

โปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN FOURIER SERIES
AND ITS APPLICATIONS



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เลขที่.....
เลขทะเบียน..... 36151
วัน, เดือน, ปี 1 1 ค.ศ. 2543

ปีการศึกษา 2542

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN FOURIER SERIES
AND ITS APPLICATIONS



A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 1999

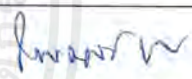
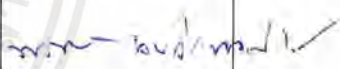
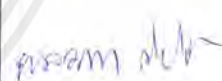

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ โปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์
COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION IN FOURIER SERIES
AND ITS APPLICATIONS

ชื่อนักศึกษา นางสาวฐิติพร ลาภพิเชษฐ 39054106
นางสาวณัฐภรณ์ บุญมี 39054108
นางสาวชिरญา บัววิจิตร 39054138

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์อุบลวรรณ เงินวิจิตร
รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้รับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2542

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ อาจารย์ไพโรบลย์ พันธรัักษ์พงษ์	
กรรมการ อาจารย์พรชัย เงินจระพงค์เวช	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์อุบลวรรณ เงินวิจิตร	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล	



(อาจารย์ไพโรบลย์ พันธรัักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวฐิติพร ลามพิเชฐ	39054106
	นางสาวณัฐภรณ์ บุญมี	39054108
	นางสาวชिरญา บัววิจิตร	39054138
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2542	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์อุบลวรรณมา เงินวิจิตร	
	รองศาสตราจารย์ภักดีณี ชิตสกุล	

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของโครงการปัญหาพิเศษนี้คือ การสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ เริ่มต้นด้วยการจัดทำทเรียนโดยแบ่งการทำงานออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนเนื้อหาและแบบฝึกหัด ขั้นตอนต่อไปคือการพัฒนาโปรแกรมโดยใช้ Microsoft Visual Basic เวอร์ชัน 6 และขั้นตอนสุดท้ายคือ การประเมินผล ทดสอบ และแก้ไขความผิดพลาดของโปรแกรมซึ่งโปรแกรมช่วยสอนนี้สามารถเป็นแนวทางแก่นักศึกษาที่กำลังศึกษาในหัวข้อนี้ และผู้ที่สนใจที่จะศึกษาและพัฒนาโปรแกรมต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	Computer Assisted Instruction in Fourier Series and Its Applications	
Students	Miss Thitiporn Lappichate	39054106
	Miss Nattaporn Boonme	39054108
	Miss Wachiraya Buavijit	39054138
Degree	Bachelor's Degree of Science	
Department	Mathematics and Computer Sciences ,Faculty of Science	
Programme	Applied Mathematics	
Academic Year	1999	
Special Project Advisor	Associate Professor Ubonwana Ngeunwjit	
	Associate Professor Pakkenee Chettsakhun	



ABSTRACT

The purpose of this special topic is to building CAI in ' Fourier Series and Its Applications'. The first session is designed courseware. There are two modules that are tutorial and practice in program. The next step, application development by using Microsoft Visual Basic 6.0. The final step is evaluating, testing and debugging program. Besides, this software is very useful for student and user who studying in this topic and also for anybody who want to develop this software in the future.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง โปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์อุบลวรรณนา เงินวิจิตร และ รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ เรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ยปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอบคุณพี่ สำหรับบทความย่อภาษาอังกฤษ และ พี่ต้น ที่ช่วยหาโปรแกรม Microsoft work shop ให้ด้วย

ขอบคุณเพื่อนๆ สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ทั้ง 30 คนที่ช่วยเสนอแนะและแสดงความคิดเห็นและแรงงานยามที่จำเป็น

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2543

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	V
สารบัญภาพ.....	VI
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	1
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน	1
บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน	3
2.1 ความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....	3
2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....	3
2.3 องค์ประกอบของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....	4
2.4 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....	5
2.5 การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....	6
2.6 ผังโครงสร้างบทเรียน.....	7
2.7 ข้อดีและข้อจำกัดของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน.....	14
บทที่ 3 ขั้นตอนการออกแบบโปรแกรม.....	16
3.1 ลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์.....	16
3.2 ขั้นตอนการออกแบบโปรแกรม.....	16
3.3 โปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์.....	16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4	อนุกรมฟูรีเยร์	18
4.1	ฟังก์ชันคาบและอนุกรมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	18
4.2	อนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	19
4.3	ฟังก์ชันที่มีคาบ $p = 2L$	23
4.4	ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่	24
4.5	การแผ่ขยายครึ่งช่วงคาบ	26
4.6	รูปแบบเชิงซ้อนของอนุกรมฟูรีเยร์	28
บทที่ 5	อินทิกรัลฟูรีเยร์และการแปลงฟูรีเยร์	31
5.1	อินทิกรัลฟูรีเยร์	31
5.2	อินทิกรัลฟูรีเยร์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	34
5.3	การคำนวณหาค่าของอินทิกรัล	35
5.4	การแปลงฟูรีเยร์	36
5.5	การแปลงฟูรีเยร์และสมการความร้อน	42
บทที่ 6	ตัวอย่างการประยุกต์ของอนุกรมฟูรีเยร์	53
6.1	ตัวอย่างการประยุกต์ในทางคณิตศาสตร์และทางฟิสิกส์	53
6.2	ตัวอย่างการประยุกต์ทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้า	55
บทที่ 7	การแปลงฟูรีเยร์แบบไม่ต่อเนื่อง	62
7.1	เลขยกกำลังเชิงซ้อนไม่ต่อเนื่อง	62
7.2	การแปลงฟูรีเยร์แบบไม่ต่อเนื่อง	69
7.3	คุณสมบัติของ DFT	78
7.4	คุณสมบัติของ F_n สำหรับ f_k จำนวนจริง	79
บทที่ 8	การแปลงฟูรีเยร์อย่างรวดเร็ว	83
8.1	หลักการเบื้องต้นของ FFT	83
8.2	การคำนวณ FFT แบบฐานสองของ COOLEY และ TOKEY	86
8.3	ขั้นตอนวิธีของการสับทางเวลา (DIT)	89
8.4	ขั้นตอนวิธีการสับทางความถี่ (DIF)	95

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8.5 การแปลง FFT สำหรับ N ใดๆ	98
บทที่ 9 ผลการทดลอง.....	102
บทที่ 10 การอภิปรายผล.....	119
บทที่ 11 บทสรุปและข้อเสนอแนะ.....	120
ภาคผนวก.....	121
บรรณานุกรม.....	126



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
7.1 ตารางค่าความจริง modulo-8	63
7.2 DFT Line Spectrum ของตัวอย่างที่ 5.6	77



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
2.1 สัญลักษณ์ในการวางผังโครงสร้างของบทเรียน.....	7
2.2 ผังโครงสร้างแบบเส้นทางเดียว.....	8
2.3 ผังโครงสร้างแบบแตกกิ่ง.....	8
2.4 ผังโครงสร้างแบบซ้ำการอบเดิม.....	9
2.5 ผังโครงสร้างแบบทดสอบก่อนซ้ำการอบ.....	9
2.6 ผังโครงสร้างแบบซ้ำการอบและย้อนการอบ.....	10
2.7 ผังโครงสร้างแบบทางเดินหลายเส้น.....	10
2.8 ผังแบบกรอบล้อมเสริมเดียว.....	11
2.9 ผังโครงสร้างแบบมีห่วงกรอบล้อมเสริม.....	11
2.10 ผังโครงสร้างแบบกรอบล้อมเสริมหลายกิ่ง.....	12
2.11 ผังโครงสร้างแบบแตกกิ่งคู่.....	13
2.12 ผังโครงสร้างแบบกิ่งประกอบ.....	13
4.1 ฟังก์ชันคาบ	18
4.2 ฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ที่มีคาบเท่ากับ 2π	18
4.3 ฟังก์ชันคู่	23
4.4 ฟังก์ชันคี่	23
4.5	
4.5a ฟังก์ชัน $f(x)$	24
4.5b การแผ่ขยายของฟังก์ชันคู่ที่มีคาบเท่ากับ $2L$	24
4.5c การแผ่ขยายของฟังก์ชันคี่ที่มีคาบเท่ากับ $2L$	25
5.1 ลักษณะของคลื่น และแอมพลิจูด	31
5.2 จำนวนคลื่นเต็มหน่วย	37
5.3 เส้นโค้งแบบเกาส์	40
5.4 พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งเกาส์	44
5.5 การกระจายของอนุกรมในท่อนเหล็กที่มีความยาวไม่จำกัด	45
5.6 ฟังก์ชันอทธิพลสำหรับความร้อน	45
6.1 แสดงระบบเชิงเส้นทางไฟฟ้า	55

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.2 (ตัวอย่าง)	56
6.3 (ตัวอย่าง)	58
6.4 รูปคลื่นของสัญญาณที่มีการมอดูเลตทางแอมพลิจูด (แบบธรรมดา)	59
6.5 (ตัวอย่าง)	61
7.1 จำนวน $e^{j2\pi m/8}$	64
7.2 (ตัวอย่าง)	67
7.3 $f_k = k$	72
7.4 การแผ่ขยายฟังก์ชันคาบของ $f_k = k$	76
7.5 Transform เวกเตอร์ข้อมูลโดยใช้สมการ Discrete Analysis.....	77
7.6 Symmetries ของ F_n	80
8.1 $N = 4$	84
8.2 การไหลของสัญญาณ เมื่อ $N = 4$	89
8.3 (a - c แผนผังการไหลแสดงการคำนวณ DFT ขนาด 8 จุด)	91-92
8.4 (a - c หน่วยคำนวณ butterfly ของของวิธีการสับทางเวลา)	94
8.5 แผนภาพแสดงการคำนวณ DFT ขนาด N จุด ชนิดการสับทางเวลา	95
8.6 (a - c ขั้นตอนการแปลงฟูริเยร์ชนิดการสับทางความถี่)	96-97
8.7 หน่วยคำนวณ butterfly ของวิธีการสับทางความถี่	98
8.8 ภาพรวมแสดงวิธีขั้นตอนการคำนวณ DFT โดยใช้ FFT	100
9.1 รูป 9.1 หน้าจอ.....	102
9.2 รูป 9.2 หน้าจอ.....	103
9.3 รูป 9.3 หน้าจอ.....	104
9.4 รูป 9.4 หน้าจอ.....	105
9.5 รูป 9.5 หน้าจอ.....	106
9.6 รูป 9.6 หน้าจอ.....	107
9.7 รูป 9.7 หน้าจอ.....	108
9.8 รูป 9.8 หน้าจอ.....	109
9.9 รูป 9.9 หน้าจอ.....	110
9.10 รูป 9.10 หน้าจอ.....	111
9.11 รูป 9.11 หน้าจอ.....	112
9.12 รูป 9.12 หน้าจอ	113
9.13 รูป 9.13 หน้าจอ	114

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

9.14 รูป 9.14 หน้าจอ.....	115
9.15 รูป 9.15 หน้าจอ.....	116
9.16 รูป 9.16 หน้าจอ.....	117
9.17 รูป 9.17 หน้าจอ.....	118



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

อนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ เป็นเรื่องหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งถูกนำไปใช้ในวิทยาศาสตร์หลายแขนงเช่น ใช้ในทางฟิสิกส์ เพื่อแก้ปัญหาคาร์สันสะเทือน การนำความร้อน และใช้ในทางวิศวกรรมเพื่อช่วยในการแก้ปัญหาระบบเชิงเส้นทางไฟฟ้า และการมอดูเลตทางแอมพลิฟูด เป็นต้น และเนื่องจากคอมพิวเตอร์เริ่มเข้ามามีบทบาททางการศึกษามากขึ้น การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (Computer Assisted Instruction หรือ CAI) เข้ามาใช้พัฒนาสื่อการเรียนการสอน ในเนื้อหาเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ ซึ่งจะช่วยให้นักศึกษาและผู้สนใจสามารถศึกษาได้ด้วยตนเองได้อย่างสะดวก และรวดเร็วโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแทนที่จะเข้าไปนั่งศึกษาในห้องเรียน

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

- 1.2.1 เพื่อใช้เป็นสื่อการเรียนการสอนเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์
- 1.2.2 เพื่อให้ผู้ใช้สามารถศึกษาเนื้อหาเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ได้ด้วยตนเอง
- 1.2.3 เพื่อให้ผู้ใช้สามารถนำความรู้เรื่องการประยุกต์ของอนุกรมฟูรีเยร์ไปใช้ในการแก้ปัญหามหาในเรื่องฟิสิกส์และวิศวกรรมได้

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

- 1.3.1 จัดทำสื่อการเรียนการสอนเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์
- 1.3.2 ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์
- 1.3.3 จัดทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบเกี่ยวกับเนื้อหาในบทเรียน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์
- 1.4.2 ช่วยฝึกฝนความชำนาญในการแก้ปัญหามหาเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์
- 1.4.3 ได้โปรแกรมสำเร็จรูปที่สะดวกและง่ายต่อการใช้งาน

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

- 1.5.1 ศึกษารายละเอียด และเนื้อหาเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 1.5.2 จัดทำแบบฝึกหัดในเนื้อหาที่เกี่ยวข้อง
- 1.5.3 จัดทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้เป็นสื่อการเรียนการสอน
- 1.5.4 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นให้มีประสิทธิภาพ
- 1.5.5 จัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักการของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.1 ความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน คือ การนำคอมพิวเตอร์มาใช้ช่วยในการสอน โดยที่คอมพิวเตอร์จะทำการนำเสนอบทเรียนแทนผู้สอน และผู้เรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเองนอกจากนั้นคอมพิวเตอร์ยังมีความสามารถในการตอบสนองต่อข้อมูลที่ผู้เรียนป้อนเข้าไปได้ในทันที ซึ่งเป็นการช่วยเสริมสร้างความเข้าใจ และสนใจแก่ผู้เรียน คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในปัจจุบันจะพบว่ามีการนำเสนอสื่อประสมหรือ มัลติมีเดีย (Multimedia) เข้ามาช่วยในการนำเสนอเนื้อหา (สื่อประสม คือ การผสมผสานเนื้อหาหลายชนิด เช่น ข้อความ เสียง ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว ฯลฯ เข้าด้วยกัน) ทำให้ผู้เรียนรู้สึกสนุกกับการเรียน ไม่รู้สึกเบื่อหน่าย

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นจะอาศัยแนวความคิดจากทฤษฎีการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนองของผู้เรียน ประเมินการตอบสนองของผู้เรียน ให้ข้อมูลย้อนกลับเพื่อเป็นการเสริมสร้างแรงกระตุ้นในการเรียน และให้ผู้เรียนเลือกสิ่งเร้าในลำดับต่อไป

กระบวนการเรียนการสอน คือ การสื่อสารข้อมูลระหว่างผู้สอนและผู้เรียน เมื่อผู้เรียนรับรู้ข้อมูลแล้วแปรผลก็แสดงว่ามีการเรียนรู้เกิดขึ้น

2.2.1 การสื่อสารในกระบวนการเรียนการสอน

การสื่อสารในกระบวนการเรียนการสอนมีสองลักษณะ คือ

1. การสื่อสารแบบทางเดียว หรือ ระบบวงจรมเปิด (Open-Loop System) เป็นการสื่อสารไปทางผู้เรียนทางเดียว ผู้เรียนไม่สามารถสื่อสารไปยังผู้สอนได้ เช่น การเรียนทางไกลจากตำราและเอกสาร

2. การสื่อสารสองทาง หรือ ระบบวงจรมปิด (Close-Loop System) เป็นการสื่อสารที่ผู้เรียนและผู้สอนสามารถตอบโต้กันได้ เช่น การเรียนการสอนในห้องเรียน ซึ่งเป็นการสื่อสารที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด เพราะเมื่อผู้เรียนไม่เข้าใจเนื้อหาในบทเรียนก็สามารถถามได้

2.2.2 การจัดการศึกษาตามเอ็กต์ภาพ

เนื่องจากผู้เรียนมีความแตกต่างกันทั้งในด้านร่างกาย ความรู้ ความคิด ความสามารถ และระดับสมอง จึงได้มีการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนให้เป็นเอ็กต์ภาพตามระดับความสามารถของผู้เรียน เรียก “การศึกษาตามเอ็กต์ภาพ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การศึกษาตามเอกัตภาพมี 3 ลักษณะ คือ

1. บทเรียนโปรแกรม (Programmed Instruction) การเรียนการสอนจะจัดเป็นหน่วยๆ มีกระบวนการเรียนรู้ และวัดผลเบ็ดเสร็จเมื่อผ่านเกณฑ์ในหน่วยหนึ่งก็เรียนหน่วยต่อไปได้ บทเรียนโปรแกรมนี้สกินเนอร์ (B.F. Skinner) เป็นผู้คิดขึ้นมา

2. บทเรียนโมดูล (Module Instruction) บทเรียนจะจัดเป็นชุดๆ (Package) ประกอบด้วยบทเรียน อุปกรณ์ สื่อเพื่อการเรียนรู้ครบวงจร อยู่ในชุดการเรียนรู้ ผู้เรียนสามารถทดสอบ หาประสบการณ์ด้วยตนเองได้

3. บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI : Computer Assisted Instruction) พัฒนามาจากบทเรียนโปรแกรม แต่ใช้คอมพิวเตอร์ในการนำเสนอบทเรียน เป็นการจัดการศึกษาที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

2.2.3 ลักษณะของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

มีลักษณะเป็นโมเดล (Model) 2 แบบ คือ

1. แบบเชิงเส้น (Linear Programming) ผู้เรียนจะต้องเรียนบทเรียนทีละหน่วยตามลำดับ จะข้ามหน่วยไม่ได้

2. แบบไม่เชิงเส้น (Branching Programming) เป็นบทเรียนที่เชื่อมโยงกันได้ตามความต้องการผู้เรียนสามารถเลือกบทเรียนบทใดก่อนก็ได้

2.3 องค์ประกอบของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ในการที่จะนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการสอนได้นั้น จะต้องประกอบด้วยองค์ประกอบต่างๆดังต่อไปนี้

2.3.1 ฮาร์ดแวร์ (Hardware)

ฮาร์ดแวร์ คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็น สื่อในการนำเสนอบทเรียนให้แก่ผู้เรียน โดยเครื่องคอมพิวเตอร์นี้จำเป็นที่จะต้องมีความสามารถเพียงพอที่จะสนับสนุนการทำงานของซอฟต์แวร์ (Software) ที่ซึ่งจะนำมาสร้างบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.3.2 ซอฟต์แวร์ (Software)

ซอฟต์แวร์ คือ โปรแกรมปฏิบัติการและโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.3.3 คอร์สแวร์ (Courseware)

คอร์สแวร์ คือ บทเรียนที่ต้องการจะนำมาสร้างโปรแกรมช่วยสอนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะประกอบไปด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. เนื้อหา
2. ตัวอย่าง
3. แบบฝึกหัด

2.3.4 พีเพิลแวร์ (Peopleware)

พีเพิลแวร์ คือ บุคคลที่สร้างโปรแกรมช่วยสอนทางคอมพิวเตอร์ และผู้ใช้โปรแกรมช่วยสอนทุกคน

2.4 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) สามารถแบ่งออกได้เป็น 5 ประเภทด้วยกัน คือ

2.4.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์ คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งนำมาเสนอเนื้อหาแก่ผู้เรียน ไม่ว่าจะป็นเนื้อหาใหม่ หรือ การทบทวนเนื้อหาเดิมก็ตาม ส่วนใหญ่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้จะมีแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัด เพื่อการทดสอบความเข้าใจของผู้ที่เรียนอยู่ด้วย อย่างไรก็ตาม ผู้เรียนมีอิสระพอที่จะเลือกตัดสินใจว่าจะทำแบบทดสอบ หรือ แบบฝึกหัดหรือไม่/อย่างไร หรือ จะเลือกเรียนเนื้อหาส่วนไหน เรียงลำดับรูปแบบใดเพราะการเรียนโดยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นผู้เรียนสามารถควบคุมการเรียนของตนได้ตามความต้องการของตนเอง

2.4.2 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่มุ่งเน้นให้ผู้จัดทำแบบฝึกหัดจนสามารถเข้าใจเนื้อหาในบทเรียนนั้นๆได้ คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้เป็นประเภทที่ได้รับความนิยมมากโดยเฉพาะในระดับอุดมศึกษา ทั้งนี้เนื่องจากการเปิดโอกาสทำความเข้าใจบทเรียนสำคัญๆได้โดยที่ครูผู้สอนไม่ต้องเสียเวลาในชั้นเรียนอธิบายเนื้อหาเดิมซ้ำแล้วซ้ำอีก

2.4.3 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ คือ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสร้างแบบทดสอบ การจัดการทดสอบ การตรวจการให้คะแนน การคำนวณ ผลสอบ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้ คือ การที่ผู้เรียนได้รับผลย้อนกลับโดยทันที (immediate feedback) ซึ่งเป็นข้อจำกัดของการทดสอบที่ใช้กันอยู่ทั่วไป

2.4.4 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมส์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมส์ คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ทำให้ผู้ที่มีความสนุกสนาน เพลิดเพลินจนลืมไปว่ากำลังเรียนอยู่ เกมส์คอมพิวเตอร์ทางการศึกษาเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่สำคัญประเภทหนึ่ง เนื่องจากเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่กระตุ้นให้เกิดความสนใจในการเรียน คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้นิยมใช้กับเด็กตั้งแต่ระดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประถมศึกษาไปจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นอกจากนี้ยังสามารถนำมาใช้กับผู้เรียนในระดับอุดมศึกษาเพื่อเป็นการปูทางให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ และความรู้สึกที่ดีกับบทเรียนทางคอมพิวเตอร์อีกด้วย

2.4.5 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเหตุการณ์จำลอง

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเหตุการณ์จำลอง คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่การนำเสนอบทเรียนในรูปของการจำลองแบบ (Simulation) โดยการจำลองสถานการณ์ที่เหมือนจริงขึ้น และบังคับให้ผู้เรียนต้องตัดสินใจในการแก้ปัญหา ในตัวบทเรียนจะมีคำแนะนำเพื่อช่วยในการตัดสินใจของผู้เรียน และแสดงผลพรีในการตัดสินใจนั้นๆ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้คือ การลดค่าใช้จ่ายและลดการอันตรายอันอาจเกิดขึ้นได้ จากการเรียนรู้ที่เกิดจากสถานการณ์จริง

2.4.6 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ คือ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่มีพื้นฐานมาจากการจำลองบทเรียนในลักษณะที่ปรากฏในหนังสือแบบเรียน จึงมีส่วนประกอบที่คล้ายคลึงกับส่วนประกอบของหนังสือแบบเรียน คือ ปก คำนำ สารบัญ บทเนื้อหา แบบฝึกหัด เป็นต้น

2.4.7 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทกำหนดสถานการณ์ในการแก้ปัญหา

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทกำหนดสถานการณ์ให้แก้ปัญหา คือ การนำเสนอสถานการณ์ให้ผู้เรียนศึกษาแล้วตอบคำถาม เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์นั้นๆ

2.4.8 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทวินิจฉัยข้อบกพร่อง

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทวินิจฉัยข้อบกพร่อง เป็นการถามคำถาม หรือทดสอบนักเรียน เพื่อดูว่าผู้เรียนยังมีจุดบกพร่องในมโนทัศน์นั้นๆ อย่างไร แล้วดำเนินแก้ไขข้อบกพร่องที่พบนั้น

2.5 การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาช่วยในการเรียนการสอนมีอยู่ 3 วิธีด้วยกัน ซึ่งแต่ละวิธีมีข้อได้เปรียบ เสียเปรียบแตกต่างกันออกไป ดังนี้

1. การใช้บทเรียนที่มีผู้สร้างไว้แล้ว ข้อได้เปรียบของวิธีนี้ คือ ประหยัดเวลาและนำมาใช้ได้ทันที แต่ข้อเสียคือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ดีมักมีราคาแพง และนอกจากนี้ยังอาจจะได้งานที่ไม่ตรงกับความต้องการเสียทีเดียว จึงต้องมีการประเมินคุณค่าของบทเรียนก่อน

2. การสร้างบทเรียนโดยใช้โปรแกรมช่วยสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (authoring system) โปรแกรมช่วยสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นโปรแกรมที่เรียนรู้ได้ง่าย เนื่องจากการเขียนสคริปต์ใน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โปรแกรมประเภทนี้จะใช้ภาษาระดับสูงมาก (ใกล้เคียงกับภาษามนุษย์มาก) ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือ ได้ผลงานที่ดีและใช้งานง่ายในเวลาไม่นานนัก แต่ข้อเสียคือไม่เหมาะกับงานที่มีความซับซ้อน เช่น บทเรียนที่ต้องการความสามารถทางคณิตศาสตร์ ฯลฯ

3. การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยการเขียนโปรแกรมขึ้นเองโดยภาษาคอมพิวเตอร์ เช่น ภาษาซี ภาษาแอสแซมบลี และภาษาปาสคาล ฯลฯ ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือ สามารถสร้างบทเรียนที่สลับซับซ้อนและได้ซอฟต์แวร์ที่ทำงานเร็วแต่ข้อเสียคือ ใช้เวลาในการทำงานนานกว่า 2 วิธีแรก

2.6 ผังโครงสร้างบทเรียน

กล่าวถึงรูปแบบของผังโครงสร้างบทเรียน ซึ่งจะช่วยให้การดำเนินการสร้างบทเรียน ตั้งแต่การเขียนสคริปต์ และการโปรแกรมบทเรียนให้เป็นไปตามที่กำหนด

การสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนควรดำเนินการโดยกำหนดผังโครงสร้างบทเรียน ซึ่งจะช่วยให้การสร้างบทเรียนเป็นไปตามรูปแบบที่ต้องการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้

2.6.1 การออกแบบผังโครงสร้างบทเรียน

การออกแบบผังโครงสร้างบทเรียนของโปรแกรมช่วยสอนวิธีหนึ่ง คือ การเขียนผังการทำงานของบทเรียน จะช่วยให้ผู้สร้างบทเรียนและผู้เขียนสคริปต์บทเรียนมีความเข้าใจชัดเจนขึ้นว่าควรจะสร้างบทเรียนและเขียนสคริปต์บทเรียนอย่างไร โดยทั่วไปแล้วนิยมเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้รูปสัญลักษณ์แทนความหมายของแต่ละกรอบบทเรียน สัญลักษณ์ที่ใช้มีดังนี้



รูปที่ 2.1 สัญลักษณ์ในการวางผังโครงสร้างบทเรียน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6.2 รูปแบบผังโครงสร้างบทเรียน

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน มี 2 รูปแบบใหญ่ๆ คือ

1. แบบเส้นทางเดียว

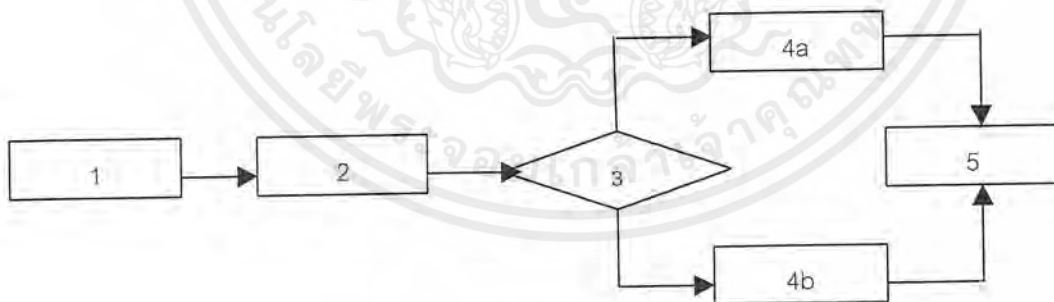
เป็นการสร้างกรอบบทเรียนที่มีลำดับการตอบสนองอย่างต่อเนื่อง เป็นเทคนิควิธีการที่สร้างได้ง่าย ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาหรือกรอบคำถามเรียงต่อกันไปในทิศทางเดินทางเดียว ปัจจุบันลักษณะผังโครงสร้างแบบนี้ไม่เป็นที่นิยม เพราะจัดเรียงเนื้อหาตายตัว ไม่เอื้อต่อความแตกต่างระหว่างบุคคล แต่ในปัจจุบันมีโปรแกรมระบบช่วยสร้างบทเรียน เอื้อต่อการสร้างบทเรียนทำให้บทเรียนแบบเส้นทางเดียวสามารถดำเนินไปในลักษณะเดินหน้าไปและย้อนกลับแบบพลิกหน้าได้ ทำให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น



รูปที่ 2.2 ผังโครงสร้างแบบเส้นทางเดียว

2. แบบแตกกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ได้รับความนิยมจากผู้เรียนมากกว่าแบบเส้นทางเดียว เพราะเหมาะสมกับผู้เรียนมากกว่า เนื่องจากจะให้ผู้เรียนได้เลือกตามระดับความรู้ความเข้าใจและความสามารถของผู้เรียน



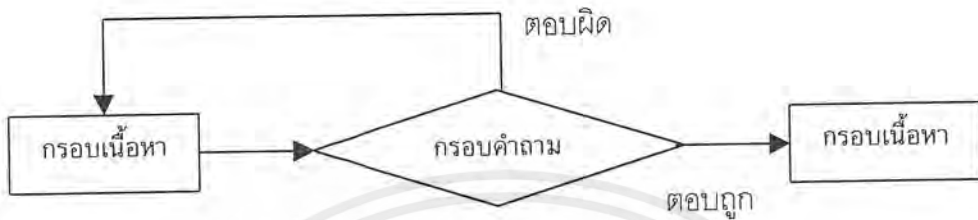
รูปที่ 2.3 ผังโครงสร้างแบบแตกกิ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผังโครงสร้างแบบแตกกิ่งยังสามารถแยกออกได้หลายรูปแบบดังนี้ดังนี้

แบบซ้ำกรอบเดิม (Linear format with repetition)

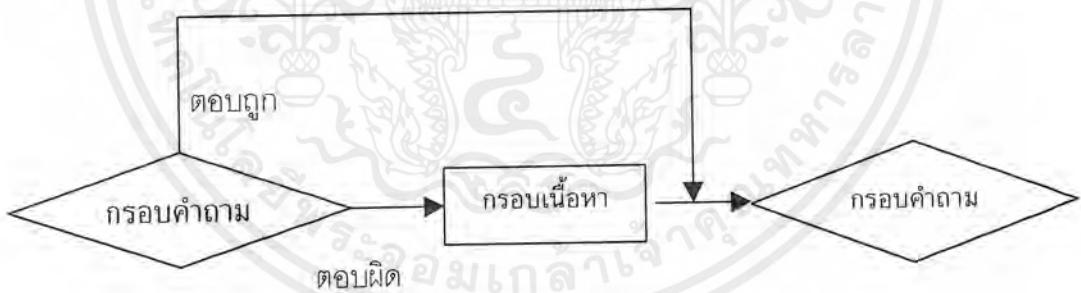
มีลักษณะคล้ายคลึงกับผังโครงสร้างแบบเส้นทางเดียวต่างกันตรงที่มีคำถามแทรกระหว่างกรอบเนื้อหาเหมาะกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภททบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์



รูปที่ 2.4 ผังโครงสร้างแบบซ้ำกรอบเดิม

แบบทดสอบก่อนข้ามกรอบ (Pretest and skip format)

จะทดสอบความรู้ของผู้เรียนก่อนเรียนเนื้อหา ถ้าทดสอบผ่านก็จะข้ามกรอบนั้นไปยังกรอบเนื้อหาจุดประสงค์อื่น เหมาะต่อโปรแกรมช่วยสอนประเภททบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

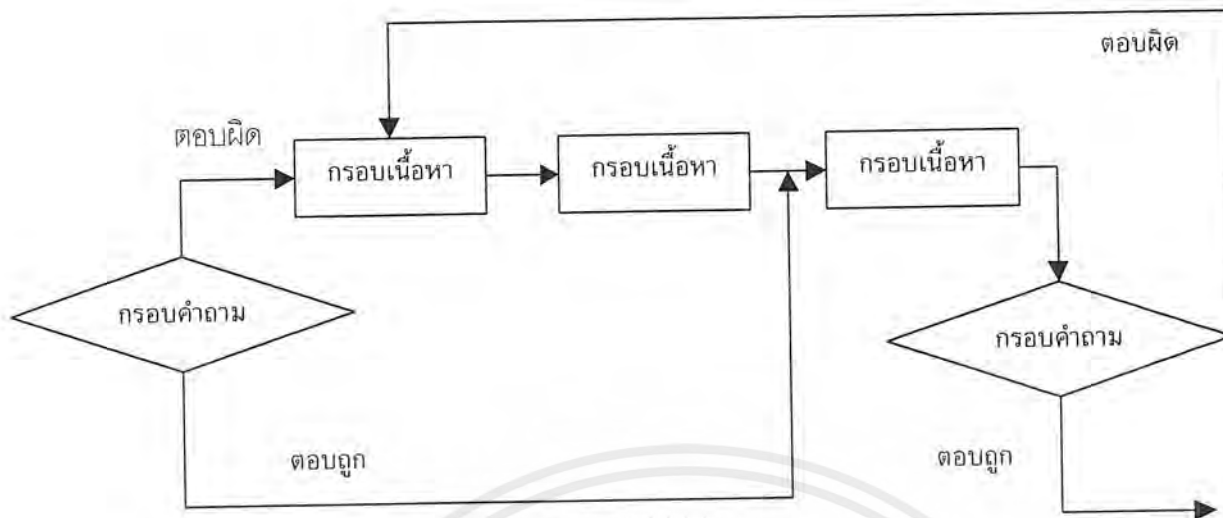


รูปที่ 2.5 ผังโครงสร้างแบบทดสอบก่อนข้ามกรอบ

แบบข้ามและย้อนกรอบ (Gate frames)

กำหนดให้ผู้เรียนไปยังกรอบบทเรียนตามระดับความสามารถและความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา มีลักษณะแบบเดียวกับแบบเส้นทางเดียว เหมาะกับโปรแกรมช่วยสอนประเภททบทวนความรู้แบบฝึกฝนและฝึกหัด เกม สถานการณ์จำลองและแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

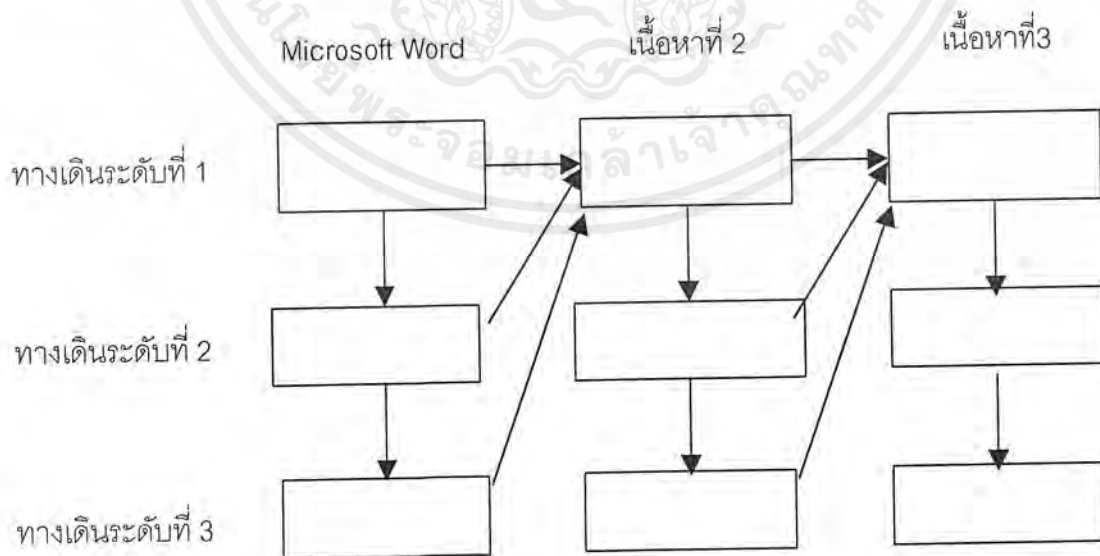
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.6 ผังโครงสร้างแบบข้ามกรอบและย้อนกรอบ

