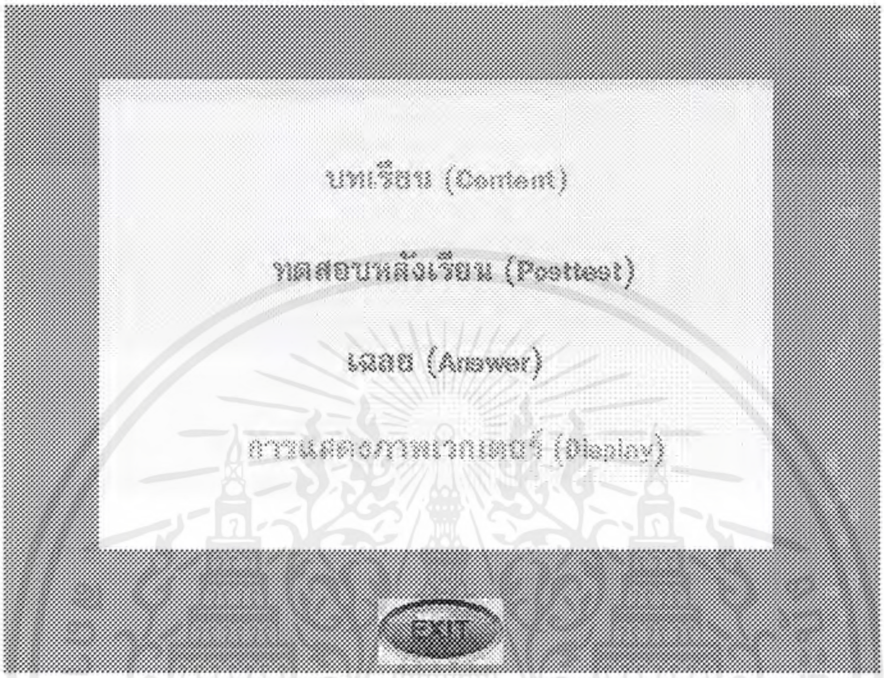
เนื่องจากโปรแกรมต้นแบบนี้จัดทำเป็นโปรแกรมช่วยสอนดังนั้นจุดประสงค์ที่สำคัญคือ นักศึกษาสามารถศึกษาได้ด้วยตนเอง โดยใช้ประโยชน์จากคอมพิวเตอร์ให้ได้สูงสุด

นอกจากนี้นักศึกษาสามารถทำการศึกษาเพิ่มเติมได้นอกห้องเรียน ทำให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเพิ่มขึ้น ทั้งยังช่วยฝึกทักษะในการพิจารณารูปสามมิติได้ดียิ่งขึ้น

4.4 การทำงานของโปรแกรม

การเขียนโปรแกรมสำหรับโปรแกรมต้นแบบนี้ จะเป็นการทำโปรแกรม C++Builder 3 และ Authorware 4 มาใช้งาน สำหรับโปรแกรมต้นแบบนี้มีการออกแบบแยกเป็นส่วนๆ และนำมาประกอบร่วมกันในการใช้งาน ขั้นตอนต่าง ๆ ในการทำงานของโปรแกรม เป็นดังนี้

1. เมื่อทำการ Run โปรแกรมต้นแบบ จะปรากฏหน้าต่าง ดังรูป



รูปที่ 4.4-1 เมื่อเริ่มต้น Run โปรแกรมต้นแบบ

ในหน้าต่างนี้ จะให้ผู้ใช้เลือกหัวข้อใดหัวข้อหนึ่งที่ต้องการ ซึ่งทั้งหมด 4 หัวข้อ ดังนี้

1.1 บทเรียน

1.2 แบบทดสอบ

1.3 เฉลย

1.4 การแสดงภาพเวกเตอร์

เมื่อเลือกแล้วจะเข้าสู่หน้าต่างถัดไป แต่ถ้าต้องการออกจากโปรแกรมต้นแบบให้คลิกเมาส์ที่ “EXIT”

2. จากหน้าต่างในข้อ 1 ถ้าผู้ใช้เลือก " บทเรียน " จะปรากฎหน้าต่างดังรูป

รูปที่ 4.4-2 เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ " บทเรียน "

ในหน้าต่างนี้ จะให้ผู้ใช้เลือกว่าต้องการทราบเนื้อหาของเวกเตอร์ในเรื่องใด ซึ่งมีทั้งหมดอยู่ 3 เรื่อง ดังนี้

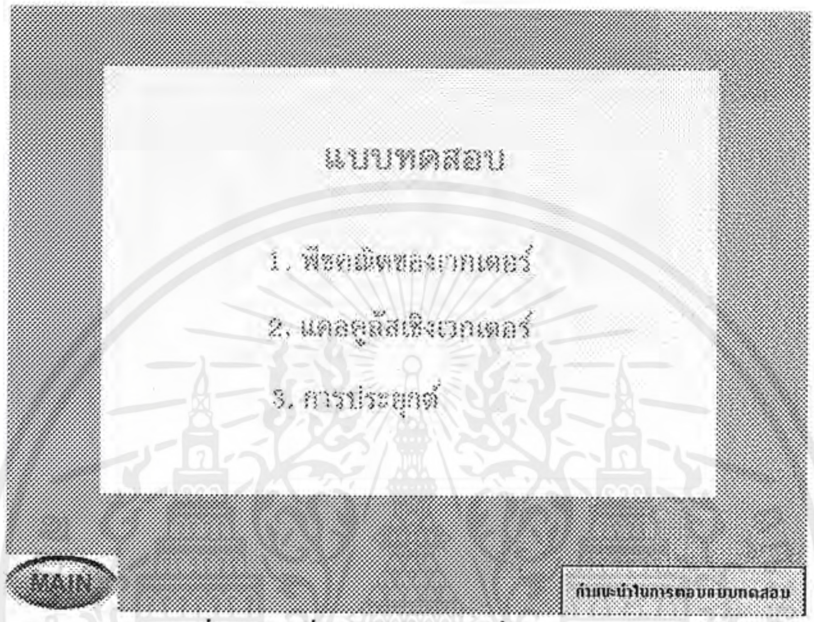
1.1 พีชคณิตของเวกเตอร์

1.2 แคลคูลัสเชิงเวกเตอร์

1.3 การประยุกต์

เมื่อเลือกที่หัวข้อใด จะเข้าสู่เนื้อหาบทเรียนของเรื่องนั้นๆ แต่ถ้าเลือกที่ "MAIN" จะกลับสู่หน้าต่างเมนูหลัก

