โปรแกรมผลต่างสืบเนื่องสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

FINITE DIFFERENCE PROGRAM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

จิราพร บวรสิทธิชัย
เรณู วัฒนแก้วเพชร
ศิริลักษณ์ ศรีบูระเดช

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2542

FINITE DIFFERENCE PROGRAM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

JIRAPORN BAWORNSITTICHAI
RENOO WATTANAKAEWPETCH
SIRILAK SRIBURADET

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LARDKRABANG
ACADEMIC YEAR 1999

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมผลต่างสืบเนื่องสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย FINITE DIFFERENCE PROGRAM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจิราพร บวรสิทธิชัย 39054104 นางสาวเรณู วัฒนแก้วเพชร 39054135 นางสาวศิริลักษณ์ ศรีบูระเดช 39054144
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2542

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์กฤษฎา ไตรสุรัตน์	
กรรมการ	อาจารย์กาญจนา คำนึงกิจ	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ	

(อาจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมผลต่างสืบเนื่องสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจิราพร บวรสิทธิชัย 39054104
	นางสาวเรณู วัฒนแก้วเพชร 39054135
	นางสาวศิริลักษณ์ ศรีบูระเดช 39054144
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2542
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล
	รองศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

บทคัดย่อ

ปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ มักเป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODEs) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDEs) เช่น การถ่ายเทความร้อน การสั่นของเส้นเชือก และอื่น ๆ เนื่องจากปัญหาส่วนใหญ่ มักจะเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว ดังนั้นจึงมักใช้รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาผลเฉลยที่แท้จริงได้

ดังนั้น วิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการหาผลเฉลยของ PDEs และสำหรับปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อน ผลเฉลยเชิงตัวเลขก็สามารถหาได้ เนื่องจากเทคโนโลยีทางด้านคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้ามากขึ้น และจากอัลกอลิทึมเชิงตัวเลขมีประสิทธิภาพมากขึ้น

ดังนั้น ในปัญหาพิเศษฉบับนี้ จึงได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ได้รวบรวมเนื้อหา และวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบต่างๆ ไว้ เพื่อใช้หาผลเฉลยสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยตามวิธีการต่างๆ ซึ่งในโปรแกรมก็ยังมีส่วนที่บอกถึงวิธีการใช้โปรแกรม และมีส่วนของเนื้อหา เพื่อให้ผู้ใช้สามารถใช้โปรแกรมได้ง่ายยิ่งขึ้น และสามารถเข้าใจได้ว่า แต่ละวิธีการที่ใช้หาผลเฉลยมีขั้นตอนอย่างไรบ้าง

Special Project Title	Finite Difference Program for Partial Differential Equation
Students	Miss Jiraporn Bawornsittichai 39054104
	Miss Renoo Wattanakaewpetch 39054135
	Miss Sirilak Sriburadet 39054144
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	1999
Special Project Advisor	Associate Professor Pakkinee Chitsakul
	Assistant Professor Sunthorn Suchatvejapoom

ABSTRACT

Various science and engineering problems are modelled mathematically by ordinary differential equations (ODEs) or partial differential equations (PDEs) such as heat transfer, motion for the string, etc. As most practical problems involves more than one independent variable, they are inevitably modelled by (PDEs) and many of them can not find exact solution.

Therefore the numerical method is necessary for the solution of PDEs and the numerical solution can be obtained for complicated problem due to the advance in computer technology and the availability of more sophisticated numerical algorithm.

So this special problem focuses on the invention and development of the computer program. This computer program includes content about PDEs and method of using , help users to understand about PDEs and convenient to find solution.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องโปรแกรมผลต่างสืบเนื่องสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่ได้ประสาทวิชา ความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำ และยังต้องขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ จนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2543

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากในการเรียนการสอนสมัยก่อนนี้ สำหรับเรื่องการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) ยังไม่ได้ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งต้องใช้เวลาในการหาผลเฉลยนาน และผลเฉลยที่ได้อาจมีความผิดพลาดเนื่องจากมีการคำนวณมาก ดังนั้นทางคณะผู้จัดทำจึงมีความต้องการที่จะนำเสนอผลงานชิ้นนี้ออกมาในรูปของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อที่จะสามารถใช้งานได้อย่างสะดวก รวดเร็ว และเป็นประโยชน์แก่นักเรียน นักศึกษา หรือผู้ที่สนใจในการแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ให้ได้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อย่างรวดเร็วและถูกต้องมากยิ่งขึ้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบต่าง ๆ รวมทั้งรู้และเข้าใจถึงวิธีในการหาผลเฉลยโดยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical methods)
2. เพื่อให้นักเรียนได้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อย่างรวดเร็วและถูกต้องมากยิ่งขึ้น

1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

จากการศึกษาลักษณะสมการในรูปแบบต่างๆ รวมทั้งวิธีการต่างๆ ในเชิงตัวเลข ที่ใช้หาผลเฉลย จนมีความเข้าใจแล้ว รวมทั้งศึกษาถึงภาษาทางคอมพิวเตอร์ที่ใช้พัฒนาโปรแกรม จะสามารถพัฒนาโปรแกรมที่สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อย่างรวดเร็ว และถูกต้องแม่นยำมากขึ้น โดยใช้ความรู้จากการที่ได้ศึกษามา

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการศึกษา

ในการทำปัญหาพิเศษนี้ ได้ใช้ทฤษฎีทางด้านระเบียบวิธีเชิงตัวเลข(Numerical Method) โดยเฉพาะวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference) ในการหาผลเฉลยโดยได้ศึกษาจากหนังสือที่มีทฤษฎีนี้เกี่ยวข้องอยู่

1.5 ขอบเขตการศึกษา

ขอบเขตของปัญหาพิเศษจะทำการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย 3 ลักษณะเท่านั้น คือ 1. Elliptic Equation 2. Parabolic Equation 3. Hyperbolic Equation โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข รวมทั้งยังมีวิธีหาผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์ (Analytic method) แสดงให้ดูเพื่อเปรียบเทียบความถูกต้องของผลเฉลย

1.6 ขั้นตอนการศึกษา

1. ศึกษาลักษณะและวิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
2. ศึกษาภาษาทางคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการเขียนโปรแกรม
3. ทำการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการหาผลเฉลย
4. ทดสอบและทำการแก้ไขโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นเพื่อให้มีความถูกต้องและสามารถใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ
5. ทำการรวบรวมข้อมูลและจัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

บทที่ 2
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

2.1 ความรู้เบื้องต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Introduction to Partial Differential Equation)

2.1.1 นิยามพื้นฐาน

นิยามพื้นฐานบางอย่างที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation หรือ PDE) ที่ควรรู้มีดังต่อไปนี้

<u>นิยามที่ 1</u> สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่า 1 ตัว ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว จะเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (PDE) ตัวอย่างเช่น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว คือ x และ t

<u>นิยามที่ 2</u> อันดับของอนุพันธ์สูงสุดจะเรียกว่า อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย จากตัวอย่างข้างบนเป็นอันดับที่ 2

<u>นิยามที่ 3</u> สมการเชิงเส้น (Linear Equation) หมายถึง สมการที่มีตัวแปรตาม และอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามที่มีดีกรีประกอบกันในแต่ละเทอมของสมการ จะต้องไม่เกิน 1 ตัวอย่างเช่น

1) $u_{xx} = 0$
2) $u_{yy} = 0$
3) $u_{xy} = 0$
4) $u_{xy} + u_x + x + y = 0$
5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (one-dimensional wave equations)
6) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (one-dimensional heat equations)
7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ (two-dimensional Laplace equations)

8) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ (two-dimensional heat equations)

9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (two-dimensional Laplace equations)

10) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (three-dimensional Laplace equations)

11) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ (two-dimensional Poisson equations)

ฯลฯ โดยที่ c เป็นค่าคงที่

สมการที่ไม่ใช่เชิงเส้น เช่น $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ ฯลฯ

<u>นิยามที่ 4</u> รูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับ 2 ที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว คือ x และ y

กำหนดโดย

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu = G$$

ที่ $A,B,C,\ldots,G$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y เมื่อ $G(x,y)=0$ สมการนี้จะเรียกว่า **เอกพันธ์** หรือ Homogenous ถ้าไม่เท่ากับ 0 จะเรียกว่า **ไม่เอกพันธ์** (Non-Linear)

ตัวอย่างที่ให้ไว้ทั้ง 11 ตัวอย่าง เป็น Homogenous ยกเว้นตัวอย่างที่ 4 และ 11 ไม่เป็น Homogenous ซึ่งคุณสมบัติพิเศษของสมการเชิงเส้นชนิด Homogenous (Linear Homogenous Equation) คือ ถ้า u_1 กับ u_2 ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้น ชนิด Homogenous เราจะได้ว่า $u=c_1u_1+c_2u_2$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นชนิด Homogenous นั้นด้วย

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและผลเฉลยของสมการ

ปัญหาต่างๆ ทางด้านวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ มักเป็นรูปจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสามัญ (Ordinary Differential Equation หรือ ODE) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ตัวอย่างเช่น การถ่ายเทความร้อน, การเคลื่อนที่กลางอากาศ, สนามแม่เหล็กไฟฟ้า และปัญหากระจายของนิวตรอน รูปแบบปกติได้มาจากกฎทางกายภาพ เช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ปัญหาส่วนใหญ่จะเกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัวแปร ซึ่งมักอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และมีปัญหาเพียงเล็กน้อยเท่านั้นที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ดังนั้นความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย จึงเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับนักวิทยาศาสตร์ หรือวิศวกร

ตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

<u>ตัวอย่างที่ 2.1.1</u>

จงหาผลเฉลยของสมการ $u_{xy} = 0$ โดยการอินทิเกรตโดยตรง

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

อินทิเกรตเทียบ x ก่อน โดยให้ y เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int 0 \partial x = \phi_1(y) + c_1$$

เมื่อ c_1 เป็นค่าคงที่ และ $\phi_1(y)$ เป็น arbitrary function ของ y เพราะ y เป็นค่าคงที่ระหว่างการอินทิเกรต

ต่อไป อินทิเกรตเทียบ y โดยให้ x เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\begin{aligned} u &= \int \phi_1(y)\partial y + c_1 \partial y \\ &= \phi_2(y) + c_1 y + \theta(x) + c \\ &= \phi(y) + \theta(x) + c \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ , ϕ และ θ เป็น arbitrary function ของ y และ x ตามลำดับ

ดังนั้นฟังก์ชันทั้งหลายในรูปแบบของ $\phi(y) + \theta(x) + c$ ตัวอย่างเช่น $x + y$, $\ln y + \sin^2 x$, $e^{y^2+1} - x$ และผลเฉลยอื่นๆ อีกที่เป็นไปได้ จะเป็นผลเฉลยของสมการ $u_{xy} = 0$ ซึ่งได้มาจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

วิธีอินทิเกรตโดยตรง เป็นวิธีที่ไม่ดีนัก ยกตัวอย่าง $\nabla^2 u = 0$ ไม่สามารถใช้วิธีการอินทิเกรตโดยตรงหาผลเฉลยได้

<u>ตัวอย่างที่ 2.1.2</u>

จงแสดงว่า

(a) $u = x^2 + y^2$

(b) $u = \ln\left(x^2 - y^2\right)$

(c) $u = \sin x \cos y$ และ

(d) $u = e^{x+y}$

เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

<u>วิธีทำ</u>

หาผลเฉลยโดยการแทน (a),(b),(c) และ (d) ที่ละสมการ ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

(a) $u = x^2 + y^2$

$$u_x = 2x \quad , \quad u_{xx} = 2$$
$$u_y = 2y \quad , \quad u_{yy} = 2$$

ดังนั้น $u_{xx} - u_{yy} = 0$

(b) $u = \ln\left(x^2 - y^2\right)$

$$u_x = \frac{2x}{x^2 - y^2} \quad , \quad u_{xx} = \frac{-2x^2 - 2y^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2}$$
$$u_y = \frac{-2y}{x^2 - y^2} \quad , \quad u_{yy} = \frac{-2x^2 - 2y^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2}$$

ดังนั้น $u_{xx} - u_{yy} = 0$

(c) $u = \sin x \cos y$

$$u_x = \cos x \cos y \quad , \quad u_{xx} = -\sin x \cos y$$
$$u_y = -\sin x \sin y \quad , \quad u_{yy} = -\sin x \cos y$$

ดังนั้น $u_{xx} - u_{yy} = 0$

(d) $u = e^{x+y}$

$$u_x = e^{x+y} \quad , \quad u_{xx} = e^{x+y}$$
$$u_y = e^{x+y} \quad , \quad u_{yy} = e^{x+y}$$

ดังนั้น $u_{xx} - u_{yy} = 0$

จะเห็นว่า มีฟังก์ชันอื่นๆ มากกว่า 4 ฟังก์ชันนี้ ที่เป็นผลเฉลย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอยู่ในรูปของ $u_{xx} - u_{yy} = 0$ เหมือนกัน

ถ้าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมีการกำหนดเงื่อนไข แล้วจำนวนของผลเฉลยที่เป็นไปได้จะลดลง เช่นในตัวอย่างสุดท้าย ถ้าผลเฉลยสอดคล้องกับเงื่อนไข คือ $u(0,0) = 1$ แล้วผลเฉลย 2 ฟังก์ชันแรก (a) และ (b) จะไม่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ถ้าผลเฉลยต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขอื่น คือ $u(\pi, y) = 0$ สำหรับค่าทุกๆ ค่า y แล้วฟังก์ชัน (d) จะไม่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย จะเหลือฟังก์ชัน (c) เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพียงฟังก์ชันเดียว นั่นคือ ถ้าเราต้องการผลเฉลยเพียงค่าเดียวของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Unique Solution) เราต้องกำหนดจำนวนเงื่อนไขที่เหมาะสม

__ตัวอย่างที่ 2.1.3__

แผ่นโลหะบาง ซึ่งบนระนาบ xy ถูกทำให้โค้งงอและบิดไปเมื่อทำการวัด แสดงให้เห็นว่าระนาบเกิด deflection ไป $w(x,y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -0.75 \tag{1}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -1 \tag{2}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.625 \tag{3}$$

กำหนดตัวแปรทั้งหมด อยู่ในหน่วยเดียวกัน จะใช้วิธีอินทิเกรตโดยตรง หาค่า $w(x,y)$

__วิธีทำ__

ปัญหานี้ทั้ง 3 สมการสามารถอินทิเกรตโดยตรงได้ เริ่มอินทิเกรตสมการ (1) โดยอินทิเกรตเทียบ y โดยให้ x เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int -0.75 \partial y = -0.75y + f_1(x)$$
$$w = \frac{-0.75}{2} y^2 + y f_1(x) + f_2(x) \tag{i}$$

[สังเกตว่า arbitrary constants อยู่ในรูป arbitrary functions $f_1(x)$ และ $f_2(x)$]

ผลเฉลยใน (i) มี 2 arbitrary functions คือ $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ ซึ่ง 2 arbitrary functions นี้สามารถหาค่าได้จาก สมการที่ (2) และ (3) โดยหาอนุพันธ์ของสมการ (i) ตามสมการ (2) และ (3) จะได้

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = y\frac{d^2 f_1}{dx^2}+\frac{d^2 f_2}{dx^2} \quad \text{(ii)}$$

และ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{df_1}{dx} \quad \text{(iii)}$$

อนุพันธ์ย่อย ของ f_1 และ f_2 เทียบกับ x ถูกเขียนให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์รวม (total derivative) เนื่องจาก f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันของ x เพียงอย่างเดียว

จากสมการที่ (3) จะได้

$$\frac{df_1}{dx} = 0.625$$

ให้ $f_1 = 0.625x+a$ ที่ a = ค่าคงที่

ในทำนองเดียวกัน จากสมการที่ 2 เราจะได้

$$y\frac{d^2 f_1}{dx^2}+\frac{d^2 f_2}{dx^2} = -1$$

$$\frac{d^2 f_2}{dx^2} = -1$$

$$f_2 = -\frac{1}{2}x^2+bx+c$$ ที่ b, c เป็นค่าคงที่

ดังนั้น จาก (i) unique solution คือ

$$w(x,y) = c+bx+ay-0.5x^2-0.375y^2+0.625xy$$

ผลเฉลยนี้ มีค่าคงที่ไม่ทราบค่า a,b และ c ถูกกำหนดให้เข้ากันกับระบบแกนอ้างอิง เช่น ถ้าระบบแกนเป็นตำแหน่งใน $w(0,0)=0$, $\partial w(0,0)/\partial x = 0$ และ $\partial w(0,0)/\partial y = 0$ ตามลำดับ จะได้ $c=0, b=0$ และ $a=0$ ผลเฉลยที่ได้จะกลายเป็น

$$w(x,y) = -0.5x^2-0.375y^2+0.625xy$$

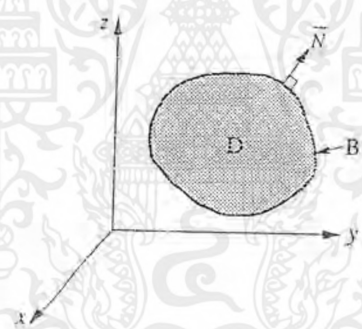
2.1.3 **เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น** (Boundary and Initial Conditions)

สำหรับปัญหาทางกายภาพ เงื่อนไขที่ถูกกำหนดขึ้นเพื่อให้ได้ unique solution ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งส่วนใหญ่เป็นเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions หรือ BCs) และ/หรือเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Conditions หรือ ICs) เงื่อนไขนั้นเกิดจากสถานะทางกายภาพของปัญหา ถ้าจำนวนของเงื่อนไขมีเพียงพอในอันดับที่กำหนด จะทำให้ได้ unique solution ซึ่งปัญหานี้รู้จักกันในนามของปัญหา well-posed (well-posed problem) ซึ่งปัญหาทางกายภาพส่วนมากจะเป็น well-posed

2.1.3.1 **เงื่อนไขขอบเขต**

เงื่อนไขขอบเขต หมายถึง เงื่อนไขที่กำหนดให้ที่ขอบเขตของปัญหานั้น เช่น เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา อาจประกอบด้วยการกำหนดอุณหภูมิที่ปลายทั้ง 2 ของแท่งโลหะ

พิจารณาปัญหาทางกายภาพทั่วไปในปริภูมิ 3 มิติ แสดงในรูปที่ 2.1.1 ซึ่งมี unique solution ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย มีจริงในโดเมน D ซึ่งถูกล้อมรอบโดยขอบเขต B ซึ่งเวกเตอร์ $\bar{N}$ ตั้งฉากกับ B



รูปที่ 2.1.1 ปัญหาทางกายภาพทั่วไป , B เป็นพื้นผิว 3 มิติ

เงื่อนไขขอบจะกำหนดค่าของตัวแปรอิสระ u และอนุพันธ์ย่อยของ u บน B สามารถแยกชนิดของเงื่อนไขขอบเขตได้เป็น

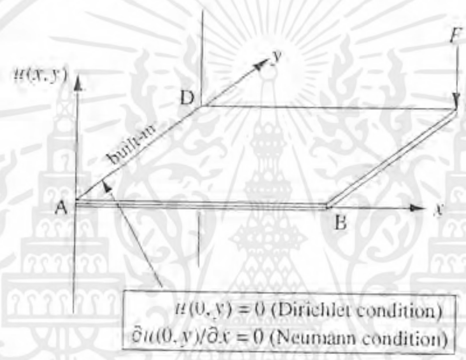
(a) Dirichlet condition – เป็นการกำหนดค่าตัวแปรตามบนขอบเขต นั่นคือ จะกำหนดค่า u_B เช่นการกำหนดอุณหภูมิที่ปลายแท่งโลหะ

(b) Neumann condition - เป็นการกำหนดค่าอนุพันธ์อันดับ 1 ของตัวแปรตามบนขอบเขตในทิศทางตั้งฉากกับขอบเขต นั่นคือ $\partial u/\partial N|_B$ เช่น $\partial u/\partial x = 0$ ที่ปลายแท่งโลหะ หมายถึงไม่มีการถ่ายเทความร้อนผ่านปลายแท่งโลหะนั้น หรือ $\partial u/\partial x$ มี

ค่าเท่ากับค่าใดค่าหนึ่ง หมายถึง การเกิดปริมาณความร้อนที่มีค่าเท่านั้น วิ่งผ่านที่ปลายแห่งโลหะนั้น

(c) Robbins condition / Mixed condition – เป็นการรวมกันเชิงเส้นของ Dirichlet condition และ Neumann condition เช่น $a \times u_B + b \times \partial u/\partial N|_B$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่บนขอบเขตที่ถูกกำหนด

ตัวอย่างเช่น พิจารณา แผ่น สี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD ซึ่งด้าน AD ถูกยึดติดกับผนัง แสดงในรูปที่ 2.1.2 แรงตั้งฉากคงที่ F เป็นแรงกระทำที่มุม C เกิด deflection คือ $u(x,y)$ พิจารณาทางกายภาพ ค่า deflection u และความชันของ deflection $\partial u/\partial x$ ที่ด้าน AD ถูกยึดติดกับผนังจะเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้ Dirichlet condition และ Neumann condition ที่ $x = 0$

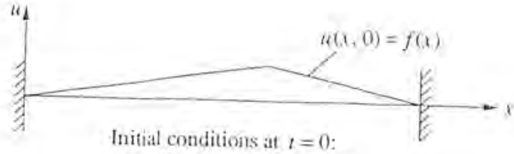


รูปที่ 2.1.2 ตัวอย่างของเงื่อนไขขอบเขต (BCs)

2.1.3.2 เงื่อนไขเริ่มต้น

เงื่อนไขเริ่มต้น หมายถึง เงื่อนไขที่กำหนดให้ในตอนเริ่มต้นของการแก้ปัญหา ถ้าเวลา t เป็นตัวแปรอิสระตัวหนึ่งแล้วเงื่อนไขเริ่มต้นจะเป็นการกำหนดค่าของ u และอนุพันธ์ขอ u ที่ $t = 0$

ตัวอย่างเช่น พิจารณาสายกีตาร์ที่ขึงตึง แสดงในรูปที่ 2.1.3 สายถูกดึงและปล่อยที่ $t = 0$ และเกิด deflection เป็น $u(x,t)$ เงื่อนไขเริ่มต้น คือ ค่า deflect เริ่มต้น $u(x,0) = f(x)$ และความเร็วเริ่มต้น $u(x,0) \equiv \partial u(x,0)/\partial t = 0$



รูปที่ 2.1.3 ตัวอย่างของเงื่อนไขเริ่มต้น (ICs)

ถ้าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตเท่านั้น จะเรียกว่า ปัญหาค่าขอบเขต ในทำนองเดียวกัน ปัญหาค่าเริ่มต้นเกิดจากผลเฉลยสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นเท่านั้น จะเรียกว่า ปัญหาค่าขอบเขตเริ่มต้น ถ้าผลเฉลยมีทั้งเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

<u>ตัวอย่างที่ 2.1.4</u>

จงแสดงว่า $u(x,y) = ae^{(x^2-y^2)} + b$ ที่ a และ b เป็นค่าคงที่ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการ

$$u_{xx} + u_{yy} - 2xu_x + 2yu_y = 0$$

หาค่า a และ b เมื่อ BCs $u = 0$ บน $x^2 - y^2 = 0$ และ $u = 2$ บน $x^2 - y^2 = 2$

<u>วิธีทำ</u>

หาอนุพันธ์ของ $u(x,y)$ อันดับหนึ่ง และอันดับสอง โดยเทียบกับ x และ y จะได้

$$u_x = 2axe^{(x^2-y^2)} \quad , \quad u_{xx} = 2ae^{(x^2-y^2)} + 4ax^2e^{(x^2-y^2)}$$

$$u_y = -2axe^{(x^2-y^2)} \quad , \quad u_{yy} = -2ae^{(x^2-y^2)} + 4ax^2e^{(x^2-y^2)}$$

ดังนั้น

$$u_{xx} + u_{yy} - 2xu_x + 2yu_y = 0$$

แทน BCs ทั้ง 2 ค่า ลงในผลเฉลย จะได้

$$a + b = 0 \quad \text{และ}$$

$$ae^2 + b = 2$$

แก้สมการ จะได้

$$a = \frac{2}{e^2 - 1} \quad , \quad b = \frac{-2}{e^2 - 1}$$

2.1.4 สมการอันดับที่ 2 (Second-Order Equations)

2.1.4.1 ชนิดของสมการ (Classification)

พิจารณาสมการรูปทั่วไปของสมการอันดับที่ 2 ที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว มีรูปแบบเป็น

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \qquad (2.1.1)$$

ที่ a,b,c อาจเป็นค่าคงที่หรือเป็นฟังก์ชันของ x และ y ส่วน f อาจเป็นค่าคงที่ หรือเป็นฟังก์ชันของ $x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ หรือสมการ (2.1.1) จะเป็นเชิงเส้นหรือกึ่งเชิงเส้นก็ได้

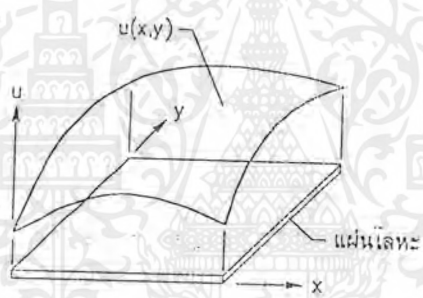
เราสามารถจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยออกเป็นชนิดต่างๆ กัน ดังต่อไปนี้

(a) สมการจะเป็น Elliptic Equation ถ้า $b^2 - 4ac < 0$

ตัวอย่างของสมการในกรณีเช่นนี้ ได้แก่ สมการของลาปลาซ (Laplace's equation) ซึ่งมีรูปแบบ คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

ยกตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการนำความร้อนในแผ่นโลหะนั้น อยู่ในรูปแบบของสมการ (i) โดยตัวแปรอิสระ x และ y แทน coordinate ในทิศแกน x และ y ของแผ่นโลหะ โดยตัวแปรตาม u แทนอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง x และ y ต่างๆ ของแผ่นโลหะ ดังรูปที่ 2.1.4



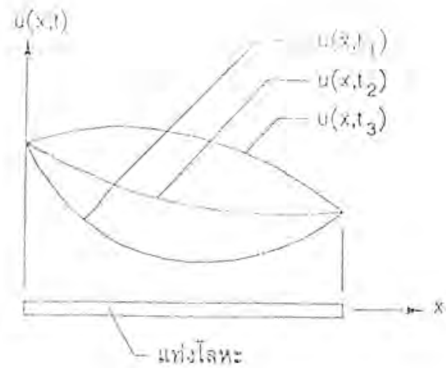
รูปที่ 2.1.4 การคำนวณอุณหภูมิภายใต้สถานะอยู่ตัวในแผ่นโลหะ จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบ Elliptic

(b) สมการจะเป็น Parabolic Equation ถ้า $b^2 - 4ac = 0$

ตัวอย่างของสมการในกรณีเช่นนี้ที่ง่าย แก่การทำความเข้าใจ คือ สมการของการถ่ายเทความร้อนในแท่งโลหะยาวที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.1.2)$$

โดย k แทนสภาพการนำความร้อนซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของโลหะ, u แทนลักษณะการกระจายของอุณหภูมิซึ่งเป็นตัวแปรตามที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรต้น อันประกอบด้วยโคออร์ดิเนต x ตามแนวความยาวของแท่งโลหะ และเวลา t ที่ผ่านไป ดังแสดงในรูปที่ 2.1.5



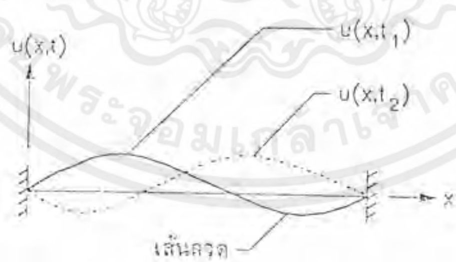
รูปที่ 2.1.5 การคำนวณการกระจายของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ในแท่งโลหะยาว จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลิก

(c) สมการจะเป็น Hyperbolic Equation ถ้า $b^2 - 4ac > 0$

ตัวอย่างของสมการในกรณีนี้ ได้แก่ สมการการสั่นของเส้นลวดซึ่งถูกตรึงที่ปลายทั้งสองข้าง รูปแบบของสมการดังกล่าว คือ

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2.1.3)$$

โดย k แทนสภาพการนำความร้อน ซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของโลหะ



รูปที่ 2.1.6 การคำนวณการเคลื่อนตัวเนื่องจากการสั่นของเส้นลวด จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบ Hyperbolic

<u>ตัวอย่างที่ 2.1.5</u>

จงพิจารณาสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการแบบใด

(a) $$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$a=3, b=0, c=0 \quad \Rightarrow \quad b^2-4ac=0$

ดังนั้น เป็นสมการแบบ Parabolic

(b) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$a=1, b=0, c=-1 \quad \Rightarrow \quad b^2-4ac=-4(1)(-1)=4>0$

ดังนั้น เป็นสมการแบบ Hyperbolic

(c) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$a=1, b=0, c=1 \quad \Rightarrow \quad b^2-4ac=-4(1)(1)=-4<0$

ดังนั้น เป็นสมการแบบ Elliptic

(d) สำหรับสมการ

$$\left(x^2-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

คุณสมบัติ $b^2-4ac=4\left(x^2+y^2-1\right)$ แปรตามระนาบ xy

ดังนั้นสมการจะเป็น Parabolic เมื่อ $x^2+y^2=1$

Elliptic เมื่อ $x^2+y^2<1$

Hyperbolic เมื่อ $x^2+y^2>1$

สมการชนิดนี้เป็นสมการผสม (Mixed equation)

PDEs ทั้ง 3 ชนิดนี้ ต้องใช้วิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ต่างกันเพราะมีรูปแบบต่างกัน จำเป็นต้องเลือกวิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสมกับรูปแบบของแต่ละ PDE วิธีเชิงตัวเลขจะอธิบายในบทต่อไป

2.1.4.2 ความสำคัญของสมการอันดับที่ 2

PDE อันดับที่ 1 แทบจะไม่เกิดในปัญหาทางกายภาพ ซึ่งถ้าเกิดขึ้นจะสามารถแก้ได้ โดยวิธี analytic ซึ่งระบบ PDE อันดับที่ 1 ส่วนใหญ่เกิดจากการแยกย่อยของ PDE อันดับสูงกว่า พิจารณาตัวอย่าง

PDE อันดับที่ 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

สามารถเขียนเป็นรูปของ PDE อันดับหนึ่งได้ 2 สมการ ดังนี้คือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

ปัญหาทางกายภาพหลายๆ ปัญหาอยู่ในรูปของ PDE อันดับที่สอง ตัวอย่างเช่น การถ่ายเทความร้อน , พลศาสตร์ของไหล และปัญหาความยืดหยุ่น

สมการอันดับที่ 4 บางครั้งก็เกิดขึ้น ซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปแบบอย่างง่าย (simple form) และสามารถหาผลเฉลยได้ โดยการประยุกต์ใช้วิธีการหาผลเฉลยของสมการอันดับที่ 2 ถึงแม้ว่าในกรณีนั้นจะมีสมการ finite difference เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ยกตัวอย่างในเรื่องกลศาสตร์ของแข็งซึ่งครอบคลุมสมการของแผ่นบางหลังที่มีค่าการรับน้ำหนักต่อพื้นที่ 1 หน่วย (s) เป็น

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{s}{D}$$

โดย w เป็น deflection และ D เป็น flexurel rigidity ของแผ่นโลหะ ซึ่งรู้จักในรูปของสมการ biharmonic วิธีเชิง finite difference สำหรับสมการ elliptic อันดับที่ 2 สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาสมการนี้ ซึ่งถ้านำสมการผลต่างที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่ 4 มาแก้ปัญหาจะเกิดความยุ่งยาก จึงเลือกใช้วิธีการแยกให้กลายเป็น PDE ชนิด elliptic อันดับที่ 2 จำนวน 2 สมการ คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{s}{D}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u$$

ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้พร้อมกัน

2.1.5 วิธีการหาผลเฉลย

ปัญหาคณิตศาสตร์อื่นๆ ซึ่ง PDE สามารถหาผลเฉลยได้ทั้งวิธี analytic และ numerical เนื่องจาก PDE มีความซับซ้อน ในการใช้เทคนิค analytic เช่นวิธีแยกตัวแปร และการอินทิเกรต จะสามารถนำมาใช้ได้กับ PDE อย่างง่ายเท่านั้น ตารางที่ 2.1.1 แสดงให้เห็นถึงวิธีการหาผลเฉลยแบบ analytic และ numerical

ตารางที่ 2.1.1 เปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยวิเคราะห์กับผลเฉลยเชิงตัวเลข

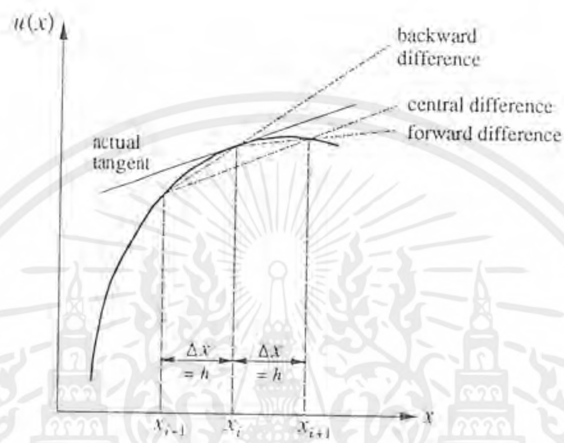
ผลเฉลย analytic	ผลเฉลย numerical
- ผลเฉลยจะมีความต่อเนื่อง ตัวอย่างเช่น ผลเฉลยที่ค่าใดๆ ของตัวแปรอิสระสามารถหาค่าได้	- ผลเฉลยจะหาได้เพียงที่ grid point เท่านั้น ผลเฉลยที่อยู่ระหว่าง grid point สามารถหาได้จากการประมาณค่า
- ได้ผลเฉลยที่แม่นตรง	- ผลเฉลยที่ได้เป็นค่าประมาณ ซึ่งค่า error เชิงตัวเลขต้องควบคุมให้อยู่ในค่าที่เหมาะ
- สามารถมองปัญหาทางกายภาพได้ง่าย เช่น ความถี่ และรูปร่างของการสั่น สามารถหาได้ง่าย	- จะมองปัญหาทางกายภาพได้ยากกว่า
- ไม่สามารถนำไปใช้ได้สำหรับรูปแบบปัญหาที่เกิดขึ้นจริงในปัจจุบัน ซึ่งมีความซับซ้อนมาก	-สามารถใช้ได้กับปัญหาที่ยุ่งยาก(complicated problems) เนื่องจากเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้าขึ้น และมีอัลกอริทึมเชิงตัวเลขที่สามารถหาผลเฉลยได้

วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลเฉลย PDEs มี 2 กลุ่มหลักๆ คือ วิธี finite difference และวิธี finite element แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธี finite difference เท่านั้น

2.2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Introduction to Finite-Difference Methods)

2.2.1 การประมาณค่าโดยตรง (Direct Approximation)

Finite difference เป็นการแทนค่าของอนุพันธ์ซึ่งสามารถหาได้ง่ายโดยการประมาณค่าโดยตรง ตัวอย่างเช่น ในการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x นั่นคือการแปรผันของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ x จะถูกนำมาพิจารณาเท่านั้น และตัวแปรอิสระตัวอื่น ๆ ทั้งหมดจะถือว่าเป็นค่าคงที่



รูปที่ 2.2.1 การประมาณค่าโดยตรงของอนุพันธ์

พิจารณาฟังก์ชัน u ซึ่งขึ้นอยู่กับ x เพียงอย่างเดียว ดังแสดงในรูปที่ 2.2.1 และ finite difference แทนอนุพันธ์รวม (total derivative) ของตัวแปร u จะ valid กับอนุพันธ์ย่อย

พิจารณาที่อนุพันธ์รวมอันดับที่ 1 du/dx ณ ที่จุด $x = x_i$ ซึ่งเป็นค่าความชันของเส้นโค้งที่จุด x_i แสดงดังรูปที่ 2.2.1 เราสามารถประมาณค่าอนุพันธ์นี้ได้ 3 วิธีที่แตกต่างกัน พิจารณาตามแนวแกน x หลังจากจุด x_i ที่ x_{i+1} ซึ่งมีระยะห่าง $\Delta x = h$ จาก x_i และค่าความชันที่แท้จริง (actual tangent) สามารถประมาณได้ด้วยเส้นตรงที่เชื่อมจุด 2 จุดบนเส้นโค้งซึ่ง $u(x)$ จะสมนัยกับ x_i และ x_{i+1} ดังนั้น

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \qquad \text{(two point forward difference)} \qquad (2.2.1a)$$

สมการนี้รู้จักในชื่อของ ผลต่างข้างหน้า 2 จุด (two point forward difference) ที่เรียกว่า two point เนื่องจากเราใช้ 2 จุด ที่ i และ $i+1$ ส่วนคำว่า forward เนื่องจากมอง step หลัง x_i

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถสร้างผลต่างย้อนหลัง 2 จุด สำหรับ du/dx ที่จุด $x = x_i$ ได้คือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \qquad \text{(two point backward difference)} \qquad (2.2.1b)$$

โดยพิจารณาจาก step ก่อนหน้า x_i ที่ x_{i-1} ซึ่งมีระยะห่าง $\Delta x = h$ จาก x_i

สมการนี้รู้จักในชื่อของ ผลต่างย้อนหลังแบบ 2 จุด (two point backward difference) และ ผลต่างตรงกลาง 3 จุด สำหรับ du/dx ที่ $x = x_i$ คือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \qquad \text{(three point central difference)} \qquad (2.2.1c)$$

โดยพิจารณาที่ step ก่อนหน้า x_i และ step หลัง x_i ที่ x_{i-1} และ x_{i+1}

Finite difference คือ สมการที่ (2.2.1a–c) สามารถนำไปใช้ในการหาค่าของอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่าได้พิจารณาตัวอย่าง อนุพันธ์อันดับที่ 2 โดยใช้ (2.2.1a) ซึ่งเป็นวิธีผลต่างข้างหน้าจะได้

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i &= \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)_i \\
&\approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right] \\
&= \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} - u_i}{h^2} \qquad \text{(forward difference)} \qquad (2.2.2a)
\end{aligned}$$

ใช้สมการ (2.2.1b) ซึ่งเป็น backward difference จะได้

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i &\approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{h}\right] \\
&= \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} \qquad \text{(backward difference)} \qquad (2.2.2b)
\end{aligned}$$

ใช้สมการ (2.2.1c) ซึ่งเป็นผลต่างตรงกลาง จะได้

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i &\approx \frac{1}{2\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right] \\
&= \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i}\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i} + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

ซึ่ง $\Delta u/\Delta x$ มีได้หลายค่า ตามแต่ละช่วง

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right] \\
&= \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} \qquad \text{(central difference)} \qquad (\text{2.2.2c})
\end{aligned}
$$

ที่ Δ แทนผลต่าง เช่น Δu แทนผลต่างของ u

เราแยกผลต่างตรงกลางใน (2.2.2c) ออกเป็น

$$
\frac{u_{i+1}-u_i}{h} \quad \text{และ} \quad \frac{u_i-u_{i-1}}{h}
$$

ซึ่งถือว่าผลต่างตรงกลางของ du/dx ที่ตรงกลางช่วง $x_{i+\frac{1}{2}}$ และ $x_{i-\frac{1}{2}}$ สามารถหาได้จากผลต่างตรงกลาง ใน (2.2.2c) และระยะห่างของ x จะเป็น $h/2$ แทนที่จะเป็น h

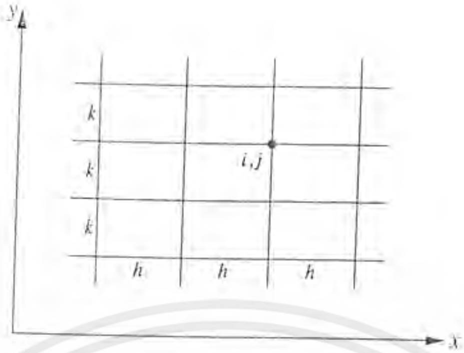
2.2.2 การเข้าสู่อนุกรมเทเลอร์และค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข (Taylor Series Approach and Numerical Error)

ถึงแม้ว่าการประมาณค่าโดยวิธีทางตรงที่ผ่านมาจะเป็นวิธีที่ง่าย แต่จะมีค่า error ที่เกิดขึ้นจากการประมาณค่าเป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

วิธีหนึ่งของ finite difference ที่ใช้ได้ คือการประมาณค่าด้วยอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series) แต่ก็ยังคงมีค่า error อยู่ ซึ่งยังสามารถยอมรับได้ รู้จักในนามของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (truncation error)

2.2.2.1 ระบบ Grid ที่มีระยะห่างเท่า ๆ กัน (Even Grid System)

พิจารณาระบบปริภูมิ grid ที่มีขนาดเท่ากัน ซึ่ง $\Delta x =$ ค่าคงที่ $= h$ และ $\Delta y =$ ค่าคงที่ $= k$ แสดงในรูปที่ 2.2.2



รูปที่ 2.2.2 ระบบ even grid space

อนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชัน $u(x,y)$ ขยายรอบ x_i ที่ (x_i+h) และ (x_i-h) ตามลำดับ

$$u(x+h,y) = u(x,y)+h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}+\ldots$$

$$u(x-h,y) = u(x,y)-h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}+\ldots$$

ซึ่ง h เป็นขนาดของ grid ซึ่งต้องมีค่าเล็กเพียงพอที่จะทำให้อนุกรมลู่เข้าใน double-subscript ให้ subscript ตัวแรก เป็นตำแหน่งของ x และ subscript ตัวที่ 2 เป็นตำแหน่งของ y จากข้างบนนี้สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$u_{i+1,j} = u_{i,j}+h\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3}+\ldots \qquad (2.2.3a)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j}-h\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3}+\ldots \qquad (2.2.3b)$$

จากสมการ (2.2.3a)

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}-\frac{h}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}-\frac{h^2}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3}+$$

$$= \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}+O(h) \qquad (2.2.4a)$$

จากสมการ (2.2.3b)

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h} - \frac{h}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \ldots$$

$$= \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h} + O(h) \qquad (2.2.4b)$$

ถ้าสมการมีอนุพันธ์อันดับที่ 2 หรืออันดับที่สูงกว่าพจน์ของอนุพันธ์นั้นจะถูกตัดออก ซึ่งจะทำการประมาณค่าผลต่างข้างหน้าและผลต่างย้อนหลังของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ตามลำดับ ซึ่ง h จะต้องมีค่าเล็กเพียงพอในการทำให้อนุกรมลู่เข้า พจน์ที่ตัดออกในอันดับที่ 2 และอันดับอื่นๆ จะมีค่าน้อยกว่าพจน์ที่ตัดออกตอนแรก

ดังนั้นการประมาณค่า error ซึ่งรู้จักในนามของ truncation error ในสมการที่ (2.2.4a) และ(2.2.4b) อันดับของ h เขียนให้อยู่ในรูปของ $O(h)$ หมายความว่า truncation error ประมาณได้จากสัดส่วนของ h เนื่องจากอนุพันธ์ทั้งหมดได้ถูกกำหนดไว้แล้วในปัญหานี้ ถ้า h ลดลงครึ่งหนึ่ง ค่า truncation error จะลดประมาณครึ่งหนึ่งด้วย finite difference จะกล่าวว่าเป็น first-order accurate ซึ่งค่า truncation error นี้ แทนผลต่างระหว่างผลเฉลยที่แท้จริงของอนุพันธ์ และผลเฉลยที่ได้จาก finite difference

ถ้าเรานำสมการ (2.2.3a) – (2.2.3b) และจัดรูปแบบใหม่ เราจะได้ผลต่างตรงกลาง คือ

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h} - \frac{h^2}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \ldots$$

$$= \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \qquad (2.2.4c)$$

ในที่นี้ truncation error คือ $O(h^2)$ ซึ่งเป็นสัดส่วนกับ h^2 ผลต่างตรงกลาง เป็น second order accurate สำหรับกรณีนี้ ถ้าลดค่า h ลงครึ่งหนึ่ง แล้วค่า truncation error จะลดลงประมาณ 3 ใน 4 ของค่า truncation error เดิม ดังนั้นค่าผลต่างตรงกลางจึงมีความแม่นยำมากกว่าผลต่างข้างหน้าและย้อนหลัง ดูได้จากรูปที่ 2.2.1 ซึ่งผลต่างตรงกลางจะให้ค่าความชันที่ถูกต้อง ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับที่ 1

ถ้านำสมการ (2.2.3a) + (2.2.3b) และจัดรูปแบบของสมการใหม่จะได้ผลต่างตรงกลางสำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{2h^2}{4!}\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} - \dots$$

$$= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \qquad (2.2.4d)$$

ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย คือ $O(h^2)$
ในทำนองเดียวกัน สำหรับอนุพันธ์ของ y เราจะได้

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k) \qquad \text{(forward)} \qquad (2.2.5a)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \qquad \text{(backward)} \qquad (2.2.5b)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \qquad \text{(central)} \qquad (2.2.5c)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) \qquad \text{(central)} \qquad (2.2.5d)$$

ซึ่งสมการ (2.2.4) และ (2.2.5) จะถูกนำมาใช้บ่อย เนื่องจากสามารถใช้ finite difference แทนสำหรับอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นได้

<u>ตัวอย่างที่ 2.2.1</u>

จงใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า,ย้อนหลัง และตรงกลางหา $\partial u/\partial x$ เมื่อ $u(x,y) = ye^x$ ที่ $x = 1.3$ และ $y = 1$ ด้วยขนาด grid $h = 0.1$ และ 0.05 แล้วเปรียบเทียบค่าอนุพันธ์ที่ได้กับค่าผลเฉลย analytic

<u>วิธีทำ</u>

สำหรับ $h = 0.1$ ที่ $x = 1.3$ และ $y = 1$ ใช้ (2.2.4a-c) จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(1.3+h,1) - u(1.3,1)}{h} = \frac{e^{1.4} - e^{1.3}}{0.1} = 3.859032 \qquad \text{(forward)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(1.3,1) - u(1.3-h,1)}{h} = \frac{e^{1.3} - e^{1.2}}{0.1} = 3.491797 \qquad \text{(backward)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(1.3+h,1) - u(1.3-h,1)}{2h} = \frac{e^{1.4} - e^{1.2}}{0.2} = 3.675415 \qquad \text{(central)}$$

ในทำนองเดียวกัน ผลที่ได้ของ $h = 0.05$ สามารถดูได้ดังตารางที่ 2.2.1

ตารางที่ 2.2.1 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.2.1

	$h = 0.1$		$h = 0.05$	
	$\partial u/\partial x$	error	$\partial u/\partial x$	error
forward	3.859032	0.189736	3.762577	0.093280
backward	3.491797	0.177499	3.579074	0.090222
central	3.675415	0.006119	3.670826	0.001529

ในตารางนี้ ค่า truncation error ก็คือ ผลต่างระหว่างค่าที่ได้จาก finite difference และผลเฉลย analytic ซึ่งผลเฉลย analytic คือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{x} = 3.669296 \qquad \text{ที่} \quad x = 1.3 \ \text{และ} \ y = 1$$

จะพบว่าวิธีผลต่างตรงกลางจะให้ค่าที่ดีกว่าวิธีผลต่างข้างหน้าและวิธีผลต่างย้อนหลัง เมื่อใช้ขนาดของ grid เดียวกัน และเมื่อลดขนาดของ grid ลงครึ่งหนึ่ง ค่าคลาดเคลื่อนก็ลดลง โดยวิธีผลต่างข้างหน้าและย้อนหลังจะลดลงครึ่งหนึ่ง แต่วิธีผลต่างตรงกลางจะลดลงประมาณ 3 ใน 4 ส่วน

<u>ตัวอย่างที่ 2.2.2</u>

จงใช้วิธีผลต่างย้อนหลัง หา $\partial^2 u/\partial x^2$

<u>วิธีทำ</u>

แทน u ด้วย $\partial u/\partial x$ ในสมการ (2.2.4b) เราจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{1}{h}\left[\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - \frac{\partial u_{i-1,j}}{\partial x}\right] + O(h) \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) - \frac{u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{h} - O(h)\right] + O(h) \\
&= \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h)
\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.2.3</u>

จงใช้ผลต่างย้อนหลังแบบ 3 จุด หา $\partial u/\partial x$ และคำนวณหาค่า $\partial u/\partial x$ สำหรับฟังก์ชัน $u(x,y) = ye^x$ ที่ $x = 1.3$ และ $y = 1$ ด้วยขนาด grid $h = 0.1$

<u>วิธีทำ</u>

ใช้อนุกรมเทเลอร์ขยาย u รอบ x ที่ x_{i-h} จะได้

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + \frac{h}{2!}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(h^2) \\ &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + \frac{h}{2!}\left[\frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h)\right] + O(h^2) \end{aligned}$$

ใช้ผลเฉลยที่ได้จากตัวอย่างที่ 2.2.2

$$= \frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,h} + u_{i-2,j}}{2h} + O(h^2)$$

สำหรับ $h = 0.1$ ที่ $x = 1.3$ และ $y = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{3u(1.3,1) - 4u(1.3-h,1) + u(1.3-2h,1)}{2h} \\ &= \frac{3e^{1.3} - 4e^{1.2} + e^{1.1}}{2 \times 0.1} \\ &= 3.657942 \end{aligned}$$

ซึ่งค่า error คือ $e^{1.3} - 3.657942 = 0.011355$

เมื่อเปรียบเทียบกับตารางที่ 2.2.1 ผลต่างย้อนหลังแบบ 3 จุด จะมีความแม่นยำมากกว่าแบบ 2 จุด เนื่องจากผลต่างย้อนหลังแบบ 3 จุด จะรวมพจน์ของผลบวกในอนุกรมเทเลอร์ ซึ่งผลที่ได้จะมีค่า truncation error น้อยกว่า

ในบางครั้ง เราต้องการหาค่าอนุพันธ์ผสมอันดับที่ 2 $\partial^2 u/\partial x\partial y$ สำหรับกรณีนี้ จะใช้อนุกรมเทเลอร์ จะได้

$$u(x+h,y+k)=u(x,y)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+k\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right)+\ldots \quad (2.2.6a)$$

$$u(x+h,y-k)=u(x,y)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-k\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-2hk\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right)+\ldots \quad (2.2.6b)$$

$$u(x-h,y+k)=u(x,y)+\frac{1}{1!}\left(-h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+k\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-2hk\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right)+\ldots \quad (2.2.6c)$$

$$u(x-h,y-k)=u(x,y)+\frac{1}{1!}\left(-h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-k\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right)+\ldots \quad (2.2.6d)$$

นำ (2.2.6a) – (2.2.6) – (2.2.6c) + (2.2.6d) จะได้

$$u(x+h,y+k)-u(x+h,y-k)-u(x-h,y+k)+u(x-h,y-k)$$
$$=4hk\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+O(h+k)^4$$

ในเทอมของอนุพันธ์อันดับที่ 3 จะหายไป ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x\partial y}=\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}-u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j-1}}{4hk}+O\left(\frac{(h+k)^4}{hk}\right) \quad (2.2.7a)$$

เมื่อ $k=h$ จะได้

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x\partial y}=\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}-u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j-1}}{4h^2}+O\left(h^2\right) \quad (2.2.7b)$$

ซึ่งการประมาณค่า (2.2.7) จะเป็นผลต่างตรงกลางอันดับที่ 2

สรุป finite-difference สำหรับระบบ grid ที่มีขนาดเท่า ๆ กัน

1. ผลต่างข้างหน้ากับค่าคลาดเคลื่อน $O(h)$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$
$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2}$$
$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{u_{i+3,j} - 3u_{i+2,j} + 3u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h^3}$$
$$\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{u_{i+4,j} - 4u_{i+3,j} + 6u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^4}$$

2. ผลต่างข้างหน้ากับค่าคลาดเคลื่อน $O(h^2)$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{-u_{i+2,j} + 4u_{i+1,j} - 3u_{i,j}}{2h}$$
$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{-u_{i+3,j} + 4u_{i+2,j} - 5u_{i+1,j} + 2u_{i,j}}{h^2}$$
$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{-3u_{i+4,j} + 14u_{i+3,j} - 24u_{i+2,j} + 18u_{i+1,j} - 5u_{i,j}}{2h^3}$$
$$\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{-2u_{i+5,j} + 11u_{i+4,j} - 24u_{i+3,j} + 26u_{i+2,j} - 14u_{i+1,j} + 3u_{i,j}}{h^4}$$

3. ผลต่างย้อนหลังกับค่าคลาดเคลื่อน $O(h)$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$$
$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2}$$
$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{u_{i,j} - 3u_{i-1,j} + 3u_{i-2,j} + u_{i-3,j}}{h^3}$$
$$\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i-2,j} - 4u_{i-3,j} + u_{i-4,j}}{h^4}$$

4. ผลต่างย้อนหลังกับค่าคลาดเคลื่อน $O(h^2)$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h}$$
$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{2u_{i,j} - 5u_{i-1,j} + 4u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{h^2}$$
$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{5u_{i,j} - 18u_{i-1,j} + 24u_{i-2,j} - 14u_{i-3,j} + u_{i-4,j}}{2h^3}$$
$$\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{3u_{i,j} - 14u_{i-1,j} + 26u_{i-2,j} - 24u_{i-3,j} + 11u_{i-4,j} - 2u_{i-5,j}}{h^4}$$

5. ผลต่างตรงกลางกับค่าคลาดเคลื่อน $O(h^2)$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$
$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$
$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2h^3}$$
$$\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4}$$

6. ผลต่างตรงกลางกับค่าคลาดเคลื่อน $O(h^4)$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{12h}$$
$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12h^2}$$
$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{-u_{i+3,j} + 8u_{i+2,j} - 13u_{i+1,j} + 13u_{i-1,j} - 8u_{i-2,j} + u_{i-3,j}}{8h^3}$$
$$\frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{-u_{i+3,j} + 12u_{i+2,j} - 39u_{i+1,j} + 56u_{i,j} - 39u_{i-1,j} + 12u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{6h^4}$$

7. ผลต่างตรงกลางสำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 2 ผสม

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk} + O\left(\frac{(h+k)^4}{hk}\right)$$

$$= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2} + O(h^2) \qquad \text{ถ้า } h = k$$

2.2.2.2 ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข (Numerical Error)

ค่า error เชิงตัวเลขมี 2 ชนิด คือ truncation error และ round-off error ซึ่งค่า error อื่นๆ ที่มีผลต่อค่าความถูกต้องของผลเฉลยเชิงตัวเลข ซึ่งรวมถึงค่า error ที่เกิดจากการลู่เข้าไม่สมบูรณ์

(วิธีทำซ้ำ – Interative Method), ใส่ข้อมูลผิดพลาด ฯลฯ อย่างไรก็ตาม ค่า error นี้จะไม่เกี่ยวข้องกับวิธีเชิงตัวเลขและคอมพิวเตอร์ที่เราใช้ ซึ่งเราสามารถควบคุมได้ ถ้าเรามีความระมัดระวัง

ค่า truncation error เกิดจากการตัดพจน์หลังในอนุกรมเทเลอร์ สามารถเห็นได้ในทุกๆ finite difference ซึ่งค่า truncation error จะลด เมื่อเราใช้จำนวนพจน์นั้นในอนุกรม และ/หรือ เมื่อมีขนาด grid ลดลง อย่างไรก็ตาม มันไม่สามารถเพิ่มจำนวนเทอมในอนุกรมได้ เพราะมันประกอบไปด้วยอนุพันธ์ของอันดับที่สูงกว่าที่เราจะทำการประมาณค่าอนุพันธ์ ซึ่งเราไม่ทราบค่ามัน ซึ่งคอมพิวเตอร์ไม่สามารถประมาณค่าอนุกรมอนันต์ได้ ในทฤษฎีนี้ ค่า truncation error จะเข้าใกล้ 0 เมื่อขนาด grid เข้าสู่ 0 แต่ในความเป็นจริง ขนาดของ grid ไม่สามารถเล็กมากได้ เนื่องจาก 2 เหตุผล คือ

1. Total error (ผลรวมของ truncation error และ round off error) ของผลเฉลยอาจเกิดขึ้นจากค่า error ของ round-off error แทน
2. จำนวน grid ในการคำนวณจะมีมากเกินความต้องการ และเวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยจะมากเกินไปด้วย ซึ่งการเพิ่มขึ้นของเวลาในการคำนวณเป็นสิ่งสำคัญมากสำหรับวิธีทำซ้ำ

ความสัมพันธ์ระหว่างค่า truncation error และขนาด grid แสดงได้ในรูปที่ 2.2.3

การคำนวณตัวเลขในคอมพิวเตอร์ จำนวนจริงจะถูกเก็บอยู่ในรูปของ finite number โดยการปัดเศษเป็นจำนวน 2/3 ในคอมพิวเตอร์จะเก็บเป็น 0.6666667 ซึ่งค่าที่แท้จริงคือ 0.66666666... การปัดเศษเป็นสาเหตุให้เกิดค่า error ขึ้น เรียกค่า round-off error ซึ่งเกิดขึ้นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ เพราะขึ้นอยู่กับเครื่องมือที่ใช้ ใน finite-difference ค่าของตัวแปรตามที่อยู่ใกล้ grid point จะแคบมาก เพราะขนาดของ grid มีค่าเล็กมาก เมื่อขนาดของ grid เล็กมาก นำ

มาหารกับค่า finite difference ที่มีค่าน้อยมาก จะเป็นสาเหตุให้เกิด round-off error ซึ่งจะแสดงให้ดูดังต่อไปนี้

พิจารณาผลต่างข้างหน้า

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

ถ้า $u = ye^x$ และเปรียบเทียบแต่ละการเพิ่มของทศนิยม แล้วที่ $x = 1.3$ และ $y = 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{(1.3+0.01)} - e^{1.3}}{0.01} = \frac{3.706 - 3.669}{0.01} = 3.700 \qquad \text{สำหรับ } h = 0.01$$

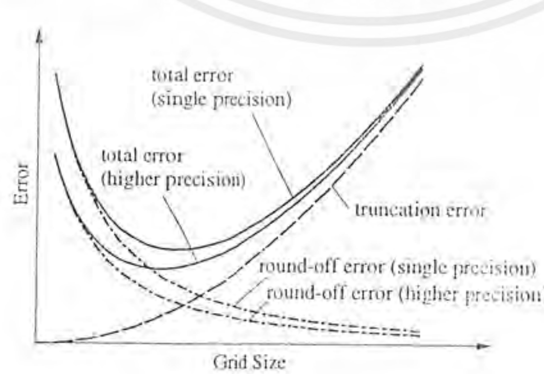
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{(1.3+0.001)} - e^{1.3}}{0.001} = \frac{3.673 - 3.669}{0.001} = 4.000 \qquad \text{สำหรับ } h = 0.001$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{(1.3+0.0001)} - e^{1.3}}{0.0001} = \frac{3.670 - 3.669}{0.0001} = 10.000 \qquad \text{สำหรับ } h = 0.0001$$

ซึ่งค่าที่แท้จริงคือ $e^{1.3} = 3.669$ ดังนั้น ค่า round-off error จะเพิ่มขึ้น เมื่อขนาดของ grid ลดลง นั่นคือ ผลเฉลยของ PDEs จะมีค่า error มากขึ้น ถ้าขนาด grid ลดลง ในการคำนวณ ทำให้ค่า round-off error เพิ่มขึ้นๆ เมื่อทำการคำนวณในแต่ละ step แม้จะแน่ใจว่าขนาดของ grid ใหญ่ขึ้นแล้วทำให้ค่า round-off error ลดลง แต่ขนาด grid ก็ไม่สามารถกำหนดให้ใหญ่เกินไปด้วย 2 เหตุผล คือ

1. ค่า total error อาจเกิดจากค่า truncation error
2. นำไปสู่ผลเฉลยที่ไม่เสถียร

ความสัมพันธ์ระหว่างค่า round-off error และ ขนาดของ grid แสดงดังรูปที่ 2.2.3



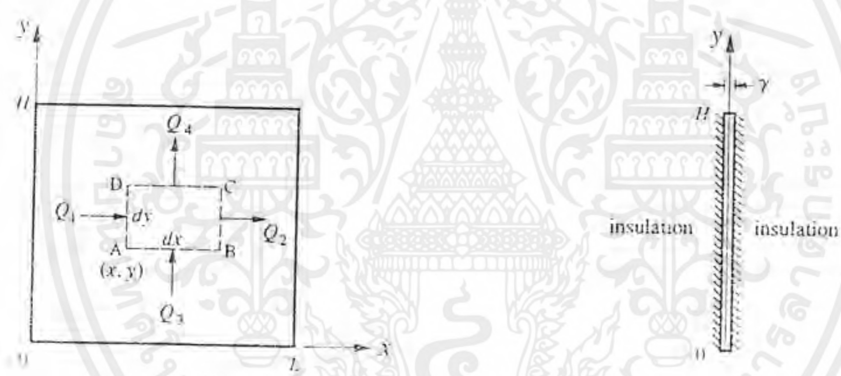
รูปที่ 2.2.3 ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข เมื่อมีขนาด grid ต่างๆ กัน

ในการหาขนาด grid ที่ทำให้ค่า total error มีค่าน้อยที่สุดทำได้ยาก แต่ว่าขนาดของ grid ที่ทำให้ค่า total error มีค่าน้อยที่สุดนั้น อาจไม่ใช่ทางเลือกที่ดีที่สุด เพราะขนาดของ grid ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของปัญหา สำหรับปัญหาที่ใช้เวลาในการคำนวณมาก เราจะใช้ขนาดของ grid ที่ใหญ่ขึ้นได้ แต่สำหรับปัญหาที่ต้องการเวลาในการคำนวณน้อย เราจะใช้ขนาด grid เล็กลง

2.3 สมการเชิงวงรี (Elliptic Equations)

2.3.1 สมการความร้อน 2 มิติ / สมการลาปลาซ_(The Steady Two-Dimensional Heat Equation / The Laplace Equation)

พิจารณาแผ่น สี่เหลี่ยมมุมฉาก ของวัตถุตัวนำความร้อนที่มีความหนา γ , ความหนาแน่นของมวล ρ , ความร้อนจำเพาะ σ และสัมประสิทธิ์การนำความร้อน k ในระนาบ xy แสดงในรูปที่ 2.3.1 ซึ่งแผ่นนี้ มีการกันความร้อนอย่างดีทั้ง 2 ด้าน ดังนั้นความร้อนจะไหลในทิศทาง x และ y เท่านั้น จะไม่ไหลข้ามจากด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งของความหนา



รูปด้านหน้า รูปด้านข้าง

รูปที่ 2.3.1 ปัญหาการไหลของความร้อน 2 มิติ

พิจารณา element ของแผ่น ABCD ขนาด $dx \times dy$ และอัตราการไหลของความร้อน Q_1, Q_2, Q_3 และ Q_4 ที่ผ่านเส้นขอบของ element ในทิศต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.3.1 ใช้กฎการนำความร้อนของฟูริเยร์ ฟลักซ์ความร้อน (อัตราการไหลของความร้อน Q ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ A) ในทิศทาง x จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ gradient ของอุณหภูมิ $\partial u(x,y,t)/\partial x$
ดังนั้น

$$Q \quad = \quad -kA\frac{\partial u}{\partial x}$$

เมื่อ k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน มีค่าเป็นบวก เครื่องหมายลบแสดงว่า ความร้อนไหลอยู่ในทิศที่อุณหภูมิลดลง

ดังนั้น พลังงานความร้อนที่ไหลภายใน element ABCD ในทิศทาง x ที่เวลา dt มีค่า

$$= \quad (-Q_2 + Q_1)dt$$

$$= \quad k\gamma dy\left[\frac{\partial u(x+dx,y,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right]dt$$

เนื่องจาก $A = \gamma\, dy$

$$= \quad k\gamma dy\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\right]dt$$

$$= \quad k\gamma dy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt$$

ในทำนองเดียวกัน พลังงานความร้อนที่ไหลภายใน element ในทิศทาง y ที่เวลา dt คือ

$$= \quad (-Q_4 + Q_3)dt \; = k\gamma dy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dydt$$

ดังนั้น พลังงานความร้อนทั้งหมดที่ไหลภายใน element ที่เวลา dt มีค่า

$$= \quad k\gamma dxdy\left(\nabla^2 u\right)dt$$

ที่

$$\nabla^2 \quad \equiv \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ เป็นตัวดำเนินการลาปลาซ

ซึ่งความร้อนที่ได้รับจาก element ในเวลา dt เป็นสัดส่วนกับมวล $[=\rho\gamma dxdy]$ และอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น ในเวลา $dt[=(\partial u/\partial t)dt]$ ดังนั้น ความร้อนที่ได้ในเวลา dt คือ

$$= \quad \sigma\rho\gamma dxdy\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

ที่ σ เป็นความร้อนจำเพาะของวัตถุ

สมมติว่า ในแผ่นมีความร้อนที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย (ตัวอย่าง การถ่ายเทความร้อน) และให้

$$f(x,y,t) \quad = \quad \frac{\text{อัตราการเคลื่อนที่ของความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร}}{k}$$

พลังงานความร้อนที่เปลี่ยนแปลงใน element มาจากความร้อนที่จุดเริ่มต้น และจุดปลายที่เวลา dt คือ

$$= \quad f(x,y,t)k\gamma dxdydt$$

เพื่อให้พลังงานความร้อนที่สมดุล ผลรวมความร้อนที่ไหลเข้าลบความร้อนที่เปลี่ยนแปลงใน element เท่ากับ ความร้อนที่ได้รับจาก element ดังนั้น

$$k\gamma dxdy\left(\nabla^2 u\right)dt - fk\gamma dxdydt \quad = \quad \sigma\rho\gamma dxdy\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

หรือ

$$c^2\left(\nabla^2 u - f\right) \quad = \quad \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.3.1)$$

ที่

$$c^2 \quad = \quad \frac{k}{\rho\sigma}$$ เป็นความร้อนที่แพร่ออกจากวัตถุ

สมการ (2.3.1) เป็นรูปแบบทั่วไปของสมการความร้อน 2 มิติที่ขึ้นกับเวลา การไหลที่สม่ำเสมอของความร้อน 2 มิติ $u = u(x,y)$ และ $f = f(x,y)$ ดังนั้น $\partial u/\partial t = 0$ แล้ว

$$\nabla^2 u \quad = \quad f(x,y) \qquad (2.3.2)$$

ซึ่งเรียกว่าสมการปัวส์ซองและไม่เอกพันธ์ เนื่องจากมีเทอมของ f
ถ้า f เป็น 0 สมการ (2.3.2) จะมีรูปแบบเป็น

$$\nabla^2 u \quad = \quad 0 \qquad (2.3.3)$$

ซึ่งเรียกว่าสมการลาปลาซ

ปัญหาการไหลของความร้อน แบ่งได้เป็น (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) ซึ่งเกิดขึ้นในปัญหาอื่นๆ อีก เช่น ปัญหาความดันไฟฟ้า, ปัญหาของสนามโน้มถ่วง และปัญหาสนามไฟฟ้าสถิต

ในบทนี้จะอธิบายถึงสมการลาปลาซ 2 มิติ (2.3.3) ซึ่งเป็น สมการ elliptic จะแสดงการหาค่าโดยใช้วิธีเชิงตัวเลขได้หลายๆ วิธี เมื่อ (2.3.3) เป็นอนุพันธ์อันดับที่สองใน x และอนุพันธ์อันดับที่สองใน y จะมี BCs 4 เงื่อนไข (2 เงื่อนไขสำหรับ x และ 2 เงื่อนไขสำหรับ y) ทำให้ได้ unique solution คือปัญหาค่าขอบเขต วิธีเชิงตัวเลขที่จะอธิบายต่อไปนี้ สามารถใช้ได้กับสมการ elliptic อื่นๆ ได้อีก เช่น สมการปัวส์ซอง, พิจารณากรณีง่ายๆของ Dirichlet problem ในโดเมนสี่เหลี่ยมมุมฉาก Neumann problem หรือ Robbins problem (ปัญหาผสม) กับ regular boundary และ irregular boundary ซึ่งปัญหานี้สามารถหาผลเฉลยได้

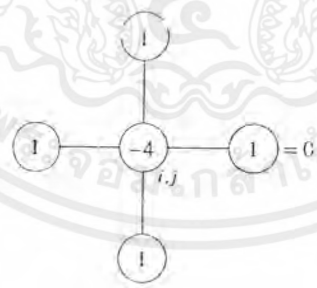
สมการเชิงผลต่างสำหรับสมการลาปลาซ (2.3.3) สำหรับระบบ even grid ที่กำหนดโดย (2.2.14a) คือ

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \qquad (2.3.4a)$$

เมื่อ $\Delta x = \Delta y$ จะกลายเป็น

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \qquad (2.3.4b)$$

หรือ ในรูปของ pattern form



รูปที่ 2.3.2 รูป pattern form สมการลาปลาซ

รูปที่ 2.3.2 แสดงผลเฉลยที่ grid point ทั่วไป $P_{i,j}$ ซึ่งขึ้นกับค่าของจุดที่อยู่ใกล้เคียง ลักษณะของสมการ elliptic ที่ได้กล่าวไปแล้วใน หัวข้อ 2.1.4.1 จะเห็นได้ชัดว่าความร้อนในจุดนั้นจะกระจายไปทุกทิศทุกทาง ดังนั้นพลังงานความร้อนที่ทุกจุดจะมาจากทุกทิศทางด้วย สามารถหาค่าทุกจุด grid point ภายในโดยใช้สมการเชิงผลต่าง ซึ่งหาตาม row by row หรือ