แบบทางเดินหลายเส้น (Secondary tracks)

ประกอบด้วยกรอบบทเรียนในเส้นทางเดินหลายระดับ ทางเดินระดับที่ 1 เป็นเส้นทางเดินของกรอบบทเรียนเนื้อหาหลัก ส่วนทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 เป็นกรอบเนื้อหาที่เพิ่มรายละเอียดขึ้นมา นอกจากนี้ทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 ยังมีเส้นทางเดินมากกว่าหนึ่งเส้นทางขึ้นอยู่กับว่าผู้เรียนจะสามารถเข้าใจเนื้อหาในกรอบทางเดินระดับที่ 1 มากน้อยเพียงใด เหมาะต่อ CAI แบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์



รูปที่ 2.7 ผังโครงสร้างแบบทางเดินหลายเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบกรอบซ่อมเสริมเดียว (Single remedial branch)

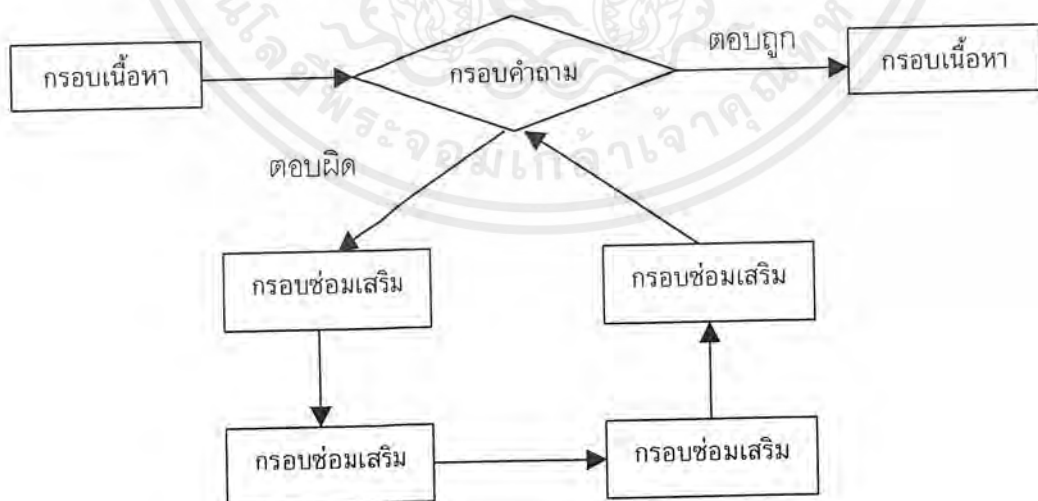
บทเรียนลักษณะนี้ ถ้าผู้เรียนตอบถูกจะได้รับข้อมูลป้อนกลับในทางบวกและเรียนเนื้อหาในกรอบต่อไป หากตอบผิดผู้เรียนก็จะได้รับการสอนซ่อมเสริมก่อนไปเนื้อหากรอบต่อไป เหมาะต่อโปรแกรมช่วยสอนแบบทบทวนความรู้ และแบบฝึกฝนและฝึกหัด



รูปที่ 2.8 ผังโครงสร้างแบบกรอบซ่อมเสริมเดียว

แบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม (Remedial loops)

แบบนี้มีลักษณะคล้ายคลึงกับแบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยวต่างกันตรงที่แบบนี้จะประกอบด้วยกรอบซ่อมเสริมหลายกรอบประกอบกันเป็นชุดบทเรียนย่อย 5-6 กรอบ เพื่อให้ความรู้และข้อมูล que ผู้เรียนยังขาดอยู่ก่อนที่จะส่งผู้เรียนกลับไปกรอบเนื้อหาเดิม เหมาะกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบทบทวนความรู้และแบบฝึกฝนและฝึกหัด

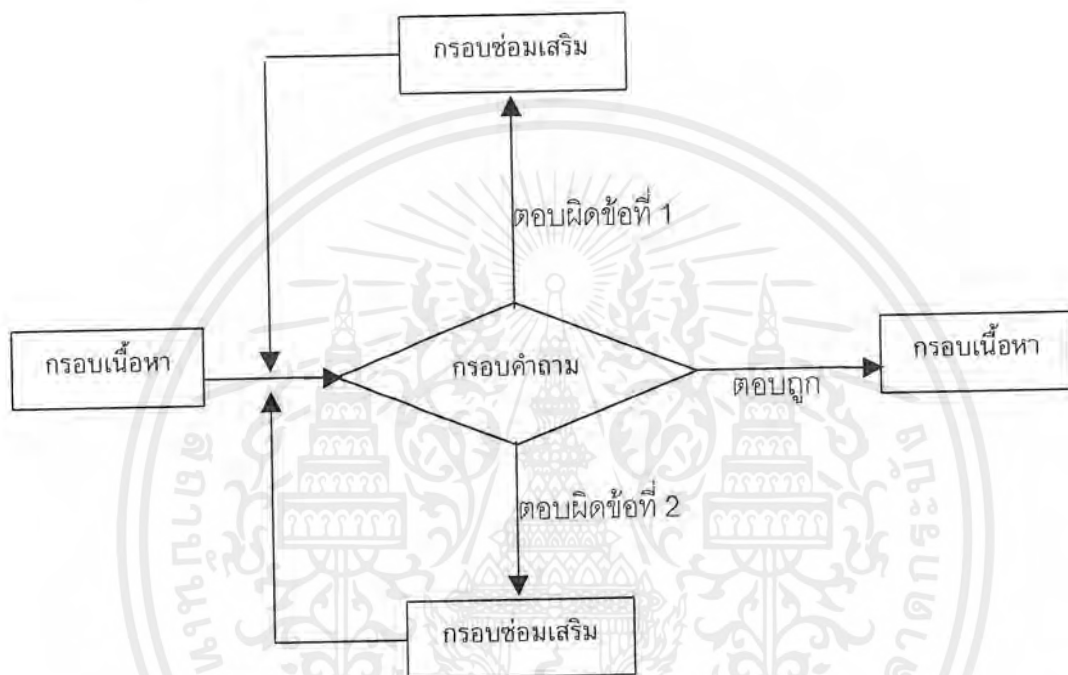


รูปที่ 2.9 ผังโครงสร้างแบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง (Multiple remedial branches)

แบบนี้จะประกอบด้วยกรอบเนื้อหาที่ให้ข้อมูล แล้วตามด้วยกรอบซ่อมเสริมตั้งแต่ 2 กรอบขึ้นไป กรอบคำถามแต่ละกรอบจะมีกิ่งแยกออกมาตามจำนวนข้อของตัวเลือกในคำถามแบบเลือกตอบนั้น เพื่อไปยังกรอบซ่อมเสริม แล้วจึงจะส่งผู้เรียนมายังกรอบคำถามเดิม เพื่อให้ผู้เรียนตอบคำถามในกรอบนั้นให้และเลือกคำตอบอื่นที่เหมาะสมกับโปรแกรมช่วยสอนแบบทบทวนความรู้ และแบบฝึกฝนฝึกหัด



รูปที่ 2.10 ผังแบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง

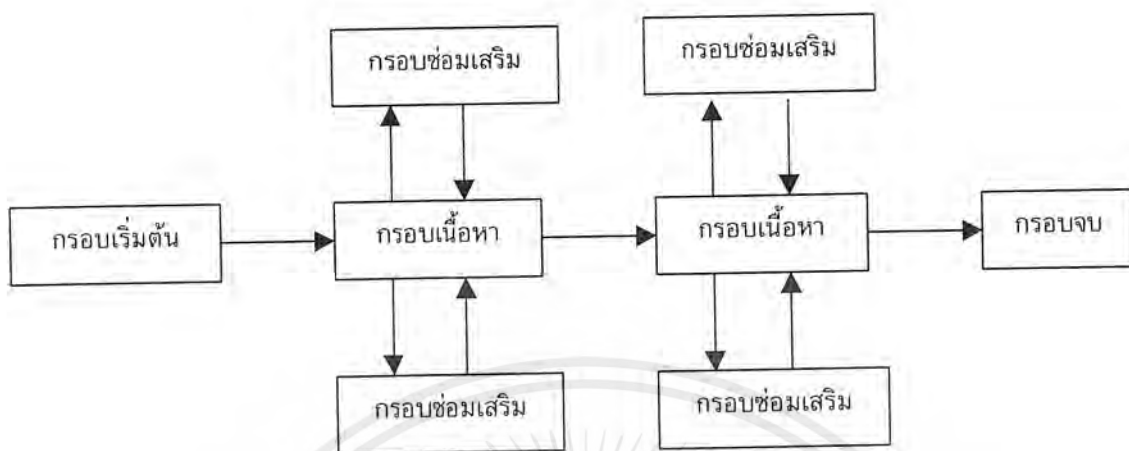
แบบแตกกิ่งคู่ (Branching frame sequence)

ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาที่แตกเป็นกรอบซ่อมเสริมสองกรอบ ถ้าผู้เรียนตอบคำถามของกรอบเนื้อหาได้ถูกต้องจะทำให้ผู้เรียนผ่านจากกรอบเนื้อหาหนึ่งไปยังอีกกรอบเนื้อหาหนึ่ง แต่ถ้าตอบผิดก็จะต้องไปยังกรอบซ่อมเสริมแล้วจึงกลับไปยังกรอบเนื้อหาเดิมเพื่อศึกษาและตอบคำถามใหม่อีกครั้ง

กรอบเนื้อหาควรมีข้อความที่แสดงว่าผู้เรียนตอบถูกโดยให้คำชมเชยก่อนที่จะเมเข้าสู่เนื้อหาต่อไป ตามด้วยคำถามจากสถานการณ์ที่เป็นปัญหา พร้อมให้เลือกตอบสองจากตัวเลือกสามตัว ส่วนกรอบซ่อมเสริมควรมีข้อความเริ่มต้นที่แสดงว่าตอบผิดในลักษณะที่ไม่ทำให้ผู้เรียนเสียกำลังใจ ตามด้วยคำอธิบายว่าเหตุใดจึงไม่ใช่คำตอบที่ถูกแต่ไม่บอกให้ทราบคำตอบที่ถูกโดยตรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

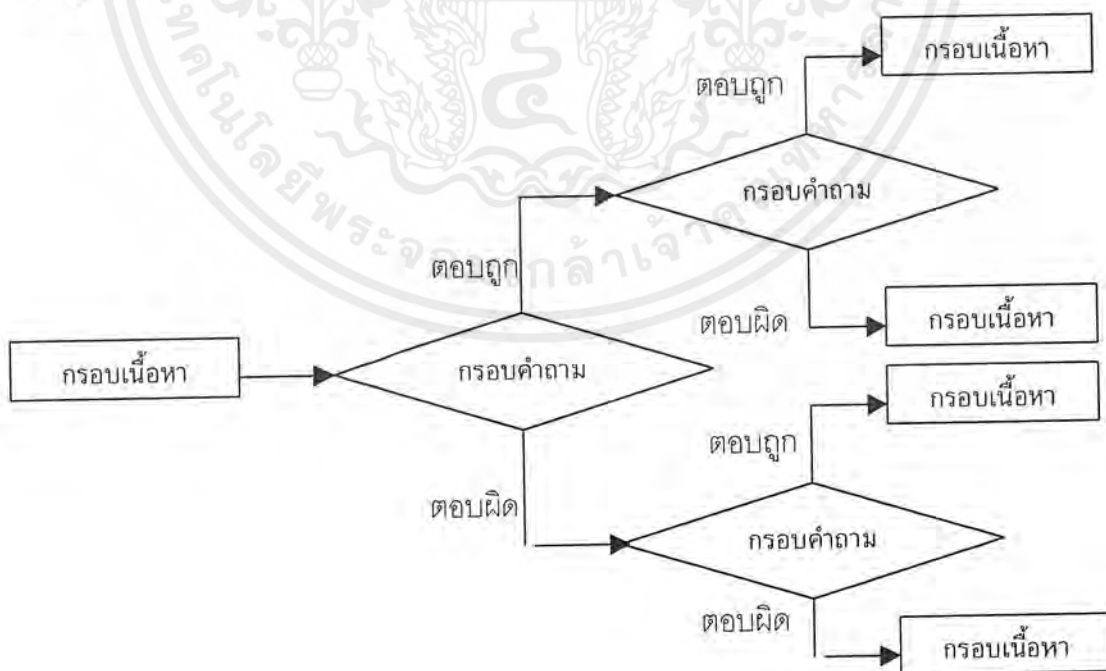
เหมาะต่อโปรแกรมช่วยสอนแบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเล็กทรอนิกส์



รูปที่ 2.11 ผังโครงสร้างแบบแตกกิ่งคู่

แบบกิ่งประกอบ (Compound branches)

ใช้กันมากในการเรียนเพื่อวินิจฉัยความบกพร่องของผู้เรียน กิ่งที่แยกจากแต่ละกรอบคำถามจะแยกไปสู่กรอบเนื้อหาใหม่ตามความรู้ความเข้าใจและความสามารถที่แตกต่างกันระหว่างบุคคล



รูปที่ 2.12 ผังโครงสร้างแบบกิ่งประกอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7 ข้อดีและข้อจำกัดของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ข้อดี

1. คอมพิวเตอร์จะช่วยเพิ่มแรงจูงใจในการเรียนรู้ให้แก่ผู้เรียน เนื่องจากการเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์นั้นเป็นประสบการณ์ที่แปลกและใหม่

2. การใช้สี ภาพหลายเส้นที่เคลื่อนไหว ตลอดจนเสียงดนตรี จะเป็นการเพิ่มความเหมือนจริงและเข้าใจผู้เรียนให้มีความกระตือรือร้นในการเรียนรู้ ทำแบบฝึกหัด หรือทำกิจกรรมต่างๆ เหล่านี้เป็นต้น

3. ลักษณะของโปรแกรมบทเรียนที่ให้เกิดความเป็นส่วนตัวแก่ผู้เรียน เป็นการช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนช้า สามารถเรียนไปได้ตามความสามารถของตนเองได้อย่างสะดวก ไม่ต้องรีบเร่งโดยไม่ต้องอายผู้อื่นและไม่ต้องอายเครื่องเวลาตอบคำถามผิด

4. เป็นการช่วยขยายขีดความสามารถของผู้สอนในการควบคุมผู้เรียนได้อย่างใกล้ชิดเนื่องจากสามารถบรรจุข้อมูลได้ง่าย และสะดวกในการนำมาใช้

5. ความสามารถของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการบันทึกคะแนนและพฤติกรรมต่างๆ ของผู้เรียนไว้ใช้ในการวางแผนบทเรียนในขั้นต่อไปได้

6. ความสามารถในการเก็บข้อมูลของเครื่อง ทำให้สามารถนำมาใช้ได้ ในลักษณะของการศึกษารายบุคคลได้เป็นอย่างดี โดยสามารถกำหนดบทเรียนให้แก่ผู้เรียนแต่ละคนและแสดงผลความก้าวหน้าให้เห็นได้ทันที

ข้อจำกัด

1. ถึงแม้ว่าขณะนี้ราคาเครื่องคอมพิวเตอร์และค่าใช้จ่ายต่างๆ จะมีราคาตกลงมากแล้วก็ตาม แต่การที่จะนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในวงการการศึกษาในบางสถานที่นั้นจำเป็นต้องมีการพิจารณากันอย่างรอบคอบเพื่อให้คุ้มกับค่าใช้จ่ายตลอดจนการดูแลรักษาด้วย

2. การออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการเรียนการสอนนั้นนับว่ายังมีน้อยเมื่อเทียบกับการออกแบบโปรแกรมเพื่อใช้ในวงการด้านอื่นๆ ทำให้โปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีจำนวนและขอบเขตที่จำกัดที่จะนำมาใช้เรียนในวิชาต่างๆ

3. ในขณะนี้ยังขาดอุปกรณ์ที่ได้คุณภาพมาตรฐานระดับเดียวกัน เพื่อให้สามารถใช้ได้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ต่างระบบกัน เป็นต้นว่าซอฟต์แวร์ที่ผลิตขึ้นมาใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ระบบของ IBM ไม่สามารถใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ของ Macintosh ได้

4. การที่จะให้ผู้สอนออกแบบโปรแกรมบทเรียนเองนั้น นับว่าเป็นงานที่ต้องอาศัยเวลาสติปัญญา และความสามารถเป็นอย่างยิ่ง ทำให้เป็นการเพิ่มภาระแก่ผู้สอนมากยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. เนื่องจากบทเรียนคอมพิวเตอร์เป็นการวางโปรแกรมบทเรียนไว้ล่วงหน้าจึงมีลำดับขั้นตอนการสอนทุกอย่างตามที่วางไว้ ดังนั้นการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนจึงไม่สามารถช่วยในการพัฒนาด้านความคิดสร้างสรรค์ของผู้เรียนได้
6. ผู้เรียนบางคนโดยเฉพาะอย่างยิ่งผู้เรียนที่เป็นผู้ใหญ่อาจไม่ชอบโปรแกรมที่เป็นไปตามขั้นตอน ทำให้เป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้ได้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

ขั้นตอนการออกแบบโปรแกรม

3.1 ลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ มีลักษณะเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภท “ติวเตอร์” คือ ในส่วนของโปรแกรมผู้ใช้สามารถศึกษาเนื้อหาเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ได้ และเมื่อผู้ใช้ได้ศึกษาส่วนเนื้อหาแล้ว ผู้ใช้สามารถเลือกทำแบบทดสอบ มีการตรวจคำตอบ คำนวณคะแนนที่ได้ และแสดงคะแนนเพื่อประเมินผู้ทำการทดสอบ

3.2 ขั้นตอนการออกแบบโปรแกรม

โปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์แบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ

1. ส่วนเนื้อหา
2. ส่วนแบบทดสอบ
3. ส่วนช่วยเหลือ

3.3.1 ส่วนเนื้อหา

ส่วนเนื้อหาแบ่งออกเป็น 6 บท โดยที่แต่ละบทเรียงตามลำดับความยากง่าย เริ่มจากบทแรกซึ่งเป็นเนื้อหาพื้นฐานเบื้องต้นของการศึกษา เนื้อหาทั้งหมดมีความเกี่ยวเนื่องกันตามลำดับความยากง่าย

3.3.2 ส่วนแบบทดสอบ

ส่วนแบบทดสอบ ปรากฏอยู่ในท้ายบทด้านหลังเนื้อหา โดยเมื่อทำแบบทดสอบแล้วจะมีการตรวจคิดคะแนน และแสดงผลออกทางหน้าจอให้ผู้ทำการทดสอบได้ทราบ ถ้าคะแนนผ่านเกณฑ์ที่ตั้งไว้ จะให้รหัสผ่านเพื่อเข้าอ่านบทต่อไป

3.3.3 ส่วนช่วยเหลือ

ส่วนช่วยเหลือ เป็นส่วนที่รวบรวมคำศัพท์ และ ส่วนความรู้เพิ่มเติมที่ได้เพิ่มเติมจากส่วนเนื้อหา เพื่อช่วยให้ผู้ใช้ได้อ่านเนื้อหาได้เข้าใจยิ่งขึ้น

3.3 โปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์

การอ่านเนื้อหา แบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 Normal คือ ผู้ใช้สามารถกำหนดเองได้ว่าจะเริ่มอ่านที่บทไหน และสามารถเลือกเข้าทำแบบฝึกหัดได้ตามความต้องการของผู้ใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบที่ 2 Step by Step คือ ผู้ใช้ต้องอ่านเนื้อหาเรียงลำดับความยากง่ายตามที่ได้กำหนดไว้ในโปรแกรมช่วยสอน และเมื่ออ่านเนื้อหาจบในแต่ละบท สามารถเลือกได้ว่าจะทำแบบฝึกหัดบทนั้นเลยหรือไม่ ถ้าไม่ทำแบบฝึกหัด ผู้ใช้จะไม่สามารถอ่านเนื้อหาหรือจะทำแบบฝึกหัดในบทอื่นไม่ได้ ถ้าผู้ใช้เลือกทำแบบฝึกหัดบทแรก และสามารถผ่านการทดสอบตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ในโปรแกรมช่วยสอน ผู้ใช้จะได้รับรหัสผ่านเพื่อเข้าอ่านในบทถัดไป เมื่อต้องการอ่านบทอื่นๆ ผู้ใช้จะต้องใส่รหัสผ่านที่ได้จากการทำแบบฝึกหัดบทก่อนหน้า จึงสามารถอ่านในบทนั้นต่อไปได้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

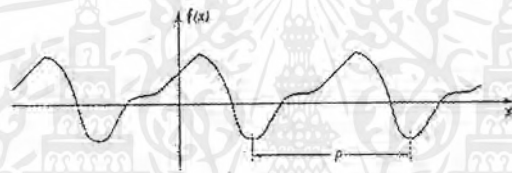
อนุกรมฟูรีเยร์(Fourier Serier)

4.1 ฟังก์ชันคาบ และอนุกรมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชัน $f(x)$ จะมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันคาบ ถ้าสำหรับทุกๆค่าของ x

$$f(x+p) = f(x) \quad (4.1)$$

ซึ่งจำนวนจริง p เป็นคาบของฟังก์ชัน $f(x)$ โดยที่ p ต้องมีค่าเป็นบวกซึ่งค่าที่น้อยที่สุดของ p เรียกว่า ค่าคาบที่น้อยที่สุดจากกราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 4.1 แสดงลักษณะของฟังก์ชันคาบโดยที่กราฟของฟังก์ชันจะมีเส้นกราฟซ้ำกันในทุกๆคาบ และแต่ละช่วงของคาบมีความยาว p ซึ่งฟังก์ชันที่พบส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์ และนอกจากนั้นยังพบว่าฟังก์ชันค่าคงที่ $f = c = \text{constant}$ ถือเป็นฟังก์ชันคาบเช่นกัน



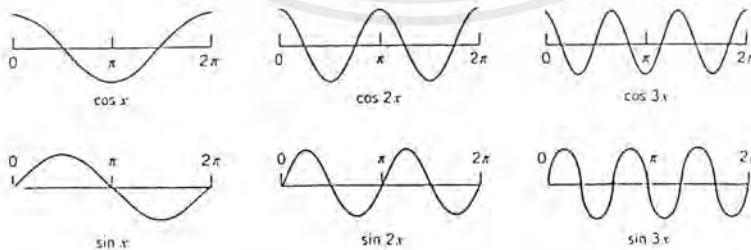
รูปที่ 4.1 ฟังก์ชันคาบ

จากสมการ(4.1) พบว่า

$$f(x+np) = f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x)$$

และสำหรับจำนวนจริงค่าที่ n สามารถเขียนได้ว่า สำหรับทุกๆค่าของ x

$$f(x+np) = f(x)$$



รูปที่ 4.2 ฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ที่มีคาบเท่ากับ 2π

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากระบบสมการตรีโกณมิติ

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

สามารถแสดงนิพจน์ของฟังก์ชันใด ๆ ที่มีคาบเท่ากับ 2π (รูปที่ 4.2) ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันอย่างง่ายโดยที่มีคาบเท่ากับ 2π เช่นกัน ทำให้เกิดอนุกรมซึ่งอยู่ในรูป

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

โดยที่ $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ เป็นจำนวนจริง และเป็นค่าคงที่เรียกอนุกรมนี้ว่า อนุกรมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ส่วน a_n และ b_n เรียกว่าเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรม ซึ่งอนุกรมที่ได้สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

แต่ละพจน์ของอนุกรมมีคาบ $p = 2\pi$ ถ้าอนุกรมมีคุณสมบัติลู่เข้า ค่าผลบวกของทุกพจน์ในอนุกรมนี้จะมีค่าฟังก์ชันคาบเป็น 2π เช่นเดียวกับทุกพจน์ของอนุกรม

4.2 อนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

อนุกรมฟูรีเยร์เป็นอนุกรมของฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆของอนุกรมหาได้จากสูตรของออยเลอร์ (Euler formula)

4.2.1 สูตรของออยเลอร์สำหรับการหาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ (Euler Formula for the Fourier Coefficients)

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบเท่ากับ 2π ซึ่งเขียนเป็นอนุกรมของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.2)$$

สมมติว่าอนุกรมมีสมบัติลู่เข้าและมีค่าผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $f(x)$ โดยต้องการหาค่าสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n ของอนุกรม

สามารถหาค่า a_n ได้จากการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (4.2) จาก $-\pi$ ถึง π

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)] \\
 &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx) \\
 &= 2\pi a_0 \\
 \therefore a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx
 \end{aligned}$$

ดังนั้นเราสามารถหาค่า a_1, a_2, a_3, \dots ได้เช่นเดียวกัน โดยการคูณสมการ(4.2) ด้วย $\cos mx$ โดยที่ m เป็นค่าคงที่และเป็นจำนวนเต็มบวก แล้วอินทิเกรต จาก $-\pi$ ถึง π

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)] \cos mx dx \\
 &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx]
 \end{aligned}$$

ซึ่ง

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx \text{ และ} \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x dx \\
 \therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= a_m \pi \\
 a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \text{ โดยที่ } m = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

การหาค่า b_1, b_2, b_3, \dots ทำได้โดยการคูณสมการ(4.2) ด้วย $\sin mx$ โดยที่ m เป็นค่าคงที่ และเป็นจำนวนเต็มบวก และ อินทิเกรตจาก $-\pi$ ถึง π จะได้

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)] \sin mx dx \\
 &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx] \\
 &= b_m \pi \\
 \therefore b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad m = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทน m ด้วย n ทั้งหมด จะได้สูตรของ Euler

$$\begin{aligned} (a) \quad a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ (b) \quad a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ (c) \quad b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

จำนวน a_0, a_n, b_n ในสมการ(4.3)เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier series) ของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังนั้น

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.4)$$

เป็นอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมได้มาจากสมการ(4.3)

4.2.2 ระบบตรีโกณมิติเชิงตั้งฉาก (Orthogonality of the Trigonometric System)

จากระบบตรีโกณมิติ

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

ตั้งฉากบนช่วงปิด $[-\pi, \pi]$ โดยที่คลื่นแต่ละลูกมีคาบเท่ากับ 2π ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

และ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n)$$

และสำหรับทุกๆจำนวนเต็ม m, n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.3 การลู่เข้าและค่าผลบวกของอนุกรมฟูรีเยร์

(Convergence and Sum of Fourier Series)

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งมีคาบเท่ากับ 2π ซึ่งเมื่อนำสมการ(4.3)มาอินทิเกรตแล้วสามารถหาค่าได้เช่น $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์หาได้จากสมการ(4.3) เพื่อนำค่าสัมประสิทธิ์นั้นมาสร้างเป็นอนุกรมฟูรีเยร์ในสมการ(4.4) ซึ่งอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ได้จะลู่เข้า และค่าผลบวกของอนุกรมมีค่าเท่ากับ $f(x)$ ยกเว้นจุดที่ทำให้ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง ในกรณียกเว้นนี้ค่าผลบวกของอนุกรมฟูรีเยร์ของ $f(x)$ จะมีค่าไม่เท่ากับ $f(x)$ แต่จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวาของ $f(x)$ ที่จุดที่ทำให้ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

นิยาม 4.1 ความต่อเนื่องเป็นช่วง (piecewise continuous)

ฟังก์ชัน $f(x)$ จะเรียกว่าต่อเนื่องเป็นช่วงที่ช่วง $a \leq x \leq b$ ถ้า $f(x)$ หาค่าได้ทุกจุดภายในช่วงนั้นๆ และทำให้ช่วงนั้นสามารถแบ่งออกเป็นช่วงเล็กๆ (subinterval) ได้หลายๆช่วง โดยในแต่ละช่วง $f(x)$ ต้องต่อเนื่อง และสามารถหาค่าลิมิตได้ (finite limit) เมื่อ x เข้าใกล้จุดปลายของ subinterval จากภายใน

นิยาม 4.2 อนุพันธ์ทางด้านซ้าย และทางขวา (left and right hand limit)

1. อนุพันธ์ทางซ้ายของ $f(x)$ ที่จุด $x_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \right), h > 0$ เมื่อ ลิมิตหาค่าได้
2. อนุพันธ์ทางขวาของ $f(x)$ ที่จุด $x_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right), h > 0$ เมื่อ ลิมิตหาค่าได้

ทฤษฎีบท 4.1 ทฤษฎีของดิริคเลท (Dirichlet's Theorem)

ถ้าฟังก์ชันคาบ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ 2π และต่อเนื่องเป็นช่วงๆในช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$ โดยที่มีอนุพันธ์ทางด้านซ้ายมือ และอนุพันธ์ทางด้านขวามือที่แต่ละจุดในช่วงดังกล่าว แล้วอนุกรมฟูรีเยร์ของ $f(x)$ จะลู่เข้า โดยผลบวกของฟังก์ชัน $f(x)$ เท่ากับค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้นๆยกเว้นที่จุด x_0 ซึ่งทำให้ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง ค่าผลบวกของอนุกรมจะเท่ากับค่าเฉลี่ยของลิมิตทางซ้ายมือ และลิมิตทางด้านขวามือของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด x_0

4.3 ฟังก์ชันที่มีคาบ $p = 2L$

ในเรื่องการประยุกต์ของอนุกรมฟูรีเยร์คาบที่พบอาจมีค่าไม่เท่ากับ 2π แต่เราสามารถแปลงฟังก์ชันที่มีคาบ $p = 2\pi$ ให้เป็นฟังก์ชันที่มีคาบ $p = 2L$ ได้โดยที่ L คือช่วงความยาวของการสั้นในเส้นเชือก ท่อนไม้ หรือ โลหะ เป็นต้น

ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีคาบ $p = 2L$ มีลักษณะเป็นอนุกรมฟูรีเยร์แล้ว อนุกรมฟูรีเยร์ดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (4.5)$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ของ $f(x)$ หาได้จากสูตรของออยเลอร์

$$\begin{aligned} (a) \quad a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ (b) \quad a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ (c) \quad b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.4 ฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่

ในการพิจารณาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์นั้นจำเป็นต้องพิจารณาด้วยว่า ฟังก์ชันเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

โดยเราจะเรียกฟังก์ชัน $g(x)$ ว่าเป็นฟังก์ชันคู่ (even function) ก็ต่อเมื่อ

$$g(-x) = g(x) \quad \text{สำหรับทุกๆค่าของ } x$$

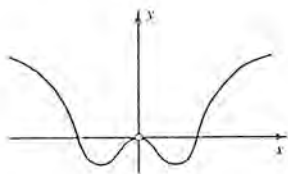
กราฟของฟังก์ชันคู่จะสมมาตร เมื่อเทียบกับแกน y ดังรูปที่ 4.3

เราจะเรียกฟังก์ชัน $h(x)$ ว่าเป็นฟังก์ชันคี่ (odd function) ก็ต่อเมื่อ

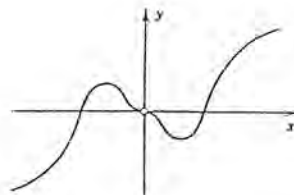
$$h(-x) = -h(x) \quad \text{สำหรับทุกๆค่าของ } x$$

กราฟของฟังก์ชันคี่จะสมมาตรเมื่อเทียบกับจุดกำเนิดของแกนพิกัดฉาก ดังรูปที่ 4.4 ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่า $\cos nx$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $\sin nx$ เป็นฟังก์ชันคี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 ฟังก์ชันคู่



รูปที่ 4.4 ฟังก์ชันคี่

ถ้า $g(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ แล้ว

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx \quad \text{เมื่อ } g \text{ เป็นฟังก์ชันคู่}$$

ถ้า $h(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ แล้ว

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 0 \quad \text{เมื่อ } h \text{ เป็นฟังก์ชันคี่}$$

สำหรับ ผลคูณ $q = gh$ ของฟังก์ชันคู่ g และฟังก์ชันคี่ h ค่าของฟังก์ชันที่ได้มีค่าเป็นฟังก์ชันคี่ เนื่องจาก

$$q(x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -q(x)$$

ดังนั้นถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่แล้ว ค่าของการอินทิเกรต $f \sin \frac{n\pi x}{L}$ ในสมการ(4.6c)มีค่าเป็นฟังก์ชันคี่ และ $b_n = 0$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่แล้ว $f \cos \frac{n\pi x}{L}$ ในสมการ(4.6b) เป็นฟังก์ชันคี่ และ $a_n = 0$ และเราจะได้ว่า

ทฤษฎีบท 4.2 อนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (Fourier Series of even and odd function)

อนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชันคู่ที่มีคาบเท่ากับ $2L$ เป็นอนุกรมฟูรีเยร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad f \text{ เป็นฟังก์ชันคู่}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

อนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชันคี่ที่มีคาบเท่ากับ $2L$ เป็นอนุกรมฟูรีเยร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad f \text{ เป็นฟังก์ชันคี่}$$

โดยที่มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

ในกรณีที่ฟังก์ชันมีคาบเท่ากับ 2π ฟังก์ชันที่ได้จะเป็นฟังก์ชันคี่ และอยู่ในรูปของอนุกรมฟูรีเยร์โคไซน์

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad f \text{ เป็นฟังก์ชันคี่}$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรม

$$a_0 = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

และ สำหรับฟังก์ชันคี่ ค่าของฟังก์ชันอยู่ในรูปของอนุกรมฟูรีเยร์ไซน์

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad f \text{ เป็นฟังก์ชันคี่}$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรม คือ

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.3 ผลบวกของฟังก์ชัน (Sum of Functions)

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ของผลบวกของฟังก์ชัน $f_1 + f_2$ จะสอดคล้องกับค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน f_1 และ f_2

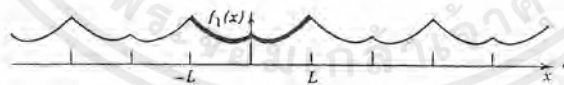
ค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ของ cf จะเท่ากับ c คูณด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน f

4.5 การแผ่ขยายครึ่งช่วงคาบ

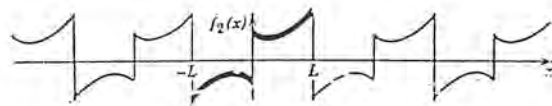
ในทางปฏิบัติบางครั้งเราจะต้องใช้อนุกรมฟูรีเยร์ในการเชื่อมต่อฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งให้ค่ามาเพียงบางช่วงคือ $0 \leq x \leq L$ เท่านั้น (ดูรูปที่ 4.5a) ซึ่งเราสามารถขยายฟังก์ชัน $f(x)$ และคาบ L โดยแทนฟังก์ชันการแผ่ขยายด้วยอนุกรมฟูรีเยร์ ฟังก์ชันส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันไซน์ โดยการแผ่ขยายของฟังก์ชัน $f(x)$ ครั้งแรกจาก $0 \leq x \leq L$ เป็นฟังก์ชันคู่บนช่วง $-L \leq x \leq L$ ดังรูปที่ 4.5a จากนั้นขยายฟังก์ชันใหม่เป็นฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ $2L$ และเมื่อเป็นฟังก์ชันคู่จึงสามารถเขียนแทนโดยอนุกรมฟูรีเยร์โคไซน์ และสามารถขยายฟังก์ชัน $f(x)$ จาก $0 \leq x \leq L$ เป็นฟังก์ชันคี่บนช่วง $-L \leq x \leq L$ ดังรูปที่ 4.5c