3. จากหน้าต่างในข้อ 1 ถ้าผู้ใช้เลือกที่ " แบบทดสอบ " จะปรากฏหน้าต่างดังรูป



รูปที่ 4.4-3 เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ " แบบทดสอบ "

ในหน้าต่างนี้ให้ผู้ใช้เลือกว่า ต้องการทำแบบทดสอบเรื่องใด ซึ่งมีทั้งหมด 3 เรื่อง ดังนี้

3.1 พีชคณิตของเวกเตอร์

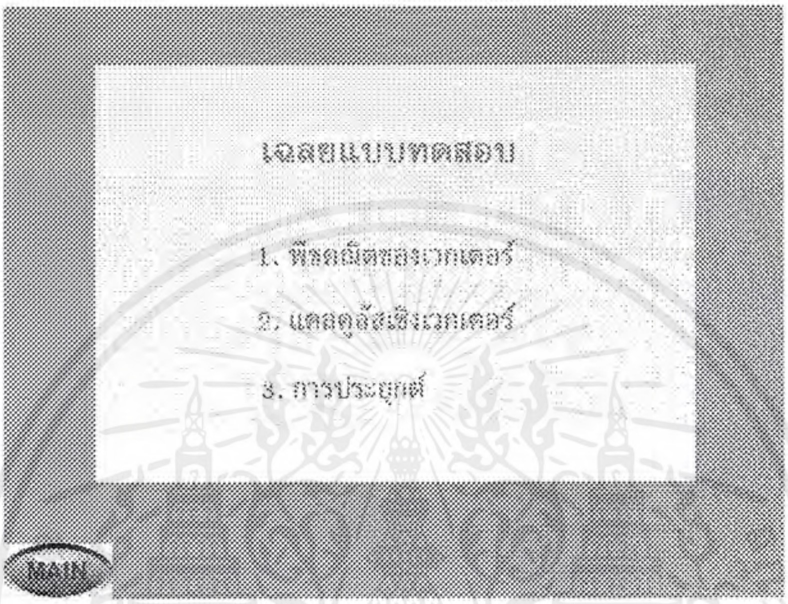
3.2 แคลคูลัสเชิงเวกเตอร์

3.3 การประยุกต์

ซึ่งแบบทดสอบนี้จะเป็นแบบเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง และนับคะแนนเก็บไว้ ถ้าผู้ใช้เลือกที่จะทำแบบทดสอบในเรื่องใดๆ ก็ตามจำเป็นต้องทำแบบทดสอบในเรื่องนั้นๆให้ครบทุกข้อ จึงจะสามารถกลับสู่หน้าต่างนี้ได้อีกครั้ง เพื่อเลือกแบบทดสอบที่ต้องการถัดไป แต่ถ้าเลือกที่ " MAIN " จะกลับสู่หน้าต่างเมนูหลัก

ในหน้าต่างนี้มีปุ่มให้คลิกเพื่อแนะนำการตอบแบบทดสอบนี้

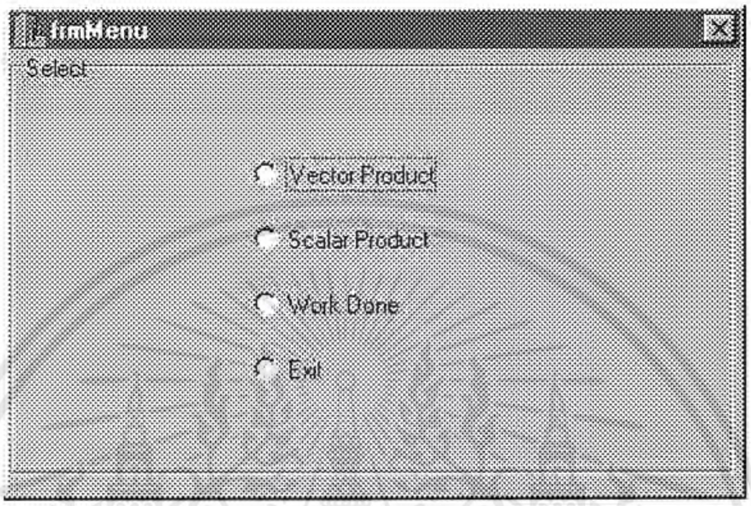
4. จากหน้าต่างในข้อ 1 ถ้าผู้ใช้เลือกที่ " เฉลย " จะปรากฏหน้าต่างดังรูป



รูปที่ 4.4-4 เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ " เฉลย "

ในหน้าต่างนี้ให้ผู้ใช้เลือกว่าต้องการตรวจดูวิธีทำของแบบทดสอบเรื่องใด สำหรับส่วนนี้จะเป็นการแสดงวิธีทำของแต่ละข้อในแต่ละเรื่องโดยละเอียด

5. จากหน้าต่างในข้อ 1 ถ้าผู้ใช้เลือกที่ " แสดงภาพเวกเตอร์ " ซึ่งจะเป็นส่วนของ C++ Builder 3 และปรากฏหน้าต่าง ดังรูป



รูปที่ 4.4-5 เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ " แสดงภาพเวกเตอร์ "