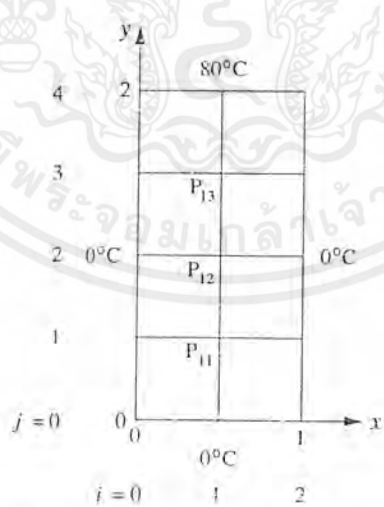
column by column ก็ได้ เราจะได้ระบบของสมการพีชคณิตเชิงเส้น ซึ่งสมมาตรกับเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ sparse (เมทริกซ์ sparse คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 จำนวนมาก) เมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็น sparse เพราะโดยทั่วไป จะมี element ที่ไม่เป็น 0 จำนวน 5 ตัว ตามแถวของเมทริกซ์ เพราะว่าสมการเชิงผลต่างมีเทอมไม่ทราบค่า 5 ตัว ที่มีค่าสูงสุด และส่วนใหญ่ขนาดของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์จะมีค่ามากพอๆ กับจำนวนของ grid point ทำให้มีความแม่นตรงมากขึ้น วิธี finite difference จะใช้ในการหาผลเฉลย PDE Elliptic เป็นเทคนิคในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

2.3.2 วิธีโดยตรง (Direct Method)

ถ้าหาผลเฉลยของระบบโดยวิธี direct คือ ไม่ใช้วิธีทำซ้ำ เช่น วิธี Gauss elimination , วิธี Gauss-Jordan elimination หรือวิธี LU factorisation ซึ่งที่กล่าวมานี้ คือ direct method

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.1</u>

พิจารณา ปัญหาความร้อนที่ไหลสม่ำเสมอ 2 มิติของแผ่นสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งพื้นผิวทั้ง 2 ด้าน สามารถกันความร้อนได้มีขนาด $1\,m \times 2\,m$ และ Dirichlet BCs $0°C, 0°C, 0°C$ และ $80°C$ ที่ขอบทั้ง 4 แผ่นโลหะถูกแบ่งให้เป็นระบบ grid ซึ่งขนาดของ grid เป็นค่าคงที่ $\Delta x = \Delta y = 0.5\,m$ แสดงในรูปที่ 2.3.3



รูปที่ 2.3.3 ปัญหาของตัวอย่างที่ 2.3.1

จงหาสถานะของอุณหภูมิที่ grid point ภายใน 3 จุด คือ P_{11}, P_{12} และ P_{13} โดยวิธี direct

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากไม่มีแหล่งความร้อนในแผ่น จะได้สมการ (2.3.3) และสมการเชิงผลต่างสำหรับ $\Delta x = \Delta y$ คือ (2.3.4b) BCs คือ

$$u_{1,0} = u_{0,j} = u_{2,j} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad j = 1,2,3; \qquad u_{1,4} = 80$$

หาค่าที่จุด P_{11}, P_{12} และ P_{13} โดยใช้ (2.3.4b) และ BCs เราได้

$$\begin{aligned}
P_{11} &: \quad 0+0+0+u_{12}-4u_{11} = 0 \\
P_{12} &: \quad u_{13}+0+u_{11}+0-4u_{12} = 0 \\
P_{13} &: \quad 80+0+u_{12}+0-4u_{13} = 0
\end{aligned}$$

เปลี่ยนสมการให้อยู่ในของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{bmatrix} \tag{i}$$

ใน direct method สมการเมทริกซ์ (i) สามารถหาผลเฉลยโดยใช้วิธี Gauss elimination , วิธี Gauss-Jordan elimination หรือวิธี LU factorisation และทำการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ กับผลเฉลย analytic แสดงในตารางที่ 2.3.1

ตารางที่ 2.3.1 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.1

	Analytical	Direct method	Error,[a] %
$u(0.5, 0.5)$	0.8755	1.4286	63.18
$u(0.5, 1.0)$	4.3908	5.7143	30.14
$u(0.5, 1.5)$	20.8755	21.4286	2.65

ค่า error ที่มากเป็นผลมาจากใช้ขนาด grid ที่ใหญ่ ซึ่งผลเฉลย analytic คือ

$$u(x,y) = \frac{320}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n\sinh(2n\pi)} \sinh(n\pi y)\sin(n\pi x)$$

และค่า error อยู่ในรูปเปอร์เซนต์ หาได้จาก

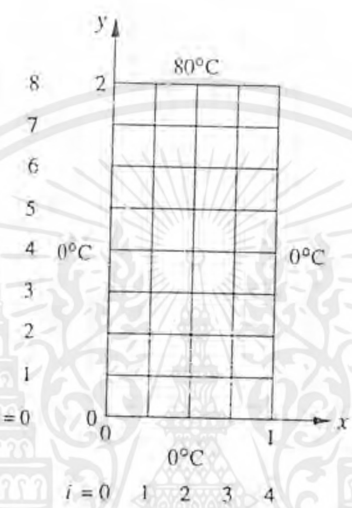
$$\left(\frac{Numerical - Exact}{Exact}\right) \times 100$$

ตัวอย่างที่ 2.3.2

จงหาผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.1 โดยใช้ระบบ grid finer ที่ $\Delta x = \Delta y = 0.25m$ แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้จากตัวอย่างที่ 2.3.1

วิธีทำ

$\Delta x = \Delta y = 0.25m$ จะได้



รูปที่ 2.3.4 ระบบ grid ของตัวอย่างที่ 2.3.2

หา grid point ภายใน โดยใช้ (2.3.4b) แบบ column by column ซึ่ง BCs เหมือนในตัวอย่างที่ 2.3.1 จะได้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น 21 สมการ เขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์

$$AU = B \tag{i}$$

ที่

$$U = [u_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ u_{14}\ u_{15}\ u_{16}\ u_{17}\ u_{21}\ u_{22}\ u_{23}\ u_{24}\ u_{25}\ u_{26}\ u_{27}$$
$$u_{31}\ u_{32}\ u_{33}\ u_{34}\ u_{35}\ u_{36}\ u_{37}]^T$$

$$B = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -80\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -80$$
$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -80]^T$$ ที่ T คือการทรานสโพสของเมทริกซ์

$$
A=\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
$$

แน่นอนว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A สมมาตรกับเมทริกซ์ sparse แก้ (i) โดยใช้วิธี Gauss elimination จะได้

$$
\begin{bmatrix}
u_{17} & u_{27} & u_{37}\\
u_{16} & u_{26} & u_{36}\\
u_{15} & u_{25} & u_{35}\\
u_{14} & u_{24} & u_{34}\\
u_{13} & u_{23} & u_{33}\\
u_{12} & u_{22} & u_{32}\\
u_{11} & u_{21} & u_{31}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
34.5681 & 42.5419 & 34.5681\\
15.7305 & 21.0315 & 15.7305\\
7.3225 & 10.1230 & 7.3225\\
3.4366 & 4.8155 & 3.4366\\
1.6082 & 2.2659 & 1.6082\\
0.7305 & 1.0315 & 0.7305\\
0.2824 & 0.3991 & 0.2824
\end{bmatrix}
$$

สำหรับการเปรียบเทียบผลเฉลยของตัวอย่างนี้กับตัวอย่างที่ 2.3.1 ดังในตารางที่ 2.3.2 ซึ่งเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ grid point ภายใน 3 จุด ความแม่นตรงจะเพิ่มขึ้นเมื่อขนาด grid ลดลง

ตารางที่ 2.3.2 เปรียบเทียบผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.2

		$\Delta x = \Delta y = 0.5$ m		$\Delta x = \Delta y = 0.25$ m	
	Exact	Direct method	Error, %	Direct method	Error, %
$u(0.5, 0.5)$	0.8755	1.4286	63.18	1.0315	7.82
$u(0.5, 1.0)$	4.3908	5.7143	30.14	4.8155	9.67
$u(0.5, 1.5)$	20.8755	21.4286	2.65	21.0315	0.75

ถ้านำ (2.3.4b) ไปใช้หาที่ grid point ภายในแบบ row by row เมทริกซ์ U , B และ A จะเป็น ดังนี้

$$U = [u_{11}\ u_{21}\ u_{31}\ u_{12}\ u_{22}\ u_{32}\ u_{13}\ u_{23}\ u_{33}\ u_{14}\ u_{24}\ u_{34}\ u_{15}\ u_{25}$$
$$u_{35}\ u_{16}\ u_{26}\ u_{36}\ u_{17}\ u_{27}\ u_{37}]^T$$

B = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 -80 -80 -80]^{T} เมื่อ T แสดงเมทริกซ์ทรานสโพส

$$A = \begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยที่มีค่าเท่ากัน

สำหรับระบบ grid ที่ให้ค่าความถูกต้องที่ดีที่สุด เมทริกซ์สัมประสิทธิ์จะใหญ่มากสำหรับวิธี direct เมทริกซ์จะมีขนาด 500 × 500 หรือมากกว่านี้ เป็นสาเหตุทำให้เกิดปัญหาในเรื่องหน่วยความจำ เมื่อทุกๆ element ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์จะถูกเก็บในหน่วยความจำ ซึ่งในวิธีของการทำซ้ำเราต้องสนใจเป็นพิเศษ ตัวอย่างของวิธีซ้ำสำหรับสมการ elliptic คือ วิธี Gauss-Seidel และวิธี successive over-relaxation ซึ่งเป็นอีกวิธีหนึ่งแทนที่จะเป็นวิธี alternating direction implicit

ถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์อยู่ในรูป tridiagonal สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ย่อย ซึ่งสมาชิกที่อยู่ในแนวทแยง, subdiagonal และ superdiagonal ไม่เป็น 0 สำหรับเมทริกซ์ที่ 2 A ในตัวอย่างที่ 2.3.2 คือ block tridiagonal เขียนได้เป็น

$$A = \begin{bmatrix}
D & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
I & D & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & I & D & I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & I & D & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & I & D & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I & D & I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & D
\end{bmatrix}$$

ที่

$$D=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ 0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2.3.3 Gauss-Seidel Method (Liebmann's Method)

เมื่อหาผลเฉลยของระบบโดยวิธี Gauss-Seidel หรือเรียกว่า วิธี Liebmann เป็นที่รู้กันดีว่า เมื่อวิธี Gauss-Seidel จะใช้กับผลเฉลยที่ลู่เข้า ดังนั้นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ควรจะเป็น diagonal อย่างชัดเจน ซึ่งหมายความว่า สมาชิกในแนวทแยงของเมทริกซ์จะต้องมีมากกว่าผลรวมของสมาชิกทุกตัวที่ไม่ได้อยู่บนแนวทแยงเดียวกัน โดยไม่คำนึงถึงเครื่องหมาย ถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เกือบจะไม่หรือไม่เป็น diagonal อย่างชัดเจน การลู่เข้าของผลเฉลยอาจจะช้าหรือผลเฉลยนั้นอาจจะลู่ออก เมื่อหาผลเฉลยสมการ elliptic เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ส่วนใหญ่จะเป็น diagonal อย่างชัดเจน สามารถดูได้จากตัวอย่างก่อนหน้านี้

การใช้วิธี Gauss-Seidel ในการหาผลเฉลยสมการลาปลาซ (2.3.3), สมการเชิงผลต่างของมันคือ (2.3.4a) สำหรับระบบ even grid เขียนได้เป็น

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{u_{i+1,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k+1}+(\Delta x/\Delta y)^2\left(u_{i,j+1}^{k}+u_{i,j-1}^{k+1}\right)}{2[1+(\Delta x/\Delta y)^2]} \qquad (2.3.5a)$$

ที่ superscript คือ จำนวนของการทำซ้ำ สำหรับ $\Delta x=\Delta y$ จะได้

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k+1}+u_{i,j+1}^{k}+u_{i,j-1}^{k+1}\right) \qquad (2.3.5b)$$

สมการ (2.3.5a) หรือ (2.3.5b) จะนำไปใช้ในการหาค่า grid point ภายในทั้งหมด อาจจะใช้ row by row หรือ column by column ก็ได้ ในการทำซ้ำสำหรับ grid point

เมื่อผลเฉลยลู่เข้า (หาได้) จะใช้วิธีการทำซ้ำได้ เมื่อทำการใช้โปรแกรมในการคำนวณมาตรฐานที่ใช้เสมอในการตรวจสอบการลู่เข้า ซึ่งทำให้แน่ใจได้ว่า การเปลี่ยนของผลเฉลยที่ทุก grid point ภายในที่เลือกจะมีค่าน้อยกว่าค่าที่กำหนด ซึ่งขึ้นอยู่กับความแม่นยำที่ต้องการ ในเทอมทางคณิตศาสตร์ นั่นคือ

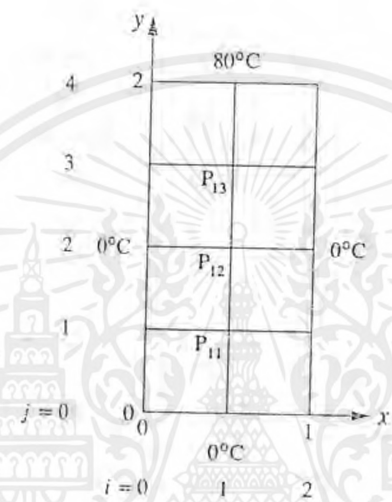
$$\left|\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k}}{u_{i,j}^{k}}\right|<\varepsilon$$

ที่ทุก grid point หรือบาง grid point ที่เลือกก่อน เมื่อ ε เป็นค่าที่กำหนดขึ้นที่ยอมรับได้ มาตรฐานนี้จะใช้กับบาง grid point ภายในที่เลือกเท่านั้น ส่วนใหญ่จุดที่เลือกจะเป็นจุดที่อยู่ในพื้นที่ ที่ผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว มาตรฐานการลู่เข้านี้สามารถนำไปใช้ได้กับวิธีการทำซ้ำอื่นๆ ได้อีก

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.3</u>

แก้ปัญหาของตัวอย่างที่ 2.3.1 หาผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.3 โดยใช้วิธี Gauss-Seidel

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 2.3.5 ปัญหาการไหลของความร้อนของตัวอย่างที่ 2.3.3

BCs คือ

$$u^k_{1,0} = u^k_{0,j} = u^k_{2,j} = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad j = 1,2,3$$

$$u^k_{1,4} = 80 \qquad \text{สำหรับทุกค่า } k$$

หา P_{11}, P_{12} และ P_{13} โดยใช้ (2.3.5b) และ BCs จะได้

$$P_{11} \quad : \quad u^{k+1}_{11} = \frac{u^k_{12}}{4}$$

$$P_{12} \quad : \quad u^{k+1}_{12} = \frac{1}{4}\left(u^{k+1}_{11} + u^k_{13}\right)$$

$$P_{13} \quad : \quad u^{k+1}_{13} = \frac{1}{4}\left(u^{k+1}_{12} + 80\right)$$

ที่ superscript คือ จำนวนของการทำซ้ำ

ใช้ค่าเริ่มต้น $u^0_{11} = u^0_{12} = u^0_{13} = 0$ ซึ่งผลเฉลยจะลู่เข้าและเป็นทศนิยม 4 ตำแหน่งที่ทุกจุดภายใน grid แสดงในตารางที่ 2.3.3

ตารางที่ 2.3.3 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.3

k	u_{11}	u_{12}	u_{13}
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	20.0000
2	0.0000	5.0000	21.2500
3	1.2500	5.6250	21.4063
4	1.4063	5.7031	21.4258
5	1.4258	5.7129	21.4282
6	1.4282	5.7141	21.4285
7	1.4285	5.7143	21.4286
8	1.4286	5.7143	21.4286
9	1.4286	5.7143	21.4286

ในตัวอย่างนี้ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (ดูสมการ (i) ของตัวอย่างที่ 2.3.1) เป็น diagonal อย่างชัดเจน ซึ่งทำให้แน่ใจว่าผลเฉลยลู่เข้า

อัตราของการลู่เข้าสามารถทำให้ดีขึ้นได้ โดยเลือกค่าเริ่มต้นที่ดีๆ ซึ่งไม่จำเป็นต้องใช้ค่าเดียวกันที่ทุก grid point ภายใน ในตัวอย่างนี้จะได้ว่า $u_{11} < u_{12} < u_{13}$ ดังนั้นถ้าใช้ $u_{11}^0 = 0, u_{12}^0 = 6, u_{13}^0 = 20$ ผลเฉลยจะเป็น

ตารางที่ 2.3.4 ผลของตัวอย่างที่ 2.3.3 ใช้ค่าเริ่มต้นต่างกัน

k	u_{11}	u_{12}	u_{13}
0	0.0000	6.0000	20.0000
1	1.5000	5.3750	21.3438
2	1.3438	5.6719	21.4180
3	1.4180	5.7090	21.4272
4	1.4272	5.7136	21.4284
5	1.4284	5.7142	21.4286
6	1.4286	5.7143	21.4286
7	1.4286	5.7143	21.4286

จำนวนของการทำซ้ำสำหรับหาผลเฉลยลู่เข้าทศนิยม 4 หลัก วิธีใหม่จะทำซ้ำเพียง 7 ครั้ง ซึ่งน้อยกว่าวิธีก่อนหน้านี้ ที่ทำซ้ำ 9 ครั้ง อย่างไรก็ตาม การทำให้ดีขึ้นก็ไม่มีความสำคัญมากนัก เพราะวิธีเชิงตัวเลขจะมีความเร็ว ถ้าอัตราการลู่เข้ามีค่ามากคือ วิธี successive-relaxation (SOR)

2.3.4 Successive Over-Relaxation (SOR) Method

วิธีนี้มีอัตราการลู่เข้าเร็วกว่าวิธี Gauss-Seidel แทนที่เราจะใช้ตัวทำซ้ำตัวเดิมในการหาค่าตัวทำซ้ำถัดไปในวิธี Gauss-Seidel เดิม เราจะใช้ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของตัวทำซ้ำ Gauss-Seidel แทน และใช้ตัวทำซ้ำตัวเดิมในการกำหนดตัวใหม่ ดังนั้น

$$u_{i,j}^{k+1} = \omega\left[u_{i,j}^{k+1}\right]_{GS} + (1-\omega)u_{i,j}^{k} \qquad (2.3.6a)$$

เมื่อ ω คือ over-relaxation factor ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 1 และ 2 อัตราการลู่เข้าเร็วกว่าวิธีของ Gauss-Seidel (2.3.6a) จะถูกใช้อย่างต่อเนื่องสำหรับทุก grid ภายใน และ weighting factor จะถูกนำไปประยุกต์ใช้กับตัวทำซ้ำที่มีค่ามากกว่า 1 วิธีนี้เรียกว่าวิธี successive over-relaxation (สำหรับ $\omega < 1$ จะเรียกว่า under-relaxation จะถูกนำไปใช้เสมอกับระบบสมการเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้น สำหรับวิธี Gauss-Seidel ที่ลู่ออก)

ซึ่งอีกวิธีการหนึ่งของวิธี SOR คือ

ตัวทำซ้ำตัวใหม่ = ตัวทำตัวเดิม + corrector

ที่

corrector = ω ×(ตัวทำซ้ำ Gauss-Seidel ใหม่ - ตัวทำซ้ำตัวเก่า)

ω คือ over-relaxtion factor ซึ่งจะเหมือนกับสมการ (2.3.6a)

ใช้ (2.3.5a) กับ grid point ที่เท่ากัน (2.3.6a) สามารถเขียนเป็น

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\omega}{2[1+(\Delta x/\Delta y)^2]}[u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k+1} + (\Delta x/\Delta y)^2(u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1})] + (1-\omega)u_{i,j}^{k} \qquad (2.3.6b)$$

สำหรับ $\Delta x = \Delta y$ จะได้

$$u_{i,j}^{k+1} = \omega\left(\frac{u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1}}{4}\right) + (1-\omega)u_{i,j}^{k} \qquad (2.3.6c)$$

ถ้า $\omega = 1$ (2.3.6a) จะกลายเป็น

$$u_{i,j}^{k+1} = [u_{i,j}^{k+1}]_{GS}$$

และต่อไปก็ใช้เหมือนวิธี Gauss-Seidel วิธี SOR ได้มาจากการแปลงวิธี Gauss-Seidel

จะมีค่า ω_{opt} ที่เหมาะสม ซึ่งทำให้อัตราการลู่เข้าเร็วที่สุด การวิเคราะห์หาค่า ω_{opt} จะทำได้ยาก ในกรณีนี้ การทำซ้ำเพียงเล็กน้อย จะทำให้เกิดค่าความแตกต่างของ ω หนึ่งในวิธีที่หาค่า ω ที่ดีกว่า (โดยส่วนใหญ่จะใช้การประมาณค่านอกช่วง หรือการประมาณค่าในช่วง) จะมีพื้นฐานอยู่บนการทำซ้ำนี้ สังเกตว่าผลเฉลยจะลู่เข้าทางเดียวเมื่อ $\omega \le \omega_{opt}$ และจะเกิดการแกว่งเมื่อ $\omega > \omega_{opt}$ ซึ่งเราจะใช้ในการกำหนดค่าที่ดีของ ω โดยปกติแล้วเราจะพยายามกำหนดค่า ω_{opt} ให้ถูกต้อง เพื่อจะนำ ω_{opt} ไปใช้ได้อีก

อย่างไรก็ตาม การประมาณค่า ω_{opt} ที่ดีนั้นได้จาก stability analysis

คือ
$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad (2.3.7a)$$

สำหรับโดเมนผลเฉลยสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่ถูกแบ่งโดยระบบ even grid กับ Dirichlet หรือ Neumann BCs

$$\lambda = \frac{1}{1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}\left[\cos\frac{\pi}{m} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \cos\frac{\pi}{n}\right] \qquad (2.3.7b)$$

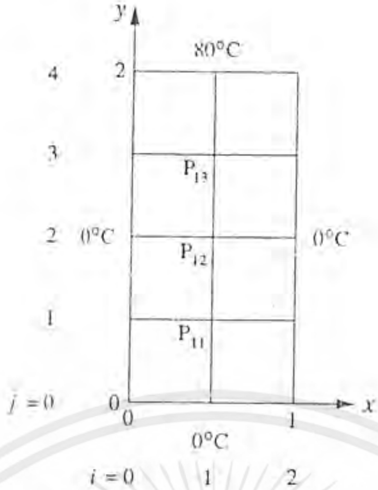
ที่ m,n เป็นจำนวนของช่วง x และ y ตามลำดับ

วิธี SOR จะได้มาจากการทำซ้ำของ Gauss-Seidel ซึ่งคุณสมบัติของมันจะคล้ายกับวิธี Gauss-Seidel แน่ใจว่าผลเฉลยจะลู่เข้า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงผลต่าง ต้องเป็น diagonal อย่างชัดเจน และ ω ต้องมีค่าไม่แตกต่างจาก ω_{opt} มากเกินไป

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.4</u>

จงหาผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.1 โดยวิธี SOR โดย $\omega = 1.04$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 2.3.6 ปัญหาการไหลของความร้อนของตัวอย่างที่ 2.3.4

BCs คือ

$$u_{1,0}^{k} = u_{0,j}^{k} = u_{2,j}^{k} = 0 \qquad \text{เมื่อ } j = 1,2,3; \quad u_{1,4}^{k} = 80 \text{ สำหรับทุกค่า } k$$

นำสมการ (2.3.6a) ไปใช้ ที่จุด P_{11}, P_{12} และ P_{13} จะได้

$$u_{11}^{k-1} = 1.04[u_{11}^{k+1}]_{GS} - 0.04u_{11}^{k}$$
$$u_{12}^{k-1} = 1.04[u_{12}^{k+1}]_{GS} - 0.04u_{12}^{k}$$
$$u_{13}^{k-1} = 1.04[u_{13}^{k+1}]_{GS} - 0.04u_{13}^{k}$$

ที่

$$[u_{11}^{k+1}]_{GS} = \frac{u_{12}^{k}}{4}$$

$$[u_{12}^{k-1}]_{GS} = \frac{1}{4}(u_{11}^{k-1} + u_{13}^{k})$$

$$[u_{13}^{k+1}]_{GS} = \frac{1}{4}(u_{12}^{k+1} + 80) \qquad \text{โดยใช้ (2.3.5b) และ BCs}$$

ผลเฉลยที่ได้และตัวอย่างการคำนวณ แสดงข้างล่างนี้

ตารางที่ 2.3.5 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.4 ($\omega = 1.04$)

k	$[u_{11}]_{GS}$	u_{11}	$[u_{12}]_{GS}$	u_{12}	$[u_{13}]_{GS}$	u_{13}
0		0.0000		0.0000		0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	20.0000	20.8000
2	0.0000	0.0000	5.2000	5.4080	21.3520	21.3741
3	1.3520	1.4061	5.6950	5.7065	21.4266	21.4287
4	1.4266	1.4275	*5.7140*	***5.7143***	21.4286	21.4286
5	1.4286	1.4286	5.7143	5.7143	21.4286	21.4286
6	1.4286	1.4286	5.7143	5.7143	21.4286	21.4286

ตัวอย่างการคำนวณ

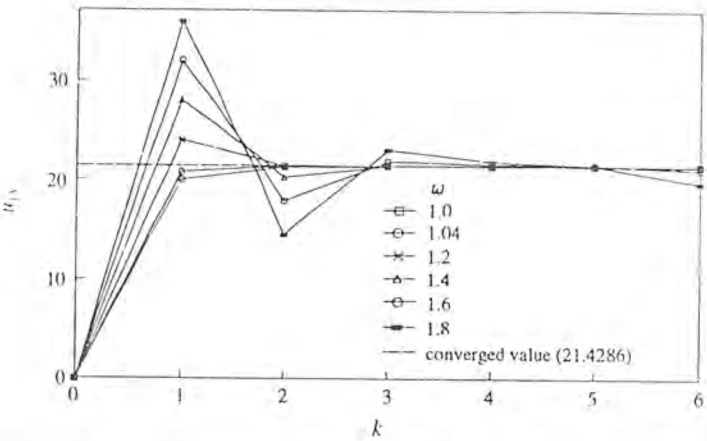
$$
\begin{aligned}
[u_{12}^4]_{GS} &= \frac{1}{4}(1.4275 + 21.4287) \\
&= 5.7140 \\
\therefore u_{12}^4 &= 1.04 \times 5.7140 - 0.04 \times 5.7065 \\
&= 5.7143
\end{aligned}
$$

เปรียบเทียบกับตัวอย่างที่ 2.3.3 ที่ใช้วิธี Gauss-Seidel , วิธี SOR จะทำซ้ำ 6 ครั้ง แทนที่จะทำซ้ำ 9 ครั้งในวิธี Gauss-Seidel สำหรับค่าความถูกต้องที่เท่ากัน สามารถทำให้อัตราการลู่เข้าเร็วขึ้น โดยใช้ค่าเริ่มต้นที่ดีๆ เหมือนกับวิธี Gauss-Seidel ซึ่งอธิบายแล้วในตัวอย่างที่ 2.3.3

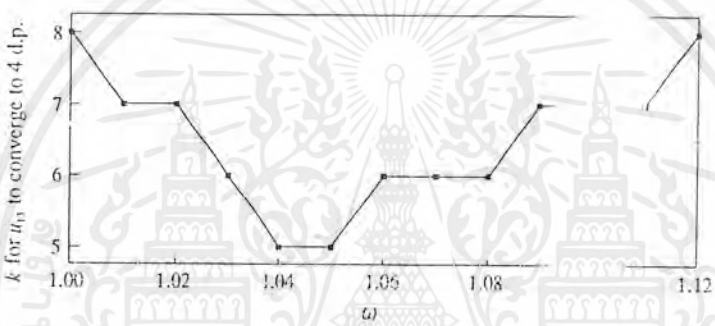
แสดงลักษณะการลู่เข้าของปัญหานี้ ที่ grid point จุดหนึ่งคือ P_{13} เมื่อค่า ω แตกต่างกัน แสดงในตารางที่ 2.3.6 และกราฟในรูปที่ 2.3.7-2.3.9

ตารางที่ 2.3.6 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.4 เมื่อค่าของ ω แตกต่างกัน

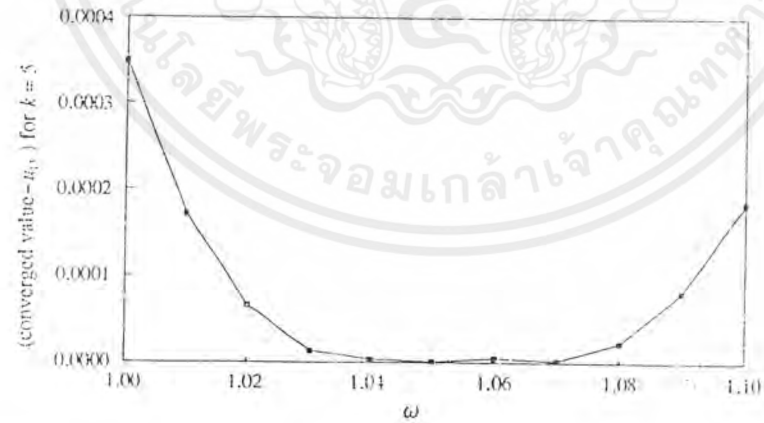
k	u_{13} $\omega = 1.0$	u_{13} $\omega = 1.04$	u_{13} $\omega = 1.2$	u_{13} $\omega = 1.4$	u_{13} $\omega = 1.6$	u_{13} $\omega = 1.8$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	20.0000	20.8000	24.0000	28.0000	32.0000	36.0000
2	21.2500	21.3741	21.3600	20.2300	17.9200	14.4900
3	21.4063	21.4287	21.4128	21.4344	21.8624	22.9865
4	21.4258	21.4286	21.4204	21.4603	21.6187	21.9340
5	21.4282	21.4286	21.4339	21.4727	21.5198	21.4864
6	21.4285	21.4286	21.4272	21.3739	21.0310	19.7089



รูปที่ 2.3.7 กราฟของ u_{13} เทียบกับจำนวนของการทำซ้ำ k สำหรับ ตัวอย่างที่ 2.3.4 ที่ค่า ω แตกต่างกัน



รูปที่ 2.3.8 จำนวนของการทำซ้ำ k เทียบกับ ω สำหรับตัวอย่างที่ 2.3.4



รูปที่ 2.3.9 ค่าการลู่เข้า - u_{13} เปรียบเทียบกับ ω สำหรับตัวอย่างที่ 2.3.4

จากรูปจะเห็นได้ว่า $\omega_{opt} \approx 1.04$ ซึ่งได้มาจากการประมาณค่าใน (2.3.7) จะได้ $\omega_{opt} \approx 1.033$ สำหรับ $m = 2, n = 4$ จากรูปที่ 2.3.7 จะเห็นได้ว่า เป็นการลู่เข้าเชิงเดียวเมื่อ $\omega \le \omega_{opt}$ และจะเกิดการแกว่งเมื่อ $\omega > \omega_{opt}$

จากรูปที่ 2.3.8 บอกได้ว่าวิธี SOR สำหรับ $\omega > 1.12$ จะไม่ลู่เข้าเร็วกว่าวิธี Gauss-Seidel สำหรับ $\omega = 1$ ในความจริงแล้วจำนวนของการทำซ้ำ สำหรับ u_{13} ซึ่งลู่เข้าหาทศนิยมที่ 4 จะเป็น 20 และ 48 เมื่อ ω เพิ่มขึ้นเป็น 1.6 และ 1.8 ตามลำดับ

2.3.5 Alternating Direction Implicit (ADI) Method

กรณีของวิธี Gauss-Seidel หรือวิธี SOR อาจจะใช้ไม่ได้ เช่น เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ ที่ไม่หรือแทบจะไม่เป็น diagonal อย่างชัดเจน ดังนั้นผลเฉลยที่ได้จะลู่ออก หรือจำนวนของการทำซ้ำจะมีค่ามากๆ กว่าจะลู่เข้า ซึ่งวิธีทำซ้ำ ADI (หรือเรียกว่า splitting methods) เป็นอีกทางเลือกหนึ่ง

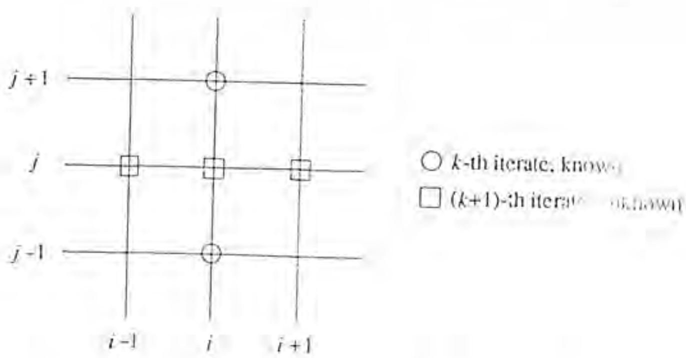
สมการเชิงผลต่างสำหรับ $\nabla^2 u = 0$ ซึ่งขนาด grid เป็นค่าคงที่ $\Delta x = \Delta y$ = ค่าคงที่ คือ

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \qquad (2.3.8)$$

จัดรูป (2.3.8) ใหม่เป็น

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{แถว } j \text{ ไม่ทราบค่า}}}{u_{i-1,j}^{k+1} - 4u_{i,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{หลัก } i \text{ ทราบค่าจากการทำซ้ำครั้งก่อน}}}{-u_{i,j-1}^{k} - u_{i,j+1}^{k}} \qquad (2.3.9a)$$

ที่ superscript คือ จำนวนของการทำซ้ำ สมการ (2.3.9a) แสดงการคำนวณหา grid point แถวที่ j
โดยใช้ผลเฉลยของ grid point หลักที่ i จากการทำซ้ำครั้งก่อน ดังแสดงในรูปที่ 2.3.10



รูปที่ 2.3.10 แสดงการคำนวณทางแถว สำหรับวิธี ADI

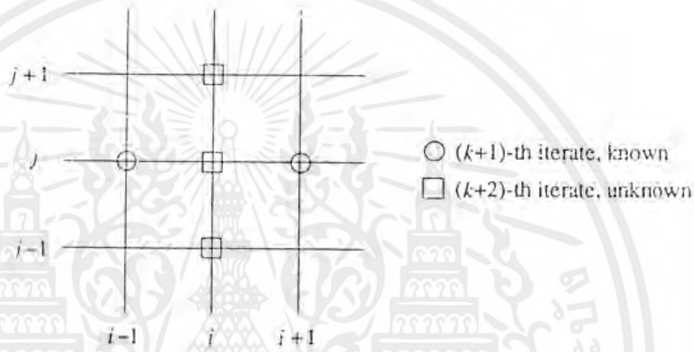
จัดรูป (2.3.8) ใหม่เป็น

$$u_{i,j-1}^{k+2} - 4u_{i,j}^{k+2} + u_{i,j+1}^{k+2} \quad = \quad -u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k+1} \qquad (2.3.9b)$$