รูปที่ 4.5a ฟังก์ชัน $f(x)$



รูปที่ 4.5b การแผ่ขยายของฟังก์ชันคู่ที่มีคาบเท่ากับ $2L$



รูปที่ 4.5c การแผ่ขยายของฟังก์ชันคี่ที่มีคาบเท่ากับ $2L$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นขยายฟังก์ชันใหม่เป็นฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ $2L$ เมื่อเป็นฟังก์ชันนี้ทำให้สามารถเขียนแทน โดยอนุกรมฟูรีเยร์ไซน์ซึ่งอนุกรม 2 อนุกรมนี้เราเรียกว่าการแผ่ขยายครึ่งคาบของฟังก์ชัน $f(x)$ การแผ่ขยายครึ่งคาบของฟังก์ชันโคไซน์คือ

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

โดยที่

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{L_0}^L f(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{L_0}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

การแผ่ขยายครึ่งคาบของฟังก์ชันไซน์คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

ที่

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{L_0}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

4.6 รูปแบบเชิงซ้อนของอนุกรมฟูรีเยร์

ในบทนี้ เราจะแสดงอนุกรมฟูรีเยร์จากสมการ(4.7)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.7)$$

สมการ(4.7)สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเชิงซ้อนได้ ซึ่งสามารถคำนวณได้ง่ายๆโดยใช้ สูตรของ ออยเลอร์

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

(ได้มาจาก $\cos(-t) = \cos(t)$, $\sin(-t) = -\sin(t)$) เมื่อ $t = nx$ ทำให้

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \quad (4.8)$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx \quad (4.9)$$

นำสมการ(4.8)บวกกับสมการ(4.9)นำผลลัพธ์ที่ได้หารด้วยสองจะได้

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \quad (4.10)$$

นำสมการ(4.8)ลบกับสมการ(4.9)นำผลลัพธ์ที่ได้หารด้วยสองจะได้

$$\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \quad (4.11)$$

จากนั้นแทน $1/i = -i$ ในพจน์ $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ จากสมการ(4.7) จะได้

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{1}{2}a_n(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i}b_n(e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \end{aligned}$$

จากสมการนี้ สามารถเขียนสมการ(4.7)ได้ใหม่เป็น

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}) \quad (4.12)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $c_0 = a_0$ และจากการนำสมการ(4.7)ลบด้วยสมการ(4.9)และจากสูตรของออยเลอร์ในสมการ(4.3)จะได้

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \\ k_n &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

สุดท้าย ถ้าเราให้ $k_n = c_{-n}$ จากสมการ(4.12) และสมการ(4.13) จะได้

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \end{aligned} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.14)$$

เรียก $f(x)$ ว่ารูปแบบเชิงซ้อนของอนุกรมฟูรีเยร์และเรียก c_n ว่าเป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบเชิงซ้อนของอนุกรมฟูรีเยร์ของ $f(x)$

จะเห็นได้ว่าสมการ(4.14) สามารถ derived ได้โดยการคูณอนุกรมในสมการ(4.14) ด้วย e^{inx} โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม แล้วอินทิเกรตสมการดังกล่าวจาก $-\pi$ ถึง π จะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

เมื่อ $n = m, e^0 = 1$ และค่าของการอินทิเกรตเท่ากับ 2π ดังนั้นจะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = 2\pi c_n$$

จากสมการ(4.11) จะได้ว่าค่าของการอินทิเกรตตัวอื่นมีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx &= \frac{1}{i(n-m)} (e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}) \\ &= \frac{1}{i(n-m)} 2i \sin(n-m)\pi = 0 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อินทิกรัลฟูรีเยร์ และการแปลงฟูรีเยร์

5.1 อินทิกรัลฟูรีเยร์

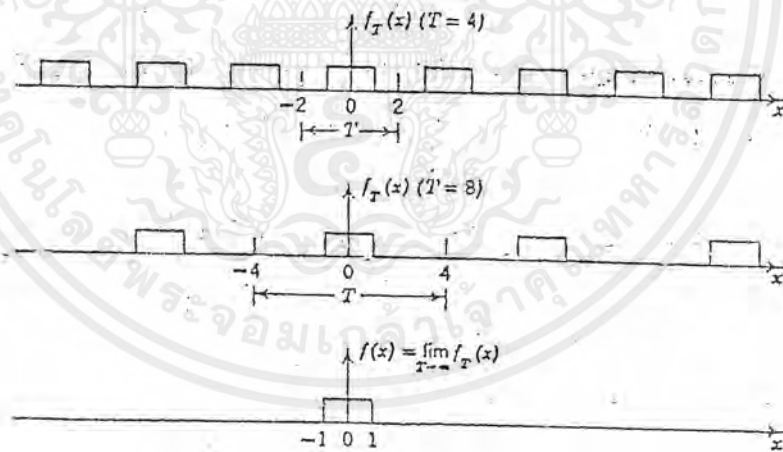
ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาถึงการนำอนุกรมฟูรีเยร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันคาบ (periodic function) ส่วนในบทนี้เราจะศึกษาการนำอนุกรมฟูรีเยร์มาใช้ในการแก้ปัญหาฟังก์ชันที่ไม่เป็นคาบ (non-periodic function) โดยพิจารณาว่าฟังก์ชันประเภทนี้เป็นฟังก์ชันคาบที่มีช่วงคาบขยายกว้างออกเป็นอนันต์ ซึ่งการขยายช่วงคาบในลักษณะนี้มีผลทำให้อนุกรมฟูรีเยร์กลายเป็นอินทิกรัลฟูรีเยร์

และเพื่อความสะดวกในการศึกษา เราจะพิจารณาดูผลของการขยายช่วงคาบอย่างง่าย จากตัวอย่างของฟังก์ชันที่มีลักษณะเป็นคลื่นรูปจตุรัส (square waves)

ตัวอย่าง 5.1

กำหนดฟังก์ชันคาบที่มีลักษณะเป็นคลื่นรูปจตุรัส $f_L(x)$ โดยที่คาบ $2L > 2$ และ

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & , -L < x < -1 \\ 1 & , -1 < x < 1 \\ 0 & , 1 < x < L \end{cases}$$



รูปที่ 5.1 ลักษณะของคลื่น และแอมพลิจูด

เมื่อ $L \rightarrow \infty$ แล้วฟังก์ชัน $f(x)$ กลายเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นคาบ (non-periodic function) และ

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{เมื่อ } x \text{ ไม่อยู่ช่วงดังกล่าว} \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราสามารถแยกสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ของ f_L เมื่อค่า L เพิ่มขึ้นได้ (ดูจากสมการ 2.6 บทที่ 2) เนื่องจาก f_L เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้นค่า n ใดๆ พบว่า $b_n = 0$ และจะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{L} \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2 \sin(n\pi / L)}{L \cdot n\pi / L} \end{aligned}$$

ซึ่งลำดับของสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์นี้เรียกว่า amplitude spectrum ของฟังก์ชัน f_L เนื่องจาก $|a_n|$ มีค่า แอมพลิจูดมากที่สุดของลูกคลื่น จากรูปที่ 5.1 แสดงให้เห็นว่า spectrum ของคาบ $2L$ เท่ากับ 4,8,16 พบว่าเมื่อ L เพิ่มขึ้นค่าความหนาแน่นของแอมพลิจูดก็จะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆจนทำให้แอมพลิจูดมีค่าเป็นศูนย์

ให้ฟังก์ชันคาบ $f_L(x)$ มีคาบเท่ากับ $2L$ สามารถเขียนโดยใช้ออนุกรมฟูรีเยร์ได้เป็น

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w_n = \frac{n\pi}{L}$$

ถ้าเราแทนค่า a_0, a_n และ b_n (จากสมการ(2.6) ในบทที่ 2) ลงไปในอนุกรม โดยอินทิเกรตเทียบ v ดังนั้นจะได้

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right]$$

ให้ $\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$ เนื่องจาก $1/L = \Delta w / \pi$ เราสามารถจัดรูปแบบใหม่ได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + (\sin w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right] \quad (5.1)$$

ต่อจากนั้นให้ $L \rightarrow \infty$ และสมมติว่าค่าที่ได้ไม่เป็นฟังก์ชันคาบ

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x)$$

เนื่องจาก $1/L \rightarrow 0$ และค่าของพจน์แรกทางด้านขวามือของสมการ(5.1)จึงมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ด้วย ดังนั้น

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \right] dw \quad (5.2)$$

และให้

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \quad (5.3)$$

เราสามารถเขียนสมการ(5.2)ใหม่ได้อยู่ในรูป

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw \quad (5.4)$$

ซึ่งเรียก $f(x)$ นี้ว่า อินทิกรัลฟูรีเยร์

ทฤษฎีบท 5.1 อินทิกรัลฟูรีเยร์(Fourier Integrals)

ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ในทุกๆ subinterval ที่มีความยาวจำกัด และมีอนุพันธ์ทางขวามือ และซ้ายมือที่ทุกๆจุด และ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ สามารถหาค่าได้แล้ว $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง ค่าอินทิกรัลฟูรีเยร์เท่ากับค่าเฉลี่ยของลิมิตทางขวามือ และซ้ายมือที่จุดนั้นๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2 อินทิกรัลฟูรีเยร์ของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์

สำหรับฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่ การหาค่าอินทิกรัลของอนุกรมฟูรีเยร์สามารถทำได้ง่ายๆ โดย

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่แล้ว จากสมการ(5.3)จะได้ $B(w) = 0$ และ

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv dv \quad (5.5)$$

และจากสมการ(5.4)สามารถลดรูปลงเป็น อินทิกรัลของอนุกรมฟูรีเยร์โคไซน์(Fourier Cosine Integrals) ดังนี้

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx dw \quad f \text{ เป็นฟังก์ชันคู่} \quad (5.6)$$

ในทำนองเดียวกันจากสมการ(5.3)ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ แล้ว จะได้ $A(w) = 0$ และ

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin wv dv \quad (5.7)$$

และจากสมการ(5.4) สามารถลดรูปลงได้เป็น อินทิกรัลของอนุกรมฟูรีเยร์ไซน์ (Fourier Sine Integrals)

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx dw \quad f \text{ เป็นฟังก์ชันคี่} \quad (5.8)$$

5.3 การคำนวณค่าของอินทิกรัล

พิจารณา วิธีการคำนวณจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.2 อินทิกรัลลาปลาซ(Laplace Integrals)

จงหาอินทิกรัลฟูรีเยร์ของ

$$f(x) = e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

จากสมการ(5.5)จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv dv$$

อินทิเกรตทีละส่วน(by part)

$$\int e^{-kv} \cos wv dv = -\frac{k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right)$$

ถ้า $v = 0$ ค่าของการอินทิเกรตเท่ากับ $-k/(k^2 + w^2)$ เมื่อ $v \rightarrow \infty$ ค่าผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเข้าใกล้ ศูนย์ ดังนั้น

$$A(w) = \frac{2k/\pi}{k^2 + w^2}$$

แทนค่า $A(w)$ ลงในสมการ(5.6)จะได้

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} dw \quad (x > 0, k > 0) \quad (5.9)$$

และจากสมการด้านบนจะเห็นได้ว่า

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0) \quad (5.10)$$

ในทำนองเดียวกันจากสมการ(5.7)จะได้

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kv} \sin wv dv$$

อินทิเกรตทีละส่วน

$$\int e^{-kv} \sin wv dv = -\frac{w}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(\frac{k}{w} \sin wv + \cos wv \right)$$

เมื่อ $v = 0$ ค่าของการอินทิเกรตจะได้ $-w/(k^2 + w^2)$ และเมื่อ $v \rightarrow \infty$ ค่าผลลัพธ์ที่ได้เข้าใกล้ ศูนย์ ดังนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$B(w) = \frac{2w/\pi}{k^2 + w^2} \quad (5.11)$$

จากสมการ(5.8) จะได้อินทิกรัลของอนุกรมฟูรีเยร์ไซน์ (Fourier Sine Integral)

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} dw$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0) \quad (5.12)$$

ซึ่งอินทิกรัลในสมการ(5.11)และสมการ(5.12) เรียกว่า อินทิกรัลลาปลาซ (Laplace Integrals)

5.4 การแปลงฟูรีเยร์

ในการแก้ปัญหาค่าขอบเขตบนช่วงจำกัด $-L < x < L$ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตเป็นคาบด้วย นั้น เราจะใช้อนุกรมฟูรีเยร์ในรูปแบบเชิงซ้อน คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L} \quad (5.13)$$

มาช่วยในการหาผลเฉลย ในกรณีนี้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคาบ และมีคาบเท่ากับ $2L$ และสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ มีค่าดังนี้คือ

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx \quad (5.14)$$

ถ้าเรานำค่าของ c_n จาก (5.14) ไปแทนใน (5.13) และเปลี่ยนตัวแปรจาก x เป็น y ด้วย เพื่อให้แตกต่างจากตัวแปร x ในสมการ (5.13) จะสามารถเขียนฟังก์ชัน $f(x)$ ที่อยู่ในช่วง $-L < x < L$ ได้ใหม่ดังนี้ คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{in\pi y/L} dy \right] e^{-in\pi x/L} \quad (5.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ(5.15)ข้างต้นได้ให้แนวความคิดว่า ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $-\infty < x < \infty$ ในขณะที่ $L \rightarrow \infty$ แล้ว $f(x)$ ควรจะเท่ากับลิมิตของสมการ(5.15)สำหรับกรณีนี้ อาจจะคิดว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคาบที่คาบเป็นอนันต์ก็ได้ ลิมิตของ(5.15) ในขณะที่ $L \rightarrow \infty$ นั้นมีค่า ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{in\pi y/L} dy \right] e^{-in\pi x/L} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y} dy \right] e^{-i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

การพิสูจน์ผลลัพธ์ข้างต้นจะเป็นดังนี้คือ ให้

$$\omega = \frac{n\pi}{L} = 2\pi \left(\frac{n}{2L} \right)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ในเชิงฟิสิกส์เราอาจจะคิดว่า ω คือ จำนวนคลื่น(Wave Number) ในระยะทาง 2π รูปที่ 5.2 แสดงค่าของ ω บนเส้นจำนวน



รูปที่ 5.2 จำนวนคลื่นเต็มหน่วย (Discrete Wave Number)

ต่อไปให้ $\Delta\omega$ แทนผลต่างระหว่างค่าของจำนวนคลื่นที่อยู่ติดกัน นั่นคือ

$$\Delta\omega = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

แทนค่า $\Delta\omega$ ลงในสมการ (5.15) จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^L f(y) e^{i\omega y} dy e^{-i\omega x} \quad (5.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะสังเกตได้ว่าผลบวกในสมการ(5.16)นั้นเป็นการบวกพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีฐานเท่ากับ $\Delta\omega$ และมีความสูงเท่ากับ $(1/2\pi) \left[\int_{-L}^L f(y)e^{i\omega y} dy \right] e^{-i\omega x}$ โดยเริ่มต้นการบวกตั้งแต่ $n = -\infty$ ถึง $n = \infty$ ดังนั้นผลบวกทางขวามือของสมการ(5.16) ก็จะเป็นผลบวกเรขาคณิตเมื่อให้ $L \rightarrow \infty$ แล้ว $\Delta\omega$ จะมีค่าน้อยมากซึ่งเราจะเขียนแทนด้วย $d\omega$ ส่วนความสูงนั้นก็จะมีค่าโดยประมาณเท่ากับ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(y)e^{i\omega y} dy e^{-i\omega x}$$

เพราะฉะนั้นขณะที่ $L \rightarrow \infty$ สมการ(5.16) ก็จะเปลี่ยนเป็นอินทิกรัลรีมันน์

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-L}^L f(y)e^{i\omega y} dy \right] e^{-i\omega x} d\omega \quad (5.17)$$

เรียกสมการ(5.17) ว่า เอกลักษณ์อินทิกรัลฟูรีเยร์ (Fourier Integral Identity) ให้ $F(\omega)$ หมายถึงการแปลงฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังนี้

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx \quad (5.18)$$

หลังจากที่ได้แปลง $f(x)$ ไปแล้ว เรายังคงนำ $f(x)$ กลับคืนมาได้โดยการใช้สมการ(5.17) ดังนี้คือ

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x} d\omega \quad (5.19)$$

และเรียก $f(x)$ ว่าเป็น การแปลงฟูรีเยร์ผกผัน (Inverse Fourier Transform) ของ $F(\omega)$ สมการ (5.19) ได้แสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ประกอบไปด้วยคลื่น $e^{-i\omega x}$ สำหรับทุกจำนวนคลื่น ω ที่เป็นจำนวนจริง และทุกความยาวคลื่น นอกจากนี้จะเรียกนิพจน์ทางขวามือของสมการ(5.19) ว่าตัวแทนอินทิกรัลฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ (Fourier Integral Representation of $f(x)$) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า อินทิกรัลฟูรีเยร์(Fourier Integral)สำหรับการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(x)$ นั้นจะแทนแอมพลิจูด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ของคลื่นที่มีจำนวนคลื่นเท่ากับ ω ซึ่งจะทำหน้าที่คล้ายคลึงกับสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์ของอนุกรมฟูรีเยร์นั่นเอง

ข้อสังเกต

1. ค่าคงที่ $1/2\pi$ ในสมการ(5.18) นั้นอาจจะถูกเปลี่ยนเป็น $y/2\pi$ ก็ได้ โดยที่ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ตัวหนึ่ง และเมื่อได้เปลี่ยนค่าคงที่ไปแล้วต้องนำนิพจน์ $1/y$ คูณนิพจน์ทางขวามือของสมการ(5.19) ด้วย ตามความเป็นจริงแล้วเราสามารถเลือกค่าคงที่เป็นอะไรก็ได้ สำหรับสมการ(5.18) และสมการ(5.19) แต่ผลคูณของค่าคงที่ทั้งสองยังคงเป็น $1/2\pi$ อยู่ก็พอ ในที่นี้เลือก $y = 1$ แต่อาจจะเลือก $y = \sqrt{2\pi}$ ก็ได้

2. เงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้จะเปลี่ยนไปทีละข้อเพื่อเพียงพอสำหรับการมีอยู่สำหรับการแปลงฟูรีเยร์ของสมการ(5.18) ของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งนิยามตลอดแกน x

2.1 ฟังก์ชัน $f(x)$ จะต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนทุกช่วงของจำนวนจริงที่มีความยาวจำกัด

2.2 ฟังก์ชัน $f(x)$ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้อย่างสมบูรณ์ (Absolutely Integrable) บนแกน x นั่นคือ ลิมิตแต่ละตัวต่อไปนี้จะต้องมีอยู่และมีค่าจำกัดด้วย

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{\infty} f(x) dx$$

นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$$

3. เนื่องจากสมการ(5.17),(5.18) และ(5.19) เกี่ยวข้องกับการแปลงฟูรีเยร์ ดังนั้นเพื่อให้อินทิกรัลในสมการทั้งสามดังกล่าวมีอยู่ จึงจะขอสมมติว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ปรากฏอยู่ในสมการดังกล่าวมีคุณสมบัติตามข้อ (2.1) และ (2.2) ข้างต้น ด้วยข้อสมมติเช่นว่านี้จะทำให้ตรงจุด x ที่ $f(x)$ ซึ่งอยู่ทางซ้ายมือของสมการ(5.17) และ (5.18) ด้วย $[f(x+) + f(x-)]/2 = f(x)$

4. เพื่อความสะดวกในบางครั้งจะมีการใช้สัญลักษณ์

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$$

สำหรับการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(x)$ และจะมีการใช้สัญลักษณ์

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนการแปลงฟูรีเยร์ผกผันของ $F(\omega)$

ตัวอย่าง 5.3 การแปลงฟูรีเยร์ของฟังก์ชันค่าคงที่

จงหาการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(x) = k$ ถ้า $0 < x < a$ และ $f(x) = 0$ ที่จุดอื่น ๆ
วิธีทำ จากสมการ(5.18)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ke^{i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a ke^{i\omega x} dx \\ &= \frac{k}{2\pi} \left(\frac{e^{i\omega a} - 1}{i\omega} \right) = \frac{k(e^{i\omega a} - 1)}{2\pi i\omega} \end{aligned}$$

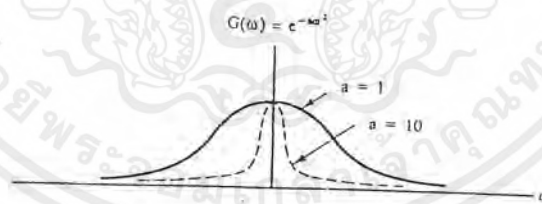
ตัวอย่างนี้แสดงว่าการแปลงฟูรีเยร์โดยทั่วไปแล้วจะเป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 5.4 การแปลงฟูรีเยร์ของเส้นโค้งแบบเกาส์ (Gaussian curve)

จงหาการแปลงฟูรีเยร์ของเส้นโค้งรูประฆัง (Bell-shaped curve) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันทั่วไปในนามของเส้นโค้งเกาส์ ที่มีการนิยามดังนี้ คือ

$$f(x) = e^{-ax^2} ; a > 0$$

รูปที่ 5.3 ข้างล่างนี้แสดงเส้นโค้งเกาส์ ที่ $a = 1$ และ $a = 10$



รูปที่ 5.3 เส้นโค้งแบบเกาส์

วิธีทำ จากสมการ(5.18)พบว่า

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ax^2 + i\omega x] dx$$

ทำให้เป็นกำลังสองสัมบูรณ์เฉพาะพจน์ที่เป็นเลขยกกำลัง จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{e^{-ax^2}\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\sqrt{ax} - \frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2 + (\frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{\omega^2}{4a}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\sqrt{ax} - \frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2] dx\end{aligned}$$

ให้ $v(x) = \sqrt{ax} - (i\omega/2\sqrt{a})$ ดังนั้น $dx = dv/\sqrt{a}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{e^{-ax^2}\} &= \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{\omega^2}{4a}) (\frac{1}{\sqrt{a}}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\sqrt{ax} - \frac{i\omega}{2\sqrt{a}})^2] dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{\omega^2}{4a}) (\frac{1}{\sqrt{a}}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv\end{aligned}$$

จากนั้น ให้ $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv$ ต้องแสดงว่า $I = \sqrt{\pi}$ ดังนั้นการแปลงฟูรีเยร์ของเส้นโค้งเกาส์จะมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(e^{-ax^2}) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{-\omega^2/4a}\end{aligned}$$

เนื่องจากการแสดงว่า $I = \sqrt{\pi}$ ค่อนข้างยากดังนั้นเราจึงเลี่ยงมาแสดงว่า $I^2 = \pi$ และจาก

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

จากนั้นเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ x^2 + y^2 &= r^2; dx dy = r dr d\theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

นำมาเขียนใหม่จะได้เป็น

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \pi$$

ซึ่งจากการพิสูจน์จะพบได้ว่า การแปลงฟูรีเยร์ของเส้นโค้งเกาส์ ยังคงเป็นเส้นโค้งเกาส์อยู่

5.5 การแปลงฟูรีเยร์ และสมการความร้อน

5.5.1 สมการความร้อน

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงการใช้การแปลงฟูรีเยร์เพื่อการแก้ปัญหสมการความร้อนบนช่วงที่มีความยาวไม่จำกัด ซึ่งได้แสดงในหัวข้อก่อนหน้านี้มาแล้วว่า ฟังก์ชัน $e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t}$ เป็นผลเฉลยของสมการความร้อน $\partial u / \partial t = k \partial^2 u / \partial x^2$ สำหรับทุกค่าของ ω และรูปทั่วไปคือ

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega \quad (5.19)$$

ซึ่งสมการดังกล่าวก็เป็นผลเฉลยของสมการความร้อนด้วย ซึ่งผลเฉลยนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = f(x)$ ถ้า

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega x} dx \quad (5.20)$$

จากนิยามของการแปลงฟูรีเยร์ จะสังเกตได้ว่าพจน์ทางด้านขวามือของสมการ(5.20) คือตัวแทนอินทิกรัลฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังนั้น $c(\omega)$ ก็จะเป็นการแปลงฟูรีเยร์ของการกระจายอุณหภูมิเริ่มต้น $f(x)$ นั่นคือ

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad (5.21)$$

สมการ(5.19)และสมการ(5.21)จะเป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นสำหรับสมการความร้อนบนโดเมนซึ่งมีความยาวไม่จำกัด ตามที่เราต้องการ

เป็นที่น่าสังเกตว่าผลเฉลยที่หามาได้อยู่ในรูปแบบที่ยุ่งยากมากเกินไป ดังนั้นเราจึงหาวิธีที่จะทำให้ผลเฉลยของเรามีรูปแบบที่ง่ายต่อการใช้งานวิธีการก็คือนำค่าของ $c(\omega)$ จากสมการ(5.21) ไปแทนลงในสมการ(5.19) ผลลัพธ์จะเป็นดังนี้คือ

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y} dy \right] e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{-i\omega(x-y)} d\omega \right] dy \quad (5.22)$$

ถ้าให้

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{-i\omega x} d\omega \quad (5.23)$$

แล้วพจน์ซึ่งอยู่ในวงเล็บทางด้านขวามือของสมการ(5.22)ก็จะเป็นฟังก์ชัน $g(x-y)$ นั้นเอง แต่ว่า $g(x)$ คือการแปลงฟูรีเยร์ผกผันของ $e^{-k\omega^2 t}$ แทนค่า $a = kt$ ลงในสมการ

$$g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}$$

จะได้ว่า

$$g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-x^2/4kt}$$

ดังนั้น

$$g(x-y) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-(x-y)^2/4kt}$$

แทนค่า $g(x-y)$ ลงในวงเล็บซึ่งอยู่ทางด้านขวามือของสมการ(5.22) และนำค่า $1/2\pi$ เข้าไปคูณไว้ข้างในอินทิกรัลด้วยจะได้ว่า

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-y)^2/4kt} dy \quad (5.24)$$

สมการ(5.24)จะเป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการความร้อนซึ่งอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นตามต้องการ

ตัวอย่าง 5.5 จงหาผลเฉลยของสมการความร้อนซึ่งได้กำหนดไว้พร้อมกับปัญหาค่าเริ่มต้นดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 100 & x > 0 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นว่า เมื่อเวลา $t = 0$ อุณหภูมิบริเวณขวามือของท่อนเหล็ก ท่อนหนึ่ง (ซึ่งมีความยาวไม่จำกัด) มีค่าเท่ากับ 100 องศา(เลือกหน่วยได้ตามความเหมาะสม) ส่วนอุณหภูมิทางด้านซ้ายมือกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ เราต้องการทราบว่าเมื่อเวลาผ่านไป t วินาทีพลังงานความร้อนจากทางด้านขวาจะแพร่ไปทางด้านซ้ายในลักษณะอย่างไร ผลเฉลยของสมการนี้หาได้จากสมการ(5.24)คือ

$$u(x, t) = \frac{100}{\sqrt{4k\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} dy$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $z = (y-x)/\sqrt{4kt}$ ดังนั้น $dz = dy/\sqrt{4kt}$ และสังเกตว่าที่จุด $y = 0$ พบว่า $z = -x/\sqrt{4kt}$ และ $z \rightarrow \infty$ ในขณะที่ $y \rightarrow \infty$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{100}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-x/\sqrt{4kt}}^{\infty} e^{-z^2} (\sqrt{4kt}) dz \\ &= \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{4kt}}^{\infty} e^{-z^2} dz \end{aligned}$$

เนื่องจากฟังก์ชัน $f(z) = e^{-z^2}$ เป็นฟังก์ชันคู่ ($f(-z) = f(z)$) เพราะฉะนั้นพื้นที่ภายในเส้นโค้งของฟังก์ชันดังกล่าวจากจุด 0 ถึงจุด $-x/\sqrt{4kt}$ จึงมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้งจากจุด 0 ถึงจุด $x/\sqrt{4kt}$ (รูปที่ 5.4)



รูปที่ 5.4 พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งเกาส์

จากข้อสังเกตข้างต้นพบว่า

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{100}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-x/\sqrt{4kt}}^0 e^{-z^2} dz + \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \right] \\ &= \frac{100}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2} dz + \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \right] \end{aligned}$$

ซึ่งได้มีการคำนวณไว้แล้วในตัวอย่างที่ 1 หัวข้อ 5.4 แล้วว่า

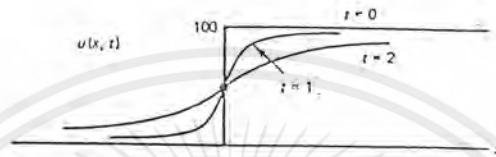
$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}/2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$u(x, t) = 50 + \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2} dz \tag{5.25}$$

เนื่องจากได้มีการสร้างตารางค่าของพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งเกาส์(หรือเส้นโค้งปกติ)เรียบร้อยแล้ว ดังนั้นเมื่อมีการกำหนดค่าของ x และ t มาให้ เราก็สามารถใช้ตารางดังกล่าวมาคำนวณหาค่าอินทิกรัลทางขวามือของสมการ(5.25)ได้รูปด้านล่างนี้แสดงกราฟของ $u(x, t)$ เมื่อเวลา $t = 0, 1,$ และ 2 วินาที ตามลำดับ



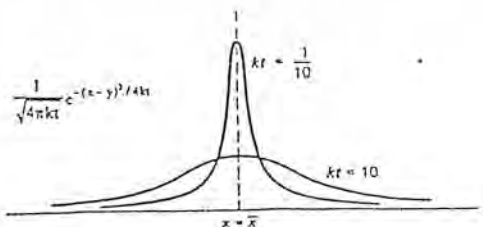
รูปที่ 5.5 การกระจายของอุณหภูมิในท่อนเหล็กที่มีความยาวไม่จำกัด

ข้อสังเกต

- เมื่อพิจารณาจากสมการ(5.24) แล้วจะพบว่าถ้ากำหนดให้เวลา t มีค่าคงที่เท่ากับ t_0 แล้วอุณหภูมิ $u(x, t_0)$ จะขึ้นอยู่กับการกระจายของอุณหภูมิเริ่มต้น $u(x, 0) = f(x)$ เท่านั้น ดังนั้นถ้านิยามให้

$$G(x, t, y, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-y)^2/4kt}$$

แล้วฟังก์ชันนี้จะมีอิทธิพลต่ออุณหภูมิ $u(x, t)$ เมื่อเวลา t ใดๆ เราจึงเรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันอิทธิพล (Influence Function) ซึ่งแสดงไว้ในกราฟรูปที่ 5.6 ดังต่อไปนี้



รูปที่ 5.6 ฟังก์ชันอิทธิพลสำหรับความร้อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ t มีค่าน้อย กราฟของฟังก์ชันก็จะแผ่กว้างออกไปน้อย ซึ่งทำให้มีอิทธิพลต่ออุณหภูมิ $u(x, t)$ น้อยตามไปด้วย ในขณะที่เดียวกันถ้า t มีค่ามาก กราฟของฟังก์ชันก็จะแผ่กว้างออกไปมาก ทำให้มีอิทธิพลต่ออุณหภูมิได้มากเช่นกัน ซึ่งจะสังเกตได้จากรูปที่ 5.5 และถ้ากำหนดให้ t เป็นค่าคงที่ แล้วอิทธิพลจะเกิดขึ้นมากที่สุดเมื่อ $x = y$ นั่นคือ อุณหภูมิเริ่มต้นที่ y จะมีอิทธิพลสูงสุดที่จุดดังกล่าว และจะค่อยๆลดอิทธิพลลงไปตามจุดต่างๆที่อยู่ห่างออกไป ขณะที่ $t \rightarrow 0$ ฟังก์ชันอิทธิพลจะมีความเข้มข้นมากขึ้นเรื่อยๆ

5.5.2 การแปลงฟูรีเยร์ของอนุพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมาได้มีการนำเสนอวิธีการหาค่าผลเฉลยของสมการความร้อนที่นิยามบนช่วงที่มีความยาวไม่จำกัด และมีเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (5.26)$$

ในกระบวนการหาค่าผลเฉลยดังกล่าว เราเริ่มต้นด้วยวิธีการแยกตัวแปร และนำการแปลงฟูรีเยร์เข้ามาใช้ในการแก้ปัญหา ในบทนี้จะแสดงให้เห็นว่าเราสามารถใช้ในการแปลงฟูรีเยร์ตั้งแต่เริ่มกระบวนการหาค่าผลเฉลยได้ โดยต้องเรียนรู้การแปลงฟูรีเยร์ของอนุพันธ์เสียก่อน ดังนั้นต่อไปนี้จะเสนอวิธีการหาการแปลงฟูรีเยร์ของอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการความร้อนในสมการ (5.26) นั่นคือ $\partial u / \partial t$ และ $\partial^2 u / \partial x^2$ สำหรับการแปลงฟูรีเยร์ของ $\partial u / \partial t$ เราสามารถคำนวณได้โดยการใช้สมการ(5.18) ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} u(x, t) e^{i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{F} \{ u(x, t) \} \end{aligned}$$

จึงสามารถสรุป สูตรแรกได้ว่า

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{F} \{ u(x, t) \} \quad (5.27)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนการแปลงฟูรีเยร์ของ $\partial u / \partial x$ นั้นจะเสนอทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2 ให้ $u(x, t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนโดเมน $R \times (0, +\infty)$ สมมติว่าสำหรับทุกค่า $t \in (0, +\infty)$, $u(x, t)$ เป็นฟังก์ชันราบเรียบเป็นช่วงๆ ในช่วงตัวแปร x และ $u(x, t) \rightarrow 0$ ขณะที่ $x \rightarrow \pm\infty$ สมมติต่อไปอีกว่า $\partial u / \partial x$ อินทิเกรตได้อย่างสมบูรณ์บนแกน x จะได้ว่า

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right\} = (-i\omega) \mathfrak{F}\{u(x, t)\}$$

พิสูจน์

อ้างบนนิยาม(5.16) พบว่า

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\omega x} dx$$

ทำการอินทิเกรตอินทิกรัลทางด้านขวามือทีละส่วน โดยให้

$$f = e^{i\omega x} \quad ; dg = \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\omega x} dx$$

ดังนั้น $df = i\omega e^{i\omega x} dx$; $g = u$

ผลของการอินทิเกรตจะเป็นดังนี้คือ

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{ue^{i\omega x}}{2\pi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\omega x} dx$$

ให้ $u \rightarrow 0$ ขณะที่ $x \rightarrow \pm\infty$ ดังนั้นพจน์แรกของสมการข้างต้นที่ค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้สมการ

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= \frac{-i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\omega x} dx \\ &= -i\omega \mathfrak{F}\{u(x, t)\} \end{aligned}$$

จึงสรุปเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right\} = (-i\omega) \mathfrak{F}\{u(x, t)\} \quad (5.28)$$

การแปลงฟูรีเยร์ของอนุพันธ์ในอันดับที่สูงขึ้นสามารถหาได้จากสมการ(5.28)ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = (-i\omega) \mathfrak{T}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = (-i\omega)^2 \mathfrak{T}\{u(x,t)\}$$

ดังนั้น

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\} = (-i\omega)^n \mathfrak{T}\{u(x,t)\} \quad (5.29)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) สำหรับอนุพันธ์อันดับที่สูงขึ้นนั้นเราต้องการเงื่อนไข $\partial^n u / \partial x^n \rightarrow 0$ ขณะที่ $x \rightarrow \pm\infty$ ด้วยเมื่อได้ศึกษาเรื่องการแปลงฟูริเยร์ของอนุพันธ์ไปแล้ว ต่อจากนี้จะนำเสนอการใช้การแปลงฟูริเยร์เพื่อหาผลเฉลยของสมการความร้อนตั้งแต่ตอนเริ่มต้น