ในหน้าต่างนี้ให้ผู้ใช้เลือกว่าต้องการคำนวณผลลัพธ์ของเวกเตอร์แบบ โดยที่ผู้ใช้สามารถกำหนดส่วนประกอบของเวกเตอร์แต่ละตัวได้เอง มีให้เลือกทั้งหมด 3 แบบ ดังนี้

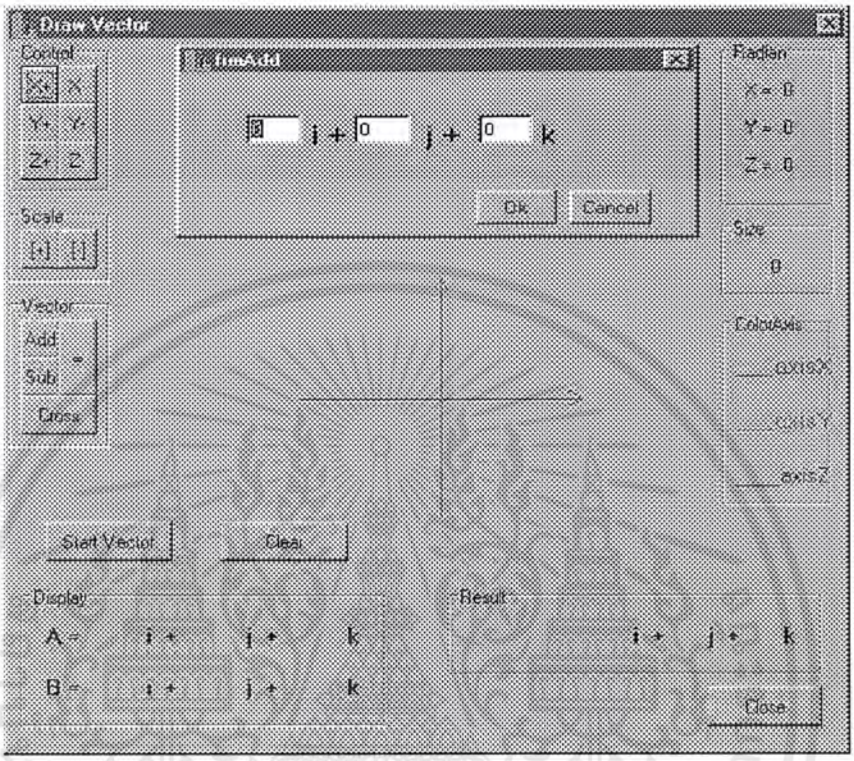
5.1 Vector Product

5.2 Scalar Product

5.3 Work done

เมื่อเลือกแล้ว จะปรากฏหน้าต่างถัดไป แต่ถ้าเลือกที่ "EXIT" จะกลับสู่หน้าต่างเมนูหลัก

6. จากหน้าต่างในข้อ 5 เมื่อผู้ใช้เลือกที่ "Vector Product" จะปรากฏหน้าต่างดังนี้



รูปที่ 4.4-6 เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ " Vector Product "

ในหน้าต่างนี้มีส่วนการรับค่าอยู่ 2 ส่วน คือ

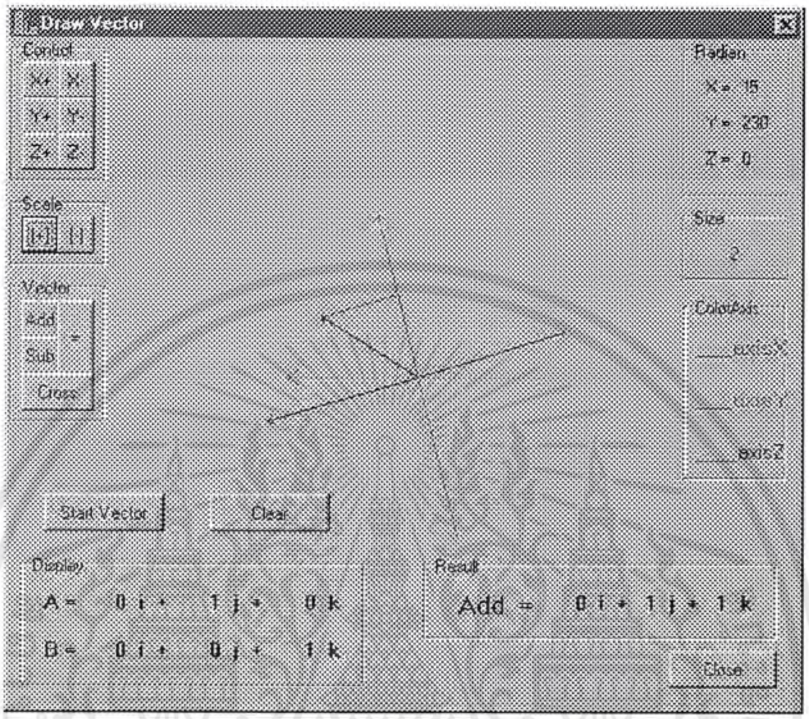
6.1 ส่วนที่ผู้ใช้สามารถเลือกวิธีการ operate จากที่กำหนดมาให้ทั้งหมด ดังนี้

- Add
- Dot
- Cross

6.2 ส่วนที่รับค่าของส่วนประกอบของเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์ มีทั้งหมด 3 ค่า ดังนี้ (ผู้ใช้จำเป็นต้องคลิกเมาส์ที่ "Start Vector" ก่อน)

- ส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน X
- ส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน Y
- ส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน Z

