โปรแกรมช่วยสอนสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน และการประยุกต์

CAI FOR FUNCTION OF COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS

ฤชุวี จิตรจรูญ
ฤทธิ์ฤดี จิระโพธิรัตน์
ศิริวรรณ เศรษฐโกมุท

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2542

CAI FOR FUNCTION OF COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS

RUCHUVEE JITJAROON
RITHRUDEE JIRAPOTIRAT
SIRIWAN SETHAKOMUT

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 1999

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์ CAI FOR FUNCTION OF COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวฤชุวี จิตรจรูญ	39054136
	นางสาวฤทธิ์ฤดี จิระโพธิรัตน์	39054137
	นางสาวศิริวรรณ เศรษฐโกมุท	39054145
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล	
	ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ	

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2542

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์กฤษฎา ไตรสุรัตน์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ	

(อาจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์
ชื่อนักศึกษา	นางสาวฤชุวี จิตรจรูญ 39054136
	นางสาวฤทธิ์ฤดี จิระโพธิรัตน์ 39054137
	นางสาวศิริวรรณ เศรษฐโกมุท 39054145
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2542
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล
	ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีความสำคัญอย่างมากในทุกด้าน โดยเฉพาะด้านการศึกษา นักศึกษาจำนวนมากให้ความสนใจที่จะเรียนรู้ ซึ่งแตกต่างจากวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ซึ่งคนส่วนใหญ่ไม่ค่อยให้ความสนใจเท่าที่ควร

วัตถุประสงค์หลักของโปรแกรมช่วยสอนสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์ คือ เพื่อดึงดูดให้การศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์น่าสนใจยิ่งขึ้น

โปรแกรมช่วยสอนสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์ สร้างขึ้นจาก macromedia Authorware version 4.0 โครงสร้างของโปรแกรมนี้สามารถแบ่งได้เป็น 3 ส่วน

ส่วนที่ 1 : เนื้อหาของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์

ส่วนที่ 2 : แบบทดสอบ (เพื่อใช้วัดระดับความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน)

ส่วนที่ 3 : คำถามและคำตอบ (จากแบบทดสอบในส่วนที่ 2)

Special Project Title	CAI for Function of Complex Variables and Applications
Students	Miss.Ruchuvee Jitjaroon 39054136
	Miss.Rithrudee Jirapotirat 39054137
	Miss.Siriwan Sethakomut 39054145
Degree	Bachelor's Degree of Science
Department	Mathematics and Computer Sciences , Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	1999
Special Project Advisor	Associate Professor Pakkinee Chitsakul
	Assistant Professor Sunthorn Suchatvejapoom

ABSTRACT

Nowaday, computer is important for every field. Especially study, student is so interested which different from mathematics.

The main purpose of these programme is attractive to studied Function of Complex Variables and Applications, a topic of mathematics.

"CAI for Function of Complex Variables and Applications" adapt by macromedia Authorware version 4.0. The structure of the programme could be devided into 3 parts

part 1 : Contents of topic in Function of Complex Variables and Applications.

part 2 : Test for evaluate users' understanding.

part 3 : Questions and answers from test in part 2.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีก็เพราะเหตุหลายปัจจัย คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณ

รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ที่คอยให้คำปรึกษาและแนวทางในการดำเนินงาน อีกทั้งยังช่วยแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นระหว่างการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้วิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ ท่านอาจารย์ที่ปรึกษา ที่คอยว่ากล่าวตักเตือนและให้คำแนะนำในทุก ๆ เรื่อง

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่คอยให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ในการจัดทำปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อคุณแม่ที่คอยเอาใจใส่ ห่วงใย และเป็นกำลังใจให้เสมอมา

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ที่น่ารักทุก ๆ คน โดยเฉพาะเพื่อนแหม่ม เพื่อนเอ็ม เพื่อนนะ เพื่อนก้อง เพื่อนยัง เพื่อนชิ เพื่อนนิ้งและเพื่อนแม็ค ที่คอยเป็นกำลังใจ ให้ความช่วยเหลือและให้ความบันเทิงตลอดมา จนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดีทุกประการ

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2543

สารบัญ

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

เนื่องจากในปัจจุบัน คอมพิวเตอร์กำลังได้รับความสนใจและมีความสำคัญอย่างมากในสังคม ทำให้นักเรียน/นักศึกษา ส่วนใหญ่ให้ความสนใจในวิชาทางด้านคอมพิวเตอร์เป็นอย่างมาก แต่กลับไม่ค่อยให้ความสนใจในวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ เพราะค่อนข้างยากต่อการทำความเข้าใจ ทางคณะผู้จัดทำจึงมีความเห็นว่า ควรจะจัดทำสื่อการสอนในวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ที่สามารถจะช่วยให้การเรียนรู้ในวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ เป็นไปได้อย่างง่าย รวดเร็ว และถูกต้อง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับสื่อทางด้านอื่น ๆ โดยเฉพาะทางด้านคอมพิวเตอร์ ซึ่งนักเรียน/นักศึกษา ให้ความสนใจอยู่แล้ว ดังนั้นทางคณะผู้จัดทำจึงมีความต้องการที่จะนำเสนอและจัดทำโปรแกรมช่วยสอน(CAI) ในเรื่องฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์ ขึ้น เพื่อดึงดูดให้นักเรียน/นักศึกษา หันมาให้ความสนใจในวิชาทางด้านคณิตศาสตร์มากขึ้น และเพื่อช่วยให้นักเรียน/นักศึกษา มีความเข้าใจในเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน มากขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อช่วยให้นักเรียน/นักศึกษา มีความรู้ความเข้าใจในเรื่องของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน มากยิ่งขึ้น
2. เพื่อช่วยให้การเรียนรู้ของนักเรียน/นักศึกษา ในเรื่องฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน เป็นไปได้อย่างง่าย รวดเร็ว และถูกต้อง
3. เพื่อเป็นสื่อการสอนที่สามารถนำไปใช้ได้อย่างกว้างขวาง ทั้งในหมู่อาจารย์ นักเรียน/นักศึกษา ตลอดจนผู้ที่สนใจและต้องการจะศึกษา
4. เพื่อดึงดูดให้มีผู้สนใจในวิชาทางด้านคณิตศาสตร์มากขึ้น

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

สื่อการสอนนี้ จะอธิบายเกี่ยวกับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์ ทั้งหมด ตลอดจนจะมีการยกตัวอย่างให้เห็นอย่างชัดเจน เพื่อที่ผู้ใช้จะได้ทำความเข้าใจได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้ยังจะมีการจัดทำแบบทดสอบไว้ในตอนท้ายของเนื้อหาแต่ละเรื่อง และแบบทดสอบรวม เพื่อเป็นการทดสอบว่าผู้ใช้ได้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาที่ได้ศึกษาผ่านมามากน้อยเพียงใด

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. นักเรียน/นักศึกษา มีความรู้ความเข้าใจในเรื่องฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน มากขึ้น
2. การเรียนรู้ของนักเรียน/นักศึกษา ในเรื่องฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนเป็นไปได้อย่างง่าย ถูกต้อง และรวดเร็วขึ้น
3. มีผู้ให้ความสนใจในวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ เพิ่มมากขึ้น
4. ได้สื่อการสอนในวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ที่มีความทันสมัย
5. สามารถพัฒนาระบบการสอนวิชาทางด้านคณิตศาสตร์ ให้ทันสมัยมากขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ทำการศึกษาเนื้อหาและรวบรวมข้อมูล เกี่ยวกับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน และการประยุกต์ ทั้งหมด
2. ทำการศึกษาโปรแกรมช่วยสอน(CAI) ต่าง ๆ ที่มีอยู่ในปัจจุบัน
3. ทำการเขียนโปรแกรม
4. ทำการตรวจสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้น ให้มีความถูกต้อง และสามารถใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ
5. จัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษ

1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1. Pentium II 200 MHz
2. RAM 64 MB
3. HDD 3.0 GB
4. Window 95 or NT
5. CAI Software Program

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 จำนวนเชิงซ้อน(Complex Number)

2.1.1 นิยามและความหมาย

พิจารณาจากสมการ

$$x^2 + 1 = 0 \tag{2.1}$$

ในระบบจำนวนจริง กำลังสองของจำนวนจริงใดๆ ต้องเป็นบวกเสมอ ดังนั้นจะไม่มีจำนวนจริงใดๆ ที่สอดคล้องกับสมการ (2.1) นักคณิตศาสตร์จึงสร้างระบบจำนวนใหม่ เพื่อให้รวมผลเฉลยของสมการ (2.1) ไว้ด้วย เรียกว่า **จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)**

นิยาม 2.1

จำนวนเชิงซ้อน z คือจำนวนซึ่งเขียนอยู่ในรูปคู่อันดับจำนวนจริง (x,y) ดังนั้น

$$z = (x,y) \quad \text{เมื่อ } x \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนจริง} \tag{2.2}$$

เรียก x ในสมการ (2.2) ว่า **ส่วนจริง (Real Part) ของ** z และเรียก y ว่า **ส่วนจินตภาพ (Imaginary Part) ของ** z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x = \mathrm{Re}(z)$ และ $y = \mathrm{Im}(z)$ ตามลำดับ

นิยาม 2.2 (การบวกจำนวนเชิงซ้อน)

การบวกของจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$ นิยามโดย

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

นิยาม 2.3 (การลบจำนวนเชิงซ้อน)

การลบของจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$ นิยามโดย

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

นิยาม 2.4 (การคูณเชิงสเกลาร์)

การคูณเชิงสเกลาร์ของจำนวนจริง a และจำนวนเชิงซ้อน $z = (x,y)$ นิยามโดย

$$az = a(x,y) = (ax,ay)$$

นิยาม 2.5 (การคูณจำนวนเชิงซ้อน)

การคูณของจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$ นิยามโดย

$$z_1z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2)$$

นิยาม 2.6 (การหารจำนวนเชิงซ้อน)

การหารของจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$ เมื่อ $z_2 \neq 0$ นิยามโดย

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

นิยาม 2.7

ให้จำนวนจินตภาพ $(0,1) = i$ เรียก i ว่า **หน่วยจินตภาพ** จากนิยามการคูณจำนวนเชิงซ้อนจะได้

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

ค่าของ i ยกกำลัง 1 ขึ้นไปจะมีค่าเป็น 4 ค่า คือ i , -1 , -i , 1 , ... ซ้ำกันไปเรื่อย ๆ

สมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $A = (a,b)$,$B = (c,d)$ และ $C = (e,f)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. กฎการสลับที่

$A + B = B + A$ และ

$AB = BA$

2. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

$$(A+B) + C = A + (B+C)$$

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

3. กฎการกระจาย

$$A\,(B+C) = AB + AC$$

4. เอกลักษณ์การบวก

$A + 0 = A$ สำหรับทุกๆ $A \in C$ เมื่อ C คือ เซตของฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน

5. เอกลักษณ์การคูณ

$I = (1,0)$ คือ เอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน

6. ตัวผกผันการบวก

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน $A = (a,b)$ คือ

$$-(A) = (-a\,,-b)$$

7. ตัวผกผันการคูณ

ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน $A = (a,b)$ ใดๆ และ $(a,b) \neq (0,0)$ คือ

A^{-1} ซึ่ง $AA^{-1} = 1$

2.1.2 **ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value)**

<u>*นิยาม 2.8*</u>

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ เขียนแทนด้วย $|z|$ นิยามโดย

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> จงหาค่า $|4+3i|$ และ $|-2i|$

<u>วิธีทำ</u>

$$|4+3i| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

และ

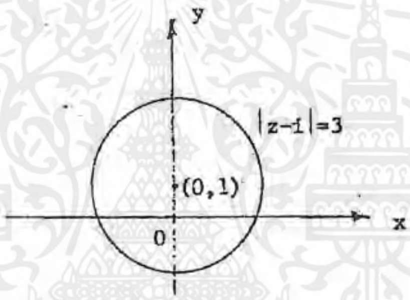
$$|-2i| = \sqrt{0+4} = 2$$

จำนวน $|z|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด (x,y) และ จุดกำเนิด และถ้า $y = 0$ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนก็คือค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงนั่นเอง

ข้อสังเกต # เมื่อกล่าวว่า $z_1 < z_2$ หมายความว่าจุดที่สมนัยกับ z_1 ใกล้กว่าจุดที่สมนัยกับ z_2 ระยะทางระหว่างจุดที่แทนจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 คือ $|z_2 - z_1|$

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1| &= |(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1)| \\ &= |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

จำนวนเชิงซ้อนที่สมนัยกับจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,1) และมีรัศมี 3 จะสอดคล้องกับสมการ $|z - i| = 3$ ดังรูป



รูปที่ 2.1 วงกลมที่สอดคล้องสมการ $|z - i| = 3$

สมการ $|z - i| = 3$ คือ

$x^2 + (y-1)^2 = 9$

จำนวนจริง $|z|$, $\mathrm{Re}|z|$, $\mathrm{Im}|z|$ มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$|z|^2 = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$$

$$|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$$

$$|z| \geq |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$$

<u>ตัวอย่าง 2.2</u> จงแสดงว่า สมการ $|z+i| = 2$ แทนวงกลม จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลม

<u>วิธีทำ</u> ให้ $z = x + iy$

จาก
$$|z+i| = 2$$
$$|x+(y+1)i| = 2$$
$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = 2$$
$$x^2 + (y+1)^2 = 4$$

ดังนั้นสมการ $|z+i| = 2$ แทนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,-1) และมีรัศมี 2

สมบัติต่างๆ ของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนมีดังนี้

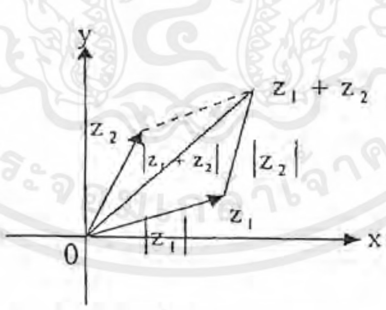
(1) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_2| \neq 0$

อสมการเชิงสามเหลี่ยม (Triangle Inequality)

(3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

ซึ่งเขียนทางเรขาคณิตได้ดังรูป



รูปที่ 2.2 อสมการเชิงสามเหลี่ยม

กล่าวเป็นข้อความได้ว่า ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมด้านหนึ่งย่อมน้อยกว่าหรือเท่ากับผลบวกของความยาวของด้านอีกสองด้าน

2.1.3 จำนวนเชิงซ้อนสังยุค (Conjugate Complex Number)

นิยาม 2.9

จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนที่แตกต่างกัน เฉพาะเครื่องหมายของส่วนจินตภาพ เรียกจำนวนเชิงซ้อนจำนวนนั้นว่าเป็น **สังยุคของอีกจำนวนหนึ่ง** นั่นคือ ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ สังยุคของ z คือ $\bar{z} = x - iy$

จำนวนเชิงซ้อน $\bar{z}$ เขียนแทนด้วย (x,-y) เป็นจุดสะท้อนบนแกนจริงของจุด (x,y) ซึ่งแทนด้วย z และถ้า $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$ แล้ว

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad , \quad \overline{z_2} \neq 0$$

และ

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

ตัวอย่าง 2.3 (1) ผลบวก $z + \bar{z} = (x+yi) + (x-yi) = 2x$

(2) ผลต่าง $z - \bar{z} = (x+yi) - (x-yi) = 2yi$

(3) ผลคูณ $z\bar{z} = (x+yi)\ (x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$

ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2}$ สามารถแสดงการหารของจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน ได้จำนวนเชิงซ้อนใหม่จำนวนที่ 3 ดังนี้

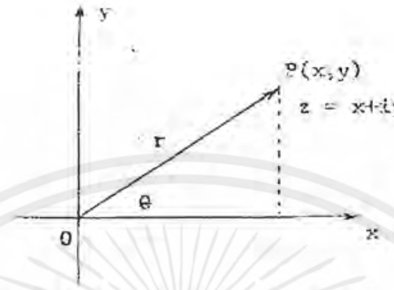
$$\frac{-1+3i}{2-i} = \frac{-1+3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i}$$

$$= \frac{-5+5i}{5}$$

$$= -1 + i$$

2.1.4 **พิกัดเชิงขั้ว** (Polar Coordinate)

จุด P แสดงจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy \neq 0$ ให้ r แทนความยาวหรือขนาดของเวกเตอร์ ซึ่งเชื่อมจุด 0 ไปยังจุด P ให้ θ เป็นมุมระหว่างแกน x ไปทางบวก และ $\xrightarrow[OP]{}$ ได้ r และ θ เป็นพิกัดเชิงขั้วของจุด (x,y) ที่สมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน x + iy ที่ไม่เป็นศูนย์ จากรูป



รูปที่ 2.3 พิกัดเชิงขั้วที่สมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน

พิกัดเชิงขั้ว (r, θ) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ หาได้จากความสัมพันธ์ระหว่าง x,y และ r, θ โดย

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

(2) จำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ คือ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

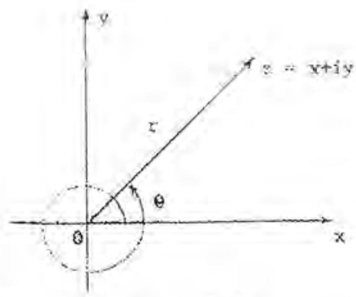
เรียกรูปใหม่นี้ว่า **รูปแบบตรีโกณมิติ** (Trigonometric Form) หรือ **รูปแบบเชิงขั้ว** (Polar Form) **ของจำนวนเชิงซ้อน** และ เรียก r ว่า **ค่าสัมบูรณ์** (Absolute Value) หรือ **โมดูลัส** (Modulus) **ของจำนวนเชิงซ้อน** และเรียก θ ว่า **อาร์กิวเมนต์** (Argument) หรือ **แอมพลิจูด** (Amplitude) **ของจำนวนเชิงซ้อน** เขียนแทนด้วย arg z

<u>ตัวอย่าง 2.4</u>

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

----

arg z เป็นมุมใดๆ ที่ z ทำมุมกับแกน x ไปทางบวก z แสดงโดยเวกเตอร์จากจุดกำเนิด ดังรูป



รูปที่ 2.4 อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้นจะมี arg z ได้จำนวนอนันต์แตกต่างกัน โดยเพิ่มทีละ 2π ดังนี้ θ , $\theta+2\pi$, $\theta+4\pi$, . . . ซึ่งค่าเหล่านี้หาได้จาก $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ ดังนั้นจะได้ $\arg z = \theta + 2k\pi$ โดย $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

<u>นิยาม 2.10</u> *(ค่ามุขสำคัญของอาร์กิวเมนต์) (Principal Value of Argument)*

ค่ามุขสำคัญของอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆยกเว้น ศูนย์ คือ อาร์กิวเมนต์ θ ซึ่ง $-\pi < \theta \le \pi$ เขียนแทนด้วย Arg z โดย

ค่ามุขสำคัญของอาร์กิวเมนต์ $\theta = \operatorname{Arg} z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ และจะอยู่ในช่วง $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

\# <u>*หมายเหตุ*</u> \# *โดยปกติ* $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ *โดย* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

<u>ตัวอย่าง 2.5</u>

$$z = 1+i$$
$$r = \sqrt{1^2+1^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$
$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$$
$$\arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

การคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว

ให้

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

และ

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

ผลคูณคือ

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$$

เมื่อ

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 \text{ และ } \arg (z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

ตัวอย่าง 2.6 จงหาผลคูณของ $2(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)$ และ $3(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)$ ให้ผลลัพธ์อยู่ในรูปพิกัดฉาก

วิธีทำ

$$2 (\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ) * 3 (\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)$$

$$= 6 [\cos (48^\circ + 72^\circ) + i \sin (48^\circ + 72^\circ)]$$

$$= 6 [(\frac{-1}{2}) + i (\frac{\sqrt{3}}{2})]$$

$$= -3 + 3\sqrt{3}\, i$$

การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos\theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos\theta_2 + i \sin \theta_2)}$$

จะได้

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

ตัวอย่าง 2.7 จงหาผลลัพธ์ของจำนวนเชิงซ้อน $\frac{4(\cos 153^\circ + i \sin 153^\circ)}{2(\cos 288^\circ + i \sin 288^\circ)}$

วิธีทำ $\frac{4(\cos 153^\circ + i \sin 153^\circ)}{2(\cos 288^\circ + i \sin 288^\circ)} = \frac{4}{2} [\cos (153^\circ - 288^\circ) + i \sin (153^\circ - 288^\circ)]$

$$= 2 [\cos (-135^{\circ}) + i \sin (-135^{\circ})]$$

$$= 2 [(\frac{-1}{\sqrt{2}}) - i (\frac{1}{\sqrt{2}})]$$

$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$$

2.1.5 กำลังและรากของจำนวนเชิงซ้อน (Power and Root of Complex Number)

ทฤษฎีบท 2.1 *(ทฤษฎีบทเดอมัว) (De Moivre's Theorem)*

$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ หรือเศษส่วน

และ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ เมื่อ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ หรือเศษส่วน

ตัวอย่าง 2.8 จงหาค่าของ $[2 (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})]^7$ โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัว และให้ผลลัพธ์ในรูปแบบเชิงขั้ว

วิธีทำ

$$[2 (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})]^7 = 2^7 (\cos 7\cdot\frac{5\pi}{3} + i \sin 7\cdot\frac{5\pi}{3})$$

$$= 128 [\cos (12\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin (12\pi - \frac{\pi}{3})]$$

$$= 128 (\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$$

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน x + iy

ขั้นแรกเปลี่ยนให้เป็นรูปเชิงขั้ว

$$x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)]$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(x + iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{(\theta + 2k\pi)}{n} + i \sin \frac{(\theta + 2k\pi)}{n} \right]$$

ค่าของ $(x + iy)^{\frac{1}{n}}$ หาได้จากการแทนค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ ดังนี้

$$k = 0 \ , z_1 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$$

$$k = 1 \;, z_2 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{n} \right)$$

$$k = 2 \;, z_3 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\theta + 4\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 4\pi}{n} \right)$$

<u>ตัวอย่าง 2.9</u> จงหารากที่ 4 ของ $2 + 2\sqrt{3}\, i$ และ แสดงโดยกราฟ

<u>วิธีทำ</u>

$$r = \left|2 + 2\sqrt{3}i\right|$$

$$= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}$$

$$= 4$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

รูปแบบเชิงขั้ว $2 + 2\sqrt{3}i$ คือ $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sqrt[4]{2 + 2\sqrt{3}\,i} = 4^{\frac{1}{4}} \left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right]$$

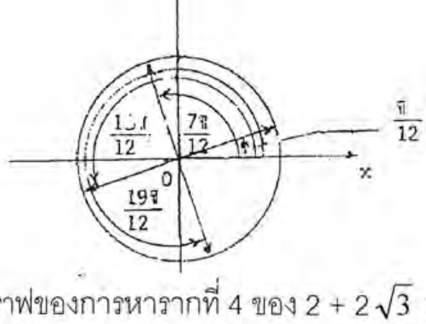
เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ จะได้ค่ารากทั้ง 4 คือ z_1, z_2, z_3, z_4

$$k = 0 \;, z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$k = 1 \;, z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$k = 2 \;, z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$k = 3 \;, z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$



รูปที่ 2.5 กราฟของการหารากที่ 4 ของ $2 + 2\sqrt{3}\, i$

2.1.6เส้นโค้งและบริเวณในระนาบเชิงซ้อน(Curve and Region in Complex Plane)

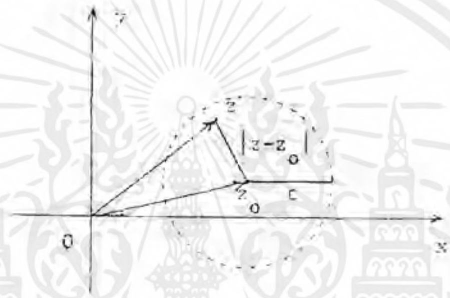
ในหัวข้อนี้กล่าวถึง เซตของจำนวนเชิงซ้อน หรือ เซตของจุดในระนาบเชิงซ้อน

<u>ย่านจุด z_0</u> (Neighborhood of The point z_0)

ย่านจุด z_0 คือ เซตของจุด z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า ย่านจุด z_0 คือ เซตของจุด z ที่อยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ z_0 และมีรัศมี ε แต่ไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง ใช้สัญลักษณ์ $N(z_0, \varepsilon)$ แทนย่านจุด z_0



รูปที่ 2.6 แสดงย่านจุด z_0

กำหนดให้ $z_0 = 0$

ย่านจุด $z_0 = 0$ คือเซตของจุดที่สอดคล้องกับอสมการ $|z - z_0| = |z| < \varepsilon$

<u>จุดภายใน</u> (Interior Point)

จุด z_0 จะเรียกว่าเป็น **จุดภายในของเซต S** ถ้ามีบางย่านจุด z_0 ซึ่งสมาชิกทุกตัวอยู่ในเซต S

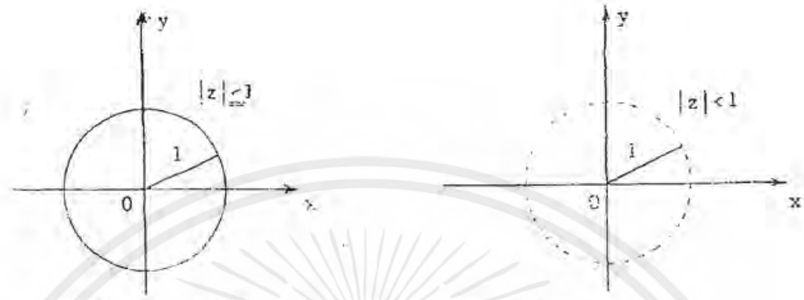
<u>จุดภายนอก</u> (Exterior Point)

จุด z_0 จะเรียกว่าเป็น **จุดภายนอกของเซต S** ถ้ามีบางย่านจุด z_0 มีสมาชิกทุกตัวไม่อยู่ในเซต S

<u>จุดขอบ</u> (Boundary Point)

จุด z_0 จะเรียกว่าเป็น **จุดขอบของเซต S** ถ้าทุกๆย่านจุด z_0 ประกอบด้วยจุดอย่างน้อย 1 จุด ที่ไม่อยู่ในเซต S จุดขอบทั้งหมดเรียก **ขอบของเซต S** ตัวอย่างเช่น วงกลม $|z| = 1$ เป็นขอบของแต่ละเซตในสมการ

$$|z| < 1 \quad \text{และ} \quad |z| \le 1$$



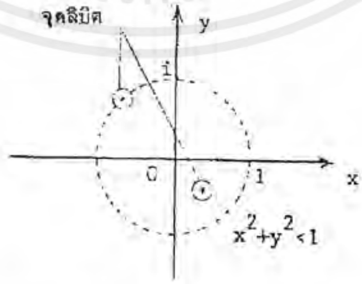
รูปที่ 2.7 รูปซึ่งมีจุดขอบ $|z| < 1$ และ $|z| \le 1$

<u>เซตเปิด</u> (Open Set)

เซต S เรียกว่า **เซตเปิด** ถ้าจุด z ทุกๆจุดในเซต S มีย่านจุด z ซึ่งย่านจุด z อยู่ในเซต S หรือกล่าวว่า เซตเปิด คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกเป็นจุดขอบของเซตนั้น ตัวอย่างเช่น เซตของจุด z ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z| < 1$ เป็นเซตเปิด

<u>จุดลิมิต</u> (Limit Point)

จุด z_0 เรียกว่า **จุดลิมิตของเซต S** ถ้าทุกย่านจุด z_0 ประกอบไปด้วยจุดในเซต S อย่างน้อย 1 จุด ที่ไม่ใช่ z_0



รูปที่ 2.8 จุดลิมิตของเซต

<u>เซตปิด</u> (Closed Set)

เซต S เรียกว่า **เซตปิด** ถ้าจุดลิมิตทุกจุดอยู่ในเซต S หรือ กล่าวได้ว่า เซต S เรียกว่า เซตปิด ถ้าจุดขอบทุกจุดและจุดภายในทุกจุดของเซต S อยู่ในเซต S
เช่น $|z| \leq 1$ เป็นเซตปิด

เซตบางเซตไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด สังเกตว่า เซต $0 < |z| \leq 1$ *ไม่เป็นเซตเปิด และไม่เป็นเซตปิด*

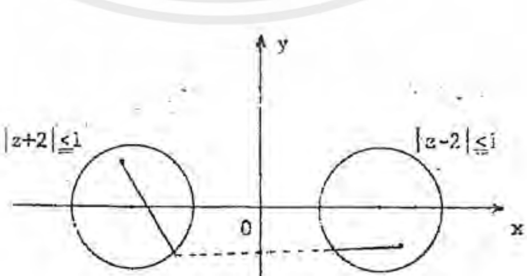
<u>เซตเชื่อมโยง</u> (Connected Set)

เซตเปิด S จะเรียกว่า **เซตเชื่อมโยง** ถ้าจุด 2 จุดใดๆ ในเซต S สามารถลากเส้นให้ต่อกันได้โดยใช้เส้นโพลิโกนัล และอยู่ในเซต S เช่น เซตของจุด z ซึ่งสอดคล้องกับ $|z| < 1$ เป็นเซตเชื่อมโยง

รูปที่ 2.9 รูปซึ่งเป็นเซตเชื่อมโยง

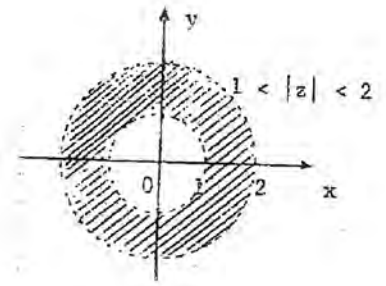
แต่เซตของจุด z ซึ่งมีสมบัติว่า

$$|z-2| \leq 1 \quad \text{หรือ} \quad |z+2| \leq 1$$ ไม่เป็นเซตเชื่อมโยง



รูปที่ 2.10 รูปซึ่งไม่เป็นเซตเชื่อมโยง

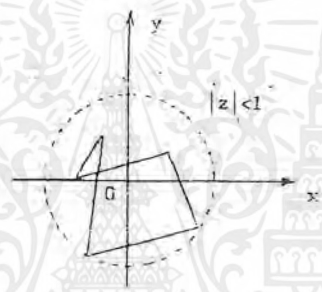
เซตซึ่งสอดคล้อง $1 < |z| < 2$ เป็นเซตเปิด และ เป็นเซตเชื่อมโยง



รูปที่ 2.11 รูปซึ่งเป็นเซตเปิด และเซตเชื่อมโยง

<u>โดเมน</u> (Domain)

เซตเปิดที่เป็นเซตเชื่อมโยง เรียกว่า **โดเมน**



รูปที่ 2.12 รูปโดเมน

<u>*ข้อสังเกต*</u> # *ย่านจุด z ใดๆ เป็นโดเมน*

<u>บริเวณ</u> (Region)

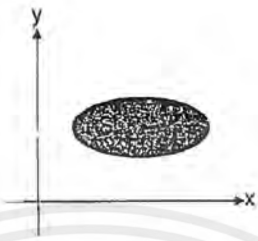
โดเมนรวมกับบางจุด หรือไม่มี หรือทั้งหมด ของจุดขอบ เรียกว่า **บริเวณ** หรืออาจกล่าวได้ว่า บริเวณ คือ ส่วนในระนาบที่ประกอบด้วยเซตเปิดที่ไม่ขาดตอน และจุดขอบบางจุด หรือทั้งหมด หรือ ไม่รวมจุดบนขอบเขต

<u>เซตมีขอบเขต</u> (Bounded Set)

เซต S เป็น **เซตมีขอบเขต** ถ้าทุกๆจุดของเซต S อยู่ในวงกลมบางวง $|z| = R$ เช่นเซตของจุด z ซึ่ง $|z| \leq 1$ เป็นเซตมีขอบเขต หรือกล่าวได้ว่า เซต S จะเป็นเซตมีขอบเขต ถ้าสามารถหาค่าคงที่ M ซึ่ง $|z| < M$ ได้

<u>บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว</u> (Simply connected region)

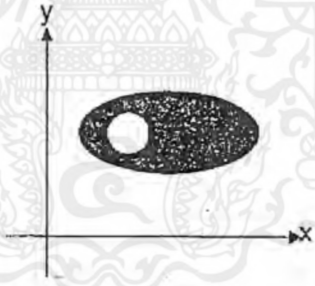
เซต S เป็น **บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว** ถ้า S เป็นเซตไม่ขาดตอน และถ้าทุก ๆ เส้นโค้งปิดที่ไม่ตัดกันซึ่งสามารถลากภายใน S จุดต่าง ๆ ทุกจุดภายในเส้นโค้งนั้น จะต้องอยู่ภายใน S กล่าวคือ บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว ก็คือ บริเวณที่มีชิ้นเดียว และไม่มีรู (hole) นั่นเอง



รูปที่ 2.13 บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว

<u>บริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง</u> (Multiply connected region)

เซต S เป็น **บริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง** ถ้า S เป็นเซตไม่ขาดตอน และถ้ามีเส้นโค้งปิดที่ไม่ตัดกันอย่างน้อย 1 เส้น ภายใน S ซึ่งมีจุดภายในเส้นโค้งนั้นอยู่ภายนอก S



รูปที่ 2.14 บริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง

2.2 ฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function)

2.2.1 ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน (Complex Function)

นิยาม 2.11

ให้ S เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชัน S ซึ่งนิยามบน S เป็น กฎที่ทำให้ได้ w สำหรับแต่ละค่าของ z ที่อยู่ใน S เรียกจำนวน w นี้ว่าค่าของ f ที่ z และเขียนแทนด้วย f (z) คือ w = f (z)

เรียกเซต S ว่า โดเมนของบทนิยามของ f ถ้าค่าของ f (z) เป็นจำนวนเชิงซ้อน ให้ w = u+iv เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ z = x+iy นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
w &= u+iv \\
&= f(x+iy)
\end{aligned}
$$