5.5.3 การแปลงฟูริเยร์และสมการความร้อน

พิจารณาสมการความร้อนในสมการ(5.26) เราสนใจที่จะหาผลเฉลยของสมการความร้อนดังกล่าวโดยใช้การแปลงฟูริเยร์ตั้งแต่เริ่มต้นกระบวนการ ก่อนอื่นเริ่มต้นด้วยการประยุกต์การแปลงฟูริเยร์เข้ากับสมการความร้อนผลลัพธ์จะเป็นดังนี้

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = k \mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$

อ้างผลลัพธ์จากสมการ(5.28) และ (5.29) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{T}\{u(x,t)\} = k(-i\omega)^2 \mathfrak{T}\{u(x,t)\} \quad (5.30)$$

ให้ $u(\omega, t) = \mathfrak{T}\{u(x,t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\omega x} dx$ แทนฟังก์ชัน $U(\omega, t)$ ลงในสมการ(5.30) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t) = -k\omega^2 U(\omega, t) \quad (5.31)$$

เปรียบเทียบสมการ(5.26)และสมการ(5.31)จะพบว่าการแปลงฟูริเยร์จะแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ทั้งนี้เพราะว่าอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องตัวแปร x นั้นได้ถูกเปลี่ยนเป็นนิพจน์ทางพีชคณิตซึ่งเป็นตัวคูณของการแปลงไปแล้ว

จากการที่สมการ(5.31)เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$U(\omega, t) = ce^{-k\omega^2 t}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ซึ่งเกิดจากการจัดให้ ω เป็นค่าคงที่ ดังนั้นถ้า ω เปลี่ยนค่าไปแล้ว ค่าคงที่ c ก็จะเปลี่ยนค่าตามไปด้วยเพราะฉะนั้น c จึงเป็นฟังก์ชันของตัวแปร ω ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $c(\omega)$ แทนฟังก์ชัน $c(\omega)$ ลงในสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$U(\omega, t) = c(\omega)e^{-k\omega^2 t} \quad (5.32)$$

เป็นผลเฉลยของสมการ(5.31) เพื่อที่จะหา $c(\omega)$ แทนค่า $t = 0$ ลงในสมการ(5.32) จะได้ว่า

$$c(\omega) = U(\omega, 0) = \mathfrak{F}\{u(x, 0)\} = \mathfrak{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$$

นั่นคือ $c(\omega)$ จะเท่ากับการแปลงฟูริเยร์ของเงื่อนไขเริ่มต้น $f(x)$ ส่วน $e^{-k\omega^2 t}$ นั้นเป็นฟังก์ชันของเกาส์ จึงเป็นการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันเกาส์เช่นกัน พบว่า

$$e^{-k\omega^2 t} = \mathfrak{F}\left\{\sqrt{\pi/kt} e^{-x^2/4kt}\right\}$$

ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนสมการ (5.32) ได้ใหม่ให้อยู่ในรูปของการแปลงฟูริเยร์ดังนี้

$$\mathfrak{F}\{u(x, t)\} = \mathfrak{F}\{f(x)\} \mathfrak{F}\left\{\sqrt{\pi/kt} e^{-x^2/4kt}\right\} \quad (5.33)$$

ต้องการทราบว่าผลคูณของการแปลงทางด้านขวามือของสมการ(5.33)เท่ากับการแปลงของฟังก์ชันอะไร สมมติว่าเท่ากับ $\mathfrak{F}\{h(x)\}$ ดังนั้น

$$\mathfrak{F}\{u(x, t)\} = \mathfrak{F}\{h(x)\} \quad (5.34)$$

จากนั้นเมื่อใส่ \mathfrak{F}^{-1} เข้าไปทั้งสองข้างของสมการ(5.34) จะได้ว่า $u(x, t) = h(x)$ ซึ่งจะต้องหาว่า $h(x)$ ควรเท่ากับเท่าใดจากทฤษฎีในหัวข้อต่อไป ที่ว่า $h(x)$ เท่ากับผลการประสานของ $f(x)$ และ $\sqrt{\pi/kt} e^{-x^2/4kt}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) * \left(\sqrt{\pi/kt} e^{-x^2/4kt}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-(x-y)^2/4kt} dy \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบที่ต้องการคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(x,t) = h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-(x-y)^2/4kt} dy$$

ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับสมการ(5.24) ดังนั้นสรุปได้ว่ากระบวนการหาค่าผลเฉลยของสมการความร้อนโดยใช้การแปลงฟูรีเยร์เป็นดังนี้คือ

1. ใช้การแปลงฟูรีเยร์แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่กำหนดไว้ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. แก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ได้จากข้อที่ 1
3. ให้ใช้เงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ เพื่อหาเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
4. ใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน

5.5.4 ทฤษฎีบทผลการประสาน

ในหัวข้อนี้จะเสนอวิธีการหาค่าฟังก์ชัน $h(x)$ ตามที่ได้กล่าวในหัวข้อที่แล้ว แต่จะพิจารณาสำหรับกรณีทั่วไปดังต่อไปนี้คือสมมติว่า $F(\omega)$ และ $G(\omega)$ เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ ตามลำดับ นั่นคือ

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx & G(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega & g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \end{aligned} \quad (5.35)$$

เราต้องการหาค่าฟังก์ชัน $h(x)$ ที่มีคุณสมบัติว่า

$$\mathfrak{T}\{h(x)\} = \mathfrak{T}\{f(x)\} \mathfrak{T}\{g(x)\} \quad (5.36)$$

แนวทางในการหา $h(x)$ นั้น เราจะสมมติว่ามี $h(x)$ ที่มีทำให้สมการ (5.36) เป็นจริง ให้

$$H(\omega) = \mathfrak{T}\{h(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{i\omega x} dx$$

จากสมการ(5.3.6) พบว่า

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

และ

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (5.37)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำค่าของ $G(\omega)$ จากสมการ(5.35) แทนลงไปในสมการ(5.37) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{i\omega y} dy \right] e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega(x-y)} d\omega \right] dy \end{aligned}$$

พจน์ที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บทางด้านขวามือ มีค่าเท่ากับ $f(x-y)$ (ดูจากสมการ (5.35)) ดังนั้น

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy \quad (5.38)$$

เรียกอินทิกรัลในสมการ(5.38)ว่าเป็นผลการประสานของฟังก์ชัน $g(x)$ และฟังก์ชัน $f(x)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g * f$ ถ้าให้ $x-y = t$ ($dy = -dt$ แต่ $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{\infty}^{-\infty}$) เราสามารถเขียน $h(x)$ ได้ในอีกรูปแบบหนึ่งดังนี้

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt \quad (5.39)$$

ดังนั้น $f * g = g * f$ ฟังก์ชัน $h(x)$ ที่ได้ในที่นี้จะทำให้ สมการ(5.36) เป็นจริงตามต้องการ ดังนั้น เราจึงสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.3 (ทฤษฎีบทการประสาน)

ให้ $R = (-\infty, +\infty)$ สมมติว่า $f(x)$ และ $g(x)$ อินทิเกรตได้อย่างสมบูรณ์บน R และ $f(x)$ หรือ $g(x)$ มีขอบเขตบน R จะได้ว่าอินทิกรัลผลการประสาน

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

สามารถหาค่าได้สำหรับทุก x ใน R นอกจากนี้ยังได้อีกว่า

$$\mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}(f) \mathfrak{F}(g)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ เนื่องจาก $f * g = g * f$ และสมมติว่า $|g| \leq M$ จะได้ว่า

$$|f(t)g(x-t)| \leq M|f(t)|$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(x-t)| dt \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

จาก

$$|h(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(x-t)| dt$$

ดังนั้นเมื่ออ้างสมการก่อนหน้าเข้ามาประกอบกันจะทำให้ $|h(x)| < \infty$ ซึ่งก็คือการที่สามารถหาค่าอินทิกรัลผลการประสานได้นั่นเอง สำหรับการพิสูจน์ผลลัพธ์ที่สองนั้นเราจะใช้ประโยชน์จากบทนิยามของการแปลงฟูรีเยร์ และการสลับที่ของการอินทิเกรตดังนี้ คือ

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f * g) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)e^{i\omega x} dt dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)e^{i\omega x} dx dt \end{aligned}$$

ต่อไปทำการเปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $x-t = y$ จะได้ว่า $x = t + y$ และ

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f * g) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(y)e^{i\omega(t+y)} dy dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{i\omega y} dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{i\omega y} dy \right) \\ &= \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6

ตัวอย่างการประยุกต์ของอนุกรมฟูรีเยร์

6.1 ตัวอย่างการประยุกต์ในทางคณิตศาสตร์และทางฟิสิกส์

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาประยุกต์ผลการแปลงฟูรีเยร์ในการหาค่าอินทิกรัลจำกัดค่าจริง (real definite integral) ของฟังก์ชันที่ปรากฏในทางคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ จากสูตรของการแปลงฟูรีเยร์ในสมการ(6.1)

$$G(f) = \mathfrak{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.1)$$

ถ้าให้ $f = 0$ เราจะได้สูตรของพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $g(t)$ คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = G(0) = \mathfrak{F}[g(t)]|_{f=0} \quad (6.2)$$

ถ้าหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอันดับสองของ $G(f)$ ในสมการ(6.1) แล้วให้ $f = 0$ เราจะได้สูตรของโมเมนต์ที่หนึ่ง(first moment) และโมเมนต์ของความเฉื่อย(moment of inertia) ของ $g(t)$ ตามลำดับดังต่อไปนี้คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} tg(t)dt = G'(0)/(-j2\pi) \quad (6.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 g(t)dt = G''(0)/(-4\pi^2) \quad (6.4)$$

จากทฤษฎีบทของเรย์ลี

ทฤษฎีบท 6.1 ของเรย์ลี(Rayleigh's theorem)

$$\text{ถ้า } g(t) \leftrightarrow G(f) \text{ แล้ว } \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 LHS &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad , f = 0 \\
 &= F[g(t)g^*(t)] = G(f) = G(f) * G^*(-f) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f_1)G^*[f - (-f_1)]df_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f_1)G^*(f_1)df_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \\
 &= RHS
 \end{aligned}$$

เราสามารถให้ทฤษฎีบทของเรย์ลีมาใช้ประโยชน์ได้ด้วยคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (6.5)$$

ตัวอย่าง 6.1 จงหาค่าของ $I = \int_{-\infty}^{\infty} \{\sin(\pi t)/(\pi t)\} dt$

วิธีทำ ใช้สูตรในสมการ(6.2) คือ

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t) dt = \mathfrak{I} [\sin c(t)]|_{f=0} \\
 &= \Pi(f)|_{f=0} = \Pi(0) = 1
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2 จงหาค่าของ $I = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\pi t^2} dt$

วิธีทำ ใช้สูตรในสมการ(6.4) จาก

$$\left[g(t) = e^{-\pi t^2} \right] \leftrightarrow \left[G(f) = e^{-\pi f^2} \right] \quad \text{เราได้ว่า}$$

$$\text{ถ้า } G'(f) = -2\pi f e^{-\pi f^2} \text{ แล้ว } G''(f) = -2\pi e^{-\pi f^2} + 4\pi f^2 e^{-\pi f^2}$$

$$\text{ถ้า } f = 0 \text{ แล้ว } G''(0) = -2\pi$$

ดังนั้น

$$I = G''(0)/(-4\pi^2) = -2\pi/(-4\pi^2) = 1/(2\pi)$$

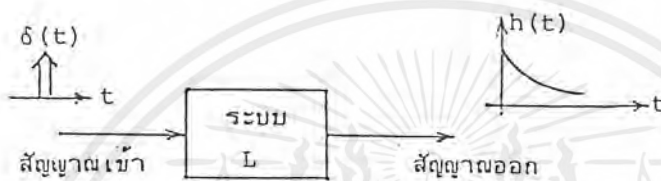
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.2 ตัวอย่างการประยุกต์ทางวิศวกรรมไฟฟ้า

6.2.1 ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบเชิงเส้น

เมื่อระบบเชิงเส้น(linear system) ทางไฟฟ้ามีสัญญาณเข้าเป็นอิมพัลส์ $\delta(t)$ เราจะใช้ผลตอบสนองอิมพัลส์(impulse response) ของระบบเป็น $h(t)$ ถ้าให้ L เป็นตัวดำเนินการของระบบ (system operator) ดังแสดงในรูปที่ 6.1 เราจะได้

$$L[\delta(t)] \equiv h(t) \text{ และ } L[\delta(t-\tau)] \equiv h(t-\tau) \quad (6.6)$$



รูปที่ 6.1 แสดงระบบเชิงเส้นทางไฟฟ้า

ถ้าให้สัญญาณเข้าและสัญญาณออกของระบบนี้เป็น $f_1(t)$ และ $f_0(t)$ ตามลำดับเราจะสามารถแสดงพจน์ของสัญญาณทั้งสองนี้ได้เป็น

$$f_1(t) = f_1(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} f_0(t) &= L[f_1(t)] = L\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right] \quad \text{ถือว่า } f_1(\tau) \text{ คงตัวเมื่อใช้ } L \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) L[\delta(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(t) * f_1(t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

และถ้าให้ $\mathcal{F}[h(t)] = H(f)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันระบบ(system function), $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(f)$ และ $\mathcal{F}[f_0(t)] = F_0(f)$ แล้ว ผลการแปลงฟูริเยร์ของสมการ(6.8) จะให้

$$F_0(f) = H(f)F_1(f) \quad (6.9)$$

ดังนั้น

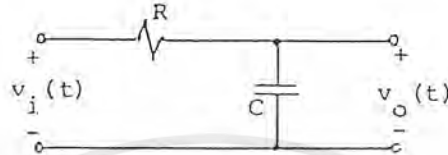
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H(f) = F_0(f)/F_1(f) = \mathfrak{T}[f_0(t)]/\mathfrak{T}[f_1(t)] \quad (6.10)$$

ตัวอย่าง 6.3

จงหาผลการตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรในรูป 6.2 และหาผลตอบสนอง $v_0(t)$ เมื่อแรงดันเข้าเป็น

$$v_1(t) = U(t)$$



รูปที่ 6.2

วิธีทำ โดยการใช้อิทธิพลของแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์ เราได้

$$v_1(t) = Ri(t) + (1/C) \int_{-\infty}^t i(t) dt \quad \text{และ} \quad dv_1(t)/dt = Rdi(t)/dt + i(t)/C$$

ซึ่งเมื่อแปลงเป็นฟังก์ชันฟูริเยร์ จะให้

$$pV_1(f) = Rpl(f) + (1/C)I(f) \quad (6.11)$$

โดยที่ $p = (j2\pi f)$, $V_1(f) = \mathfrak{T}[v_1(t)]$ จากวงจรในรูป 6.2 เราจะได้

$$v_0(t) = (1/C) \int_{-\infty}^t i(t) dt \quad \text{และ} \quad dv_0(t)/dt = i(t)/C$$

ซึ่งเมื่อแปลงเป็นฟังก์ชันฟูริเยร์แล้วจะได้

$$pV_0(f) = (1/C)I(f) \quad (6.12)$$

โดยที่ $V_0(f) = \mathfrak{T}[v_0(t)]$

เมื่อใช้สมการ(6.10),(6.11)และสมการ(6.12) เราจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H(f) = V_0(f)/V_1(f) = \left(\frac{1}{C}\right) / \left[Rp + \frac{1}{C}\right] = \left(\frac{1}{RC}\right) / \left[\left(\frac{1}{RC}\right) + j2\pi f\right]$$

และ

$$h(t) = \mathfrak{F}^{-1}[H(f)] = \left(\frac{1}{RC}\right) \mathfrak{F}^{-1}\left\{1 / \left[\left(\frac{1}{RC}\right) + j2\pi f\right]\right\} = \left(\frac{1}{RC}\right) e^{-t/(RC)} U(t)$$

และเมื่อใช้สมการ(6.8) เราจะได้

$$v_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)v_1(\tau)d\tau = (RC)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)/(RC)} U(t-\tau)U(\tau)d\tau$$

แต่ $U(t-\tau)U(\tau) = 1$ ในช่วง $0 < \tau < t$ และเท่ากับศูนย์ ในช่วงค่าอื่นๆของ τ ดังนั้น

$$\begin{aligned} v_0(t) &= (RC)^{-1} e^{-t/(RC)} \int_0^t e^{\tau/(RC)} d\tau & (t > 0) \\ &= e^{-t/(RC)} [e^{t/(RC)} - 1] U(t) = [1 - e^{-t/(RC)}] U(t) \end{aligned}$$

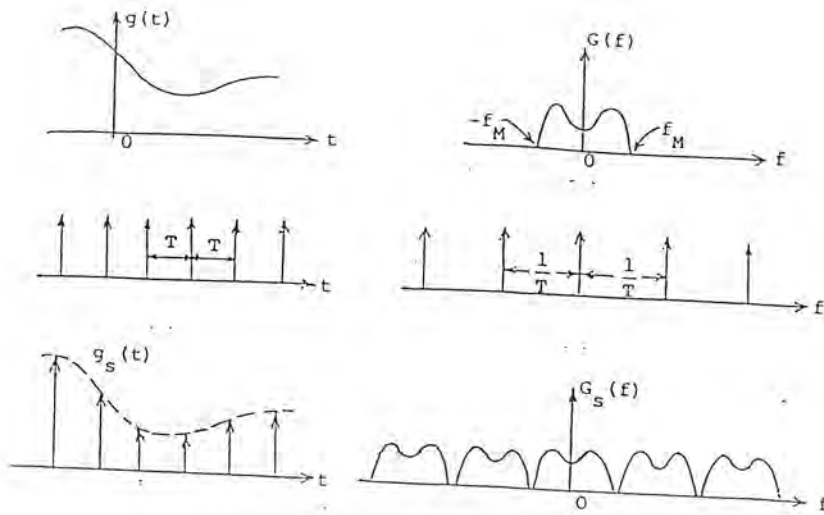
6.2.2 ทฤษฎีการซิกตัวอย่างสัญญาณ(signal sampling theory)

ตัวอย่าง 6.4 ถ้า $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สเปกตรัมไม่มีส่วนประกอบที่ความถี่สูงกว่า f_M เฮิรตซ์ (นั่นคือ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันจำกัดแถบความถี่(band-limited function)) แล้ว จงแสดงให้เห็นว่าเราสามารถหาค่าของ $g(t)$ ที่ค่า t ใดๆได้จากค่าของ $g(t)$ ที่ค่า t ต่างๆซึ่งห่างกันเป็นช่วงเท่ากันที่มีความยาวไม่เกิน $1/(2f_M)$ วินาที

วิธีทำ

รูป 6.3(a) และ(b) แสดงฟังก์ชัน $g(t)$ และสเปกตรัม $G(f)$ ที่สอดคล้องกัน รูป 6.3(c) และ(d) แสดงขบวนพัลส์ $\delta_T(t)$ จาก $g(t)$ และสเปกตรัมของขบวนพัลส์นี้ ส่วนรูป 6.3(e) และ (g) แสดงฟังก์ชัน $g_s(t)$ ซึ่งประกอบด้วยค่าต่างๆของ $g(t)$ และสเปกตรัมของ $g_s(t)$ เมื่อระยะทาง T ระหว่างพัลส์ในรูป 6.3(c) มีค่าน้อยกว่า $1/(2f_M)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.3

จากรูป 6.3(b) เรามี

$$G(f) = 0 \quad (|f| > f_M) \quad (6.13)$$

ขบวนพัลส์ในรูป 6.3c มีนิพจน์ในรูปของฟังก์ชันอิมพัลส์กับอนุกรมฟูรีเยร์เป็น

$$\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\right) e^{j2\pi nt/T} \quad (6.14)$$

และมีสเปกตรัมเป็น

$$\mathfrak{F}[\delta_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(1) e^{-j2\pi n/T} = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{f_0}\right) e^{j2\pi n f / f_0}, f_0 = 1/T$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาเป็นอนุกรมฟูรีเยร์ในรูปแบบเชิงซ้อนที่มีสัมประสิทธิ์ $C_n = \text{ค่าคงตัว}$ และส่วนประกอบความถี่ต่างๆมีระยะห่างจากกันเป็น $f_0 = 1/T$ ดังในรูป 6.3d ดังนั้นเราสามารถแสดงพจน์ใหม่ได้เป็น

$$\mathfrak{F}[\delta_T(t)] = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) = f_0 \delta_{f_0}(f) \quad (f_0 = \frac{1}{T}) \quad (6.15)$$

ดังนั้นเราจะได้

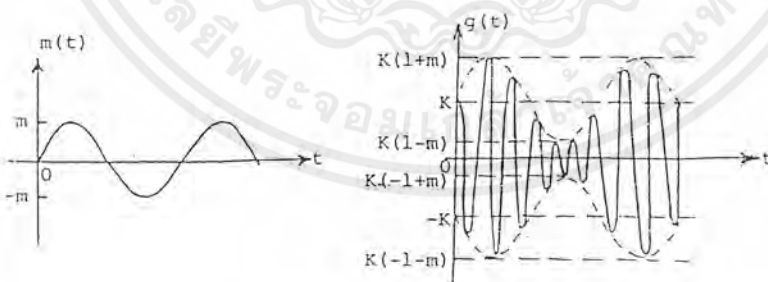
$$g_s(t) = g(t)\delta_T(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t - nT)$$

ซึ่งมีรูปคลื่นดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.3e และมีสเปกตรัมเป็น

$$\begin{aligned} G_s(f) &= \mathcal{F}[g_s(t)] = G(f) * \mathcal{F}[\delta_T(t)] \\ &= f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f) * \delta(f - nf_0) = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_0) \end{aligned} \quad (6.16)$$

ดังแสดงไว้ในรูปที่ 6.3g สมการ(6.16) แสดงว่าการแปลงฟูริเยร์ของ $g_s(t)$ คือ $G_s(f)$ มีลักษณะวนซ้ำเป็นคาบทุกๆ f_0 เฮิรตซ์ โดยที่แต่ละคาบจะมีรูปร่างเหมือน $G(f)$ และไม่ต่อเนื่องกันซึ่งก็หมายความว่า $G_s(f)$ จะให้ $g(t)$ กลับมาได้ ตราบเท่าที่ $f_0 = 1/T > 2f_M$ หรือตราบเท่าที่ $T < 1/(2f_M)$

6.2.3 การมอดูเลตทางแอมพลิจูด(amplitude modulation = AM)



รูปที่ 6.4 รูปคลื่นของสัญญาณที่มีการมอดูเลตทางแอมพลิจูด(แบบธรรมดา)

สัญญาณที่มีการมอดูเลตทางแอมพลิจูด(แบบธรรมดา)จะมีรูปคลื่นดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.4 และมีสมการดังนี้คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$g(t) = K[1 + m(t)]\cos(2\pi f_c t) \quad (6.17)$$

โดยที่ $m(t)$ เป็นสัญญาณจำกัดแถบความถี่ (band-limited signal) ซึ่งมีคุณสมบัติ

$$\mathfrak{F}[m(t)] = M(f) = 0 \quad (|f| > f_M) \quad (6.18)$$

$$|m(t)| < 1 \text{ และ } f_c > f_M \quad (6.19)$$

คลื่นไซน์ขอยด์ $\cos(2\pi f_c t)$ มีชื่อเรียกว่าคลื่นพาห์(carrier) ส่วนความถี่ f_c มีชื่อเรียกว่าความถี่คลื่นพาห์(carrier frequency)

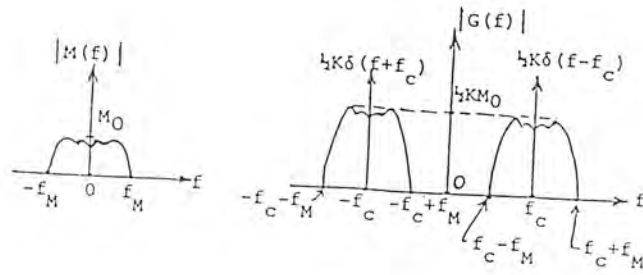
ตัวอย่าง 6.5 จงหาว่าสเปกตรัมของสัญญาณที่มีการมอดูเลตทางแอมพลิจูดแบบธรรมดา ประกอบด้วยความถี่อะไรบ้าง

วิธีทำ จากค่าของ $g(t)$ ในสมการ(6.17) เมื่อหาผลการแปลงฟูรีเยอร์โดยใช้สมบัติต่างๆเข้าช่วย คือ สภาพเชิงเส้น การเลื่อนความถี่ และการประสานเราจะได้

$$\begin{aligned} G(f) &= \mathfrak{F}[g(t)] = \mathfrak{F}\{K[1 + m(t)]\cos(2\pi f_c t)\} \\ &= K \mathfrak{F}\left\{[1 + m(t)]\frac{1}{2}[e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}]\right\} \quad (\text{โดยใช้สูตรของออยเลอร์}) \\ &= K \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}[e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}]\right\} + K \mathfrak{F}\left\{m(t)\frac{1}{2}[e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}]\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)K[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \left(\frac{1}{2}\right)KM(f) * [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)K[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \left(\frac{1}{2}\right)K[M(f - f_c) + M(f + f_c)] \end{aligned}$$

สมการสุดท้ายด้านบนนี้แสดงว่า สเปกตรัมของสัญญาณที่มีการมอดูเลตทางแอมพลิจูดแบบธรรมดาจะประกอบด้วยอิมพัลส์ที่ความถี่คลื่นพาห์ f_c และสเปกตรัมของ $m(t)$ ที่มีการเลื่อนความถี่ไปเป็นระยะ f_c ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.5



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 7

การแปลงฟูรีเยร์แบบไม่ต่อเนื่อง(Discrete Fourier Transform)

Discrete Fourier transform (DFT) เป็นเครื่องมือที่คอมพิวเตอร์ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณฟูรีเยร์ ในการดำเนินการ DFT บนคอมพิวเตอร์เราจะใช้อัลกอริทึมที่เรียกว่า Fast Fourier Transform (FFT) ซึ่งเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูงสุดของ DFT ในบทนี้เราพิจารณา DFT และคุณสมบัติต่าง ๆ ของ DFT

7.1 เลขยกกำลังเชิงซ้อนไม่ต่อเนื่อง(Discrete Complex Exponential)

จากเซตของเลขยกกำลังเชิงซ้อนสองเซต

$$S_1 = \{e^{jn\omega_0 t} \mid n \in I\} \quad (7.1)$$

และ

$$S_2 = \{e^{-j\omega t} \mid \omega \in R\} \quad (7.2)$$

โดยที่ t เป็นตัวแปรต่อเนื่อง และเซตแรกเกิดจากอนุกรมฟูรีเยร์เชิงซ้อนและเซตที่สองเกิดจากการแปลงฟูรีเยร์ เราจะใช้คุณสมบัติเชิงตั้งฉากในการวิเคราะห์ผลเฉลยของแต่ละเซต จะได้เซตแรกคือ

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{jn\omega_0 t} e^{jm\omega_0 t^*} dt = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n \neq m \\ 1 & \text{ถ้า } n = m \end{cases} \quad (7.3)$$

และเซตที่สองคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1 t} e^{j\omega_2 t^*} dt = 2\pi\delta(\omega_2 - \omega_1) \quad (7.4)$$

พิจารณาเซตที่สามซึ่งเรียกว่า เซตของเลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบไม่ต่อเนื่อง(Discrete Complex Exponential) ของลำดับ n กล่าวคือ

$$S = \{e^{j2\pi m/N} \mid m \in I\} \quad (7.5)$$

ซึ่งตัวแปรอิสระ m เป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่อง

การที่จะทำความเข้าใจเรื่อง เลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบไม่ต่อเนื่อง จะต้องเข้าใจ modulo- N arithmetic ซึ่งมีจำนวนเต็ม 2 จำนวน คือ a และ b เรียกว่า "equal modulo N " ที่ N คือ จำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่งเขียนได้เป็น $a|_N = b$ อ่านว่า a มอดูโล N เท่ากับ b ตัวอย่างเช่น

$$|13|_5 = 3 \quad |8|_7 = 1 \quad |9|_3 = 0 \quad \text{และ} \quad |-13|_5 = 2$$

มีหลักอยู่ว่า พิจารณาเลข 13 ที่ $N = 5$ หาร 13 ด้วย 5 เหลือเศษ 3 แล้ว $|13|_5 = 3$ จำนวนเต็มที่ติดลบสามารถทำได้เช่นกัน พิจารณา -13 ที่ $N = 5$ หาร -13 ด้วย 5 เราจะได้เศษ คือ -3 เรามวกเข้าด้วย 5 จะได้ 2 แล้ว $|-13|_5 = 2$

ในตัวอย่าง modulo-8 มีค่าเท่ากับผลที่ขึ้นกับตารางค่าความจริงแสดงในตารางที่ 7.1 ในบรรทัดแรกเราแสดง m วิ่งจาก $-\infty$ ถึง ∞ จำนวนเต็มทั้งหมดถูกแมปลงในศูนย์กลางคาบ 0 ถึง 7

เมื่อจำนวนเต็มสองจำนวนคูณกันผลคูณที่ได้จะเป็นจำนวนเต็มและถ้าเราดำเนินการภายใต้หลักมอดูโล N แล้ว ผลคูณ คือ การแมปลงในจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง 0 ถึง $N-1$ ตัวอย่างเช่น

$$|7 \times 9|_5 = 3, \quad |3 \times 27|_3 = 0 \quad \text{และ} \quad |-2 \times 15|_{32} = 2$$

กลับมาที่ เลขยกกำลังเชิงซ้อน $e^{j2\pi m/N}$ อย่างแรกที่เราคำนึงถึง คือ ความจริงที่ว่ามันวางตัวอยู่บนวงกลม 1 หน่วย ตัวอย่างเช่น ให้ $N = 8$ และ $m = 1$ (ดูรูปที่ 7.1) เมื่อ $e^{j2\pi/8}$ มอดูโล 1 และ อารกิวเมนต์ $2\pi/8$ ซึ่งวางตัวที่ระยะทาง 1 หน่วย จากจุดกำเนิดและเส้นจากมันไปยังจุดกำเนิด ทำให้เกิดมุม $2\pi/8$ ที่แกนจำนวนจริงบวก

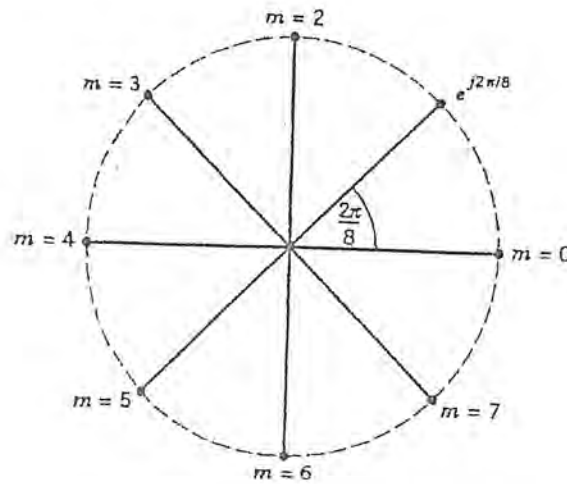
ให้ m มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 7 เราจะเห็นได้ว่าเรากระโดดทีละจุดรอบ ๆ วงกลม 1 หน่วย แต่ละครั้งเพิ่มค่ามุมขึ้นทีละ $2\pi/8$

m	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ m _8$...	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2

ตารางที่ 7.1 ตารางค่าความจริง มอดูโล-8

เมื่อ m มีค่าเพิ่มขึ้นมากกว่า 7 เราจะกลับมาที่จุดเริ่มต้นและเริ่มวนรอบวงกลม 1 หน่วยอีกครั้ง ในความจริงไม่มีอะไรเกิดขึ้นเมื่อมี m ค่ามาก ๆ เข้ามา ถ้า m เป็นค่าลบจะให้ผลเหมือนกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 7.1 จำนวน $e^{j2\pi m/8}$

จะเห็นได้ว่า มอดุโล-8 เหมาะสมในการทำงานซึ่ง เราสามารถเขียนได้เป็น

$$e^{j2\pi m/N} = e^{2j\pi |m|_N / N} \quad (7.6)$$

ซึ่งสำหรับ $m = 53$, $|53|_8 = 5$ และดังนั้นสมการ (7.6) จะให้

$$e^{j2\pi 53/8} = e^{j2\pi |53|_8 / 8} = e^{j2\pi 5/8}$$

เราเรียกสมการ (7.6) ว่า Circularity Property ของเลขยกกำลังเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 7.1 ให้ n และ k เป็นจำนวนเต็ม แล้ว nk เป็นจำนวนเต็มด้วย ดังนั้นสมการ (7.6) ได้

เป็น $e^{j2\pi nk/N} = e^{2j\pi |nk|_N / N}$ ให้ $n = 13$, $k = 27$ และ $N = 32$ เราได้ $nk = 351$

และ $|351|_{32} = 31$ และจะได้สมการ (7.6) คือ

$$e^{j2\pi q/N} = e^{j2\pi 0/N} = 1$$

ตัวอย่าง 7.2 ให้ q เป็นตัวคูณใด ๆ ของ N แล้ว $|q|_N = 0$ ดังนั้น

$$p = -3, -2, -1, 1, 2, 3$$

ก่อนที่จะเริ่มการสำรวจที่เกี่ยวกับคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก ของเลขยกกำลังเชิงซ้อน เราต้องพิจารณาพจน์ 2 พจน์ อย่างแรกคือตัวอย่างเล็ก ๆ ที่สาธิตให้เห็นผล (บางที่อาจจะเข้าใจแล้ว) ที่เราต้องการ และอย่างที่สองคือ นิยามจากพีชคณิตเชิงเส้น

ตัวอย่าง 7.3 ให้ q และ r เป็น จำนวนเต็มใดๆที่มีค่าไม่เท่ากัน ใด ๆ เท่ากับ 0, 1, 2 หรือ 3 และให้ $p = q - r$ แล้ว p มีค่าเท่ากับ 1 ในต่อไปนี้

$$p = -3, -2, -1, 1, 2, 3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น p จะไม่เท่ากับ $-4, 0$ หรือ 4 ซึ่ง $|p|_4 \neq 0$ โดยทั่วไปให้ q และ r เป็นจำนวนเต็มใดๆที่มีค่าไม่เท่ากัน อยู่ระหว่าง 0 และ $N-1$ ทั้งหมด และให้ $p = q - r$ แล้ว p ไม่สามารถเท่ากับ $-N, 0$ หรือ N นั่นคือ $|p|_N \neq 0$

จากพีชคณิตเชิงเส้นในการทดสอบสำหรับ คุณสมบัติเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์เชิงซ้อน เราใช้ผลคูณภายใน กำหนดไว้ว่า

นิยาม 7.1 ผลคูณภายใน ของสอง N -เวกเตอร์เชิงซ้อน a และ b เขียนเป็น (a, b) มีความหมายว่า

$$(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^* \quad (7.7)$$

ตัวอย่าง 7.4 ให้

$$a = \begin{bmatrix} 1+j \\ 2-j \\ j \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad b = \begin{bmatrix} j \\ 1+2j \\ -j \end{bmatrix}$$

แล้ว $N=3$ และสมการ (7.7) ได้

$$(a, b) = \sum_{k=0}^2 a_k b_k^* = (1+j)(-j) + (2-j)(1-2j) + (j)(j) = -6j$$

นิยาม 7.2 เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ จะกล่าวว่าเป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉาก ถ้าผลคูณภายใน ของทั้งสอง มีค่าเป็น 0