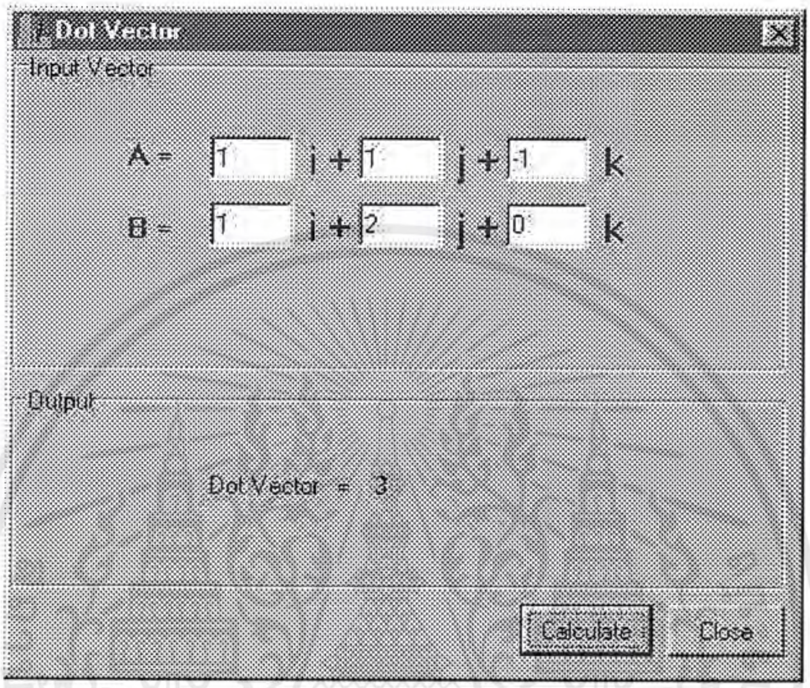
7. จากหน้าต่างในข้อ 6 เมื่อผู้ใช้เลือกที่ “ = ” จะปรากฏหน้าต่างดังรูป



รูปที่ 4.4-7 เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ “ = ”

ในหน้าต่างนี้จะแสดงภาพของเวกเตอร์ต่าง ๆ ในปริภูมิสามมิติ และส่วนประกอบทางแกน X แกน Y แกน Z ของเวกเตอร์เหล่านั้น รวมทั้งวิธีที่ใช้ในการ operate โดยที่ค่าเหล่านั้นผู้ใช้กำหนดมา ทั้งนี้ผู้ใช้ยังสามารถทำให้ภาพนั้น ๆ หมุนตามแกน X แกน Y หรือแกน Z ได้ตามต้องการ แต่ถ้าคลิกเมาส์ที่ “Close” จะกลับสู่หน้าต่างในข้อ 5

8. จากหน้าต่างในข้อ 5 เมื่อผู้ใช้เลือกที่ "Scalar Product" จะปรากฏหน้าต่าง ดังรูป



รูปที่ 4.4-8 จากหน้าต่างในข้อ 5 เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ "Scalar Product"

ในหน้าต่างนี้จะรับค่าส่วนประกอบของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ และเวกเตอร์แต่ละตัวนั้นจะมีส่วนประกอบทางแกน X แกน Z และแกน Z ดังนั้นจะรับค่าทั้งหมด 6 ค่า ดังนี้

8.1 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ A ทางแกน X

8.2 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ A ทางแกน Y

8.3 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ A ทางแกน Z

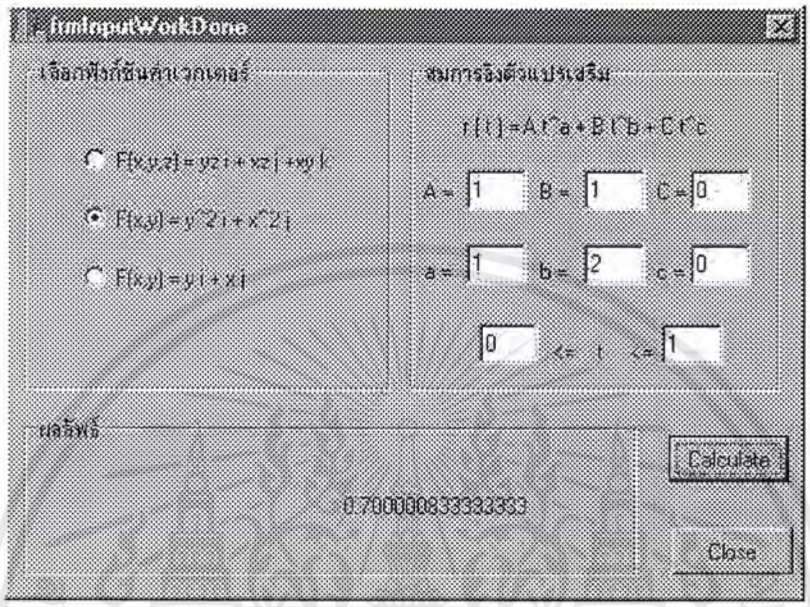
8.4 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ B ทางแกน X

8.5 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ B ทางแกน Y

8.6 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ B ทางแกน Z

ถ้าคลิกเมาส์ที่ " Calculate " โปรแกรมจะแสดงผลของ Scalar Product ซึ่งเกิดจากเวกเตอร์ที่ผู้ใช้กำหนด แต่ถ้าคลิกเมาส์ที่ "Close" จะกลับสู่หน้าต่างในข้อ 5

9. จากหน้าต่างในข้อ 5 เมื่อผู้ใช้เลือกที่ " WorkDone " จะปรากฏหน้าต่างดังรูป



รูปที่ 4.4-9 เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ " WorkDone " จากหน้าต่างในข้อ 5

ในหน้าต่างนี้มีส่วนที่รับค่า 2 ส่วน คือ

9.1 ส่วนที่ผู้ใช้ต้องเลือกแรงที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ มีทั้งหมด 3 แรง ดังนี้

- $\bar{F}(x,y,z) \;=\; yz\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + xy\,\bar{k}$
- $\bar{F}(x,y) \;=\; y^2\,\bar{i} + x^2\,\bar{j}$
- $\bar{F}(x,y) \;=\; yx\,\bar{i} + x\,\bar{j}$