จำนวนจริง u และ v ขึ้นกับค่าตัวแปร x และ y ที่เป็นจำนวนจริง

การส่ง (Mapping)

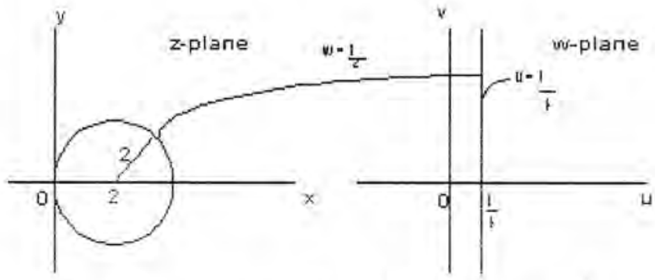
การเขียนกราฟของฟังก์ชัน w = f(z) เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ต้องใช้ระนาบ z และ w เพื่อแสดงจุดที่แทน z = (x,y) และ w = (u,v) ตามลำดับ f คือ กฎที่ทำให้แต่ละค่าของ z ในโดเมนของบทนิยาม S คือ จุด w = f(z) เรียกเซตของภาพของจุดทั้งหมดในเซต T ซึ่งอยู่ใน S ว่า **ภาพ** (image) **ของ** T และเรียกภาพของโดเมนทั้งหมดของบทนิยาม S ว่า **เรนจ์** (range) **ของ** f ภาพผกผันของ w คือ เซตของจุด z ทั้งหมดในโดเมนของบทนิยามของ f ซึ่งมี w เป็นภาพ ภาพผกผันของจุดอาจมีจุดเดียว หรือหลายจุด หรือไม่มีเลยก็ได้

การส่ง w = z+1 คือ การเลื่อนขนาน (translation) ของจุด z

ตัวอย่าง 2.10 ภายใต้การส่งโดยฟังก์ชัน $w = \frac{1}{z}$ จงหาเงาของวงกลม $|z-2| = 2$

วิธีทำ $\therefore \quad w = \frac{1}{z} \qquad \therefore \quad z = \frac{1}{w}$

$$
\begin{aligned}
z-2 &= \frac{1}{w}-2 = \frac{1-2w}{w} = \frac{1-2u-2vi}{w} \\
|z-2| &= \left|\frac{(1-2u)-2vi}{u+iv}\right| = 2 \\
\therefore \quad |(1-2u)-2vi| &= 2|u+iv| \\
\sqrt{(1-2u)^2+(-2v)^2} &= 2\sqrt{u^2+v^2} \\
1-4u-4u^2+4u^2 &= 4(u^2+v^2) \\
u &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$



รูปที่ 2.15 การส่งจาก $|z-2| = 2$ ไปยัง $u = \frac{1}{4}$

2.2.2 ลิมิต ทฤษฎีบทของลิมิตและความต่อเนื่อง (Limit Limit's Theorem and Continuity)

นิยาม 2.12

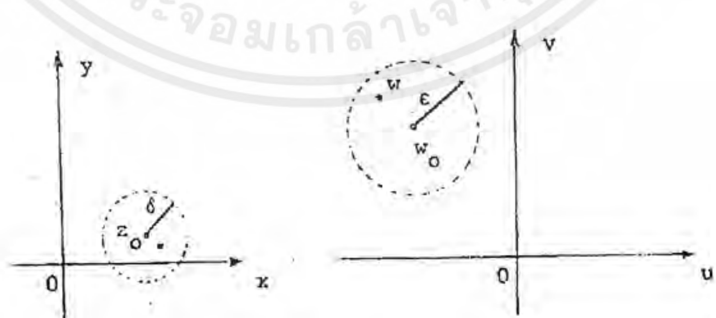
ให้ฟังก์ชัน f นิยามที่ทุกจุดในบางย่านจุด z_0 ยกเว้นที่จุด z_0 จะกล่าวว่า มีลิมิตของฟังก์ชัน f ขณะที่ z เข้าใกล้ z_0 คือจำนวน w_0 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad \text{หรือ} \quad f(z) \to w_0 \quad \text{เมื่อ} \quad z \to z_0$$

ซึ่งหมายความว่า สำหรับแต่ละจำนวน $\varepsilon > 0$ ใดๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{เมื่อใดก็ตามที่} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

หรือกล่าวได้ว่า ถ้า $z(\neq z_0) \in N(z_0, \delta)$ แล้ว $f(z) \in N(w_0, \varepsilon)$



รูปที่ 2.16 ฟังก์ชัน f นิยามในบางย่านจุด z_0

การที่ฟังก์ชัน f นิยามทุกจุดในบางย่านจุด z_0 ยกเว้นจุด z_0 ย่านจุดที่กล่าวนี้จะเป็นไปได้ เมื่อจุด z_0 เป็นภายในของบริเวณ ซึ่ง f นิยาม และสามารถขยายนิยามของลิมิต เมื่อ z_0

เป็นจุดขอบของบริเวณ โดยที่ $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ จะสอดคล้องกับจุด z ที่อยู่ทั้งในโดเมน $0 < |z - z_0| < \delta$ และบริเวณ

<u>ตัวอย่าง 2.11</u> ฟังก์ชัน $f(z) = \frac{iz}{2}$ นิยามบน $|z| < 1$ จงพิสูจน์ $\lim_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$

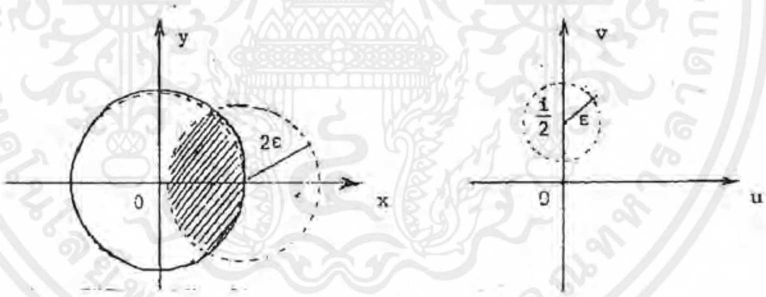
<u>วิธีทำ</u> กำหนด $\varepsilon > 0$ จะหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $\left|f(z) - \frac{i}{2}\right| < \varepsilon$

เมื่อ $0 < |z-1| < \delta$

พิจารณา
$$\begin{aligned} \left|f(z) - \frac{i}{2}\right| &= \left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| \\ &= \left|\frac{z-1}{2}\right| \\ &< \frac{\delta}{2} \\ &= \varepsilon \quad \text{เมื่อเลือก } \delta = 2\varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left|f(z) - \frac{i}{2}\right| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |z-1| < \delta = 2\varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$



รูปที่ 2.17 การหา $\lim_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$

<u>ทฤษฎีบทของลิมิต</u> (Limit's Theorem)

ลิมิตของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนอาจเปลี่ยนเป็นลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง 2 จำนวน

<u>ทฤษฎีบท 2.2</u>

สมมติ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ และ $w_0 = u_0 + iv_0$ แล้ว

(1) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ ก็ต่อเมื่อ

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0$ และ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0$ เท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.3

สมมติว่าถ้า f และ F เป็นฟังก์ชันที่มีลิมิต คือ

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad \text{และ} \quad \lim_{z \to z_0} F(z) = W_0$$

แล้ว

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm F(z)] = w_0 \pm W_0$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z)\ F(z)] = w_0\ W_0$$

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{w_0}{W_0}, \quad W_0 \neq 0$$

ตัวอย่าง 2.12 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{z \to 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i)$
2. $\lim\limits_{z \to \frac{i}{2}} \dfrac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$
3. $\lim\limits_{z \to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \dfrac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$

วิธีทำ 1.

$$\begin{aligned}\lim_{z \to 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i) &= \lim_{z \to 2i} i \lim_{z \to 2i} z^4 + 3\lim_{z \to 2i} z^2 - 10\lim_{z \to 2i} i \\ &= i(2i)^4 + 3(2i)^2 - 10i \\ &= 16i - 12 - 10i \\ &= -12 + 6i\end{aligned}$$

2. $$\lim_{z\to \frac{i}{2}} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2} = \frac{\lim\limits_{z\to \frac{i}{2}} (2z-3)\cdot \lim\limits_{z\to \frac{i}{2}} (4z+i)}{\lim\limits_{z\to \frac{i}{2}} (iz-1)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2i}{2} - 3\right)\cdot\left(\frac{4i}{2} + i\right)}{\left(\frac{i\cdot i}{2} - 1\right)^2}$$

$$= (-3 - 9i)\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= -\frac{4}{3} - 4i$$

3. $$\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} = \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z^3+8)(z^2-4)}{(z^6-64)}$$

$$= \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z^3+8)(z^2-4)}{(z^3+8)(z^3-8)}$$

$$= \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^2-4}{z^3-8}$$

$$= \frac{4e^{\frac{2\pi i}{3}} - 4}{8e^{\pi i} - 8}$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}} - 1}{2(e^{\pi i} - 1)}$$

$$= \frac{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} - 1}{2(\cos\pi + i\sin\pi) - 2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}{-2 + 0 - 2}$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$$

<u>ความต่อเนื่อง</u> (Continuity)

<u>นิยาม 2.13</u>

f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน f จะมีความต่อเนื่องที่จุด z_0 เมื่อมีสมบัติครบทั้ง 3 ประการ ดังนี้

(1) $f(z_0)$ หาค่าได้

(2) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้

(3) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

กล่าวได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน จะมีความต่อเนื่องในบริเวณ R ถ้าฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R

ถ้าฟังก์ชัน f และ g มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 แล้ว ฟังก์ชันต่อไปนี้จะมีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ด้วย คือ f+g , f-g , f·g และ f/g เมื่อ $g(z_0) \neq 0$

<u>ตัวอย่าง 2.13</u> กำหนด $f(z) = \begin{cases} z^2 & , z \neq i \\ 0 & , z = i \end{cases}$

f(z) มีความต่อเนื่องที่ z = i หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาจุด z = i ว่ามีความต่อเนื่องหรือไม่

1. f(i) = 0 หาค่าได้

2. $\lim\limits_{z \to i} f(z) = \lim\limits_{z \to i} z^2 = -1$

3. $\lim\limits_{z \to i} f(z) \neq f(i)$

ดังนั้น f(z) ไม่ต่อเนื่องที่จุด z = i

2.2.3 อนุพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อน (Derivative of Complex Number)

<u>นิยาม 2.14</u>

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่โดเมนของบทนิยามอยู่ในย่านจุด z_0 จะนิยามอนุพันธ์ของ f ที่จุด z_0 โดยสมการ

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.3}$$

เมื่อ $f'(z_0)$ แทนอนุพันธ์ของ f ที่จุด z_0

ถ้าลิมิตหาค่าได้ เรียกฟังก์ชัน f ว่าฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด z_0 และจากบทนิยามในสมการ (2.3) จะแสดง z ในพจน์ของตัวแปรเชิงซ้อนใหม่

$$\Delta z = z - z_0$$

ทำให้เขียนบทนิยามของอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

<u>ตัวอย่าง 2.14</u> จงหาอนุพันธ์ของ $w = f(z) = z^3 - 2z$ โดยใช้บทนิยามที่จุด

(1) $z = z_0$

(2) $z = -1$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^3 - 2(z+\Delta z) - (z^3 - 2z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} 3z^2 + 3z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2 - 2$$

$$f'(z) = 3z^2 - 2$$

(1) ที่ $z = z_0$

$$f'(z_0) = 3(z_0)^2 - 2$$

(2) จากข้อ (1)

ถ้า $z_0 = -1$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 = 1$$

<u>สูตรอนุพันธ์</u>

ให้ c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน และ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด z จะได้ว่า

(1) $\frac{d}{dz}(c) = 0$, $\frac{d}{dz}(z) = 1$, $\frac{d}{dz}[c f(z)] = c f'(z)$

และ ถ้า f และ F เป็นฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด z แล้ว

(2) $\dfrac{d}{dz}\left[f(z) + F(z)\right] = f'(z) + F'(z)$

(3) $\dfrac{d}{dz}\left[f(z)\ F(z)\right] = F'(z)f(z) + F(z)f'(z)$

และ เมื่อ $F(z) \neq 0$ จะได้ว่า

(4) $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{F(z)}\right] = \dfrac{F(z)f'(z) - f(z)F'(z)}{\left[F(z)\right]^2}$

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วแต่ละจุด z จะได้

(5) $\dfrac{d}{dz}\left(z^n\right) = n z^{n-1}$

สูตรนี้จะเป็นจริงเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มลบด้วย ถ้า $z \neq 0$

<u>ตัวอย่าง 2.15</u> จงหาอนุพันธ์ของ $(2z^2+i)^5$ โดยใช้กฎลูกโซ่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $w = 2z^2+i$

$W = w^5$

ดังนั้น
$$\frac{d}{dz}(2z^2+i)^5 = \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\cdot\frac{dw}{dz} = 5w^4\cdot 4z = 20z(2z^2+i)^4$$

นั่นคือ $(2z^2+i)^5$ เท่ากับ $20z(2z^2+i)^4$

2.2.4 สมการของโคชี-รีมันน์ (Cauchy-Riemann's Equation)

<u>ทฤษฎีบท 2.4</u>

สมมติว่า $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ และ $f'(z_0)$ หาค่าได้ที่จุด $z_0 = x_0 + iy_0$ แล้วอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของ u และ v เทียบกับ x และ y จะหาค่าได้ที่จุด (x_0,y_0) และอนุพันธ์ย่อยเหล่า

นั้นจะสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ที่จุดนั้น และ $f'(z_0)$ เขียนได้ในพจน์ของอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ คือ

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$$

หรือ

$$f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0)$$

<u>สมการโคชี-รีมันน์</u> (Cauchy-Riemann Equation)

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด z ใดๆ โดยที่

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

สมการโคชี-รีมันน์ คือ

$$u_x = v_y \quad \text{และ} \quad u_y = -v_x$$

หรือเขียน

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

<u>เงื่อนไขเพียงพอสำหรับอนุพันธ์</u>

<u>*ทฤษฎีบท 2.5*</u>

ให้ฟังก์ชัน $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ นิยามในย่านจุด $z_0 = x_0 + iy_0$ บางย่าน สมมติว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของฟังก์ชัน u และ v เทียบกับ x และ y หาค่าได้ในย่านจุดนั้น และมีความต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0) ถ้าอนุพันธ์ย่อย u_x, u_y, v_x, v_y สอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ที่จุด (x_0,y_0) แล้ว อนุพันธ์ $f'(z_0)$ จะหาค่าได้

<u>ตัวอย่าง 2.16</u> จากทฤษฎีบท จะได้ว่า $f(z) = e^z$ หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าในระนาบเชิงซ้อน

และ $f'(z) = e^z$

พิจารณา
$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x,y) = e^x \sin y \,, (z=x+iy)$

$$u_x(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad v_y(x,y) = e^x \cos y$$

$$u_y(x,y) = -e^x \sin y \quad , \quad v_x(x,y) = e^x \sin y$$

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{และ} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

นั่นคือ $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$, $v_x(x,y)$ และ $v_y(x,y)$
สอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์

สมการโคชี-รีมันน์ในรูปแบบเชิงขั้ว (Cauchy-Riemann Equation in Polar Form)

เมื่อ $z \neq 0$ พิกัดในระบบพิกัดฉากเป็น (x,y) พิกัดในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็น (r,θ) จะได้ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ และสมการโคชี-รีมันน์ เขียนในรูปเชิงขั้วได้

$$u_r(r_0,\theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0,\theta_0) \quad \text{และ} \quad \frac{1}{r_0} u_\theta(r_0,\theta_0) = -v_r(r_0,\theta_0)$$

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (r_0,θ_0) คือถ้า $u_\theta(r_0,\theta_0)$, $u_r(r_0,\theta_0)$, $v_r(r_0,\theta_0)$, $v_\theta(r_0,\theta_0)$ สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งเหล่านี้มีความต่อเนื่องที่จุด z_0

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= e^{-i\theta_0}\left[u_r(r_0,\theta_0) + i\,v_r(r_0,\theta_0)\right] \\ &= (\cos\theta_0 - i\sin\theta_0)\left[u_r(r_0,\theta_0) + i\,v_r(r_0,\theta_0)\right] \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{1}{r_0} e^{-i\theta_0}\left[v_\theta(r_0,\theta_0) - i\,u_\theta(r_0,\theta_0)\right] \\ &= \frac{1}{r_0}(\cos\theta_0 - i\sin\theta_0)\left[v_\theta(r_0,\theta_0) - i\,u_\theta(r_0,\theta_0)\right] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.17 พิจารณาฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= u(r,\theta) + i\,v(r,\theta) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$u(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r} \quad \text{และ} \quad v(r,\theta) = \frac{-\sin\theta}{r}$$

$$u_r(r,\theta) = \frac{-\cos\theta}{r^2} \quad \text{และ} \quad v_r(r,\theta) = \frac{\sin\theta}{r^2}$$

$$u_\theta(r,\theta) = \frac{-\sin\theta}{r} \quad \text{และ} \quad v_\theta(r,\theta) = \frac{-\cos\theta}{r}$$

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r} v_\theta(r,\theta) \quad \text{และ} \quad \frac{1}{r} u_\theta(r,\theta) = -v_r(r,\theta)$$

$u_r(r,\theta)$, $u_\theta(r,\theta)$, $v_r(r,\theta)$, $v_\theta(r,\theta)$ สอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเหล่านี้ต่อเนื่องที่จุด $z = re^{i\theta}$ ใดๆในระนาบเชิงซ้อน ดังนั้น $f'(z)$ หาค่าได้ และ

$$\begin{aligned} f'(z) &= (\cos\theta - i\sin\theta)(u_r + iv_r) \\ &= (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\frac{-\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) \\ &= \frac{-(\cos\theta - i\sin\theta)^2}{r^2} \quad = \quad \frac{-1}{z^2} \end{aligned}$$

2.2.5 ฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function)

นิยาม 2.15

ฟังก์ชัน f ของตัวแปรเชิงซ้อน z เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 ถ้าฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดียว และมีอนุพันธ์ที่ทุกๆ z ในบางย่านจุด z_0 ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ R ถ้าฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดใน R

ตัวอย่าง 2.18

$$\begin{aligned} f(z) &= |z|^2 \\ &= x^2 + y^2 = u + iv \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \quad , \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

ฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $z = 0$ เท่านั้น

ดังนั้น ฟังก์ชันนี้ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

นิยาม 2.16

ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดทุก ๆ จุดในระนาบเชิงซ้อนเรียกว่า **ฟังก์ชันทั่ว** (Entire Function) ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันทั่ว เช่น $f(z) = z^2$

ถ้าฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 แต่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่บางจุดในทุกๆย่านจุด z_0 แล้วจะเรียก z_0 ว่า **จุดเอกฐาน (Singular Point) ของฟังก์ชัน**

ตัวอย่าง2.19 $f(z) = \frac{1}{z}$ แล้ว $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$, $(z \neq 0)$

f จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกๆจุด ยกเว้น $z = 0$ ซึ่งฟังก์ชันไม่นิยาม ดังนั้น จุด $z = 0$ เป็น จุดเอกฐาน

ฟังก์ชันฮาร์โมนิก (Harmonic Function)

นิยาม 2.17

ฟังก์ชันค่าจริง h ของตัวแปร x และ y เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก ในโดเมนที่กำหนดให้ ของระนาบ xy ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่ง และอันดับที่สองของฟังก์ชันสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$h_{xx}(x,y) + h_{yy}(x,y) = 0$$

เรียกสมการนี้ว่า **สมการลาปลาซ (Laplace Equation)**

นิยาม 2.18

สมมติว่า $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D แล้วแสดงว่า ฟังก์ชันส่วนประกอบของ u และ v เป็น ฟังก์ชันฮาร์โมนิก ใน D

นิยาม 2.19

ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิกในโดเมน D และอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันทั้งสองนี้สอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ ในโดเมน D จะกล่าวว่า v เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิกสังยุค (Conjugate Harmonic Function) ของ u ถ้าฟังก์ชัน $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D แล้ว v จะเป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิกสังยุคของ u ในโดเมน D แล้ว $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ จะเป็น ฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D

จุดเอกฐานแบบเอกเทศ (Isolated Singular Point)

นิยาม 2.20

จุด z_0 เรียกว่า **จุดเอกฐานแบบเอกเทศ (Isolated Singular Point)** ถ้าสามารถหา $\delta > 0$ ซึ่งวงกลม $|z - z_0| = \delta$ ไม่มีจุดเอกฐานอื่นนอกจาก z_0

ตัวอย่างเช่น $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ จะมีจุด $z = i$ เป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศ

<u>โพล</u> (Pole)

<u>นิยาม 2.21</u>

จุด z_0 เรียกว่า **โพลอันดับ** n (Pole of order n) ของฟังก์ชัน f ถ้าสามารถหา n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกที่ $\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) = A \neq 0$

*ถ้า $n = 1$ เรียกว่า **โพลอันดับหนึ่ง** หรือ **โพลเชิงเดี่ยว** (Simple Pole)*

<u>ตัวอย่าง 2.20</u> $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$

$f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$ มีโพลอันดับ 3 ที่จุด $z = 2$

เพราะ $\lim\limits_{z \to 2} (z-2)^3 \cdot f(z) = \lim\limits_{z \to 2} (z-2)^3 \cdot \dfrac{1}{(z-2)^3} = 1 \neq 0$

<u>นิยาม 2.22</u>

จุด z_0 เรียกว่า **จุดกิ่ง** (Branch Point) ถ้าจุด z_0 เป็นจุดร่วมของเส้นกั้นกิ่งทั้งหมดของฟังก์ชันค่าหลายเชิง

<u>ตัวอย่าง 2.21</u> $f(z) = (z-3)^{1/3}$

มีจุดกิ่งที่จุด $z = 3$

<u>นิยาม 2.23</u>

จุด z_0 เป็น **จุดเอกฐานที่ขจัดได้ของ** f ถ้า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้

<u>ตัวอย่าง 2.22</u> $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

เมื่อ $z = 0$, $\dfrac{\sin z}{z}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ดังนั้น $z = 0$ เป็นจุดเอกฐาน

แต่ $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$

ดังนั้น จุด $z = 0$ เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้

<u>นิยาม 2.24</u>

จุด z_0 เป็นภาวะเอกฐานที่ไม่เป็นโพล ไม่เป็นจุดกิ่ง ไม่เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้ เรียกว่า **ภาวะเอกฐานหลัก** (Essential Singularity)

2.3 **ฟังก์ชันมูลฐาน** (Elementary Function)

2.3.1 **ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง** (Exponential Function)

นิยาม 2.25

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน $z = x+iy$ สามารถนิยามได้ดังนี้

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{2.4}$$

เมื่อ z เป็นจำนวนจินตภาพบริสุทธิ์ $i\theta$ จากสมการ (2.4) สามารถเขียนได้เป็น

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.5}$$

ซึ่งเราสามารถเรียกสมการ (2.5) นี้ว่า **สมการของออยเลอร์** (Euler's Equation) และเราสามารถเขียน exp z แทน e^z ได้ ดังนั้น จากสมการ (2.4) จะเขียนได้เป็น

$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

<u>สมบัติของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง</u>

1. $\dfrac{d}{dz}(e^z) = e^z$
2. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
3. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
4. $e^z \neq 0$ ทุก ๆ ค่าของ z
5. $(e^z)^n = e^{nz}$, (n = 1,2,...)
6. $e^{z+2k\pi i} = e^z$
7. $|e^z| = e^x$ และ $\arg(e^z) = y$

<u>ตัวอย่าง2.23</u> จงหาค่า z ที่ทำให้ $e^z = -1$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จะได้

$$e^x = 1 \quad , \quad y = \pi + 2n\pi \quad ,(n = 0, \pm1, \pm2,...)$$

ดังนั้น จะได้ x = 0 เราจะได้

$$z = (2n+1)\pi i \quad ,(n = 0, \pm1, \pm2,...)$$

<u>ตัวอย่าง2.24</u> จงหาค่า z ซึ่ง $e^z = \sqrt{3} - i$

<u>วิธีทำ</u> แปลง $\sqrt{3} - i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว (Polar Form) จะได้

$$r = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\theta = \arg\left(\sqrt{3} - i\right) = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \qquad ,(k = 0,1,2,\ldots)$$

จากนั้นเขียนให้อยู่ในรูปเลขชี้กำลัง จะได้

$$\sqrt{3} - i = 2e^{i\left(\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\right)} = e^{\ln 2} \cdot e^{i\left(\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\right)}$$

จากสมบัติของเลขชี้กำลังจะได้

$$\sqrt{3} - i = e^{\ln 2 + i\left(\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\right)}$$

ดังนั้น

$$e^z = e^{\ln 2 + i\left(\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\right)}$$

$$\therefore \quad z = \ln 2 + i\left(\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\right) \qquad ,(k = 0,1,2,\ldots)$$

2.3.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)

จากฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เราได้

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

และ

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

ดังนั้นเราได้

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

และ

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

<u>*นิยาม 2.26*</u>

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับตัวแปรเชิงซ้อน $z = x + iy$ สามารถนิยามได้ดังนี้

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

และ

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

และ สามารถนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ดังนี้

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

<u>สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ</u>

1. $\dfrac{d}{dz}(\sin z) = \cos z \quad , \quad \dfrac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$
2. $\sin(-z) = -\sin z \quad , \quad \cos(-z) = \cos z$
3. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

   $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
4. ถ้า $z = x + iy$ แล้ว

   $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

   $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
5. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
6. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z \quad , \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$
7. $\cos^2 z = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2z) \quad , \quad \sin^2 z = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2z)$
8. ถ้า $\cos z = 0$ แล้ว $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi \quad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

   ถ้า $\sin z = 0$ แล้ว $z = n\pi \quad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$
9. $\sin(z + 2\pi) = \sin z \quad , \quad \sin(z + \pi) = -\sin z$

   $\cos(z + 2\pi) = \cos z \quad , \quad \cos(z + \pi) = -\cos z$

   $\sin(z + \dfrac{\pi}{2}) = \cos z \quad , \quad \sin(z - \dfrac{\pi}{2}) = -\cos z$
10. $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

    $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

<u>ตัวอย่าง2.25</u> จงแสดงว่า $2\sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1+z_2) + \sin(z_1-z_2)$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้

$$\begin{aligned} 2\sin z_1 \cos z_2 &= 2\left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}}{2i}\right) \\ &= \sin(z_1+z_2) + \sin(z_1-z_2) \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง2.26</u> จงแสดงว่า $\tan(z_1+z_2) = \dfrac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}$ เมื่อ $z_1 + z_2 \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, n เป็นจำนวนเต็ม

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} \tan(z_1+z_2) &= \frac{\sin(z_1+z_2)}{\cos(z_1+z_2)} \\ &= \frac{\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2} \\ &= \frac{\left(\dfrac{\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2}\right)}{\left(\dfrac{\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2}\right)} \\ &= \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2} \end{aligned}$$

2.3.3 ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก (Hyperbolic Function)

<u>นิยาม 2.27</u>

ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกสำหรับตัวแปรเชิงซ้อน $z = x+iy$ สามารถนิยามดังนี้

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

และ

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

และ สามารถนิยามฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกอื่น ๆ ดังนี้

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$
$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \quad , \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

<u>สมบัติของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก</u>

1. $\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \quad , \quad \frac{d}{dz}(\cosh z) = -\sinh z$
2. $\sinh(-z) = -\sinh z \quad , \quad \cosh(-z) = \cosh z$
3. $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

   $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
4. ถ้า $z = x + iy$ แล้ว

   $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

   $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
5. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
6. $\sinh(iz) = i \sin z \quad , \quad \sin(iz) = i \sinh z$

   $\cosh(iz) = \cos z \quad , \quad \cos(iz) = \cosh z$
7. $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z \quad , \quad \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$
8. ถ้า $\cosh z = 0$ แล้ว $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

   ถ้า $\sinh z = 0$ แล้ว $z = n\pi i \quad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$
9. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$

   $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$

<u>ตัวอย่าง2.27</u> จงหาค่าของ $\sinh 0$, $\cosh 0$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก จะได้

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

และ

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

ตัวอย่าง2.28 จงพิสูจน์สมบัติข้อ 4 โดยใช้นิยามของ $\cos z$, $\sin z$

วิธีทำ จากสมบัติข้อ 4 ถ้า $z = x + iy$ แล้ว

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \quad \text{--------(1)}$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \quad \text{--------(2)}$$

จากนิยาม เราจะได้

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{x}(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2}$$

$$= \frac{e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y - e^{-x}\cos y + ie^{-x}\sin y}{2}$$

$$= \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\cos y + \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) i\sin y$$

$$= \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y \quad \text{ตรงกับ ---(1)}$$

และ

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{x}(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2}$$

$$= \frac{e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y + e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y}{2}$$

$$= \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\cos y + \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) i\sin y$$

$$= \cosh x \cos y + i\sinh x \sin y \quad \text{ตรงกับ ---(2)}$$

2.3.4 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm Function)

นิยาม 2.28

ถ้า $z \neq 0$ ลอการิทึมฐานธรรมชาติของ z เขียนแทนด้วย $\log z$ นิยามโดย

$$\log z = \ln|z| + i\arg z$$

และเนื่องจาก $\arg z = \theta + 2k\pi$ จึงสามารถเขียนแทนได้ดังนี้

$$\log z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi) \quad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

<u>*นิยาม 2.29*</u>

สำหรับ $z \neq 0$ ค่ามุขสำคัญของ $\log z$ (Principal Value of Natural Logarithm) เขียนแทนด้วย $\operatorname{Log} z$ นิยามโดย

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

โดยที่ $\operatorname{Arg} z = \theta \; ; \; -\pi < \theta \le \pi$ ดังนั้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\theta \qquad ; \; -\pi < \theta \le \pi$$

<u>*หมายเหตุ*</u> # ***จะได้*** $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi \quad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

<u>สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม</u>

1. $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{Log} z) = \dfrac{1}{z} \quad , \left(|z| > 0 \;,\; -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\right)$

   $\dfrac{d}{dz}(\log z) = \dfrac{1}{z} \quad , \left(|z| > 0 \;,\; \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi\right) \; ; \; \alpha$ เป็นค่าคงตัว
2. $e^{\log z} = z \quad , (z \neq 0)$
3. $\log(e^z) = \operatorname{Log}(e^z) + \arg(e^z)$
4. $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$
5. $\log\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$
6. $\log\left(z^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{n}\log z$
7. $z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\log z\right)$

<u>ตัวอย่าง2.29</u> จงหาค่าทั้งหมดของ $\log(1+i)$

<u>วิธีทำ</u> $\log(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i)$

จาก $|1+i| = \sqrt{2} \quad , \quad \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \quad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

$$\therefore \quad \log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$= \ln\sqrt{2} + \left(\frac{1}{4} + 2n\right)\pi i \qquad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

<u>ตัวอย่าง2.30</u> จงหาค่ามุขสำคัญ $\operatorname{Log}(1-i)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(1-i) &= \ln|1-i| + i\operatorname{Arg}(1-i)\\ &= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{-\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i\end{aligned}$$

2.3.5 **เลขชี้กำลังเชิงซ้อน** (Complex Exponents)

<u>นิยาม 2.30</u>

สำหรับ $z \neq 0$ และ c เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรานิยาม

$$z^c = e^{c\log z}$$

จะได้ว่า z^c เป็นฟังก์ชันหลายค่า

<u>นิยาม 2.31</u>

สำหรับ $z \neq 0$ และ c เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรานิยาม ค่ามุขสำคัญของ z^c ดังนี้

$$z^c = e^{c\operatorname{Log} z}$$

จะเห็นว่า ค่ามุขสำคัญของ z^c มีเพียงค่าเดียว

<u>สมบัติของเลขชี้กำลังเชิงซ้อน</u>

1. $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$
2. $\dfrac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$
3. $\dfrac{1}{z^c} = z^{-c}$
4. $(z^c)^n = z^{cn}$

5. $\frac{d}{dz}(z^c) = \frac{c}{z}(z^c)$

6. $\frac{d}{dz}(c^z) = c^z \log c$

หมายเหตุ # $\text{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$

ตัวอย่าง2.31 จงหาค่าของ $(-1)^i$ และค่ามุขสำคัญของ $(-1)^i$

วิธีทำ $(-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{i(1+2n)\pi i} = e^{-(1+2n)\pi}$

$\therefore$ ค่าของ $(-1)^i = e^{-(1+2n)\pi}$ $,(n = 1,2,...)$

และ ค่ามุขสำคัญของ $(-1)^i = e^{-\pi}$

ตัวอย่าง2.32 จงหาค่ามุขสำคัญของ $(-i)^i$

วิธีทำ ค่ามุขสำคัญของ $(-i)^i = e^{i\,\text{Log}(-i)}$

$$= e^{i\left(\frac{-\pi}{2}i\right)}$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}$$

2.3.6 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน** (Inverse Trigonometric Function)

ฟังก์ชันซายน์ผกผัน หรือ arcsin z เขียนแทนด้วย $\sin^{-1} z$

ให้ $w = \sin^{-1} z$ เมื่อ $z = \sin w$ เราได้ $w = \sin^{-1} z$ เมื่อ

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

ดังนั้น

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$$

แก้ปัญหาสมการกำลังสอง หาค่า e^{iw} จะได้

$$e^{iw} = iz + (1-z^2)^{1/2}$$

take log เข้าไปทั้งสองข้าง และแทนค่า $w = \sin^{-1} z$ จะได้

$$\arcsin z \text{ หรือ } \sin^{-1} z = -i\log\left[iz + (1-z^2)^{1/2}\right]$$

และเรานิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันอื่น ๆ ด้วยวิธีเดียวกัน จะได้

$$\arccos z \text{ หรือ } \cos^{-1} z = -i\log\left[z + i(1-z^2)^{1/2}\right]$$

$$\arctan z \text{ หรือ } \tan^{-1} z = \frac{i}{2}\log\left[\frac{i+z}{i-z}\right]$$

และสำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน สามารถหาได้จากสูตรต่อไปนี้

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1} z) = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\cos^{-1} z) = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\tan^{-1} z) = \frac{1}{1+z^2}$$

<u>ตัวอย่าง2.33</u> จงหาค่า $\sin^{-1}(\sqrt{2})$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\sin^{-1}(\sqrt{2}) &= -i\log\left[\sqrt{2}\,i + (1-(\sqrt{2})^2)^{1/2}\right]\\ &= -i\log[\sqrt{2}\,i \pm i]\\ &= -i\log[(\sqrt{2} \pm 1)i]\end{aligned}$$

2.3.7 ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกผกผัน (Inverse Hyperbolic Function)

สำหรับฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกผกผัน สามารถหาได้ในทำนองเดียวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน จะได้ดังนี้

arcsinh z หรือ $\sinh^{-1} z = \log\left[z + (z^2+1)^{1/2} \right]$

arccosh z หรือ $\cos^{-1} z = \log\left[z + (z^2-1)^{1/2} \right]$

arctanh z หรือ $\tan^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$

และสำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกผกผันสามารถหาได้จากสูตรต่อไปนี้

$$\frac{d}{dz}(\sinh^{-1} z) = \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\cosh^{-1} z) = \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\tanh^{-1} z) = \frac{1}{1-z^2}$$

ตัวอย่าง2.34 จงหาค่าของ $\tanh^{-1}(1+2i)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\tanh^{-1}(1+2i) &= \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+(1+2i)}{1-(1+2i)}\right]\\ &= \frac{1}{2}\log\left[\frac{2+2i}{-2i}\right]\\ &= \frac{1}{2}\log(-1+i)\end{aligned}$$

2.4 อินทิกรัลเชิงซ้อน

2.4.1 นิยามและความหมาย

ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบในระนาบเชิงซ้อน กำหนดโดย $z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$

ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์นิยาม(อย่างน้อยที่สุด)แต่ละจุดของ C เราแบ่งช่วง $a \leq t \leq b$ ออกเป็น n ช่วงเล็กๆ

การอินทิกรัลของ f ตามเส้น C เขียนแทนด้วย $\int_C f(z)\,dz$ นิยามโดย

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx) = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt$$

 # <u>หมายเหตุ</u> # ถ้า C เป็นวิถีปิด (Closed path หรือ Closed Curve หรือ Contour) เรานิยมเขียนอินทิกรัลของ f ตามวิถีปิด C ด้วยสัญลักษณ์ $\oint_C f(z)\,dz$

(วิถีปิดแบ่งเป็น 2 ประเภท คือวิถีปิดเชิงเดียว ซึ่งหมายถึงวิถีปิดที่ไม่ตัดกัน หรือ ไม่สัมผัสกัน และในกรณีที่วิถีปิดนั้นตัดกันหรือสัมผัสกัน เราจะเรียกว่า วิถีปิดไม่เชิงเดียว)

2.4.2 คอนทัวร์ (Contour)

ส่วนโค้ง C เป็นเซตของจุด $z = (x,y)$ ในระนาบเชิงซ้อนซึ่ง

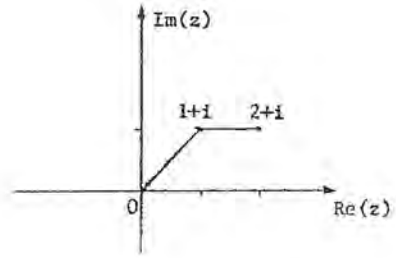
$$x = x(t)\ ,\ y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{2.6}$$

โดยที่ x และ y เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตัวแปรเสริม t ส่วนโค้งในระนาบเชิงซ้อนกำหนดโดยสมการ

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{2.7}$$

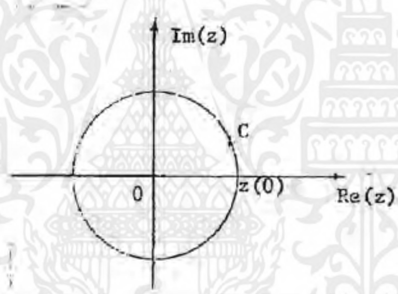
และ z(t) จะมีความต่อเนื่องถ้า x(t) และ y(t) มีความต่อเนื่องทั้งคู่ ส่วนโค้ง C เป็นส่วนโค้งเชิงเดียว หรือ ส่วนโค้งซอร์ดอง คือ เส้นโค้งที่ไม่ตัดกันที่จุดใด ๆ หมายความว่า $z_1(t) \neq z_2(t)$ เมื่อ $t_1 \neq t_2$ เมื่อเส้นโค้ง C เป็นเส้นโค้งเชิงเดียว ยกเว้นที่จุด $z(b) = z(a)$ จะกล่าวว่า C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว หรือ เส้นโค้งซอร์ดอง

เส้นโพลิโกนัลกำหนดโดย $z(t) = \begin{cases} t+it & (a \le t \le 1) \\ t+i & (1 \le t \le 2) \end{cases}$



รูปที่ 2.18 เส้นโพลิโกนัล

ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรง จาก 0 ถึง 1 + i ตามด้วยเส้นตรง 1 + i ถึง 2+ i เป็นส่วนของเส้นตรงเชิงเดียว และวงกลมหนึ่งหน่วยที่กำหนดด้วยสมการ $z(t) = \cos t + i \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ รอบจุดกำเนิด เป็นส่วนโค้งปิดเชิงเดียว C ดังรูป



รูปที่ 2.19 วงกลมหนึ่งหน่วย C รอบจุดกำเนิด

ฟังก์ชันเชิงซ้อนที่กำหนดโดย z(t) ใน (2.7) เรียกว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเสริม t ที่หาอนุพันธ์ได้ ถ้า x(t) และ y(t) เป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้

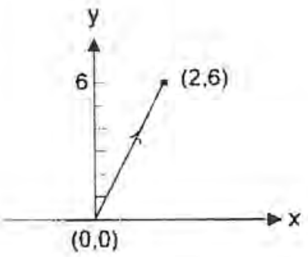
<u>ตัวอย่าง 2.35</u> จงเขียนรูปเส้นที่ถูกกำหนดโดย $z(t) = t + 3i$, $0 \leq t \leq 2$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $z = z(t) = t + 3it = x + iy$

เราได้ $x = t$ และ $y = 3t$ ทำให้ได้ว่า $t = \dfrac{y}{3}$

ดังนั้น $x = \dfrac{y}{3}$ หรือ $y = 3x$ เป็นสมการเส้นตรง และเนื่องจาก $0 \leq t \leq 2$

เราได้ว่า $0 \leq x \leq 2$ กล่าวคือ เป็นเส้นตรงจุดเริ่มต้นคือ (0,0) ไปยังจุดปลายคือ (2,6)



รูปที่ 2.20 เส้นที่ถูกกำหนดโดย $z(t) = t + 3i \, , 0 \leq t \leq 2$

<u>ตัวอย่าง 2.36</u> จงแทนเส้นโค้งต่อไปนี้ในรูปแบบ $z = z(t)$

(ก) พาราโบลา $y = x^2$ จากจุด (0,0) ไปยัง (2,4)

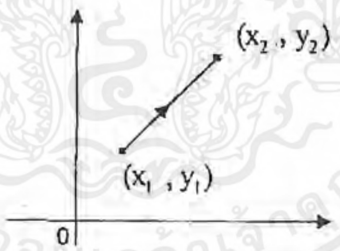
(ข) เส้นตรงจากจุด $(x_1 + y_1)$ ไปยังจุด $(x_2 + y_2)$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$

<u>วิธีทำ</u> (ก) ให้ $x = t$ ดังนั้น $y = t^2$

ดังนั้น $z = x + iy = t + it^2 \quad , 0 \leq t \leq 2$

(ข) เนื่องจากสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงจากจุด (x_1 , y_1) ไปยังจุด (x_2 , y_2)

คือ $$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \end{aligned}\right\} (0 \leq t \leq 1)$$



รูปที่ 2.21 เส้นตรงจากจุด (x_1 , y_1) ไปยังจุด (x_2 , y_2)

ดังนั้น $$z(t) = [x_1 + t(x_2 - x_1)] + i[y_1 + t(y_2 - y_1)] \quad , (0 \leq t \leq 1)$$

2.4.3 ทฤษฎีบทของกรีน (Green's Theorem)

ทฤษฎีบท 2.6

ถ้าให้ P(x,y) และ Q(x,y) เป็นฟังก์ชันค่าจริง ที่มีความต่อเนื่อง ซึ่งค่าอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial Q}{\partial x}$ และ $\frac{\partial P}{\partial y}$ มีความต่อเนื่องในบริเวณ R มีขอบเป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C แล้ว

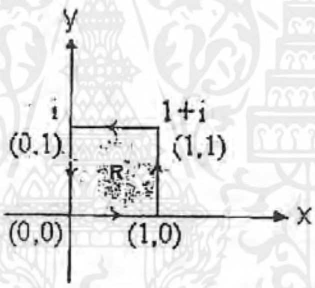
$$\int_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy$$

เมื่อ C มีทิศทางบวก

ตัวอย่าง2.37 จงหาค่าของ $\int_C |z|^2\,dz$ เมื่อ C คือ เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีจุดยอดที่ 0 , 1 , 1+ i , i (ทวนเข็มนาฬิกา) กำหนดให้ใช้ทฤษฎีบทของกรีน

วิธีทำ จาก $|z|^2 = |x+iy|^2 = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = u+iv$

$u = x^2+y^2$, $v = 0$



รูปที่ 2.22 เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีจุดยอดที่ 0,1,1+ i ,i (ทวนเข็มนาฬิกา)

จาก
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$
$$= \oint_C (x^2+y^2)\,dx + i\oint_C (x^2-y^2)\,dy$$
$$= \iint_R \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial (x^2-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= \iint_R (-2y)\,dxdy + i\iint_R (2x)\,dxdy$$
$$= \int_0^1\int_0^1 (-2y)\,dxdy + i\int_0^1\int_0^1 (2x)\,dxdy$$
$$= -1+i$$

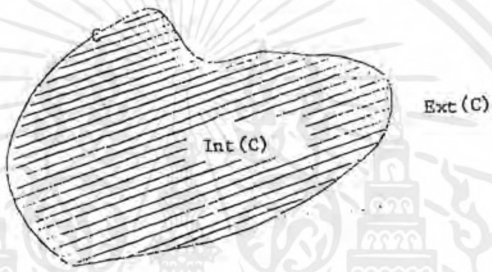
<u>ทฤษฎีบทเส้นโค้งซอร์ดอง</u>

<u>*ทฤษฎีบท 2.7*</u>

ถ้า C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวในระนาบ แล้วระนาบจะถูกแบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ

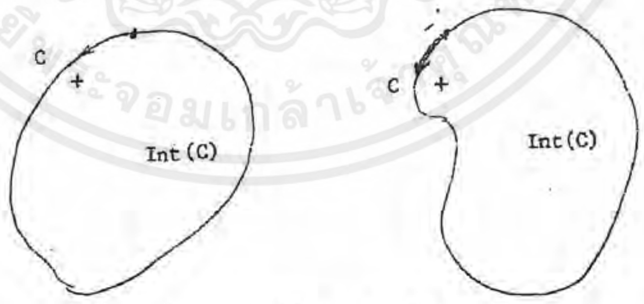
1. เส้นโค้ง C
2. จุดภายในของ C แทนด้วยสัญลักษณ์ Int(C) ซึ่งเป็นเซตเปิดและเป็นเซตที่มีขอบเขต
3. จุดภายนอกของ C แทนด้วยสัญลักษณ์ Ext(C) ซึ่งเป็นเซตเปิดและเป็นเซตที่มีขอบเขต

และ C เป็นขอบของ Int(C) และ Ext(C)



รูปที่ 2.23 เส้นโค้งปิดเชิงเดียว

เส้นโค้งปิดเชิงเดียว จะมีทิศทางบวก เมื่อเคลื่อนตามเส้นโค้ง C แล้ว จุดภายในของเส้นโค้งอยู่ทางด้านซ้ายของเส้นโค้ง C

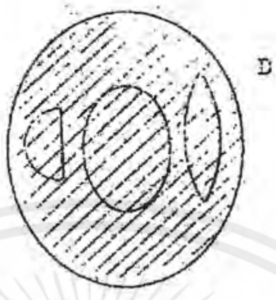


รูปที่ 2.24 จุดภายในของเส้นโค้งปิดเชิงเดียว

2.4.4 ทฤษฎีบทของโคชี (Cauchy's Theorem)

<u>โดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว</u> (Simply Connected Domain)

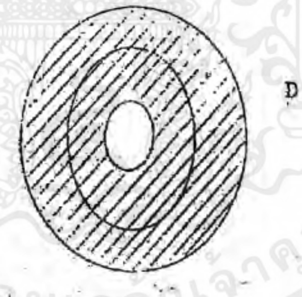
ให้ D เป็นโดเมน จะเรียกโดเมน D ว่าเป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว ถ้าทุกๆเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน D ประกอบด้วยจุดภายใน D เท่านั้น



รูปที่ 2.25 โดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว

<u>โดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง</u> (Multiply Connected Domain)

โดเมน D จะเรียกว่าเป็นโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง ถ้าโดเมน D ไม่เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว

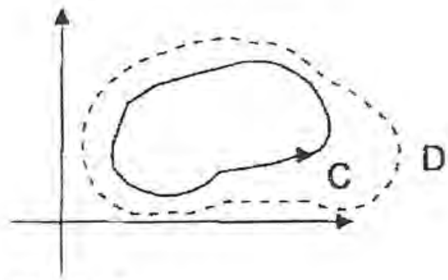


รูปที่ 2.26 โดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง

<u>ทฤษฎีบท 2.8</u>

ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว D แล้วสำหรับทุกๆวิถีปิดเชิงเดียว C ใน D เราได้

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$



รูปที่ 2.27 วิถีปิดเชิงเดียว

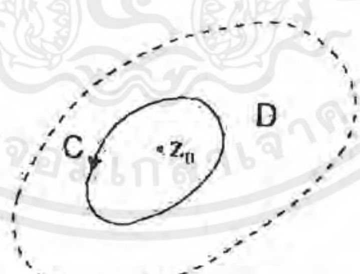
โดยที่ C มีทิศทางบวก วิถีปิดเชิงเดียวบางครั้งเราเรียกว่า Contour

<u>สูตรอินทิกรัลของโคชี</u> (Cauchy Integral's Formula)

สูตรนี้มีประโยชน์มากในการหาค่าอินทิกรัล นอกจากนี้ยังนำไปสู่การหาอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชันวิเคราะห์ และนำไปพิสูจน์ที่มาของการแทนฟังก์ชันวิเคราะห์ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์และอื่นๆ อีกมาก

<u>ทฤษฎีบท 2.9</u> (สูตรอินทิกรัลของโคชี)

ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมนเชิงเดียว D แล้วสำหรับจุด z_0 ใดๆ ใน D และสำหรับวิถีปิดเชิงเดียว C ใดๆ ใน D ซึ่งล้อมรอบจุด z_0 ดังรูป



รูปที่ 2.28 วิถีปิดเชิงเดียว C ใน D ล้อมรอบจุด z_0

เราได้

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

หรือ

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

เมื่อ C มีทิศทางบวก

ตัวอย่าง2.38 (ก) จงหาค่าของ $\oint_C \sec z\, dz$ เมื่อ C คือวงกลมหนึ่งหน่วย (ทวนเข็มนาฬิกา)

(ข) จงหาค่าของ $\oint_C \frac{dz}{z^2+4}$, $C : |z| = 1$ (ทวนเข็มนาฬิกา)

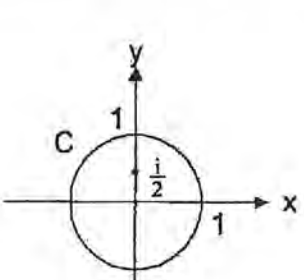
วิธีทำ (ก) เนื่องจาก $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ทุกๆค่าของ z ยกเว้นที่ $z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ ซึ่งจุดเอกฐานทั้งหมดนี้ไม่ได้อยู่ภายในและบนวงกลม C อาศัยทฤษฎีบทอินทิกรัลของโคชี เราได้ว่า $\int_C \sec z = 0$

(ข) เนื่องจากถูกอินทิเกรต $\frac{1}{z^2+4}$ มีจุดเอกฐานอยู่ที่ $z^2 + 4 = 0$ หรือ $z = \pm 2i$ ซึ่งไม่ได้อยู่ภายในและบนวงกลม C ดังนั้นอาศัยทฤษฎีบทอินทิกรัล ของโคชี เราได้ว่า $\int_C \frac{dz}{z^2+4} = 0$

ตัวอย่าง2.39 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}dz$ เมื่อ C คือวงกลม $|z| = 1$ (ทวนเข็มนาฬิกา)

วิธีทำ $\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}dz = \oint_C \frac{z^3-6}{2(z-\frac{i}{2})}dz = \oint_C \frac{\frac{z^3-6}{2}}{z-\frac{i}{2}}dz$

เนื่องจาก $\frac{i}{2}$ อยู่ภายใน C และ



รูปที่ 2.29 วงกลม $|z| = 1$ (ทวนเข็มนาฬิกา)

$f(z) = \dfrac{z^3-6}{2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ภายใน C และบน C เราได้

$$\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}\,dz = (2\pi i)\, f(\frac{i}{2}) = (2\pi i)(\frac{-i}{6}-3) = \frac{\pi}{8} - 6\pi i$$

2.4.5 การแยกเศษส่วนย่อย (Partial Fraction Decomposition)

กรณีที่ 1

ให้ q(z) เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งสัมประสิทธิ์ของ z^n คือ z_n สมมุติว่า $q(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)a_n$ และให้ p(z) เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี $m \le n-1$ ซึ่ง $p(z_i) \neq 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ และเนื่องจาก p(z) และ q(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับทุกๆ $z \in C$ ดังนั้น $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับทุกๆ $z \neq z_i$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ในกรณีเช่นนี้ เศษส่วนย่อยของ f(z) คือ

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \ldots + \frac{A_n}{z-z_n}$$

; $A_1, A_2, \ldots, A_N$ เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน

; $A_k = \lim\limits_{z \to z_k} (z-z_k) f(z)$ หรือ $A_k = \dfrac{p(z_k)}{q'(z_k)}$

กรณีที่ 2

สมมุติว่า q(z) เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี n และถ้า $q(z) = 0$ เราได้ว่า $z_1, z_1, \ldots, z_1, z_{m+1}, z_{m+1}, \ldots, z_n$ และถ้า $z = z_1$ แล้ว q(z) มีภาวะรากค่าซ้ำเป็น m นอกนั้น $z = z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_n$ มีภาวะรากค่าซ้ำเป็น 1 ให้ p(z) เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรีน้อยกว่า n-1 ซึ่ง $p(z_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

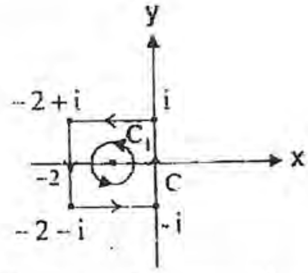
ในกรณีนี้เราได้ว่า เศษส่วนย่อยของ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ คือ

$$f(z) = \frac{A_1}{(z-z_1)^m} + \frac{A_2}{(z-z_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{z-z_1} + \frac{B_{m+1}}{z-z_{m+1}} + \frac{B_{m+2}}{z-z_{m+2}} + \ldots + \frac{B_n}{z-z_n}$$

; $A_k = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_1} \dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-z_1)^m f(z)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$

; $\mathbf{B_K} = \lim\limits_{z \to z_k} (z-z_k) f(z)$, $(k = m+1, m+2, \ldots, n)$

<u>ตัวอย่าง 2.40</u> จงหาค่าของ $\int_C \frac{dz}{z^3+1}$ เมื่อ C คือเส้นขอบของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จุดยอดอยู่ที่ $-2\pm i$, $\pm i$ ทวนเข็มนาฬิกา



รูปที่ 2.30 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จุดยอดอยู่ที่ $-2\pm i$, $\pm i$ ทวนเข็มนาฬิกา

<u>วิธีทำ</u> การแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)}$$

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2-z+1} = A(z^2-z+1)+(Bz+C)(z+1)$$

$$= Az^2 - Az + z + Bz^2 + Bz + Cz + C$$

$$= (A+B)z^2 + (-A+B+C)z + A + C$$

$A + B = 0$ ---------(1)

$-A + B + C = 0$ ---------(2)

$A + C = 1$ ---------(3)

เราได้

$$A = \frac{1}{3} ,\ B = \frac{-1}{3} ,\ C = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{z+1} + \frac{-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}}{z^2-z+1}$$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z^3+1} = \oint_C \frac{\frac{1}{3}}{z+1}\,dz + \oint_C \frac{-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}}{z^2-z+1}\,dz$$

เนื่องจาก $\frac{-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}}{z^2-z+1}$ มีจุดเอกฐานอยู่ที่ค่า z

ซึ่ง $z^2-z+1=0$ คือ $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ซึ่งไม่อยู่ภายใน C และบน C จากทฤษฎีของโคชีเราได้

$$\oint_C \frac{-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}}{z^2-z+1}\,dz = 0$$

ดังนั้น

$$\oint_C \frac{dz}{z^3+1} = \oint_C \frac{\frac{1}{3}}{z+1}\,dz$$

เมื่อ $C_1 : |z+1| = \frac{1}{2}$, (ทวนเข็มนาฬิกา)

$$\therefore \quad C_1 : z(t) = -1+\frac{1}{2}e^{it} \;,\; z'(t) = i\frac{1}{2}e^{it} \qquad , 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_C \frac{dz}{z^3+1} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{3}}{-1+\frac{1}{2}e^{it}+1}\,\frac{1}{2}ie^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}i\int_0^{2\pi} dt$$

$$= \frac{2\pi i}{3}$$

<u>ตัวอย่าง2.41</u> จงแยกเศษส่วนย่อยของ $\dfrac{z-3}{2z^2+z-3}$

<u>วิธีทำ</u> $$\frac{z-3}{2z^2+z-3} = \frac{z-3}{2(z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{2})} = \frac{z-3}{2(z-1)(z+\frac{3}{2})} = \frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z+\frac{3}{2}}$$

$$A_1 = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{z-3}{2(z-1)(z+\frac{3}{2})} = \lim_{z\to1}\frac{z-3}{2(z+\frac{3}{2})} = \frac{-2}{(2)(\frac{5}{2})} = \frac{-2}{5}$$

$$A_2 = \lim_{z\to\frac{-3}{2}}(z+\frac{3}{2})\frac{z-3}{2(z-1)(z+\frac{3}{2})} = \lim_{z\to\frac{-3}{2}}\frac{z-3}{2(z-1)} = \frac{\frac{-9}{2}}{(2)(\frac{-5}{2})} = \frac{9}{10}$$

ดังนั้น $$\frac{z-3}{2z^2+z-3} = \frac{-2}{5}\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{9}{10}\left(\frac{1}{z+\frac{3}{2}}\right)$$

<u>ความมีอยู่จริงของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต</u> (Indefinite Integral)

<u>*ทฤษฎีบท 2.10*</u>

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว D แล้วจะมีอินทิกรัลไม่จำกัดเขต(หรือ เรียกว่า ปฏิยานุพันธ์) F(z) ของ f(z) โดยที่ $F'(z) = f(z)$ ซึ่ง F(z) นี้เป็น

ฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D และสำหรับทุกๆวิถีใน D ซึ่งโยงสองจุด z_0 และ z_1 ใดๆ ใน D เราได้ว่า อินทิกรัลของ f(z) จาก z_0 ไปยัง z_1 หาได้จาก

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0)$$

<u>ตัวอย่าง 2.42</u> จงหาค่าของ $\int_{-i}^{i} \frac{1}{z}\,dz$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากปฏิยานุพันธ์ของ $\frac{1}{z}$ คือ $\mathrm{Log}\, z$ และเนื่องจาก $\mathrm{Log}\, z$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด 0 และที่จุดบนแกนจริงทางลบ ดังนั้นถ้าเราให้ D คือระนาบเชิงซ้อนที่ไม่รวม 0 และจุดบนแกนจริงทางลบ เห็นได้ว่า D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวดังนั้น

$$\int_{-i}^{i} \frac{1}{z}\,dz = \mathrm{Log}\, z\Big|_{-i}^{i} = \mathrm{Log}(i) - \mathrm{Log}(-i) = \frac{\pi i}{2} - \left(-\frac{\pi i}{2}\right) = \pi i$$

2.4.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ (Derivative of Analytic Function)

<u>ทฤษฎีบท 2.11</u> (อนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์)

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D แล้วเราได้ว่า f(z) มีอนุพันธ์ทุกๆอันดับใน D ซึ่งอนุพันธ์นั้นๆ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D ด้วย ค่าของอนุพันธ์ที่จุด z_0 ใน D

ถูกกำหนดโดยสูตร

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

สูตรทั่วไปคือ

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad ,(n = 1, 2, \ldots)$$

ในที่นี้ C เป็นวิถีปิดเชิงเดียวใน D ซึ่งล้อมรอบ z_0 และจุดภายในทั้งหมดของ C อยู่ภายใน D เราอินทิเกรตทวนเข็มนาฬิการอบ C

<u>อสมการของโคชี</u> (Cauchy's Inequality)

<u>ทฤษฎีบท 2.12</u>

ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D ให้ C เป็นวงกลม $|z - z_0| = r$ ใน D และถ้า $|f(z)| \leq M$ บน C แล้วเราได้ว่า

$$\left|f^{(n)}z_0\right| \leq \frac{Mn!}{r^n} \qquad ,(n = 1, 2, \ldots)$$

<u>ทฤษฎีบท 2.13</u> (ทฤษฎีบทของมอรีรา) (Morera's Theorem)

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว D และถ้า

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

สำหรับทุกๆวิถีปิดใน C ใน D แล้ว f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D

<u>ทฤษฎีบท 2.14</u> (ทฤษฎีบทของลีอูวิลล์) (Liouville's Theorem)

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันทั่วและมีขอบเขตสำหรับทุกๆค่าของ z แล้ว f(z) จะต้องเป็นฟังก์ชันคงตัว

<u>ทฤษฎีบท 2.15</u> (ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต) (The Fundamental Theorem of Algebra)

ถ้า p(z) เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดีกรี $n \geq 1$ แล้วจะต้องมีอย่างน้อย 1 ค่าของ z ซึ่ง p(z) = 0 (หรืออาจกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า p(z) จะต้องมีศูนย์ (zero) อย่างน้อย 1 ศูนย์)

<u>ทฤษฎีบท 2.16</u> (Leibniz's Rule)

ถ้าโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว D และ $I : a \leq t \leq b$ เป็นขอบเขตของจำนวนจริง f(z,t) และ $f_z(z,t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุกๆค่าของ z ใน D และทุกๆค่า t ใน I แล้ว

$$F(z) = \int_a^b f(z,t)\,dt$$

วิเคราะห์สำหรับ z ใน D และ

$$F'(z) = \int_a^b f_z(z,t)\ dt$$

<u>ทฤษฎีบท 2.17</u> (maximum modulus principle)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และไม่เป็นฟังก์ชันคงตัว ในโดเมน D แล้ว $|f(z)|$ จะไม่มีค่าสูงสุดใน D หมายความว่า ไม่มีจุด z_0 ในโดเมน D ซึ่ง $|f(z)| \le |f(z_0)|$ สำหรับทุก ๆ ค่า z ใน D

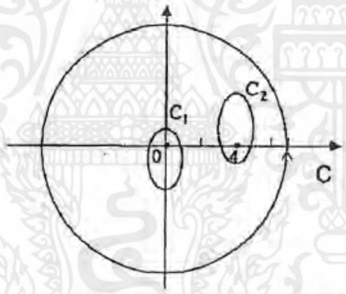
<u>ตัวอย่าง2.43</u> จงหาค่าของ $\oint_C \frac{1}{z^3-4z^2}dz$ เมื่อ C คือวงกลม $|z| = 8$ (ทวนเข็มนาฬิกา)

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากตัวถูกอินทิเกรต $\frac{1}{z^3-4z^2}$ มีจุดเอกฐานอยู่ที่ค่า z

ซึ่ง $z^3-4z^2 = z^2(z-4) = 0$ จะได้ $z = 0, 4$

ให้ C_1 และ C_2 เป็นวิถีปิดเชิงเดียว ที่ล้อมรอบจุดเอกฐาน $z = 0$, $z = 4$ ตามลำดับ

ซึ่ง C_1 , C_2 อยู่ภายใน C และไม่ตัดกัน โดยมีทิศทางดังรูป



รูปที่ 2.31 วงกลม C โดยมีวิถีปิดเชิงเดียว C_1 , C_2 อยู่ภายใน C และไม่ตัดกัน

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{1}{z^3-4z^2}dz &= \oint_C \frac{1}{z^3-4z^2}dz + \oint_C \frac{1}{z^3-4z^2}dz \\
&= \oint_C \frac{\frac{1}{z-4}}{z^2}\ dz + \oint_C \frac{\frac{1}{z^2}}{z-4}\ dz \\
&= \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z-4}\right)'\Bigg|_{z=0} + 2\pi i\left(\frac{1}{z^2}\right)\Bigg|_{z=4} \\
&= (2\pi i)(\frac{-1}{16}) + (2\pi i)(\frac{1}{16}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง 2.44</u> จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3}\,dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 1$ (ทวนเข็มนาฬิกา)

<u>วิธีทำ</u> จากการพิจารณาตัวอินทิแกรนด์ $\frac{z+1}{z^4+4z^3}$ พบว่ามีจุดเอกฐานที่ $z = 0$, $z = -4$ แต่ $z = 0$ เท่านั้นที่อยู่ภายในคอนทัวร์ปิด C ดังนั้น

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3}\,dz = \oint_C \frac{z+1}{z^3(z+4)}\,dz = \oint_C \frac{\frac{z+1}{z+4}}{z^3}\,dz$$

ถ้าเราให้ $f(z) = \frac{z+1}{z+4}$ อาศัยสูตรอินทิกรัลของโคชี

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{3\pi i}{32}$$

2.5 อนุกรม (Series)

2.5.1 ลำดับ และ อนุกรม (Sequence and Series)

ลำดับ (Sequence)

ลำดับอนันต์ เรียกสั้นๆ ว่า **ลำดับ** เขียนแทนด้วย $z_1, z_2, z_3, \ldots$ หรือ $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ หรือเขียนสั้นๆ เป็น $\{z_n\}$ เมื่อ $z_n = f(n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และเราเรียก z_n ว่า**พจน์ที่ n ของลำดับ** เมื่อ n = 1, 2, 3, ... เราอาจจะเขียนลำดับเป็น $z_0, z_1, z_2, \ldots$ หรือ $z_2, z_3, z_4, \ldots$ ก็ได้ กล่าวคือ ค่าของ n อาจเริ่มต้นที่ค่า n เท่าใดก็ได้

นิยาม 2.32

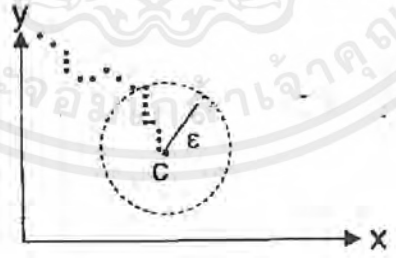
เรากล่าวว่า ลำดับ $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (Convergent Sequence) และมีค่า ลิมิต เท่ากับ c เขียนแทนด้วย

$$\lim_{n \to \infty} z_n = c$$

ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ เราสามารถหาจำนวนเต็มบวก N ได้ซึ่ง

$$|z_n - c| < \varepsilon \qquad \text{เมื่อ } n > N$$

ในทางเรขาคณิต z_n ทั้งหมดซึ่ง $n > N$ จะอยู่ในแผ่นกลมรัศมี ε จุดศูนย์กลาง c



รูปที่ 2.32 แผ่นกลมรัศมี ε จุดศูนย์กลาง c

นิยาม 2.33

ถ้า $\lim_{n \to \infty} z_n$ หาค่าไม่ได้ เรากล่าวว่า $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก (Divergent Sequence)

ทฤษฎีบท 2.18

ถ้าลำดับ $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว ค่าลิมิตของ z_n จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.19 (ลำดับของส่วนจริง และส่วนจินตภาพ)

ถ้า $z_n = x_n + iy_n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $c = a + ib$ แล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = c$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ และ $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$

อนุกรม (Series)

กำหนดลำดับ $z_1, z_2, z_3, \ldots$ เราสร้างลำดับของผลรวม

$$
\begin{aligned}
S_1 &= z_1 \\
S_2 &= z_1 + z_2 \\
&\ \ \vdots \\
S_n &= z_1 + z_2 + \ldots + z_n \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

ลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่ง $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \sum\limits_{m=1}^{n} z_m$ เราเรียกว่า **ลำดับของผลรวมย่อยของอนุกรมอนันต์** หรือ ของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ ถูกเรียกว่า **พจน์ของอนุกรม** และ z_n เราเรียกว่า **พจน์ที่ n ของอนุกรม**

อนุกรมลู่เข้า และ อนุกรมลู่ออก (Convergent Series and Divergent Series)

อนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ จะถูกเรียกว่า **อนุกรมลู่เข้า** ถ้าลำดับของผลรวมย่อยลู่เข้า กล่าวคือ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ หาค่าได้ S ถูกเรียกว่า **ผลรวมของอนุกรม** และเราเขียนแทนด้วย $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ อนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ จะถูกเรียกว่า **อนุกรมลู่ออก** ถ้าลำดับของผลรวมย่อยลู่ออก กล่าวคือ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.45

(ก) ลำดับ $\left\{\dfrac{i^n}{n}\right\} = \left\{i, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{i}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{i}{5}, -\dfrac{1}{6}, \ldots\right\}$

เป็นลำดับลู่เข้า เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \dfrac{i^n}{n} = 0$