ก่อนที่จะกำหนดคุณสมบัติ คุณสมบัติเชิงตั้งฉาก ของ s ที่มี DFT อยู่ เราให้นิยาม

นิยาม 7.3 ปริมาณ W กำหนดโดย

$$W = e^{-j2\pi/N} \quad (7.8)$$

ใช้สมการ (7.8) เราจะได้

$$e^{-j2\pi k/N} = W^k \quad \text{และ} \quad e^{j2\pi m/N} = W^{-m} \quad (7.9)$$

$$W^{k*} = W^{-k} \quad (7.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 7.5 สำหรับ $N = 4$

$$W^0 = 1, \quad W^1 = -j, \quad W^2 = 1 \quad \text{และ} \quad W^3 = j$$

ควรใส่เครื่องหมายลบในนิยามของ W และเก็บไว้ในใจ จำนวน W จะพบบ่อยมาก จากที่ผ่านมา ตอนนี้เราจะมาดูทฤษฎี 7.1 ซึ่งกล่าวถึงคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก ของเลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบไม่ต่อเนื่อง

ทฤษฎี 7.1 ให้ q และ r เป็นจำนวนจริงในช่วง 0 ถึง $N-1$ แล้วเลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบเต็มหน่วย ของลำดับ N เป็นไปตามเงื่อนไขเชิงตั้งฉาก

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-qk} W^{-rk} = \begin{cases} 0, & q \neq r \\ 1, & q = r \end{cases} \quad (7.11)$$

สังเกตเปรียบเทียบสมการทางซ้ายของสมการ (7.12) กับสมการทางขวาของสมการ(7.7) มีความสัมพันธ์กับ ผลคูณภายใน ของเวกเตอร์เชิงซ้อนสองตัว จะทำให้เข้าใจในตัวอย่งต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.5 เพื่อเป็นการง่ายเราให้ $N = 5$ และพิจารณา เลขยกกำลังเชิงซ้อนสองตัวที่อยู่ในสมการทางซ้ายมือของสมการ (7.11) ให้ชื่อว่า W^{-qk} และ W^{-rk}

กรณีที่ 1 : q และ r ไม่เท่ากัน

ขึ้นอยู่กับค่าทางด้านขวามือค่าแรกของสมการ (7.11) ผลบวกที่ได้ควรจะเป็นศูนย์ ในตัวอย่างให้ $q = 2$ และ $r = 3$ และกำหนดเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ให้เป็น k จาก 0 ถึง $N-1$ ในเลขยกกำลังเชิงซ้อนที่เพิ่มขึ้นทีละสอง

$$\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \\ k=4 \end{array} \quad \begin{array}{l} q=2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad a = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-2} \\ W^{-4} \\ W^{-6} \\ W^{-8} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r=3 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-3} \\ W^{-6} \\ W^{-9} \\ W^{-12} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

สร้างผลคูณภายใน ของ a และ b เราเริ่มที่ผลบวกในสมการ (7.7) ซึ่ง

$$(a, b) = \sum_{k=0}^4 W^{-2k} W^{-3k*} \quad (7.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเราจะเห็นได้จากสมการทางซ้ายมือของสมการ (7.11) และเป็นผลคูณภายในที่แท้จริงของ N -เวกเตอร์เชิงซ้อน 2 ตัว เพิ่มเติมจากสมการ (7.14) เราจะได้

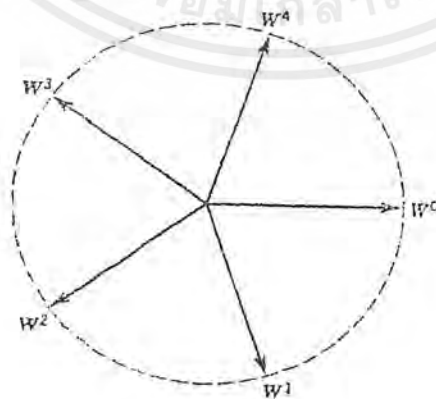
$$\begin{aligned} \dots &= W^0 W^0 + W^{-2} W W^3 + W^{-4} W^6 + W^{-6} W^9 + W^{-8} W^{12} \\ &= 1 + W^1 + W^2 + W^3 + W^4 \end{aligned} \quad (7.15)$$

เป็นผลบวกของพจน์ 5 พจน์ ซึ่ง $e^{-j2\pi n/5}$ สามารถคาดเดาจากรอบ ๆ วงกลม 1 หน่วย เราวาดเส้นจากจุดกำเนิดของแต่ละจำนวน และให้คิดว่าแต่ละพจน์เป็นเวกเตอร์ในสองมิติ (ดูรูปที่ 7.2) โดยความถูกต้องของจุดสมมาตรที่เป็นบวก ผลบวกที่ได้ต้องมีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งเวกเตอร์ a และ b ในสมการ (7.13) เป็นเวกเตอร์เชิงตั้งฉาก จะได้ตั้งค่าแรกทางด้านขวาของสมการ (7.11)

กรณีที่ 2 : q และ r เท่ากัน

กล่าวถึงค่าที่สองทางด้านขวาของสมการ (7.11) ผลบวกทางซ้ายมือของสมการควรจะมีค่าเท่ากับ 5 ไม่สนใจตัวเลือกของค่าสำหรับ q และ r ในตัวอย่างเราให้ทั้ง q และ r มีค่าเท่ากับ z และสร้างเวกเตอร์ 2 ตัว จาก W^{-qk} และ W^{-rk}

$$\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \\ k=4 \end{array} \quad \begin{array}{l} q=2 \\ a = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-2} \\ W^{-4} \\ W^{-6} \\ W^{-8} \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} r=2 \\ b = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-2} \\ W^{-4} \\ W^{-6} \\ W^{-8} \end{bmatrix} \end{array} \quad (7.16)$$



รูปที่ 7.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สร้าง ผลคูณภายใน ของ a และ b ใช้สมการ (7.7) จะได้

$$(a, b) = \sum_{k=0}^4 W^{-2k} W^{-2k*} \quad (7.17)$$

จากสมการทางซ้ายมือของสมการ (7.11) จากสมการ (7.17) เราได้

$$\dots = \sum_{k=0}^4 W^{-2k} W^{2k} = \sum_{k=0}^4 W^0 = 5 \quad (7.18)$$

ดังนั้นค่าที่สองทางด้านขวามือสมการ (7.11) เป็นจริง ตอนนี้จะเห็นได้ว่า สมการทางซ้ายมือของสมการ (7.11) คือ ผลคูณภายในของสองเวกเตอร์ สมการใดจะถูกเรียกว่าเป็นคู่ของเวกเตอร์ เช่น ในสมการที่เราสร้างขึ้นในสมการ (7.13) และ สมการ (7.16) ให้ค่าเป็นศูนย์ ถ้าเราสร้างผลคูณภายในของพจน์ใด ๆ กับพจน์อื่นและจะให้ค่าเป็น N ถ้าเราสร้าง ผลคูณภายใน ของพจน์ใด ๆ กับตัวมันเอง ดังนั้นพิสูจน์สมการ (7.11) เป็นจริง ในกรณีทั่วไป

พิสูจน์ ทฤษฎีที่ 7.1 เริ่มจากสมการทางซ้ายมือของสมการ (7.11) เราได้

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-qk} W^{-rk*} = \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(q-r)k} = \sum_{k=0}^{N-1} W^{-pk} \quad (7.19)$$

ที่ $p = q - r$

กรณีที่ 1 : $q \neq r$ นี้ก็ถึง q และ r วางตัวอยู่บนช่วง 0 ถึง $N-1$ และมีค่าไม่เท่ากันซึ่ง $p = q - r$ คือ จำนวนเต็มบางตัวที่ไม่สามารถเท่ากับ $-N, 0$ หรือ N (ดูตัวอย่าง 7.3) และ $W^{-p} \neq 1$ แล้วสมการ (7.19) จะเป็น

$$\dots = \sum_{k=0}^{N-1} [W^{-p}]^k$$

ซึ่งเป็นผลบวกของ N พจน์ ของ ลำดับเรขาคณิต เราได้

$$\dots = \frac{1 - [W^{-p}]^N}{1 - [W^{-p}]} = \frac{1 - W^{-pN}}{1 - W^{-p}} = \frac{1 - 1}{1 - W^{-p}} = 0 \quad (7.20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\dots = \frac{1 - [W^{-p}]^N}{1 - [W^{-p}]} = \frac{1 - W^{-pN}}{1 - W^{-p}} = \frac{1 - 1}{1 - W^{-p}} = 0 \quad (7.20)$$

กรณีที่ 2 : $q = r$ แล้ว $q - r = 0$ และสมการ (7.19) จะเป็น

$$\dots = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N \quad (7.21)$$

ซึ่งเป็นการพิสูจน์สมการ (7.1)

7.2 การแปลงฟูริเยร์แบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Fourier Transform)

คุณสมบัติเชิงตั้งฉากของเลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบเต็มหน่วย สามารถช่วยเราสร้าง DFT ได้ ซึ่งสมมติว่าเรามีฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง f_k ($0 \leq k \leq N-1$) ที่เราต้องการกล่าวถึงว่าเป็นการรวมเชิงเส้นของเลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบเต็มหน่วยของลำดับ N ฟังก์ชัน f_k สามารถมาอยู่รูป analytical statement เช่น $f_k = e^{-2k+3}$ หรือ รูปแบบง่าย ๆ ของเวกเตอร์ N เรามี analytical definition ของฟังก์ชันคาบของ t ที่เราต้องการกล่าวถึงว่าเป็นการรวมเชิงเส้นของเซตของ continuous เลขยกกำลังเชิงซ้อน $\{e^{jn\omega_0 t}\}$

ซึ่ง f_k เขียนอยู่ในรูปการรวมเชิงเส้น ดังต่อไปนี้

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{j2\pi nk/N} \quad (0 \leq k \leq N-1) \quad (7.22)$$

จำนวน F_n คือ ค่าคงที่ของการรวม และยังไม่ได้พิจารณา สิ่งเกิดสมการ (7.22) กล่าวว่

1. เป็นความจริงที่ว่า f_k แบ่งออกเป็น N statement ซึ่งแต่ละ statement ใช้สำหรับแต่ละค่าของ k
2. มีค่าคงที่ F_n ทั้งหมด N ตัว ซึ่งมีค่าต่างกันไป
3. เราต้องเอา $\frac{1}{N}$ มาคูณก่อนแสดงค่า

เราหารูปแบบของ F_n โดยการคูณทั้งสองข้างของสมการ (7.22) ด้วย $e^{-j2\pi nk/N}$ จะได้

$$f_k e^{-j2\pi nk/N} = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{j2\pi nk/N} \right] e^{-j2\pi nk/N} \quad (7.23)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลบวกเกิน k จะเป็น

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2j\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_n e^{j2\pi nk/N} \right] e^{-2j\pi nk/N} \quad (7.24)$$

จากนั้นเราเปลี่ยนลำดับของผลบวกสมการทางขวามือ เราจะได้

$$\dots = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi nk/N} e^{-j2\pi nk/N} \quad (7.25)$$

ดังนั้นโดยคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก สมการ (7.11) เราจะเห็นได้ว่าผลบวกลำดับที่ 2 ในสมการ (7.25) มีค่าเป็นศูนย์ สำหรับ $n \neq m$ และเท่ากับ N สำหรับ $n = m$ และสมการ (7.25) ยุบลงเหลือ F_m เพียงพจน์เดียว เราได้

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j2\pi nk/N} = F_m \quad (7.26)$$

แทน m ด้วย n จะได้

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j2\pi nk/N} \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (7.27)$$

และนี่คือรูปแบบสำหรับ N ค่าคงที่ที่ต้องการ F_n ในสมการ (7.22) สรุปได้เป็นทฤษฎี 7.2

ทฤษฎี 7.2 การแปลงฟูริเยร์แบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Fourier transform)

ให้ f_k ($0 \leq k \leq N-1$) เป็นฟังก์ชันของตัวแปรไม่ต่อเนื่อง k กำหนด analytically หรืออย่างอื่นเป็น N -เวกเตอร์ ที่ให้ค่าของจำนวน (อาจเป็นเชิงซ้อน) แล้ว f_k กล่าวได้ว่าเป็นผลรวมของเลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบเต็มหน่วย ในรูป

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2j\pi nk/N} \quad (0 \leq k \leq N-1) \quad (7.28)$$

ที่ N เป็นจำนวน F_n สามารถพบรูปแบบของจำนวน f_k โดย

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j2\pi nk/N} \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (7.29)$$

1. สมการ (7.28) เรียกว่า สมการ DFT synthesis มักจะเรียกว่า การแปลงฟูริเยร์ย้อนกลับแบบเต็มหน่วย (inverse discrete Fourier transform (IDFT))
2. สมการ (7.29) เรียกสมการ DFT analysis จำนวน F_n เกิดจาก DFT เส้นสเปกตรัมของเวกเตอร์ f_k
3. ทั้งสองสมการ เรียก Discrete Fourier Transform (DFT)

พิจารณาคอนสมบัติพื้นฐานของ DFT ต่อไปนี้

บทแทรก 1 ของ ทฤษฎี 7.2

การแปลงทั้งสองนี้ กำหนดโดยสมการ (7.28) และ สมการ (7.29) ซึ่งต่างก็เป็นการแปลงแบบย้อนกลับอย่างแท้จริงทั้งคู่

นั่นหมายความว่าเวกเตอร์ f ถูกสร้างโดยสมการ (7.28) คือ เวกเตอร์ f ซึ่งเป็นส่วนประกอบถูกใช้ในสมการ (7.29) เพื่อเป็นการยืนยันเราสมมติสมการ (7.28) ทำให้เกิดจำนวน g_k แล้วได้สมการ (7.29) ในสมการ (7.28) เราได้

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n W^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{r=0}^{N-1} f_r W^{nr} \right] W^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \sum_{n=0}^{N-1} W^{nr} W^{-nk} \end{aligned} \quad (7.30)$$

อย่างไรก็ตาม โดยคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก สมการ (7.11) ผลรวมสุดท้ายในสมการ (7.30) มีค่าเป็นศูนย์ ถ้า $r \neq k$ และเท่ากับ N ถ้า $r = k$ และจะได้ต่อไปอีกว่า

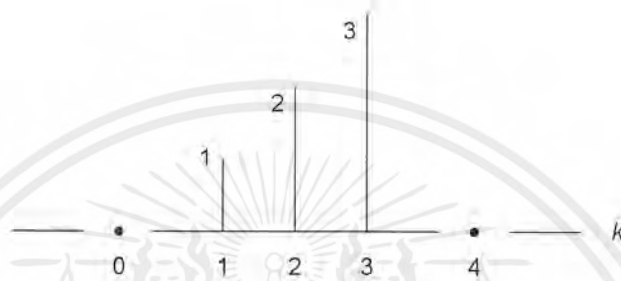
$$\dots = \frac{1}{N} f_k N = f_k \quad (7.31)$$

ซึ่งความจริง g_k ก็คือ f_k ดังนั้นข้อสังเกตที่เราตั้งไว้ถูกพิสูจน์แล้ว สมมติต่อไปอีกว่าเราเริ่มที่ลำดับของ N จำนวนเชิงซ้อนของ f_k

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_k, \dots, f_{N-1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และสมมติโดยใช้สมการ (7.29) เราเจอเซตของ N จำนวนเชิงซ้อน F_n เมื่อ n ไปยังค่า $0 \leq n \leq N-1$ สมการ (7.29) ทำให้เกิดจำนวน F_0, \dots, F_{N-1} เมื่อ n อยู่บนค่าจำนวนจริงนอกช่วง $0 \leq n \leq N-1$ อย่างไรก็ตามเลขยกกำลังภายในเครื่องหมายผลรวมในสมการ (7.29) จะนำมาใช้อีกเพราะว่ามันเป็นวงกลม และจะทำให้ซ้ำตัวมันเองได้ง่ายมากที่คาบ N ซึ่งค่าของ F_n ที่ถูกสร้างจะต้องเป็น periodic repetitions ของเซตดั้งเดิมและสมการ (7.29) จะเป็น inherently periodic functions ของ n ที่คาบ N



รูปที่ 7.3 $f_k = k$

เป็นที่แน่นอนว่า จะเป็นจริงด้วยสำหรับสมการ (7.28) ลำดับของจำนวน F_0, \dots, F_{N-1} เกิดจากสมการที่ทำซ้ำที่คาบ N ที่ k ช่วง ไปยังจำนวนจริงทั้งหมด

บทแทรกที่ 2 ของ ทฤษฎี 7.2

จำนวนที่เกิดจากทั้ง การวิเคราะห์ และ การสังเคราะห์ DFT คือ inherently periodic ที่คาบ N

ตัวอย่างที่ 7.6 analytical definition ของพัลซแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete pulse) คือ

$$f_k = \begin{cases} k & (0 \leq k \leq 3) \\ 0 & (\text{เป็นอย่างอื่น}) \end{cases} \quad (7.32)$$

- เราแสดง f_k ในรูปที่ (7.3) จุดประสงค์ของเราในตัวอย่างนี้ คือ 3 ส่วน ประกอบไปด้วย
- transform ฟังก์ชันที่ให้มา f_k โดยใช้ สมการการวิเคราะห์ DFT ด้วยวิธีการสร้างเส้นสเปกตรัมของ DFT (F_n)
 - เส้นสเปกตรัมย้อนกลับ ที่ได้จากข้อ (a.) โดยใช้สมการการสังเคราะห์ DFT ด้วยวิธีการสร้างจุดกำเนิด ใสค่าเวกเตอร์ f_k ใหม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(c.) แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน f_k สามารถกล่าวว่าเป็นการรวมเชิงเส้น ของ เลขยกกำลังเชิงซ้อน

ใช้ $N = 4$ ข้อมูลที่ใส่เข้ามาคำนวณจาก analytical definition ในสมการ (7.32) จะกลายเป็น
เวกเตอร์

$$f = (0, 1, 2, 3) \quad (7.33)$$

สำหรับส่วน (a) : เพิ่มจากสมการ (7.29) เราจะได้สมการ analysis 4 สมการ

$$n = 0: F_0 = f_0W^0 + f_1W^0 + f_2W^0 + f_3W^0 \quad (7.34)$$

$$n = 1: F_1 = f_0W^0 + f_1W^1 + f_2W^2 + f_3W^3 \quad (7.35)$$

$$n = 2: F_2 = f_0W^0 + f_1W^2 + f_2W^4 + f_3W^6 \quad (7.36)$$

$$n = 3: F_3 = f_0W^0 + f_1W^3 + f_2W^6 + f_3W^9 \quad (7.37)$$

ใช้ค่าของ f จากสมการ (7.33) แทนที่ค่าของจำนวนของกำลังของ W สมการ 4 สมการ
นี้ จะให้สัมประสิทธิ์ DFT ดังนี้

$$n = 0: F_0 = 0 + 1 + 2 + 3 = 6 \quad (7.38)$$

$$n = 1: F_1 = 0 - j1 - 2 + j3 = -2 + j2 \quad (7.39)$$

$$n = 2: F_2 = 0 - 1 + 2 - 3 = -2 \quad (7.40)$$

$$n = 3: F_3 = 0 + j1 - 2 - j3 = -2 - j2 \quad (7.41)$$

ผลที่ได้สามารถรวมให้อยู่ในรูปเวกเตอร์สเปกตรัมของ DFT

$$F = (6, -2 + j2, -2, -2 - j2) \quad (7.42)$$

สำหรับส่วน (b) : เพิ่มจากสมการ (7.28) จะให้สมการ synthesis 4 สมการ

$$k = 0: f_0 = \frac{1}{4} [F_0W^0 + F_1W^0 + F_2W^0 + F_3W^0] \quad (7.43)$$

$$k = 1: f_1 = \frac{1}{4} [F_0W^0 + F_1W^{-1} + F_2W^{-2} + F_3W^{-3}] \quad (7.44)$$

$$k = 2: f_2 = \frac{1}{4} [F_0W^0 + F_1W^{-2} + F_2W^{-4} + F_3W^{-6}] \quad (7.45)$$

$$k = 3: f_3 = \frac{1}{4} [F_0W_0 + F_1W^{-3} + F_2W^{-6} + F_3W^{-9}] \quad (7.46)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพื่อเป็นการยืนยันว่าสมการทั้ง 4 สมการ ทำให้กลับไปอยู่ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก f_k จริง เราแทนที่ค่าของกำลังของ W และใช้ค่าของ F_n จากสมการ (7.42) ได้

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{4} [F_0 + F_1 + F_2 + F_3] \\ &= \frac{1}{4} [6 + (-2 + j2) + (-2) + (-2 - j2)] = 0 \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4} [F_0 + jF_1 - F_2 - jF_3] \\ &= \frac{1}{4} [6 + j(-2 + j2) - (-2) - j(-2 - j2)] = 1 \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{4} [F_0 - F_1 + F_2 - F_3] \\ &= \frac{1}{4} [6 - (-2 + j2) + (-2) - (-2 - j2)] = 2 \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{4} [F_0 - jF_1 - F_2 + jF_3] \\ &= \frac{1}{4} [6 - j(-2 + j2) - (-2) + j(-2 - j2)] = 3 \end{aligned} \quad (7.50)$$

ผลที่ได้สามารถรวมเข้าด้วยกัน จะได้เวกเตอร์ผลลัพธ์ เป็น

$$f = (0, 1, 2, 3) \quad (7.51)$$

จะเห็นได้ว่าเป็นตัวเดียวกับ f ในสมการ (7.33) ที่เราเริ่มทำ

สำหรับส่วน (c) : เพื่อแสดงให้เห็นว่าสามารถกล่าวถึง f ว่าเป็นการรวมเชิงเส้นของ เลขยกกำลังเชิงซ้อน เราเขียนสมการ (7.43) ถึง สมการ (7.46) โดยใช้ค่าของ F จากส่วน (a) จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{6}{4} \begin{bmatrix} W^0 \\ W^0 \\ W^0 \\ W^0 \end{bmatrix} + \frac{-2 + j2}{4} \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-1} \\ W^{-2} \\ W^{-3} \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-2} \\ W^{-4} \\ W^{-6} \end{bmatrix} + \frac{-2 - j2}{4} \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-3} \\ W^{-6} \\ W^{-9} \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

อ่านตามแนวขวางจากบรรทัดแรกของสมการ (7.52) เราได้สมการ (7.43) อ่านตามแนวขวางบรรทัดที่สอง เราได้สมการ (7.52) แสดงให้เห็นการลงตัวที่ยิ่งใหญ่ สังเกตสิ่งต่อไปนี้

1. บนสมการทางซ้ายมือของเวกเตอร์ f ในขณะที่สมการทางขวามือเราจะเห็นเวกเตอร์ 4 ตัวของ เลขยกกำลังเชิงซ้อน ในการรวมเชิงเส้นที่ค่าของ F ที่เป็นค่าคงที่ของการรวมนั้น นี้คือ discrete counterpart ของสอง synthesis statement จากส่วนที่ 1 เขียนได้เป็น

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (7.53)$$

และ

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.54)$$

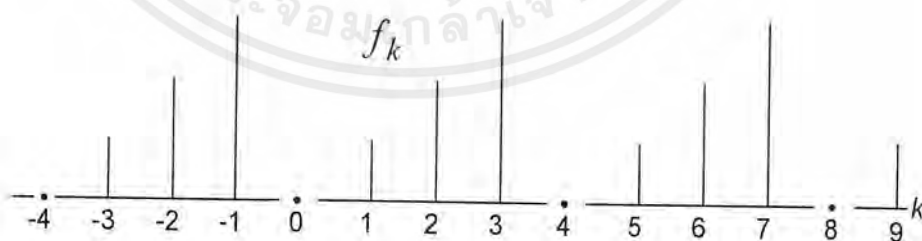
โครงสร้างของสมการ (7.52), (7.53) และ (7.54) คือ mathematically identical ในเหตุผลในแต่ละกรณี จะให้ค่าฟังก์ชันที่เรียกว่าการรวมเชิงเส้นของ เลขยกกำลังเชิงซ้อน

2. เวกเตอร์บนสมการทางซ้ายมือของสมการ (7.52) ทำให้เกิดเซตเชิงตั้งฉาก ด้วยเหตุผลของพีชคณิตเชิงเส้น คือ จำนวนที่มี คุณสมบัติเชิงตั้งฉากของทฤษฎี 7.1 มาเกี่ยวข้องด้วย คือ ผลคูณภายใน ของแต่ละเวกเตอร์ของแต่ละอันกับตัวอื่นที่มีค่าเป็นศูนย์ และกับตัวมันเองจะมีค่าเท่ากับ N (ดูตัวอย่างจากสมการ (7.2))
3. แต่ละเวกเตอร์ในสมการ (7.52) แทน sampling ของ "complete" เลขยกกำลังเชิงซ้อน เหล่านี้ คือ discrete counterparts ของ countably infinite set ของจำนวน

$$\dots = e^{j0\omega_0 t}, e^{j1\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{j3\omega_0 t}, \dots$$

และของ uncountably infinite set ของจำนวน

$$S = \{e^{j\omega t} \mid \omega \in \mathbb{R}\}$$



รูปที่ 7.4 การแผ่ขยายฟังก์ชันคาบของ $f_k = k$

4. ในตัวอย่างง่าย ๆ เราใช้ $N = 4$ ซึ่งเป็นจำนวนที่เล็กมาก ๆ ทำให้ได้เวกเตอร์ที่อยู่ในสมการ (7.52) คือ เวกเตอร์ 4 ตัวใน F และ อีก 4 ตัว ใน f ตอนนี้จะมียังเลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบเต็มหน่วย 4 ตัวเท่านั้นที่ได้ในกรณีนี้ ถ้าเราใช้ N ที่มีค่ามาก ๆ เป็น 10,000 แล้ว เรา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้แวกเตอร์จำนวนมากมายจากสมการทางขวามือของสมการ (7.52) ซึ่งแต่ละแวกเตอร์มีสมาชิกอีกหลายตัว F และ f จะมีมิติเท่ากับ 10,000 และมันก็คือจำนวนของ เลขยกกำลังเชิงซ้อน ที่จะนำมาใช้

ถ้าเราเพิ่มค่า N เลขยกกำลังเชิงซ้อนแบบเต็มหน่วย จะเริ่มคล้าย continuous counterparts ของมัน และจำนวนที่ได้จาก DFT จะเริ่มมีหน้าตาคล้ายจำนวนจากสมการ (7.53) และ สมการ (7.54)

ทั้งหมดนี้เราพิจารณาเพียงค่าสำหรับ n และ k ในช่วง 0 ถึง 3 โดยบทแทรกที่ 2 ถึง ทฤษฎีที่ 7.2 อย่างไรก็ตาม เรารู้ว่าจำนวนที่เกิดจากทั้ง DFT และ IDFT คือ inherently periodic ที่คาบ N ซึ่งถ้าเราทำการคำนวณใหม่จากสมการ (7.34) ถึงสมการ (7.37) ให้ช่วง n มากกว่า -8 ถึง 11 เราจะได้คำตอบเหมือนเดิมซ้ำแล้วซ้ำเล่า เพราะว่า เลขยกกำลังเชิงซ้อนเป็นวัฏจักร

ถ้าเราทำซ้ำจากสมการ (7.43) ถึง สมการ (7.46) ให้ช่วง k มากกว่า -4 ถึง 9 เราจะได้คำตอบเหมือนเดิมซ้ำแล้วซ้ำเล่า ด้วยเหตุผลเดียวกัน คือ เลขยกกำลังเชิงซ้อน เป็น circular เขียนเป็นรูปดังรูปที่ 7.4

เริ่มจาก single-period statement ของ F_n ที่อยู่ในสมการ (7.42) เราสามารถรวมลำดับของจำนวนที่อยู่ในตาราง (7.2) ซึ่งแสดงให้เห็นลักษณะที่สำคัญที่สุดของเส้นสเปกตรัมของ DFT

n	$FRE(n)$	$FIM(n)$	$ F(n) $	$\theta(n)$	$ F(n) ^2$
-2	-2	0	2	*****	4
-1	-2	-2	2.8284	-2.3562	8
0	6	0	6	0	36
1	-2	2	2.8284	2.3562	8
2	-2	0	2	*****	4

ตารางที่ 7.2 DFT Line Spectrum ของตัวอย่างที่ 7.6

ในตารางแสดงให้เห็นว่าระบบ FFT บนจานแสดงค่าของ F สังเกตที่ $FRE(n)$, $|F(n)|$ และ $|F(n)|^2$ จะเป็นคู่ทั้งหมด และ $FIM(n)$ และ $\theta(n)$ จะเป็นคี่

ตัวคูณ $1/N$ ที่ปรากฏในสมการ (7.28) ข้างหน้าเครื่องหมายรวมยอด ซึ่งเราต้องการใช้ในสมการ (7.28) หรือ สมการ (7.29) เพื่อทั้งสองสมการจะกลายเป็นส่วนกลับซึ่งกันและกัน

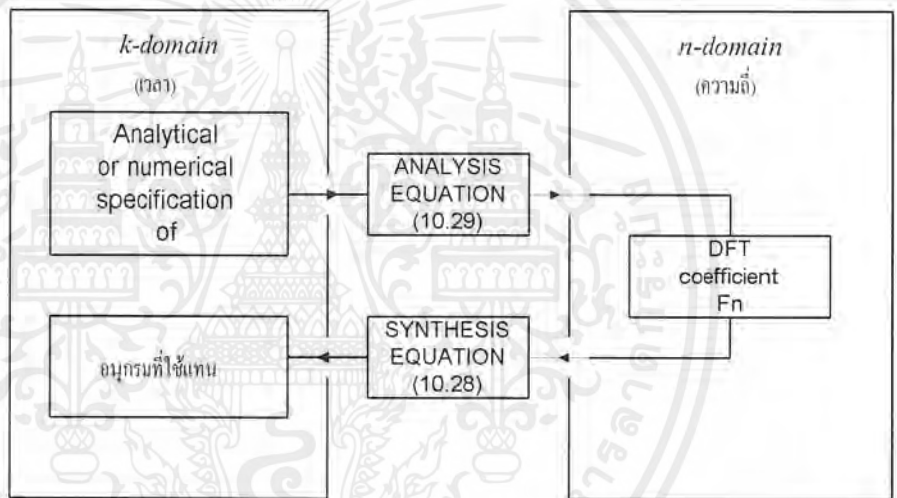
5. บางคนอาจจะชอบที่จะวาง $1/N$ ในสมการ (7.29) มากกว่าในสมการ (7.28) อย่างที่เราทำกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. บางคนใช้ $1/\sqrt{N}$ ในแต่ละสมการ

อย่างที่เรารู้ใน continuous world ในรูปที่ (7.5) แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง k -domain (เวลา) และ n -domain (ความถี่) ใน discrete world รูปแสดงให้เห็นว่า :

1. ในกรณี continuous world เราเริ่มที่ analytical definition ของ ฟังก์ชัน $time$ -domain แต่ในกรณีนี้ ตัวแปรอิสระ คือ discrete variable k อย่างไรก็ตาม เราสามารถยอมรับเวกเตอร์ข้อมูลโดยปราศจากความคิดที่ว่ามันเกิดขึ้นมาได้อย่างไร ในความเป็นจริงบางทีมันอาจจะเกิดมาจากกระบวนการสุ่มในหลักการมากกว่าการคาดเดา
2. เรา transform เวกเตอร์ข้อมูลโดยใช้สมการ discrete analysis ซึ่งเป็นการอินทิเกรตจะถูกแทนที่โดยการคำนวณเล็ก ๆ น้อย ๆ ของผลรวมและผลคูณ เป็นการยากที่จะทำบนคอมพิวเตอร์



รูปที่ 7.5 Transform เวกเตอร์ข้อมูลโดยใช้สมการ Discrete Analysis

3. ใน n -domain เราได้เวกเตอร์ที่มีความยาวจำกัดของจำนวนที่เราเรียกว่า DFT line spectrum จำนวนที่มีค่ามากและมากขึ้นเรื่อย ๆ นี้จะถูกพัฒนาให้บรรลุจุดประสงค์ที่ต้องการ โดยการกระทำบนเวกเตอร์ที่มีความยาวจำกัดนี้
4. เราเคยทำสำเร็จมาแล้วบน k -domain ถ้าเราต้องการอีกก็ให้กลับผลลัพธ์และกลับไป k -domain และนี่ก็คือ ผลที่ต้องการโดยการบวกและการคูณเท่านั้น
5. เมื่อทำเสร็จแล้ว เราจบที่เวกเตอร์ที่มีความยาวจำกัดของจำนวนแล้วกลับไปยัง k -domain มากกว่าค่าผลบวกไม่สิ้นสุดหรือ การอินทิเกรต นั่นหมายความว่าเราสามารถปรับปรุงผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้กับสถานการณ์จริง ได้ทันที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นี่คือเหตุผลต่าง ๆ ที่ทำไม FFT ทำให้ DFT สำเร็จ ซึ่งเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวางในโลกของเทคโนโลยีสมัยใหม่ อย่างไรก็ตามเหตุผลเดียวที่สำคัญที่สุด คือ FFT ให้ค่าประมาณของสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูรีเยร์ และ ฟูรีเยร์ transform ซึ่งสามารถทำให้แม่นยำเท่าที่เราพอใจ

7.3 คุณสมบัติของ DFT

ผลลัพธ์ที่ได้จาก DFT สามารถที่จะให้ประมาณค่าสำหรับอนุกรมฟูรีเยร์หรือสำหรับฟูรีเยร์อินทิกรัล และเราหาความแม่นยำของค่าประมาณซึ่งทำได้ดีเท่าที่เราพอใจ

จำไว้ว่าอย่างไรก็ตาม มีเหตุการณ์หลายเหตุการณ์ที่เราใช้ DFT เมื่อการแปลงฟังก์ชันซึ่งเป็น inherently discrete เราไม่ควรที่จะคิดว่า DFT เป็นจำนวนที่เป็นการประมาณค่าสำหรับการแปลงต่อเนื่องของคาบ หรือ รูปคลื่นแบบพัลส์ (pulse waveform) ซึ่งเราพิจารณาในส่วนของ 1 เมื่อเราแปลงฟังก์ชัน inherently discrete จะไม่มีการถามถึงความแม่นยำของการประมาณค่า ผลลัพธ์ของสเปกตรัม จะแม่นยำ มุ่งไปที่การตรวจเช็คความผิดพลาดที่เกิดในฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ของคอมพิวเตอร์ที่ DFT/FFT รั้นอยู่เท่านั้น

ที่ผ่านมาเราได้ทำอนุกรมฟูรีเยร์และฟูรีเยร์อินทิกรัล ตอนนี้จะขอแนะนำหมายเหตุซึ่งเป็นข้อควรระวังใน DFT

นิยาม 7.4 สัญลักษณ์

$$f_k \leftrightarrow F_n$$

ใช้แทนในทฤษฎีที่ 7.2 กำหนด DFT ของ f_k คือ F_n ต่อสมการ (7.29) และ IDFT ของ F_n คือ f_k ของสมการ (7.28)

แล้วเราก็ขอแนะนำหมายเหตุซึ่งเป็นข้อควรระวังของสัมประสิทธิ์ F_n ของ DFT (เหมือนกับหมายเหตุที่เราใช้สำหรับคาบที่ต่อเนื่องและ pulse spectra)