$\uparrow$ หลัก i ไม่ทราบค่า

$\uparrow$ แถว j ทราบค่าจากการทำซ้ำครั้งก่อน

ที่ superscript คือ จำนวนของการทำซ้ำ สมการ (2.3.9b) แสดงการคำนวณหาค่าของ grid point ที่หลักที่ i โดยใช้ผลเฉลยของ grid point แถวที่ j จากการทำซ้ำก่อนหน้า ดังแสดงในรูปที่ 2.3.11



รูปที่ 2.3.11 แสดงการคำนวณทางหลัก สำหรับวิธี ADI

วิธีการของวิธี ADI แสดงดังข้างล่างนี้

ขั้นที่ 1 : เลือกค่า arbitrary เริ่มต้น $u_{i,j}^{0}$ (ค่าเริ่มต้น คือ arbitrary ถ้านำมาใช้ได้ดี สามารถที่จะนำไปใช้ได้กับวิธีการทำซ้ำอื่นๆ ได้อีก)

ขั้นที่ 2 : สำหรับแต่ละแถว $j = 1,2,...$ in turn (เช่นทีละแถว) ใช้ (2.3.9a) กับ BCs ในการหาผลเฉลยสำหรับทุกค่า u ใหม่ grid point ภายในบนแถวนั้น พิจารณาจนกระทั่งครบทุกแถว ซึ่งทำให้ได้ค่า $u_{i,j}^{1}$ ได้

ขั้นที่ 3 : สำหรับแต่ละหลัก $i = 1,2,...$ in turn ใช้ (2.3.9b) และ $u_{i,j}^{1}$ จากขั้นที่ 2 กับ BCs หาผลเฉลยสำหรับทุกๆ ค่า u ใหม่ grid point ภายในบนหลักนั้น พิจารณาจนกระทั่งครบทุกหลัก จะได้ค่า $u_{i,j}^{2}$

ขั้นที่ 4: ตรวจสอบการลู่เข้า พิจารณาขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 ซึ่งเป็นการทำซ้ำวน 1 ครั้ง ดังนั้นเราจะใช้ $u_{i,j}^{2}$ และ $u_{i,j}^{0}$ ในการทดสอบการลู่เข้า

ขั้นที่ 5: ทำขั้นที่ 2 , 3 และ 4 ซ้ำ จนกระทั่งลู่เข้า

ในวิธีการนี้ จะเริ่มจากการคำนวณทางแถวก่อน แล้วจึงคำนวณทางหลัก แต่ในทำนองเดียวกัน เราสามารถที่จะเปลี่ยนได้ โดยการคำนวณทางหลักก่อนแล้วค่อยคำนวณตามแถว ซึ่งจะได้ผลเฉลยเหมือนกันสังเกตว่าในขั้นที่ 2 หรือ 3 เมื่อหาผลเฉลย (2.3.9a) หรือ (2.3.9b) สำหรับแถวหรือหลักเดียว เราจะได้ระบบ tridiagonal ของสมการเชิงเส้น เมื่อทางซ้ายมือของ (2.3.9a) หรือ (2.3.9b) ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ที่ไม่ใช่ศูนย์ 3 ค่า สำหรับ grid point ถัดไป

เมื่อเร่งการลู่เข้า จะมี accelerate factor ξ เหมือนกับ over-relaxation factor ที่ใช้ในวิธี SOR ในกรณีนี้ (2.3.9a-b) ถูกจัดใหม่เป็น

$$u_{i-1,j}^{k+1} - (2+\xi)u_{i,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1} = -u_{i,j-1}^{k} + (2-\xi)u_{i,j}^{k} - u_{i,j+1}^{k} \qquad (2.3.10a)$$

และ

$$u_{i,j-1}^{k+2} - (2+\xi)u_{i,j}^{k+2} + u_{i,j+1}^{k+2} = -u_{i-1,j}^{k+1} + (2-\xi)u_{i,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k+1} \qquad (2.3.10b)$$

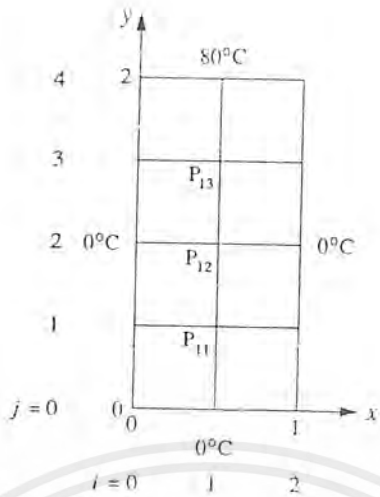
ที่ $\xi > 0$

การลู่เข้าจะมีหลายค่าขึ้นอยู่กับค่าของ ξ ซึ่งอัตราการลู่เข้าที่เร็วที่สุดขึ้นกับความแตกต่างของค่า ξ ที่ใช้ในแต่ละการทำซ้ำ การเพิ่มอัตราการลู่เข้าโดยใช้ลำดับของ ξ จะลึกซึ้งมาก เมื่อ grid point มีจำนวนมาก อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์หาค่าของลำดับของ ξ ที่เหมาะสมจะยุ่งยาก และอยู่นอกประเด็นที่จะอธิบาย ส่วนใหญ่เราจะคำนวณหาลำดับโดยการทดลอง แต่จะใช้กับสมการ elliptic ที่เหมือนกันเท่านั้น ต้องสามารถหาผลเฉลยได้สำหรับ BCs ที่ต่างกันดังนั้นลำดับเดิมสามารถนำมาใช้สำหรับทุกกรณี นั่นคือ เราจะได้ค่าคงที่ ξ สำหรับเหตุผลนี้วิธี SOR อาจจะเป็นทางเลือกที่ดีกว่า ถ้าสมการ elliptic ถูกหาผลเฉลยเพียงครั้งเดียว แม้ว่าวิธี ADI จะสามารถหาผลเฉลยได้ก็ตาม

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.5</u>

หาผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.1 โดย ADI method เมื่อ $\xi = 1.4$ เปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับวิธี Gauss-Seidel,วิธี SOR ในตัวอย่างที่ 2.3.3 และ ในตัวอย่างที่ 2.3.4

วิธีทำ



รูปที่ 2.3.12 ปัญหาของตัวอย่างที่ 2.3.5

ที่ $\xi = 1.4$ สมการ (2.3.10a) และ (2.3.10b) จะเป็น

$$u_{i-1,j}^{k+1} - 3.4u_{i,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1} = -u_{i,j-1}^{k} + 0.6u_{i,j}^{k} - u_{i,j+1}^{k} \quad \text{(i)}$$
$$u_{i,j-1}^{k+2} - 3.4u_{i,j}^{k+2} + u_{i,j+1}^{k+2} = -u_{i-1,j}^{k+1} + 0.6u_{i,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k+1} \quad \text{(ii)}$$

BCs คือ

$u_{1,0}^{k} = u_{0,j}^{k} = u_{2,j}^{k} = 0$ เมื่อ $j = 1,2,3;$ $u_{1,4}^{k} = 80$ สำหรับทุกค่า k

loopที่หนึ่ง

ขั้นที่ 1 : เลือก $u_{i,j}^{0} = 0$ สำหรับ $i = 1$ และ $j = 1,2,3;$ สำหรับการประมาณครั้งแรก

ขั้นที่ 2 : สำหรับแถวที่ 1 ที่จุด P_{11} , $i = 1$, $j = 1$ และ (i) จะเป็น

$$u_{01}^{1} - 3.4u_{11}^{1} + u_{21}^{1} = -u_{10}^{0} + 0.6u_{11}^{0} - u_{12}^{0}$$
$$\Rightarrow \quad u_{11}^{1} = \frac{0.6u_{11}^{0} - u_{12}^{0}}{-3.4} = 0$$

สำหรับแถวที่ 2 ที่จุด P_{12} , $i = 1$, $j = 2$ และ (i) จะเป็น

$$u_{02}^{1} - 3.4u_{12}^{1} + u_{22}^{1} = -u_{11}^{0} + 0.6u_{12}^{0} - u_{13}^{0}$$
$$\Rightarrow \quad u_{12}^{1} = \frac{-u_{11}^{0} + 0.6u_{12}^{0} - u_{13}^{0}}{-3.4} = 0$$

สำหรับแถวที่ 3 ที่จุด P_{13}, $i=1$, $j=3$ และ (i) จะเป็น

$$u_{03}^1 - 3.4u_{13}^1 + u_{23}^1 = -u_{12}^0 + 0.6u_{13}^0 - u_{14}^0$$
$$\Rightarrow \quad u_{13}^1 = \frac{-u_{12}^0 + 0.6u_{13}^0 - 80}{-3.4} = \frac{-80}{-3.4} = 23.5294$$

(ในขั้นนี้ ถ้ามีหลักมากกว่า 1 หลัก จะมี grid point ภายในมากกว่า 1 จุด ในแต่ละแถว เราจะต้องหาผลเฉลยของระบบสมการสำหรับแต่ละแถว)

<u>ขั้นที่ 3</u> : สำหรับหลัก 1, $i=1$ ที่ grid point ภายใน P_{11}, P_{12} และ P_{13} จาก (ii) ได้

$$\begin{aligned}
P_{11}(j=1): &\quad u_{10}^2 - 3.4u_{11}^2 + u_{12}^2 = -u_{01}^1 + 0.6u_{11}^1 - u_{21}^1 \\
P_{12}(j=1): &\quad u_{11}^2 - 3.4u_{12}^2 + u_{13}^2 = -u_{02}^1 + 0.6u_{12}^1 - u_{22}^1 \\
P_{13}(j=1): &\quad u_{12}^2 - 3.4u_{13}^2 + u_{14}^2 = -u_{03}^1 + 0.6u_{13}^1 - u_{23}^1
\end{aligned}$$

แปลงสมการให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} -3.4 & 1 & 0 \\ 1 & -3.4 & 1 \\ 0 & 1 & -3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^2 \\ u_{12}^2 \\ u_{13}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6u_{11}^1 \\ 0.6u_{12}^1 \\ 0.6u_{13}^1 - 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -65.8824 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ เป็น tridiagonal อย่างชัดเจน สามารถหาผลเฉลยของระบบได้

$$\begin{bmatrix} u_{11}^2 \\ u_{12}^2 \\ u_{13}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0269 \\ 6.8915 \\ 21.4041 \end{bmatrix}$$

<u>loop ที่สอง</u>

<u>ขั้นที่ 2</u> : ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$j=1, i=1: \quad u_{11}^{3}=\frac{0.6u_{11}^{2}-u_{12}^{2}}{-3.4}$$

$$=\frac{0.6\times 2.0269-6.8915}{-34}=1.6692$$

$$j=2, i=1: \quad u_{12}^{3}=\frac{-u_{11}^{2}+0.6u_{12}^{2}-u_{13}^{2}}{-3.4}=5.6753$$

$$j=3, i=1: \quad u_{13}^{3}=\frac{-u_{12}^{2}+0.6u_{13}^{2}-80}{-3.4}=21.7791$$

<u>ขั้นที่ 3</u> : ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\begin{bmatrix}-3.4 & 1 & 0\\ 1 & -3.4 & 1\\ 0 & 1 & -3.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}^{4}\\ u_{12}^{4}\\ u_{13}^{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6\times 1.6692\\ 0.6\times 5.6753\\ 0.6\times 21.7791-80\end{bmatrix}$$

หาผลเฉลยของระบบได้

$$\begin{bmatrix}u_{11}^{4}\\ u_{12}^{4}\\ u_{13}^{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.3776\\ 5.6855\\ 21.3582\end{bmatrix}$$

ทำซ้ำต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่ง ผลเฉลยลู่เข้าทศนิยม 4 ตำแหน่ง ผลเฉลยที่ได้จากวิธีนี้เมื่อเปรียบเทียบกับวิธี Gauss-Seidel และ วิธี SOR แสดงในตารางที่ 2.3.7

ตารางที่ 2.3.7 เปรียบเทียบผลเฉลยสำหรับตัวอย่างที่ 2.3.5

Iteration	Gauss-Seidel			SOR ($\omega = 1.04$)			ADI ($\zeta = 1.4$)		
	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{11}	u_{12}	u_{13}
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	20.0000	0.0000	0.0000	20.8000	2.0269	6.8915	21.4041
2	0.0000	5.0000	21.2500	0.0000	5.4080	21.3741	1.3776	5.6855	21.3582
3	1.2500	5.6250	21.4063	1.4061	5.7065	21.4287	1.4303	5.7205	21.4297
4	1.4063	5.7031	21.4258	1.4275	5.7143	21.4286	1.4283	5.7142	21.4282
5	1.4258	5.7129	21.4282	1.4286	5.7143	21.4286	1.4286	5.7143	21.4286
6	1.4282	5.7141	21.4285	1.4286	5.7143	21.4286	1.4286	5.7143	21.4286
7	1.4285	5.7143	21.4286						
8	1.4286	5.7143	21.4286						
9	1.4286	5.7143	21.4286						

ทุกๆ วิธี ผลเฉลยลู่เข้าหา

$$u_{11} = 1.4286$$
$$u_{12} = 5.7143$$
$$u_{13} = 21.4286$$

ผลเฉลย analytic จากตัวอย่างที่ 2.3.1 เป็น

$$u_{11} = 0.8755$$
$$u_{12} = 4.3908$$
$$u_{13} = 20.8755$$

ค่า error ที่เกิดขึ้น เนื่องจากใช้ ขนาด grid ที่ใหญ่

จากตารางที่ 2.3.7 จะเห็นว่า ทั้งวิธี SOR และวิธี ADI จะใช้จำนวนของการทำซ้ำเท่ากัน เพื่อให้ผลเฉลยลู่เข้าหาที่ทศนิยม 4 ตำแหน่ง สังเกตว่าการทำซ้ำใน 2-3 ครั้งแรกของวิธี ADI ผลเฉลยจะมีความแม่นยำมากกว่าผลเฉลยที่ได้จากวิธี SOR ยิ่งกว่านั้น ค่า ω ที่ใช้ในวิธี SOR เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด ขณะที่ค่าของ $\xi = 1.4$ ที่ใช้ในวิธี ADI method ไม่ใช่ค่าที่เหมาะสมที่สุด

ในปัญหานี้ ถ้าใช้ $\xi = 2$ สมการ (2.3.10a) และ (2.3.10b) จะเป็น

$$u_{i-1,j}^{k+1} - 4u_{i,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1} = -u_{i,j-1}^{k} - u_{i,j+1}^{k}$$
$$u_{i,j-1}^{k+2} - 4u_{i,j}^{k+2} + u_{i,j+1}^{k+2} = -u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k+1}$$

<u>ขั้นที่ 1</u> : เลือก $u_{i,j}^{0} = 0$ สำหรับ $i = 1$ และ $j = 1,2,3$ ในการประมาณค่าครั้งแรก

<u>ขั้นที่ 2</u> : สำหรับแถวที่ 1 ที่ P_{11} , $i = 1$, $j = 1$ และ (i) จะได้

$$u_{11}^{1} = \frac{-u_{12}^{0}}{-4} = 0$$

สำหรับแถวที่ 2 ที่ P_{12} , $i = 1$, $j = 2$ และ (i) จะได้

$$u_{12}^{1} = \frac{-u_{11}^{0} - u_{13}^{0}}{-4} = 0$$

สำหรับแถวที่ 3 ที่ P_{13} , $i = 1$, $j = 3$ และ (i) จะได้

$$u_{13}^{1} = \frac{-u_{12}^{0} - 80}{-4} = \frac{-80}{-4} = 20$$

<u>ขั้นที่ 3</u> : สำหรับหลักที่ 1 , $i = 1$ ที่ grid point ภายใน P_{11}, P_{12} และ P_{13} สมการ (ii) จะเป็น

$$\begin{aligned}
P_{11}(j=1): &\quad u_{10}^{2} - 4u_{11}^{2} + u_{12}^{2} = -u_{01}^{1} - u_{21}^{1} = 0 \\
P_{12}(j=2): &\quad u_{11}^{2} - 4u_{12}^{2} + u_{13}^{2} = -u_{02}^{1} - u_{22}^{1} = 0 \\
P_{13}(j=3): &\quad u_{12}^{2} - 4u_{13}^{2} + u_{14}^{2} = -u_{03}^{1} - u_{23}^{1} = 0
\end{aligned}$$

รูปแบบเมทริกซ์ คือ

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{2} \\ u_{12}^{2} \\ u_{13}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -80 \end{bmatrix}$$

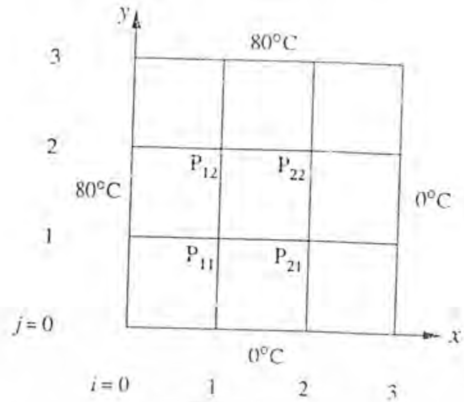
ได้

$$\begin{bmatrix} u_{11}^{2} \\ u_{12}^{2} \\ u_{13}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4286 \\ 5.7143 \\ 21.4286 \end{bmatrix}$$

เราจะได้ผลเฉลยลู่เข้าหลังจากการทำซ้ำหนึ่งครั้งซึ่งเร็วที่สุด และค่าของ ξ_{opt} คือ 2 สำหรับ $\varepsilon = 2$ กรณีนี้เป็นกรณีพิเศษ เพราะว่ามี grid point ภายในเพียง 1 หลักเท่านั้น ซึ่งทำให้เมทริกซ์ทางด้านขวามือของสมการเมทริกซ์ในขั้นตอนที่ 3 เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ สมาชิกของมันขึ้นอยู่กับ BCs ที่ $\xi = 2$ เท่านั้น ดังนั้นผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ในขั้นที่ 3 จะไม่ขึ้นกับการทำซ้ำก่อนหน้านี้ อย่างไรก็ตาม ก็ไม่สำคัญมากนักเพราะปัญหาทางกายภาพส่วนใหญ่ จะเป็นเมทริกซ์ที่มากกว่า 1 แถวและ 1 หลักเสมอ

ถ้าภายใน grid point มี M แถว และ N หลัก เราจำเป็นต้องหาผลเฉลยของระบบ M ของสมการ tridiagonal N ในขั้นที่ 2 และหาผลเฉลยของระบบ N ของสมการ tridiagonal M ในขั้นที่ 3 อย่างไรก็ตาม เราสามารถที่จะรวมทุกๆ ระบบสมการในขั้นที่ 2 ให้กลายเป็นระบบเดียว และทำแบบนี้ในขั้นที่ 3 ด้วย ซึ่งจะทำให้ขนาดของผลเฉลยของระบบมีขนาดเพิ่มขึ้นคือ ระบบของสมการ M x N ในแต่ละขั้น แต่ระบบของผลเฉลยก็ยังคงเป็น tridiagonal อยู่ จะไม่เป็นปัญหาในเรื่องหน่วยความจำสำหรับจำนวน grid point ที่มากๆ พิจารณาตามตัวอย่างนี้

ตัวอย่างที่ 2.3.6



รูปที่ 2.3.13 ปัญหาของตัวอย่างที่ 2.3.6

จงหาผลเฉลยของปัญหาของการไหลของความร้อนสม่ำเสมอ สำหรับ $\Delta x = \Delta y$ โดยวิธี ADI เมื่อ $\xi = 1.11$

วิธีทำ

เมื่อ $\xi = 1.11$ สมการ (2.3.10a) และ (2.3.10b) จะกลายเป็น

$$u_{i-1,j}^{k+1} - 3.11u_{i,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1} = -u_{i,j-1}^{k} + 0.89u_{i,j}^{k} - u_{i,j+1}^{k} \qquad \text{(i)}$$
$$u_{i,j-1}^{k+2} - 3.11u_{i,j}^{k+2} + u_{i,j+1}^{k+2} = -u_{i-1,j}^{k+1} + 0.89u_{i,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k+1} \qquad \text{(ii)}$$

BCs คือ

$$u_{i,0}^{k} = u_{3,j}^{k} = 0 \qquad \text{เมื่อ } i, j = 1, 2$$
$$u_{0,j}^{k} = u_{i,3}^{k} = 80 \qquad \text{เมื่อ } i, j = 1, 2$$

ในขั้นที่ 2 , ใช้ (i) สำหรับแต่ละแถว:

แถว 1 , ที่จุด P_{11} : $u_{01}^{k+1} - 3.11u_{11}^{k+1} + u_{21}^{k+1} = -u_{10}^{k} + 0.89u_{11}^{k} - u_{12}^{k}$

ที่จุด P_{21} : $u_{11}^{k+1} - 3.11u_{21}^{k+1} + u_{31}^{k+1} = -u_{20}^{k} + 0.89u_{21}^{k} - u_{22}^{k}$

แถว 2, ที่จุด P_{12} : $u_{02}^{k+1} - 3.11u_{12}^{k+1} + u_{22}^{k+1} = -u_{11}^{k} + 0.89u_{12}^{k} - u_{13}^{k}$

ที่จุด P_{22} : $u_{12}^{k+1} - 3.11u_{22}^{k+1} + u_{32}^{k+1} = -u_{21}^{k} + 0.89u_{22}^{k} - u_{23}^{k}$

รวมให้เป็นระบบเดียวกัน และใช้ BCs จะได้

$$\begin{bmatrix} -3.11 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+1} \\ u_{21}^{k+1} \\ u_{12}^{k+1} \\ u_{22}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89u_{11}^{k} - u_{12}^{k} - 80 \\ 0.89u_{21}^{k} - u_{22}^{k} \\ -u_{11}^{k} + 0.89u_{12}^{k} - 80 - 80 \\ -u_{21}^{k} + 0.89u_{22}^{k} - 80 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)}$$

ในทำนองเดียวกันขั้นที่ 3 ใช้ (ii) สำหรับแต่ละแถว และจะได้สมการเมทริกซ์รวม คือ

$$\begin{bmatrix} -3.11 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{k+2} \\ u_{12}^{k+2} \\ u_{21}^{k+2} \\ u_{22}^{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 + 0.89u_{11}^{k+1} - u_{21}^{k+1} \\ -80 + 0.89u_{12}^{k+1} - u_{22}^{k+1} - 80 \\ -u_{11}^{k+1} + 0.89u_{21}^{k+1} \\ -u_{12}^{k+1} + 0.89u_{22}^{k+1} - 80 \end{bmatrix} \quad \text{(iv)}$$

<u>loopที่หนึ่ง</u>

<u>ขั้นที่ 1</u> : เลือกใช้ $u_{i,j}^{0} = 0$ เมื่อ $i, j = 1,2$

<u>ขั้นที่ 2</u> : จาก (iii)

$$\begin{bmatrix} -3.11 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{1} \\ u_{21}^{1} \\ u_{12}^{1} \\ u_{22}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ 0 \\ -160 \\ -80 \end{bmatrix}$$

ได้

$$\begin{bmatrix} u_{11}^{1} \\ u_{21}^{1} \\ u_{12}^{1} \\ u_{22}^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.690 \\ 9.225 \\ 66.604 \\ 47.140 \end{bmatrix}$$

<u>ขั้นที่ 3</u> : จาก (iv)

$$\begin{bmatrix} -3.11 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^{2} \\ u_{12}^{2} \\ u_{21}^{2} \\ u_{22}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63.691 \\ -147.862 \\ -20.479 \\ -104.650 \end{bmatrix}$$

ได้

$$\begin{bmatrix} u_{11}^2 \\ u_{12}^2 \\ u_{21}^2 \\ u_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.891 \\ 60.371 \\ 19.412 \\ 39.891 \end{bmatrix}$$

<u>loop ที่สอง</u>

<u>ขั้นที่ 2</u> : จาก (iii)

$$\begin{bmatrix} -3.11 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^3 \\ u_{21}^3 \\ u_{12}^3 \\ u_{22}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104.868 \\ -22.615 \\ -146.161 \\ -63.909 \end{bmatrix}$$

ได้

$$\begin{bmatrix} u_{11}^3 \\ u_{12}^3 \\ u_{21}^3 \\ u_{22}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.215 \\ 20.203 \\ 59.786 \\ 39.773 \end{bmatrix}$$

<u>ขั้นที่ 3</u> : จาก (iv)

$$\begin{bmatrix} -3.11 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}^4 \\ u_{12}^4 \\ u_{21}^4 \\ u_{22}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64.411 \\ -146.564 \\ -22.235 \\ -104.388 \end{bmatrix}$$

ได้

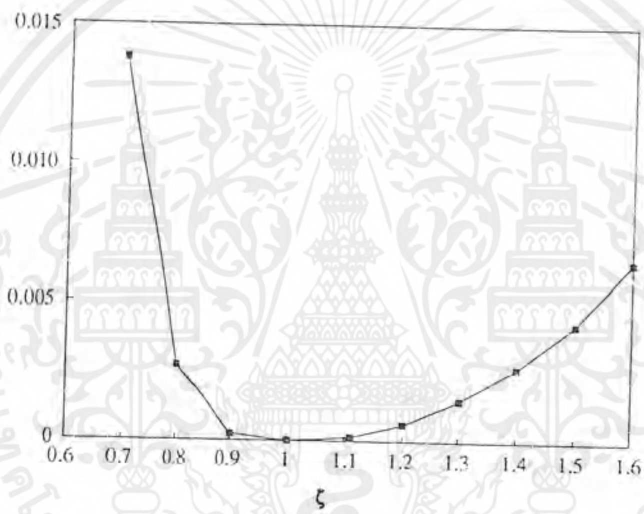
$$\begin{bmatrix} u_{11}^4 \\ u_{12}^4 \\ u_{21}^4 \\ u_{22}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.000 \\ 59.988 \\ 20.011 \\ 40.000 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยแสดงในตารางที่ 2.3.8

ตารางที่ 2.3.8 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.3.6

	ADI (ζ = 1.11)			
Iteration	u_{11}	u_{21}	u_{12}	u_{22}
0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	39.891	19.412	60.371	39.891
2	40.000	20.011	59.988	40.000
3	40.000	20.000	60.000	40.000

สำหรับค่าของ ξ ที่แตกต่างกัน จะได้ค่าผลเฉลยและ average errors E (average error คือ $\dfrac{|40-u_{11}|+|20-u_{21}|+|60-u_{12}|+|40-u_{22}|}{4}$) หลังจาก ทำซ้ำ 3 ครั้ง แสดงในรูปที่ 2.3.14 แสดงว่าค่าที่ดีที่สุดของ ξ คือ 1 ถ้าใช้กับทุกๆ loop ของการทำซ้ำ

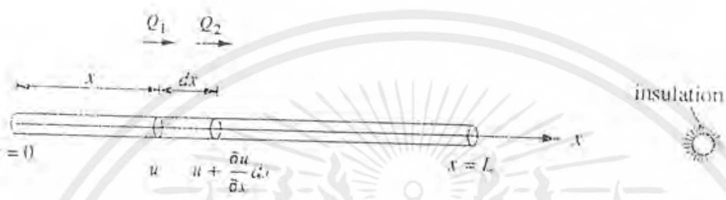


รูปที่ 2.3.14 ค่า average error E เทียบกับ ξ สำหรับตัวอย่างที่ 2.3.6

2.4. สมการพาราโบลิก (Parabolic Equations)

2.4.1 สมการความร้อน 1 มิติ ขึ้นกับเวลา / สมการการแพร่กระจาย (The Time-Dependent One-Dimensional Heat Equation / Diffusion Equation)

พิจารณาที่แท่งโลหะยาว ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดคงที่และมีฉนวนหุ้ม ดังแสดงในรูปที่ 2.4.1 เพื่อให้ความร้อนไหลไปตามแนวยาวของแท่งโลหะเท่านั้น และอุณหภูมิที่กระจายนี้ คือ $u = u(x,t)$ ถ้าเราตั้งให้แกน x อยู่ในแนวยาวของแท่งโลหะ จะได้ว่าอุณหภูมิ u จะขึ้นอยู่กับ x และ t เท่านั้น (x หมายถึง ความยาวจากจุดเริ่มต้น และ t หมายถึง เวลา) เราจะได้ความร้อน u ภายในแท่งโลหะตามแนวยาว x เมื่อเวลา t



มองตามยาว มองตามขวาง

รูปที่ 2.4.1 แสดงการกระจายความร้อนตามแนวยาวของโลหะ

ใช้กฎการนำความร้อนของฟูริเยร์, อัตราการไหลของความร้อน Q กำหนดโดย

$$Q = -kA\frac{\partial u}{\partial x}$$

เมื่อ k คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน , A คือ พื้นที่หน้าตัดของแท่งโลหะ และเครื่องหมายลบแสดงว่าความร้อนไหลอยู่ในทิศที่อุณหภูมิลดลง

พิจารณาที่ element dx ซึ่งอัตราการไหลของความร้อนที่ผ่านจุดปลายทั้ง 2 ของแท่งโลหะ Q_1 และ Q_2 แสดงในรูปที่ 2.4.1 ซึ่งความร้อนสุทธิที่ไหลไปตาม element ในเวลา dt คือ

$$\begin{aligned}
&= (Q_1 - Q_2)dt \\
&= kA\left[\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]dt \\
&= kA\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\right]dt \\
&= kA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt
\end{aligned}$$

ความร้อนที่ได้รับจาก element ในเวลา dt เป็นสัดส่วนกับมวล $[= \rho A dx]$และอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นในเวลา

$dt[= (\partial u/\partial t)dt]$ ดังนั้นความร้อนที่ได้รับในเวลา dt

$$= \quad \sigma \rho A dx \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

เมื่อ σ คือ ค่าความร้อนจำเพาะของวัตถุ

สมมติว่าอุณหภูมิที่ปลายทั้งสองของแท่งโลหะไม่มีการเปลี่ยนแปลง เมื่อให้พลังงานความร้อนสมดุล ความร้อนที่ไหลเข้าไปใน element จะเท่ากับความร้อนที่ element ได้รับ ดังนั้น

$$kA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt \quad = \quad \sigma \rho A dx \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

หรือ

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad = \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.4.1)$$

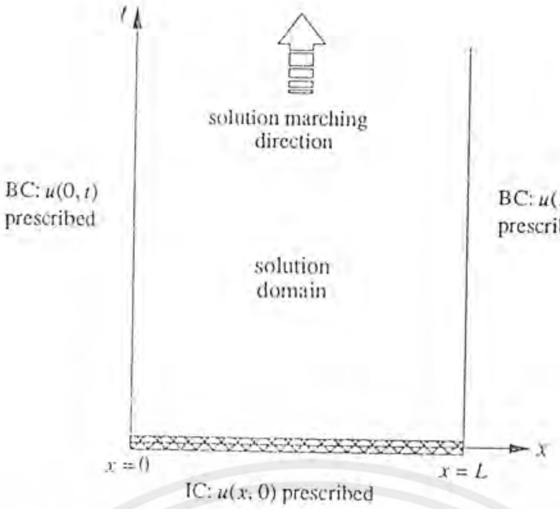
ที่ $c^2 = \dfrac{k}{\rho \sigma}$ คือ ความร้อนที่แพร่ออกจากวัตถุ และมีค่าเป็นบวก

สมการ (2.4.1) เป็น สมการความร้อน 1 มิติ ขึ้นกับเวลา และเป็น parabolic สมการ parabolic จะเกิดขึ้นในปัญหาทางกายภาพ ตัวอย่างเช่น สมการ Navier-Stokes 1 มิติที่ขึ้นกับเวลา

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad = \quad v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

เกิดขึ้นใน fluid mexhanics ที่ u เป็น ความเร็วในทิศทาง y และ v เป็นค่า kinematic viscosity

ในบทนี้ เราพิจารณาสมการความร้อน 1 มิติ ที่ขึ้นกับเวลา (2.4.1) และจะอธิบายในเรื่องของสมการความร้อน 2 มิติ ขึ้นกับเวลา และอธิบายแนะนำถึงสมการ parabolic ไม่เชิงเส้น สมการ parabolic อื่นๆ อาจจะสามารถหาผลเฉลย โดยวิธีเชิงตัวเลขเดียวกันนี้ เมื่อ (2.4.1) เป็นอนุพันธ์อันดับที่ 1 ใน t และเป็นอนุพันธ์อันดับที่ 2 ใน x มี IC 1 เงื่อนไข และมี BC 2 เงื่อนไข แสดงในรูปที่ 2.4.2 ทำให้ได้ unique solution ปัญหานี้เป็นปัญหาค่าขอบเขตเริ่มต้น

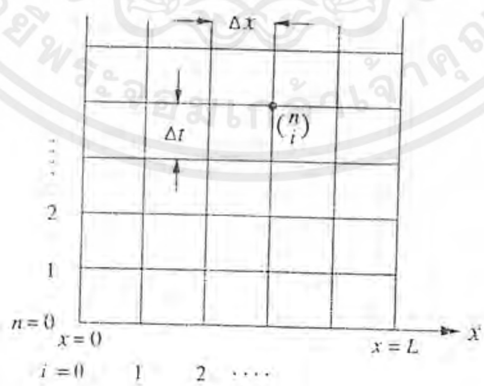


รูปที่ 2.4.2 โดเมนผลเฉลยของสมการความร้อน 1 มิติ

โดเมนผลเฉลยนี้จะอยู่ในทิศทาง t ไปถึง Infinity เมื่อ IC $u(x,0)$ ใช้ใน (2.4.1) อธิบายว่า u มีการแพร่อย่างไรในเวลานั้น วิธีเชิงตัวเลขจะใช้พื้นฐานบน marching procedure ในทิศทาง t

2.4.2 Forword Time Central Space (FTCS) Method

ในระบบ space-time grid ซึ่งปกคลุมโดเมนผลเฉลย ซึ่งขนาดของ grid Δx และ Δt ดังแสดงในรูปที่ 2.4.3



รูปที่ 2.4.3 ระบบปริภูมิเวลาของ grid

ใช้ผลต่างข้างหน้า สำหรับ u_t และผลต่างตรงกลางสำหรับ u_{xx} เราจะได้

$$(u_t)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad \text{และ} \quad (u_{xx})_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

ที่ supscript i แทนจำนวนของช่วง x

และ supscript n แทนจำนวนของช่วง t

สมการความร้อน 1 มิติ (2.4.1) เขียนให้อยู่ในรูปของ finite difference ได้เป็น

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = c^2\left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right]$$