(ข) ลำดับ $\left\{i^n\right\} = \{i, -1, -i, 1, \ldots$

เป็นลำดับลู่ออก เนื่องจาก z_n มีค่า $i, -1, -i, 1$

แต่ไม่เข้าใกล้ค่าคงที่ใดๆ เมื่อ n มีค่ามากๆ

ตัวอย่าง 2.46 จงหาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{6}{3^n} + \dfrac{2}{2^n}i\right)$ ลู่เข้า หรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าให้หาผลรวมด้วย

วิธีทำ พิจารณาลำดับของผลรวมย่อย ซึ่งมี

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{m=1}^{n}\frac{6}{3^m}+\frac{2}{2^m}i \\
&= \left(\frac{6}{3}+\frac{2}{2}i\right)+\left(\frac{6}{3^2}+\frac{2}{2^2}i\right)+\left(\frac{6}{3^3}+\frac{2}{2^3}i\right)+\ldots+\left(\frac{6}{3^n}+\frac{2}{2^n}i\right) \\
&= \left(\frac{6}{3}+\frac{6}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\ldots+\frac{6}{3^n}\right)+i\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\ldots+\frac{2}{2^n}\right) \\
S_n &= 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+i\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

สำหรับอนุกรม

$$\begin{aligned}
T_n &= 1+r+r^2+\ldots+r^{n-1} \\
\therefore\quad rT_n &= r+r^2+\ldots+r^n \\
\therefore\quad (1-r)\,T_n &= 1-r^n \\
\therefore\quad T_n &= \frac{1-r^n}{1-r}
\end{aligned}$$

จากผลนี้เราได้

$$S_n = 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right)+i\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \lim_{n\to\infty} S_n &= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right)+i\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \\
&= 2\left(\frac{3}{2}\right)+2i \;=\; 3+2i
\end{aligned}$$

หมายความว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{6}{3^n} + \dfrac{2}{2^n}i\right)$ ลู่เข้า และมีผลรวมเท่ากับ $3+2i$ กล่าวคือ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{3^n}+\frac{2}{2^n}i\right) = 3+2i$$

2.5.2 การทดสอบการลู่เข้า และการลู่ออกของอนุกรม

ทฤษฎีบท 2.20

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ ลู่เข้าแล้ว $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

ข้อควรจำ

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ แล้ว เราสรุปได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออก
2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ แล้ว เรายังสรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ทฤษฎีบท 2.21 *(หลักการลู่เข้าของโคชีสำหรับอนุกรม)*

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ ค่า $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ (ซึ่งจะมีค่าเล็กเท่าใดก็ได้) เราสามารถหาค่า N (โดยปกติแล้วจะขึ้นอยู่กับค่า ε) ซึ่ง $\left|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}\right| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $n > N$ และ $p = 1, 2, 3, \ldots$

การลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข
(Absolute Convergent and Conditional Convergent)

นิยาม 2.34

เรากล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์** (Absolute Convergent Series) ถ้าอนุกรมของค่าสมบูรณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

<u>*นิยาม 2.35*</u>

เรากล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข** (Conditional Convergent Series) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

<u>*ทฤษฎีบท 2.22*</u>

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ลู่เข้า แล้วเราได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าเช่นกัน

<u>*ทฤษฎีบท 2.23*</u> *(การทดสอบแบบเปรียบเทียบสำหรับการลู่เข้า) (Comparison Test)*

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ ถูกกำหนดให้ และเราสามารถหาอนุกรมลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots$ และ b_n เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เป็นลบ ซึ่ง $|z_n| \le b_n$ สำหรับ n= 1,2,3, ... แล้วเราได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และเป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ด้วย

<u>ข้อควรจำ</u>

1. สำหรับอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก และถ้า $|z_n| \ge b_n$ ทุกๆค่าของ n = 1, 2, 3, ... แล้วเราได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ลู่ออก แต่ก็บอกไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออก หรือลู่เข้า ต้องใช้การทดสอบวิธีอื่น
2. อนุกรมที่นำมาเปรียบเทียบได้ดี คือ อนุกรมเรขาคณิต ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>*ทฤษฎีบท 2.24*</u> *(อนุกรมเรขาคณิต) (Geometric Series)*

อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \ldots$ ลู่เข้าหาผลรวม $\frac{1}{1-q}$ ถ้า $|q| < 1$ และลู่ออก ถ้า $|q| \ge 1$

ทฤษฎีบท 2.25 (*การทดสอบแบบอัตราส่วน*) (*Ratio Test*)

สมมติว่า $z_n \neq 0$ สำหรับทุกๆค่า n = 1, 2, 3, ... และถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$ แล้ว

ก) ถ้า $L < 1$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์

ข) ถ้า $L > 1$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออก

ค) ถ้า $L = 1$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ อาจจะลู่เข้า หรืออาจจะลู่ออกก็ได้

กล่าวคือ การทดสอบแบบอัตราส่วนหาข้อสรุปไม่ได้ ต้องใช้การทดสอบแบบอื่น

ทฤษฎีบท 2.26 (*การทดสอบแบบราก*) (*Root Test*)

สมมติว่า $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$

ก) ถ้า $L < 1$ แล้ว เราได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์

ข) ถ้า $L > 1$ แล้ว เราได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออก

ค) ถ้า $L = 1$ แล้ว เราได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ อาจจะลู่เข้า หรือลู่ออกก็ได้

กล่าวคือ การทดสอบแบบรากนี้หาข้อสรุปยังไม่ได้ ต้องใช้การทดสอบแบบอื่น

ตัวอย่าง2.47 จงหาลิมิตของลำดับ $\{S_n\}$ ซึ่งกำหนดดังนี้ $1,\frac{3}{2},\frac{7}{3},\frac{1}{4},\frac{6}{5},\frac{13}{6},\frac{1}{7},\frac{9}{8},\frac{28}{9},\ldots$
และจงหาว่าลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ จากโจทย์เราได้ว่า

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & ; \quad n = 1,4,7,\ldots \\ \dfrac{n+1}{n} & ; \quad n = 2,5,8,\ldots \\ \dfrac{2n+1}{n} & ; \quad n = 3,6,9,\ldots \end{cases}$$

เห็นว่า จุดลิมิต คือ 0,1,2

$\therefore$ ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 2.48 จงหาว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7+2i)^n}{n!}$ ลู่เข้า หรือลู่ออก

วิธีทำ $\therefore \quad \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{|7+2i|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|7+2i|^n} = \frac{|7+2i|}{n+1}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7+2i}{n+1} = 0 < 1$$

อาศัยการทดสอบแบบเศษส่วน สรุปว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(7+2i)^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.5.3 **อนุกรมกำลัง** (Power Series)

อนุกรมกำลังรอบจุด z_0 คืออนุกรมในกำลังของ $z-z_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

โดยที่ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน $a_0, a_1, a_2, \dots$ เป็นค่าคงตัวซึ่งเรียกว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรม** และ z_0 เป็นค่าคงตัวเช่นกัน ซึ่งเรียกว่า **จุดศูนย์กลางของอนุกรม**

ถ้า $z_0 = 0$ เราได้อนุกรมกำลังรอบจุด 0 ซึ่งเป็นอนุกรมในกำลังของ z ซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

นิยาม 2.36

ก) อนุกรมกำลัง จะถูกกล่าวว่า ลู่เข้าที่ z ถ้าอนุกรมกำลังที่จำนวนเชิงซ้อน z คือ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ลู่เข้า

ข) อนุกรมกำลัง จะถูกกล่าวว่า ลู่ออกที่ z ถ้าอนุกรมกำลังที่จำนวนเชิงซ้อน z คือ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ลู่ออก

ค) อนุกรมกำลัง จะถูกกล่าวว่า ลู่เข้าในเซต D ในระนาบเชิงซ้อน ถ้าอนุกรมกำลังนั้นลู่เข้า สำหรับทุกๆจำนวนเชิงซ้อน z ใน D

นิยาม 2.37

เรากล่าวว่า อนุกรมกำลัง ลู่เข้าไปที่ f(z) ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{n} a_m (z - z_0)^m = f(z)$$

ในกรณีเช่นนี้เราเขียน

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z)$$

นิยาม 2.38

เรากล่าวว่า อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (z - z_0)^n \right| \quad \text{ลู่เข้า}$$

หรือ ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ แล้วจะได้ว่า ตัวมันเองลู่เข้าด้วย

นิยาม 2.39

เราเรียก $R > 0$ ว่าเป็น รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ก็ต่อเมื่อ อนุกรมดังกล่าว ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ สำหรับทุกๆค่า z ซึ่ง $|z - z_0| < R$ และจะลู่ออก สำหรับทุก ๆ ค่า z ซึ่ง $|z - z_0| > R$ เราอาจกล่าวได้ว่า $\{z = |z - a| < R$ เป็นบริเวณที่ใหญ่ที่สุดที่อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ จะลู่เข้า และเรียกบริเวณนี้ว่า **บริเวณของการลู่เข้า** (Region of Convergence)

\# ***หมายเหตุ*** \#

1. *ถ้าอนุกรม* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *ลู่เข้าเฉพาะที่* $z - z_0$ *เท่านั้น เราถือว่า* $R = 0$
2. *ถ้าอนุกรม* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *ลู่เข้าสำหรับทุกๆค่าของ* z *เราจะถือว่า* $R = \infty$

เราอาจหา R ได้ 2 ทาง กล่าวคือ

1. ถ้า $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ หาค่าได้ จะได้ว่า $R = \frac{1}{L}$

2. ถ้า $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ หาค่าได้ จะได้ว่า $R = \frac{1}{L}$

หมายเหตุ # 1. ถ้า $L = 0$ จะถือว่า $R = \infty$

2. ถ้า $L = \infty$ จะถือว่า $R = 0$

ทฤษฎีบท 2.27 (รัศมีของการลู่เข้า R) (Radius of Convergence)

สมมติว่า $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ หาค่าได้ หรือ $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ หาค่าได้ เราจะได้

ก) ถ้า $L = \infty$ แล้ว $R = 0$ และอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ลู่เข้าเฉพาะที่ $z- z_0$ เท่านั้น

ข) ถ้า $L = 0$ แล้ว $R = \infty$ และอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ลู่เข้าทุกๆค่าของ z

ค) ถ้า $0 < L < \infty$ แล้ว $R = \frac{1}{L}$ และลู่เข้าทุกๆค่า z ซึ่ง $|z-z_0| < R$ และจะลู่ออกสำหรับทุก ๆ ค่า z ซึ่ง $|z-z_0| > R$ ที่จุดซึ่ง $|z- z_0| = R$ อนุกรมอาจลู่เข้า หรือลู่ออก

ทฤษฎีบท 2.28 (ทฤษฎีบทของอาดามาด์)

สมมติลำดับ $\left\{ |a_n|^{\frac{1}{n}} \right\}$ ไม่ลู่เข้า

1. ถ้าลำดับดังกล่าวมีขอบเขตแล้ว รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ กำหนดโดย $R = \frac{1}{M}$ เป็นค่าที่มากที่สุดของจุดลิมิตของลำดับย่อย $\left\{ |a_n|^{\frac{1}{n}} \right\}$
2. ถ้าลำดับดังกล่าวไม่มีขอบเขตแล้ว $R = 0$ และลำดับลู่เข้าที่ $z- z_0$ เท่านั้น

อนุกรมแมคลอรีน (Maclaurin Series)

จากสูตรอินทิกรัลของโคชี

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \ldots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + R_n(z)$$

เนื่องจากฟังก์ชันวิเคราะห์ f(z) มีอนุพันธ์ทุกๆอันดับ ดังนั้นเราสามารถให้ n ใหญ่เท่าใดก็ได้ ถ้าเราให้ n เข้าใกล้ ∞ เราได้รับอนุกรมกำลังดังนี้

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots$$

หรือ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

ถ้า $z_0 = 0$ อนุกรมที่ได้จะเรียกว่า **อนุกรมแมคลอรีนของ** f(z) ซึ่งอยู่ในรูป

$$\boxed{f(z) = f(0) + f'(0)z + f''(0)z^2 + \ldots \quad \text{หรือ} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z)^n}$$

<u>ตัวอย่าง 2.49</u> จงหาผลรวมของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ , |z| < 1$

<u>วิธีทำ</u> $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

พิจารณาผลรวม n พจน์

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} z^m = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$$

$$\therefore \quad z S_n = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n+1}$$

ดังนั้น

$$S_n - z S_n = 1 - z^{n+1}$$

$$(1-z) S_n = 1 - z^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z \cdot z^n}{1-z}$$

ถ้า $|z| < 1$ แล้ว $\lim_{n \to \infty} z^n = 0$

หมายความว่า $\lim_{n \to \infty} S^n = \frac{1}{1-z} \ , \forall z$ ซึ่ง $|z| < 1$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ , \forall z$ ซึ่ง $|z| < 1$

<u>ตัวอย่าง 2.50</u> จงหาบริเวณที่ลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{\ln(n+2)}$

<u>วิธีทำ</u>

$$a_n = \frac{2^n}{\ln(n+2)}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{\ln(n+3)}\cdot\frac{\ln(n+2)}{2^n}\right|$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+3}}$$

ดังนั้น

$$L = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+3}} = (2)(1) = 2$$

$\therefore \quad R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$ สรุปได้ว่าบริเวณของการลู่เข้า คือ $|z| < \frac{1}{2}$

2.5.4 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

สำหรับอนุกรมกำลัง ที่มีรัศมีการลู่เข้า $R\,(R>0)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ในหัวข้อนี้เราจะแสดงว่า สำหรับฟังก์ชันวิเคราะห์ใดๆ เราสามารถแทนด้วย อนุกรมกำลังที่เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์**

<u>ทฤษฎีบท 2.29</u> *(ทฤษฎีบทของเทเลอร์)*

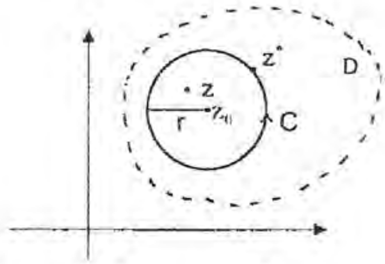
ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D และให้ $z\text{-}z_0$ เป็นจุดใดๆ ใน D แล้ว f(z) จะถูกแทนด้วย อนุกรมกำลัง จุดศูนย์กลางที่ z_0 อนุกรมนี้อยู่ในรูป

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{เมื่อ} \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

หรือ

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

การแทนนี้สมเหตุสมผล ในแผ่นกลมเปิดใหญ่ จุดศูนย์กลาง z_0 ถูกบรรจุใน D หรือ $|z-z_0| < r$



รูปที่ 2.33 แผ่นกลมเปิดใหญ่ จุดศูนย์กลาง z_0 ถูกบรรจุใน D หรือ $|z - z_0| < r$

ตัวอย่าง2.51 จงกระจาย $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ ออกเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ รอบจุด $z = 0$ พร้อมทั้งหาบริเวณที่อนุกรมลู่เข้ามาด้วย

วิธีทำ

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad , \qquad f(0) = 1$$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad , \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(z) = \frac{2!}{(1-z)^3} \qquad , \qquad f''(0) = 2!$$

$$f'''(z) = \frac{3!}{(1-z)^4} \qquad , \qquad f'''(0) = 3!$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+}} \qquad , \qquad f^{(n)}(0) = n!$$

แทนค่า $f(0), f'(0), \ldots$ ลงในอนุกรมแมคลอรีน ดังนี้ $f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$$\therefore \quad L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

$$\therefore \quad R = \frac{1}{L} = 1$$

ดังนั้น บริเวณที่ลู่เข้า ก็คือ $|z| < 1$

2.5.5 อนุกรมโลรองต์ (Laurent Series)

ในการประยุกต์ บางครั้งจำเป็นต้องกระจายฟังก์ชันรอบจุดเอกฐาน ซึ่งทฤษฎีบทของโลรองต์ ช่วยได้ อนุกรมที่ได้เรียกว่า **อนุกรมโลรองต์** ซึ่งประกอบด้วยกำลังเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบของ $z\text{-}z_0$ ซึ่งจะลู่เข้าสู่ f(z) ในบริเวณวงแหวน ซึ่ง f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ทฤษฎีบท 2.30 *(ทฤษฎีบทของโลรองต์)*

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนสองวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน c_1 และ c_2 ซึ่งจุดศูนย์กลางร่วมกัน คือ z_0 และบริเวณภายในวงแหวนระหว่างวงกลมสองวงนั้นแล้ว f(z) สามารถถูกแทนได้ด้วย อนุกรมโลรองต์ ดังนี้

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \\ &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots \end{aligned}$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ของ อนุกรมโลรองต์ นี้ ถูกกำหนดโดยอินทิกรัล

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}} dz^* \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^*-z_0)^{n-1} f(z^*)\, dz^* \end{aligned}$$

แต่ละอินทิกรัล เป็นการอินทิเกรตทวนเข็มนาฬิกา รอบวิถีปิดเชิงเดียว c ใดๆ ซึ่งวางอยู่ในวงแหวน และล้อมรอบวงกลมใน ดังรูป

รูปที่ 2.34 วิถีปิดเชิงเดียว c ใดๆ ซึ่งวางอยู่ในวงแหวน และล้อมรอบวงกลมใน

ตัวอย่าง2.52 จงหาอนุกรมโลรองต์ของฟังก์ชัน $\frac{1}{1-z}$ รอบจุด 0 ลู่เข้าในบริเวณ $|z| > 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \\ &= -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right) \quad , \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots \qquad , \quad |z| > 1$$

2.5.6 จุดศูนย์และภาวะเอกฐาน (Zeros and Singularity)

จุดศูนย์ (Zeros)

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D และเป็นศูนย์ ที่ $z = z_0$ เราเรียก $z = z_0$ ว่าเป็น **จุดศูนย์ของ f(z)** และถ้า $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ แต่ $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ เราเรียก z_0 ว่าเป็น **ศูนย์อันดับ n (Zero of order n) ของ f(z)**

ภาวะเอกฐาน (Singularity)

ถ้า f(z) ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใด เราเรียกจุดนั้นว่าเป็น **จุดเอกฐาน (Singular Point) ของ f(z)** หรือกล่าวว่า f(z) มี **ภาวะเอกฐาน (Singularity)** ที่จุดนั้น

เราจะเรียก $z=z_0$ ว่าเป็น **จุดเอกฐานแบบเอกเทศ (Isolated singular point)** ก็ต่อเมื่อ z_0 เป็นจุดเอกฐานของ f(z) และ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์รอบๆจุด z_0 กล่าวคือมี $r > 0$ ซึ่ง f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ สำหรับทุกๆค่า z ซึ่ง $0 < |z - z_0| < r$

ถ้า f(z) มีจุดเอกฐานแบบเอกเทศ ที่จุด $z=z_0$ จากทฤษฎีบทของโลรองต์ เราได้ว่า จะมี $r > 0$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (2.8)$$

ซึ่งอนุกรมโลรองต์ทางขวามือ จะลู่เข้าสู่ f(z)สำหรับทุกๆค่า z ซึ่ง $0 < |z - z_0| < r$ และจะเรียกอนุกรมท้ายสุด ใน(1) คือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ ว่าเป็น ส่วนมุขสำคัญของ f(z) ใกล้ $z=z_0$

หากมีจำนวนเต็มบวก $m \geq 1$ ซึ่ง $b_m \neq 0$ แต่ $b_n = 0$ สำหรับทุกๆค่า $n > m$ แล้ว อนุกรมโลรองต์ ใน(2.8) กลายเป็น

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \qquad (2.9)$$

ซึ่งนั่นก็หมายความว่า ส่วนมุขสำคัญของ f(z) เป็นอนุกรมจำกัด ในกรณีนี้เรียก $z=z_0$ ว่าเป็น **โพลของ f(z)** และเรียก m ว่าเป็น **อันดับของโพล**

 # หมายเหตุ #

*เราเรียก โพลของอันดับที่หนึ่ง (Pole of first order) ว่า **โพลเชิงเดียว (Simple pole)***

*ถ้า z_0 เป็น เอกฐานเอกเทศของ f(z) และถ้าเรากระจาย f(z) ออกเป็น อนุกรมโลรองต์ รอบจุด z_0 และลู่เข้าภายในบริเวณ $0 < |z - z_0| < r$ แล้ว ส่วนที่เป็น ส่วนมุขสำคัญของ f(z) มีจำนวนพจน์เป็นจำนวนอนันต์ โดยที่สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในส่วนมุขสำคัญไม่เป็นศูนย์ในกรณีเช่นนี้เราเรียก z_0 ว่ามี **ภาวะเอกฐานหลัก (Essential singularity)***

นิยาม 2.40

เราจะบอกว่า f(z) มีภาวะเอกฐานที่ ∞ ก็ต่อเมื่อ $f\left(\frac{1}{z}\right)$ มีภาวะเอกฐานที่ z=0 และจะบอกว่า f(z) มีโพลอันดับ m ที่ ∞ ก็ต่อเมื่อ $f\left(\frac{1}{z}\right)$ มีโพลอันดับ m ที่ $z = 0$

นิยาม 2.41

ฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ ภาวะเอกฐานมีแต่ชนิดของโพลเท่านั้น เราเรียกฟังก์ชันนั้นว่า **ฟังก์ชันเมอโรมอร์ฟิค** (Meromorphic function)

ทฤษฎีบท 2.31

สมมติ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ตลอดย่านจุด z_0 ที่ไม่รวมจุด z_0 ; $0 < |z - z_0| < r$ แล้ว z_0 เป็นโพลอันดับ m ก็ต่อเมื่อ $(z-z_0)^m f(z)$ มีภาวะเอกฐานแบบขจัดได้ ที่จุด z_0 และ $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$

ตัวอย่าง2.53 กำหนดฟังก์ชัน $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)^3(z-1)}$ จงหาโพล และอันดับของโพล

วิธีทำ f(z) มีโพลเชิงเดียว ที่ $z = 0,1$

f(z) มีโพลอันดับ 3 ที่ $z = -1$

ตัวอย่าง 2.54 $f(z) = 2z + 6z^3$ มีโพลอันดับ 3 ที่ ∞

เพราะว่า $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{z} + \frac{6}{z^3} = \frac{2z^2 + 6}{z^3}$ มีโพลอันดับ 3 ที่ 0

2.6 เรซิดิว (Residues)

2.6.1 นิยามและความหมาย

จากหัวข้อที่แล้ว เราทราบว่า อนุกรมโลรองต์ของฟังก์ชันวิเคราะห์รอบจุดเอกฐานแบบเอกเทศ z_0 ลู่เข้าสู่ f(z) ในบริเวณ $0 < |z - z_0| < r$ อยู่ในรูป

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots$$

โดยที่ $b_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$ เราเรียก b_1 ว่า **เรซิดิว** (Residues) **ของ** f(z) ที่จุด $z = z_0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ หรือ $\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]$ จะได้

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 \quad \text{หรือ} \quad \operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = b_1$$

และจาก $b_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$ ทำให้ได้ว่า

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, b_1$$

ดังนั้น จะได้

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

<u>ตัวอย่าง2.55</u> จงหา $\oint_C z^3 e^{\frac{1}{z}}\,dz$ เมื่อ C คือ $|z| = 1$ (ทวนเข็ม)

<u>วิธีทำ</u>

$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{3!} + \ldots\right] \quad ; \left|\frac{1}{z}\right| < \infty$$

$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24z} + \ldots \quad ; 0 < |z| < \infty$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^3 e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{24} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{24}$$

$$\therefore \quad \oint_C z^3 e^{\frac{1}{z}}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} z^3 e^{\frac{1}{z}} = \frac{\pi i}{12}$$

2.6.2 **ทฤษฎีบทของเรซิดิว** (Residues's Theorem)

<u>ทฤษฎีบท 2.32</u>

ให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน และภายในเส้นโค้งปิดเชิงเดี่ยว C ยกเว้นที่จุดเอกฐาน $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ซึ่งเป็นจำนวนจำกัดภายใน C จะได้

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

เมื่อ C มีทิศทางบวก และเรียกทฤษฎีนี้ว่า **ทฤษฎีบทของโคชี** (Cauchy's Theorem)

<u>โพล</u> (Pole)

ถ้า $z = z_0$ เป็น singular point ของ f(z) และถ้า Laurent Series ของ f(z) รอบจุด z_0 $(0 < |z - z_0| < R)$ เป็นดังนี้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

ถ้า principal part ของอนุกรมโลรองต์ มีจำนวนเทอมจำกัด กล่าวคือ อนุกรมโลรองต์ที่ลู่เข้า ในบริเวณ $0 < |z - z_0| < R$ อยู่ในรูป

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

หรือ

$$f(z) = \left[a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots\right] + \left[\frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}\right]$$

โดยที่ $b_m \neq 0$ ในกรณีเช่นนี้ กล่าวว่า $z = z_0$ เป็น Pole of order m **ของ** f(z) ถ้า $m = 1$ เราเรียก $z = z_0$ ว่า **โพลเชิงเดี่ยว (Simple Pole)** หรือ Pole of order 1

ถ้า $z = z_0$ เป็นโพลหลายเชิง หรือ Pole of order m อนุกรมโลรองต์รอบจุด $z = z_0$ ที่ลู่เข้า ในบริเวณ $0 < |z - z_0| < R$ มีรูปแบบเป็น

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

ถ้า $z = z_0$ เป็น Simple Pole เราจะได้ อนุกรมโลรองต์ อยู่ในรูป

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)}$$

<u>การหาเรซิดิวที่โพลของ f(z)</u>

<u>*กรณีที่ 1*</u>

ถ้า $z = z_0$ เป็น Pole of order m จะได้ อนุกรมโลรองต์ ในรูป

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

เอา $(z - z_0)^m$ คูณตลอด แล้วหาอนุพันธ์ $m - 1$ ครั้ง แล้ว take limit $z \rightarrow z_0$ ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} (z - z_0)^m f(z) = (m - 1)!\, b_1$$

จะได้

$$b_1 = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} (z - z_0)^m f(z)$$

<u>*กรณีที่ 2*</u>

ถ้า $z = z_0$ เป็น simple pole of f(z) จะได้ อนุกรมโลรองต์ ในรูป

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)}$$

เอา $z - z_0$ คูณตลอด จะได้

$$(z - z_0) f(z) = a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \ldots + b_1$$

take limit $z \rightarrow z_0$ ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \quad = \quad \lim_{z \to z_0} \left[a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \ldots + b_1 \right.$$

\# *<u>ข้อสังเกต</u>* \# *ถ้า* $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = A \neq 0$ *เราจะได้ว่า* $z = z_0$ *เป็น Pole of order m ของ f(z) ถ้า m = 1 เราจะได้* $z = z_0$ *เป็น Simple pole ของ f(z)*

ในกรณีที่ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ เราจะได้ว่า ถ้า $p(z_0) \neq 0$ แต่ $q(z_0) = 0$ และถ้า $q'(z_0) \neq 0$ แล้ว เราได้ว่า $z = z_0$ เป็น simple pole ของ f(z) และจะได้

$$\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) \quad = \quad \left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z = z_0} \quad = \quad \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

<u>ตัวอย่าง2.56</u> จงหาเรซิดิวของ $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$

<u>วิธีทำ</u> singular point $\rightarrow$ $\sin z = 0 = \sin n\pi$

$$z = n\pi \qquad ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ทดสอบ $z = 0$

$$p(z) = e^z \quad , \quad q(z) = \sin z$$

$$p(0) = e^0 = 1 \neq 0 \quad , \quad q(0) = \sin 0 = 0$$

$$q'(z) = \cos z \quad \rightarrow \quad q'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$$

$\therefore \quad z = 0$ เป็น simple pole

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin z} \quad = \quad \left.\frac{e^z}{\cos z}\right|_{z=0} \quad = \quad 1$$

<u>ตัวอย่าง2.57</u> จงหาค่าของ $\int_C \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\, dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 2$

<u>วิธีทำ</u> $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ยกเว้นที่จุด $z = 1, -1$

ฟังก์ชันนี้มี simple pole ที่จุด $z_1 = 1$ และ pole of order 2 ที่จุด $z_2 = -1$

จาก Residue Theorem

$$\int_C \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\, dz \quad = \quad 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z = z_k} f(z)$$

ที่ z = 1 จะได้

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{g(1)}{0!} \qquad \text{โดยที่} \quad g(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$$

จะได้ $g(1) = \frac{1}{4}$ ดังนั้น $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{4}$

ที่ z = -1 จะได้

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{g'(-1)}{1!} \quad \text{โดยที่} \quad g(z) = \frac{z}{(z-1)} \ , \ g'(z) = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

จะได้ $g'(-1) = -\frac{1}{4}$ ดังนั้น $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{4}$

จะได้ $$\int_C \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\, dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

2.6.3 อินทิกรัลของค่าจริงแบบจำกัดเขตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(Definite Integral of Trigonometric Function)

เราสามารถใช้ ทฤษฎีบทเรซิดิว ช่วยในการหาค่าอินทิกรัลของค่าจริงแบบจำกัดเขตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในรูป

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \qquad (2.10)$$

โดยที่ R เป็นฟังก์ชันตรรกยะของ $\cos\theta, \sin\theta$

ให้ $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

จาก

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad , \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

แปลงตัวแปรบนช่วง $[0,2\pi]$ ให้เป็นตัวแปร z บนวงกลม $|z| = 1$

จะได้

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

นำไปแทนค่า ในสมการ (2.10) จะได้

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta = \oint_{C:|z|=1} f(z)\ dz$$

เมื่อ $f(z) = \frac{1}{iz} R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$ และ C เป็นวงกลม 1 หน่วยทวนเข็มนาฬิกา และจาก ทฤษฎีบท เรซิดิว เราได้ว่า

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta = 2\pi i\ \text{(ผลบวกของเรซิดิวของf(z)ที่โพลทุกโพลอยู่ในวงกลม1หน่วย)}}$$

และ จะได้ว่า

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos n\theta, \sin n\theta)\ d\theta = 2\pi i\ \text{(ผลบวกของเรซิดิวของF(z)ที่โพลทุกโพลอยู่ในวงกลม1หน่วย)}}$$

เมื่อ $F(z) = \frac{1}{iz} R\left[\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right), \frac{1}{2i}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)\right]$

<u>ตัวอย่าง2.58</u> จงหาค่าของ $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4}+\sin\theta}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $z = e^{i\theta}$ จะได้ $\sin z = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4}+\sin\theta} = 4\int_C \frac{dz}{2z^2+5iz-2} \quad \text{เมื่อ } C:|z|=1 \text{ มีทิศทางบวก}$$

$$= 2\int_C \frac{dz}{(z+2i)(z+\frac{1}{2}i)}$$

$f(z) = \frac{1}{(z+2i)(z+\frac{1}{2}i)}$ มี simple pole ที่จุด $z_1 = -2i$, $z_2 = -\frac{1}{2}i$

จะเห็นว่า จุด z_2 อยู่ใน C แต่จุด z_1 ไม่อยู่ใน C

จาก ทฤษฎีบท เรซิดิว จะได้

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4}+\sin\theta} = 2\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)$$

ที่ $z = z_2$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{g(z_2)}{0!} \qquad \text{โดยที่} \quad g(z) = \frac{1}{z+2i}$$

ดังนั้น

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{z_2+2i} = \frac{2}{3i}$$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4}+\sin\theta} = 2\cdot 2\pi i\cdot\frac{2}{3i} = \frac{8\pi}{3}$$

2.6.4 อินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันตรรกยะ

(Improper Integral of Rational Function)

ถ้า $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ โดยที่ p(x) , q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว เราเรียก f(x) ว่าเป็น **ฟังก์ชันตรรกยะ** โดยเราจะหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ เมื่อ f(x) เป็นฟังก์ชันตรรกยะ จากทฤษฎีบท ต่อไปนี้

<u>*ทฤษฎีบท 2.33*</u>

ให้ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ โดยที่ p(x) , q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม ที่มีดีกรี m.n ตามลำดับ ถ้า $q(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x และ $n \geq m+2$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

ในที่นี้ $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k$ เป็น pole of f(z) ที่อยู่เหนือแกน x (Upper-half plane)

<u>ตัวอย่าง2.59</u> จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$ มีโพลอันดับ 2 ที่จุด $z_1 = i$, $z_2 = -i$

จุด $z_1 = i$ อยู่บนครึ่งระนาบส่วนบน $y > 0$

จุด $z_2 = -i$ ไม่อยู่บนครึ่งระนาบส่วนบน $y > 0$

จาก ทฤษฎีบท จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \quad = \quad 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)$$

ที่ $z = i$ จะได้

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \quad = \quad \frac{g'(i)}{1!} \qquad \text{โดยที่} \quad g(z) \quad = \quad \frac{1}{(z+i)^2}$$

$$g'(z) \quad = \quad \frac{-2(z+i)}{(z+1)^4} \quad , \quad g'(i) \quad = \quad -\frac{i}{4}$$

ดังนั้น
$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \quad = \quad -\frac{i}{4}$$

$$\therefore \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad = \quad 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) \quad = \quad \frac{\pi}{2}$$

2.6.5 อินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(Improper Integral of Trigonometric Function)

จาก

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iwx}\ dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\cos wx + i \sin wx)\ dx \qquad (w > 0)$$

$$= \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx\ dx \ + \ i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx\ dx \qquad (w > 0)$$

ดังนั้นจะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx\ dx \quad = \quad \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iwx}\ dx \qquad (w > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx\ dx \quad = \quad \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iwx}\ dx \qquad (w > 0)$$

ทฤษฎีบท 2.34

ให้ $p(x)$, $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งมีดีกรีเป็น m,n ตามลำดับ โดยที่ $n \geq m+1$ และ $q(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x ถ้า $w > 0$ และ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iwx}\ dx \quad = \quad 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\,e^{iwz}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx \; dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\, e^{iwz}\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx \; dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\, e^{iwz}\right\}$$

ในที่นี้ $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k$ เป็น pole of $f(z)e^{iwz}$ ที่อยู่เหนือแกน x