ในรูปแบบคาร์ทีเซียน

$$F_n = A_n + jB_n \quad (7.55)$$

และในรูปแบบเชิงขั้ว

$$F_n = |F_n|e^{j\theta_n} \quad (7.56)$$

ที่

$$|F_n| = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2} \quad (7.57)$$

และ

$$\theta_n = \arctan \frac{B_n}{A_n} \quad (7.58)$$

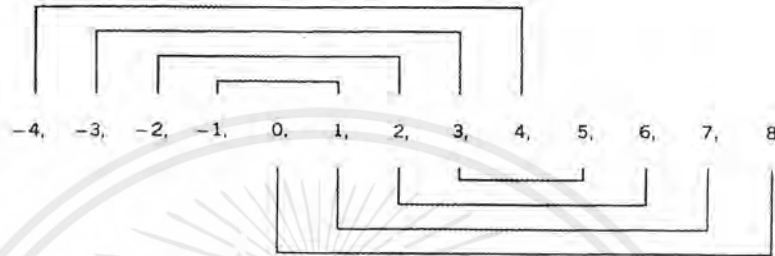
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \quad (7.61)$$

คาบนี้ คือ symmetric ใกล้เคียงกำเนิด และเกี่ยวข้องกับบรรทัดแรกของคุณสมบัติข้างต้น กล่าวคือ จำนวน F_n^* และ F_{-n} วางตัวอยู่บนช่วงของจำนวนที่ตัดออกมาในสมการ (7.61) มีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$F_0^* = F_0, \quad F_1^* = F_{-1}, \quad F_2^* = F_{-2}, \quad F_3^* = F_{-3}, \quad F_4^* = F_{-4} \quad (7.62)$$

Symmetries ของ F_n อยู่ที่นี้



รูปที่ 7.6 Symmetries ของ F_n

อย่างที่เห็นในสมการ (7.60) อย่างไรก็ตาม periodicity หมายถึง

$$F_{-1} = F_7, \quad F_{-2} = F_6, \quad F_{-3} = F_5, \quad F_{-4} = F_4 \quad (7.63)$$

จากนั้น รวมเซตสองเซตของสมการ เราจะเป็นว่าทฤษฎีก็กล่าวได้ว่า

$$F_0^* = F_0, \quad F_1^* = F_7, \quad F_2^* = F_6, \quad F_3^* = F_5, \quad F_4^* = F_4, \quad (7.64)$$

นั่นหมายความว่า ศูนย์กลางของคาบมูลฐาน (และโดยความจริงแล้วโดยคาบอื่น ๆ) ทำตัวคล้ายจุดหมุน (pivot point) และคู่ของค่าซึ่งมีระยะห่างเท่ากันจากตัวเอง ก็เกี่ยวข้องกันโดยทฤษฎี ดังแสดงให้เห็นในรูปที่ 7.6

หมายเหตุและข้อสังเกต

(A) Lemma เลขยกกำลังเชิงซ้อน จะสอดคล้อง คุณสมบัติต่อไปนี้

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n/N} = 0 \quad (7.65)$$

พิสูจน์ เรามีผลรวมของ เลขยกกำลังเชิงซ้อน ทั้งหมดของลำดับ N เนื่องจากผลรวมนั้นครอบคลุมตำแหน่ง symmetric รอบ ๆ วงกลม 1 หน่วย ผลรวมจะเพิ่มขึ้นจนถึงศูนย์ จากการพิจารณาทางเรขาคณิต

การพิสูจน์วิธีที่สอง โดยใช้คุณสมบัติ เชิงตั้งฉาก

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi mb/N} e^{j2\pi ma/N^*} = 0 \quad \text{ถ้า} \quad a \neq b \quad (7.66)$$

ให้ $b=1$ และ $a=0$ ใกล้เคียงการพิสูจน์สมการ (7.65)

การพิสูจน์วิธีที่สาม เราสามารถหาผลรวมจากอนุกรมที่แสดงในสมการ (7.65) จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{(j2\pi/N)^n} = \frac{1 - e^{j2\pi N/N}}{1 - e^{j2\pi/N}} \quad (7.67)$$

ตอนนี้ $e^{j2\pi/N} \neq 1$ ดังนั้น ตัวหารบนสมการทางขวามือของสมการ (7.66) เป็นจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์ ในอีกทางหนึ่งจะได้

$$e^{j2\pi N/N} = e^{j2\pi} = 1 \quad (7.68)$$

ดังนั้น ตัวตั้งมีค่าเป็นศูนย์

(B) Anomalous Points ของ ฟังก์ชัน Arctangent

ฟังก์ชันอาร์กิตาเนนท์ จะมี anomalous situation ภายใต้เงื่อนไข ให้ $z = x + jy$

เรากำหนด $\arg(z) = \arctan(y/x)$

(a) เมื่อทั้ง $y=0$ และ $x=0$ แล้ว $\arctan(y/x)$ ไม่มีความหมาย และรวมทั้ง $\arg(0)$

(b) เมื่อ $y=0$ และ $x < 0$ แล้ว z เป็นจำนวนจริงลบ $\text{Arg}(z)$ สามารถได้

π หรือ $-\pi$ ก็ได้ โดยกระทำบนพื้นฐานของความจริงที่ว่า $\arg(z)$ สามารถเป็นฟังก์ชันคี่

อย่างไรก็ตาม ถ้า z เป็น periodic ด้วยแล้ว (เช่น F_n ใน DFT) แล้วจะเกิดการขัดแย้งขึ้น ดังที่จะแสดงต่อไปนี้

ให้ $z = e^{j2\pi n/N}$ สำหรับที่กำหนดไว้เราให้ $N=4$ แล้ว z เป็นฟังก์ชัน periodic ของ n ที่คาบ 4

เริ่มจาก $n=4$ เราให้มีค่าเพิ่มขึ้น เราจะได้ลำดับของตัวเลข ดังนี้

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
z	1	j	-1	$-j$	1	j	-1	$-j$	1
$\text{Arg}(z)$	0	$\pi/2$	AAA	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	AAA	$-\pi/2$	0

จากการที่ z เป็นคาบ เราจะพิจารณาคุณสมบัติการเป็นคาบที่ตีรวมถึง $\arg(z)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
 อย่างไรก็ตาม เพราะว่ามีสิ่งผิดปกติเกิดขึ้นที่ $n = -2$ และ $n = 2$ เมื่อ $y = 0$ และ $x = -1$ ถ้าเราใช้ π
 สำหรับ $\arg(z)$ ที่ทั้งสองจุด AAA (หรือเราใช้ $-\pi$ ที่ทั้งสองจุดนั้นก็ได้อีก) แล้วเราจะได้คาบที่สอดคล้อง
 ตามต้องการ อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถทำให้ $\arg(z)$ ที่เป็นฟังก์ชันค่าให้เป็นที่น่าพอใจตาม
 ต้องการได้ ในอีกแง่หนึ่ง ถ้าเราใช้ π ที่จุดหนึ่ง และ $-\pi$ ที่อีกจุดหนึ่งแล้วเราจะพอใจกับผลที่ตามมา
 เมื่อ $\arg(z)$ เป็นฟังก์ชันค่า อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถยืนยันได้ว่ามันเป็น periodic อย่างที่เรา
 ต้องการ

ผลเฉลยของปัญหายูบ่นพื้นฐานความจริงที่ว่า เราไม่มีวิธีการที่ดีที่จะออกแบบ $\arg(z)$ ที่
 ตำแหน่งนั้น เห็นชัดแล้วว่าตำแหน่งของ z บนวงกลม 1 หน่วยเป็น หนึ่งเดียว ไม่สนใจเส้นทางที่ไม่
 ว่าจะตามเข็มหรือทวนเข็มที่มาสิ้นสุดที่ -1 กระนั้น เราก็คงไม่มีสัญลักษณ์มาใช้แทนอาร์กิวเมนต์
 ที่ $z = -1$ ซึ่งมีมัน unique

ในทางความคิด เราจะแทนค่าของอาร์กิวเมนต์ ด้วยสัญลักษณ์ $*$ และ $*$ และ $*$ และ $*$ ซึ่งจะ
 พบทั้ง the periodicity และ ฟังก์ชันค่า ตามต้องการ แต่มีเพียงเลขเดียวเท่านั้นที่ทำให้เราพอใจตาม
 ทั้งสองเงื่อนไข นั่นคือ 0 (ศูนย์) และนั่นจะไม่เหมาะสมกับเหตุการณ์ที่ $y = 0$ และ $x < 0$ จากที่
 กล่าวมา ในระบบเชิงตัวเลขจะแสดงให้เห็นถึงการสร้าง FFT disk : สำหรับการขัดแย้งในข้อ (a)
 แสดง $\arg(0/0)$ ที่ 0 : สำหรับการขัดแย้งในข้อ (b)

1. เมื่อไรก็ตามที่ $y = 0$ และ $x < 0$ เราจะเว้นช่องว่างไว้สำหรับค่าของ \arctan โดยใช้
 สัญลักษณ์ ***** (ซึ่งเราได้เลยว่าจะไม่ได้เกิดขึ้นบ่อยแน่ ๆ)
2. ที่ $n = 0$ เราแสดงค่า \arctan ไว้เป็น 0 ไม่ว่าค่าของ x และ y จะเป็นอย่างไร เพราะมันเป็น
 คุณสมบัติที่สำคัญของ odd phase plot

บทที่ 8 การแปลงฟูรีเยร์อย่างรวดเร็ว

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการแปลงฟูรีเยร์แบบฐานสองของ Fast Fourier Transform (FFT) ซึ่งจะแสดงให้เห็นว่าทำไมการ FFT จึงเป็นการแปลงที่มีความสามารถในการคำนวณสูง

8.1 หลักการเบื้องต้นของ FFT

จากบทที่แล้วเรากล่าวนิยามการแปลงฟูรีเยร์แบบ DFT สมการการแปลงฟูรีเยร์แบบ DFT คือ

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j2\pi mk/N} \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (8.1)$$

แทนค่า subscript k ในสมการ(8.1) ด้วยศูนย์ ดังนั้นจะได้

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(k) W^{nk} \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (8.2)$$

โดยที่ $k, m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ และจำนวนเชิงซ้อน

$$W = e^{-j2\pi/N} \quad (8.3)$$

และดังนั้น

$$e^{-j2\pi mk/N} = (e^{-j2\pi/N})^{nk} = W^{nk} \quad (8.4)$$

สำหรับกรณี $N = 2$ จากสมการที่ (8.2) จะได้

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

เนื่องจาก

$$W^0 = 1 \quad \text{และ} \quad W^1 = e^{-j2\pi^{1/2}} = -1 \quad (8.6)$$

แทนค่าสมการ (8.6)ลงในสมการ (8.5)

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{cases} F(0) = f_0(0) + f_0(1) \\ F(1) = f_0(0) - f_0(1) \end{cases} \quad (8.8)$$

ดังนั้นสำหรับ $N = 2$ ค่าสัมประสิทธิ์ของ DFT จะอยู่ในรูปของค่าผลบวกและผลต่างของค่าสองค่า พิจารณาต่อไปที่ค่า $N = 4$ จากสมการ(8.2) จะได้

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad (8.9)$$



จากบทที่แล้ว เลขยกกำลังเชิงซ้อน (Complex Exponential) มีคุณสมบัติการทวนกลับ มาหาตัวเองของวงกลม(circular property of repeating themselves) ซึ่งมีคาบเท่ากับ N ดังนั้น

$$e^{-j2\pi nk/N} = e^{-j2\pi nk/N} \quad (8.10)$$

และในพจน์ของ W สามารถเขียนสมการ(8.10) ได้ดังนี้

$$W^{nk} = W^{nk \pmod{N}} \quad (8.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับที่ $N = 4$ จะได้ว่า $W^4 = W^0, W^6 = W^2$, และ $W^9 = W^1$ และจากรูปที่ 8.1 เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวกพบว่าทุกค่าของ W^{nk} จะมีค่าเท่ากับค่าที่เป็นลบของค่าตรงกันข้ามในรูปวงกลมเสมอ ดังนั้นเมื่อค่า $N = 4$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

เนื่องจาก $W^0 = 1$ เราสามารถแยกเมตริกซ์ทางด้านขวามือได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(2) \\ F(1) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & -W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

ต่อไปแตกสมการ(8.13)ออกเป็น 3 ขั้นตอนโดยที่ขั้นตอนสุดท้ายเรียกว่า การกลับบิต(Bit reversal) ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1

$$\begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

ขั้นตอนที่ 2

$$\begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & -W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

การกลับบิต

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(2) \\ f_2(1) \\ f_2(3) \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในขั้นตอนที่ 1 เราสามารถนำเมตริกซ์ดังกล่าวออกมาเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\begin{cases} f_1(0) = f_0(0) + W^0 f_0(2) \\ f_1(2) = f_0(0) - W^0 f_0(2) \end{cases} \quad (8.16)$$

และ

$$\begin{cases} f_1(1) = f_0(1) + W^0 f_0(3) \\ f_1(3) = f_0(1) - W^0 f_0(3) \end{cases} \quad (8.18)$$

และในขั้นตอนที่ 2 นำเมตริกซ์มาเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\begin{cases} f_2(0) = f_1(0) + W^0 f_1(1) \\ f_2(1) = f_1(0) - W^0 f_1(1) \end{cases} \quad (8.19)$$

และ

$$\begin{cases} f_2(2) = f_1(2) + W^1 f_1(3) \\ f_2(3) = f_1(2) - W^1 f_1(3) \end{cases} \quad (8.20)$$

และถ้าเราเขียน การกลับบิต ในสมการ(8.16)เป็นแบบฐาน 2 แทนที่จะเขียนเป็นฐาน 10 จะได้

$$\begin{bmatrix} F(00) \\ F(01) \\ F(10) \\ F(11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(00) \\ f_2(10) \\ f_2(01) \\ f_2(11) \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

8.2 การคำนวณ FFT แบบฐาน 2 ของ COOLEY และ TUKEY

จากการแปลงฟูริเยร์แบบ DFT สำหรับลำดับ $f(k)$ ที่ยาว N จุดสามารถนิยามได้ดังนี้คือ

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_0(n) W^{nk} \quad (8.22)$$

ในกรณีที่ $N = 4$ จากสมการ(8.22)สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การคำนวณสมการ(8.23)นี้โดยตรงนั้นจะเห็นได้ว่า ต้องใช้การคูณจำนวนเชิงซ้อน $N \times N$ ครั้ง หรือ เท่ากับ 16 ครั้ง และต้องทำการบวกจำนวนเชิงซ้อนอีก $N(N-1)$ ครั้ง หรือ 12 ครั้ง โดยหลักการของ FFT ประการหนึ่ง คือ ต้องการลดจำนวนครั้งในการคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยอาศัยคุณสมบัติของภาวะเป็นคาบ ของจำนวนเชิงซ้อน W คือ $W^{nk} = W^{[nk \bmod(N)]}$ ซึ่ง $[nk \bmod(N)]$ หมายถึง ส่วนที่เหลือหลังจากการหารพจน์ nk ด้วย N ดังนั้นสมการ(8.23) อาจเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

จากคุณสมบัติภาวะเป็นคาบนี้เองที่ทำให้เราสามารถแยกตัวประกอบของเมตริกซ์ 4×4 ด้านขวามือออกเป็นเมตริกซ์หลายๆเมตริกซ์คูณกันและสมาชิกภายในเมตริกซ์จะมีค่าเป็นศูนย์มากที่สุด วิธีการแยกตัวประกอบนี้ไม่กระทำโดยตรงกับเมตริกซ์ดังกล่าว แต่จะมีการจัดตำแหน่ง หรือสับกลุ่มของเมตริกซ์ด้วยวิธีการกลับบิต(ดูในบทที่ 8.1) และเมตริกซ์ที่ได้จัดการสลับแถวเรียบร้อยแล้ว จึงจะนำมาแยกตัวประกอบอีกครั้งหนึ่ง โดยวิธีของ COOLEY และ TUKEY ชั้นแรกแทนตัวแปรในสมการ(8.22)ด้วยเลขฐาน 2 คือ

$$k = (k_1, k_0), \quad n = (n_1, n_0) \quad (8.25)$$

โดยที่ k_0, k_1, n_0 และ n_1 เป็นเลขที่มีค่าได้แค่ 0 หรือ 1 เท่านั้น สมการ(8.25)นี้สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$k = 2k_1 + k_0, \quad n = 2n_1 + n_0 \quad (8.26)$$

ค่าที่ได้นี้เมื่อนำไปแทนในสมการ(8.22)ทำให้ได้สมการ

$$F(k_1, k_0) = \sum_{m_0=1}^1 \sum_{m_1=1}^1 f_0(n_1, n_0) W^{(2m_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad (8.27)$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} W^{(2m_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= W^{(2k_1+k_0)2m_1} W^{(2k_1+k_0)n_0} \\ &= W^{4m_1k_1} W^{2m_1k_0} W^{(2k_1+k_0)n_0} \\ &= W^{2m_1k_0} W^{(2k_1+k_0)n_0} \end{aligned}$$

โดยที่ $W^{4m_1k_1} = 1$ ดังนั้นสมการ(8.27)สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned}
 F(k_1, k_0) &= \sum_{n_0=0}^1 \left\{ \sum_{n_1=0}^1 f_0(n_1, n_0) W^{2n_1 k_0} \right\} W^{(2k_1+k_0)n_0} \\
 &= \sum_{n_0=0}^1 \{f_1(k_0, n_0)\} W^{(2k_1+k_0)n_0}
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

สมมติให้ตัวแปร $f_1(k_0, n_0)$ เป็นการคำนวณระหว่างกลาง เพราะฉะนั้นสมการ(8.28)สามารถเขียนเป็นเมตริกซ์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} F(0,0) \\ F(0,1) \\ F(0,2) \\ F(0,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0,0) \\ f_0(0,1) \\ f_0(1,0) \\ f_0(1,1) \end{bmatrix} \tag{8.29}$$

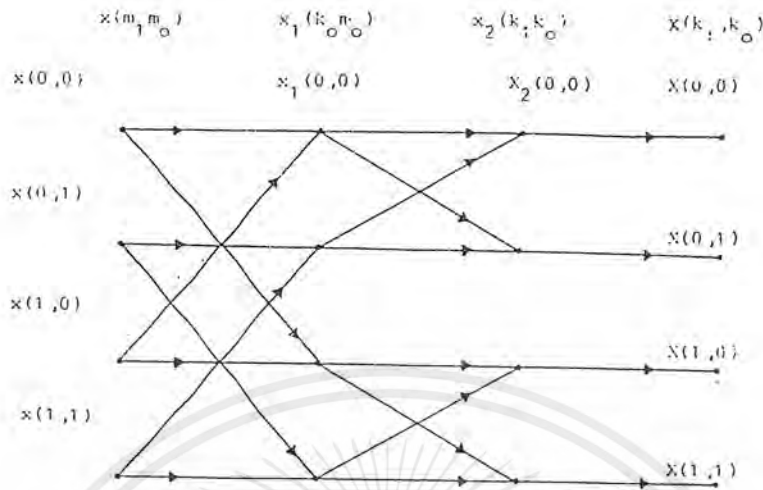
โดยที่ให้

$$\begin{bmatrix} f_1(0,0) \\ f_1(0,1) \\ f_1(1,0) \\ f_1(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0,0) \\ f_0(0,1) \\ f_0(1,0) \\ f_0(1,1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_2(0,0) \\ f_2(0,1) \\ f_2(1,0) \\ f_2(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(0,0) \\ f_1(0,1) \\ f_1(1,0) \\ f_1(1,1) \end{bmatrix}$$

ผลที่ได้จากสมการ(8.28)และสมการ(8.29)หรือจากการแยกตัวประกอบของเมตริกซ์นี้ จะเห็นได้ว่าสมาชิกตามแนวอนของเมตริกซ์ที่ได้จากการแยกตัวประกอบมีเพียง 2 ตัวเท่านั้นที่มีค่าไม่เป็นศูนย์ โดยที่สมาชิกตัวหนึ่งมีค่าเป็นหนึ่งเสมอคือ $W^0 = 1$ และอีกตัวเป็นจำนวนเชิงซ้อน ก็คือในการคูณเมตริกซ์ย่อยแต่ละเมตริกซ์ต้องการการคูณจำนวนเชิงซ้อนเพียง N ครั้ง ถ้าหาก N อยู่ในรูปของ 2 ยกกำลังใดๆ ($N = 2^r$) และพบว่าสมการ(8.27)สามารถเขียนแยกเป็นสมการย่อยได้ $\log_2 N$ สมการ เพราะฉะนั้นด้วยวิธีการนี้ผลรวมของการคูณจำนวนเชิงซ้อนจึงมีค่าเท่ากับ $N \log_2 N$ ครั้งเท่านั้น จากตัวอย่างสำหรับ $N = 4$ สมการ(8.29)ต้องใช้ในการคูณจำนวนเชิงซ้อน 8 ครั้ง และบวกจำนวนเชิงซ้อน 8 ครั้ง ซึ่งจำนวนนี้น้อยกว่าวิธีการคำนวณโดยตรง ความเป็นจริงแล้วจำนวนครั้งในการคูณจำนวนเชิงซ้อนอาจลดทอนลงไปได้อีก โดยอาศัยคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน เช่น $W^2 = -W^0$ เป็นต้น แทนที่จะต้องคำนวณ W^2 อีก ก็สามารถแทนค่าโดยใช้คุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 8.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 8.2 ผังการไหลของสัญญาณ เมื่อ $N = 4$

ในรูปที่ 8.2 แสดง ผังการไหลของสัญญาณ(signal flow graph) ที่เขียนแสดงวิธีการคำนวณของ FFT โดยที่หัวลูกศรจะชี้ทิศทางของการคำนวณส่วนตัวอักษรกำกับเป็นตัวคุณค่าของสัญญาณที่ต้นทางของลูกศรนั้น

8.3 ขั้นตอนวิธีของการสับทางเวลา (Decimation-in-time or DIT)

วิธีการซึ่งเสนอโดย COOLEY และ TUKEY ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น ตามความเป็นจริงแล้ว การแบ่งลำดับ $f(n)$ ที่มีขนาดยาว N จุด ออกเป็น 2 ส่วน ถ้าเรานิยามให้ลำดับยาว $N/2$ จุด $f_e(n)$ และ $f_o(n)$ เป็นลำดับคู่ และลำดับคี่ของ $f(n)$ ตามลำดับ เพราะฉะนั้น

$$\left. \begin{aligned} f_e(n) &= f(2n), m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ f_o(n) &= f(2n+1), m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

การคำนวณการแปลง DFT ของ $f(n)$ ที่ยาว N จะเขียนได้เป็น

$$F(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f_e(m) W_N^{nk} + \sum_{m=0}^{N-1} f_o(m) W_N^{nk}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n+1)W_N^{(2n+1)k} \quad (8.31)$$

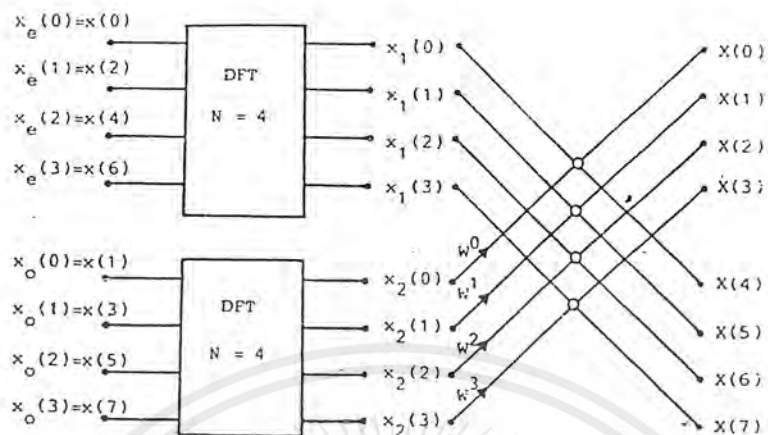
เมื่อ n พจน์แรกและพจน์ที่สองเป็นเลขคู่ และ คี่ตามลำดับซึ่งพจน์ W_N^2 สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$W_N^2 = e^{(j2\pi/N)} = e^{(j2\pi(\frac{N}{2}))} = W_{N/2}$$

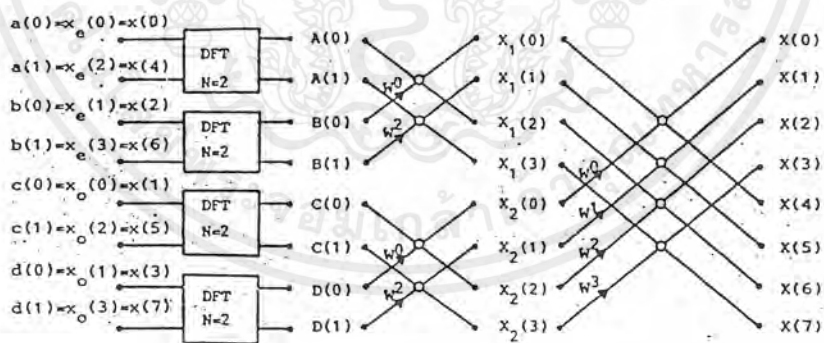
สมการ(8.28)สามารถจัดรูปได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_e(n)W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_o(n)W_{N/2}^{nk} \\ &= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \end{aligned} \quad (8.32)$$

โดยที่ $F_1(n)$ และ $F_2(n)$ แทนการแปลง DFT ขนาด $N/2$ ของลำดับ $f_e(n)$ และ $f_o(n)$ ตามลำดับ จากสมการ(8.32)แสดงให้เห็นว่า การคำนวณ DFT ขนาด N จุดนั้น สามารถแบ่งการคำนวณย่อยออกเป็น DFT ขนาด $N/2$ จุด 2 อันได้ และการคำนวณเชิงซ้อนจะลดลงเหลือ $2(N/2)^2 = N^2/2$ ครั้งซึ่งจะเห็นว่าสามารถลดเวลาการคำนวณลงได้ถึง 50% ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแบ่งลำดับ $f_e(n)$ และ $f_o(n)$ ออกเป็นลำดับคู่ และลำดับคี่ลงไปเรื่อยๆจนในที่สุดการคำนวณการแปลง DFT ขนาด N จุดก็ทำได้โดยการคำนวณการแปลง DFT ขนาด 2 จุด จุดละ $N/2$ ครั้งด้วยกัน และการแบ่งซอยเพื่อแบ่งลำดับ $f(n)$ ออกทีละครึ่งจนเหลือการคำนวณ DFT ขนาด 2 จุด นี้ต้องทำ $\log_2 N$ ครั้ง(ดูรูปที่ 8.3 ประกอบ)

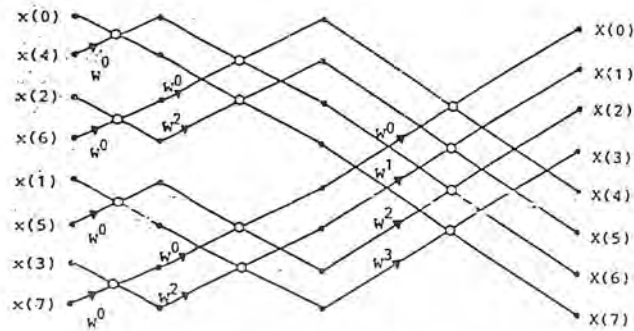


รูปที่ 8.3a



รูปที่ 8.3b

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 8.3c

รูปที่ 8.3 a-c แผนผังการไหลแสดงการคำนวณ DFT ขนาด 8 จุดโดยแบ่งย่อยลำดับจนเหลือเป็นการคำนวณ DFT ขนาด 2 จุด

ปัญหาต่อมาก็คือ จะเอาการแปลง DFT ขนาด 2 จุด จำนวน $N/2$ ครั้งนี้มารวมกันเพื่อให้ได้การคำนวณ DFT ขนาด N จุด ได้อย่างไร ตัวอย่างเช่นกานำเอา DFT ขนาด $N/2$ จุดมาต่อกันโดยตรงตามสมการ(8.32)ย่อมเกิดข้อผิดพลาดเนื่องจาก $F_1(k)$ และ $F_2(k)$ เป็น DFT ขนาด $N/2$ ที่นิยามบนช่วง $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$ เท่านั้น เพราะฉะนั้นเราต้องนิยามค่าของสมการ(8.32)สำหรับค่า $k > \frac{N}{2}$ คือ

$$F(k) = \begin{cases} F_1(k) + W_N^k F_2(k) & , 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ F_1(k - \frac{N}{2}) + W_N^k F_2(k - \frac{N}{2}) & , \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases} \quad (8.33)$$

นิพจน์ W_N^k ในสมการ(8.33) นี้เรียกว่า ตัวประกอบบิด(twiddle factors or phase or rotation factors) ทั้งนี้พจน์นี้เป็นส่วนสำคัญที่ทำให้ DFT ขนาด $N/2$ จุดมารวมกันเป็น DFT ขนาด N จุด

ในสมการ(8.33)นี้ ถ้าหากเรานำเอาความสัมพันธ์ $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ แทนลงไปในสมการจะได้

$$F(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \quad , 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (8.34)$$

และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F(k) = F_1\left(k - \frac{N}{2}\right) - W_N^{k - \frac{N}{2}} F_2\left(k - \frac{N}{2}\right), \quad \frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (8.35)$$

สมการที่ได้นี้เป็นหลักการสำคัญสำหรับ FFT และได้กล่าวถึงบ้างแล้วในสมการ(8.29) จากสมการ (8.34) และสมการ(8.35) พบว่าในการคำนวณ $F(k)$ ในสมการ(8.34) และ $F(k)$ ในสมการ(8.35) ที่สมนัยกัน และห่างออกไป $N/2$ จุดนั้น สามารถทำได้โดยใช้การคูณจำนวนเชิงซ้อนเพียงครั้งเดียวเท่านั้น จากผลที่ได้นี้เราสามารถนำไปสร้างหน่วยการคำนวณที่มีชื่อเรียกว่า butterfly โดยหน่วยการคำนวณนี้ประกอบด้วยข้อมูลเข้า 2 ข้อมูลคือ A และ B และให้ข้อมูลออกเป็น x และ y โดยที่

$$\left. \begin{aligned} x &= A + W_N^k B \\ y &= A - W_N^k B \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

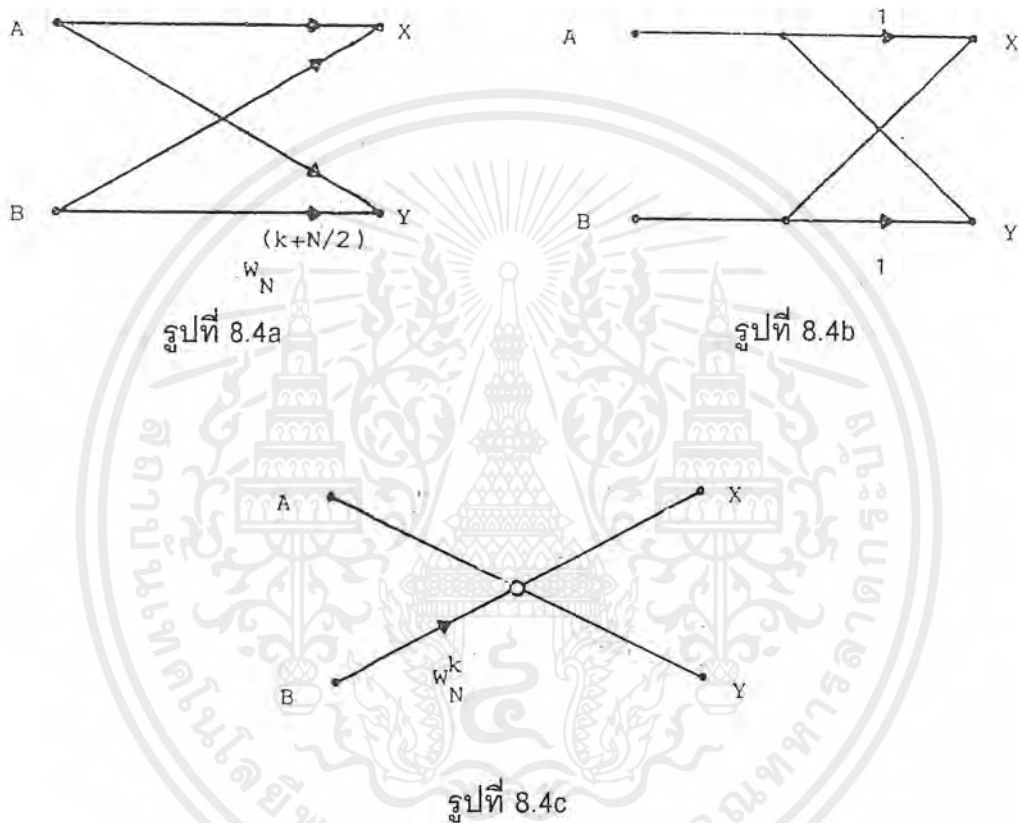
หน่วยคำนวณ butterfly นี้สามารถเขียนแทนด้วยผังการไหลของสัญญาณ ดังรูปที่ 8.4a,b,c ในตำราบางเล่มนั้น โหนด(node) ของลำดับข้อมูล A และ B ซึ่งปรากฏอยู่ห่างกัน $N/2$ จุดนี้จะเรียกว่า โหนดคู่(dual node)

การคำนวณ DFT แบบ 8 จุด โดยอาศัยวิธีการที่ได้อธิบายมาแล้วนี้ได้แสดงไว้ด้วยผังของการไหลของสัญญาณดังรูปที่ 8.3 อย่างเป็นลำดับโดยในขั้นแรก ลำดับของข้อมูลเข้า $f(n)$ จะถูกแบ่งออกเป็นลำดับคู่ $f_e(n)$ และลำดับคี่ $f_o(n)$ อย่างละ 4 ข้อมูล ดังรูปที่ 8.3a ลำดับ $f_e(n)$ และ $f_o(n)$ ก็จะถูกแบ่งย่อยออกไปอีก ดังรูปที่ 8.3b ซึ่งในที่สุดการคำนวณ DFT ขนาด 8 จุด ถูกแบ่งย่อยออกเป็นการคำนวณ DFT ขนาด 2 จุด 4 ครั้งด้วยกันซึ่งในรูปที่ 8.3c ได้แสดงผังของการไหลของสัญญาณสำหรับการคำนวณ DFT แบบ 8 จุด อย่างสมบูรณ์ สังเกตได้ว่าการคำนวณแบ่งเป็น 3 ส่วนและแต่ละส่วนประกอบด้วยหน่วยการคำนวณแบบ butterfly อยู่ $N/2$ หน่วย

จากรูปที่ 8.3c มีข้อที่น่าสังเกตคือ $f(n)$ ไม่ได้จัดเรียงกันอย่างต่อเนื่อง แต่ถูกสลับตำแหน่งกัน(scramble order) นั่นคือ ถ้าเราแทน n ของลำดับ $f(n)$ ด้วยเลขฐาน 2 โดยที่จำนวนบิตของเลขฐาน 2 ต้องเพียงพอที่จะแทนค่า N ได้ ในกรณีนี้ $N = 8$ ก็ต้องแทนด้วยเลขฐาน 2 จำนวน 3 บิต จากนั้นลำดับ $f(n)$ ใหม่จะได้จากการกลับหลังเลขฐาน 2 ของ n ดังแสดงในรูปที่ 8.5 นั่นคือ $f(001)$ จะถูกแทนที่ด้วย $f(100)$ เป็นต้น ซึ่งวิธีการ FFT แบบนี้เป็นการลดเวลาการคำนวณโดยการสลับลำดับ $f(n)$ ออกเป็นกลุ่มย่อย ที่แต่ละกลุ่มประกอบด้วยลำดับ $f(n)$ เพียง 2 ค่า การจัดกลุ่มนี้คล้ายกับเป็นการสุ่ม(sampling) ลำดับเดิมด้วยอัตราที่ต่ำกว่า และถ้าหากเราถือว่าแต่ละกลุ่มที่จัดขึ้นมาใหม่เป็นลำดับข้อมูล 1 ลำดับแล้วก็เท่ากับว่าเราสามารถลดลำดับของ $f(n)$ ลงไป ดังนั้นวิธีการแบบนี้จึงเรียกว่า วิธีการสับทางเวลา(DIT) เราอาจเขียนแผนภาพแทน