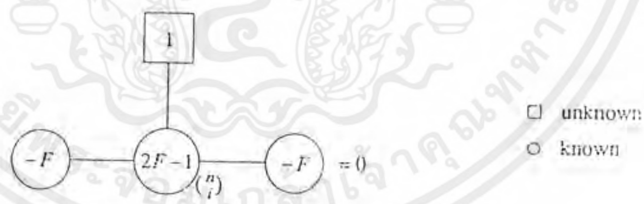
หรือ

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ไม่ทราบค่า}}}{u_i^{n+1}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ทราบค่าจากขั้นที่ } t \text{ ครั้งที่ } n}}{F\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right)} + (1-2F)u_i^n \qquad (2.4.2)$$

ที่ $$F = \frac{c^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} > 0 \qquad (2.4.3)$$

เราทราบจำนวน grid Fourier ซึ่งไม่เป็น non-dimensional

เปลี่ยน (2.4.2) ให้อยู่ในรูปของ pattern form



รูปที่ 2.4.4 Pattern form ของสมการ FTCS

ค่า u ในขั้น t ครั้งที่ $(n+1)$ ในสมการ (2.4.2) สามารถหาค่าได้จากเทอมของ u ขั้นที่ t ครั้งที่ n วิธีนี้ ตัวไม่ทราบค่า u ขั้นที่ t ครั้งที่ $(n+1)$ สามารถหาค่าได้โดยตรงถ้าเราทราบค่า u ขั้นที่ t ครั้งที่ n

เมื่อเรากำหนด IC u_i^0 ที่ $t = 0$ ซึ่ง marching procedure ในทิศทาง t ทำให้เราสามารถทราบค่า u ในทุก ๆ ขั้นของลำดับเวลา ซึ่งวิธีนี้เราเรียกว่า FTCS method หรือ explicit Euler method ซึ่งจะ stable ก็ต่อเมื่อ

$$F = \frac{c^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} \le \frac{1}{2} \qquad (F > 0) \tag{2.4.4}$$

จากสมการเชิงผลต่าง (2.4.2) เราจะใช้ผลต่างข้างหน้า first-order accurate สำหรับ u_t ถ้าใช้ marching procedure สำหรับ u_t สมการเชิงผลต่างผลจะกลายเป็น

$$u_i^{n+1} = 2F\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) + u_i^{n-1}$$

ซึ่งเราต้องทราบผลเฉลยก่อนหน้า 2 ตัว คือ ขั้นที่ n และ $n-1$ ในการหา step ที่ $n+1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่เราเริ่มหาค่า u_i^1 โดยที่เราไม่ทราบค่าของ u_i^0 และ u_i^{-1} ดังนั้นผลต่างตรงกลางจะไม่สามารถใช้ได้สำหรับบาง u_t

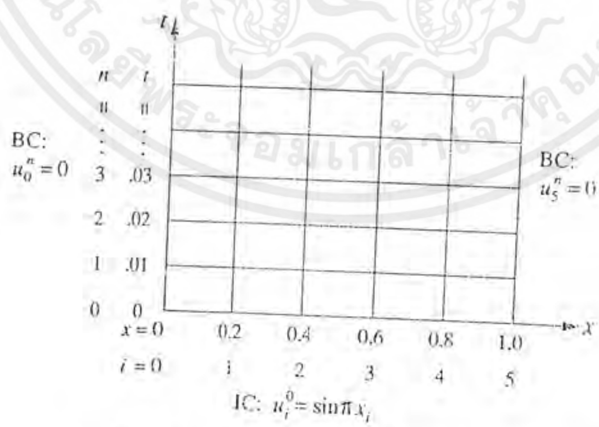
<u>ตัวอย่างที่ 2.4.1</u>

จงใช้วิธี FTCS เมื่อ $\Delta x = 0.2m$ และ $F = 0.25$ ให้หาอุณหภูมิที่กระจายในหน่วยองศาเซลเซียส ในแท่งโลหะที่หุ้มฉนวน ซึ่งมีความยาว $1m$ และที่จุดปลายมีอุณหภูมิ $0°C$ กำหนดให้ $c = 1m/s^{0.5}$ และอุณหภูมิเริ่มต้น คือ $u(x,0) = \sin \pi x$

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ (2.4.3) , $\Delta t = \frac{1}{c^2} F(\Delta x)^2 = 0.25 \times 0.2^2\ s = 0.01s$

ซึ่งระบบ time space grid คือ



รูปที่ 2.4.5 ระบบ grid สำหรับตัวอย่างที่ 2.4.1

ซึ่งสมการที่ใช้คือ สมการความร้อน 1 มิติ (2.4.1) เมื่อ BCs และ IC คือ

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$
$$u(x,0) = \sin \pi x$$

ในรูปของ subscript และ superscript คือ

$$u_0^n = u_5^n = 0$$
$$u_i^0 = \sin \pi x_i$$

สำหรับ $F = 0.25$, สมการ (2.4.2) จะกลายเป็น

$$u_i^{n+1} = 0.25(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + 0.5u_i^n$$

IC u_i^0 ในสมการนี้ สำหรับ $n = 0$ เราใช้วิธี marching procedure จะทำ 12 ครั้ง ผลเฉลยที่ได้แสดงในตารางที่ 2.4.1 เปรียบเทียบผลเฉลย analytic ที่ $x = 0.4\,m$ ซึ่งผลเฉลย analytic คือ $u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$

ตารางที่ 2.4.1 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.4.1

		u_i^n						
n	t	$i=0$ $x=0$	$i=1$ $x=0.2$	$i=2$ $x=0.4$	$i=3$ $x=0.6$	$i=4$ $x=0.8$	$i=5$ $x=1.0$	analytical $x=0.4$
0	0.00	0	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878	0	0.9511
1	0.01	0	0.5317	0.8602	0.8602	0.5317	0	0.8617
2	0.02	0	0.4809	0.7781	0.7781	0.4809	0	0.7807
3	0.03	0	0.4350	0.7038	0.7038	0.4350	0	0.7073
4	0.04	0	0.3934	*0.6366*	0.6366	0.3934	0	0.6408
5	0.05	0	0.3559	0.5758	0.5758	0.3559	0	0.5806
6	0.06	0	0.3219	0.5208	0.5208	0.3219	0	0.5261
7	0.07	0	0.2911	0.4711	0.4711	0.2911	0	0.4766
8	0.08	0	0.2633	0.4261	0.4261	0.2633	0	0.4318
9	0.09	0	0.2382	0.3854	0.3854	0.2382	0	0.3912
10	0.10	0	0.2154	0.3486	0.3486	0.2154	0	0.3545
11	0.11	0	0.1949	0.3153	0.3153	0.1949	0	0.3212
12	0.12	0	0.1763	0.2852	0.2852	0.1763	0	0.2910

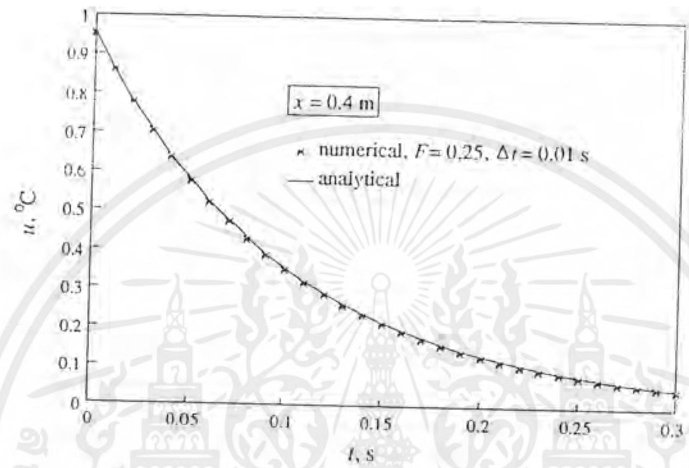
ตัวอย่างการคำนวณ

ต้องการหา u_2^4 จะใช้ $i = 2$ และ $n = 3$ ในสมการเชิงผลต่าง นั่นคือ

$$\begin{aligned} u_2^4 &= 0.25(u_3^3 + u_1^3) + 0.5u_2^3 \\ &= 0.25(0.7038 + 0.4350) + 0.5 \times 0.7038 \\ &= 0.6366 \end{aligned}$$

เนื่องจาก BCs มีค่าเท่ากันที่จุดปลายของแท่งโลหะ และ ICs สมมาตรที่ $x = 0.5m$ ดังนั้น มันจะสามารถที่จะคำนวณหาผลเฉลยแค่ครึ่งหนึ่งของแท่งโลหะ นั่นคือ หาที่ $x = 0.2m$ และ $x = 0.4m$ เท่านั้น ซึ่งสรุปได้ว่า ในการหาผลเฉลยอื่นๆ สามารถหาเพียงครึ่งเดียว โดยใช้การสมมาตร นั่นคือ $u_3^n = u_2^n$ และ $u_4^n = u_1^n$

ผลเฉลยที่ $x = 0.4m$ ถูก plot ดังรูปที่ 2.4.6 แสดงว่าผลเฉลยเชิงตัวเลข stable และสอดคล้องกับผลเฉลย analytic



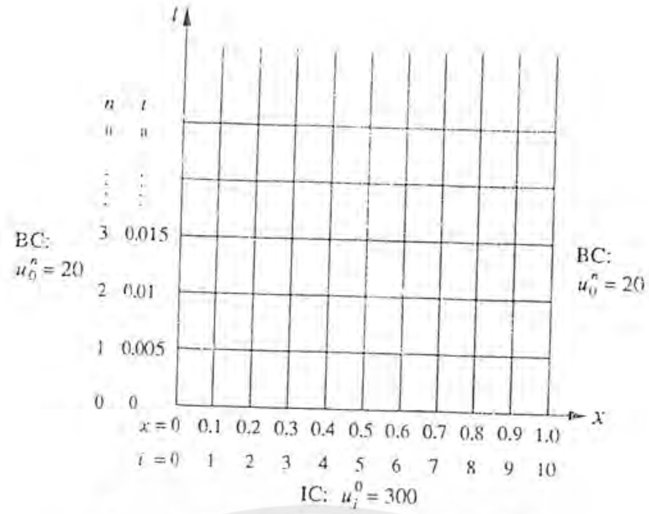
รูปที่ 2.4.6 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.4.1 ที่ $x = 0.4m$

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.2</u>

แผ่นโลหะถูกทำให้ร้อนด้วยอุณหภูมิ $300°C$ นำไปทำให้เย็นลงโดยอุณหภูมิรอบ ๆ คือ $20°C$ ถ้าแผ่นโลหะมีความหนา 1 เมตร และมี $c = 1m/s^{0.5}$ จงใช้วิธี FTCS หาอุณหภูมิที่กระจายอยู่ $u(x,t)$ กำหนด $F = 0.5$ และ $\Delta x = 0.1m$

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ (2.4.3) $\Delta t = \frac{1}{c^2}F(\Delta x)^2 = 0.5 \times 0.1^2\ s = 0.005\ s$ ซึ่งระบบ grid แสดงในรูปที่ 2.4.7



รูปที่ 2.4.7 ระบบ grid ของตัวอย่างที่ 2.4.2

เมื่อแผ่นโลหะบาง ความร้อนจะไหลบนระนาบของแผ่นโลหะ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าความร้อนที่ไหลไปตามขวางมาก ดังนั้นความร้อนที่ไหลจะเป็น 1 มิติ ในทิศทางแกนซึ่งวัดตั้งฉากในแนวตั้งฉากกับตามขวางของโลหะ ใช้สมการความร้อน 1 มิติ (2.4.1)

BCs และ ICs คือ

$$u(0,t) = u(1,t) = 20; u(x,0) = 300$$

หรือ

$$u_0^n = u_{10}^n = 20;\ u_i^0 = 300$$

ในรูปของ subscript และ supscript

สำหรับ $F = 0.5$ ดังนั้นสมการ (2.4.2) จะกลายเป็น

$$u_i^{n+1} = 0.5(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$$

ในปัญหานี้ BCs ที่ $x = 0$ และ $x = 1$ เมตร เมื่อ $t = 0$ ซึ่งมันจะขัดแย้งกันกับค่า IC ทางกายภาพ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่จะลดอุณหภูมิจาก $300°C$ ไปถึง $20°C$ โดยทันทีทันใด ที่ $x = 0$ และ $x = 1$ เมตร ภายใต้สภาวะการณ์นี้เราจะใช้อุณหภูมิเริ่มต้นที่ $x = 0$ และ $x = 1$ เมตร ให้เท่ากันกับ BCs ดังนั้น BCs และ ICs กำหนดเป็น

$$u_0^n = u_{10}^n = 20 \quad \text{สำหรับ} \quad n \geq 0$$

$u_1^n = 300$ สำหรับ $0 < i < 10$

สำหรับผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณ สำหรับ $F = 0.5$ แสดงดังในตารางที่ 2.4.2

ตารางที่ 2.4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2.4.2

		u_i^n					
n	t	$i=0$ $x=0$ or 1.0	$i=1$ $x=0.1$ or 0.9	$i=2$ $x=0.2$ or 0.8	$i=3$ $x=0.3$ or 0.7	$i=4$ $x=0.4$ or 0.6	$i=5$ $x=0.5$
0	0.000	20	300.00	300.00	300.00	300.00	300.00
1	0.005	20	160.00	300.00	300.00	300.00	300.00
2	0.010	20	160.00	230.00	300.00	300.00	300.00
3	0.015	20	125.00	230.00	265.00	300.00	300.00
4	0.020	20	125.00	195.00	265.00	282.50	300.00
5	0.025	20	107.50	195.00	238.75	282.50	282.50
6	0.030	20	107.50	173.13	238.75	260.63	282.50
7	0.035	20	96.56	173.13	*216.88*	260.63	260.63
8	0.040	20	96.56	156.72	216.88	238.75	260.63
9	0.045	20	88.36	156.72	197.73	238.75	238.75
10	0.050	20	88.36	143.05	197.73	218.24	238.75

ตัวอย่างการคำนวณ

สำหรับ $i = 3, n = 6$ สมการเชิงผลต่างคือ

$$\begin{aligned} u_3^7 &= 0.5(u_4^6 + u_2^6) \\ &= 0.5(260.63 + 173.13) \\ &= 216.88 \end{aligned}$$

สำหรับปัญหานี้ การแพร่กระจายของอุณหภูมิจะสมมาตรกันตรงกลางของแผ่น เนื่องจาก BCs ทั้งสองด้านของแผ่นเหมือนกันและเงื่อนไขเริ่มต้นสมมาตรกับตรงกลางของแผ่น ดังนั้นเราสามารถที่จะหาอุณหภูมิเพียงครึ่งแผ่นเท่านั้น และอุณหภูมิอีกครึ่งหนึ่งสามารถหาได้โดย

$$u_i^n = u_{10-i}^n \quad \text{ที่} \quad i = 1,2,3,4$$

การเปรียบเทียบผลเฉลย analytic กับผลเฉลยเชิงตัวเลข แสดงในตารางที่ 2.4.3 และ 2.4.4 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.4.3 ผลเฉลย analytic ของตัวอย่างที่ 2.4.2

t	$u(x,t)_{analytical}$					
	$x=0$ or 1.0	$x=0.1$ or 0.9	$x=0.2$ or 0.8	$x=0.3$ or 0.7	$x=0.4$ or 0.6	$x=0.5$
0.000	20	300.00	300.00	300.00	300.00	300.00
0.005	20	211.15	287.26	299.24	299.98	300.00
0.010	20	165.74	255.96	290.51	298.68	299.77
0.015	20	142.16	230.50	276.67	293.99	297.82
0.020	20	127.22	211.14	262.46	286.50	293.05
0.025	20	116.66	196.00	249.19	277.34	285.81
0.030	20	108.67	183.71	237.02	267.30	276.91
0.035	20	102.29	173.39	225.80	256.90	267.08
0.040	20	96.99	164.44	215.39	246.47	256.82
0.045	20	92.43	156.48	205.66	236.18	246.48
0.050	20	88.39	149.26	196.51	226.17	236.25

ตารางที่ 2.4.4 ความแตกต่างระหว่างผลเฉลย analytic กับผลเฉลยเชิงตัวเลข

t	$u(x,t)_{analytical} - u(x,t)_{numerical}$					
	$x=0$ or 1.0	$x=0.1$ or 0.9	$x=0.2$ or 0.8	$x=0.3$ or 0.7	$x=0.4$ or 0.6	$x=0.5$
0.000	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.005	0	51.15	−12.74	−0.76	−0.02	0.00
0.010	0	5.74	25.96	−9.49	−1.32	−0.23
0.015	0	17.16	0.50	11.67	−6.01	−2.18
0.020	0	2.22	16.14	−2.54	4.00	−6.95
0.025	0	9.16	1.00	10.44	−5.16	3.31
0.030	0	1.17	10.59	−1.73	6.68	−5.59
0.035	0	5.73	0.26	8.93	−3.72	6.46
0.040	0	0.43	7.72	−1.48	7.72	−3.80
0.045	0	4.07	−0.24	7.93	−2.57	7.73
0.050	0	0.03	6.21	−1.22	7.93	−2.50

ซึ่งผลเฉลย analytic กำหนดโดย

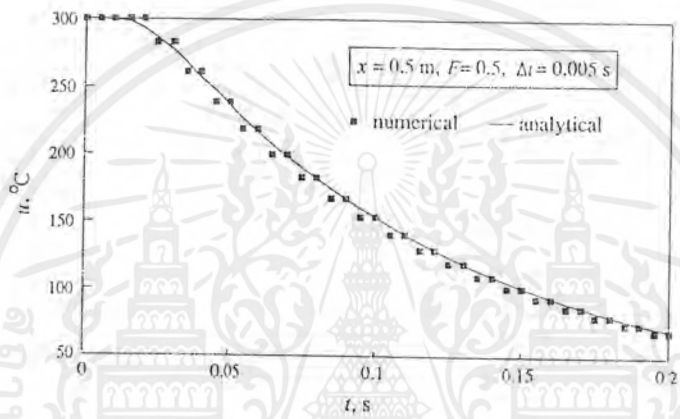
$$u(x,t) = 20 + \frac{1120}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(-n^2\pi^2 t)\sin(n\pi x)$$

ในผลเฉลยนี้ $u(0,t) = u(1,t) = 20$ สำหรับ $t \geq 0$ ที่ $t = 0$ และ $x \neq 0$ และ $x \neq 1$ ซึ่ง

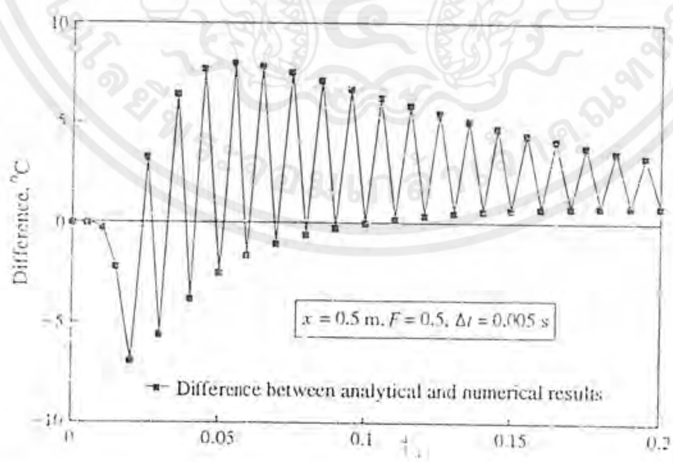
$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{n}$$

ลู่เข้าหาอนุกรม half-range Fourier sine ของ $\frac{\pi}{4}$ สำหรับ $0 < x < 1$, $u(x,0) = 300$ สำหรับ $0 < x < 1$

ผลเฉลยที่ $x = 0.5$ เมตร จะถูก plot ในรูปที่ 2.4.8 และ 2.4.9 แสดงให้เห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $F = 0.5$ เสถียรและสอดคล้องกับผลเฉลย analytic รูปที่ 2.4.9 แสดงผลต่างระหว่างผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลย analytic และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่เกิดการแกว่งจะยอมรับได้ใน 2-3 ครั้งแรก แต่จะเกิดการแกว่ง เนื่องจากอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็วที่ $x = 0$ และ $x = 1$ เมตร จาก $300°C$ ถึง $20°C$ ที่ $t = 0$ เนื่องจากการขัดแย้งกันระหว่าง BCs และ IC ใน 2-3 ครั้งแรก การแกว่งของผลเฉลยจะไม่เกิดขึ้นเพราะมีการกำหนดเวลา สำหรับเงื่อนไขขอบเขตเชิงตัวเลข แพร่ไปยังจุดตรงกลางของแผ่น ที่ $x = 0.5$ เมตร แสดงดังในตารางที่ 2.4.2 และรูปที่ 2.4.8

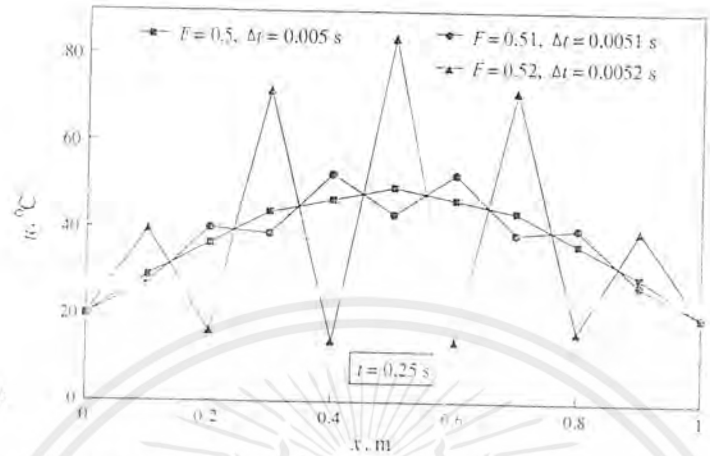


รูปที่ 2.4.8 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.4.2 ที่ $x = 0.5$ เมตร



รูปที่ 2.4.9 แสดงค่าแตกต่างระหว่างผลเฉลย analytic และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $x = 0.5$

ลักษณะการลู่เข้าของวิธี FTCS ผลเฉลยเชิงตัวเลข ที่ $t = 0.25\ s$ สำหรับค่า F ที่แตกต่างกัน หาได้และ plot ดังในรูปที่ 2.4.10 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยจะไม่ stable ที่ $F > 0.5$



รูปที่ 2.4.10 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.4.2 สำหรับค่า F ที่แตกต่างกัน

สรุปวิธี FTCS

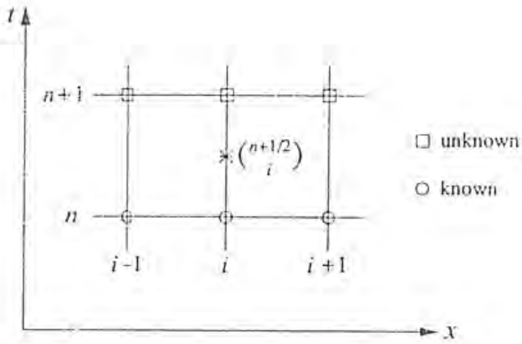
1. ใช้ง่าย
2. จะได้ค่าที่ stable $F \le 0.5$
3. จะเป็น First-order accurate ในเวลาและเป็น second-order accurate ใน space

2.4.3 Crank-Nicolson (CN) Method

ในวิธี FTCS stability condition ประยุกต์ได้เป็น

$$\Delta t \le \frac{(\Delta x)^2}{2c^2}$$

ดังนั้น ถ้า Δx ถูกลดขนาด เพื่อให้ค่าถูกต้องมากขึ้นแล้ว Δt ก็จะยิ่งเล็กมากขึ้น เพื่อที่จะได้ค่าที่ stable จะต้องใช้เวลานานขึ้นในการคำนวณหาผลเฉลย จำนวนขั้นต้องมากขึ้นด้วยในโดเมนผลเฉลยวิธีที่ stable สำหรับบางค่าของ F คือ วิธี Crank-Nicolson (CN) เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า วิธี implicit ในวิธี CN จะเริ่มทำครั้งแรกจาก n ถึง $n+1$ สมการความร้อน 1 มิติใน (2.4.1) จะแทนด้วย finite difference ที่ตำแหน่งกึ่งกลางระหว่างช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่ n และ $n+1$ (ตำแหน่งที่ *) ซึ่งก็คือ ตรงที่ $t^{n+\frac{1}{2}}$ ดังแสดงในรูปที่ 2.4.11



รูปที่ 2.4.11 finite difference สำหรับวิธี CN

สำหรับอนุพันธ์ที่เทียบกับ t ณ ที่จุด * ใช้ ผลต่างตรงกลาง

จะได้

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

สำหรับอนุพันธ์ที่เทียบกับ x ณ ที่จุด * ค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์เทียบกับ x ที่ขั้นที่ t ครั้งที่ n และ $n+1$ โดยใช้ผลต่างตรงกลางจะได้

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{n} - 2u_i^{n} + u_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right]$$

แทนค่าลงในสมการ (2.4.1) และจัดรูปแบบใหม่ สมการเชิงผลต่างที่ได้คือ

$$\underbrace{-Fu_{i-1}^{n+1} + (2+2F)u_i^{n+1} - Fu_{i+1}^{n+1}}_{\text{ไม่ทราบค่า}} = \underbrace{Fu_{i-1}^{n} + (2-2F)u_i^{n} + Fu_{i+1}^{n}}_{\text{ทราบค่า}} \qquad (2.4.5)$$

ที่ $F = c^2\Delta t/(\Delta x)^2$ คือจำนวน grid Fourier

วิธีนี้ก็เป็นวิธี Implicit เราจะหาค่า u_i^{n+1} โดยใช้ตัวไม่ทราบค่าขั้นที่ n ซึ่งเซตของสมการเชิงเส้นจะถูกนำมาหาผลเฉลยในแต่ละขั้นเวลา

เมื่อใช้ผลต่างตรงกลาง ค่า truncation error คือ

$$O[(\Delta t^2)]+O[(\Delta x^2)] \quad \text{หรือ} \quad O[(\Delta t^2)+(\Delta x^2)]$$

วิธี CN จะ stable สำหรับ ทุกๆ ค่าของ F ถ้าให้ F เป็น 1 เพื่อความสะดวก (2.4.5) จะกลายเป็น

$$-u_{i-1}^{n+1}+4u_i^{n+1}-u_{i+1}^{n+1} \quad = \quad u_{i-1}^{n}+u_{i+1}^{n} \qquad (2.4.6)$$

เขียนให้อยู่ในรูปของ pattern form

รูปที่ 2.4.12 pattern form ของวิธี CN ($F=1$)

ทางด้านซ้ายของ (2.4.6) ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า 3 ตัวติดกันที่ x-station ทำให้เกิด ระบบสมการเชิงเส้น กับเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ Tridiagonal นำไปหาค่า grid point ในแต่ละขั้นเวลา ระบบสามารถหาผลเฉลยได้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำ โดย Tridiagonal algorithm มีพื้นฐานอยู่บนวิธี non-iterative เมื่อเขียนโปรแกรม CN ควรจะใช้ Tridiagonal algorithm ในการหาผลเฉลยของระบบ Tridiagonal เมื่อสมการเมทริกซ์ ถูกใช้ในการหาผลเฉลยในขั้นที่สูงขึ้น วิธี CN มีจำนวนตัวเลขในการคำนวณมากกว่าในแต่ละขั้น เมื่อเปรียบเทียบกับวิธี FTCS

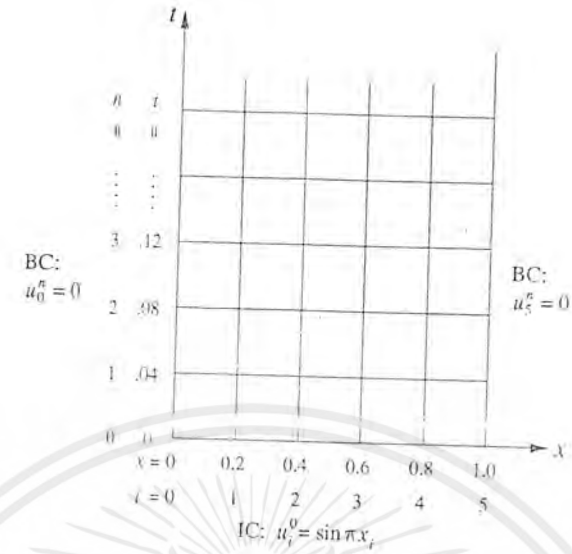
ตัวอย่างที่ 2.4.3

จากตัวอย่างที่ 2.4.1 จะใช้ วิธี CN หาผลเฉลยโดยกำหนด $F=1$ รวมทั้งเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับวิธี FTCS ในตัวอย่างที่ 2.4.1

วิธีทำ

จาก (2.4.3), $$\Delta t=\frac{1}{c^2}F(\Delta x)^2=0.2^2 s=0.04s$$

ระบบ grid space time คือ



รูปที่ 2.4.13 ระบบ grid สำหรับตัวอย่างที่ 2.4.3

<u>สำหรับ n = 0</u> : ใช้ (2.4.6) กับ BCs และ IC จะได้

$$\begin{aligned}
i = 1: &\quad -u_0^1 + 4u_1^1 - u_2^1 = u_0^0 + u_2^0 \\
&\quad 4u_1^1 - u_2^1 = 0.9511 \\
i = 2: &\quad -u_1^1 + 4u_2^1 - u_3^1 = u_1^0 + u_3^0 \\
&\quad = 1.5388 \\
i = 3: &\quad -u_2^1 + 4u_3^1 - u_4^1 = u_2^0 + u_4^0 \\
&\quad = 1.5388 \\
i = 4: &\quad -u_3^1 + 4u_4^1 - u_5^1 = u_3^0 + u_5^0 \\
&\quad -u_3^1 + 4u_4^1 = 0.9511
\end{aligned}$$

ในรูปของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9511 \\ 1.5388 \\ 1.5388 \\ 0.9511 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยที่ได้คือ

$$\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3993 \\ 0.6460 \\ 0.6460 \\ 0.3993 \end{bmatrix}$$

<u>สำหรับ</u> $n = 1$: ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6460 \\ 1.0453 \\ 1.0453 \\ 0.6460 \end{bmatrix}$$

แก้สมการนี้ จะได้

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2712 \\ 0.4388 \\ 0.4388 \\ 0.2712 \end{bmatrix}$$

ใช้ marching procedure ต่อเนื่องในทิศทาง t ผลเฉลยที่ได้ในการทำ 12 ครั้ง แสดงดังในตารางที่ 2.4.5

ตารางที่ 2.4.5 แสดงผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.4.3

		u_i^n					
n	t	$i=0$ $x=0$	$i=1$ $x=0.2$	$i=2$ $x=0.4$	$i=3$ $x=0.6$	$i=4$ $x=0.8$	$i=5$ $x=1.0$
0	0.00	0	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878	0
1	0.04	0	0.3993	0.6460	0.6460	0.3993	0
2	0.08	0	0.2712	0.4388	0.4388	0.2712	0
3	0.12	0	0.1842	0.2981	0.2981	0.1842	0
4	0.16	0	0.1251	0.2025	0.2025	0.1251	0
5	0.20	0	0.0850	0.1376	0.1376	0.0850	0
6	0.24	0	0.0577	0.0934	0.0934	0.0577	0
7	0.28	0	0.0392	0.0635	0.0635	0.0392	0
8	0.32	0	0.0266	0.0431	0.0431	0.0266	0
9	0.36	0	0.0181	0.0293	0.0293	0.0181	0
10	0.40	0	0.0123	0.0199	0.0199	0.0123	0
11	0.44	0	0.0084	0.0135	0.0135	0.0084	0
12	0.48	0	0.0057	0.0092	0.0092	0.0057	0

ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ 2.4.1 คือ สามารถหาผลเฉลยเพียงแค่ครึ่งเดียวเท่านั้น ในโดเมนผลเฉลยจากการสมมาตร ในกรณีนี้ สำหรับ $i=2$ จะใช้ $u_3^{n+1}=u_2^{n+1}$ เนื่องจากสมมาตรกัน ดังนั้น สมการ (2.4.6) จะกลายเป็น

$$-u_1^{n+1}+3u_2^{n+1} \quad = \quad u_1^n+u_3^n$$

ใช้ได้กับสมการที่ $i=1$ ด้วยเหมือนกัน จะอยู่ในรูปของระบบที่มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว ตัวไม่ทราบค่าหาโดยการแก้สมการของระบบ อาจจะหาค่าอื่นๆ ได้โดยการสมมาตร เช่น $u_3^{n+1}=u_2^{n+1}, u_4^{n+1}=u_1^{n+1}$

เปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากวิธี FTCS ในตัวอย่างที่ 2.4.1 ผลเฉลยที่ได้จากวิธี CN กับผลเฉลย analytic แสดงในตารางที่ 2.4.6 ซึ่งในตัวอย่างนี้ วิธี FTCS จะให้ผลเฉลยเกือบจะถูกต้อง แต่จำนวนครั้งที่ทำ Δt เพิ่มขึ้นเป็น 4 ครั้ง

ตารางที่ 2.4.6 เปรียบเทียบผลเฉลยของวิธี FTCS , CN และผลเฉลย analytic

	$u(x,t)$					
	FTCS Method ($F=0.25, \Delta t=0.01$)		CN Method ($F=1, \Delta t=0.04$)		Analytical	
t	$x=0.2$ or 0.8	$x=0.4$ or 0.6	$x=0.2$ or 0.8	$x=0.4$ or 0.6	$x=0.2$ or 0.8	$x=0.4$ or 0.6
0.00	0.5878	0.9511	0.5878	0.9511	0.5878	0.9511
0.04	0.3934	0.6366	0.3993	0.6460	0.3961	0.6408
0.08	0.2633	0.4261	0.2712	0.4388	0.2669	0.4318
0.12	0.1763	0.2852	0.1842	0.2981	0.1798	0.2910

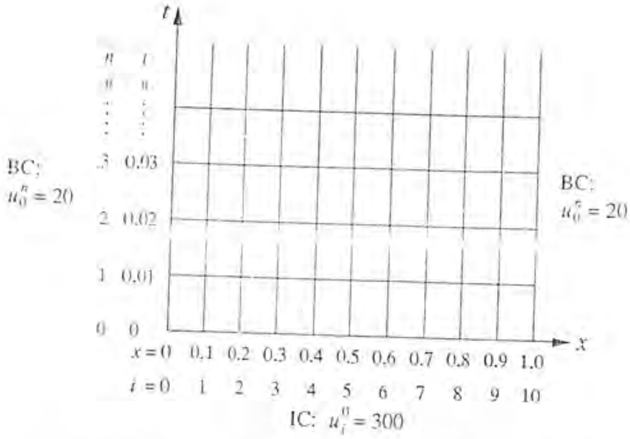
<u>ตัวอย่างที่ 2.4.4</u>

จงหาผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.4.2 โดยใช้วิธี CN ซึ่ง $F=1$ ให้เปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยที่ใช้วิธี FTCS ในตัวอย่างที่ 2.4.2

<u>วิธีทำ</u>

จาก (2.4.3), $$\Delta t=\frac{1}{c^2}F(\Delta x)^2=0.1^2 s=0.01 s$$

ระบบ grid คือ



รูปที่ 2.4.14 ระบบ grid สำหรับตัวอย่างที่ 2.4.4

จากตัวอย่างที่ 2.4.2 BCs และ IC คือ

$$u_0^n = u_{10}^n = 20 \qquad \text{เมื่อ} \quad n \geq 0$$

$$u_i^0 = 300 \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 < i < 10$$

<u>สำหรับ</u> $n = 0$: ใช้ (2.4.6) และ BCs กับ IC ข้างบน จะได้

$$i=1: \quad -u_0^1 + 4u_1^1 - u_2^1 = u_0^0 + u_2^0$$
$$-20 + 4u_1^1 - u_2^1 = 20 + 300$$
$$4u_1^1 - u_2^1 = 340$$
$$i=2: \quad -u_1^1 + 4u_2^1 - u_3^1 = u_1^0 + u_3^0$$
$$= 600$$
$$i=3: \quad -u_2^1 + 4u_3^1 - u_4^1 = u_2^0 + u_4^0$$
$$= 600$$
$$i=4: \quad -u_3^1 + 4u_4^1 - u_5^1 = u_3^0 + u_5^0$$
$$= 600$$
$$i=5: \quad -u_4^1 + 4u_5^1 - u_5^1 = u_4^0 + u_6^0$$
$$= 600$$

.