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 *(Jordan's Lemma)*

ให้ p(z) , q(z) เป็นฟังก์ชันพหุนาม ที่มีดีกรี m,n ตามลำดับ โดยที่ $n \geq m+1$ ถ้า C_R เป็นครึ่งวงลมด้านบน และ $z = Re^{i\theta}$ สำหรับ $0 \leq \theta \leq \pi$ แล้ว

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}\, p(z)}{q(z)} \, dz = 0$$

ตัวอย่าง2.60 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} \, dx$

วิธีทำ $\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

$f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$ และ มี simple pole ที่จุด $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$

จุด z_1 อยู่บนระนาบครึ่งวงกลมด้านบน

จุด z_2 ไม่อยู่บนระนาบครึ่งวงกลมด้านบน

จาก ทฤษฎีบท จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx \; dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\, e^{iwz}\right\}$$

ที่ $z = 2i$ จะได้

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)\, e^{iz} = \lim_{z\to 2i} \frac{z\, e^{iz}}{z+2i} = \frac{2i\, e^{-2}}{4i} = \frac{1}{2e^2}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4} \, dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i\left(\frac{1}{2e^2}\right)\right\} = \frac{\pi}{e^2}$$

2.6.6 ค่ามุขสำคัญ (Principal Value)

นิยาม 2.42

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ทุก ๆ ค่า x ในช่วง [a,b] ยกเว้นที่จุด x = b โดยที่ a < b < c และ ถ้า $\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ กับ $\int_{b+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx$ หาค่าได้ทุก ๆ ค่า $\varepsilon > 0$ แล้ว ค่ามุขสำคัญแบบโคชี ของ f บน [a,c] ถูกนิยามโดย

$$\text{P.V.} \int_{a}^{c} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{b+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx \right]$$

ทฤษฎีบท 2.35

ให้ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ โดยที่ p(x) , q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม ที่มีดีกรี m,n ตามลำดับ โดยที่ $n \geq m+2$ ถ้า f(z) มี simple pole ที่จุด $t_1, t_2, \ldots, t_l$ บนแกน x แล้ว

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) + \pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname*{Res}_{z=t_j} f(z)$$

โดยที่ $z_1, z_2, \ldots, z_k$ เป็นโพลของ f ที่อยู่บน Upper-half plane

หรือ

$$\boxed{\begin{aligned} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx &= 2\pi i\ (\text{ผลบวกของเรซิดิวของ } f(z) \text{ เหนือแกน } x) \\ &\quad + \pi i\ (\text{ผลบวกของเรซิดิวของ } f(z) \text{ บนแกน } x) \end{aligned}}$$

ทฤษฎีบท 2.36

ให้ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ โดยที่ p(x) , q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม ที่มีดีกรี m,n ตามลำดับ โดยที่ $n \geq m+2$ ถ้า f(z) มี simple pole ที่จุด $t_1, t_2, \ldots, t_l$ บนแกน x , w > 0 แล้ว

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iwx}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\,e^{iwx} + \pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname*{Res}_{z=t_j} f(z)\,e^{iwx}$$

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx = \text{Re}\left\{ \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iwx}\,dx \right\}$$

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx \; dx \;=\; \text{Im}\left\{\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iwx} \; dx\right\}$$

<u>ตัวอย่าง2.61</u> จงหาค่าของ $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx$

<u>วิธีทำ</u> $$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)} = \frac{1}{z^3 - z^2 + 4z - 4}$$

มี simple pole ที่จุด $z_1 = 1$ บนแกน x และ pole of order 2 ที่จุด $z_2 = 2i$ เหนือแกน x

ที่ $z = z_1$ จะได้

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)\, e^{iz} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)e^{iz}}{(z-1)(z^2+4)} = \frac{\cos 1 + i\sin 1}{5}$$

ที่ $z = z_2$ จะได้

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)\, e^{iz} = \left.\frac{e^{iz}}{3z^2 - 2z + 4}\right|_{z=2i} = \frac{-2+i}{20\, e^2}$$

จาก ทฤษฎีบท จะได้

$$\begin{aligned}
\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx &= \text{Im}\left\{\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iwx} \; dx\right\} \\
&= \text{Im}\left\{2\pi i\left(\frac{-2+i}{20\, e^2}\right) + \pi i\left(\frac{\cos 1 + i\sin 1}{5}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - \frac{1}{e^2}\right)
\end{aligned}$$

2.7 การส่งคงแบบ และการประยุกต์ (Conformal Mapping and Application)

2.7.1 นิยามและความหมาย

นิยาม 2.43

ถ้า $w = f(z)$ analytic บน set D และ $f'(z) \neq 0$ ที่ $\forall z \in D$ เรากล่าวว่า $w = f(z)$ เป็น **Conformal Mapping** บน set D

การส่งแบบรักษามุม (Angle – Preserving Mapping)

นิยาม 2.44

การส่ง $w = f(z)$ จะถูกเรียกว่าเป็นการส่งคงแบบที่ z_0 $w_0 = f(z_0)$ และส่งเส้นโค้งเรียบใด ๆ c_1 และ c_2 ที่ผ่านจุด z_0 ซึ่งตัดกันเป็นมุม θ จะถูกส่งไปเป็น 2 เส้นโค้ง c_1' , c_2' ซึ่งผ่านจุด w_0 จะตัดกันเป็นมุม θ เช่นกัน

ทฤษฎีบท 2.37

ถ้า $w = f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D และ $f'(z_0) \neq 0$ $(z_0 \in D)$ แล้ว เราจะได้ว่า $w = f(z)$ เป็นการส่งคงแบบ ที่จุด $z = z_0$

\# *หมายเหตุ* \# *จุด z ที่ทำให้ $f'(z) = 0$ เราเรียกว่า* ***จุดวิกฤต (critical point)***

ตัวอย่าง2.62 จงหาจุด critical point ของ $f(z) = z^2$

วิธีทำ critical point คือจุดที่ทำให้ $f'(z) = 0$

จาก $f(z) = z^2$

$$f'(z) = 2z$$

$$f'(z) = 2z = 0$$

$$\therefore \quad z = 0$$

$\therefore$ critical point คือ $z = 0$

ตัวอย่าง2.63 จงหาว่า การส่ง $w = z^2 + 5z$ มีจุดใดบ้างที่ทำให้ w ไม่เป็นการส่งคงแบบ

วิธีทำ $f(z) = z^2 + 5z$

$$f'(z) = 2z + 5$$

จากทฤษฎีบท จุดที่ทำให้ w ไม่เป็นการส่งคงแบบ คือจุดที่ทำให้ $f'(z) = 0$

$$\therefore \quad f'(z) = 2z+5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{-5}{2}$$

$\therefore$ จุด z ที่ทำให้ w ไม่เป็นการส่งคงแบบ คือ $z = \frac{-5}{2}$

2.7.2 การแปลงเศษส่วนเชิงเส้น (Linear Fractional Transformation)

การแปลงเศษส่วนเชิงเส้น มีรูปแบบ คือ

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad ; \ (ad-bc \neq 0)$$ เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงที่เชิงซ้อน

มี 4 กรณี คือ

กรณีที่ 1 การเลื่อนรูป (Translation)

เป็นการส่งรูปในระนาบ โดยการเลื่อนไปในทิศทางของเวกเตอร์ b มีรูปแบบ คือ

$$w = z+b$$

กรณีที่ 2 การหมุนรูป (Rotation)

เป็นการหมุนรูปในระนาบ z ไปเป็นมุม β (β เป็นค่าคงตัวจริง) ถ้า $\beta > 0$ การหมุนจะหมุนทวนเข็มนาฬิกา ถ้า $\beta < 0$ การหมุนจะหมุนตามเข็มนาฬิกา มีรูปแบบ คือ

$$w = e^{i\beta} z$$

กรณีที่ 3 การขยาย หรือการหดลงของรูป (Stretching or Contracting)

เป็นการแผ่ หรือขยายออกไปของรูป ในระนาบ z ถ้า $\alpha > 1$ และเป็นการหดลงของรูปในระนาบ z ถ้า $0 < \alpha < 1$ โดยที่ α เป็นค่าคงตัวจริง มีรูปแบบ คือ

$$w = \alpha z$$

กรณีที่ 4 การผกผัน (Inversion)

เป็นการส่งแบบผกผัน (Inverse Mapping) มีรูปแบบ คือ

$$w = \frac{1}{z}$$

ทฤษฎีบท 2.38

ภายใต้การส่ง $w = \frac{1}{z}$ เราพบว่า $w = \frac{1}{z}$ จะส่ง เส้นตรง หรือ วงกลม ไปเป็น เส้นตรง หรือวงกลม เท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.39

ทุก ๆ การแปลงเศษส่วนเชิงเส้น เป็นการส่งผลรวมของวงกลม และเส้นตรง ในระนาบ z ลงบน ผลรวมของวงกลม และเส้นตรง บนระนาบ w

จุดตรึง (Fix points)

จุดตรึงของการส่ง $w = f(z)$ เป็นจุดที่เงา (image) เป็นจำนวนเดียวกัน กับจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ จุดตรึงเกิดจาก $w = f(z) = z$

 # *หมายเหตุ* # *การส่งแบบเอกลักษณ์* $w = z$ *มีทุก ๆ จุด เป็นจุดตรึง*

ทฤษฎีบท 2.40

การส่งเศษส่วนเชิงเส้นที่ไม่เป็นเอกลักษณ์ จะมีอย่างมากที่สุด 2 จุดตรึง ถ้าการส่งเศษส่วนเชิงเส้น มี 3 จุดตรึง หรือมากกว่า แล้ว เราได้ว่า การส่งต้องเป็นการส่งแบบเอกลักษณ์ กล่าวคือ $w = z$

ทฤษฎีบท 2.41

จุด 3 จุด ที่แตกต่างกัน ที่กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 สามารถที่จะส่งลงบน 3 จุด ที่แตกต่างกัน w_1, w_2, w_3 ตามลำดับ แบบ 1 ต่อ 1 และหนึ่งเดียวเท่านั้น ภายใต้การแปลงเศษส่วนเชิงเส้น $w = f(z)$ แล้ว เราได้ว่า การส่งนี้เป็นไปตามสมการ

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

ตัวอย่าง2.64 จงหาการแปลงเศษส่วนเชิงเส้น ซึ่งส่ง $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ ลงบน $-1, -i, 1$ ตามลำดับ

วิธีทำ

$$\frac{w-(-1)}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-i-(-1)} = \frac{z-(-1)}{z-1} \cdot \frac{0-1}{0-(-1)}$$

$$\frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-i+1} = \frac{z+1}{z-1} \cdot (-1)$$

$$\frac{w+1}{w-1} = \frac{-z-1}{z-1} \cdot \frac{-i+1}{-i-1}$$

$$w = \frac{z-i}{1-iz}$$

ตัวอย่าง2.65 จงหาการแปลงเศษส่วนเชิงเส้น ซึ่งส่ง $0, 1, \infty$ ลงบน $-1, -i, 1$ ตามลำดับ

วิธีทำ

$$\frac{w-(-1)}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-i-(-1)} = \frac{z-0}{1-0} \cdot \frac{1-\infty}{z-\infty}$$

$$\frac{w+1}{w-1} = (z)\left(\frac{-i+1}{-i-1}\right)$$

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

2.7.3 การส่งโดยฟังก์ชันมูลฐาน (Elementary Function Mapping)

การส่ง $w = \sin z$, $w = \cos z$

ถ้า $w = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = u + iv$ แล้ว

เราได้ $u = \sin x \cosh y$, $v = \cos x \sinh y$

ถ้า $w = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = u + iv$ แล้ว

เราได้ $u = \cos x \cosh y$, $v = \sin x \sinh y$

สมบัติของการส่ง $w = \sin z$, $w = \cos z$

1. ภายใต้ $w = \sin z$ เส้นในแนวนอน ในระนาบ z ยกเว้นแกนจริง จะถูกส่งไปเป็นวงรี จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด ในระนาบ w

กล่าวคือ สำหรับเส้น $y = b \neq 0$, $2k\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ส่งทั่วถึงลงบน ไม่ครึ่งบนก็ครึ่งล่าง วงรี

$$\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$$

ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ ค่าของ $b > 0$ หรือ $b < 0$

2. ภายใต้ $w = \sin z$ เส้นตรงในแนวตั้ง $x = c$, $c \neq \frac{k\pi}{2}$; k เป็นจำนวนเต็มจะถูกส่งถึงลงบนไม่ครึ่งขวาก็ครึ่งซ้าย ไฮเปอร์โบลา

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} + \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่า $2k\pi < c < 2k\pi + \pi$ หรือ $2k\pi - \pi < c < 2k\pi$

3. ภายใต้ $w = \cos z$ จาก $\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$

เราพบว่า $w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$

ถ้าเราได้ $w_1 = z + \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $w = \sin w_1$

เห็นได้ว่า การส่ง $w_1 = z + \frac{\pi}{2}$ เป็นการเลื่อน (Translation) หลังจากเลื่อนแล้ว จะได้ $w = \sin w_1$

2.7.4 การประยุกต์ของการส่งคงแบบ (Application of Conformal Mapping)

ปรากฏการณ์ ทาง physics ที่เกี่ยวข้องกับสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 h = 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่สำคัญสมการหนึ่ง ในคณิตศาสตร์วิศวกรรม เพราะมันเกี่ยวข้องกับการไหล หรือการนำ ความร้อน ใน 2 มิติ ที่อยู่ในภาวะคงตัว (Steady State) สนามไฟฟ้าสถิตย์ (Electrostatic Fields) และการไหลของของไหลใน 2 มิติ (Two Dimension Fluid Flow)

ทฤษฎีของผลเฉลย ของสมการลาปลาซ เราเรียกว่า **ทฤษฎีศักย์** (Potential Theory) และผลเฉลยของสมการลาปลาซ ซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 มีความต่อเนื่อง เราเรียกว่า **ฟังก์ชันฮาร์มอนิก**

ในกรณี 2 มิติ h ขึ้นกับ x และ y เท่านั้น สมการลาปลาซ คือ

$$\nabla^2 h = h_{xx} + h_{yy} = 0$$

ซึ่งปัญหาที่เกี่ยวกับ การหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ ในบริเวณโดเมน D เมื่อกำหนด ขอบเขต D นี้ เราเรียกว่า **ปัญหาของดิริชเลต์** (Dirichlet Problem) ซึ่งสามารถแก้ไขได้ โดยวิธีการส่งคงแบบ ที่จะกล่าวต่อไป

1. การนำ หรือการไหล ของความร้อน ใน 2 มิติ ที่อยู่ในภาวะคงตัว (Steady State)

ในกรณีนี้ อุณหภูมิ h จะเป็นฟังก์ชันของ x และ y เท่านั้น เราเรียกว่า **อุณหภูมิ -ในสภาวะคงตัว** (Steady-State Temperature) ดังนั้นสมการความร้อนจะกลายเป็น

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

ซึ่งนั่นแสดงว่า h เป็น Harmonic Function ถ้า g เป็น ฮาร์โมนิคสังยุคของ h แล้ว เราได้ว่า $F(z) = h(x, y) + g(x, y)i$ ก็จะเป็น ฟังก์ชันวิเคราะห์เส้นโค้งต่าง ๆ ซึ่งมีสมการ

h (x,y) = c ว่า **เส้นสมศักย์** (equithermal lines **หรือ** isotherms) และเรียกเส้นโค้ง g (x,y) = c ว่า **เส้นไหล** (Flow lines) ซึ่งเป็นเส้นที่แสดงทิศทางการไหลของความร้อน

2. ศักย์ไฟฟ้าสถิตย์ (Electrostatic Potential)

ถ้านำประจุทดสอบ (test charge) ไปวางไว้ตรงจุดที่ปลอดจาก charge body แล้ว แรงที่มากระทำต่อประจุทดสอบนี้ จะเท่ากับ gradient ของฟังก์ชันเชิงสเกลาร์ h ตัวหนึ่ง ซึ่งจะเรียกว่า ศักย์ เราสามารถพิสูจน์ว่า ณ จุดที่ปลอดจาก charge body นี้ ศักย์ h จะสอดคล้องกับสมการลาปลาซ $\nabla^2 h = 0$ ซึ่งถ้า h เป็นฟังก์ชันของ x,y เท่านั้น เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่า ถ้า h เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิค ถ้า g เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิคสังยุค ของ h เราก็จะได้ว่า $F(z) = h(x,y) + g(x,y)i$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะเรียก F (z)ว่า **ศักย์เชิงซ้อน** (Complex Potential) เส้นโค้งต่าง ๆ ที่มีสมการ h (x,y) = c เราจะเรียก **เส้นสมศักย์** ส่วนของเส้นโค้งต่าง ๆ ที่มีสมการ g (x,y) = c เราจะเรียกว่า **เส้นของแรง** (line of force) ซึ่งแสดงทิศทางของแรง ที่กระทำต่อประจุทดสอบ

3. การไหลของของไหล ใน 2 มิติ (Two Dimentional Fluid Flow)

ถ้า v เป็นความเร็ว (velocity) ของการไหลของของไหล (fluid) และถ้าการไหลอยู่ในลักษณะที่เรียกว่า **ไหลแบบไม่หมุน** (irrotational flow) กล่าวคือ curl v = 0 ก็จะได้ว่า v เป็น gradient ของฟังก์ชันเชิงสเกลาร์ h ตัวหนึ่ง กล่าวคือ

$$v = -\nabla h$$

เราจะเรียก h นี้ว่า velocity potential

และถ้าหากว่า ของไหลนี้ incompressible แล้ว กล่าวคือ div v = 0 เราก็จะได้ว่า $\nabla^2 h = 0$ นั่นคือ

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

เราจะเรียกเส้นโค้งต่าง ๆ ที่มีสมการ h (x,y) = c ว่า **เส้นสมศักย์** ถ้า g เป็นฮาร์มอนิคสังยุคของ h แล้ว เราจะเรียกเส้นโค้งต่าง ๆ ที่มีสมการ g (x,y) = c ว่า stream lines ซึ่งเป็นเส้นโค้ง ที่แสดงลักษณะการไหลของของไหล

ส่วน $F(z) = h(x,y) + g(x,y)i$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์นั้น เราจะเรียก **ศักย์เชิงซ้อน** (complex potential) ของการไหล

ซึ่งในการแก้ไขปัญหาของปรากฏการณ์ 3 ชนิดนี้ เราอาศัย ทฤษฎีของการส่งคงแบบดังนี้

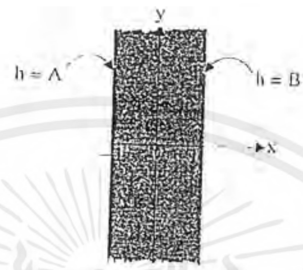
<u>ทฤษฎีบท 2.42</u>

ถ้า g , h ต่างก็เป็นฮาร์มอนิคสังยุคของกันและกันแล้ว จะได้ว่า เส้นโค้ง h (x,y) = a กับเส้นโค้ง g (x,y) = b จะตั้งฉากกัน (ตรงจุดตัด)

ทฤษฎีบท 2.43

ถ้า $T : D \xrightarrow{\text{1-1, onto}} D_0$ เป็นการส่งคงแบบ และถ้า h (x,y) ฮาร์มอนิคใน D จะได้ว่า $H = h \circ T^{-1}$ จะฮาร์มอนิคใน D_0

<u>ตัวอย่าง2.66</u> จงหาศักย์ h ของสนาม ระหว่าง แผ่นตัวนำไฟฟ้า 2 แผ่น วางขนานกัน มีความยาวถึงอนันต์ จากรูป แผ่น 2 แผ่น มีศักย์คงที่ เท่ากับ A และ B ตามลำดับ



รูปที่ 2.35 แผ่น 2 แผ่น มีศักย์คงที่เท่ากับ A และ B

<u>วิธีทำ</u> จากรูปร่างของแผ่นตัวนำไฟฟ้า จะเห็นได้ว่า h ขึ้นอยู่กับ x เท่านั้น ดังนั้น

สมการลาปลาซ จึงเป็น $\dfrac{d^2 h}{d x^2} = 0$

อินทิเกรต 2 ครั้ง จะได้คำตอบ เป็น

$h = c_1 x + c_2$; c_1, c_2 เป็นค่าคงที่

ค่าคงที่ c_1, c_2 หาได้จากค่าขอบ ดังนี้

แทนค่า $x = -1$ ได้ $h = A$ ดังนั้น $-c_1 + c_2 = A$ -----(1)

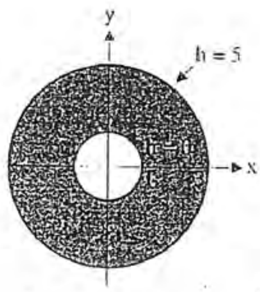
แทนค่า $x = 1$ ได้ $h = B$ ดังนั้น $c_1 + c_2 = B$ -----(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า

$$c_1 = \frac{B - A}{2} \quad , \quad c_2 = \frac{B + A}{2}$$

ดังนั้น จะได้ $h = \left(\dfrac{B - A}{2}\right) x + \left(\dfrac{A + B}{2}\right)$ เป็นผลเฉลยที่ต้องการ

<u>ตัวอย่าง2.67</u> จงหาศักย์ ระหว่าง ทรงกระบอกซ้อนกัน 2 อัน ปลายทั้ง 2 ข้าง ยาวอนันต์ โดยกำหนดค่าบนทรงกระบอก ดังรูป



รูปที่ 2.36 ทรงกระบอกซ้อนกัน 2 อัน ปลายทั้ง 2 ข้าง ยาวอนันต์

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก h ขึ้นกับ รัศมี $r = \sqrt{x^2+y^2}$ เท่านั้น จากสมการลาปลาซในพิกัดเชิงขั้ว $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ซึ่งกลายเป็น

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\right) = 0$$

แต่ h ไม่ขึ้นกับ θ ดังนั้น $\frac{d^2 h}{d\theta^2} = 0$

สมการลาปลาซ กลายเป็น

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dh}{dr}\right) = 0$$

หรือ $rh'' + h' = 0$

แยกตัวแปร เราได้

$$\frac{h''}{h'} = \frac{-1}{r}$$

$$\therefore \quad \ln h' = -\ln r + c^*$$

$$\therefore \quad h' = \frac{\tilde{c}}{r}$$

ดังนั้น $h = \tilde{c}\ln r + c_2$

แทนค่า $r = \sqrt{x^2+y^2}$ เราได้

$$h = \tilde{c}\ln\sqrt{x^2+y^2} + c_2$$

$$= \frac{\tilde{c}}{2}\ln(x^2+y^2) + c_2$$

$$h(x,y) = c_1\ln(x^2+y^2) + c_2$$

แทนค่า $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ h = 0 ดังนั้น $0 = c_1 \ln 1 + c_2$

แทนค่า $x^2 + y^2 = 3$ จะได้ $h = 5$ ดังนั้น $5 = c_1 \ln 9 + c_2$

$$\therefore \quad c_2 = 0 \ , \ c_1 = \frac{5}{\ln 9} \quad \text{จะได้} \quad h(x,y) = \frac{5}{\ln 9} \ln(x^2+y^2)$$

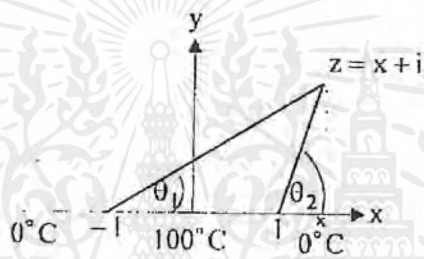
<u>ตัวอย่าง2.68</u> จงหาอุณหภูมิ $h(x,y)$ ซึ่งสอดคล้องกับ

P.D.E $\quad \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad ;(-\infty < x < \infty \ , \ y > 0)$

B.C $\quad h(x,0) = 100 \quad ;(|x| < 1)$

$\qquad\qquad = 0 \quad ;(|x| > 1)$

โดยถือว่า $h(x,y)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิคที่มีขอบเขต

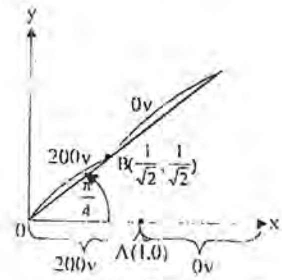


รูปที่ 2.37 ฟังก์ชันฮาร์มอนิคที่มีขอบเขต

<u>วิธีทำ</u> เห็นได้ว่า

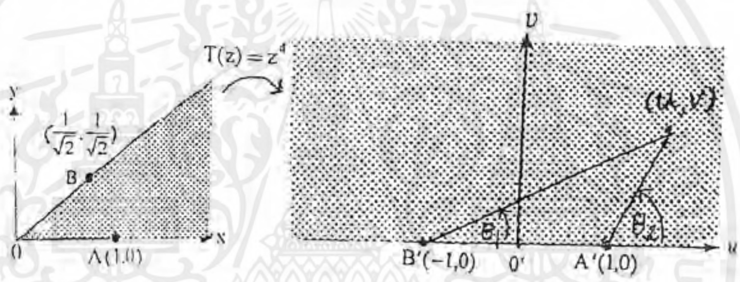
$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{-100}{\pi}\theta_1 + \frac{100}{\pi}\theta_2 \\ &= \frac{100}{\pi}(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \frac{100}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x-1} - \tan^{-1}\frac{y}{x+1}\right) \\ &= \frac{100}{\pi}\tan^{-1}\frac{2y}{x^2+y^2-1} \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง2.69</u> จงหาศักย์ไฟฟ้าสถิตย์ h (x,y) ภายใต้บริเวณ และเงื่อนไขขอบ ดังรูป



รูปที่ 2.38 บริเวณและเงื่อนไขที่ใช้หาศักย์ไฟฟ้าสถิตย์

<u>วิธีทำ</u> ในกรณีนี้ เราควรใช้ $T(z) = z^4$ เพราะมันจะแปลงอาณาบริเวณดังกล่าว เป็นอาณาบริเวณ เหนือแกน x ดังรูป



รูปที่ 2.39 การแปลงอาณาบริเวณให้ เหนือแกน x

โดยพิจารณา เงื่อนไขขอบ ประกอบ กลายเป็นว่า เราต้องหา ฟังก์ชันฮาร์มอนิค H (u,v) ในอาณาบริเวณ เหนือแกน x ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต (B.C) ที่ว่า

$$
\begin{aligned}
H(u,0) &= 0 && \text{ถ้า } u < -1 \\
&= 200 && \text{ถ้า } -1 < u < 1 \\
&= 0 && \text{ถ้า } u > 1
\end{aligned}
$$

จากตัวอย่างที่แล้ว เราทราบว่า

$$H(u,v) = \frac{200}{\pi}\tan^{-1}\frac{2v}{u^2+v^2-1}$$

$$\therefore \quad T(z) = z^4 = (x^2-y^2-2xy)(x^2-y^2+2xy) + 4xy(x^2-y^2)i$$

ได้

$$u = (x^2-y^2-2xy)(x^2-y^2+2xy)$$

$$v = 4xy(x^2-y^2)$$

จาก $$h(x,y) = H(u(x,y), v(x,y))$$

$$h(x,y) = \frac{200}{\pi}\tan^{-1}\frac{2v(x,y)}{(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 - 1}$$

$$\therefore \quad h(x,y) = \frac{200}{\pi}\tan^{-1}\frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2-y^2-2xy)^2(x^2-y^2+2xy)^2 + 10x^2y^2(x^2-y^2)^2 - 1}$$

2.8 คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน (CAI)

2.8.1 ความเป็นมาของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

เมื่อพิจารณาถึงความเป็นมาของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน น่าจะมีความสัมพันธ์กับการเรียนการสอนแบบโปรแกรม ซึ่งในระยะเวลากว่า 20 ปีที่ผ่านมา การเรียนการสอนแบบโปรแกรม ได้รับความสนใจว่าเป็นวิธีการที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดีขึ้น เนื่องจากการเรียนการสอนวิธีนี้มีหลักการพื้นฐานของการใช้ทฤษฎีและหลักจิตวิทยาการเรียนรู้ที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล มีการให้แรงเสริม และการให้ข้อมูลป้อนกลับแก่ผู้เรียน การเรียนการสอนในลักษณะนี้ นอกจากจะใช้สื่อการเรียนการสอนในรูปเอกสารแล้ว ได้มีผู้พยายามสร้างเครื่องสอน เพื่อนำเสนอบทเรียนแบบโปรแกรมอีกด้วย และเมื่อคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทในวงการศึกษา บทเรียนแบบโปรแกรมจึงมีการพัฒนามาอยู่บนจอคอมพิวเตอร์ ในลักษณะการเสนอบทเรียนในรูปของหนังสืออิเลคทรอนิคส์ และทำให้เกิดรูปแบบการเรียนการสอนที่เรียกว่าคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน ขึ้น

2.8.2 ความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หรือ CAI หมายถึงการนำคอมพิวเตอร์มาใช้เป็นเครื่องช่วยในการเรียนการสอนทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตัวเอง คอมพิวเตอร์ช่วยสอนนับได้ว่าเป็นเครื่องช่วยสอนที่มีประสิทธิภาพสูงสุด ทั้งนี้เพราะคอมพิวเตอร์สามารถทำงานได้แทบทุกอย่าง ขึ้นอยู่กับว่าเราตั้งโปรแกรมไว้อย่างไร

ในบทเรียน CAI นั้น คอมพิวเตอร์จะเสนอเนื้อหาแบบต่างๆ เพื่อการเรียนการสอนเป็นการสอนโดยตรงไปยังผู้เรียนผ่านทางจอ หรือ แป้นพิมพ์ โดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมวัสดุการสอนซึ่งก็คือโปรแกรมซึ่งจะถูกเก็บไว้ในหน่วยความจำของเครื่อง และพร้อมที่จะเรียกใช้ได้ตลอดเวลา

2.8.3 ลักษณะของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

ในปัจจุบันมีการผลิตคอมพิวเตอร์ช่วยสอนออกมามากมาย แต่ละชนิดก็มีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไป อย่างไรก็ตามลักษณะของเครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสามารถสรุปได้ดังนี้

1. ให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตัวเอง ตามความสามารถของตัวเอง
2. การสอนเริ่มตามขั้นตอนทีละขั้น ผู้เรียนตอบสนองต่างกัน วิธีการเรียนขึ้นอยู่กับลักษณะพฤติกรรมที่แตกต่างกันไปของแต่ละคน
3. ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนตลอดเวลา คือ มีการสื่อสารระหว่างผู้เรียนกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

4. ผู้เรียนได้ทราบรายงานผลการเรียน และความก้าวหน้าของตนในขณะที่เรียนได้ทันที
5. การเรียบเรียงบทเรียน และวิธีการสอนได้ปรับปรุงมาอย่างดีแล้ว

2.8.4 ข้อได้เปรียบของคอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอน

1. ข้อได้เปรียบของคอมพิวเตอร์เมื่อเทียบกับเครื่องคิดเลขคือ คอมพิวเตอร์มีหน่วยความจำ ซึ่งสามารถจำได้ เรียกข้อมูลความจำได้ทั้งตัวเลข ตัวอักษร ข้อความ สามารถคำนวณ และคิดอย่างมีเหตุผลมากกว่าเครื่องคิดเลขธรรมดา
2. คอมพิวเตอร์มีลักษณะเด่นที่จะช่วยให้ระบบการศึกษามีประสิทธิภาพ โดยเฉพาะการนำมาใช้ช่วยสอน ซึ่งเป็นการเรียนการสอนรายบุคคล โดยใช้บทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีลักษณะเดียวกันกับการเรียนการสอนเป็นรายบุคคล ด้วยแบบเรียนโปรแกรม การใช้คอมพิวเตอร์จะได้เปรียบกว่าแบบเรียนโปรแกรมคือ ให้ข้อมูลย้อนกลับได้รวดเร็วกว่า ผู้เรียนมีโอกาสทราบคำตอบที่ถูกต้องก่อนที่จะเขียนหรือลงมือทำกิจกรรมหรือเรียนในลำดับถัดไป และเมื่อผู้เรียนทำผิดก็สามารถแก้ไขข้อผิดพลาดได้ทันที ซึ่งเป็นการเปลี่ยนพฤติกรรมเพื่อให้เกิดการเรียนรู้
3. บทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ มีจุดเด่นอีกประการคือ ผู้เรียนสามารถเรียกกรอบการเรียนได้รวดเร็วมาก ไม่ว่าจะเป็นการเรียนย้อนหลัง หรือ กระโดดข้ามไปข้างหน้า ทำให้ช่วยประหยัดเวลาการเรียนได้
4. พัฒนาการของ CAI เท่าที่ผ่านมาเป็นที่ยอมรับมากทางวงการศึกษาและวงการครู
5. ผู้เรียนที่เรียนรู้ค่อนข้างช้า จะมีผลสัมฤทธิ์สูงขึ้นมากกว่าผู้เรียนที่เรียนรู้ได้ปกติ แม้ว่าสิ่งที่คงเหลือจากการเรียนรู้จะต่ำกว่า เมื่อเปรียบเทียบกับการเรียนในห้อง
6. ไม่ว่า CAI จะมีลักษณะใด ความแตกต่างด้านผลสัมฤทธิ์มีไม่มากนัก ไม่ว่าจะเรียนอยู่ชั้นประถม มัธยม หรือผู้ใหญ่ที่ได้รับการอบรม ผู้เรียนส่วนใหญ่ต้องการพบผู้สอนเป็นครั้งคราว หรือไม่ก็ต้องการให้ครูอยู่ในชั้นเรียนด้วย เพราะบางทีอยากอภิปรายบางเรื่องเป็นพิเศษ แต่ผลการวิจัยกลับพบว่า การมีครูเข้าไปยุ่งมากกลับทำให้การเรียนช้าลง มหาวิทยาลัยบางแห่งจึงทำการวิจัยอยู่ว่าครูควรเข้าไปมีบทบาทร่วมด้วยมากน้อยเพียงใดจึงจะพอดี