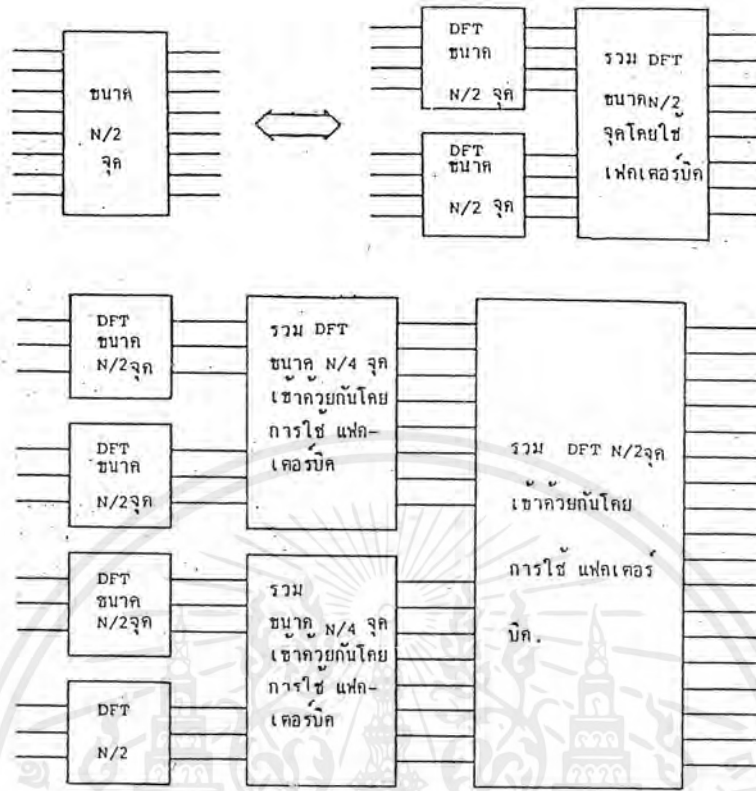
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลำดับวิธีการของ DIT ได้ดังรูปที่ 8.5 โดยที่ DFT ขนาด N จุดเดิม ถูกแบ่งออกเป็น $N/2$ และถูกนำมา รวมกันโดยใช้วิธีแฟคเตอร์บิต จะสังเกตได้ว่าการนำเอา DFT ขนาด $N/2$ มาประกอบกันเป็น N จุดมีวิธีการหลายแบบขึ้นอยู่กับการจัดเรียง แฟคเตอร์บิต ซึ่งการจัดเรียง แฟคเตอร์บิตต่างๆกัน ออกไปจะทำให้ได้ FFT ที่ต่างชนิดกันออกไปด้วย



รูปที่ 8.4 a-c หน่วยคำนวณ butterfly ของของวิธีการสับทางเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 8.5 แผนภาพแสดงการคำนวณ DFT ขนาด N จุด ชนิดการสืบทางเวลา

8.4 ขั้นตอนวิธีการสืบทางความถี่(Decimation-in-Frequency or DIF)

ลำดับการคำนวณ FFT อีกแบบหนึ่งที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย คือ วิธีการสืบทางความถี่ (DIF) หลักการสำคัญของ DIF นั้นคล้ายกับ DIT โดยที่ DIF จะแบ่งลำดับ $f(n)$ ออกเป็น 2 ส่วน โดยการแบ่งครึ่ง ถ้าให้ $f_e(n)$ และ $f_o(n)$ แทนลำดับสัญญาณที่ได้จากการแบ่งครึ่งนี้

$$\left. \begin{aligned} f_e(n) &= f(n) & , n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ f_o(n) &= f\left(n + \frac{N}{2}\right) & , n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

เพราะฉะนั้น DFT ขนาด N จุด ของ $f(n)$ สามารถแยกออกได้เป็น 2 สมการดังนี้

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(n)W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} f(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_e(n)W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} f(n)W_N^{nk} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_e(n)W_N^{nk} + W_N^{Nk/2} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_o(n)W_N^{nk} \quad (8.38)$$

สังเกตว่า ผลรวมของการคำนวณ $N/2$ จุดในสมการ(8.38) ไม่ใช่ DFT ขนาด $N/2$ จุด มันจะเป็นได้ก็ต่อเมื่อ W_N^{nk} มีค่าเป็น $W_{N/2}^{nk}$ และเนื่องจาก $W_N^{Nk/2} = e^{-j\pi k} = -1^k$ ดังนั้นสมการ(8.38)สามารถเขียนได้เป็น

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[f_e(n) + (-1)^k f_o\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk} \quad (8.39)$$

ถ้าเราแยก k ออกเป็นจำนวนคู่ และจำนวนคี่ จะได้ $F(2k)$ และ $F(2k+1)$ แทน DFT ในส่วนที่เป็นเลขคู่และคี่ตามลำดับ

$$F(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [f_e(n) + f_o(n)] W_{N/2}^{nk} \quad (8.40)$$

และ

$$F(2k+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [f_e(n) - f_o(n)W_N^n] W_{N/2}^{nk} \quad (8.41)$$

นำสมการ(8.40)และสมการ(8.41)มาใช้ในการคำนวณ DFT ขนาด N จุดโดย ชั้นแรกจากลำดับ $f(n)$ นำมาทำเป็นลำดับใหม่ซึ่งยาว $\frac{N}{2}$ จุด สมมติลำดับใหม่นี้คือ $g(n)$ และ $q(n)$ ซึ่งลำดับทั้งสองนี้สามารถสร้างได้จากสมการ

$$\left. \begin{aligned} g(n) &= f_e(n) + f_o(n) \\ q(n) &= [f_e(n) - f_o(n)W_N^n] \end{aligned} \right\} m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (8.42)$$

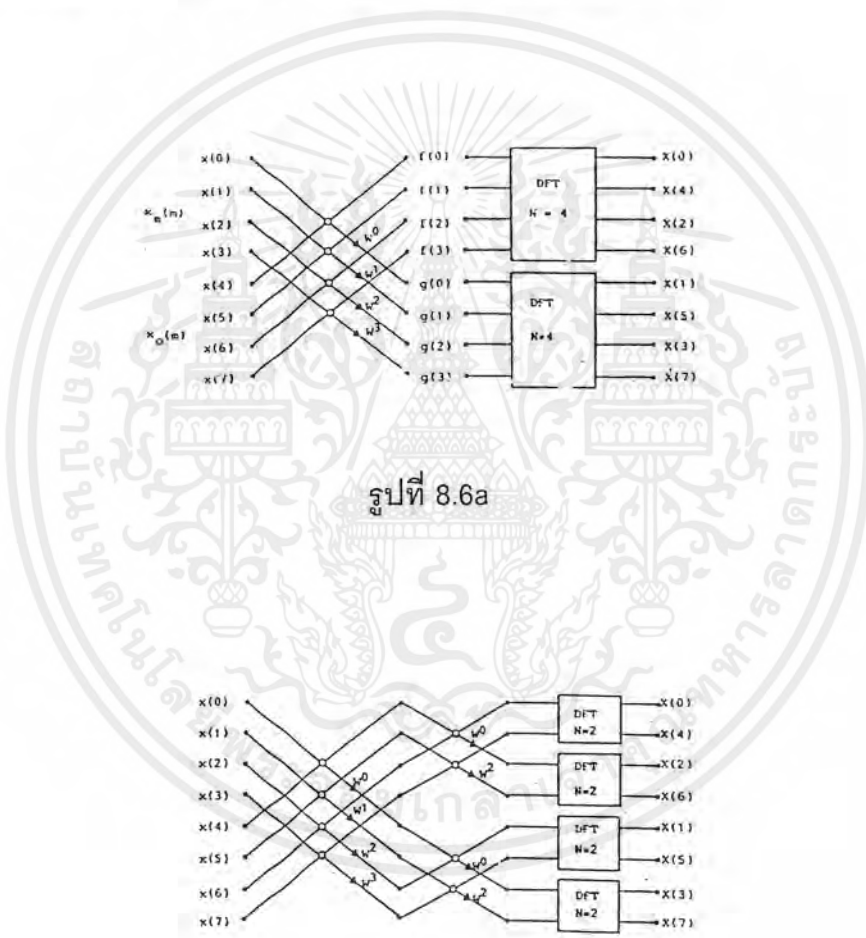
และจากลำดับที่ยาว $N/2$ จุดในสมการ(8.42)เราสามารถนำไปคำนวณหา DFT ขนาด N จุดได้ โดยการแบ่งเป็นการคำนวณแบบ $N/2$ จุด 2 ครั้ง

การแบ่งย่อยการคำนวณออกเป็น DFT ขนาด $N/2$ จุดนี้ สามารถแยกออกไปได้เรื่อยๆจนกระทั่งเหลือเพียงการคำนวณขนาด 2 จุด ตัวอย่างที่ใช้การคำนวณแบบนี้ได้จากรูปที่ 8.6 โดยรูปเป็นการแสดงการคำนวณโดยใช้แผนผังการไหล ในกรณีที่ $N=8$ ซึ่งแบ่งย่อยออกตามลำดับจนเหลือเป็นการคำนวณ DFT ขนาด 2 จุดและการแบ่งย่อยทำได้ 3 ครั้ง หรือ $\log_2 N$ และจำนวน

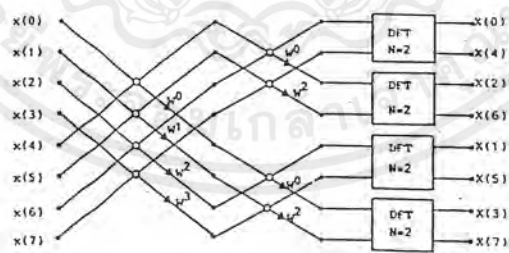
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ครั้งในการคูณจำนวนเชิงซ้อนมีประมาณ $N \log_2 N$ เช่นเดียวกับ DIT เมื่อเปรียบเทียบแบบ DIT กับ DIF โดยใช้รูปที่ 8.3 และรูปที่ 8.6 แล้วเห็นได้ชัดว่า ข้อแตกต่างที่สำคัญระหว่างสองลำดับการคำนวณคือ

1. สำหรับการคำนวณแบบ DIT ข้อมูล $f(n)$ ต้องทำการสลับตำแหน่งกัน แต่ $F(k)$ เรียงตามปกติ ซึ่งจะตรงกันข้ามกับ DIF
2. หน่วยคำนวณ butterfly ของ DIF จะต่างออกไปจาก หน่วยคำนวณ butterfly ของ DIT คือ เอาลำดับ $f_e(n)$ และ $f_o(n)$ มาบวกและลบกันก่อน แล้วจึงทำการคูณด้วยจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งหน่วยคำนวณแบบ butterfly ของ DIF ได้แสดงไว้ในรูปที่ 8.7

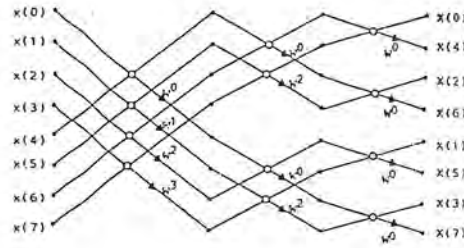


รูปที่ 8.6a



รูปที่ 8.6b

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 8.6c

รูปที่ 8.6 a-c ขั้นตอนการแปลงฟูรีเยร์ชนิดการสับทางความถี่



รูปที่ 8.7 หน่วยคำนวณ butterfly ของวิธีการสับทางความถี่

8.5 การแปลง FFT สำหรับ N ใดๆ

จากที่ได้กล่าวมาแล้วเรากำหนดให้ $N = 2^r$ แต่ในทางปฏิบัติ ถ้าหาก $N \neq 2^r$ แล้ว เราต้องเติมค่าลำดับ $f(n) = 0$ เข้าไปจนกระทั่ง N มีค่าเป็น 2 ยกกำลังใดๆ แล้วจึงทำการคำนวณหา DFT ซึ่ง DFT ที่ได้ก็จะเป็นการประมาณค่า(interpolate)ของ DFT ของลำดับสัญญาณเดิมที่ยังไม่ได้เติมลำดับค่าศูนย์เข้าไป

วิธีการของ DIT และ DIF ก็สามารถนำไปใช้กับกรณี N ที่มีค่าเป็นจำนวนเฉพาะ ที่ไม่สามารถแยกออกเป็นผลคูณของเลขจำนวนเต็มได้ ซึ่งใช้กับ N ที่เป็นเลขประกอบ(composite) เพราะฉะนั้นโดยทั่วไปแล้ว N สามารถแยกได้เป็น

$$N = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_n$$

ถ้า N เป็นเลขประกอบมาก(highly composite) แล้ว $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = 2$ ตัวอย่างเช่น $N = 60$ เราสามารถแยกย่อยออกเป็นผลคูณของ $60 = 3 \times 4 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 \times 3$ เป็นต้น ถ้าหากความยาวของลำดับสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $N = M \times L$ โดยที่ M เป็นจำนวนลำดับในแนวตั้ง(column) และ L เป็นจำนวนลำดับในแนวนอน(row)เราอาจเขียนลำดับหนึ่งมิตินี้ ออกเป็นลำดับสองมิติได้คือ

$$\left. \begin{array}{cccc} f(0) & f(1) & \dots & f(M-1) \\ f(M) & f(M+1) & \dots & f(2M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f((L-1)M) & f((L-1)(M+1)) & \dots & f(N-1) \end{array} \right\} \quad (8.43)$$

หรือเขียน n แทนด้วย

$$n = Ml + m \quad (8.44)$$

เมื่อเราเขียนลำดับ $f(n)$ ให้อยู่ในรูปของลำดับสองมิติ ในทำนองเดียวกัน DFT ของลำดับก็ควรจะอยู่ในรูปสองมิติด้วย ดังนั้นถ้าเราให้ r และ s เป็นตัวแปรของลำดับ $F(k)$ ตามแนวตั้งและแนวนอนตามลำดับ เราจะได้

$$k = Lr + s \quad (8.45)$$

เพราะฉะนั้นแทนค่า m และ k จากสมการ(8.44)และสมการ(8.45) ลงในสมการ(8.1)จะได้

$$F(k) = F(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} f(l, m) W^{(Ml+m)(Lr+s)} \quad (8.46)$$

โดยที่พจน์ $W^{MLr} = W^{Nlr} = 1$ ดังนั้นสมการ(8.46)เขียนได้ใหม่เป็น

$$F(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} W^{Lmr} W^{ms} \sum_{l=0}^{L-1} f(l, m) W^{Msl} \quad (8.47)$$

การคำนวณสมการ(8.47)ขึ้นอยู่กับว่าเราจะเลือกคำนวณเครื่องหมายรวมยอด(summation)อันไหนก่อน หรือหลัง และการคำนวณที่ต่างกันจะทำให้ได้วิธีที่ต่างกันออกไป ในตอนแรกเรามาดูวิธีการคำนวณแบบ DIT ซึ่งทำได้โดย

1. คำนวณ DFT ขนาด L จุดของลำดับในแนวตั้งแต่ละแถว นั่นคือทำการคำนวณ

$$q(s, n) = \sum_{l=0}^{L-1} f(l, m) W^{Msl} \quad (8.48)$$

ทำให้สมการ(8.47)กลายเป็น

$$F(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} W^{Lmr} W^{ms} q(s, m) \quad (8.49)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. สร้างลำดับสองมิติขึ้น ด้วยการคูณลำดับ $q(s, m)$ เข้ากับแฟคเตอร์บิด W^{ms} หรือ

$$h(s, m) = W^{ms} q(s, m) \quad (8.50)$$

3. คำนวณ DFT ขนาด M จุดของลำดับในแต่ละแถวในแนวนอนของลำดับสองมิติ

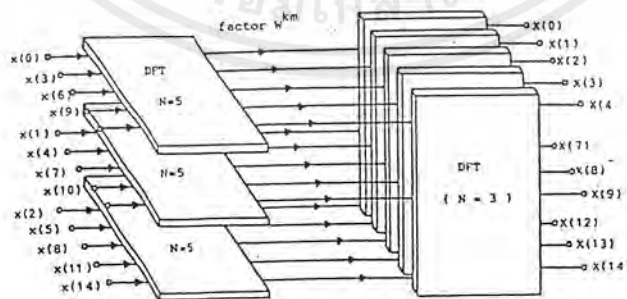
$$h(s, m)$$

ในการทำงานเดียวกันลำดับการคำนวณแบบ DIF สามารถทำในลักษณะคล้ายคลึงกันด้วยการเขียนสมการ(8.47)ใหม่เพื่อความสะดวก

$$F(s, r) = \sum_{l=0}^{L-1} W^{Msl} \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} f(l, m) W^{ms} W^{Lrm}}_{\substack{\text{ขั้นที่ 1} \\ \text{ขั้นที่ 2} \\ \text{ขั้นที่ 3}}} \quad (8.51)$$

การคำนวณสามารถแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนด้วยกันคือ

1. สร้างลำดับมิติ $q(l, s)$ ด้วยการคูณลำดับสัญญาณสองมิติ $f(l, m)$ เข้ากับแฟคเตอร์บิด W^{ms}
2. คำนวณ DFT ขนาด M จุดของแต่ละแถวในแนวนอนของลำดับสองมิติ $q(l, s)$ และให้ลำดับสองมิติที่ได้ชื่อ $h(l, s)$
3. คำนวณ DFT ขนาด L จุดของแต่ละแถวในแนวตั้งของลำดับ $h(l, s)$ ผลลัพธ์ที่ได้คือ DFT ขนาด N จุด



รูปที่ 8.8 ภาพรวมแสดงวิธีขั้นตอนการคำนวณ DFT โดยใช้ FFT

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 8.8 แสดงถึงลักษณะการคำนวณ DFT ขนาด 15 จุด ซึ่งแยกย่อยออกเป็น $L = 5$ และ $M = 3$ และเป็นการคำนวณแบบ DIT ถ้าพิจารณาการคำนวณทั้งสองแบบที่ได้กล่าวมาแล้วเห็นได้ชัดว่าการคำนวณแบบ DIT และ DIF นั้นคล้ายกันมาก ที่ต่างกันคือแบบ DIT แพลคเตอร์บิตจะคูณในลำดับการคำนวณขั้นที่สองแต่แบบ DIF แพลคเตอร์บิตจะคูณก่อน

ถ้าเราใช้หลักการที่ว่า การคำนวณ DFT ขนาด N จุดต้องมีการคำนวณ (คูณและบวก) จำนวนเชิงซ้อนโดยประมาณ N^2 ครั้ง เพราะฉะนั้นการคำนวณ DFT ตามสมการ(8.48)และสมการ(8.51)ก็ต้องมีการคำนวณจำนวนเชิงซ้อนเท่ากับ $ML^2 + LM^2$ ครั้ง เมื่อรวมการคำนวณเชิงซ้อนที่เกิดขึ้นจากการคูณค่าของแพลคเตอร์บิตตามสมการ(8.50)เข้าด้วยกัน จึงสามารถสรุปได้ว่าจำนวนครั้งของการคูณจำนวนเชิงซ้อนของวิธีการนี้มีค่าเท่ากับ

$$C_2 ML^2 + LM^2 + LM = LM(L + M + 1) = N(M + L + 1) \quad (8.52)$$

ซึ่งมีค่าน้อยกว่า N^2 และถ้าหาก M และ L อยู่ในรูปของสองยกกำลังใดๆแล้ว เราสามารถใช้ FFT มาช่วยในการคำนวณ และ

$$C_2 = N(\log_2 L + \log_2 M + 1)$$

ในทำนองเดียวกัน ค่า N อาจถูกแบ่งออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะสามค่าได้ เช่น $N = PML$ ถ้าหากว่าเราวิเคราะห์เช่นเดียวกับตอนหาค่า C_2 และถ้าให้ C_3 เป็นจำนวนครั้งในการคูณจำนวนเชิงซ้อนแล้วเราจะได้ว่า

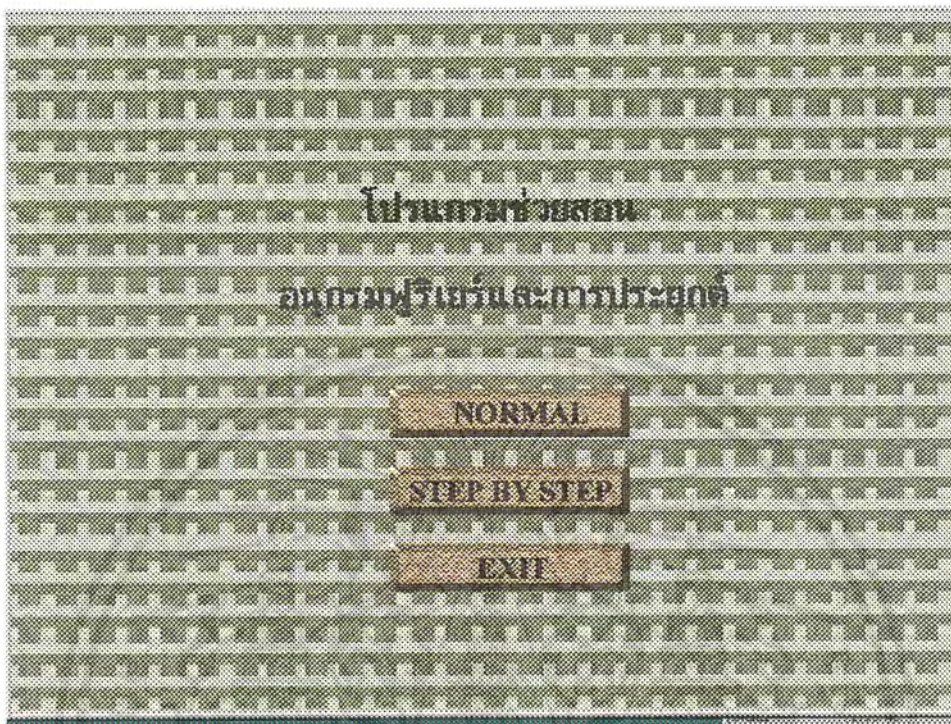
$$C_3 = P^2 LM + PML^2 + PLM^2 + 2PLM = N(P + L + M + 2) \quad (8.53)$$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $N = N_1 N_2 N_3 \dots N_J$ แล้วเราสามารถเขียนสมการที่แสดงถึงจำนวนครั้งโดยประมาณที่ต้องใช้ในการคำนวณเชิงซ้อนด้วยวิธีการนี้เป็น

$$C_J = N \left(\sum_{i=1}^J n_i + J - 1 \right) \quad (8.54)$$

บทที่ 9

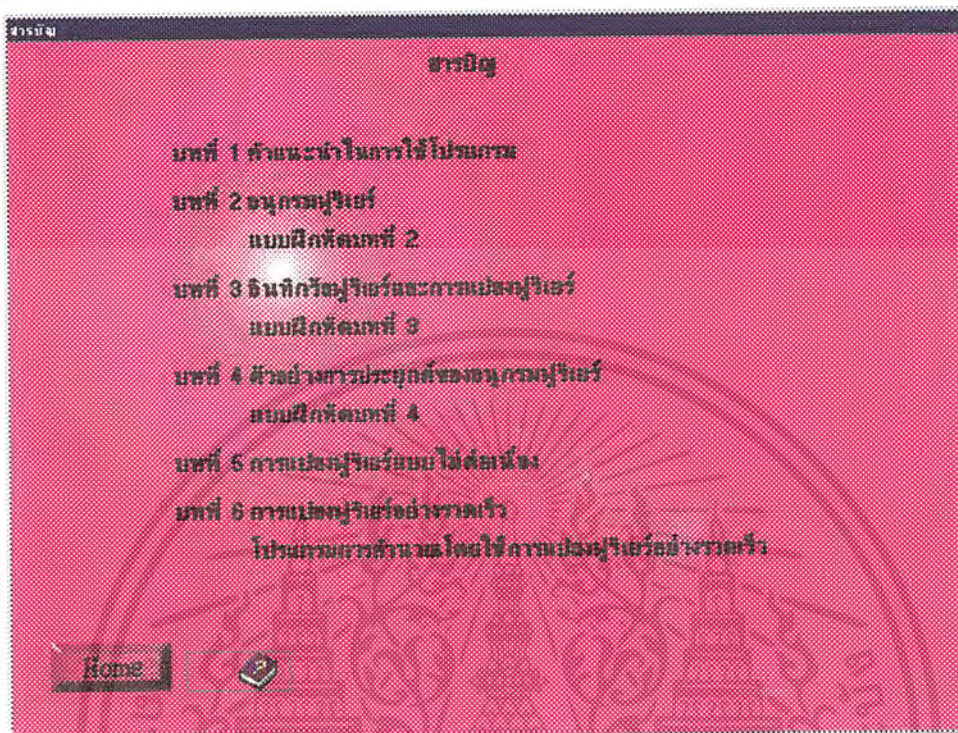
ผลการทดลอง



รูป 9.1

รูป 9.1 แสดงหน้าจอเริ่มต้น ซึ่งประกอบด้วย

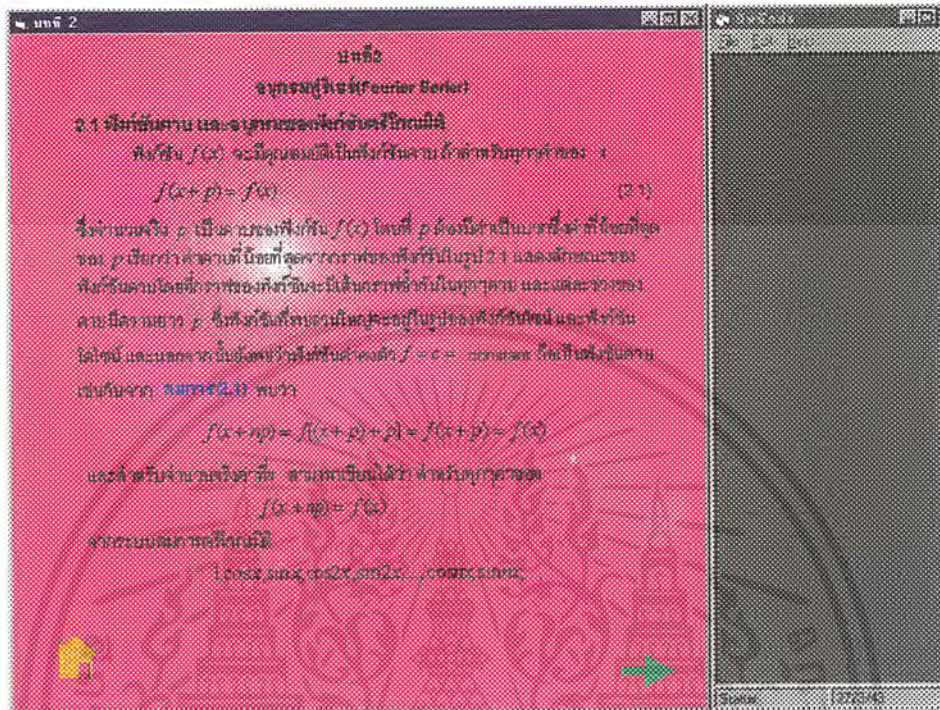
1. ปุ่ม NORMAL คือ เมื่อกดค้ำที่ปุ่มดังกล่าวจะปรากฏคำว่า “เลือกอ่านเนื้อหาได้ตามที่ต้องการ” เมื่อเลือกปุ่มนี้ผู้ใช้สามารถเข้าไปอ่านเนื้อหาได้ตามที่ต้องการ
2. ปุ่ม STEP BY STEP คือ เมื่อกดค้ำที่ปุ่มดังกล่าวจะปรากฏคำว่า “อ่านเนื้อหาได้ตามลำดับความยากง่าย” เมื่อเลือกปุ่มนี้ผู้ใช้ไม่สามารถเข้าไปอ่านเนื้อหาได้ตามที่ต้องการ คือ ต้องอ่านเนื้อหาตามลำดับความยากง่ายที่ผู้จัดทำได้เรียงลำดับไว้
3. ปุ่ม EXIT คือ เมื่อกดค้ำที่ปุ่มดังกล่าวจะปรากฏคำว่า “ออกจากโปรแกรม” เมื่อกดปุ่มดังกล่าวจะออกจากโปรแกรม



รูป 9.2

รูป 9.2 แสดงภาพเมื่อเลือกกดปุ่ม NORMAL จากหน้าจอแรกนี้ประกอบด้วย

1. ชื่อบท ซึ่งสามารถเลือกกดเข้าไปเพื่ออ่านเนื้อหาตามชื่อบทนั้น
2. ชื่อแบบฝึกหัด ซึ่งสามารถกดเลือกเข้าไปได้เพื่อเลือกทำแบบฝึกหัดได้ตามบทนั้นๆ
3. ปุ่ม Home ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะกลับสู่หน้าจอแรก
4. ปุ่มรูป หนังสือ ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะเข้าสู่หน้าจอช่วยเหลือ

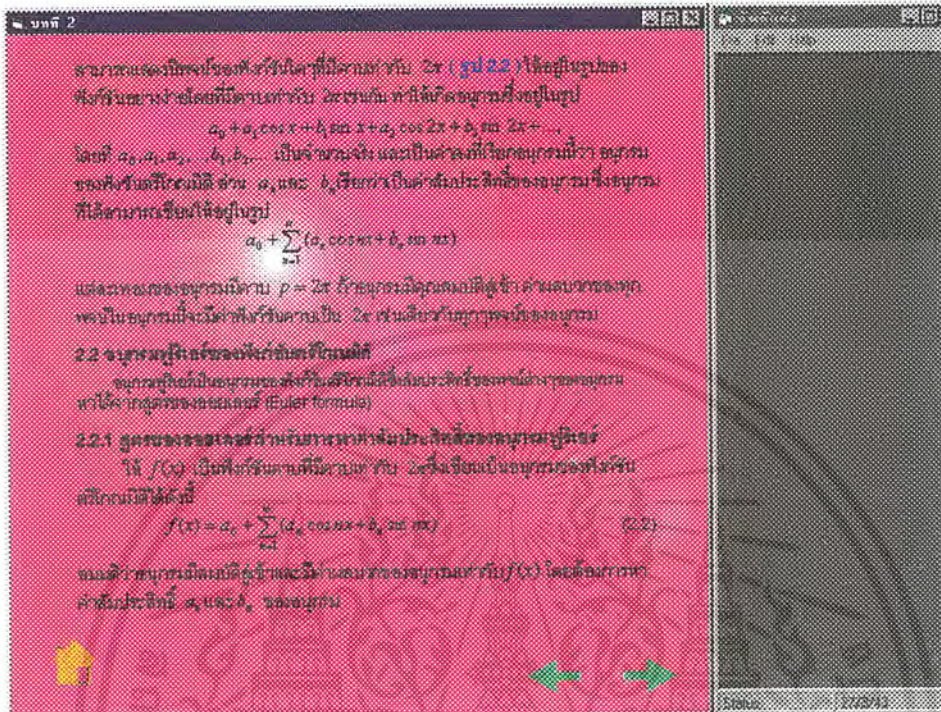


รูป 9.3

รูป 9.3 แสดงหน้าจอเมื่อเลือกกดบทที่ 2 ซึ่งเมื่อเข้าสู่หน้าจอนี้สามารถอ่านเนื้อหาของบทนั้นๆ ได้ หน้าจอนี้ประกอบด้วย

1. เนื้อหา
2. ปุ่มรูปบ้าน ซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้ จะกลับสู่หน้าจอสารบัญ
3. ปุ่มรูปลูกศรหันไปทางขวา เมื่อกดปุ่มนี้จะเข้าสู่หน้าจอเนื้อหาต่อจากหน้าปัจจุบัน
4. หน้าจอด้านขวาของจอภาพ คือหน้าจอที่สามารถบันทึกข้อความที่อ่านไว้เป็นบันทึกย่อ

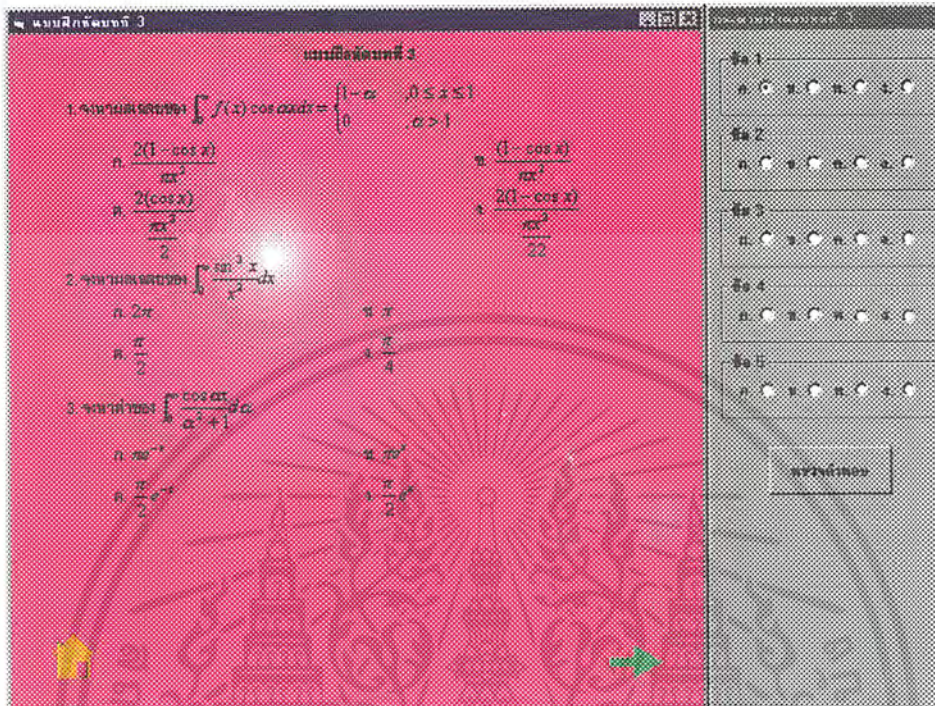
แล้วสามารถบันทึกลงแฟ้มข้อมูลได้ สามารถเรียกแฟ้มดังกล่าวขึ้นมาดูได้ โดยเก็บแฟ้มข้อมูลเป็น *.doc



รูป 9.4

รูป 9.4 หน้าจอที่ปรากฏเมื่อกดปุ่มรูป ลูกศร ประกอบด้วย

1. เนื้อหาต่อจากหน้าที่แล้ว
2. บันทึกลับย่อต่อจากหน้าที่แล้ว
3. ปุ่มรูปบ้าน เมื่อกดจะกลับสู่หน้าจอสารบัญ
4. ปุ่มลูกศรหันไปทางซ้าย เมื่อกดเข้าไปจะปรากฏหน้าจอที่แล้ว
5. ปุ่มลูกศรหันไปทางขวา เมื่อกดเข้าไปจะปรากฏหน้าจอต่อไป