9.2 ส่วนที่รับค่าสัมประสิทธิ์ของสมการอิงตัวแปรเสริม และขอบเขตของตัวแปร

เมื่อผู้ใช้คลิกเมาส์ที่ "Calculate" โปรแกรมจะแสดงค่า WorkDone ที่คำนวณได้ แต่ถ้าคลิกเมาส์ที่ "Close" จะกลับสู่หน้าต่างในข้อ 5

บทที่5
สรุปผลการจัดการปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์ เป็นโปรแกรมที่สร้างขึ้นเพื่ออำนวยความสะดวกในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ฟิลด์เป็นการสอนโดยอาศัยความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ การมองเห็น และความเข้าใจในสมการเวกเตอร์ และภาพของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติได้ดีขึ้น

5.2 สรุปผลปัญหา

ผลการวิจัยโปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์ สามารถสรุปความสามารถโดยสังเขปได้ดังนี้

1) สามารถใช้งานส่วนการควบคุมต่างๆได้โดยใช้ เมาส์ (mouse) ซึ่งเป็นการทำงานด้วยส่วนการติดต่อแบบกราฟฟิก(Graphics User Interface : GUI)

2) โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์นี้ สามารถทำการศึกษาได้ด้วยตนเองภายนอกห้องเรียน เพื่อเป็นการเพิ่มทักษะให้แก่นักศึกษาอีกทางหนึ่ง

3) โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์นี้ สามารถการสอนของอาจารย์สะดวกยิ่งขึ้น โดยอาจารย์ผู้สอนสามารถแสดงภาพของเวกเตอร์ในปริภูมิสาม มิติ ให้นักศึกษาเข้าใจมากขึ้น

4) โปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเรื่องเวกเตอร์ฟิลด์นี้ มีส่วนของแบบทดสอบ และส่วนของการเฉลยแบบทดสอบ ทำให้นักศึกษาสามารถประเมินได้ว่ามีความเข้าใจในเนื้อหามากน้อยเพียงใด

5) ผู้ใช้โปรแกรมสามารถป้อนค่าส่วนประกอบของเวกเตอร์แต่ละตัวได้ด้วยตนเอง และยังสามารถเลือกวิธีการ Operate ได้ ซึ่งจะได้เวกเตอร์ผลลัพธ์และภาพกราฟฟิกในปริภูมิสามมิติของเวกเตอร์นั้น

6) โปรแกรมที่จัดทำขึ้นในส่วนที่แสดงภาพ 3มิตินั้น จะบอกรายละเอียดต่างๆ เกี่ยวกับรูปสามมิติ ที่เกิดขึ้น เช่น รูปเวกเตอร์ที่เกิดขึ้นนั้นหมุนในแนว แกนX แกนY หรือแกนZ

5.3 ข้อเสนอแนะ (แนวทางการวิจัย)

เนื่องจากปัญหาพิเศษ เรื่องโปรแกรมช่วยสอนในหัวข้อเวกเตอร์ฟิลด์นั้น มีการแก้ปัญหาสมการเวกเตอร์เพียงบางส่วนเท่านั้น ดังนั้นหากผู้ใดสนใจจะทำการพัฒนาโปรแกรมต่อไปสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ ในส่วนของการอินทิเกรตสามชั้น จนถึงการอินทิเกรตขั้นสูง และเนื่องจากโปรแกรมนี้พัฒนาโดยโปรแกรม C++ Builder3 และ Authorware 4 สำหรับ Windows 95 ดังนั้นผู้ที่ทำการวิจัยจึงควรทำการศึกษาการใช้งานโปรแกรมเหล่านี้ให้เข้าใจด้วยเช่นกัน

ภาคผนวก

1. แบบทดสอบพร้อมเฉลยเรื่อง " พีชคณิตของเวกเตอร์ "

1.1 กำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ จงหาค่า $3\vec{u} - \vec{v}$

วิธีทำ

$$3\vec{u} = 3(3\vec{i} - \vec{j})$$
$$3\vec{u} = 9\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$
$$3\vec{u} + \vec{v} = (9+2)\vec{i} - (-3-1)\vec{j}$$
$$3\vec{u} + \vec{v} = 7\vec{i} + 4\vec{j}$$

1.2 จงแสดงว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$ ว่าเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

วิธีทำ

$$\vec{w} = \vec{u} \quad , \quad \vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$a\vec{w} + b\vec{z} = 0$$

ให้ $a = 0$

$$a + b = 0 \quad , \quad 0 + b = 0$$
$$b = 0$$

จาก $a\vec{w} + b\vec{z} = 0$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

แสดงว่า $\vec{w}$ และ $\vec{z}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

1.3 จงหาค่าของ k ที่เป็นไปได้ที่ทำให้เวกเตอร์ $\vec{u}$, $3\vec{u} + k\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขึ้นต่อกัน

วิธีทำ

$$a(\vec{u} + 2\vec{v}) + b(3\vec{u} + k\vec{v}) = 0$$
$$(a\vec{u} + 3b\vec{u}) + (2a\vec{v} + k\vec{v}) = 0$$
$$a + 3b = 0, \ 2a + kb = 0$$
$$a = -3b,$$

แทนค่า a ลงในสมการ $2a + kb$ จะได้

$$2(-3b) + kb = 0$$
$$-6b + kb = 0$$
$$(-6 + k)b = 0$$
$$-6 + k = 0$$
$$k = 6$$

1.4 กำหนดเวกเตอร์ $\vec{w} \leftrightarrow (0,1)$, $\vec{r} \leftrightarrow (3,4)$, $\vec{s} \leftrightarrow (1,-4)$ จงหาค่า a , b ที่ทำให้ $\vec{s} = a\vec{w} + b\vec{r}$