.

.

$$i=9: \quad -u_8^1 + 4u_9^1 - u_{10}^1 = u_8^0 + u_{10}^0$$
$$-u_8^1 + u_9^1 = 340$$

ในรูปของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \\ u_8^1 \\ u_9^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 600 \\ 600 \\ 600 \\ 600 \\ 600 \\ 600 \\ 600 \\ 340 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยที่ได้คือ

$$\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \\ u_8^1 \\ u_9^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149.94 \\ 259.78 \\ 289.17 \\ 296.91 \\ 298.45 \\ 296.91 \\ 289.17 \\ 259.78 \\ 149.94 \end{bmatrix}$$

ทำไปเรื่อย ๆ ในทิศทาง t ได้ผลเฉลย

ตารางที่ 2.4.7 ผลเฉลยของตัวอย่างที่ 2.4.4

		u_i^n					
n	t	$i=0$ $x=0$ or 1.0	$i=1$ $x=0.1$ or 0.9	$i=2$ $x=0.2$ or 0.8	$i=3$ $x=0.3$ or 0.7	$i=4$ $x=0.4$ or 0.6	$i=5$ $x=0.5$
0	0.00	20	300.00	300.00	300.00	300.00	300.00
1	0.01	20	149.94	259.78	289.17	296.91	298.45
2	0.02	20	126.70	207.01	262.23	285.23	291.07
3	0.03	20	107.49	182.93	235.31	266.06	275.65
4	0.04	20	96.60	163.45	214.43	245.26	255.66
5	0.05	20	88.03	148.68	195.66	225.25	235.26
6	0.06	20	81.17	135.99	179.10	206.47	215.86
7	0.07	20	75.23	124.91	164.15	189.24	197.86
8	0.08	20	69.98	115.01	150.67	173.51	181.38
9	0.09	20	65.28	106.10	138.46	159.22	166.37
10	0.10	20	61.03	98.04	127.40	146.24	152.73

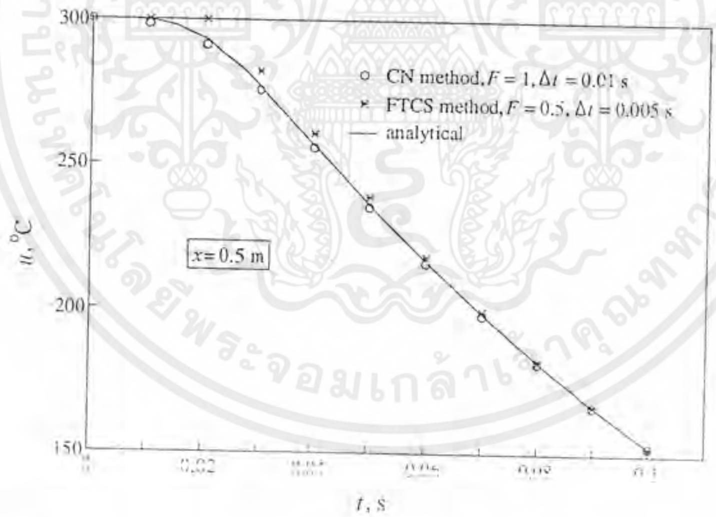
เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 2.4.3 สามารถที่จะคำนวณหาผลเฉลยเพียงแค่ครึ่งเดียวในโดเมนผลเฉลย โดยใช้เทคนิคการสมมาตร

ผลเฉลย analytic แสดงในตารางที่ 2.4.3 ผลต่างระหว่างผลเฉลย analytic กับผลเฉลยเชิงตัวเลข แสดงในตารางที่ 2.4.8

ผลเฉลยที่ได้จากวิธี FTCS ในตัวอย่างที่ 2.4.2 ผลเฉลย analytic และผลเฉลย analytic ที่ $x = 0.5\ m$ จะถูก plot เปรียบเทียบไว้ในรูปที่ 2.4.15

ตารางที่ 2.4.8 แสดงความแตกต่างระหว่างผลเฉลย analytic และผลเฉลยเชิงตัวเลข

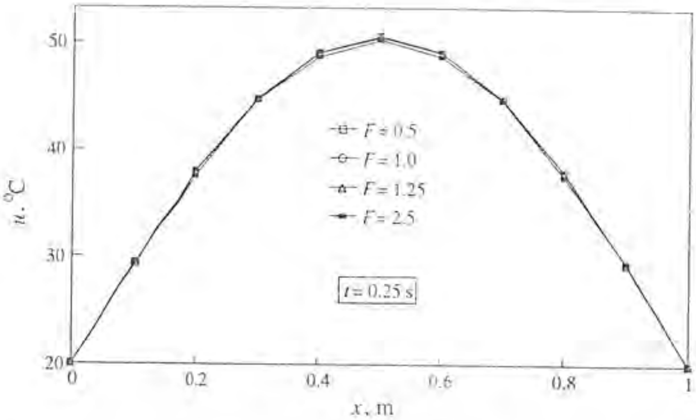
t	$u(x,t)_{analytical} - u(x,t)_{numerical}$					
	$x=0$ or 1.0	$x=0.1$ or 0.9	$x=0.2$ or 0.8	$x=0.3$ or 0.7	$x=0.4$ or 0.6	$x=0.5$
0.00	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.01	0	15.80	−3.82	1.34	1.77	1.32
0.02	0	0.52	4.13	0.23	1.27	1.98
0.03	0	1.18	0.78	1.71	1.24	1.26
0.04	0	0.39	0.99	0.96	1.21	1.16
0.05	0	0.36	0.58	0.85	0.92	0.99
0.06	0	0.23	0.46	0.61	0.73	0.76
0.07	0	0.17	0.33	0.46	0.54	0.56
0.08	0	0.12	0.23	0.31	0.38	0.39
0.09	0	0.07	0.14	0.20	0.23	0.25
0.10	0	0.04	0.08	0.10	0.12	0.13



รูปที่ 2.4.15 เปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากวิธี FTCS , CN และวิธี analytic

ในตัวอย่างนี้ วิธี CN จะมีความแม่นยำมากกว่า วิธี FTCS ถึงแม้ว่าจำนวนครั้งในการคำนวณของวิธี CN จะมากพอๆ กับวิธี FTCS

สำหรับผลเฉลยวิธีเชิงตัวเลขของปัญหานี้ ที่ $t = 0.25s$ จำนวน grid Fourier ต่างๆ จากค่า F 0.5 ถึง 2.5 ถูก plot ให้เห็นในรูปที่ 2.4.17 แน่นอนว่าวิธี CN จะ stable ในทุกๆ ค่าของ F



รูปที่ 2.4.16 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับค่า F ที่แตกต่างกัน

สรุปวิธีของ CN

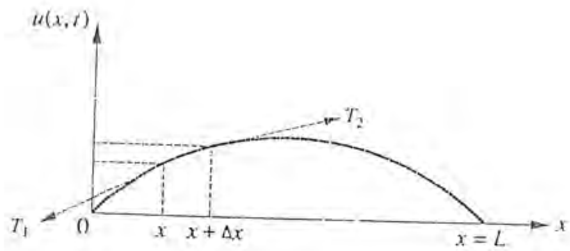
1. แต่ละขั้นของ t ต้องคำนวณตัวเลขมาก
2. เป็น second-order accurate ในรูปของ x -spacing
3. เป็น unconditionally stable

สังเกตว่าจุดสุดท้ายทั้งของวิธี FTCS และ CN สมการเชิงผลต่าง (2.4.2) และ (2.4.5) ที่ใช้ในการหาผลเฉลยในขั้นเวลาที่ขึ้นอยู่กับผลเฉลยก่อนหน้าเท่านั้น

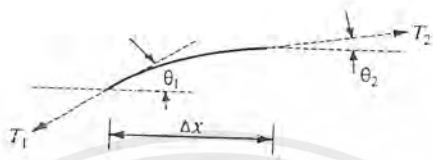
2.5 สมการไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Equation)

2.5.1 สมการคลื่น 1 มิติ

พิจารณาเส้นเชือกความยาว L ที่ถูกขึงให้ตึงและยึดจุดปลายทั้งสองข้าง จะได้การกระจัดและเซตของการเคลื่อนที่เมื่อมีการสั่นเส้นเชือก ลักษณะของเส้นเชือกที่เกิดขึ้นขณะใดขณะหนึ่งแสดงในรูปที่ 2.5.1 ซึ่ง $u(x,t)$ เป็นระยะตามขวางของเส้นเชือก



(a) เส้นเชือก



(b) ส่วนประกอบของเส้นเชือก

รูปที่ 2.5.1 การสั่นของเส้นเชือก

อนุพันธ์ของสมการของการสั่นของเส้นเชือก สมมติให้

a) มวลต่อ 1 หน่วยความยาว ρ เป็นค่าคงที่

b) แรงดึงในเส้นเชือกมีค่ามากเมื่อเปรียบเทียบกับแรงดึงดูดของโลก เราจะไม่นำค่าแรงดึงดูดของโลกมาพิจารณา

c) การเปลี่ยนแปลงของระยะตามยาว $u(x,t)$ มีค่าน้อยมาก ดังนั้นสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวตั้งเท่านั้นและความชันของเส้นเชือกซึ่งมีค่าน้อยมาก

พิจารณาส่วนประกอบของเส้นเชือก dx ที่มีความตึง T_1 และ T_2 ที่จุดปลายทั้งสองของเชือกมีแรงกระทำกับเส้นเชือกเป็นมุม θ_1 และ θ_2 วัดในทิศทาง x แสดงในรูปที่ 2.5.1b เมื่อระยะทางในทิศทาง x สมมติว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงจะได้ว่า แรงกระทำสุทธิในทิศทาง x จะหายไป

$$T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 = \text{ค่าคงที่ } T \qquad (2.5.1)$$

ที่ T เป็นของแรงตึงของเส้นเชือกในทิศทาง x

พิจารณา การเคลื่อนที่ตามขวางในทิศทาง y ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน เราได้

มวล × ความเร่ง = แรง $(f = ma)$

ดังนั้น

$$(\rho \Delta x) \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = (T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1) \qquad (2.5.2)$$

หาร (2.5.2) ด้วย (2.5.1) เราได้

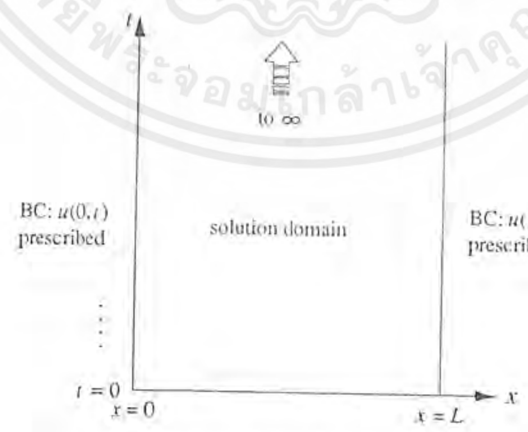
$$\frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tan \theta_2 - \tan \theta_1$$

$\tan \theta_1$ และ $\tan \theta_2$ เป็นความชันของจุดปลายทั้งสองของเส้นเชือก ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.5.3)$$

สมการนี้เป็น Hyperbolic และเป็นอันดับสองทั้งใน t และ x กำหนด ICs 2 เงื่อนไข และ BCs 2 เงื่อนไข เพื่อให้สมการมี unique solution แสดงในรูปที่ 2.5.2 นี่คือปัญหาค่าขอบเขตเริ่มต้น โดเมนผลเฉลยจะหาในทิศทาง t จนถึง Infinity

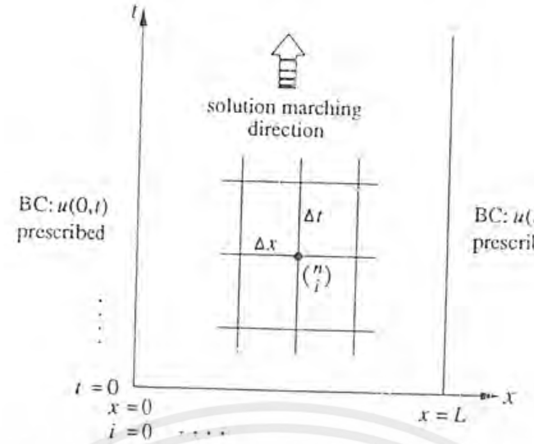
สมการ Hyperbolic เกิดขึ้น ในปัญหาทางวิศวกรรมอื่นๆ ด้วยเช่น การเดินทางที่เร็วกว่าเสียงไม่สามารถเห็นได้ ในบทนี้ สมการคลื่น 1 มิติ $u_{tt} = k^2 u_{xx}$ จะใช้เป็นตัวอย่างในการหาผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลข ซึ่ง สมการ Hyperbolic อื่นๆ ก็อาจใช้วิธีการเดียวกันนี้ได้



กำหนด IC : $u(x,o)$, $u_t(x,o)$

รูปที่ 2.5.2 โดเมนผลเฉลยของสมการคลื่น 1 มิติ

2.5.2 Central Time Central Space (CTCS) Method



กำหนด IC : $u(x,0), u_t(x,0)$

รูปที่ 2.5.3 แบบแผนเชิงตัวเลขของวิธี CTCS

grid space-time คือ จุดที่ตัดกันในโดเมนผลเฉลยซึ่งขนาด grid คือ Δx และ Δt แสดงในรูปที่ 2.5.3 ซึ่ง ICs กำหนดที่ $t = 0$ ใช้สมการ (2.5.3) อธิบายว่า u มีการแพร่อย่างไรในเวลานั้น สามารถแก้ปัญหาสมการโดยใช้ เทคนิค marching ในทิศทาง t

จะใช้ผลต่างตรงกลางสำหรับอนุพันธ์ t และ x ซึ่งสมการ finite difference สำหรับสมการคลื่นในรูปของ subscript - superscript คือ

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t^2)} = k^2\left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x^2)}\right]$$

หรือ

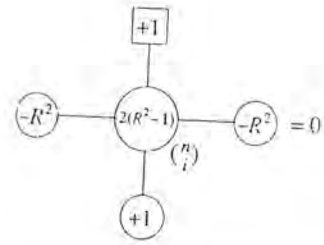
$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + R^2(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + 2(1 - R^2)u_i^n \qquad (2.5.4)$$

ที่

$$R = \frac{k\Delta t}{\Delta x} \quad , \ (k > 0) \qquad (2.5.5)$$

เป็นจำนวน Courant และ เป็น non-dimensional และเป็นค่าบวก

ที่ subscript และ superscript เป็นจำนวนของช่วง x และ t ตามลำดับ pattern form ของสมการ (2.5.4) คือ



รูปที่ 2.5.4 สมการคลื่นอยู่ในรูปของ pattern form

สมการ (2.5.4) เรากำหนด u ที่ขั้น t ครั้งที่ $(n+1)$ สมมติว่าเราทราบค่า u ก่อนหน้านั้น 2 ขั้นคือ u ที่ n และ $n-1$ ดังนั้นเราสามารถหาผลเฉลยได้จากการหาค่าข้างหน้าในทิศทาง t เนื่องจากตัวไม่ทราบค่า u_i^{n+1} สามารถหาโดยตรงจาก (2.5.4) นี่คือวิธี explicit

เริ่มจาก marching procedure ที่ $n=0$, (2.5.4) คือ

$$u_i^1 = -u_i^{-1} + R^2(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + 2(1-R^2)u_i^0 \qquad (2.5.6)$$

ซึ่งกำหนดค่าของ u ที่ $n=0$ และ $n=-1$ สมมติให้ ICs ทั้งสองคือ $u(x,0)=f(x)$ และ $u_t(x,0)=g(x)$ ค่าของ u ที่ $n=0$ หาได้จาก IC แรก ซึ่งคือ

$$u_i^0 = f_i \qquad (2.5.7)$$

ที่ $f_i = f(x_i)$, $x_i = i\Delta x$

ค่าของ u_i^{-1} หาได้จาก IC ที่สองในรูปของผลต่างกลาง ดังนั้น

$$\frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2(\Delta t)} = g_i$$

ที่ $g_i = g(x_i)$, $x_i = i\Delta x$ จัดรูปใหม่ได้

$$u_i^{-1} = u_i^1 - 2(\Delta t)g_i \qquad (2.5.8)$$

ในหัวข้อ 2.4 เราจะหาผลเฉลยของสมการความร้อน 1 มิติ โดยใช้วิธี FTCS ซึ่งเป็นวิธี explicit ผลต่างตรงกลางไม่สามารถใช้สำหรับเทอมของอนุพันธ์ t เพราะเทอม u_i^{-1} ไม่สามารถกำหนดได้ซึ่งในหัวข้อ 2.4.3 สำหรับสมการคลื่น 1 มิติ จะอธิบายในหัวข้อนี้.ซึ่งจะไม่มีปัญหาเพราะการเพิ่มอนุพันธ์ IC ทำให้เรากำหนดค่า u_i^{-1} ได้

ซึ่ง (2.5.8) , (2.5.6) กลายเป็น

$$u_i^1 = \frac{R^2}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + (1-R^2)u_i^0 + (\Delta t)g_i \qquad (2.5.9)$$

จะใช้สมการ (2.5.9) แทน (2.5.4) เริ่มจาก marching procedure สำหรับขั้นเวลาแรก ซึ่ง $n = 0$ สำหรับขั้นเวลาของลำดับย่อยจะใช้ (2.5.4) โดยตรง
วิธีนี้จะ stable ถ้า

$$R = \frac{k\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \qquad (2.5.10)$$

ซึ่งเราทราบเงื่อนไข Courant

ส่วนใหญ่ เราจะกำหนด $R = 1$ เพื่อความสะดวก (2.5.9) และ (2.5.4) จะลดรูปได้เป็น

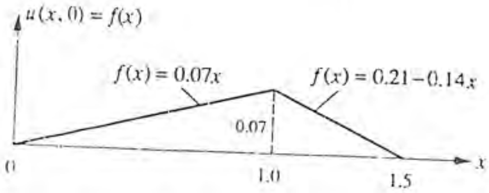
$$u_i^{-1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + (\Delta t)g_i \qquad (2.5.11a)$$

และ

$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + u_{i+1}^n + u_{i-1}^n \quad \text{สำหรับ } n > 0 \qquad (2.5.11b)$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.5.1</u>

เส้นเชือกถูกตรึงจุดปลายทั้งสอง มีความยาว $L = 1.5m$, $\rho = 0.0011\frac{kg}{m}$ และแรงตึง $T = 11\ \frac{kg.m}{s^2}$ หรือ $(T = 11N)$ เส้นเชือกถูกดึงขึ้น แสดงในรูปที่ 2.5.5 และปล่อยจากจุดหยุดนิ่ง โดยให้ $\Delta x = 0.25\ \ m$ และ $R = 1$ ให้หาค่า deflection ของเส้นเชือก



รูปที่ 2.5.5 รูปแบบเริ่มต้นของเส้นเชือกในตัวอย่างที่ 2.5.1

<u>วิธีทำ</u>

$$k^2=\frac{T}{\rho}$$

$$=\frac{11}{0.0011}\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$=10000\ \frac{m^2}{s^2}$$

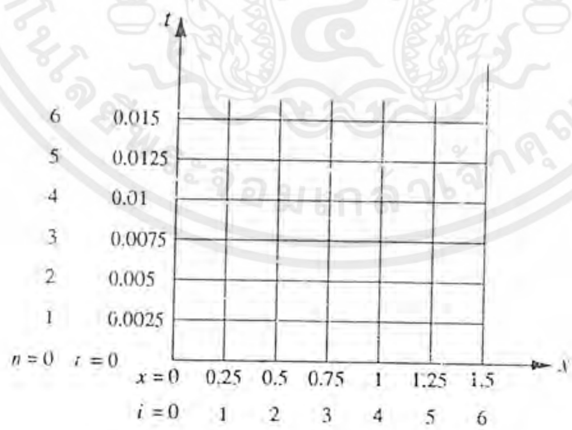
$$k=100\quad m/s$$

ให้ $\Delta x=0.25\ \ m$ และ $R=1$ แล้ว

$$\Delta t=\frac{R\Delta x}{k}$$

$$=\frac{1\times 0.25}{100}\ s\quad =0.0025\quad s$$

ระบบ grid เป็นดังนี้



รูปที่ 2.5.6 ระบบ grid สำหรับตัวอย่างที่ 2.5.1

ในรูปของ subscript – superscript ของ BCs คือ

$$u_0^n=u_6^n=0$$

และ ICs คือ

$$u_i^0 = \begin{cases} 0.07x_i & ;0 < i \le 4 \\ 0.21 - 0.14x_i & ;4 \le i < 6 \end{cases}$$

$$[u_t]_i^0 = g_i = 0$$

สำหรับ $n = 0$ ใช้ (2.5.11a) จะได้

$$u_i^1 = \frac{1}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + (\Delta t)g_i$$

$$= \frac{1}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) \qquad \text{(i)}$$

สำหรับ $n > 0$ ใช้ (2.5.11b) จะได้

$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + u_{i+1}^n + u_{i-1}^n \qquad \text{(ii)}$$

ใช้ (i) และ (ii) จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงในตารางที่ 2.5.1

ตารางที่ 2.5.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลข ของตัวอย่างที่ 2.5.1 , $R = 1$

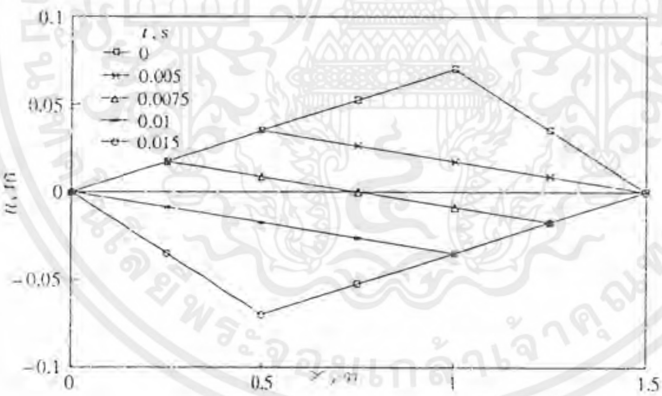
t	$u(x,t)$						
	$x=0$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
0.0000	0	0.01750	0.03500	0.05250	0.07000	0.03500	0
0.0025	0	0.01750	0.03500	0.05250	***0.04375***	0.03500	0
0.0050	0	0.01750	0.03500	0.02625	0.01750	0.00875	0
0.0075	0	0.01750	0.00875	0.00000	−0.00875	−0.01750	0
0.0100	0	−0.00875	−0.01750	−0.02625	−0.03500	−0.01750	0
0.0125	0	−0.03500	−0.04375	−0.05250	−0.03500	−0.01750	0
0.0150	0	−0.03500	−0.07000	−0.05250	−0.03500	−0.01750	0
0.0175	0	−0.03500	−0.04375	−0.05250	−0.03500	−0.01750	0
0.0200	0	−0.00875	−0.01750	−0.02625	−0.03500	−0.01750	0
0.0225	0	0.01750	***0.00875***	0.00000	−0.00875	−0.01750	0
0.0250	0	0.01750	0.03500	0.02625	0.01750	0.00875	0
0.0275	0	0.01750	0.03500	0.05250	0.04375	0.03500	0
0.0300	0	0.01750	0.03500	0.05250	0.07000	0.03500	0
0.0325	0	0.01750	0.03500	0.05250	0.04375	0.03500	0
0.0350	0	0.01750	0.03500	0.02625	0.01750	0.00875	0
0.0375	0	0.01750	0.00875	0.00000	−0.00875	−0.01750	0

ตัวอย่างการคำนวณ

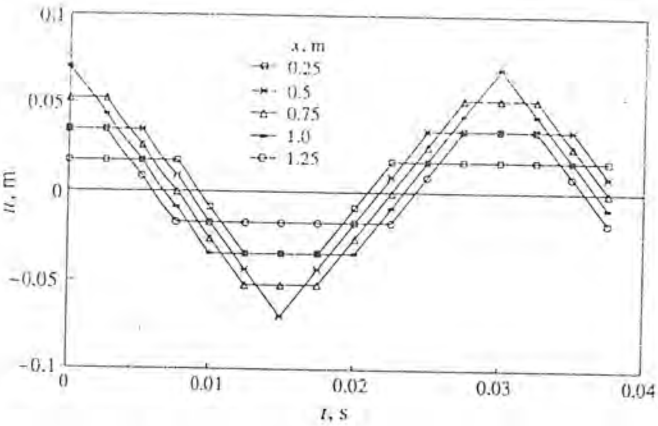
$$\begin{aligned} u(1,0.0025) &= u_4^1 \\ &= \frac{1}{2}(u_5^0 + u_3^0) \\ &= \frac{1}{2}(0.035 + 0.0525) \\ &= 0.04375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0.5,0.0225) &= u_2^9 \\ &= -u_2^7 + u_3^8 + u_1^8 \\ &= -(-0.04375) - 0.02625 - 0.00875 \\ &= 0.00875 \end{aligned}$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลขถูก plot ตามรูปที่ 2.5.7 และ 2.5.8 ซึ่งแสดงค่า deflection ของเส้นเชือกที่ x และ t ต่างๆ กัน สามารถเห็นได้จากรูปที่ 2.5.8 ว่า คาบของการสั่นของเส้นเชือกเป็น 0.03 s และมีความถี่



รูปที่ 2.5.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลข, u เทียบกับ x ของตัวอย่างที่ 2.5.1 , $R = 1$



รูปที่ 2.5.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลข, u เทียบกับ t ของตัวอย่างที่ 2.5.1 , $R=1$

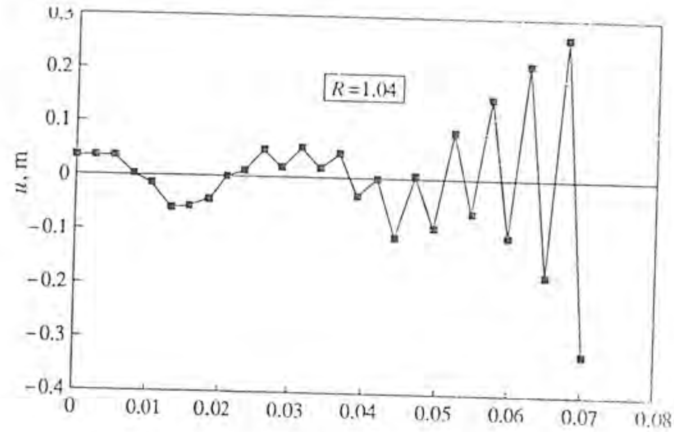
ผลเฉลย analytic ของปัญหา แสดงในตารางที่ 2.5.2

(ผลเฉลย analytic คือ $u(x,t)=\frac{0.63}{\pi^2}\sum_{n=1,2,...}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{1.5}\right)\cos\left(\frac{100n\pi}{1.5}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{1.5}x\right)$)

ตารางที่ 2.5.2 ผลเฉลย analytic ของตัวอย่างที่ 2.5.1

t	$u(x,t)$						
	$x=0$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
0.0000	0	0.01750	0.03500	0.05251	0.06968	0.03500	0
0.0025	0	0.01750	0.03500	0.05234	0.04375	0.03484	0
0.0050	0	0.01750	0.03484	0.02625	0.01750	0.00875	0
0.0075	0	0.01734	0.00875	0.00000	−0.00875	−0.01734	0
0.0100	0	−0.00875	−0.01750	−0.02625	−0.03484	−0.01750	0
0.0125	0	−0.03484	−0.04375	−0.05234	−0.03500	−0.01750	0
0.0150	0	−0.03500	−0.06968	−0.05251	−0.03500	−0.01750	0
0.0175	0	−0.03484	−0.04375	−0.05234	−0.03500	−0.01750	0
0.0200	0	−0.00875	−0.01750	−0.02625	−0.03484	−0.01750	0
0.0225	0	0.01734	0.00875	0.00000	−0.00875	−0.01734	0
0.0250	0	0.01750	0.03484	0.02625	0.01750	0.00875	0
0.0275	0	0.01750	0.03500	0.05234	0.04375	0.03484	0
0.0300	0	0.01750	0.03500	0.05251	0.06968	0.03500	0
0.0325	0	0.01750	0.03500	0.05234	0.04375	0.03484	0
0.0350	0	0.01750	0.03484	0.02625	0.01750	0.00875	0
0.0375	0	0.01734	0.00875	0.00000	−0.00875	−0.01734	0

จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลย analytic ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $R=1.04$ สามารถ plot ได้ดังรูปที่ 2.5.9 ที่ $x=0.5\ m$ แสดงให้เห็นว่า จะไม่ stable เมื่อ $R>1$



รูปที่ 2.5.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2.5.1 สำหรับ $R = 1.04$ ที่ $x = 0.5\ m$

สรุปวิธี CTCS

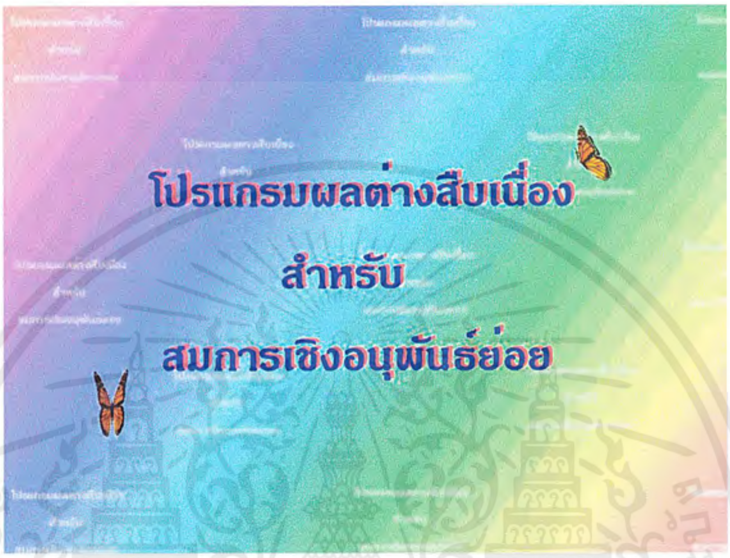
a) ใช้ได้ง่าย

b) จะ stable เมื่อกำหนด $R \leq 1$

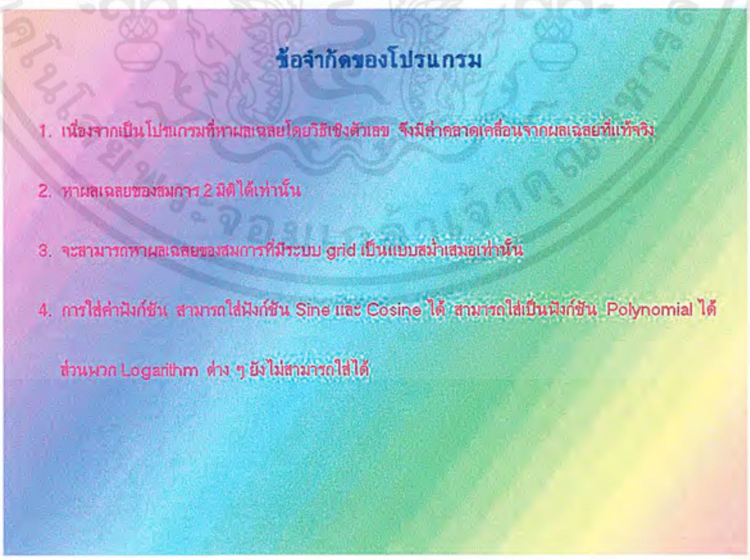
c) เป็น second-order accurate ในเวลาหรือ space

บทที่ 3
วิธีดำเนินการใช้โปรแกรมผลต่างสืบเนื่อง ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

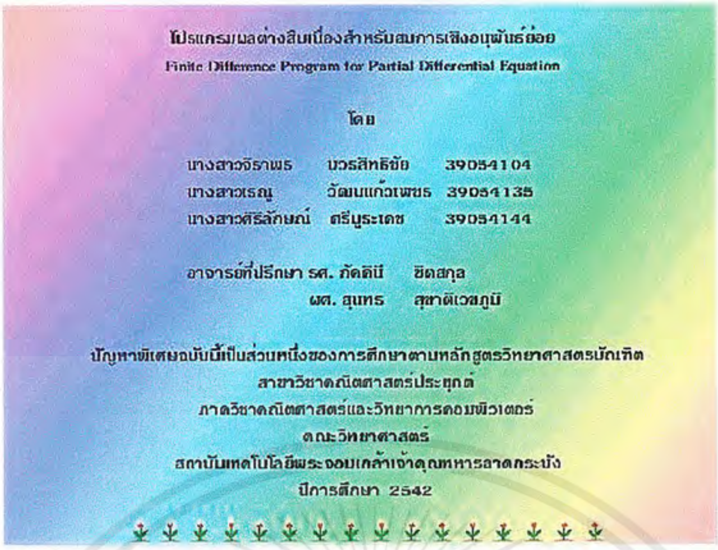
เมื่อผู้ใช้เข้าสู่โปรแกรมจะปรากฎหน้าจอดังนี้