<u>สำหรับในแง่ของผู้ศึกษาโปรแกรมช่วยสอน</u>

1. การได้เจรจาโต้ตอบกับคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้เรียนพอใจมาก
2. นอกจากนั้นผู้เรียนสามารถควบคุมวิธีการเรียนของตนเองได้

3. ผู้เรียนได้ใช้ความถนัดของตนเองให้มากที่สุด ถ้าสนใจมากก็อาจใช้เวลามาก สนใจน้อยก็ใช้เวลาน้อยลง

เราอาจกำหนดวิธีการสอนให้ตรงกับความต้องการของผู้เรียนได้ เพราะคำตอบที่เรียกใช้อาจเป็นแนวให้กำหนดบทเรียนให้ไปช้า เร็ว หรือมีความแตกต่างอย่างใดก็ได้

ในการเรียนด้วย CAI ผู้เรียนต้องมีสมาธิอยู่ที่คอมพิวเตอร์ และจอภาพตลอดเวลา การได้นำคำตอบของผู้เรียนมาวิจัยได้ นับว่าเป็นประโยชน์ที่สุดในการทำบทเรียนหรือแก้ไขบทเรียนในโอกาสต่อไป

2.8.5 รูปแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

CAI แบบฝึกฝนและฝึกหัด

CAI รูปแบบนี้เป็นรูปแบบที่พบเห็นกันทั่วไป ลักษณะของบทเรียนมักเป็นการให้โจทย์แล้วถามคำถาม ถ้าตอบผิดก็จะอธิบายการตอบผิดอย่างไร ให้ลองตอบดูใหม่

CAI แบบทบทวนความรู้

เป็น CAI รูปแบบที่พยายามใช้คอมพิวเตอร์แทนครู ในการดำเนินการทบทวนเนื้อหาวิชาความรู้ที่ได้เรียนไปแล้ว ลักษณะของบทเรียนมักเป็นการให้เนื้อหาและรูปภาพประกอบบนจอภาพ เมื่อให้เนื้อหาเป็นพื้นฐานแล้ว ก็จะมีคำถามเพื่อให้ผู้เรียนตอบ ถ้าผู้เรียนตอบหรือทำได้ถูก คอมพิวเตอร์ก็จะสอนเนื้อหาต่อไป แต่ถ้าผู้เรียนตอบหรือทำโจทย์ผิด คอมพิวเตอร์ก็อาจจะย้อนกลับมายังเนื้อหาที่เรียนแล้ว หรือไปยังเนื้อหาที่เป็นส่วนซ่อมเสริม ขึ้นอยู่กับลักษณะการตอบผิดถูกในคำถามนั้นๆ

CAI แบบสถานการณ์จำลอง

CAI รูปแบบนี้เป็นรูปแบบที่พยายามเลียนแบบกระบวนหารที่จะเกิดขึ้นจริง เป็นการเรียนการสอนที่ช่วยให้เข้าใจในสิ่งที่ยากต่อการเรียนรู้ โดยการจำลองสถานการณ์ที่จะเกิดขึ้นนั้นให้ปรากฏ เช่น จำลองการขับเครื่องบิน จำลองการประกอบธุรกิจขนาดเล็ก จำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคอะตอมเป็นต้น สถานการณ์จำลองดังกล่าวนี้ช่วยให้ผู้เรียนได้มีโอกาสรับประสบการณ์ในสิ่งที่เกิดขึ้นจริง ช่วยให้เกิดความปลอดภัยในกรณีที่เป็นการเรียยนรูห้หรือการให้ประสบการณ์ที่ต้องเสี่ยงภัยกับความเสียหายหรือความล้มเหลวที่จะเกิดขึ้น เป็นการช่วยลดค่าใช้จ่ายได้เป็นอย่างมาก นอกจากนี้ยังสามารถขยายหรือลดเวลาเรียนให้เหมาะกับผู้เรียนแต่ละคนด้วย

<u>CAI แบบเกม</u>

CAI รูปแบบเกม มีพื้นฐานมาจากผู้เรียนที่ชอบแข่งขัน เมื่อมีสิ่งท้าทายให้แข่งกันก็จะเป็นแรงจูงใจให้สนใจเรียนเพิ่มขึ้น เช่น เรียนพิมพ์ดีด โดยเล่นเกมยิงตัวอักษรที่พิมพ์ได้เพื่อเก็บคะแนน การสะกดคำพิมพ์ภาษาอังกฤษให้ถูกต้องก่อนเวลาหมด การตอบโจทย์ปัญหาแข่งขันกัน เป็นต้น

<u>CAI แบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์</u>

CAI รูปแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์ มีพื้นฐานมาจากการจำลองบทเรียนในลักษณะที่ปรากฏในหนังสือแบบเรียน จึงมีส่วนประกอบที่คล้ายคลึงกับส่วนประกอบของหนังสือแบบเรียน คือ ปก คำนำ สารบัญ บทเนื้อหา แบบฝึกหัด เป็นต้น

<u>CAI แบบกำหนดสถานการณ์ให้แก้ปัญหา</u>

CAI รูปแบบกำหนดสถานการณ์ให้แก้ปัญหา เป็นการนำเสนอสถานการณ์ให้ผู้เรียนศึกษาแล้วตอบคำถาม เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์นั้น ๆ

<u>CAI แบบวินิจฉัยข้อบกพร่อง</u>

CAI รูปแบบวินิจฉัยข้อบกพร่อง เป็นการถามคำถาม หรือทดสอบนักเรียน เพื่อดูว่าผู้เรียนยังมีจุดบกพร่องในมโนทัศน์นั้น ๆ อย่างไร แล้วดำเนินแก้ไขข้อบกพร่องที่พบนั้น

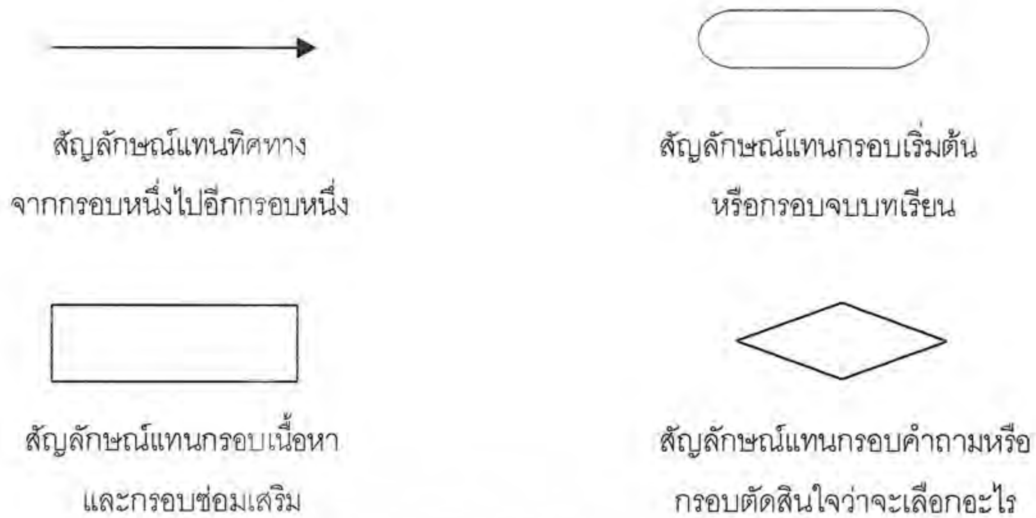
2.8.6 ผังโครงสร้างบทเรียน

กล่าวถึงรูปแบบของผังโครงสร้างบทเรียน ซึ่งจะช่วยให้การดำเนินการสร้างบทเรียน ตั้งแต่การเขียนสคริปต์ และการโปรแกรมบทเรียนให้เป็นไปตามที่กำหนด

การสร้างบทเรียน CAI ควรดำเนินการโดยกำหนดผังโครงสร้างบทเรียน ซึ่งจะช่วยให้การสร้างบทเรียนเป็นไปตามรูปแบบที่ต้องการนำบทเรียน CAI ไปใช้

<u>การออกแบบผังโครงสร้างบทเรียน</u>

การออกแบบผังโครงสร้างบทเรียนวิธีหนึ่ง คือ การเขียนผังการทำงานของบทเรียน จะช่วยให้ผู้สร้างบทเรียนและผู้เขียนสคริปต์บทเรียนมีความเข้าใจชัดเจนขึ้นว่าควรจะสร้างบทเรียนและเขียนสคริปต์บทเรียนอย่างไร โดยทั่วไปแล้วนิยมเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้รูปสัญลักษณ์แทนความหมายของแต่ละกรอบบทเรียน สัญลักษณ์ที่ใช้มีดังนี้



รูปที่ 2.40 แสดงสัญลักษณ์ในการวางผังโครงสร้างบทเรียน

<u>รูปแบบผังโครงสร้างบทเรียน</u>

ผังโครงสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน มีลักษณะ 2 รูปแบบใหญ่ ๆ คือ

1. แบบเส้นทางเดียว

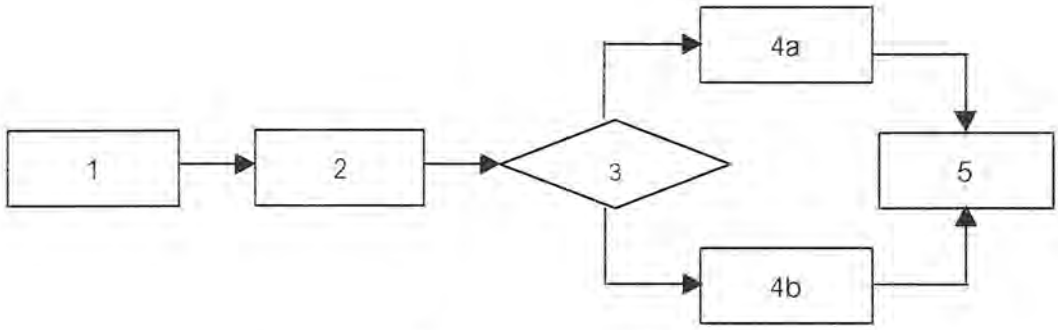
เป็นการสร้างกรอบบทเรียนที่มีลำดับการตอบสนองอย่างต่อเนื่อง เป็นเทคนิควิธีการที่สร้างได้ง่าย ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาหรือกรอบคำถามเรียงต่อกันไปในทิศทางเดินทางเดียว

ปัจจุบันลักษณะผังโครงสร้างแบบนี้ไม่เป็นที่นิยม เพราะจัดเรียงเนื้อหาตายตัว ไม่เอื้อต่อความแตกต่างระหว่างบุคคล แต่ในปัจจุบันมีโปรแกรมระบบช่วยสร้างบทเรียน เอื้อต่อการสร้างบทเรียนทำให้บทเรียนแบบเส้นทางเดียวสามารถดำเนินไปในลักษณะเดินหน้าไปและย้อนกลับแบบพลิกหน้าได้ ทำให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

รูปที่ 2.41 แสดงผังโครงสร้างแบบเส้นทางเดียว

2. แบบแตกกิ่ง

ผังโครงสร้างบทเรียนลักษณะนี้ได้รับความนิยมจากผู้เรียนมากกว่าแบบเส้นทางเดียว เพราะเหมาะสมกับผู้เรียนมากกว่า เนื่องจากจะให้ผู้เรียนได้เลือกตามระดับความรู้ความเข้าใจและความสามารถของผู้เรียน



รูปที่ 2.42 แสดงผังโครงสร้างแบบแตกกิ่ง

ผังโครงสร้างแบบแตกกิ่งยังสามารถแยกออกได้หลายรูปแบบดังนี้ดังนี้

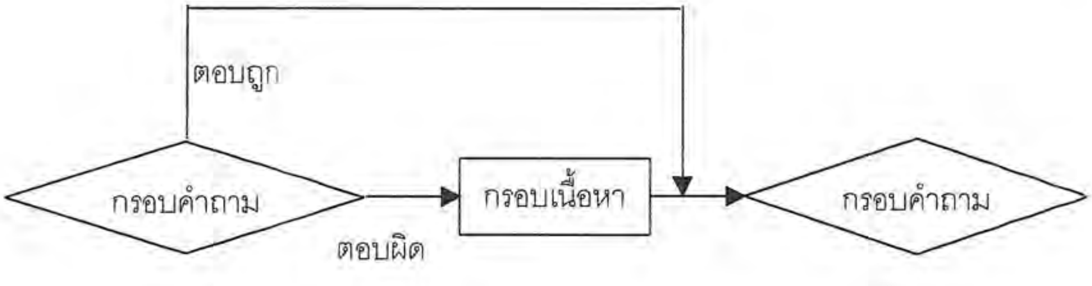
<u>แบบซ้ำกรอบเดิม</u> (Linear format with repeatition)

มีลักษณะคล้ายคลึงกับผังโครงสร้างแบบเส้นทางเดียวต่างกันตรงที่มีคำถามแทรกระหว่างกรอบเนื้อหาเหมาะกับ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์

รูปที่ 2.43 แสดงผังโครงสร้างแบบซ้ำกรอบเดิม

<u>แบบทดสอบก่อนข้ามกรอบ</u> (Pretest and skip format)

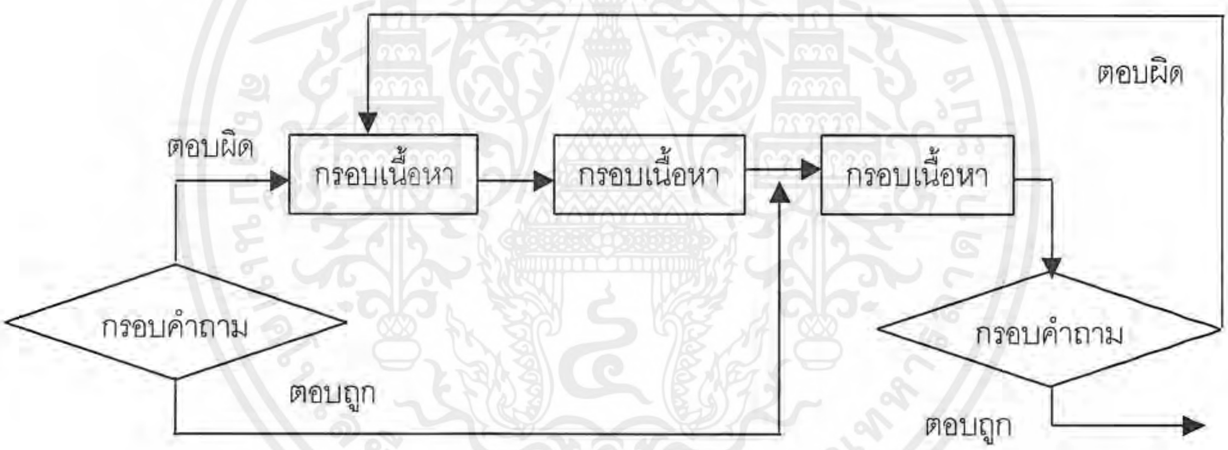
จะทดสอบความรู้ของผู้เรียนก่อนเรียนเนื้อหา ถ้าทดสอบผ่านก็จะข้ามกรอบนั้นไปยังกรอบเนื้อหาจุดประสงค์อื่น เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



รูปที่ 2.44 แสดงผังแบบทดสอบก่อนข้ามกรอบ

<u>แบบข้ามและย้อนกรอบ</u> *(Gate frames)*

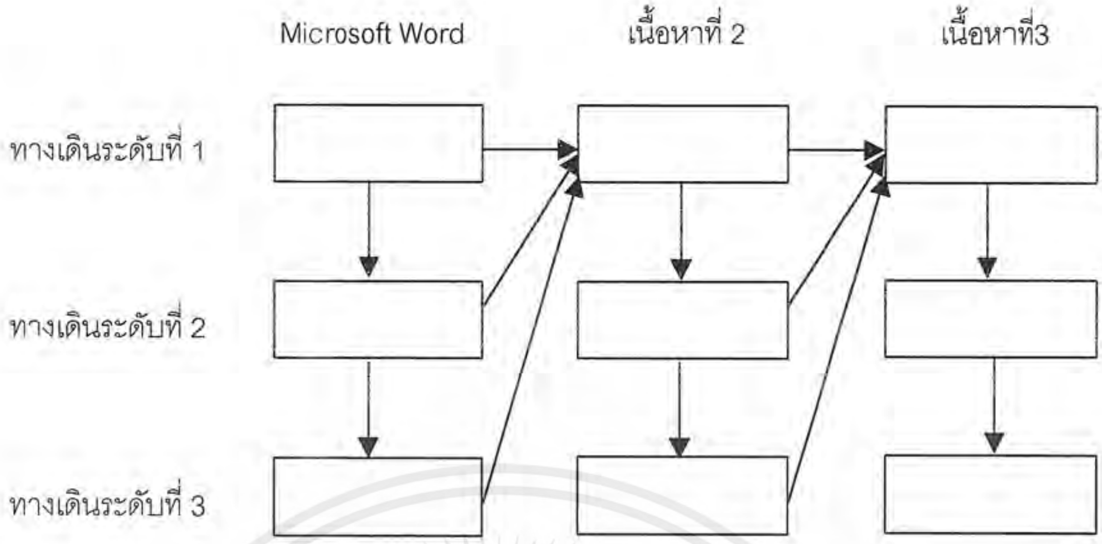
กำหนดให้ผู้เรียนไปยังกรอบบทเรียนตามระดับความสามารถและความรู้ความเข้าใจในเนื้อหามีลักษณะแบบเดียวกับแบบเส้นทางเดียว เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบเกม แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



รูปที่ 2.45 แสดงผังโครงสร้างแบบข้ามกรอบและย้อนกรอบ

<u>แบบทางเดินหลายเส้น</u> *(Secondary tracks)*

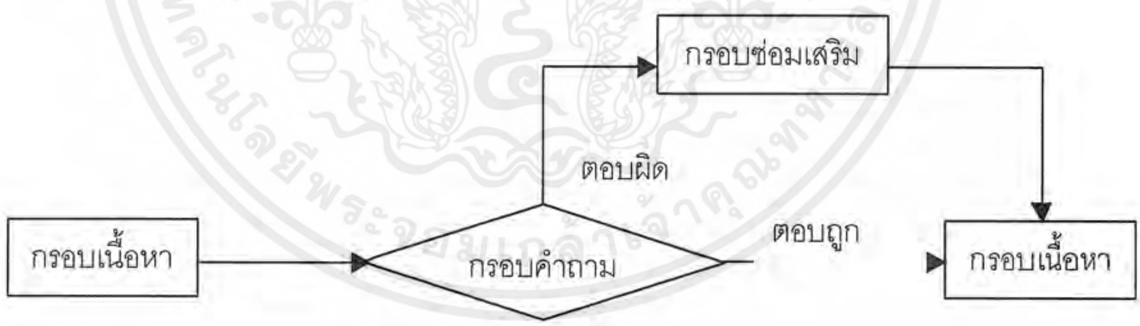
ประกอบด้วยกรอบบทเรียนในเส้นทางเดินหลายระดับ ทางเดินระดับที่ 1 เป็นเส้นทางเดินของกรอบบทเรียนเนื้อหาหลัก ส่วนทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 เป็นกรอบเนื้อหาที่เพิ่มรายละเอียดขึ้นมา นอกจากนี้ทางเดินระดับที่ 2 และที่ 3 ยังมีเส้นทางเดินมากกว่าหนึ่งเส้นทางขึ้นอยู่กับว่าผู้เรียนจะสามารถเข้าใจเนื้อหาในกรอบทางเดินระดับที่ 1 มากน้อยเพียงใด เหมาะต่อ CAI แบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



รูปที่ 2.46 แสดงผังแบบทางเดินหลายเส้น

<u>แบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว</u> *(Single remedial branch)*

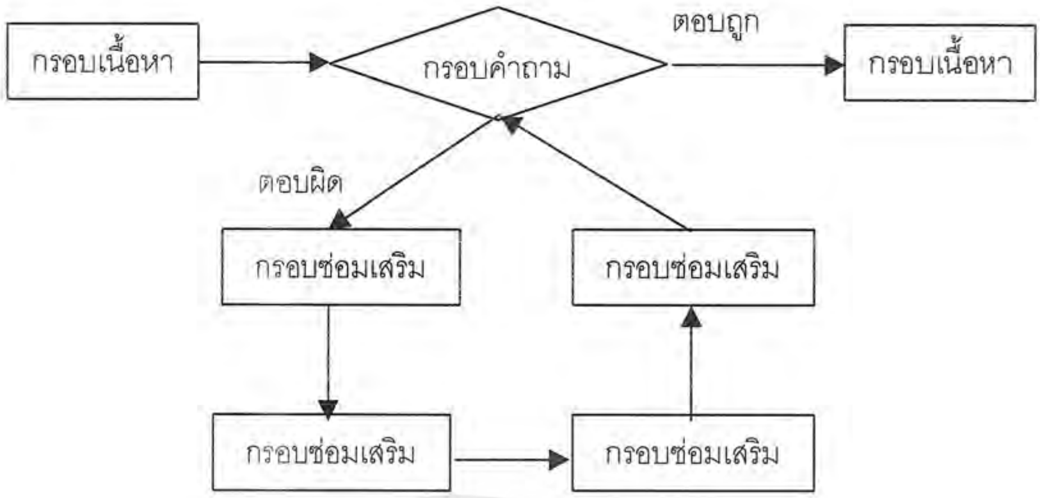
บทเรียนลักษณะนี้ ถ้าผู้เรียนตอบถูกจะได้รับข้อมูลป้อนกลับในทางบวกและเรียนเนื้อหาในกรอบต่อไป หากตอบผิดผู้เรียนก็จะได้รับการสอนซ่อมเสริมก่อนไปเนื้อหากรอบต่อไป เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ และแบบฝึกฝนและฝึกหัด



รูปที่ 2.47 แสดงผังแบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยว

<u>แบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม</u> *(Remedial loops)*

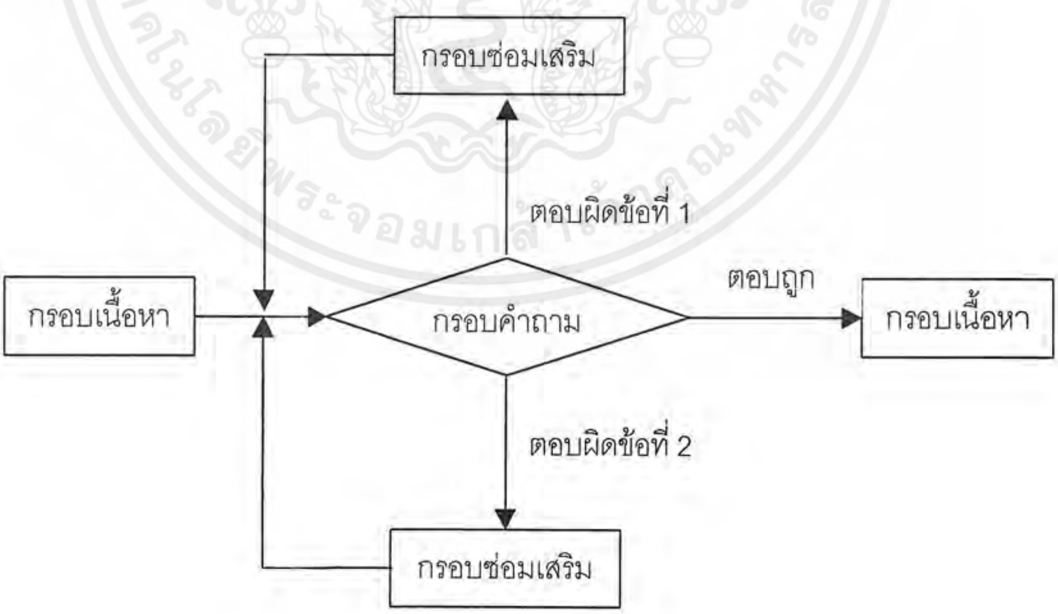
แบบนี้มีลักษณะคล้ายคลึงกับแบบกรอบซ่อมเสริมเดี่ยวต่างกันตรงที่แบบนี้จะประกอบด้วยกรอบซ่อมเสริมหลายกรอบประกอบกันเป็นชุดบทเรียนย่อย 5-6 กรอบ เพื่อให้ความรู้และข้อมูลที่ผู้เรียนยังขาดอยู่ก่อนที่จะส่งผู้เรียนกลับไปกรอบเนื้อหาเดิม เหมาะกับ CAI แบบทบทวนความรู้และแบบฝึกฝนและฝึกหัด



รูปที่ 2.48 แสดงผังโครงสร้างแบบมีห่วงกรอบซ่อมเสริม

<u>แบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง</u> (Multiple remedial branchs)

แบบนี้จะประกอบด้วยกรอบเนื้อหาที่ให้ข้อมูล แล้วตามด้วยกรอบซ่อมเสริมตั้งแต่ 2 กรอบขึ้นไป กรอบคำถามแต่ละกรอบจะมีกิ่งแยกออกมาตามจำนวนข้อของตัวเลือกในคำถามแบบเลือกตอบนั้น เพื่อไปยังกรอบซ่อมเสริม แล้วจึงจะส่งผู้เรียนมายังกรอบคำถามเดิม เพื่อให้ผู้เรียนตอบคำถามในกรอบนั้นใหม่ และเลือกคำตอบอื่น เหมาะกับ CAI แบบทบทวนความรู้ และแบบฝึกฝนฝึกหัด

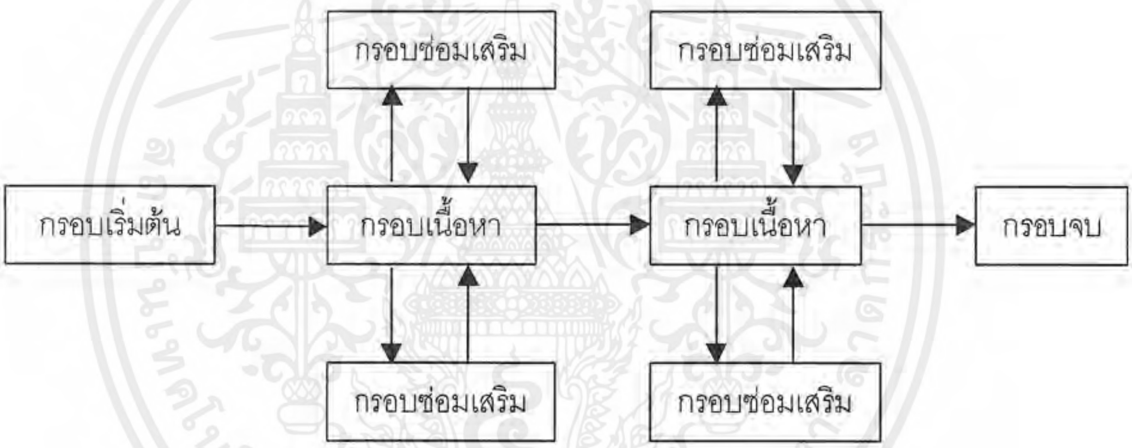


รูปที่ 2.49 แสดงผังแบบกรอบซ่อมเสริมหลายกิ่ง

<u>แบบแตกกิ่งคู่</u> (Branching frame sequence)

ประกอบด้วยกรอบเนื้อหาที่แตกเป็นกรอบซ่อมเสริมสองกรอบ ถ้าผู้เรียนตอบคำถามของกรอบเนื้อหาได้ถูกต้องจะทำให้ผู้เรียนผ่านจากกรอบเนื้อหาหนึ่งไปยังอีกกรอบเนื้อหาหนึ่ง แต่ถ้าตอบผิดก็จะต้องไปยังกรอบซ่อมเสริมแล้วจึงกลับไปยังกรอบเนื้อหาเดิมเพื่อศึกษาและตอบคำถามใหม่อีกครั้ง

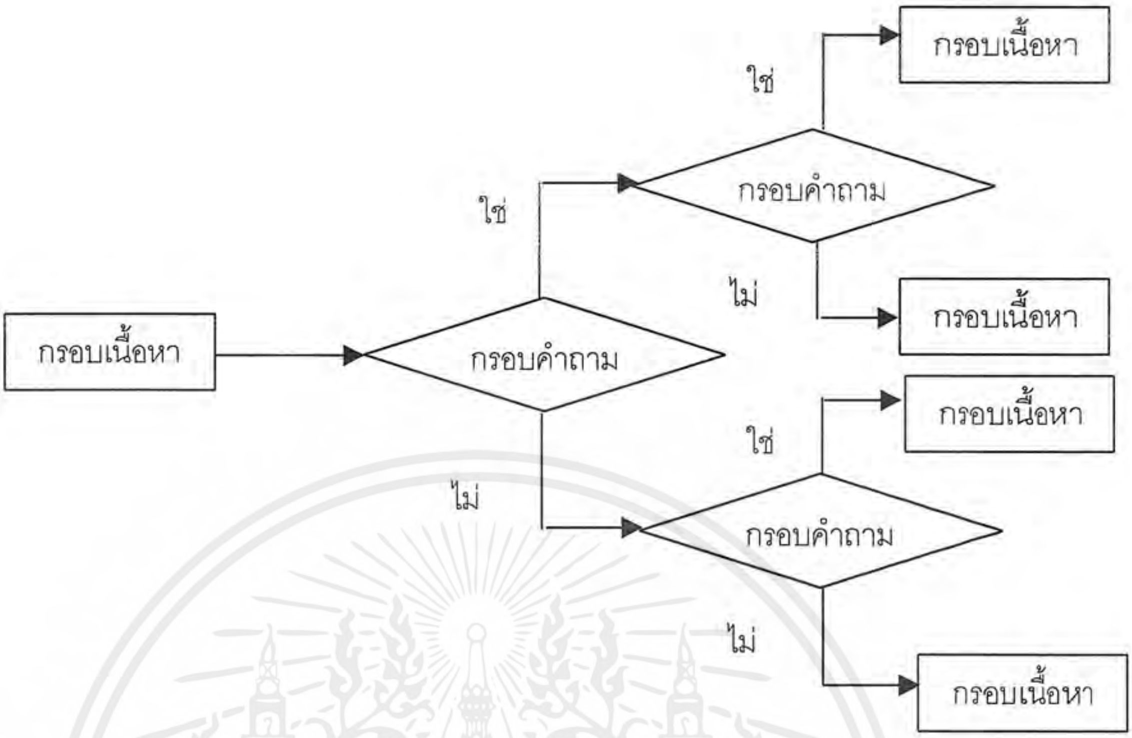
กรอบเนื้อหาควรมีข้อความที่แสดงว่าผู้เรียนตอบถูกโดยให้คำชมเชยก่อนที่จะเมเข้าสู่เนื้อหาต่อไป ตามด้วยคำถามจากสถานการณ์ที่เป็นปัญหา พร้อมให้เลือกตอบสนองจากตัวเลือกสามตัว ส่วนกรอบซ่อมเสริมควรมีข้อความเริ่มต้นที่แสดงว่าตอบผิดในลักษณะที่ไม่ทำให้ผู้เรียนเสียกำลังใจ ตามด้วยคำอธิบายว่าเหตุใดจึงไม่ใช่คำตอบที่ถูกแต่ไม่บอกให้ทราบคำตอบที่ถูกโดยตรง เหมาะต่อ CAI แบบทบทวนความรู้ แบบฝึกฝนและฝึกหัด แบบสถานการณ์จำลอง และแบบหนังสืออิเลคทรอนิคส์



รูปที่ 2.50 แสดงผังโครงสร้างแบบแตกกิ่งคู่

<u>แบบกิ่งประกอบ</u> (Compound branchs)

ใช้กันมากในการเรียนเพื่อวินิจฉัยความบกพร่องของผู้เรียน กิ่งที่แยกจากแต่ละกรอบคำถามจะแยกไปสู่กรอบเนื้อหาใหม่ตามความรู้ความเข้าใจและความสามารถที่แตกต่างกันระหว่างบุคคล



รูปที่ 2.51 แสดงผังแบบกิ่งประกอบ

บทที่ 3
การออกแบบโปรแกรม

3.1 แนะนำ Authorware

Authorware เป็นโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างงานที่เรียกว่า "Presentation" หรือการนำเสนอข้อมูลซึ่งคล้ายกับโปรแกรม Microsoft Powerpoint แต่จะมีประสิทธิภาพมากกว่า จึงสามารถสร้างงานได้หลากหลายรูปแบบกว่าและ Authorware ยังเป็นโปรแกรมที่มีความสามารถสร้างงานที่เป็นลักษณะมัลติมีเดีย (Multimedia) ที่การแสดงผล อาจจะเป็นข้อความ รูปภาพกราฟฟิก การเคลื่อนที่ หรือภาพเคลื่อนไหว เสียงประกอบ และสามารถแสดงผลได้พร้อม ๆ กันด้วย นอกจากนั้นยังสามารถสร้างการโต้ตอบกับผู้ใช้ (Interactive) ได้อย่างเหมาะสมกับชิ้นส่วนและเนื้อหาของข้อมูล เช่นการแสดงผลการเลือกคำตอบว่าถูกหรือผิด เป็นต้น

Authorware มีความสามารถในการสร้างโครงสร้างโปรแกรมได้ทันที โดยไม่ต้องเขียนลงกระดาษ โดยออกแบบการทำงานเหมือนกับการเขียนผังงาน (flowchart) แต่ที่พิเศษกว่าคือ Authorware จะสร้างโปรแกรมตามการทำงานที่ออกแบบมาให้ทันทีโดยที่เราไม่ต้องเขียนโปรแกรมภาษา(Coding) ขึ้นมาเอง เพียงแต่ออกแบบมาว่าต้องการอะไรก็พอ โดย Authorware จะมีสัญลักษณ์หรือไอคอน เป็นตัวแทนคำสั่งต่าง ๆ ที่ใช้ในการสร้าง Application เราเพียงแต่นำไอคอนที่เราต้องการมาวางบนเส้น Flowline จากนั้น Authorware ก็จะแสดงผลตามที่เรากำหนดไว้ ซึ่งทำให้แม้แต่ผู้ที่ไม่ได้เป็นโปรแกรมเมอร์ก็สามารถสร้างงานขึ้นมาเองได้ โดยไม่ต้องกังวลเกี่ยวกับภาษาโปรแกรม