วิธีทำ

$$(1,-4) = a(2,0) + b(3,4)$$
$$\vec{u} - 4\vec{v} = a(2\vec{u}) + b(3\vec{u} + 4\vec{v})$$
$$a(2\vec{u}) = 0,\ b(3\vec{u} + 4\vec{v}) = 0$$

$$\vec{u} = 2a\vec{u} + 3b\vec{u} \qquad (1)$$
$$-4\vec{v} = 4b\vec{v},\quad b = -1 \qquad (2)$$

แทนค่าลงในสมการที่ (1) จะได้

$$\vec{u} = 2a\vec{u} + 3b\vec{u}$$
$$1 = 2a + 3b$$
$$1 = 2a + 3(1),\ 1 = 2a + 3$$
$$-2 = 2a\ ,\ a = -1$$

ดังนั้น $a = 1,\ b = -1$ เป็นค่าที่ทำให้ $\vec{s} = a\vec{w} + b\vec{r}$

1.5 กำหนด O เป็นจุดกำเนิด (0,0) จุด A,B และ C เป็นจุดที่มีพิกัด (1,1) , (-1,1) และ (2,-1) ตามลำดับ จงหาค่าของ $\left|\overrightarrow{OA}\right|$

วิธีทำ

จากจุด O (0,0) และ จุด A (1,1)

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2}$$
$$= \sqrt{1+1}$$
$$= \sqrt{2}$$

1.6 จงแสดงว่าสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดต่อไปนี้ (1,-1), (6,-2), (7,5) เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

วิธีทำ

ให้ A = (-1,-1), B = (6,-2), C = (7,5)

$$|\vec{u}| = \sqrt{(6-(-1))+(-2-(1))}$$
$$= \sqrt{(7)^2+(-1)^2}$$
$$= \sqrt{50}$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{(7-6)^2+(5-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{(1)^2+(-7)^2}$$
$$= \sqrt{50}$$

จะเห็นได้ว่า $|\vec{u}| = |\vec{w}|$

$\therefore \quad AC = BC$

แสดงว่า สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

1.7 กำหนดให้ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ จงหาค่า $\vec{u}.\vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u}.\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$
$$= (1\times 2)+(1\times 1)$$
$$= 3$$

1.8 แสดงว่าสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดต่อไปนี้ (-1,-1), (6,-2), (7,5) เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และเป็นมุมฉากด้วย

วิธีทำ

ให้ A = (-1,-1), B = (6,-2), C = (7,5)

$$|\vec{u}| = \sqrt{(6-(-1))+(-2-(1))}$$
$$= \sqrt{(7)^2+(-1)^2}$$
$$= \sqrt{50}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(7-(-1))^2+(5-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{(8)^2+(6)^2}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(7-6)^2+(5-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{(1)^2+(-7)^2}$$
$$= \sqrt{50}$$

จะเห็นได้ว่า $|\vec{u}| = |\vec{w}|$

$\therefore \quad AC = BC$

แสดงว่าสามเหลี่ยมABCเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วต่อไปจะแสดงว่าเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$A\vec{C} = \vec{u} = 6-(-1)\vec{i} + -2-(-1)\vec{j}$$
$$= 7\vec{i} - \vec{j}$$

ด้าน $$B\vec{C} = \vec{w} = (7-6)\vec{i} + 5-(-2)\vec{j}$$
$$= \vec{i} + 7\vec{j}$$
$$\hat{u}\cdot\vec{w} = 7-7$$
$$= 0$$

แสดงว่า ΔABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.9 จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีจุดยอดอยู่ที่ A(5,2) , B(7,1) , C(2,-4) , D(0,-1)

วิธีทำ

ให้ $AB = \vec{u},\ BC = \vec{v},\ CD = \vec{w},\ AD = \vec{z}$

$$\vec{u} = (7-5)\vec{i} + (-1-2)\vec{j}$$
$$= 2\vec{i} - 3\vec{j}$$
$$\vec{v} = (2-7)\vec{i} + (-4-(-1))\vec{j}$$
$$= -5\vec{i} - 3\vec{j}$$
$$\vec{w} = (0-2)\vec{i} + (-1-4)\vec{j}$$
$$= -2\vec{i} - 5\vec{j}$$
$$\vec{z} = (0-5)\vec{i} + (-1-2)\vec{j}$$
$$= -5\vec{i} - 3\vec{j}$$

เพราะฉะนั้นพื้นที่ สี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $-bc+ad$

$$AB = -3\vec{i} + 2\vec{j},\ A\vec{D} = -5\vec{i} - 3\vec{j}$$
$$AB\cdot AD = 15-6 = 9$$

เพราะฉะนั้นพื้นที่ สี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ 9

2. แบบทดสอบพร้อมเฉลยเรื่อง " แคลคูลัสเชิงเวกเตอร์ "

2.1 จงหาสมการของระนาบสัมผัสกับ Hyperboloid $4x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 36 = 0$ ที่จุด $(3\sqrt{3}, 2, 2)$

วิธีทำ

$$F(x,y,z) = 4x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 36$$

$$F_x = 8x \quad , \quad F_y = -18y \quad , \quad F_z = -18z$$

ดังนั้น $F_x(3\sqrt{3}, 2, 2) = 24\sqrt{3}$, $F_y(3\sqrt{3}, 2, 2) = -36$

และ $F_z(3\sqrt{3}, 2, 2) = -36$

แทนในสมการระนาบสัมผัสจะได้

$$24\sqrt{3}\,(x - 3\sqrt{3}) + (-36)(y-2) - 36(z-2) = 0$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}x - y - z = 0$$

2.2 ถ้า $\vec{F}(x,y,z) = (3x+6y)\vec{i} - 14yz\,\vec{j} + 20xz^2\,\vec{k}$ จงหาค่าของ $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$ จาก $(0,0,0)$ ไปยัง $(1,1,2)$ ตามเส้นโค้งC ต่อไปนี้ $x=t, y=t^2, z=t^3$