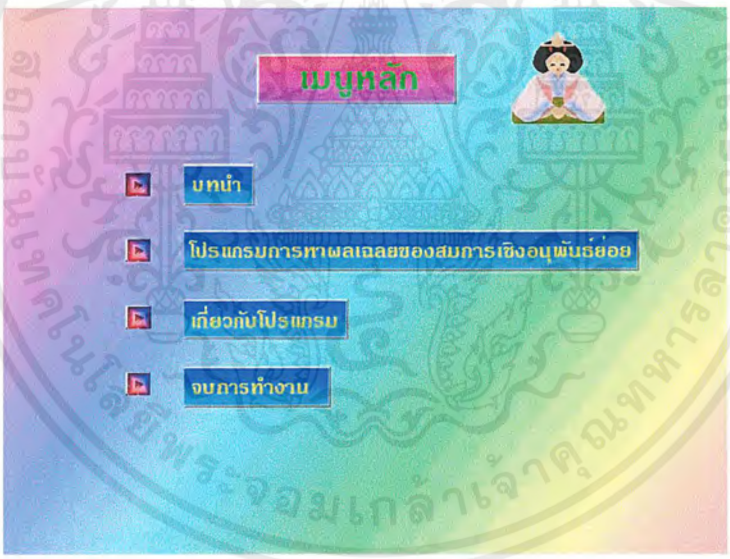
คลิ๊กเมาท์ หรือกด Enter จะปรากฎหน้าจอข้อจำกัดของโปรแกรม ดังนี้



คลิ๊กเมาท์ หรือกด Enter จะปรากฏหน้าจอแนะนำ ดังนี้



คลิ๊กเมาท์ หรือกด Enter จะปรากฏหน้าจอเมนูหลัก ดังนี้



สรุปเนื้อหาของปัญหาพิเศษ

เข้าสู่โปรแกรมการคำนวณหาผลเฉลย

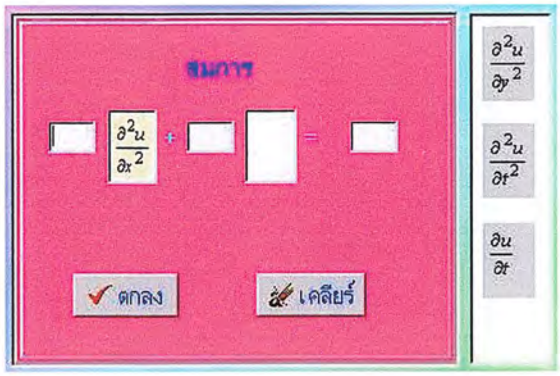
แสดงที่มาที่ไปของปัญหาพิเศษ

เมื่อต้องการออกจากโปรแกรม

เมื่อคลิ๊กปุ่มนี้จะปรากฏหน้าจอสรุปเนื้อหาของปัญหาพิเศษ ดังนี้

จะปรากฏหน้าจอให้ผู้ใช้ใส่ข้อมูลว่าต้องการหาผลเฉลยของสมการชนิดใด

รายละเอียดการใส่ข้อมูลมีดังนี้



ใส่ค่าของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการตรวจสอบว่าเป็นสมการชนิดใด คลิ๊กเลือกอนุพันธ์ ตามลักษณะของสมการ

คลิ๊กปุ่ม 

เมื่อใส่ข้อมูลเรียบร้อยแล้ว คลิ๊กปุ่ม 

เมื่อต้องการเคลียร์ข้อมูล

ชนิดของสมการจะปรากฏขึ้นที่กรอบนี้ หรือสามารถคลิ๊กเลือกสมการ ที่ต้องการหาผลเฉลยได้ทันที

กลับไปหน้าที่ผ่าน

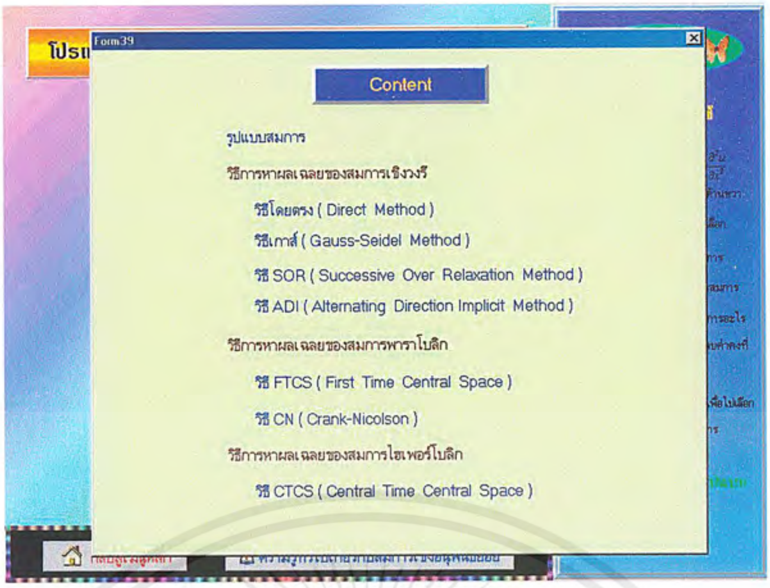
เมื่อคลิ๊กปุ่มนี้ จะเป็นหน้าจอในการหาผลเฉลย ของสมการแต่ละชนิดที่ได้เลือกไว้

และในทุกหน้าจอจะมีส่วนของ คำแนะนำ ที่อธิบายการใช้งานของหน้าจอนั้นๆ เช่นวิธีการใส่ข้อมูล ซึ่งจะอยู่ทางด้านขวาของหน้าจอ เช่นในหน้าจอการใส่ค่าสมการนี้ จะมีคำแนะนำดังนี้คือ

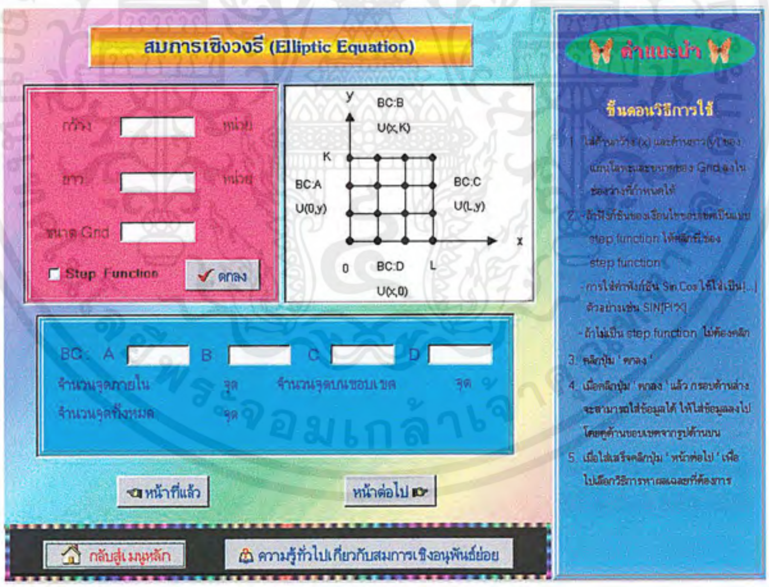
และในส่วนของ คำแนะนำ จะมีส่วนที่อธิบายรายละเอียดที่เกี่ยวข้องในหน้าจอนั้นด้วย เช่น

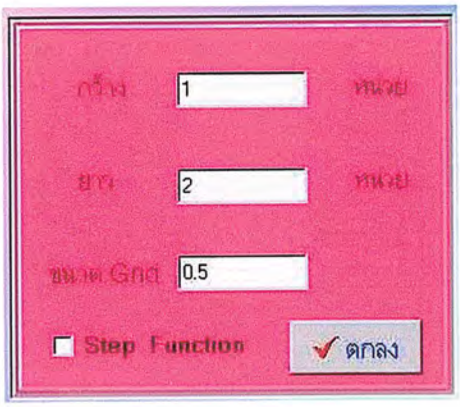
เมื่อต้องการกลับสู่หน้าจอ เมนูหลัก

จะแสดงหน้าจอ เนื้อหาอธิบายความรู้ทั่วไปที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แบ่งเป็นหัวข้อต่างๆ ดังนี้



สมการเชิงวงรี (Elliptic Equations) หน้าจอของการหาผลเฉลยของสมการเชิงวงรีมีรูปแบบดังนี้

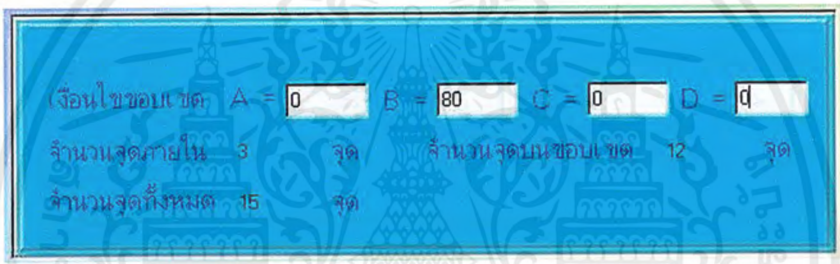




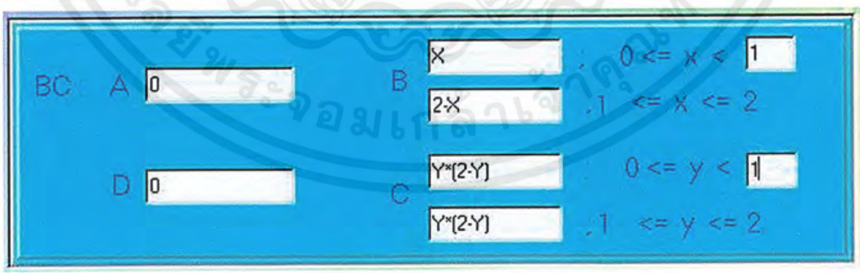
กรอบนี้ ใช้สำหรับใส่ค่าข้อมูล คือขนาด X และขนาด y เป็นความกว้าง และความยาวของแผ่นโลหะ ที่ต้องการหาผลเฉลย ตามลำดับ ขนาด Grid คือช่วงความกว้างของการหาผลเฉลย ในที่นี้กำหนด Delta X Delta y

ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นมีลักษณะเป็น Step Function ให้คลิ๊กที่ Step Function ถ้าไม่เป็น ก็ไม่ต้องคลิ๊ก เมื่อใส่ข้อมูลเรียบร้อยแล้วคลิ๊ก 

ถ้าไม่เป็น Step Function จะแสดงกรอบการใส่ค่าเงื่อนไขขอบเขตดังนี้



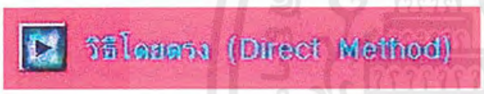
ถ้าเป็น Step Function จะแสดงกรอบการใส่ค่าเงื่อนไขขอบเขตดังนี้



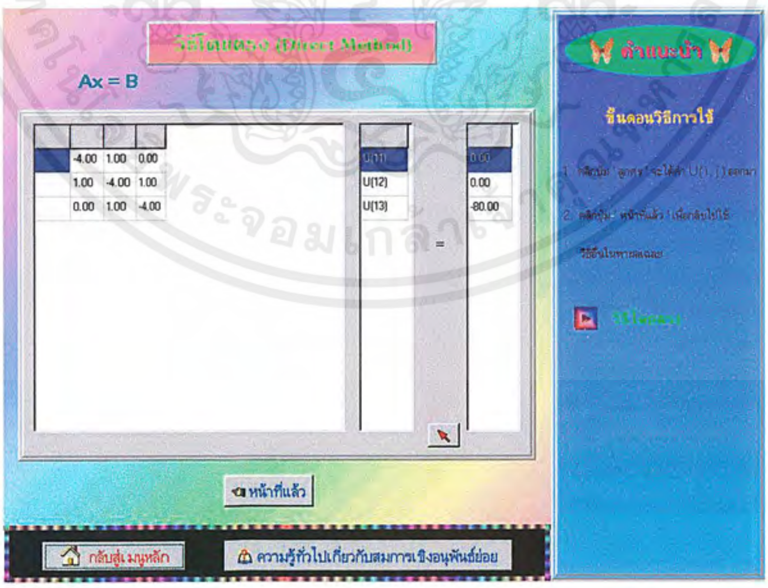
เมื่อใส่ค่าเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 เรียบร้อยแล้ว คลิ๊กปุ่ม 

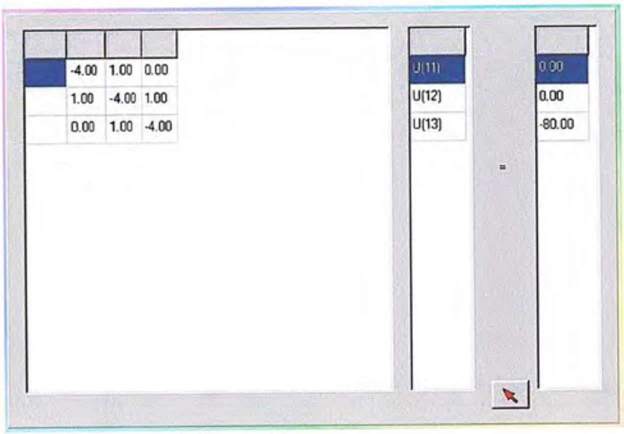
จะปรากฏหน้าจอ ดังนี้

เป็นหน้าจอวิธีการหาผลเฉลยแบบต่างๆ ของสมการเชิงวงรี คลิ๊กเลือกวิธีที่ใช้ จะปรากฎหน้าจอของผลเฉลย

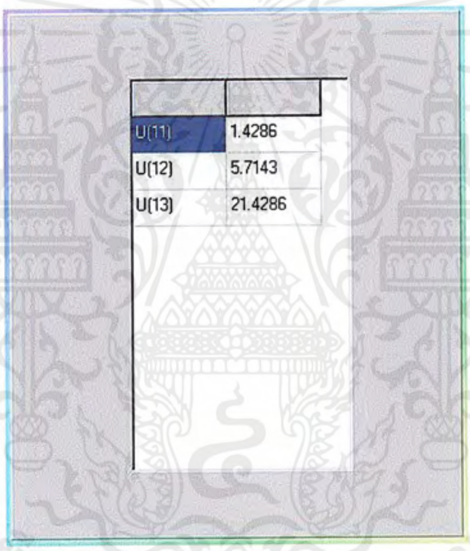


จะปรากฎหน้าจอการหาผลเฉลยโดยใช้วิธีโดยตรง ดังนี้

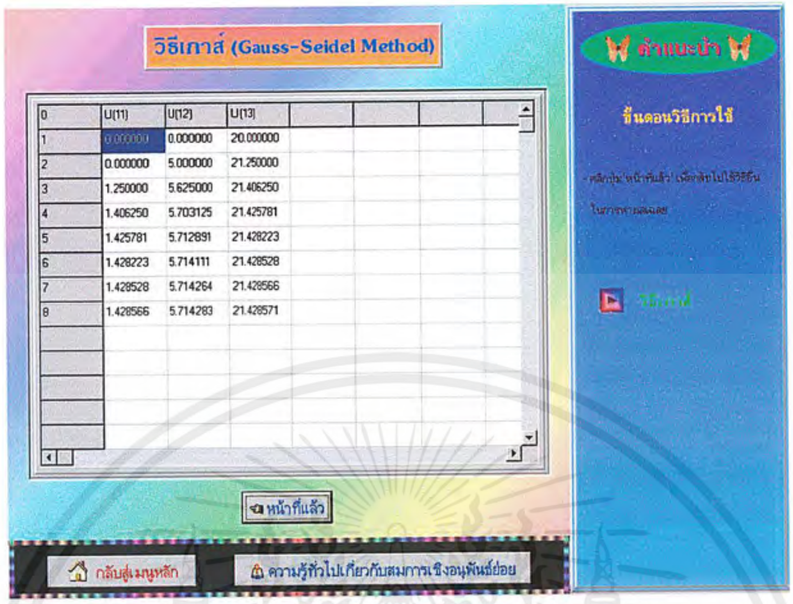


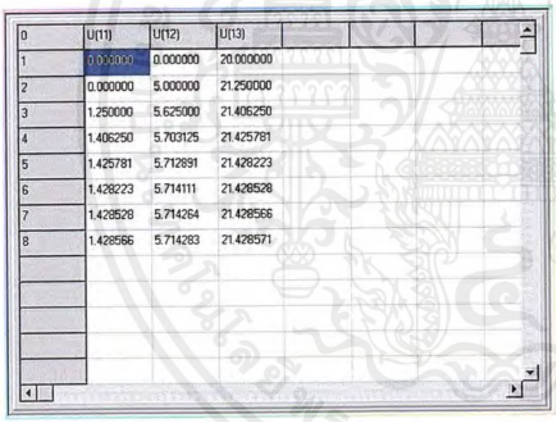


เป็นส่วนที่แสดง เมทริกซ์ Ax = B เมื่อ คลิ๊กปุ่ม จะแสดงค่าผลเฉลยที่ได้ในแต่ละจุด ดังนี้



เมื่อคลิ๊กปุ่มนี้ จะปรากฏหน้าจอแสดงผลเฉลยโดยใช้วิธีเกาส์

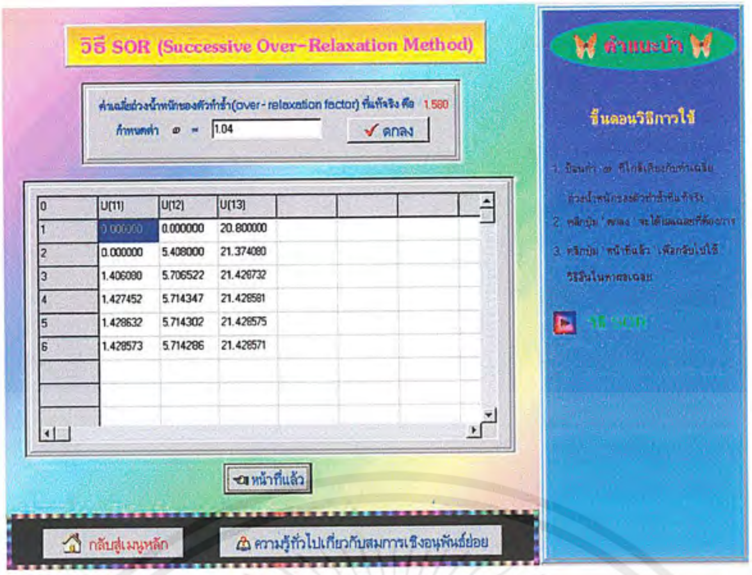




0	U(11)	U(12)	U(13)
1	0.000000	0.000000	20.000000
2	0.000000	5.000000	21.250000
3	1.250000	5.625000	21.406250
4	1.406250	5.703125	21.425781
5	1.425781	5.712891	21.428223
6	1.428223	5.714111	21.428528
7	1.428528	5.714264	21.428566
8	1.428566	5.714283	21.428571

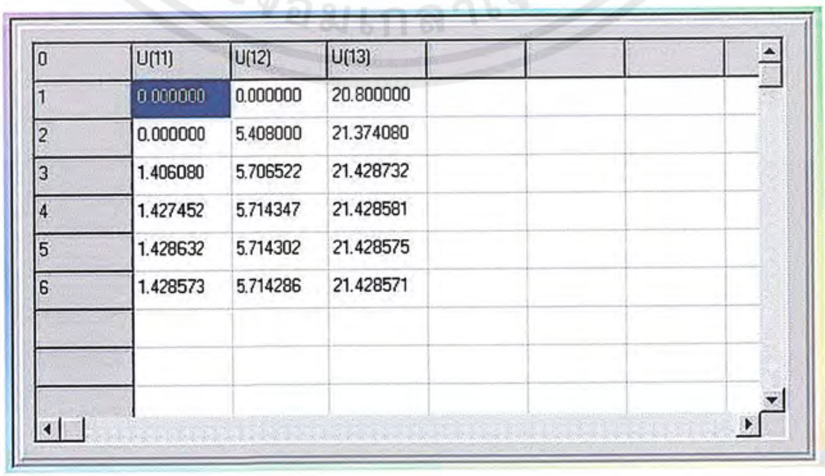
จะแสดงตารางผลเฉลยของ U(i,j) แต่ละจุด โดยในแถวของตารางจะบอกครั้งที่ของการทำซ้ำในแต่ละครั้งว่าได้ค่าผลเฉลยในแต่ละจุดเป็นเท่าใด โปรแกรมจะคำนวณซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ค่าคลาดเคลื่อนที่สามารถยอมรับได้

จะปรากฏหน้าจอดังนี้



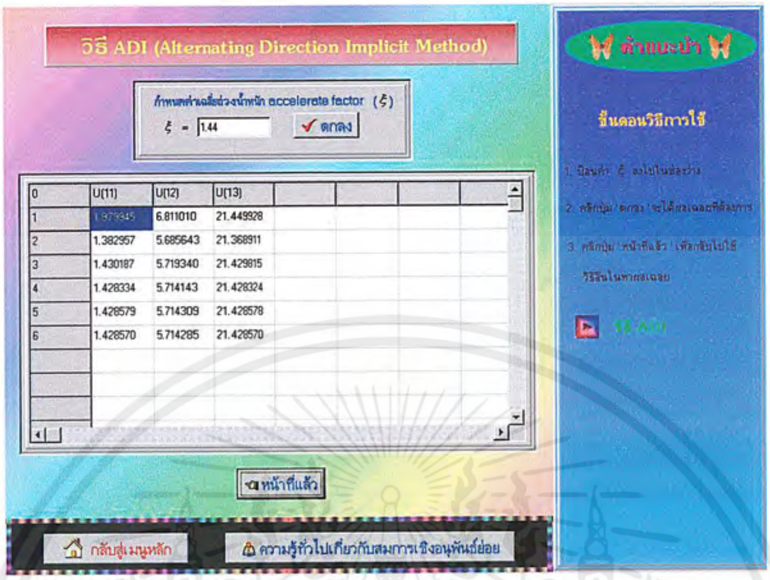
จะมีส่วนของการใส่ค่า เฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของการทำซ้ำ ซึ่งควรมีค่าน้อยกว่า ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของตัวทำซ้ำที่แท้จริง ซึ่งในที่นี้คือ 1.580 เมื่อใส่ค่าเรียบร้อยแล้วคลิ๊กปุ่ม ✔ ตกลง

จะแสดงตารางผลเฉลยในแต่ละการทำซ้ำ ของแต่ละจุด U(i,j) ดังนี้

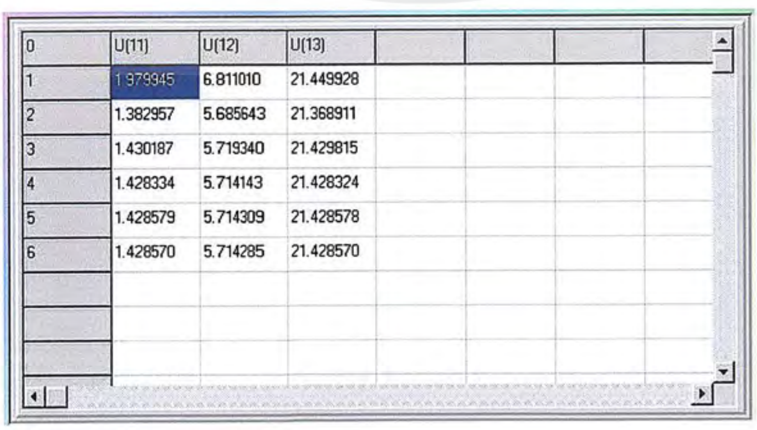


0	U(11)	U(12)	U(13)
1	0.000000	0.000000	20.800000
2	0.000000	5.408000	21.374080
3	1.406080	5.706522	21.428732
4	1.427452	5.714347	21.428581
5	1.428632	5.714302	21.428575
6	1.428573	5.714286	21.428571

จะปรากฏหน้าจอดังนี้



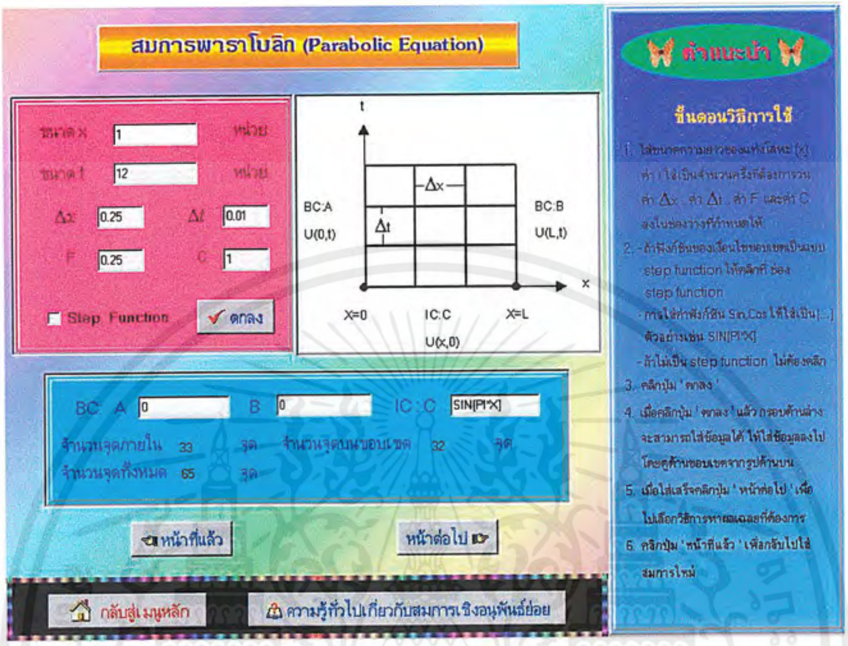
จะมีส่วนของการใส่ค่า เฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของการทำซ้ำ เช่นกัน ซึ่งจะไม่มีการกำหนดว่าค่าที่เหมาะสมคืออะไร ต้องทดลองหลายๆค่า จนกว่าจะได้ค่าที่ให้ผลเฉลยที่ถูกต้องมากที่สุด เมื่อใส่แล้วคลิ๊กปุ่ม ตกลง จะแสดงตารางผลเฉลยดังนี้

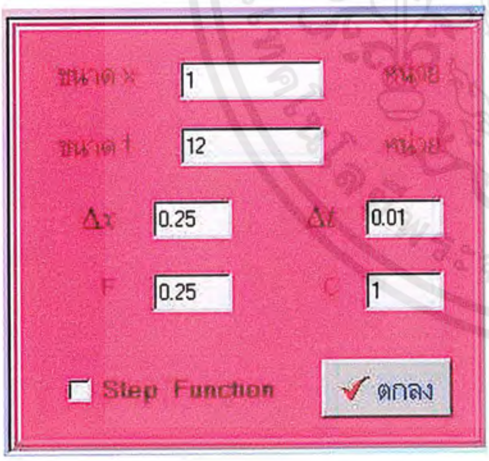


0	U(11)	U(12)	U(13)
1	1.979945	6.811010	21.449928
2	1.382957	5.685643	21.368911
3	1.430187	5.719340	21.429815
4	1.428334	5.714143	21.428324
5	1.428579	5.714309	21.428578
6	1.428570	5.714285	21.428570

สมการพาราโบลิก (Parabolic Equations)

หน้าจอของการหาผลเฉลยของสมการเชิงวงรีมีรูปแบบดังนี้



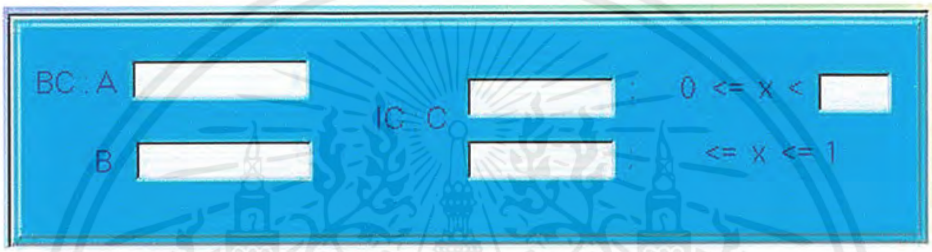


กรอบนี้ ใช้สำหรับใส่ค่าข้อมูล คือขนาด X และขนาด t เป็นความยาวของแท่งโลหะ และจำนวนขั้นเวลา ที่ต้องการหาผลเฉลย ตามลำดับ Delta X คือช่วงความกว้างของ X Delta t ช่วงความห่างเวลา

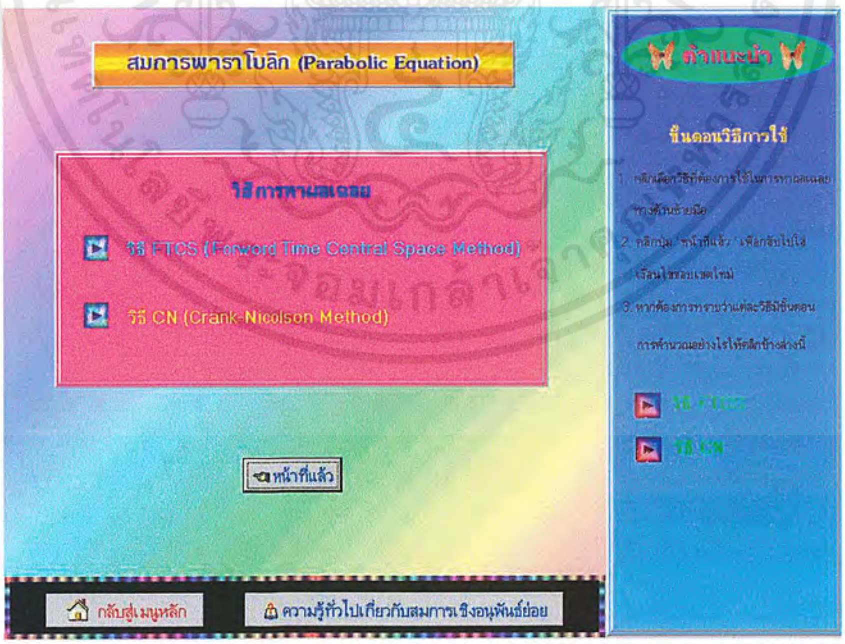
ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นมีลักษณะเป็น Step Function ให้คลิ๊กที่ Step Function ถ้าไม่เป็น ก็ไม่ต้องคลิ๊ก เมื่อใส่ข้อมูลเรียบร้อยแล้วคลิ๊ก 

ถ้าไม่เป็น Step Function จะแสดงกรอบการใส่ค่าเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

ถ้าเป็น Step Function จะแสดงกรอบการใส่ค่าเงื่อนไขขอบเขตดังนี้



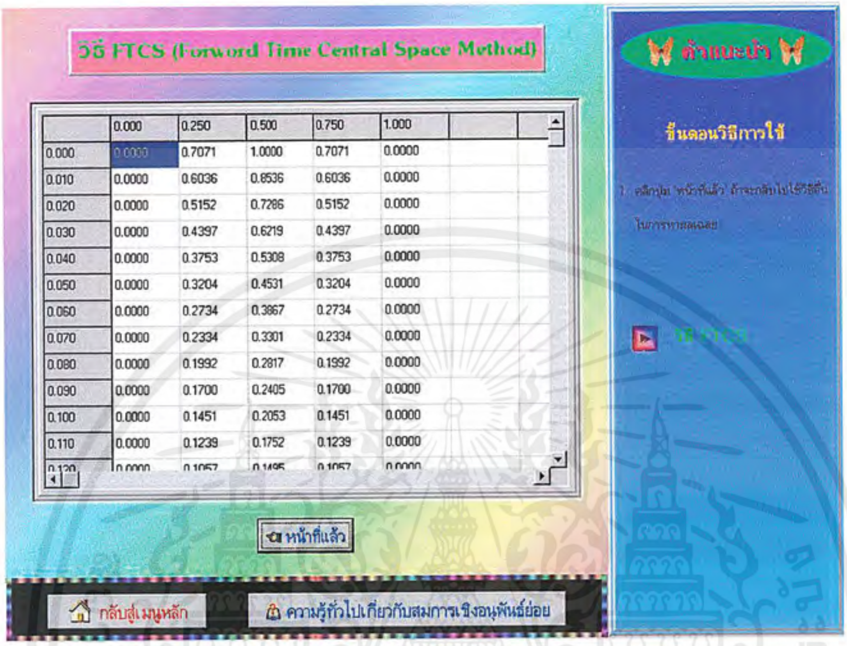
เมื่อใส่ค่าเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 เรียบร้อยแล้ว คลิ๊กปุ่ม หน้าถัดไป จะปรากฏหน้าจอ ดังนี้



เป็นหน้าจอวิธีการหาผลเฉลยแบบต่างๆ ของสมการพาราโบลิก คลิ๊กเลือกวิธีที่ใช้ จะปรากฏหน้าจอของผลเฉลย

วิธี FTCS (Forword Time Central Space Method)

จะปรากฎหน้าจอการหาผลเฉลยโดยใช้วิธี Forword Time Central Space Method ดังนี้

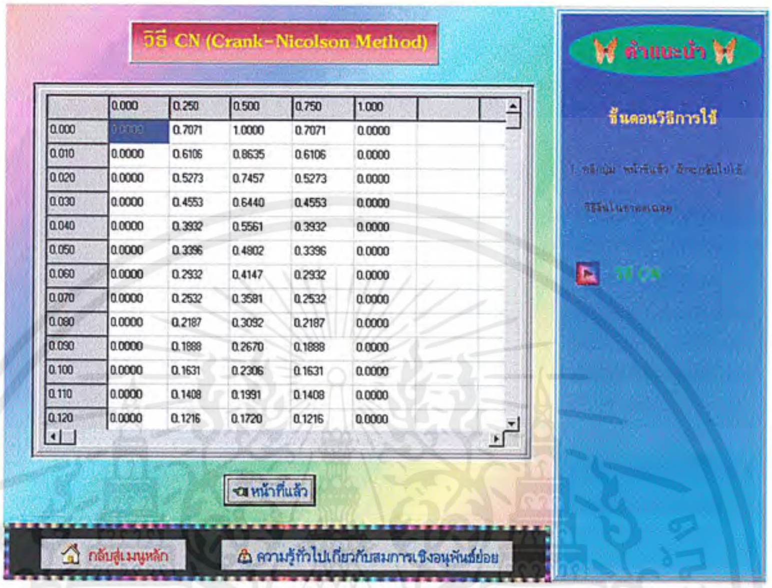


จะแสดงตารางผลเฉลยของ U(i,j) แต่ละจุด โดยในแถวของตารางจะบอกขั้นของเวลา และทางหลัก จะเป็นค่าของความยาว X ในแต่ละจะจุดว่าได้ค่าผลเฉลยในแต่ละจุดเป็นเท่าใด

	0.000	0.250	0.500	0.750	1.000	
0.000	0.0000	0.7071	1.0000	0.7071	0.0000	
0.010	0.0000	0.6036	0.8536	0.6036	0.0000	
0.020	0.0000	0.5152	0.7286	0.5152	0.0000	
0.030	0.0000	0.4397	0.6219	0.4397	0.0000	
0.040	0.0000	0.3753	0.5308	0.3753	0.0000	
0.050	0.0000	0.3204	0.4531	0.3204	0.0000	
0.060	0.0000	0.2734	0.3867	0.2734	0.0000	
0.070	0.0000	0.2334	0.3301	0.2334	0.0000	
0.080	0.0000	0.1992	0.2817	0.1992	0.0000	
0.090	0.0000	0.1700	0.2405	0.1700	0.0000	
0.100	0.0000	0.1451	0.2053	0.1451	0.0000	
0.110	0.0000	0.1239	0.1752	0.1239	0.0000	
0.120	0.0000	0.1057	0.1495	0.1057	0.0000	