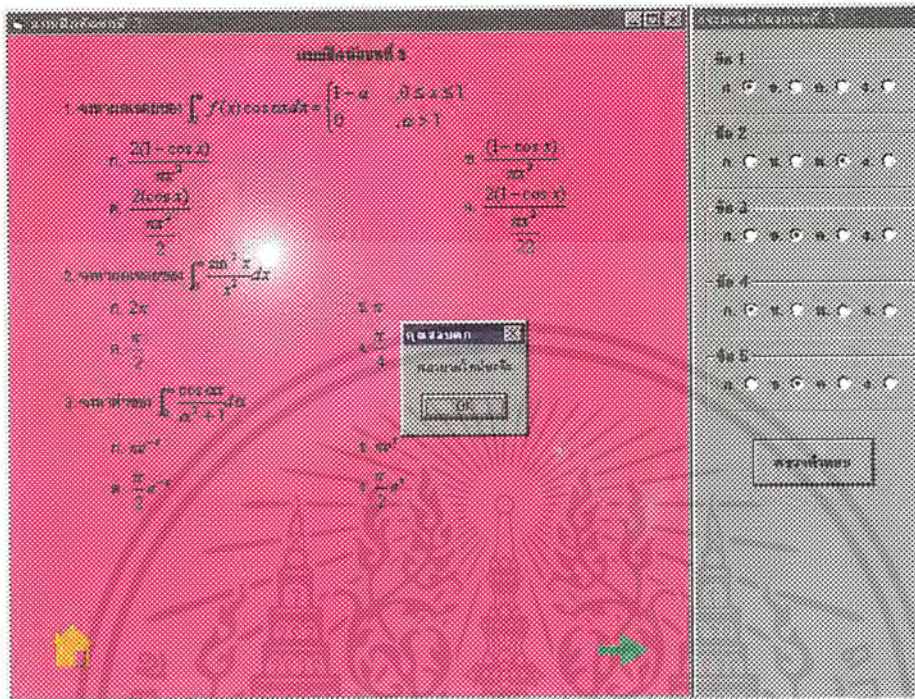


รูป 9.6

รูป 9.6 เมื่อเลือกแบบฝึกหัดบทที่ 3 หน้าจอประกอบด้วย

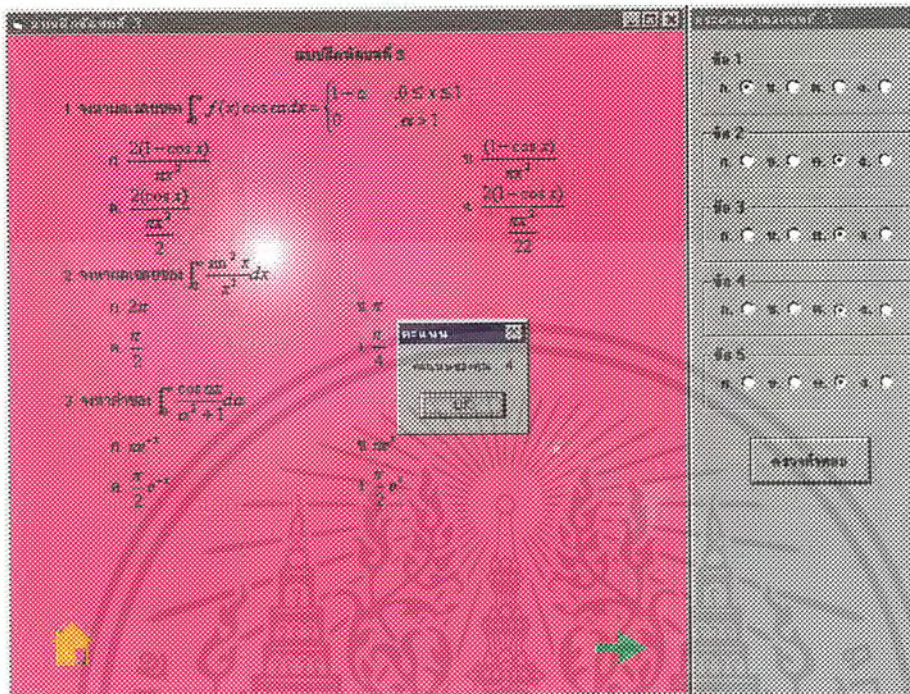
1. โจทย์
2. ปุ่มรูปบ้าน เมื่อกดปุ่มนี้จะกลับสู่หน้าจอสารบัญ
3. ปุ่มรูปลูกศร
4. หน้าจอด้านขวา แสดงหน้าจอกระดาษคำตอบ ข้อสอบ 1 ข้อ สามารถเลือกตอบได้

เพียง 1 คำตอบเท่านั้น เมื่อตอบแล้ว กดปุ่มที่เขียนว่า “ตรวจคำตอบ” เพื่อตรวจคำตอบ



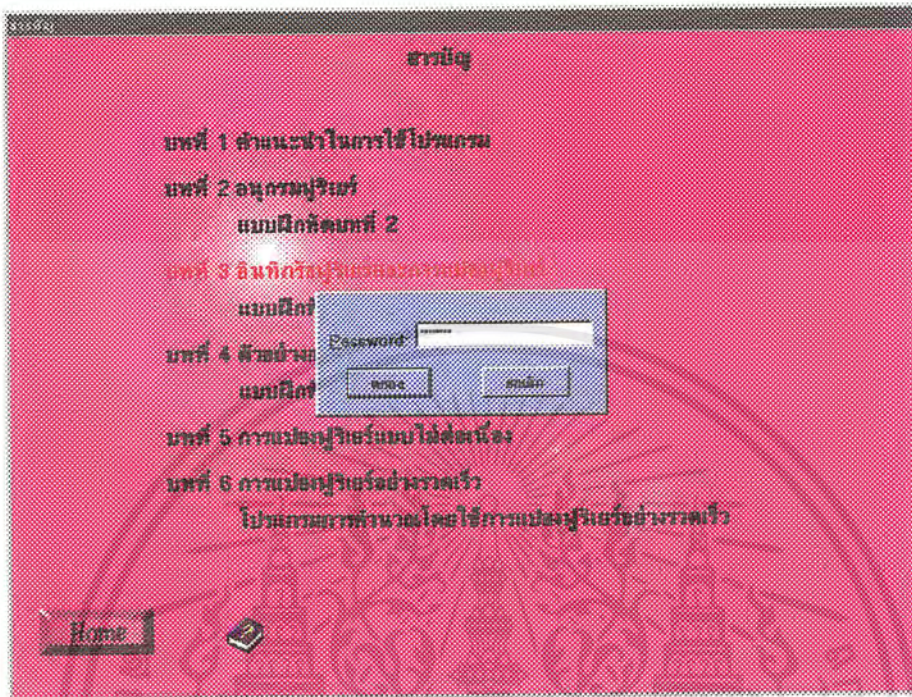
รูป 9.8

รูป 9.8 เมื่อทำแบบทดสอบไม่ผ่านจะปรากฏข้อความขึ้นว่าสอบตก เมื่อกดปุ่ม OK คำตอบที่ตอบไว้ทั้งหมดจะถูกลบออกทั้งหมด ถ้าต้องการทำแบบฝึกหัดอีก กดเลือกคำตอบใหม่ ถ้าไม่ต้องการกดปุ่มรูปบ้านเพื่อกลับสู่หน้าจอสรวบัญ



รูป 9.9

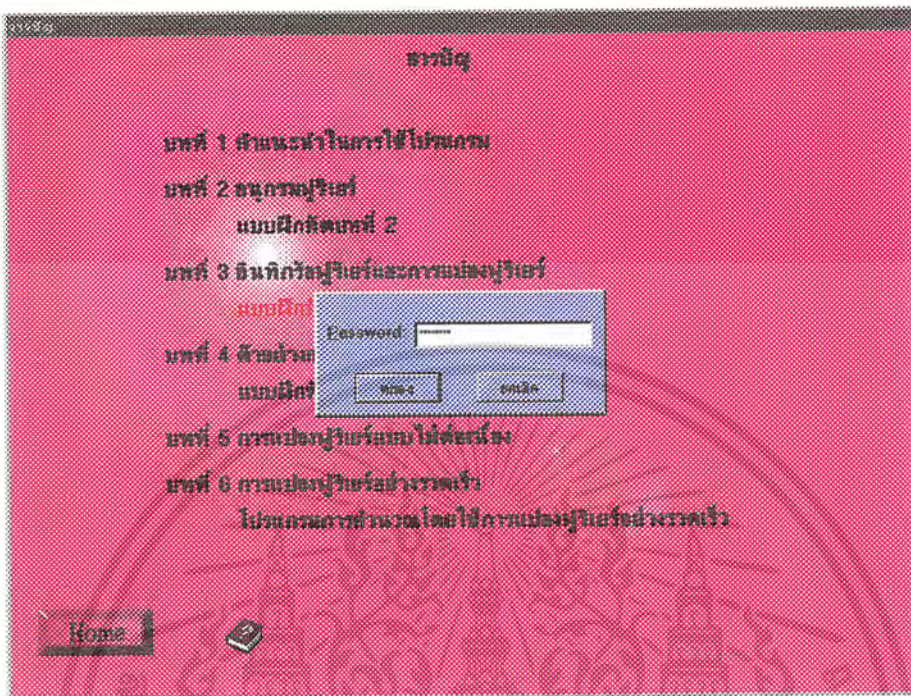
รูป 9.9 แสดงหน้าจอเมื่อทำคะแนนได้ตามเกณฑ์ที่กำหนด เมื่อกดปุ่ม OK จะปรากฏรหัสผ่านเพื่อใช้สำหรับอ่านบทต่อไป แต่เนื่องจาก เลือกอ่านแบบ NORMAL ซึ่งสามารถเลือกอ่านบทใดก็ได้ ดังนั้น รหัสผ่านที่ได้สามารถนำไปใช้ เมื่อเลือกอ่านแบบ STEP BY STEP ได้



รูป 9.11

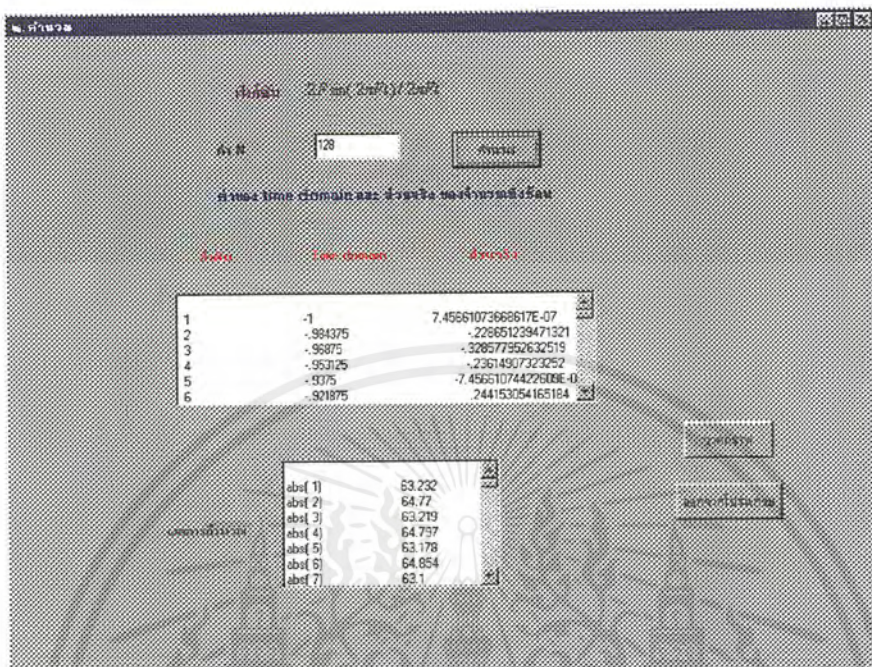
รูป 9.11 แสดงหน้าจอเมื่อเลือกอ่านแบบ “STEP BY STEP” เมื่อเลือกอ่านแบบ STEP BY STEP เป็นการอ่านแบบเรียงตามลำดับเนื้อหาความยากง่ายเมื่อเลือกเข้าอ่านเนื้อหาบทอื่นที่ไม่ใช่บทที่ 2 ต้องใส่รหัสผ่าน ซึ่งได้มาจากการทำแบบฝึกหัดผ่านในบทก่อนหน้า เมื่อใส่รหัสผ่านถูกต้องจึงจะสามารถเข้าอ่านบทนั้นได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



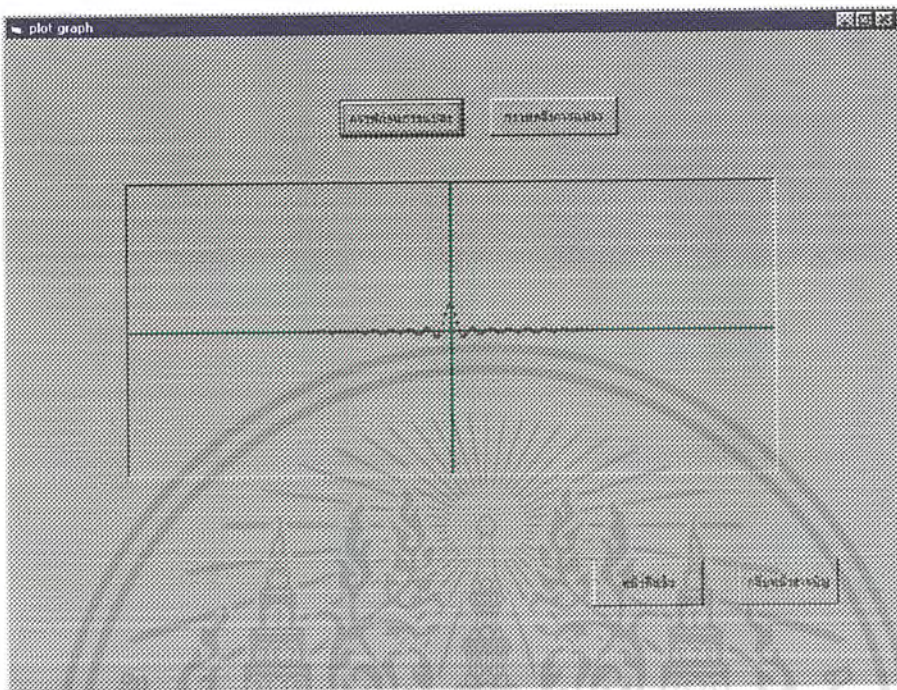
รูป 9.12

รูป 9.12 แสดงหน้าจอเมื่อต้องการเข้าทำแบบฝึกหัดบทอื่นที่ไม่ใช่บทที่ 2 จะต้องใส่รหัสผ่านที่ได้จากการทำแบบฝึกหัดบทที่แล้ว ซึ่งเมื่อรหัสที่ใส่เข้าไปถูกต้องก็สามารถเข้าไปทำแบบฝึกหัดบทที่ต้องการได้



รูป 9.12

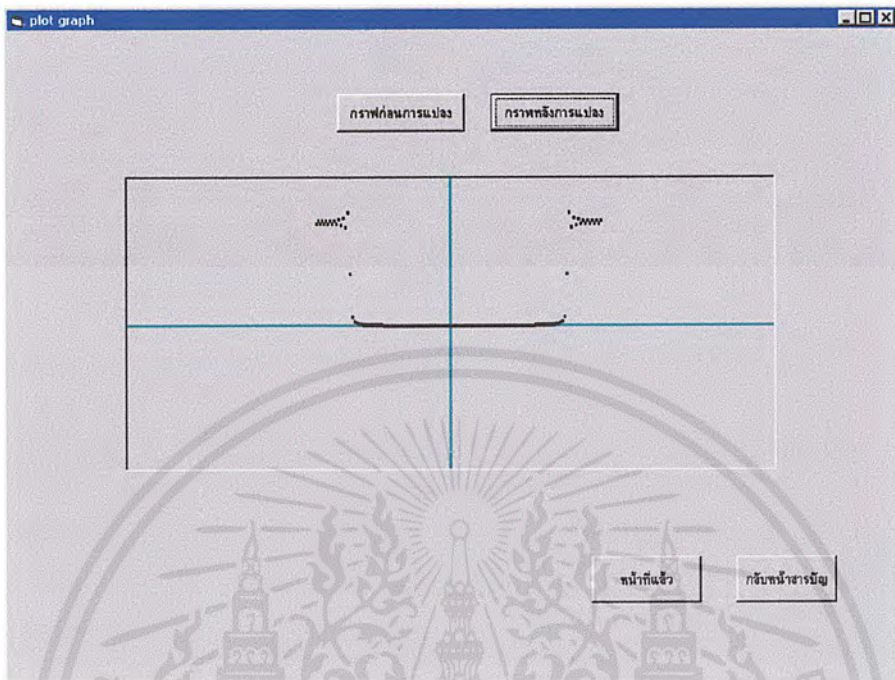
รูป 9.12 แสดงหน้าจอเมื่อเลือก “ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณแบบฟาสฟูรีเยร์” เมื่อใส่ค่า N ในช่องใส่ค่า แล้วกดปุ่ม คำนวณ จะปรากฏค่า ลำดับ Time domain ส่วนจริง และค่าผลจากการคำนวณ เมื่อกดปุ่ม วาดกราฟ จะปรากฏหน้าจอต่อไป ส่วนปุ่มออกจากโปรแกรม จะกลับสู่หน้าสารบัญ



รูป 9.13

รูป 9.13 แสดงหน้าจอเมื่อกดปุ่มกราฟก่อนการคำนวณซึ่งได้จากการพล็อตกราฟของฟังก์ชัน และค่าของฟังก์ชันจากหน้าที่แล้ว

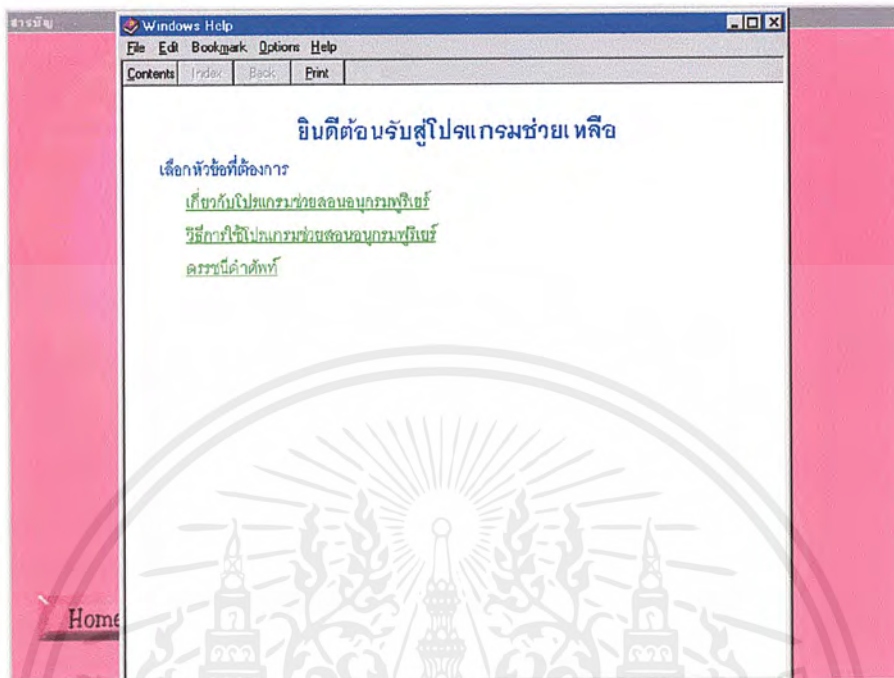
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 9.13

รูป 9.13 แสดงกราฟเมื่อกดปุ่ม กราฟหลังการแปลงของรูปฟังก์ชันก่อนการแปลง

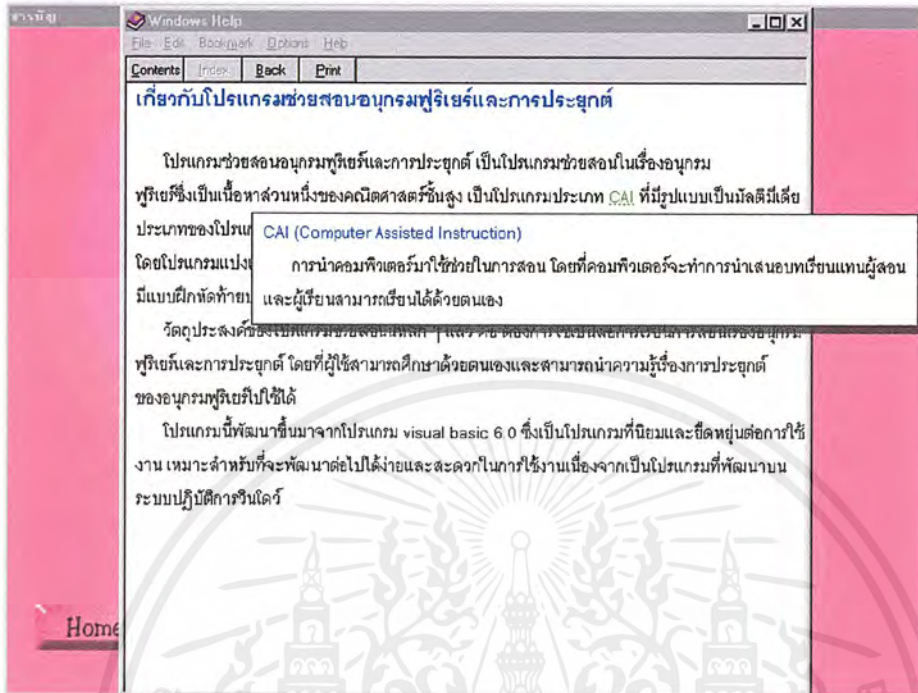
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 9.14

รูป 9.14 แสดงหน้าจอช่วยเหลือเมื่อกดปุ่มรูป หนังสือ ซึ่งตัวหนังสือสีเขียว สามารถคลิก เพื่อศึกษาได้

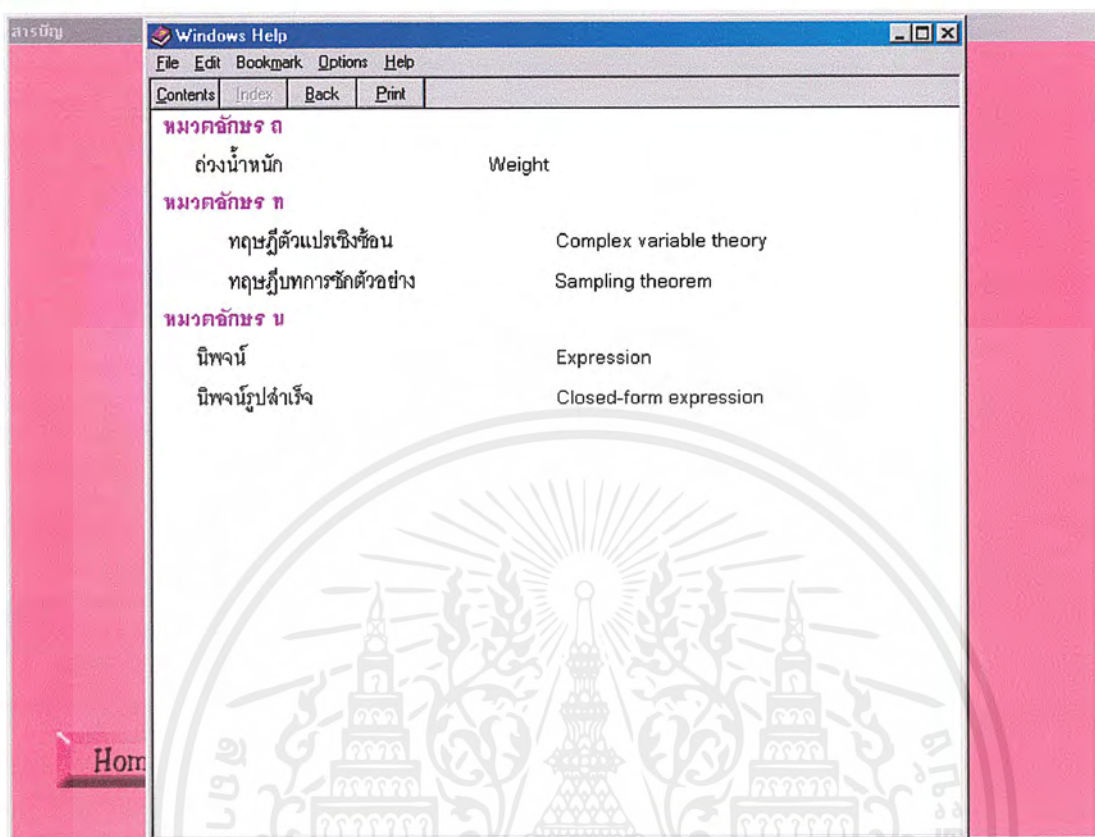
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 9.14

รูป 9.14 แสดงหน้าจอเมื่อเลือกหัวข้อ เกี่ยวกับ อนุกรมฟูรีเยร์ ประกอบด้วย เนื้อหาเกี่ยวกับโปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ และตัวหนังสือสีเขียวสามารถคลิกเข้าไปดูเพื่ออ่านความหมายของคำนั้นๆได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 9.15

รูป 9.15 แสดงหน้าจอเมื่อเลือกหัวข้อ ดรรชนีศัพท์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 10

การอภิปรายผล

จากผลการทดลองในบทที่ 9 จะเห็นได้ว่าโปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ ที่เขียนขึ้นเองโดยใช้โปรแกรม Visual Basic 6 สามารถแสดงเนื้อหาเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ และแสดงตัวอย่างการคำนวณโดยใช้การแปลงฟูรีเยร์แบบไม่ต่อเนื่องอย่างรวดเร็วได้ ส่วนปัญหาที่เกิดขึ้นจากการใช้โปรแกรม Visual Basic 6 มาใช้ในการเขียนโปรแกรมช่วยสอน คือ มีความยุ่งยากในการเขียนโปรแกรมค่อนข้างมากกว่าโปรแกรมช่วยสอนที่เขียนโดยโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้สำหรับสร้างโปรแกรมช่วยสอนโดยเฉพาะ เนื่องจาก Visual Basic 6 มิได้สร้างมาเพื่อการนำเสนอข้อมูลที่มีลักษณะเป็นข้อความมากๆ อย่างเช่นโปรแกรมช่วยสอน และลูกเล่นที่เพิ่มเข้าไปในโปรแกรมช่วยสอนเพื่อดึงดูดความสนใจของผู้ใช้ ถ้าใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้สำหรับการสร้างโปรแกรมช่วยสอนโดยเฉพาะจะสามารถใช้ ได้ง่าย และสะดวกกว่าใช้ Visual Basic 6 แต่ในขณะเดียวกัน สำหรับโปรแกรมการคำนวณการใช้ Visual Basic 6 จะทำได้สะดวกและง่ายกว่า โดยที่ไม่ต้องนำโปรแกรมช่วยสอนไปเชื่อมโยง (Link) กับโปรแกรมการคำนวณอื่น นอกจากนั้นโปรแกรมช่วยสอน ควรจะสามารถปริ้นต์ หน้าจอที่อ่านอยู่ออกทางเครื่องพิมพ์ได้ ซึ่งเป็นส่วนที่ควรเพิ่มเติมในโปรแกรมสำหรับผู้ที่ต้องการสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอื่นๆ หรือพัฒนาโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ต่อไป

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

บทสรุป

ปัญหาโครงการพิเศษฉบับนี้ได้ทำการสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ โดยแบ่งการพัฒนาออกเป็น 3 ส่วน คือ

1. การจัดทำด้านเนื้อหา ตัวอย่าง และแบบฝึกหัด

การนำเสนอทางด้านเนื้อหาและตัวอย่างสามารถอธิบายให้เข้าใจ และศึกษาได้ด้วยตัวเองพอสมควร การทำแบบฝึกหัดท้ายบทสามารถประเมินผลความเข้าใจได้ในระดับหนึ่ง ซึ่งเพียงพอแก่การนำไปประยุกต์ใช้งานที่เกี่ยวข้องกับอนุกรมฟูรีเยร์ได้

2. การพัฒนาโปรแกรม

พัฒนาโปรแกรมโดยใช้ Microsoft Visual Basic เวอร์ชัน 6.0

3. การประเมินผล ทดสอบ และแก้ไข

จากการทดสอบการใช้โปรแกรมช่วยสอนอนุกรมฟูรีเยร์และการประยุกต์ทางด้านเนื้อหาและตัวอย่างสามารถอธิบายให้เข้าใจ และศึกษาได้ด้วยตนเองพอสมควร

การทำแบบฝึกหัดท้ายบทสามารถประเมินผลความเข้าใจได้ในระดับหนึ่ง ซึ่งเพียงพอแก่การนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการประยุกต์ทางด้านอื่นๆได้

ข้อเสนอแนะ

สำหรับข้อเสนอแนะแนวทางการพัฒนาต่อไปนั้น ได้สรุปเป็นแนวทางไว้ดังนี้

1. โปรแกรมควรมีความสามารถในการเพิ่มเติมเนื้อหาส่วนต่างๆ เช่น เนื้อหา ตัวอย่าง และแบบฝึกหัด เพื่อปรับปรุงตัวเนื้อหาให้มีความทันสมัยและความคล่องตัวในการใช้งาน
2. โปรแกรมควรมีความสามารถพิมพ์หน้าที่อ่านอยู่ในขณะนั้น ออกทางเครื่องปริ้นส์ได้
3. ปัจจุบันเครือข่ายคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทมากขึ้นทุกที เนื่องจากเป็นการใช้เทคโนโลยีอย่างคุ้มค่า จึงควรมีการปรับปรุงโปรแกรมให้สามารถใช้งานบนเครือข่ายได้



ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบฝึกหัดบทที่ 2

- จงหาค่าคาบต่ำที่สุดของฟังก์ชัน $\cos(\pi t)$
 - 0 ข. 1
 - 2 ง. 3
- จงหาค่าคาบต่ำที่สุดของฟังก์ชัน $\sin(2\pi t)$
 - 0 ข. 1
 - 2 ง. 3
- จงหาค่าอนุกรมของฟังก์ชันคาบ $f(t)$ ของฟังก์ชัน $f(t) = 1(0 < t < 1), f(t) = 0(1 < t < 2)$
 - $a_0 = 1; a_n = 0; b_n = [1 + (-1)^{n+1}] / (n\pi); n \geq 1; p = 1$
 - $a_0 = 1; a_n = 0; b_n = [1 - (-1)^{n+1}] / (n\pi); n \geq 1; p = 1$
 - $a_0 = 0; a_n = 0; b_n = -1 / (n\pi); n \geq 1; p = 1/2$
 - $a_0 = 0; a_n = 0; b_n = [1 + (-1)^{n+1}] / n\pi; n \geq 1; p = 1$
- ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันคู่
 - $f(x) = \begin{cases} 2 & , 0 < x < 3 \\ -2 & , -3 < x < 0 \end{cases}, p = 6$
 - $f(x) = \begin{cases} \cos x & , 0 < x < \pi \\ 0 & , \pi < x < 2\pi \end{cases}, p = 2\pi$
 - $f(x) = x(10 - x), 0 < x < 10, p = 10$
 - $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi, p = 2\pi$
- จงหาค่าอนุกรมฟูรีเยร์ $\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos Mt$ ลู่เข้าหาค่าใด
 - $\frac{\sin(M + \frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{1}{2})t}$
 - $\frac{\cos(M + \frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{1}{2})t}$
 - $\frac{\sin(M + 1)t}{2 \sin(\frac{1}{2})t}$
 - $\frac{c \cos(M + 1)t}{2 \sin(\frac{1}{2})t}$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงหาผลเฉลยของ $\int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \begin{cases} 1-\alpha & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \alpha > 1 \end{cases}$

ก. $\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$

ข. $\frac{(1-\cos x)}{\pi x^2}$

ค. $\frac{2(\cos x)}{\frac{\pi x^2}{2}}$

ง. $\frac{2(1-\cos x)}{\frac{\pi x^2}{22}}$

2. จงหาผลเฉลยของ $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

ก. 2π

ข. π

ค. $\frac{\pi}{2}$

ง. $\frac{\pi}{4}$

3. จงหาค่าของ $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + 1} d\alpha$

ก. πe^{-x}

ข. πe^x

ค. $\frac{\pi}{2} e^{-x}$

ง. $\frac{\pi}{2} e^x$

4. จงหาค่า $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha} \int_0^{\alpha} \frac{\sin \alpha v}{v} dv$

ก. π

ข. $\frac{\pi}{2}$

ค. $\frac{\pi}{4}$

ง. $\frac{\pi}{6}$

5. จงหาค่า $\int_0^{\infty} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

ก. $\frac{\pi}{6}$

ข. $\frac{3\pi}{8}$

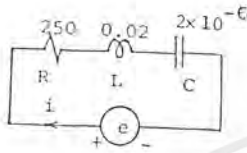
ค. $\frac{3\pi}{16}$

ง. $\frac{\pi}{16}$

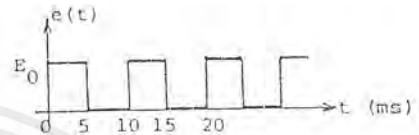
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงหากระแสในสถานะอยู่ตัวที่ไหลในวงจรไฟฟ้าตามรูป 1a เมื่อกำหนดให้แรงดัน $e(t)$ ของแรงจ่ายมีรูปคลื่นดังแสดงไว้ในรูป 1b



รูป 1a



รูป 1b

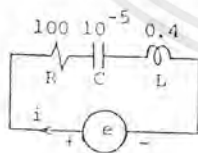
ก. $i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{200jn\pi}$, n เป็นจำนวนคู่

ข. $i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{100jn\pi}$, n เป็นจำนวนคี่

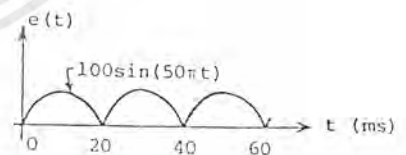
ค. $i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{200jn\pi}$, n เป็นจำนวนคี่

ง. $i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{100jn\pi}$, n เป็นจำนวนคู่

2. จงหาแรงดันของกระแสในสถานะอยู่ตัวที่ไหลในวงจรตามรูป 2a กำหนดแรงดัน $e(t)$ มีรูปคลื่นดังที่แสดงไว้ในรูป 2b



รูป 2a



รูป 2b

ก. $i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{200e^{100jn\pi}}{\pi(1-4n^2)} \right] / (100 + j[40(n\pi)^2 - 1000] / (n\pi))$

ข. $i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{100e^{200jn\pi}}{\pi(1-4n^2)} \right] / (100 + j[40(n\pi)^2 - 1000] / (n\pi))$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{ค. } i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{200e^{100jn\pi}}{\pi(1-4n)} \right] / (100 + j[40(n\pi)^2 - 1000]/(n\pi))$$

$$\text{ง. } i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{100e^{200jn\pi}}{\pi(1-4n)} \right] / (100 + j[40(n\pi)^2 - 1000]/(n\pi))$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

- เปี่ยมศิริ สุวรรณภู. **คณิตศาสตร์ขั้นสูงสำหรับวิศวกร**. พิมพ์ครั้งที่ 8. สำนักพิมพ์เอกซ์เพรสมีเดีย , 2533.
- ผศ.พัชรินทร์ เหมโชติ. **อนุกรมฟูรีเยร์**. ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- มงคล เอกนครินทร์. **คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า**. พิมพ์ครั้งที่ 2. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2538.
- วิเชียร เลานโกศล และ วัลลภ สระกำพลชร. **ทฤษฎีเบื้องต้นการแปลงฟูรีเยร์และการแปลงทฤษฎีเชิงจำนวน**. กรุงเทพฯ : คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง , 2527.
- Erwin , Kreyszig. **Advance Engineering Mathematics**. 7 nd ed. John wiley & Sons. , 1993.
- Noman , Morrison. **Introduction to Fourier Analysis**. John wiley & Sons., 1994.
- W.Kaplan. **Advance Calculus**. 4 nd ed. Addison – Wesley Publishin Company , 1993.