วิธีทำ

เส้นโค้ง C กำหนดได้ด้วย $x = t \quad , \quad y = t^2 \quad , \quad z = t^3 \quad , \quad 0 \le t \le 1$

$$\therefore \int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C (3x^2 + 6y)\,dx - 14yz\,dy + 20xz^2\,dz$$

$$= \int_0^1 (3t^2 + 6t^2)\,dt - 14t^2(t^3)(2t\,dt) + 20t(t^3)^2(3t^2\,dt)$$

$$= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt$$

$$= 5$$

2.3 จงหา $I = \int_C x^2 y\,dx + (x - zy)\,dy + xyz\,dz$ เมื่อ C เป็นส่วนของพาราโบลา $y = x^2$ ในระนาบ $z = 2$ จากจุด A(0, 0, 2) ถึงจุด B(1, 1, 2)

วิธีทำ

C จะกำหนดได้ด้วยสมการพาราเมตริก คือ

$$x = t \quad , \quad y = t^2 \quad , \quad z = 2 \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\therefore\ dx = dt \quad , \quad dy = 2t\,dt \quad , \quad dz = 0$$

$$\therefore\ I = \int_0^1 (t^2)(t^2)\,dt + (t-2)(2t\,dt)$$

$$= \int_0^1 (t^4 + 2t^2 - 4t)\,dt \quad = \quad \frac{11}{30}$$

2.4 จงหา $\int_C x^2 y\,ds$ เมื่อ C เป็นเส้นตรงที่โยงจากจุด (0, 1, 2) ไปยังจุด (1, 3, 4)

วิธีทำ

หาสมการแบบเวกเตอร์ของเส้นตรง C จะได้

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) = (0, 1, 2) + t(1, 2, 2) \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (1+2t)\vec{j} + (2+2t)\vec{k}$$

สมการของเส้นตรง C แบบพาราเมตริก คือ

$$x = t \quad , \quad y = 1+2t \quad , \quad z = 2+2t \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\int_C x^2 y\,ds = \int_0^1 t^2(1+2t)\sqrt{1+4+4}\,dt$$

$$= 3\int_0^1 (t^2 + 2t^3)\,dt = 3\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

2.5 จงหาค่า $\int_C y^2\,dx - xy\,dy$ โดยใช้ทฤษฎีของกรีน เมื่อ R เป็นบริเวณระหว่าง $y = 1$ และ $y = 1 - x^2$ เมื่อ $1 \le x \le 2$

วิธีทำ

$$f(x,y) = y^2 \quad , \quad g(x,y) = -xy$$

$$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -y$$

จากสูตร จะได้

$$\int_C (y^2\,dx - xy\,dy) = \int_R\int(-y-2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2\int_1^{1+x^2}(-3y)\,dy\,dx$$

$$= \int_1^2\left[-\frac{3y^2}{2}\right]_1^{1+x^2} dx = -\frac{16}{3}$$

2.6 จงหา $\int_S\int \vec{u}.\vec{n}\,dA$ เมื่อ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ และ S คือผิวนอกของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ซึ่ง $\vec{n}$ เป็น unit normal vector ของ S ที่ชี้ออก

วิธีทำ

$$S \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}$$

$$\therefore \int\int \vec{u}.\vec{n}\,dA = \int_s\int(x^2+y^2+z^2)\,dA$$

$$= \int_s\int dA = 4\pi$$

2.7 จงหา $\iint_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,dA$ เมื่อ $\vec{u} = 4xz\vec{i} - y\vec{j} + yz\vec{k}$ และ S คือ ผิวนอกของลูกบาศก์ $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$

วิธีทำ

จากทฤษฎีไดเวอร์เจนท์

$$\int_S\int \vec{u}.\vec{n}\,dA \;=\; \iint_D\int div\ \vec{u}\ dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4x-2y+y)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z-y)\,dx\,dy\,dz \quad = \int_0^1\int_0^1 (4xz-xy)_0^1\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (4z-y)\,dy\,dz \quad = \int_0^1 (4yz-\frac{y^2}{2})_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 (4z-\frac{1}{2})\,dz \quad = (2z^2-\frac{z}{2})_0^1 = \frac{3}{2}$$

2.8 จงหา $\int_C (x^2y\,dx+(x-z)\,dy+xyz\,dz)$ เมื่อ C เป็นส่วนของเส้นตรง $y=x$, $z=2$ จากจุด (0,0,2) ไปยังจุด (1,1,2)

วิธีทำ

$$C\ :\ y=x\ ,\ z=2\ ,\ 0\le x\le 1$$

$$dy=dx\ ,\ dz=0$$

$$\int_C (x^2y\,dx+(x-z)\,dy+xyz\,dz)$$

$$=\int_0^1 x^2x\,dx+(x-2)\,dx$$

$$=\int_0^1 (x^3+x-2)\,dx$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-2x\Big|_0^1 = -\frac{5}{4}$$

2.9 จงหาค่าของ $\int_C\left(\frac{y\ dx-x\ dy}{x^2+y^2}\right)$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลม $x^2+y^2=1$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

วิธีทำ

$$f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}\ , \qquad g(x,y)=\frac{-x}{x^2+y^2}$$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด (0,0)

ซึ่งอยู่ในบริเวณ R ดังนั้นโจทย์ข้อนี้ใช้ทฤษฎีบทของกรีนไม่ได้ จึงต้องหาค่าโดยวิธีโดยตรง ดังนี้

ให้ C มีสมการอิงตัวแปรเสริมคือ

$x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ แล้ว $dx = -\sin t\ dt$, $dy = \cos t\ dt$

$$\therefore \int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin^2 - \cos^2 t}{1} \right] dt$$