วิธี CN (Crank-Nicolson Method)

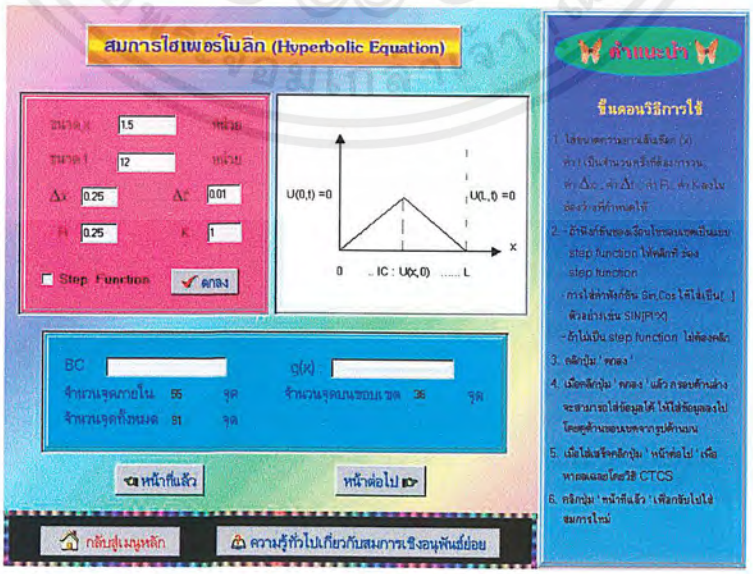
เมื่อคลิ๊กเลือกปุ่มนี้จะเป็นการหาผลเฉลยโดยใช้ วิธี Crank Nicolson ซึ่งจะแสดงตารางผลเฉลย เช่นเดียวกันกับวิธี FTCS มีหน้าจอ ดังนี้



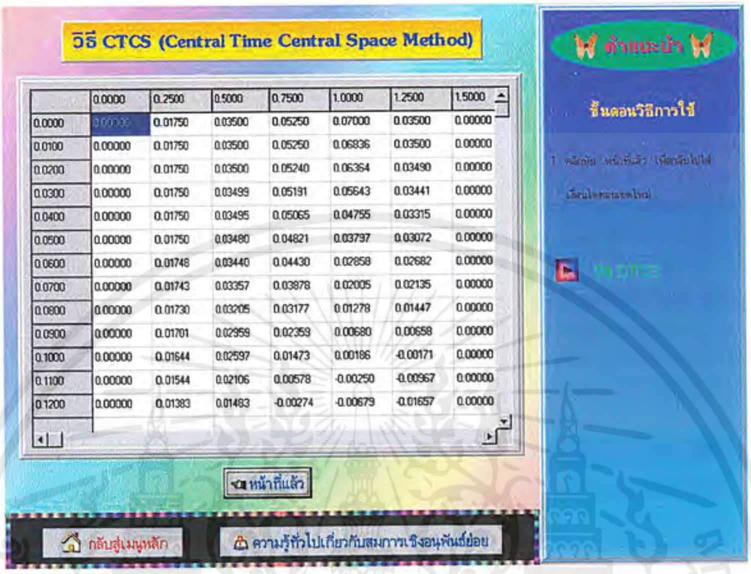
	0.000	0.250	0.500	0.750	1.000
0.000	0.0000	0.7071	1.0000	0.7071	0.0000
0.010	0.0000	0.6106	0.8635	0.6106	0.0000
0.020	0.0000	0.5273	0.7457	0.5273	0.0000
0.030	0.0000	0.4553	0.6440	0.4553	0.0000
0.040	0.0000	0.3932	0.5561	0.3932	0.0000
0.050	0.0000	0.3396	0.4802	0.3396	0.0000
0.060	0.0000	0.2932	0.4147	0.2932	0.0000
0.070	0.0000	0.2532	0.3581	0.2532	0.0000
0.080	0.0000	0.2187	0.3092	0.2187	0.0000
0.090	0.0000	0.1888	0.2670	0.1888	0.0000
0.100	0.0000	0.1631	0.2306	0.1631	0.0000
0.110	0.0000	0.1408	0.1991	0.1408	0.0000
0.120	0.0000	0.1216	0.1720	0.1216	0.0000

สมการไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Equations)

หน้าจอของการหาผลเฉลยของ สมการไฮเพอร์โบลิก มีรูปแบบดังนี้



จะมีการลักษณะการใส่ค่าข้อมูลเหมือนสมการอื่นๆที่ผ่านมา และ ในสมการไฮเพอร์โบลิก จะมีวิธีการหาผลเฉลยเพียงวิธีการเดียวเท่านั้น คือวิธี Central Time Central Space เมื่อใส่ข้อมูลเรียบร้อยแล้ว คลิ๊กปุ่ม หน้าถัดไป จะปรากฏหน้าจอดังนี้



จะแสดงตารางผลเฉลยของ U(i,j) แต่ละจุด โดยในแถวของตารางจะบอกขั้นของเวลา และทางหลัก จะเป็นค่าของความยาว X ในแต่ละจะจุดว่าได้ค่าผลเฉลยในแต่ละจุดเป็นเท่าใด

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000	1.2500	1.5000
0.0000	0.00000	0.01750	0.03500	0.05250	0.07000	0.03500	0.00000
0.0100	0.00000	0.01750	0.03500	0.05250	0.06836	0.03500	0.00000
0.0200	0.00000	0.01750	0.03500	0.05240	0.06364	0.03490	0.00000
0.0300	0.00000	0.01750	0.03499	0.05191	0.05643	0.03441	0.00000
0.0400	0.00000	0.01750	0.03495	0.05065	0.04755	0.03315	0.00000
0.0500	0.00000	0.01750	0.03480	0.04821	0.03797	0.03072	0.00000
0.0600	0.00000	0.01748	0.03440	0.04430	0.02858	0.02682	0.00000
0.0700	0.00000	0.01743	0.03357	0.03878	0.02005	0.02135	0.00000
0.0800	0.00000	0.01730	0.03205	0.03177	0.01278	0.01447	0.00000
0.0900	0.00000	0.01701	0.02959	0.02359	0.00680	0.00658	0.00000
0.1000	0.00000	0.01644	0.02597	0.01473	0.00186	-0.00171	0.00000
0.1100	0.00000	0.01544	0.02106	0.00578	-0.00250	-0.00967	0.00000
0.1200	0.00000	0.01383	0.01483	-0.00274	-0.00679	-0.01657	0.00000

เมื่อคลิ๊กปุ่มนี้จะบอกรายละเอียดที่มาที่ไปเกี่ยวกับปัญหาพิเศษ คณะผู้จัดทำ อาจารย์ที่ปรึกษา ฯลฯ

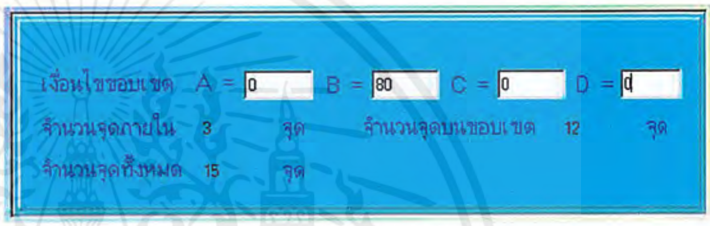
เมื่อผู้ใช้ต้องการจบการทำงานให้คลิ๊กปุ่ม 

และเลือก 

บทที่ 4
ผลจากการเปรียบเทียบ
ผลเฉลยที่ได้จากการใช้โปรแกรม กับผลเฉลยที่แท้จริง

1. **สมการเชิงวงรี** (Elliptic Equation)

เมื่อพิจารณา ปัญหาความร้อนที่ไหลสม่ำเสมอ 2 มิติของแผ่นสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งพื้นผิวทั้ง 2 ด้าน สามารถกันความร้อนได้มีขนาด $1m \times 2m$ และ Dirichlet BCs $0°C$, $0°C$, $0°C$ และ $80°C$ ที่ขอบทั้ง 4 แผ่นโลหะถูกแบ่งให้เป็นระบบ grid ซึ่งขนาดของ grid เป็นค่าคงที่ $\Delta x = \Delta y = 0.5\,m$



ใส่ค่าต่างๆ ตามที่โจทย์กำหนดลงใน หน้าจอของโปรแกรม จะได้ผลเฉลยดังนี้

- **วิธีโดยตรง**

U(11)	1.4286
U(12)	5.7143
U(13)	21.4286

- **วิธี** Gauss

0	U(11)	U(12)	U(13)
1	0.000000	0.000000	20.000000
2	0.000000	5.000000	21.250000
3	1.250000	5.625000	21.406250
4	1.406250	5.703125	21.425781
5	1.425781	5.712891	21.428223
6	1.428223	5.714111	21.428528
7	1.428528	5.714264	21.428566
8	1.428566	5.714283	21.428571

- **วิธี** Successive Over-Relaxation (SOR)

เมื่อกำหนด ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของการทำซ้ำ เท่ากับ 1.04

0	U(11)	U(12)	U(13)
1	0.000000	0.000000	20.800000
2	0.000000	5.408000	21.374080
3	1.406080	5.706522	21.428732
4	1.427452	5.714347	21.428581
5	1.428632	5.714302	21.428575
6	1.428573	5.714286	21.428571

- **วิธี** Alternating Direction Implicit (ADI)

เมื่อกำหนด ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของการทำซ้ำ เท่ากับ 1.04

0	U(1,1)	U(1,2)	U(1,3)
1	2.026900	6.891460	21.404062
2	1.377638	5.685497	21.358242
3	1.430317	5.720532	21.429713
4	1.428259	5.714141	21.428240
5	1.428579	5.714319	21.428578
6	1.428570	5.714285	21.428570

เปอร์เซนต์ค่าคลาดเคลื่อน ได้มาจาก $\left(\frac{Numerical - Exact}{Exact}\right)\times 100$

ตารางการเปรียบเทียบผลเฉลย

	ผลเฉลยที่แท้จริง	ผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม	เปอร์เซนต์ค่าคลาดเคลื่อน
$u(1,1)$	0.8755	1.4286	63.18
$u(1,2)$	4.3908	5.7143	30.14
$u(1,3)$	20.8755	21.4286	2.65

ตารางการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากแต่ละวิธี

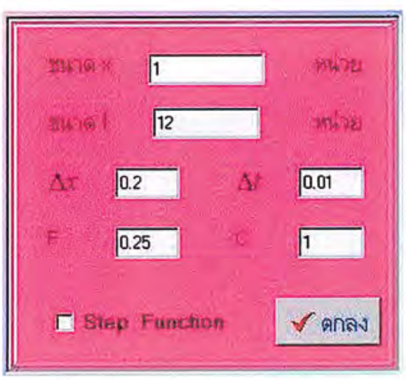
Iteration	Gauss-Seidel			SOR ($\omega = 1.04$)			ADI ($\xi = 1.4$)		
	$u(1,1)$	$u(1,2)$	$u(1,3)$	$u(1,1)$	$u(1,2)$	$u(1,3)$	$u(1,1)$	$u(1,2)$	$u(1,3)$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	20.0000	0.0000	0.0000	20.8000	2.0269	6.8915	21.4041
2	0.0000	5.0000	21.2500	0.0000	5.4080	21.3741	1.3776	5.6855	21.3582
3	1.2500	5.6250	21.4063	1.4061	5.7065	21.4287	1.4303	5.7205	21.4297
4	1.4063	5.7031	21.4258	1.4275	5.7143	21.4286	1.4283	5.7142	21.4282
5	1.4258	5.7129	21.4282	1.4286	5.7143	21.4286	1.4286	5.7143	21.4286
6	1.4282	5.7141	21.4285	1.4286	5.7143	21.4286	1.4286	5.7143	21.4286
7	1.4285	5.7143	21.4286						
8	1.4286	5.7143	21.4286						
9	1.4286	5.7143	21.4286						

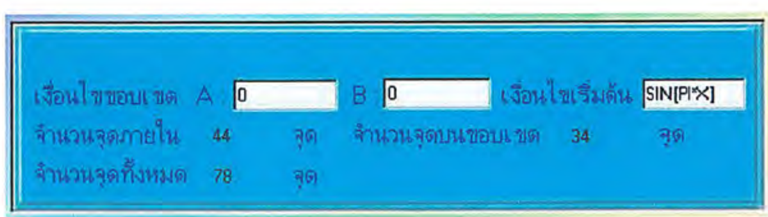
2. **สมการพาราโบลิก** (Parabolic Equation)

เมื่อ $\Delta x = 0.2\,m$ ให้หาอุณหภูมิที่กระจายในหน่วยองศาเซลเซียส ในแท่งโลหะที่หุ้มฉนวน ซึ่งมีความยาว $1\ m$ และที่จุดปลายมีอุณหภูมิ $0°C$ กำหนดให้ $c = 1m/s^{0.5}$ และอุณหภูมิเริ่มต้น คือ $u(x,0) = \sin \pi x$

- **วิธี** Forword Time Central Space (FTCS)

โดยกำหนด $F = 0.25$





ใส่ค่าต่างๆ ตามที่โจทย์กำหนดลงใน หน้าจอของโปรแกรม จะได้ผลเฉลยดังนี้

	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
0.000	0.0000	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878	0.0000
0.010	0.0000	0.5317	0.8602	0.8602	0.5317	0.0000
0.020	0.0000	0.4809	0.7781	0.7781	0.4809	0.0000
0.030	0.0000	0.4350	0.7038	0.7038	0.4350	0.0000
0.040	0.0000	0.3934	0.6366	0.6366	0.3934	0.0000
0.050	0.0000	0.3559	0.5758	0.5758	0.3559	0.0000
0.060	0.0000	0.3219	0.5208	0.5208	0.3219	0.0000
0.070	0.0000	0.2911	0.4711	0.4711	0.2911	0.0000
0.080	0.0000	0.2633	0.4261	0.4261	0.2633	0.0000
0.090	0.0000	0.2382	0.3854	0.3854	0.2382	0.0000
0.100	0.0000	0.2154	0.3486	0.3486	0.2154	0.0000
0.110	0.0000	0.1949	0.3153	0.3153	0.1949	0.0000
0.120	0.0000	0.1763	0.2852	0.2852	0.1763	0.0000

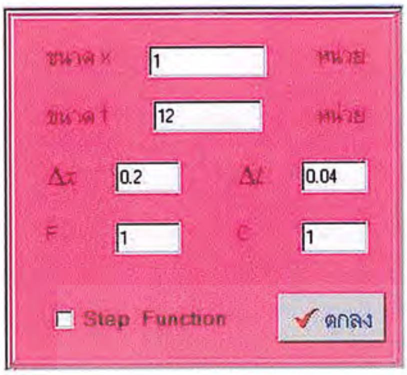
ซึ่งผลเฉลยที่แท้จริงคือ ที่ $x = 0.4$ คือ

ตารางการเปรียบเทียบผลเฉลย

t	ผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม	ผลเฉลยที่แท้จริง	เปอร์เซนต์ค่าคลาดเคลื่อน
0.00	0.9511	0.9511	0
0.01	0.8602	0.8617	-0.17
0.02	0.7781	0.7807	-0.33
0.03	0.7038	0.7073	-0.49
0.04	0.6336	0.6408	-0.66
0.05	0.5758	0.5806	-0.83
0.06	0.5208	0.5261	-1.01
0.07	0.4711	0.4766	-1.15
0.08	0.4261	0.4318	-1.32
0.09	0.3854	0.3912	-1.48
0.10	0.3486	0.3545	-1.66
0.11	0.3153	0.3212	-1.84
0.12	0.1763	0.2910	-1.99

-วิธี Crank – Nicolson (CN)

โดยกำหนด $F = 1$



ใส่ค่าต่างๆ ตามที่โจทย์กำหนดลงใน หน้าจอของโปรแกรม จะได้ผลเฉลยดังนี้

	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000
0.000	0.0000	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878	0.0000
0.040	0.0000	0.3993	0.6460	0.6460	0.3993	0.0000
0.080	0.0000	0.2712	0.4388	0.4388	0.2712	0.0000
0.120	0.0000	0.1842	0.2981	0.2981	0.1842	0.0000
0.160	0.0000	0.1251	0.2025	0.2025	0.1251	0.0000
0.200	0.0000	0.0850	0.1376	0.1376	0.0850	0.0000
0.240	0.0000	0.0577	0.0934	0.0934	0.0577	0.0000
0.280	0.0000	0.0392	0.0635	0.0635	0.0392	0.0000
0.320	0.0000	0.0266	0.0431	0.0431	0.0266	0.0000
0.360	0.0000	0.0181	0.0293	0.0293	0.0181	0.0000
0.400	0.0000	0.0123	0.0199	0.0199	0.0123	0.0000
0.440	0.0000	0.0084	0.0135	0.0135	0.0084	0.0000
0.480	0.0000	0.0057	0.0092	0.0092	0.0057	0.0000
0.520	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

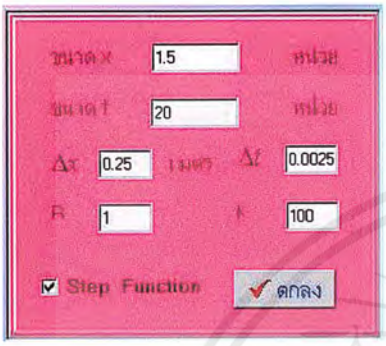
ตารางเปรียบเทียบผลเฉลยของแต่ละวิธี

	$u(x,t)$					
	วิธี FTCS $(F = 0.05, t = 0.1)$		วิธี CN $(F = 1, \Delta t = 0.04)$		ผลเฉลยที่แท้จริง	
t	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.2$	$x = 0.4$
0.00	0.5878	0.9511	0.5878	0.9511	0.5878	0.9511
0.04	0.3934	0.6366	0.3993	0.6460	0.3961	0.6408
0.08	0.2633	0.4261	0.2712	0.4388	0.2669	0.4318
0.12	0.1763	0.2852	0.1842	0.2981	0.1798	0.2910

3. **สมการไฮเพอร์โบลิก** (Hyperbolic Eqution)

- **วิธี** Central Time Central Space (CTCS)

เส้นเชือก ถูกตรึงจุดปลายทั้งสอง มีความยาว $L = 1.5\ m, k = 100\, m/s$ เส้นเชือกถูกดึงขึ้น และปล่อยจากจุดหยุดนิ่ง โดยให้ $\Delta x = 0.25\ m,\ \Delta t = 0.0025\ \ s$ และ $R = 1$ ให้หาค่า deflection ของเส้นเชือก



ใส่ค่าต่างๆ ตามที่โจทย์กำหนดลงใน หน้าจอของโปรแกรม จะได้ผลเฉลยดังนี้

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000	1.2500	1.5000
0.0000	0.00000	0.01750	0.03500	0.05250	0.07000	0.03500	0.00000
0.0025	0.00000	0.01750	0.03500	0.05250	0.04375	0.03500	0.00000
0.0050	0.00000	0.01750	0.03500	0.02625	0.01750	0.00875	0.00000
0.0075	0.00000	0.01750	0.00875	0.00000	-0.00875	-0.01750	0.00000
0.0100	0.00000	-0.00875	-0.01750	-0.02625	-0.03500	-0.01750	0.00000
0.0125	0.00000	-0.03500	-0.04375	-0.05250	-0.03500	-0.01750	0.00000
0.0150	0.00000	-0.03500	-0.07000	-0.05250	-0.03500	-0.01750	0.00000
0.0175	0.00000	-0.03500	-0.04375	-0.05250	-0.03500	-0.01750	0.00000
0.0200	0.00000	-0.00875	-0.01750	-0.02625	-0.03500	-0.01750	0.00000
0.0225	0.00000	0.01750	0.00875	0.00000	-0.00875	-0.01750	0.00000
0.0250	0.00000	0.01750	0.03500	0.02625	0.01750	0.00875	0.00000
0.0275	0.00000	0.01750	0.03500	0.05250	0.04375	0.03500	0.00000
0.0300	0.00000	0.01750	0.03500	0.05250	0.07000	0.03500	0.00000
0.0325	0.00000	0.01750	0.03500	0.05250	0.04375	0.03500	0.00000

ตารางผลเฉลยที่แท้จริง

t	$u(x,t)$						
	$x=0$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
0.0000	0	0.01750	0.03500	0.05251	0.06968	0.03500	0
0.0025	0	0.01750	0.03500	0.05234	0.04375	0.03484	0
0.0050	0	0.01750	0.03484	0.02625	0.01750	0.00875	0
0.0075	0	0.01734	0.00875	0.00000	-0.00875	-0.01734	0
0.0100	0	-0.00875	-0.01750	-0.2625	-0.03484	-0.01750	0
0.0125	0	-0.03484	-0.04375	-0.05234	-0.03500	-0.01750	0
0.0150	0	-0.03500	-0.06968	-0.05251	-0.03500	-0.01750	0
0.0175	0	-0.03484	-0.04375	-0.05234	-0.03500	-0.01750	0
0.0200	0	-0.00875	-0.01750	-0.02625	-0.03484	-0.01750	0
0.0225	0	0.01734	0.00875	0.00000	-0.00875	-0.01734	0
0.0250	0	0.01750	0.03484	0.02625	0.01750	0.00875	0
0.0275	0	0.01750	0.03500	0.05234	0.04375	0.03484	0
0.0300	0	0.01750	0.03500	0.05251	0.06968	0.03500	0
0.0325	0	0.01750	0.03500	0.05234	0.04375	0.03484	0
0.0350	0	0.01750	0.03484	0.2625	0.01750	0.00875	0
0.0375	0	0.01734	0.00875	0.00000	-0.00875	-0.01734	0

จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แท้จริง

บทที่ 5
การประเมินผล

ผลการประเมินจากการทดลองโปรแกรมผลต่างสืบเนื่องสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

1. ความดึงดูดความสนใจในการใช้โปรแกรม

เนื่องจากรูปแบบและสีที่ใช้ในการตกแต่งหน้าจอมีลักษณะที่โดดเด่นและสะดุดตา โดยใช้ตัวอักษรหลากสี และมีการนำรูปภาพมาช่วยเพิ่มสีสันให้แก่หน้าจอ ทำให้ผู้ใช้ไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการใช้โปรแกรม

2. ความสะดวกในการใช้งานของผู้ใช้

เนื่องจากโปรแกรมออกแบบมาให้ง่ายต่อการเข้าใจและง่ายต่อการนำไปใช้ โดยมีคำแนะนำอยู่ด้านขวาของทุกหน้าจอ ซึ่งจะอธิบายถึงวิธีการใช้โปรแกรม การป้อนข้อมูล รวมทั้งยังมีส่วนของเนื้อหาที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอธิบายไว้ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถเข้าใจเนื้อหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้มากขึ้น

3. ความเข้าใจในสิ่งที่โปรแกรมต้องการสื่อต่อผู้ใช้

วัตถุประสงค์ที่โปรแกรมต้องการสื่อต่อผู้ใช้คือ ต้องการให้ผู้ใช้สามารถใช้โปรแกรมนี้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว รวมทั้งยังต้องการให้ผู้ใช้เข้าใจในส่วนของเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้

4. ความพิเศษของโปรแกรม

ความพิเศษของโปรแกรมนี้คือ สามารถเปรียบเทียบผลเฉลยที่หาได้จากวิธีต่างๆ โดยสามารถใช้โจทย์เดียวกันในแต่ละรูปแบบสมการได้ และโปรแกรมนี้สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยวิธี Analytic

บทที่ 6
สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

1. สรุปผล

โปรแกรมผลต่างสืบเนื่องสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เป็นโปรแกรมสำหรับหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งจะทำให้ได้ผลเฉลยที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แท้จริงมาก นอกจากโปรแกรมหาผลเฉลยแล้วยังมีส่วนของ Help ช่วยอธิบายขั้นตอนวิธีการใช้โปรแกรม การป้อนข้อมูล และยังมีส่วนของเนื้อหาที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเช่น อธิบายรูปแบบลักษณะของสมการ วิธีการหาผลเฉลยของแต่ละวิธี เพื่อช่วยให้ผู้ใช้เข้าใจเกี่ยวกับสมการ และสามารถใช้โปรแกรมได้สะดวกยิ่งขึ้น

2. ข้อจำกัดของโปรแกรม

1. เนื่องจากเป็นโปรแกรมที่หาผลเฉลยโดยวิธีเชิงตัวเลข จึงมีค่าคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยที่แท้จริง
2. หาผลเฉลยของสมการ 2 มิติได้เท่านั้น
3. จะสามารถหาผลเฉลยของสมการที่มีระบบ grid เป็นแบบสม่ำเสมอเท่านั้น
4. การใส่ค่าฟังก์ชัน สามารถใส่ฟังก์ชัน Sine และ Cosine ได้ สามารถใส่เป็นฟังก์ชัน Polynomial ได้ ส่วนพวก Logarithm ต่าง ๆ ยังไม่สามารถใส่ได้

3. ข้อเสนอแนะ

1. เนื่องจากในปัจจุบันการทำงานบนเครือข่ายอินเตอร์เน็ตกำลังเป็นที่นิยมกัน จึงน่าจะได้มีการนำโปรแกรมนี้ขึ้นใช้บนเครือข่าย เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้ที่สนใจได้เข้ามาใช้โปรแกรม
2. ควรจะทำให้โปรแกรมสามารถหาผลเฉลยของสมการที่มากกว่า 2 มิติได้
3. ควรจะมีการเขียนโปรแกรมในส่วนที่ติดต่อกับเครื่องพิมพ์ เพื่อสามารถสั่งพิมพ์ผลลัพธ์ออกทางเครื่องพิมพ์ได้
4. ควรจะมีการเขียนโปรแกรมในส่วนของการใส่ค่าฟังก์ชันให้สามารถรับฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ , ฟังก์ชันกำลัง , ฟังก์ชันลอการิทึม , ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก และฟังก์ชันผกผันต่าง ๆ ได้

ภาคผนวก

ผลเฉยของระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น

ระบบของสมการเชิงเส้นหลายชั้น n ในตัวไม่ทราบค่า n เขียนเป็น

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad . \qquad . \qquad\quad . \qquad . \\
\quad . \qquad . \qquad\quad . \qquad . \\
\quad . \qquad . \qquad\quad . \qquad . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์

$$Ax = b$$

ที่

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}
$$

เมทริกซ์ A, x และ b เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์, เมทริกซ์หลักไม่ทราบค่า และเมทริกซ์ค่าคงที่ตามลำดับ ระบบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์เชิงเดียว

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}
$$

เรียกว่า เมทริกซ์แต่งเติม ซึ่งตัด x ออก และ A มี b เพิ่มขึ้นมา

วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลเฉลยของระบบของสมการเชิงเส้นหลายชั้น ซึ่งคือ วิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยของ PDEs อธิบายในบทความนี้

Gauss Elimination Method

วิธีนี้จะแปลงระบบให้เป็นระบบสามเหลี่ยมบนจะใช้การหาตัวหลักบางส่วน(partial pivoting) ทำให้มีความแม่นยำสูงขึ้น สามารถลดค่า round-off errors แต่การหาตัวหลักจะไม่สามารถทำได้ในกรณีที่ทุกสมาชิกในแนวทแยงเป็นศูนย์ การหารด้วยศูนย์จะเกิดขึ้น และการกำจัดไม่สามารถทำได้ นอกจากว่าจะทำการย้ายแถวที่มีสมาชิกในแนวทแยงที่เป็นศูนย์ ดังนั้นสมาชิกในแนวทแยงต้องไม่มีศูนย์ วิธีการจะแสดงในตัวอย่าง เราจะสร้างเมทริกซ์อาร์กิวเมนต์ไปพร้อมๆ กับระบบสมการ

<u>ตัวอย่าง</u>

พิจารณาระบบของสมการ 4 สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 4 ตัว กำหนดโดย

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

ขั้นการกำจัด ทำการหาตัวหลักบางส่วน ดูสัมประสิทธิ์ในหลักที่ 1 ว่าแถวใดมีค่ามากที่สุด ไม่สนใจเครื่องหมาย (เรียกว่า แถวตัวหลัก) สลับกับแถวที่ 1 เดิม ระบบจะกลายเป็น

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

นำสมาชิกใน 3 แถวล่างมาหาค่าใหม่ โดยทำให้สมาชิกใน 3 แถวแรกที่อยู่ในหลัก 1 เป็นศูนย์ โดย

$$Row2 = Row2 - \frac{1}{2} \times Row1$$

$$Row3 = Row3 - \frac{1}{2} \times Row1$$

$$Row4 = Row4 - \frac{1}{2} \times Row1$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_4 &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{7}{2}x_4 &= \frac{5}{2} \\ -\frac{11}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

เราจะไม่นำแถวที่ 1 และหลักที่ 1 มาพิจารณา จะได้ว่า ในแถวที่ 4 สมาชิกตัวหลักมีค่ามากที่สุด คือ 11/4 ทำการสลับกับแถวที่ 2 ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -\frac{11}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{15}{4} \\ -\frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{7}{2}x_4 &= \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_4 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

กำจัดค่าของสมาชิก 2 ตัวล่างในหลักที่ 2 โดย

$$Row3 = Row3 - \frac{6}{11} \times Row2$$

$$Row4 = Row4 + \frac{6}{11} \times Row2$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{37}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{29}{11} & \frac{17}{11} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -\frac{11}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{15}{4} \\ \frac{13}{11}x_3 + \frac{37}{11}x_4 &= \frac{5}{11} \\ \frac{9}{11}x_3 + \frac{29}{11}x_4 &= \frac{17}{11} \end{aligned}$$

ไม่นำแถวที่ 2 และหลักที่ 2 มาพิจารณา ไม่ต้องทำการสลับแถว เพราะสมาชิกตัวหลักคือ 13/11 กำจัดสมาชิกตัวล่าง โดย

$$Row4 = Row4 - \frac{9}{13} \times Row3$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{37}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{13} & \frac{16}{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -\frac{11}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4 &= \frac{15}{4} \\ \frac{13}{11}x_3 + \frac{37}{11}x_4 &= \frac{5}{11} \\ \frac{4}{13}x_4 &= \frac{16}{13} \end{aligned}$$

ได้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในรูปของสามเหลี่ยมบน, ผลเฉลยสามารถหาได้จากวิธีการแทนค่าย้อนหลัง เพราะฉะนั้น จากแถวสุดท้าย (แถวที่ 4) จะได้

$$x_4 = 4$$

แทนค่า x_4 ในแถวที่ 3 จะได้

$$x_3 = \frac{11}{13}\left(\frac{5}{11} - \frac{37}{11} \times 4\right) = -11$$

แทนค่า x_4 และ x_3 ในแถวที่ 2 จะได้

$$x_2 = -\frac{4}{11}\left(\frac{15}{4} - \frac{3}{2} \times (-11) - \frac{1}{4} \times 4\right) = -7$$

แทนค่า x_4 , x_3 และ x_2 ในแถวที่ 1 จะได้

$$x_1 = \frac{1}{4}\left[1 - 3 \times (-7) + 2 \times (-11) - 3 \times 4\right] = -3$$

วิธีการ Gauss elimination สามารถใช้กับระบบทั่วไปของสมการ n สมการ ซึ่งมีตัวไม่ทราบค่า n ตัว กำหนดโดย

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \dots & a_{3n} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \dots & a_{4n} & b_4 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

โดยให้ $Row2 = Row2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \times Row1$ สมาชิก ในแถวที่ 2 จะกลายเป็น

$$\left(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}\right) \quad \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right) \dots \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right) \quad \left(b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1\right)$$

สมาชิกตัวแรก จะกลายเป็นศูนย์

ให้

$$Row3 = Row3 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \times Row1$$

$$\vdots$$

$$Row\,n = Row\,n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \times Row1$$

เมทริกซ์อาร์กิวเมนต์ จะกลายเป็น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & a_{24}^1 \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & a_{34}^1 \dots & a_{3n}^1 & b_3^1 \\ 0 & a_{42}^1 & a_{43}^1 & a_{44}^1 \dots & a_{4n}^1 & b_4^1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 & a_{n4}^1 \dots & a_{nn}^1 & b_n^1 \end{bmatrix}$$

สมาชิกทุกตัวที่อยู่ต่ำกว่าสมาชิกแนวทแยงตัวแรก จะถูกกำจัด จะเห็นว่าถ้าสมาชิกตัวหลัก a_{11} เป็นศูนย์ จะไม่สามารถทำการกำจัดได้ และการหาตัวหลักบางส่วน ต้องใช้การกำจัดก่อนหน้า

ต่อไปไม่พิจารณาแถวที่ 1 และหลักที่ 1 แล้วทำซ้ำวิธีการเดิม จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & a_{24}^1 \ldots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & a_{34}^2 \ldots & a_{3n}^2 & b_3^2 \\ 0 & 0 & a_{43}^2 & a_{44}^2 \ldots & a_{4n}^2 & b_4^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{n3}^2 & a_{n4}^2 \ldots & a_{nn}^2 & b_n^2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมาชิกทุกตัวที่อยู่ต่ำกว่าสมาชิกแนวทแยงตัวที่สองจะถูกกำจัด ถ้าสมาชิกตัวหลัก a_{22}^1 เป็นศูนย์ จะไม่สามารถทำการกำจัดได้ และต้องใช้การกำจัดก่อนหน้า

ทำซ้ำวิธีการเดิม สุดท้ายเมทริกซ์สัมประสิทธิ์จะอยู่ในรูปของ เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน และเมทริกซ์อาร์กิวเมนต์ จะกลายเป็น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & a_{24}^1 \ldots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & a_{34}^2 \ldots & a_{3n}^2 & b_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^3 \ldots & a_{4n}^3 & b_4^3 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ทำการแทนค่าย้อนหลัง จนเสร็จ จะได้ผลเฉลยทั่วไปในรูปของ $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$

บรรณานุกรม

1. จารุวรรณ ระวิภักตร์. 2540. **รู้ลึก รู้จริง! Style Borland Delphi.** กรุงเทพฯ : บริษัท เฟิสท์ แปซิฟิก มีเดีย (ไทยแลนด์) จำกัด
2. สันติชัย หอมฟุ้ง. 2542. "ดึงภาพ Gif Animation มาใช้งานใน Delphi." **Windowsmagazine.** 7(76) : 146-147
3. Dennis G.Zill and Michael Cullen. **Diffential Equation with Boundary value problem.** 2^{nd} Ed. New York : McGraw_Hill International Book Company. 1995.
4. Ghung-Yau Lam. **Applied Numerical Method For Partial Differencetial Equations.** Prentice-Hall,Inc. 1994.