3.2 ระบบฮาร์ดแวร์ ที่ Authorware ต้องการ

3.2.1 ระบบฮาร์ดแวร์ที่ใช้ในการออกแบบ Application

3.2.1.1 สำหรับระบบปฏิบัติการ Windows

- CPU 486หรือสูงกว่า ขอแนะนำให้เป็น Pentium
- ระบบปฏิบัติการ Windows 95 หรือ Windows NT (3.51-4.0)
- หน่วยความจำ (RAM) อย่างต่ำ 16 MB
- CD-ROM Drive
- การ์ดแสดงผล 640x480 , 256-color display
- พื้นที่ว่างบนฮาร์ดดิสก์ อย่างต่ำ 85 MB
- ระบบเสียง (Sound Card)ควรเป็นSound Blasterหรือคอมแพทิเบิล
- สนับสนุน AVI and QuickTime for Windows

3.2.1.2 **สำหรับเครื่องแมคอินทอช**

- CPU 68040 หรือสูงกว่า ขอแนะนำให้เป็น Power Macintosh
- หน่วยความจำ (RAM) อย่างต่ำ 16 MB
- CD-ROM Drive
- การ์ดแสดงผล 640x480 , 256-color display
- พื้นที่ว่างบนฮาร์ดดิสก์ อย่างต่ำ 85 MB
- AV Capability

3.2.2 **ระบบฮาร์ดแวร์ที่ใช้** run Application **ที่สร้างจาก** Authorware

3.2.2.1 **สำหรับระบบปฏิบัติการ** Windows

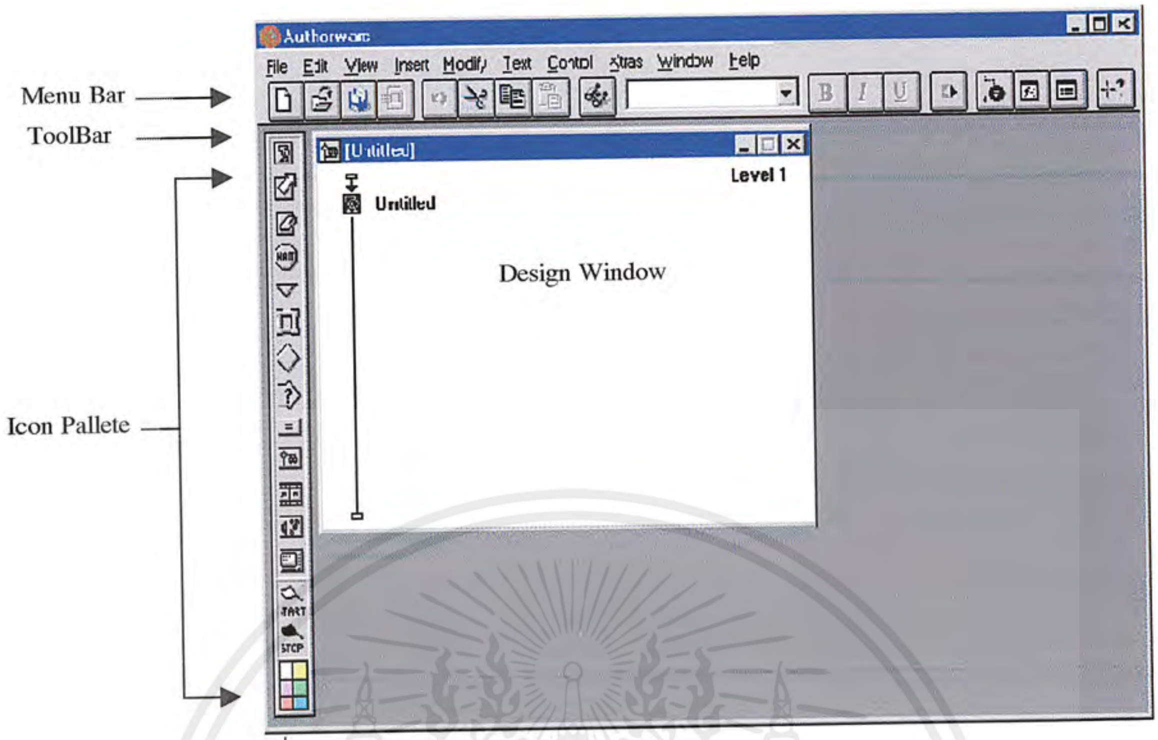
- CPU 486หรือสูงกว่า ขอแนะนำให้เป็น Pentium
- ระบบปฏิบัติการ Windows 3.1 , Windows 95 หรือ Windows NT (3.51-4.0)
- หน่วยความจำ (RAM) อย่างต่ำ 8 MB แต่ควรมีขนาด 12 MB ขึ้นไป จะให้ผลที่ดีกว่า

3.2.2.2 **สำหรับเครื่องแมคอินทอช**

- CPU 68040 หรือสูงกว่า ขอแนะนำให้เป็น Power Macintosh
- ระบบปฏิบัติการแมคอินทอช 7.5.1 หรือสูงกว่า
- หน่วยความจำ (RAM) อย่างต่ำ 8 MB แต่ควรมีขนาด 12 MB ขึ้นไป จะให้ผลที่ดีกว่า

3.3 **จอภาพของ** Authorware

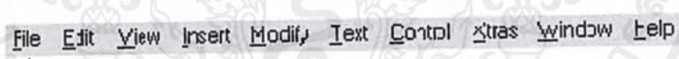
เมื่อเราเรียกโปรแกรม Authorware ขึ้นมา จะปรากฏ จอภาพของ Authorware ดังนี้



รูปที่ 3.1 แสดงจอภาพ Authorware

ซึ่งจอภาพของ Authorware จะประกอบด้วย

Menu Bar เป็นเมนูที่ใช้สำหรับแสดงคำสั่งต่าง ๆ และควบคุมการทำงานของ Authorware ซึ่งมีลักษณะการใช้งานคล้ายกับเมนูคำสั่งของโปรแกรมทั่ว ๆ ไป



รูปที่ 3.2 แสดงจอภาพ Menu Bar

ToolBar เป็นรูปภาพปุ่มคำสั่งที่มีการใช้งานบ่อย ๆ ซึ่งนำมาจากในเมนู นำมาสร้างเป็นไอคอนเล็ก ๆ เพื่อความสะดวกรวดเร็วในการทำงาน การใช้งานจะสื่อความหมายจากรูปภาพ ซึ่งถ้าเราไม่เข้าใจความหมายของ ToolBar อันใดให้เลื่อนเมาส์มาวางค้างไว้ที่ปุ่มนั้น จะมีข้อความบอกชื่อปุ่มคำสั่ง (ToolTip) แสดงให้เราเห็น และข้อความนี้จะหานไปเมื่อเราเลื่อนเมาส์ออกจากปุ่มนั้น ปุ่มต่าง ๆ ของ ToolBar มีดังนี้

 New ใช้สำหรับสร้างไฟล์ใหม่

 Open ใช้สำหรับเรียกไฟล์เก่าขึ้นมาใช้งาน


Save All ใช้สำหรับบันทึกไฟล์ลงในแผ่นดิสก์หรือฮาร์ดดิสก์


Import ใช้สำหรับนำเข้าไฟล์ที่ต้องการ


Undo ใช้สำหรับเรียกคำสั่งก่อนหน้าที่จะใช้คำสั่งปัจจุบัน


Cut ใช้สำหรับลบรายการหรือไอคอนที่ไม่ต้องการ


Copy ใช้สำหรับคัดลอกรายการที่ต้องการ


Paste ใช้สำหรับตัด-ปะรายการที่เลือก


Find ใช้สำหรับเปิด Dialog Box เพื่อการค้นหา

Text Styles ใช้สำหรับกำหนดรูปแบบของตัวอักษร


Bold ใช้สำหรับกำหนดตัวอักษรให้เป็นตัวเข้ม


Italic ใช้สำหรับกำหนดตัวอักษรให้เป็นตัวเอียง


Underline ใช้สำหรับขีดเส้นใต้ให้กับตัวอักษร


Restart ใช้สำหรับรันโปรแกรมจากจุดเริ่มต้นหรือจุดที่กำหนด

Control Panel ใช้สำหรับเปิดจอภาพ Control Panel

Functions Window ใช้สำหรับเปิดจอภาพ Functions

Variables Window ใช้สำหรับเปิดจอภาพ Variables

Help ใช้สำหรับเรียกไฟล์ข้อมูลให้ความช่วยเหลือ

Icon Pallete เป็นที่เก็บชุดคำสั่งรูปภาพหรือไอคอนเพื่อให้เรานำมาใช้ตามความต้องการ โดยการคลิกที่ไอคอนที่เราต้องการแล้วลากมาวางบน Flowline ซึ่งแต่ละไอคอนจะมีการทำงานดังนี้

Display Icon ใช้สำหรับแสดงข้อความหรือกราฟฟิกบนจอภาพโดยสามารถกำหนดรูปแบบการนำเสนอต่าง ๆ ให้เหมาะสมกับการนำเสนอได้

Motion Icon ใช้สำหรับสร้างการเคลื่อนที่ให้กับวัตถุที่เรากำหนด โดยสามารถกำหนดรูปแบบของการเคลื่อนที่ได้

Erase Icon ใช้สำหรับลบวัตถุหรือไอคอนที่ได้สร้างขึ้นหรือได้แสดงผลไปแล้วและสามารถกำหนดรูปแบบการลบได้จากtransition

Wait Icon ใช้สำหรับหยุดการทำงานของโปรแกรมเป็นการชั่วคราว เพื่อรอรับการตอบสนองจากผู้ใช้ตามเงื่อนไขการหยุดรอที่กำหนดไว้

Navigation Icon ใช้สำหรับสร้างการเชื่อมโยงระหว่างไอคอนต่างๆที่อยู่ในFramework Icon ซึ่งจะมีหลายรูปแบบให้เลือก

Framework Icon ใช้สำหรับสร้างโครงสร้างหลักให้กับชิ้นส่วนต่าง ๆ มีลักษณะคล้าย ๆ กับเมนูที่มีทางเลือกอยู่ภายใน

Decision Icon ใช้สำหรับสร้างเส้นทางเลือกสำหรับการตัดสินใจและการประเมินผล

Interaction Icon ใช้สำหรับตรวจสอบการตอบสนองจากผู้ใช้ตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้

Calculation Icon ใช้สำหรับสร้างสมการหรือกำหนดค่าให้กับตัวแปร รวมทั้งการตรวจสอบค่าของตัวแปรด้วย

Map Icon ใช้สำหรับจัดกลุ่มให้กับไอคอนต่าง ๆ โดยการจัดกลุ่มนี้จะไม่มีผลกระทบต่อการทำงานและลำดับการทำงาน

Movie Icon ใช้สำหรับเรียกไฟล์ Movie และควบคุมการแสดงผลของภาพเคลื่อนไหวตามรูปแบบของไฟล์ข้อมูล

Sound Icon ใช้สำหรับเรียกไฟล์ข้อมูลเสียงและทำการควบคุมการแสดงผลของไฟล์เสียงด้วย

Video Icon ใช้สำหรับควบคุมการแสดงผลของเฟรมแต่ละเฟรมของวีดีโอภายนอกที่ติดต่อกับเครื่องคอมพิวเตอร์

Start Flag ใช้สำหรับกำหนดจุดเริ่มต้นของการรันโปรแกรมเป็นช่วงๆ โดยใช้ควบคู่กับ Stop Flag

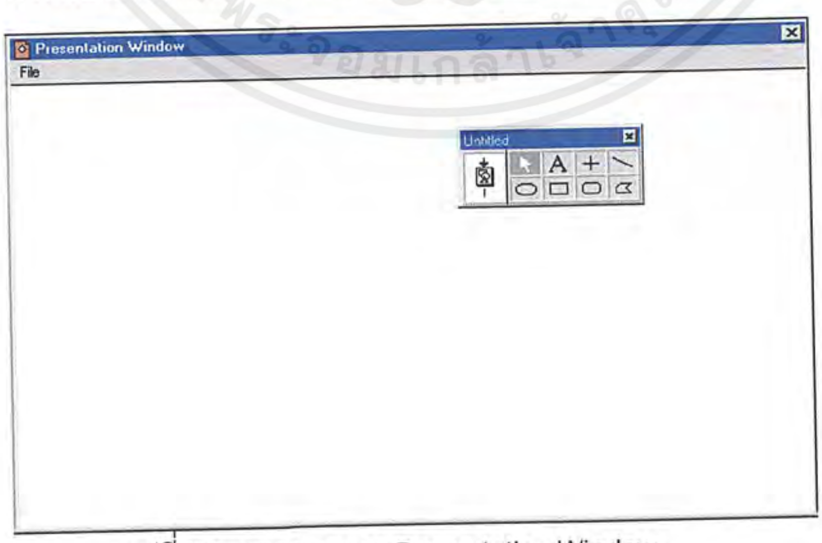
Stop Flag ใช้สำหรับกำหนดจุดสิ้นสุดของการรันโปรแกรมเป็นช่วง โดยจะใช้ควบคู่กับ Start Flag

Color Pallete Icon ใช้สำหรับกำหนดสีให้กับไอคอน เพื่อให้ไอคอนที่เราต้องการเด่นขึ้น ทำให้สะดวกและง่ายต่อการค้นหา

Flowline เป็นเส้นทางเดินของโปรแกรม ที่เกิดจากการนำไอคอนมาวางเรียงลำดับกัน

Design Window เป็นกรอบหน้าต่าง ที่ใช้สำหรับการออกแบบ Application

Presentation Window เป็นกรอบหน้าต่างที่จะเกิดการนำเสนอข้อความรูปภาพที่เกิดจากการวางไอคอนเรียงลำดับกันบน Flowline ที่ Design Window

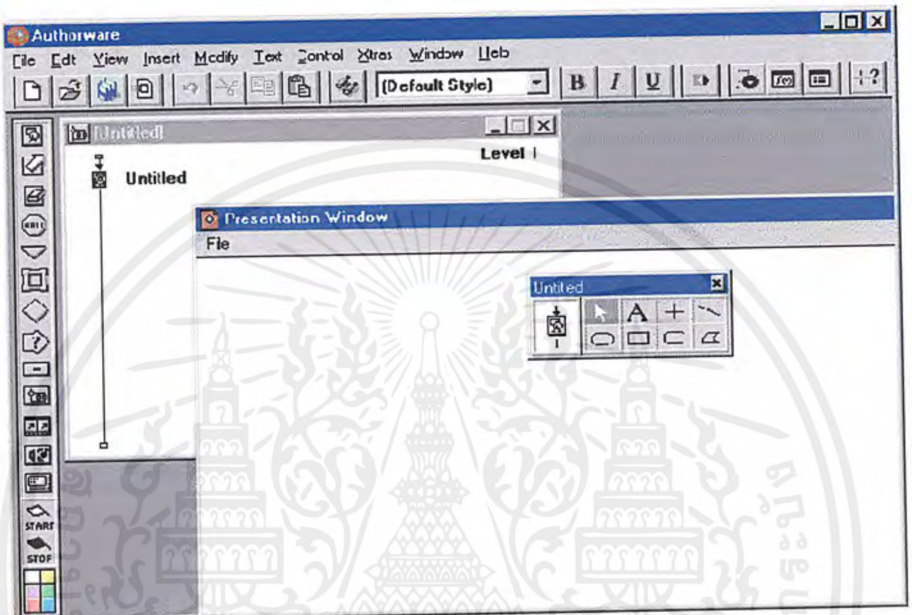


รูปที่ 3.3 แสดงจอภาพ Presentation Window

3.4 การสร้าง Application

3.4.1 การเรียกใช้ไอคอน

1. เลื่อน Mouse ไปคลิกที่ไอคอนที่เราต้องการ กดปุ่ม Mouse ซ้ายค้างไว้ จากนั้นลากมาวางบน Flowline
2. ดับเบิ้ลคลิกที่ไอคอน ก็จะเข้าไปยังหน้าจอ Presentation หรือ หน้าจอ Property ของไอคอนนั้น ๆ



รูปที่ 3.4 แสดงจอภาพการเรียกใช้ไอคอน

3.4.2 การตั้งชื่อให้ไอคอน

1. ใช้ Mouse คลิกที่รูปหรือที่ชื่อของไอคอนที่เราต้องการตั้งชื่อ บน Flowline
2. จะปรากฏแถบสว่างที่รูปและที่ชื่อของไอคอน พิมพ์ชื่อที่ต้องการทับลงไป จากนั้นกด Enter

รูปที่ 3.5 แสดงจอภาพเมื่อคลิกที่ไอคอนที่ต้องการตั้งชื่อ

รูปที่ 3.6 แสดงจอภาพการตั้งชื่อให้ไอคอนที่เลือกไว้

รูปที่ 3.7 แสดงจอภาพการตั้งชื่อให้ไอคอน

3.4.3 การย้ายตำแหน่งไอคอนบน Flowline โดยการย้ายครั้งละ 1 ไอคอน

1. คลิกที่ไอคอนที่ต้องการย้ายตำแหน่ง กดปุ่ม Mouse ซ้ายค้างไว้
2. ลากไอคอนนั้น ๆ ไปวางในตำแหน่งที่ต้องการบน Flowline

รูปที่ 3.8 แสดงจอภาพการย้ายไอคอนครั้งละ 1 ไอคอน

3.4.4 การย้ายตำแหน่งไอคอนบนFlowlineโดยการย้ายครั้งละมากกว่า 1 ไอคอน

1. เลือกไอคอนที่ต้องการย้ายตำแหน่ง โดยการเลือกไอคอนครั้งละมากกว่า 1 ไอคอน สามารถทำได้ 2 วิธีดังนี้

   <u>วิธีที่ 1</u> กดปุ่ม Shift ค้างไว้ และคลิก Mouse ที่ไอคอนต่าง ๆ ที่เราต้องการเลือก ซึ่งจะปรากฏแถบสว่างที่ไอคอนที่ได้เลือกไว้

วิธีที่ 2 คลิก Mouse ที่ไอคอนแรกซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของกลุ่มไอคอนที่เราต้องการเลือก กดปุ่ม Mouse ทางซ้ายค้างไว้ แล้วลากไปยังไอคอนสุดท้ายที่ต้องการเลือก จะปรากฏรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าล้อมกรอบไอคอนที่เลือกไว้ ปล่อย Mouse จะปรากฏแถบสว่างที่ไอคอนที่ได้เลือกไว้

รูปที่ 3.9 แสดงจอภาพการเลือกไอคอนที่ต้องการย้าย

รูปที่ 3.10 แสดงจอภาพไอคอนที่ได้เลือกไว้

2. เลือกคำสั่ง Edit , Cut จากนั้นเลื่อน Mouse ไปยังตำแหน่งที่ต้องการบน Flowline คลิก Mouse 1 ครั้งจะปรากฏรูปมือขึ้นมาชี้ไปที่ตำแหน่งที่เราต้องการบนเส้น Flowline
3. เลือกคำสั่ง Edit , Paste ไอคอนที่เลือกไว้จะปรากฏตรงตำแหน่งที่เราต้องการ

รูปที่ 3.11 แสดงจอภาพการย้ายไอคอนครั้งละมากกว่า 1 ไอคอน

3.4.5 การคัดลอก (Copy) ไอคอน

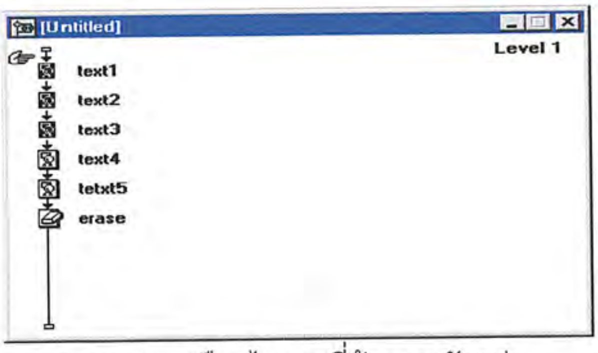
1. เลือกไอคอนที่เราต้องการ Copy (ถ้าจะ Copy ครั้งละมากกว่า 1 ไอคอน ให้ทำการเลือกไอคอนแบบเดียวกับการย้ายไอคอนครั้งละมากกว่า 1 ไอคอน)
2. เลือกคำสั่ง Edit , Copy
3. เลื่อน Mouse ไปคลิกยังตำแหน่งที่ต้องการบน Flowline
4. เลือกคำสั่ง Edit , Paste จะปรากฏไอคอนที่เราได้ Copy ไว้

รูปที่ 3.12 แสดงจอภาพการคัดลอกไอคอน

3.4.6 การจัดกลุ่มให้กับไอคอน

เนื่องจากจอภาพ Design Window มีความยาวเท่าที่กำหนดมาไม่สามารถขยายเพิ่มเติมให้ยาวขึ้นได้ ดังนั้นหากเราเรียกใช้ไอคอนจำนวนมาก จะไม่สามารถวางบน Flowline ได้หมด จึงต้องมีการจัดกลุ่มให้กับไอคอน ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้

1. เลือกไอคอนที่เราต้องการจัดกลุ่ม (เลือกวิธีเดียวกับการย้ายไอคอนครั้งละมากกว่า 1 ไอคอน)

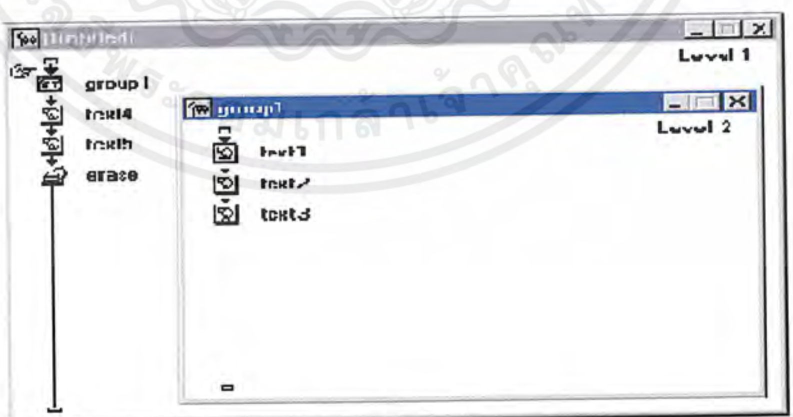


รูปที่ 3.13 แสดงจอภาพการเลือกไอคอนที่ต้องการจัดกลุ่ม

2. เลือกคำสั่ง Modify , Group จะได้ไอคอนใหม่ขึ้นมา ให้ตั้งชื่อตามที่เราต้องการ

รูปที่ 3.14 แสดงจอภาพการจัดกลุ่มให้ไคอน

3. การเรียกใช้ก็ทำได้โดยการ ดับเบิ้ลคลิกที่ไอคอนนั้น จะปรากฏ Design Window ย่อยขึ้นมาและมีไอคอนที่เราจัดกลุ่มไว้ปรากฏอยู่ในนั้น



รูปที่ 3.15 แสดงจอภาพการเปิดไอคอนที่ได้จัดกลุ่มไว้

4. หากต้องการยกเลิกการจัดกลุ่ม ให้เลือกไอคอนที่ต้องการยกเลิกการจัดกลุ่ม จากนั้นเลือกคำสั่ง Modify , Ungroup

3.4.7 การบันทึก (Save)ไฟล์

1. เลือกคำสั่ง File , เลือกรูปแบบการบันทึกที่ต้องการ ซึ่งมีดังต่อไปนี้

- Save ใช้สำหรับบันทึกเมื่อมีการสร้างไฟล์ใหม่ทุกครั้ง เพื่อตั้งชื่อไฟล์ โดยไฟล์ที่ได้จะมีนามสกุล .A5P

- Save As ใช้สำหรับในกรณีที่มีการเรียกไฟล์เก่าขึ้นมาใช้งาน เมื่อมีการแก้ไขข้อมูลและต้องการบันทึกเป็นไฟล์ใหม่

- Save and Compact ใช้สำหรับบันทึกข้อมูลแต่ใช้จำนวนเนื้อที่น้อยกว่าการบันทึก 2 แบบแรก

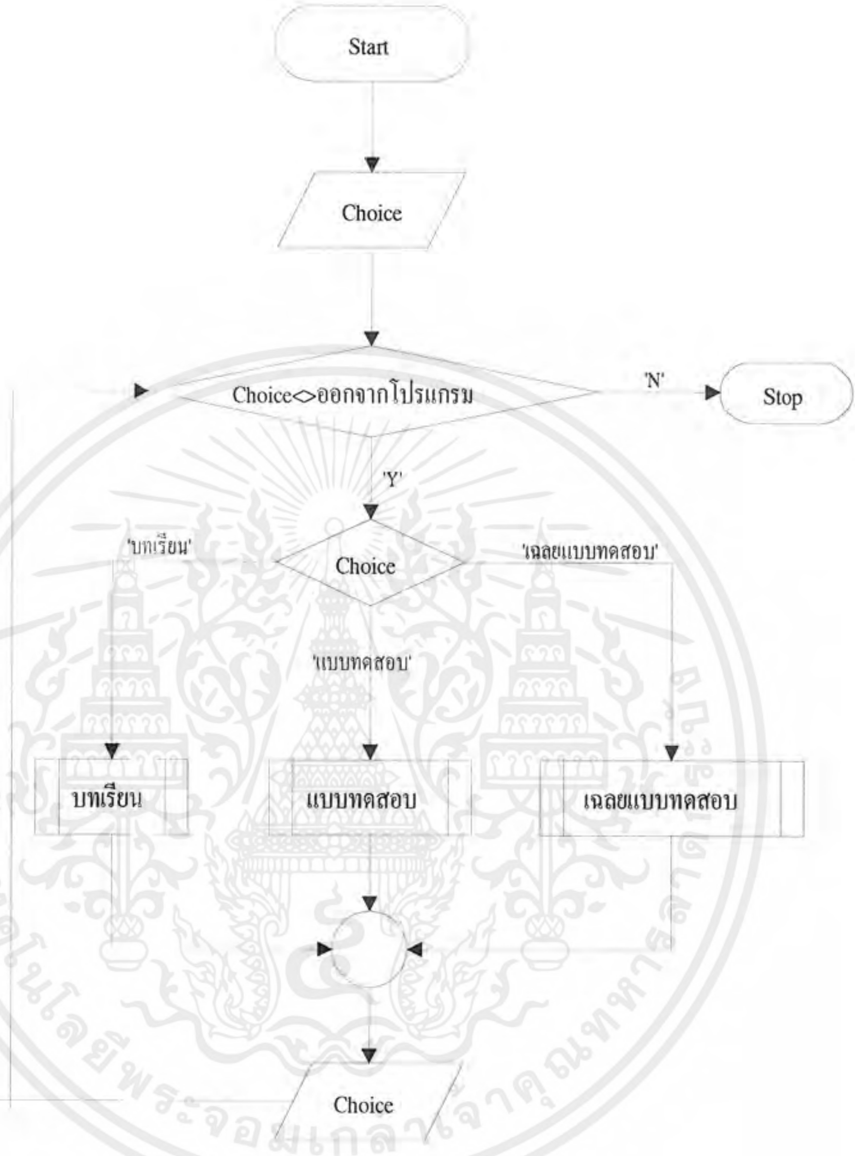
- Save All ใช้สำหรับบันทึกข้อมูลในกรณีที่มีการเรียกไฟล์เก่าขึ้นมา และต้องการบันทึกไฟล์ในชื่อเดิม โดยจะไม่มีข้อความเตือนว่า "ชื่อไฟล์นี้มีอยู่แล้วต้องการ Save ทับหรือไม่"

3.5 ผังการทำงานของ โปรแกรม

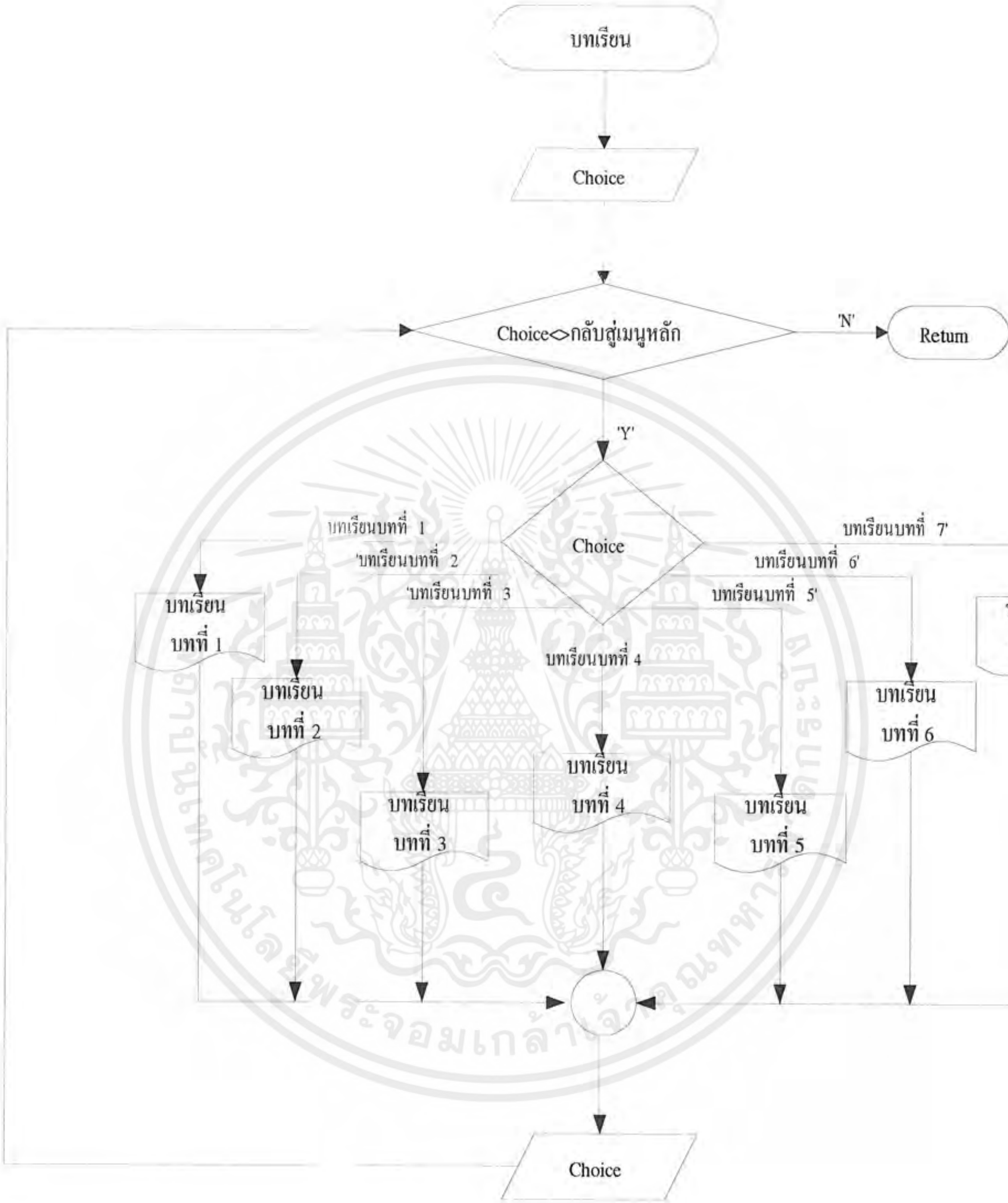
ผังการทำงานของโปรแกรมช่วยสอนสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนนี้แบ่งการทำงานออกเป็น 4ส่วน หลัก ๆ ดังนี้

- ส่วนของหน้าจอเมนูหลัก
- ส่วนของบทเรียน
- ส่วนของแบบทดสอบ
- ส่วนของเฉลยแบบทดสอบ

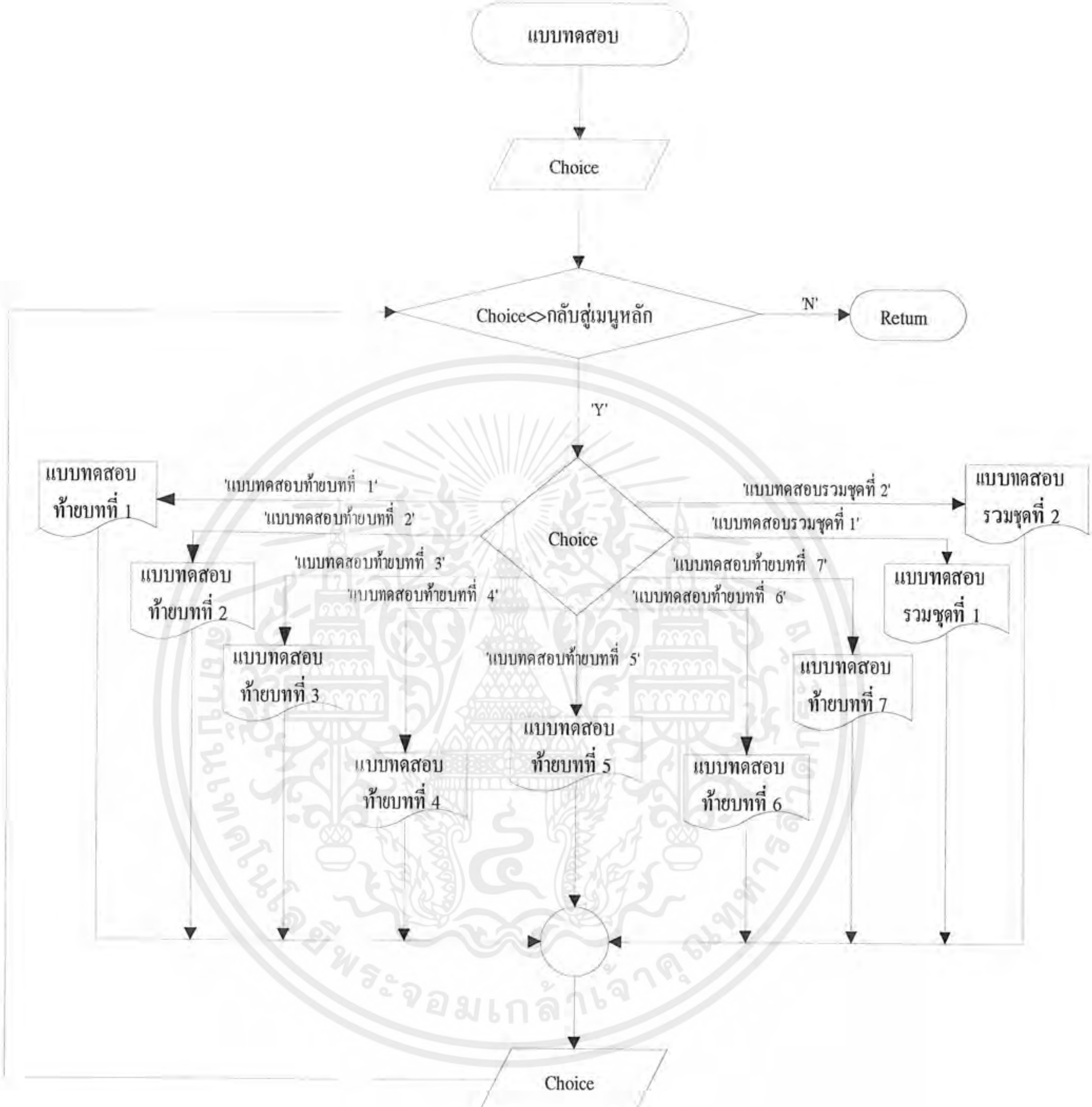
ซึ่งแต่ละส่วนจะมีผังการทำงาน (Flow Chart) ดังนี้