2.10 จงหาค่า $\int_{(1,4)}^{(3,1)} (2xy^3 dx + (1+3x^2y^2))dy$

วิธีทำ

$\vec{F}(x,y) = 2xy^3 dx + (1+3x^2y^2)\vec{j}$ เป็นเกรเดียนต์ของ $\phi(x,y) = y + x^2y^3 + C$

$$\begin{aligned}
\int_{(1,4)}^{(3,1)} (2xy^3 dx + (1+3x^2y^2))dy &= \int_{(1,4)}^{(3,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= \phi\ (3,1) - \phi\ (1,4) \\
&= (10+C) - (68+C) \\
&= -58
\end{aligned}$$

3. แบบทดสอบพร้อมเฉลยเรื่อง "การประยุกต์ของเวกเตอร์"

3.1 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ถ้า $\vec{F}(x,y,z)=yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ และ C เป็นเส้นโค้ง $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}+t^3\,\vec{k}$ $(0\le t\le 1)$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1\left(\left[\vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right]dt\right)$$

$$= \int_0^1\left(t^2t^3\,\vec{i}+t\,t^3\,\vec{j}+t\,t^2\,\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}+2t\,\vec{j}+3t^2\,\vec{k}\right)dt$$

$$= \int_0^1\left(t^5+2t^5+3t^5\right)dt = \int_0^1 6t^5\,dt = 1$$

3.2 กำหนดแรง $\vec{F}=x\,\vec{i}-z\,\vec{j}+2y\,\vec{k}$ จงหางานในการเคลื่อนวัตถุไปตามเส้นโค้ง C ที่มีสมการ คือ $z=y^4$, $x=1$ จากจุด (1,0,0) ไปยัง (1,1,1)

วิธีทำ

$$\text{งาน (W)} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_C (x\,dx - z\,dy + 2y\,dz)$$

เส้นโค้ง C กำหนดด้วย $z=y^4$, $x=1$, $0\le y\le 1$

$$dz = 4y^3\,dy \quad , \quad dx=0$$

$$\therefore \text{ งาน } = \int_0^1 -y^4dy+2y\left(4y^3\,dy\right)$$

$$= \int_0^1 7y^4\,dy = 7$$

3.3 วัตถุเคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวงของครึ่งวงกลม $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$, $(0\le t\le\pi)$ เมื่อกำหนดแรง $\vec{F}(x,y)=e^y\,\vec{i}+xe^y\,\vec{j}$ จงหางานที่กระทำในการเคลื่อนวัตถุ

วิธีทำ

$$\text{งาน (W)} = \int_C \vec{F}\cdot dr = \int_C\left(e^y dx + xe^y dy\right) \qquad (1)$$

เมื่อ $\vec{F}(x,y)$ เป็นเกรเดียนต์ของบางฟังก์ชัน ϕ หา ϕ

เมื่อ $v\phi = \vec{F}(x,y) = e^{y}\,\vec{i} + xe^{y}\,\vec{j}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = e^{y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = xe^{y} \qquad (2)$$

ดังนั้น $\phi = \int e^{y}dx = xe^{y} + k(y)$ (3)

$$\text{และ} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = xe^{y} + k'(y) \qquad (4)$$

3.4 จงหาค่า $\int\limits_{(1,4)}^{(3,1)}\left(2xy^{3}dx + \left(1+3x^{2}y^{2}\right)\right)dy$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int\limits_{(1,4)}^{(3,1)}\left(2xy^{3}\,dx + \left(1+3x^{2}y^{2}\right)dy\right) &= \int\limits_{(1,4)}^{(3,1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= \phi(3,1) - \phi(1,4) \\
&= (10+C) - (68+C) \\
&= -58
\end{aligned}$$

3.5 อนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 1 หน่วย ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยแรง $F(x,y) = \left(e^{x} - y^{3}\right)i + \left(\cos y + x^{3}\right)j$ จงใช้ทฤษฏีบทของกรีนหางานในการเคลื่อนอนุภาคนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
W &= \int\limits_{C}\left(\left(e^{x} - y^{3}\right)dx + \left(\cos y + x^{3}\right)dy\right) \\
&= \iint\limits_{R}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos y + x^{3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x} - y^{3}\right)\right]dA \\
&= \iint\limits_{R}\left(3x^{2} + 3y^{2}\right)dA \\
&= 3\iint\limits_{R}\left(x^{2} + y^{2}\right)dA \\
&= 3\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1}\left(r^{2}\right)r\,dr\,d\theta
\end{aligned}$$

บรรณานุกรม

1. กิตติ ภักดีวัฒนะกุล , กุลชน รักษ์ประเทือง , พีระ ชื่นจิต , Authorware 4
2. ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ , คณิตศาสตร์ 1 ตอนที่ 1 , งานโรงพิมพ์กองกลางสำนักงานอธิการบดี สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
3. ภัคคินี ยิมเรวัต , การวิเคราะห์เชิงตัวเลข , โครงการตำรา : คณะวิทยาศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง , 2535
4. สมพัฒน์ รุ่งตะวันเรืองศรี , เรียนรู้คอมพิวเตอร์กราฟฟิก 2 มิติ ด้วยภาษา C
5. C.R. WYLIE, Jr., Advanced Engineering Mathematics , McGraw-Hill Book Company , INC. , 1951.
6. Frevin Kreyszig , Advanced Engineering Mathematics , John Wiley and Sons, INC. Toronto , 1972.
7. James D. Foley , Andries Van Dam , Steven K. Feiner , John F. Hughes , Computer Graphic Principle and Practice.
8. Kent Reisdorph , Borland C++Builder 3 in 21 Days , A Division of Macmillan Computer Publishing.
9. Louis Baker , Ph.D. , C TOOLS for Scientists and Engineers ,McGraw-Hill Publishing Company Newyork , 1989.
10. PAUL CALTER , Problem Solving with Computers , McGraw-Hill Book Company London , 1973.
11. Stven Harrington , Computer Graphics A Programming Approach .