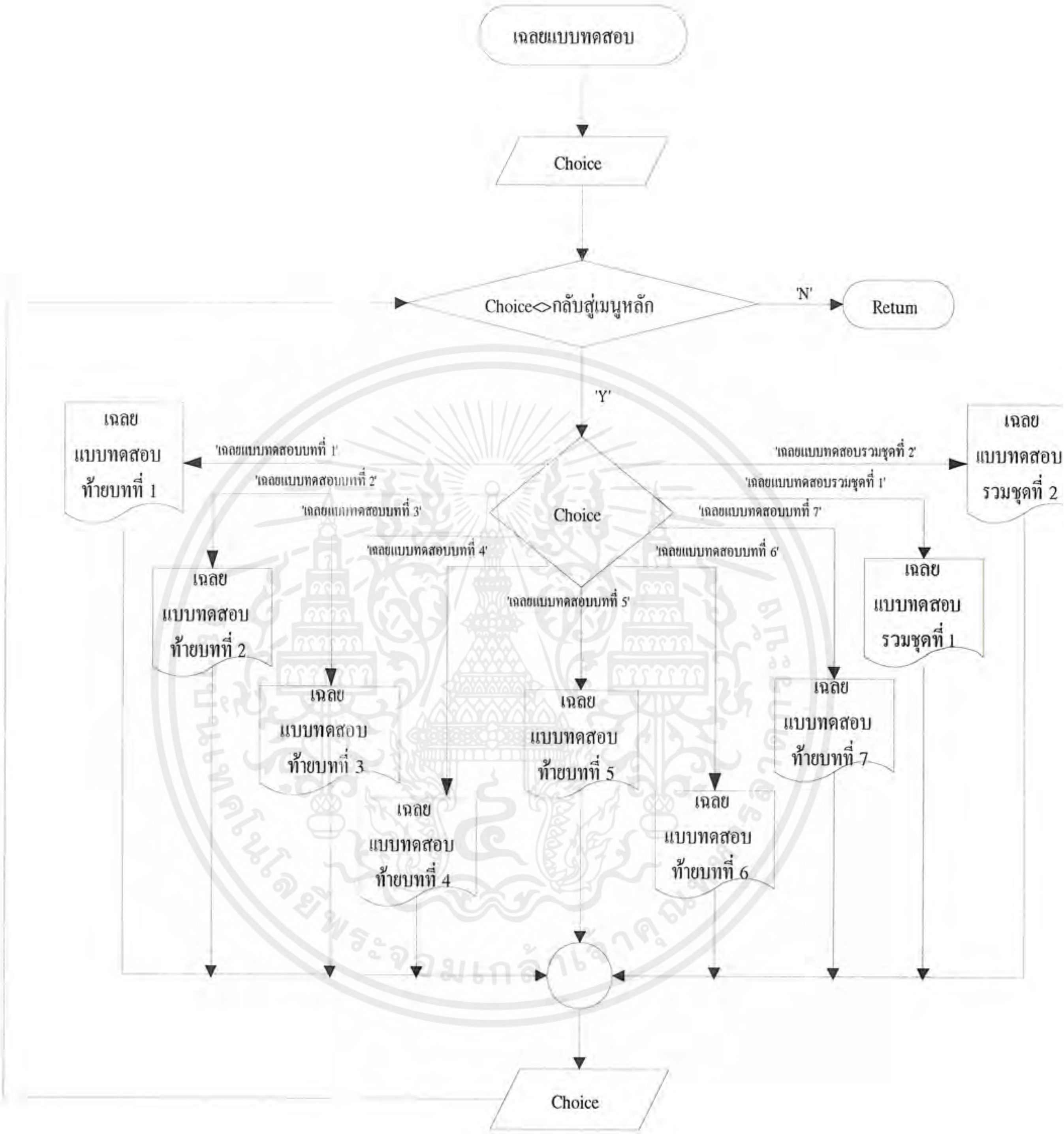
รูปที่ 3.16 แสดงผังการทำงานในส่วนของหน้าจอเมนูหลัก



รูปที่ 3.17 แสดงผังการทำงานในส่วนของบทเรียน



รูปที่ 3.18 แสดงผังการทำงานในส่วนของแบบทดสอบ



รูปที่ 3.19 แสดงผังการทำงานในส่วนของเฉลยแบบทดสอบ

<u>หมายเหตุ</u> จากรูป 3.17 , 3.18 และ 3.19 มีคำอธิบายเพิ่มเติม ดังนี้

บทที่ 1 หมายถึง เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

บทที่ 2 หมายถึง เรื่องฟังก์ชันวิเคราะห์

บทที่ 3 หมายถึง เรื่องฟังก์ชันมูลฐาน

บทที่ 4 หมายถึง เรื่องอินทิกรัลเชิงซ้อน

บทที่ 5 หมายถึง เรื่องอนุกรม

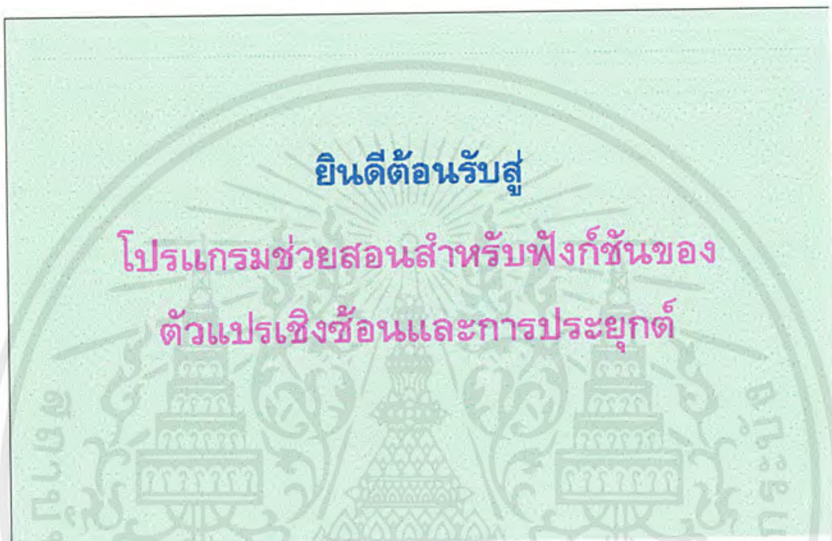
บทที่ 6 หมายถึง เรื่องเรซิดิว

บทที่ 7 หมายถึง เรื่องการส่งคงแบบและการประยุกต์

บทที่ 4
การนำเสนอ

4.1 เริ่มต้นโปรแกรม

จากบทที่แล้วเรานำผังการทำงานมาเขียนโปรแกรมจะได้โปรแกรมที่ทำสำเร็จแล้วอยู่ใน ไฟล์ชื่อ CAI_COMPLEX การเข้าสู่โปรแกรมทำได้โดยดับเบิ้ลคลิกที่ชื่อโปรแกรม จะปรากฏหน้าจอต้อนรับเข้าสู่โปรแกรม ดังรูป



รูปที่ 4.1 แสดงหน้าจอต้อนรับเข้าสู่โปรแกรม

4.2 ส่วนของเมนูหลัก

จากหน้าจอต้อนรับเข้าสู่โปรแกรม เมื่อคลิก mouse หรือกดปุ่มใด ๆ หรือรอสักครู่ หน้าจอจะเปลี่ยนเป็นหน้าจอเมนูหลัก ดังรูป

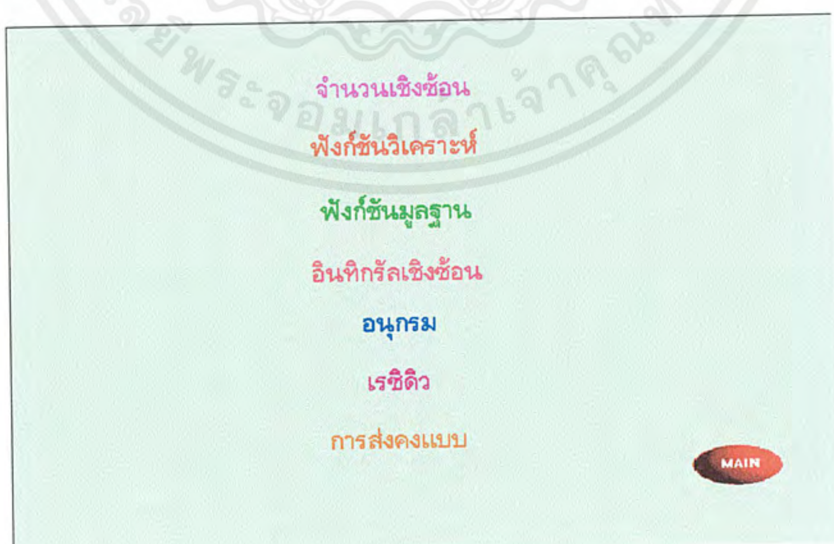
รูปที่ 4.2 แสดงหน้าจอเมนูหลัก

ซึ่งหน้าจอเมนูหลักจะประกอบด้วย เมนูดังต่อไปนี้

- บทเรียน เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เนื้อหาของบทเรียน
- แบบทดสอบ เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่แบบทดสอบ
- เฉลยแบบทดสอบ เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เฉลยของแบบทดสอบ
- ออกจากโปรแกรม เป็นเมนูที่ใช้เมื่อต้องการออกจากโปรแกรม

4.3 ส่วนของบทเรียน

จากหน้าจอเมนูหลัก เมื่อ คลิก mouse ไปที่ บทเรียน จะปรากฏหน้าจอเมนูบทเรียนซึ่งเป็นเนื้อหาทั้งหมด ดังรูป

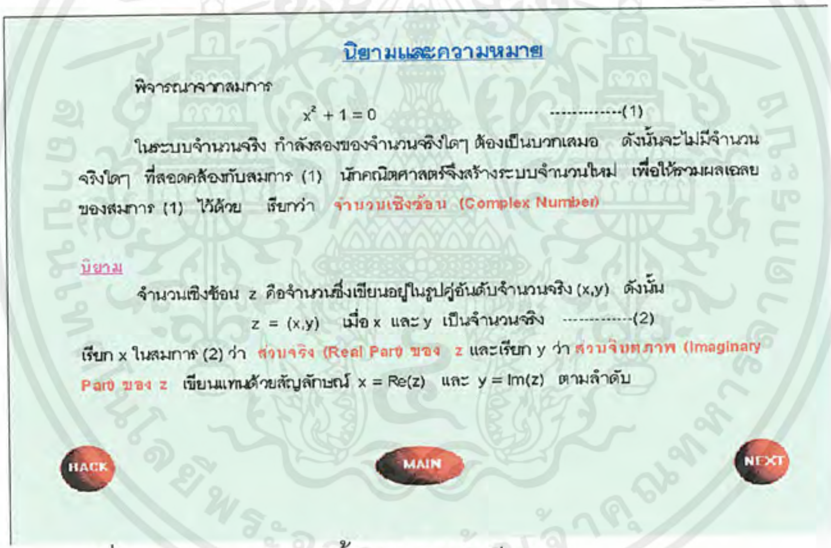


รูปที่ 4.3 แสดงหน้าจอเมนูบทเรียน

ซึ่งแต่ละเมนูมีรายละเอียดดังนี้

- จำนวนเชิงซ้อน เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เนื้อหาเรื่องจำนวนเชิงซ้อน
- ฟังก์ชันวิเคราะห์ เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันวิเคราะห์
- ฟังก์ชันมูลฐาน เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันมูลฐาน
- อินทิกรัลเชิงซ้อน เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เนื้อหาเรื่องอินทิกรัลเชิงซ้อน
- อนุกรม เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เนื้อหาเรื่องอนุกรม
- เรซิดิว เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เนื้อหาเรื่องเรซิดิว
- การส่งคงแบบ เป็นเมนูสำหรับเข้าสู่เนื้อหาเรื่องการส่งคงแบบและการประยุกต์
- ปุ่ม MAIN มีไว้สำหรับกลับสู่หน้าจอเมนูหลัก

เมื่อเราคลิกที่ เมนูใดเมนูหนึ่ง ก็จะเข้าสู่เนื้อหาของบทเรียนนั้น ๆ เช่นเราคลิกที่ จำนวนเชิงซ้อน ก็จะเข้าสู่เนื้อหาเรื่องจำนวนเชิงซ้อนดังรูป

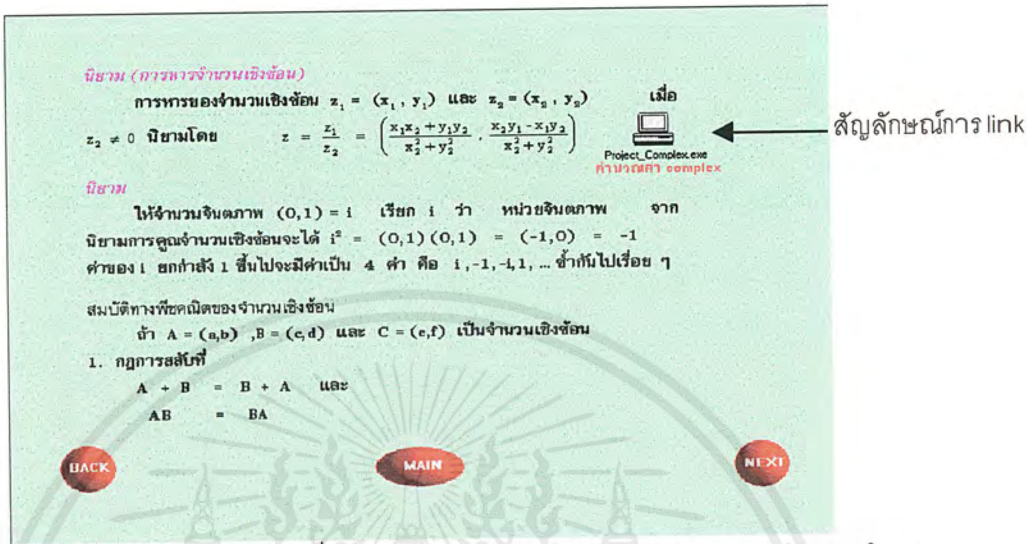


รูปที่ 4.4 แสดงหน้าจอเนื้อหาของบทเรียน

ซึ่งเมื่อเข้าสู่เนื้อหาแล้ว จะเห็นว่ามีปุ่มปรากฏอยู่ 3 ปุ่ม แต่ละปุ่มมีการทำงานดังนี้

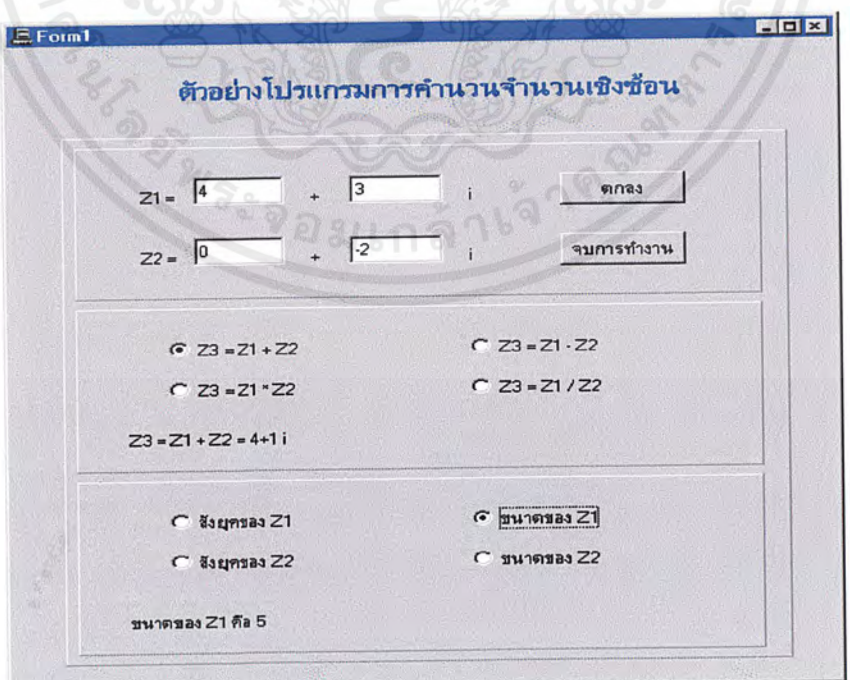
- ปุ่ม BACK ใช้สำหรับกลับสู่เนื้อหาหน้าที่แล้ว
- ปุ่ม NEXT ใช้สำหรับไปสู่เนื้อหาหน้าถัดไป
- ปุ่ม MAIN ใช้สำหรับกลับสู่หน้าจอเมนูหลัก

เมื่อเราศึกษาไปจนถึงหน้านิยามของการบวก ลบ คูณ และหาร แล้ว ในหน้าจอนี้จะมีการแทรกโปรแกรมช่วยในการคำนวณโดย link กับโปรแกรม Delphi เป็นการคำนวณหา การบวก ลบ คูณ หาร สังยุค และขนาด(ค่าสัมบูรณ์)ของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งจะมีสัญลักษณ์รูป computer ดังรูป



รูปที่ 4.5 แสดงหน้าจอที่มีสัญลักษณ์การ link ไปยังโปรแกรมช่วยในการคำนวณ

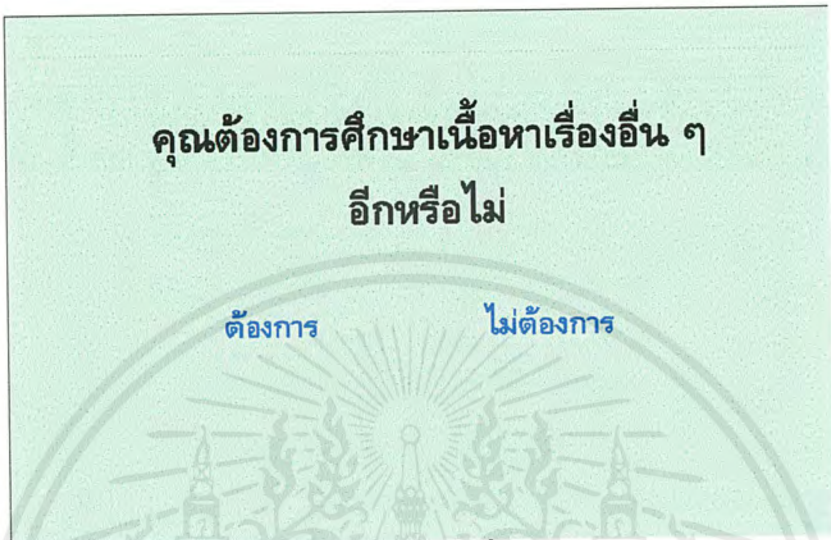
ซึ่งเมื่อเราคลิกที่สัญลักษณ์นี้ก็จะเข้าสู่หน้าจอการคำนวณ ซึ่งการทำงานในส่วนของโปรแกรมช่วยในการคำนวณนี้ ทำได้โดยใส่ค่าจำนวนเชิงซ้อนที่ต้องการและกดตกลงเพื่อให้ computer รับค่าไปคำนวณ จากนั้นเลือกรูปแบบการคำนวณก็จะได้ผลลัพธ์ที่ต้องการออกมา



รูปที่ 4.6 แสดงหน้าจอโปรแกรมช่วยในการคำนวณ

และสัญลักษณ์นี้ก็จะมีแทรกอยู่ในหน้าจอเนื้อหาในหัวข้อค่าสัมบูรณ์และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนอีกด้วย

และเมื่อเราศึกษาเนื้อหาไปจนจบเนื้อหาของแต่ละเรื่อง แล้วจะปรากฏข้อความถามว่า "คุณต้องการศึกษาเนื้อหาเรื่องอื่น ๆ อีกหรือไม่" ดังรูป

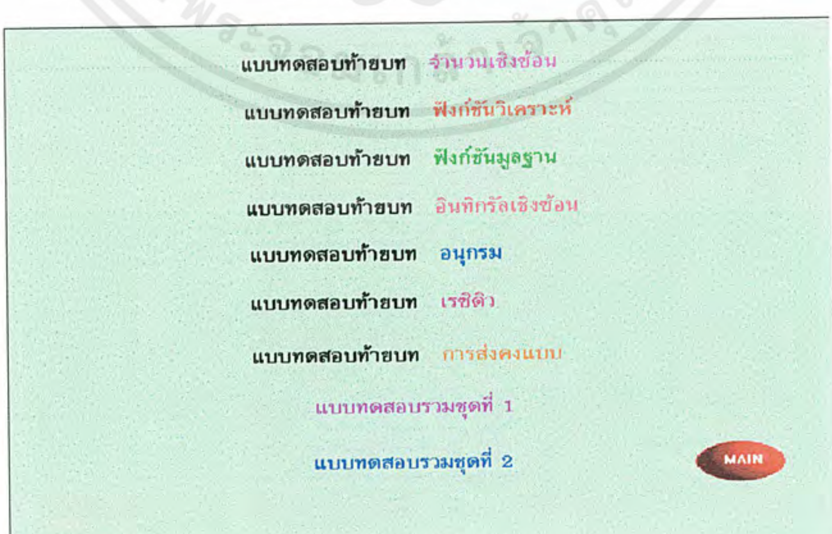


รูปที่ 4.7 แสดงหน้าจอสุดท้ายเมื่อจบเนื้อหา

ซึ่งถ้าต้องการให้คลิกที่ปุ่มต้องการ ก็จะกลับไปยังหน้าจอเมนูบทเรียน เพื่อให้เลือกบทเรียนเรื่องต่อไปที่เราต้องการศึกษา แต่ถ้าไม่ต้องการก็ให้คลิกที่ปุ่มไม่ต้องการ ก็จะกลับไปยังหน้าจอเมนูหลัก

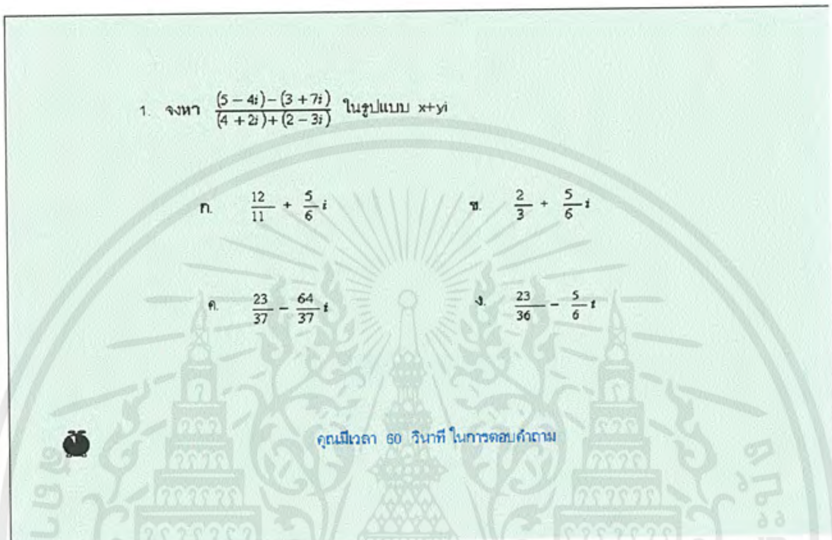
4.4 ส่วนของแบบทดสอบ

จากหน้าจอเมนูหลัก ถ้าเราคลิกที่ แบบทดสอบ ก็จะเข้าสู่หน้าจอเมนูแบบทดสอบ ดังรูป

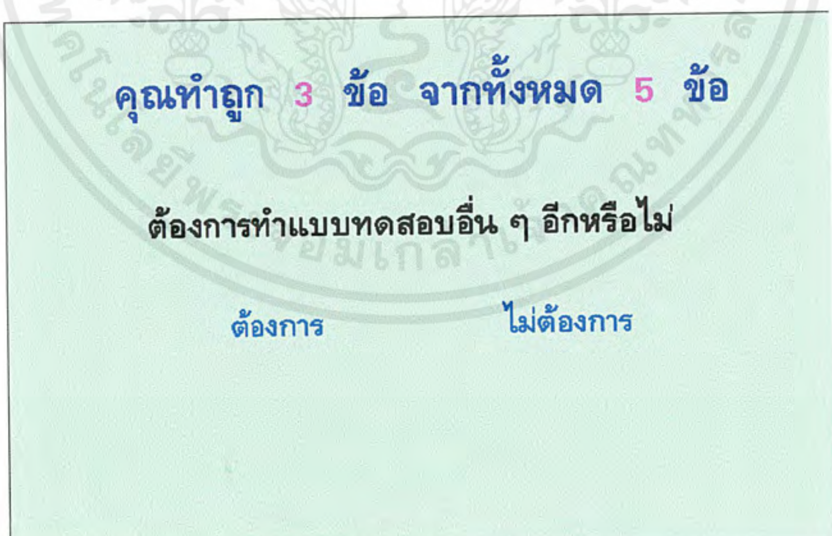


รูปที่ 4.8 แสดงหน้าจอเมนูแบบทดสอบ

ซึ่งจะมี 2 ส่วนด้วยกัน คือ ส่วนของแบบทดสอบท้ายบทของเนื้อหาแต่ละเรื่อง และส่วนของแบบทดสอบรวมซึ่งมี 2 ชุด หากต้องการทำแบบทดสอบใดก็คลิกที่เมนูนั้น ๆ เมื่อคลิกเข้าไปแล้วก็จะปรากฏคำถามข้อที่ 1 ซึ่งเมื่อเราคลิกเลือกคำตอบแล้วก็จะปรากฏคำถามข้อที่ 2 และจะไปเรื่อย ๆ จนครบทุกข้อ จากนั้นจะปรากฏหน้าจอรวมคะแนนว่าทำถูกกี่ข้อ และปรากฏข้อความถามว่า "ต้องการทำแบบทดสอบอื่น ๆ อีกหรือไม่" ซึ่งถ้าคลิกที่ต้องการก็จะกลับไปยังหน้าจอเมนูแบบทดสอบ แต่ถ้าคลิกที่ไม่ต้องการก็จะกลับไปยังหน้าจอเมนูหลัก



รูปที่ 4.9 แสดงหน้าจอคำถามของแบบทดสอบ



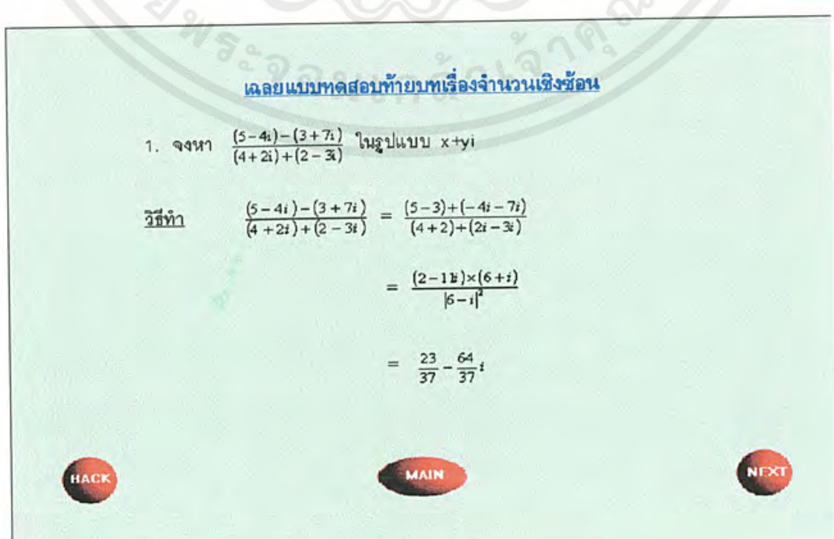
รูปที่ 4.10 แสดงหน้าจอสุดท้ายเมื่อจบแบบทดสอบ

4.5 ส่วนของเฉลยแบบทดสอบ

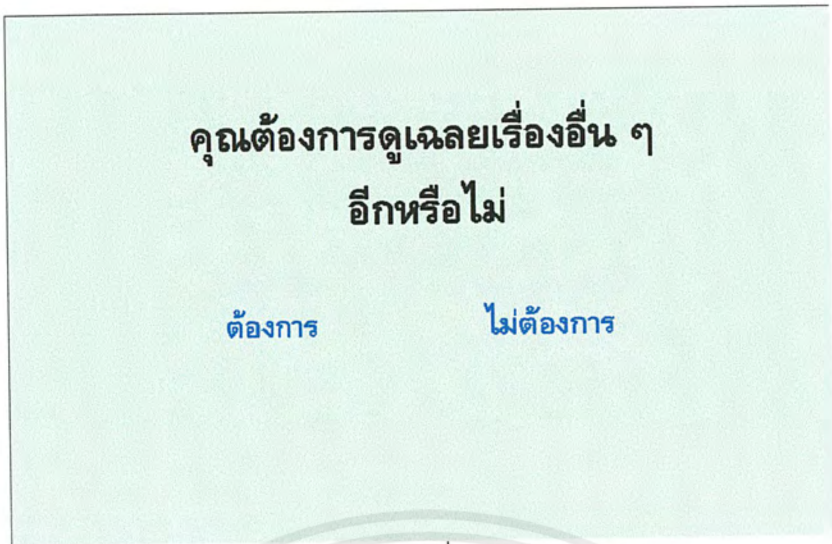
จากหน้าจอเมนูหลัก ถ้าเราคลิกที่ เฉลยแบบทดสอบ ก็จะเข้าสู่หน้าจอเมนูเฉลยแบบทดสอบ ดังรูป

รูปที่ 4.11 แสดงหน้าจอเมนูเฉลย

ซึ่งจะแบ่งเหมือนกับส่วนของแบบทดสอบเพราะเป็นการแลยแบบทดสอบแต่ละเรื่อง ซึ่งถ้าเราต้องการดูเฉลยเรื่องใด ก็ให้คลิกที่เรื่องนั้น ๆ เมื่อเข้าสู่เนื้อหาของเฉลยแบบทดสอบแล้ว จะปรากฏปุ่ม 3 ปุ่ม เหมือนกับส่วนของบทเรียน ซึ่งแต่ละปุ่มมีการทำงานเหมือนกับในส่วนของบทเรียน และเมื่อเราดูไปจนจบแล้ว ก็จะปรากฏข้อความถามว่า “ต้องการดูเฉลยเรื่องอื่น ๆ อีกหรือไม่” ซึ่งถ้าคลิกที่ต้องการก็จะกลับไปยังหน้าจอเมนูเฉลยแบบทดสอบ แต่ถ้าไม่ต้องการก็จะกลับไปยังหน้าจอเมนูหลัก



รูปที่ 4.12 แสดงหน้าจอเฉลยแบบทดสอบ



รูปที่ 4.13 แสดงหน้าจอสุดท้ายเมื่อจบเฉลยแบบทดสอบ

บทที่ 5
สรุป ประเมินผล และข้อเสนอแนะ

5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

โปรแกรมช่วยสอนสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์ เป็นโปรแกรมที่สร้างขึ้นเพื่ออำนวยความสะดวกในการเรียนการสอน หัวข้อหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์โดยโปรแกรมช่วยสอนนี้ประกอบด้วย ส่วนเนื้อหา ส่วนของแบบทดสอบ ส่วนของเฉลยแบบทดสอบ และได้เพิ่มโปรแกรมช่วยในการคำนวณแทรกไว้ในส่วนของเนื้อหา ซึ่งเป็นการคำนวณหา ผลบวก ลบ คูณ หาร ขนาด(ค่าสัมบูรณ์) และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

5.2 สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

ผลการวิจัยโปรแกรมช่วยสอนสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนและการประยุกต์สามารถสรุปขอบเขตประสิทธิภาพ โดยสังเขปได้ดังนี้

1. สามารถใช้ศึกษาด้วยตนเอง หรือเพื่อเพิ่มทักษะนอกห้องเรียนได้
2. สามารถอำนวยความสะดวกให้แก่อาจารย์ ในการใช้โปรแกรมเพื่อการเรียนการสอน
3. สามารถใช้ส่วนของแบบทดสอบ และส่วนของเฉลยแบบทดสอบ ประเมินระดับความรู้ความเข้าใจของผู้เรียนได้
4. สามารถใช้เมาส์ (mouse) สำหรับการเข้าถึงส่วนต่าง ๆ ของโปรแกรมได้
5. สามารถใช้เป็นแรงจูงใจสำหรับผู้ใช้ในการศึกษาวิชา complex
6. ผู้ใช้สามารถป้อนค่าจำนวนเชิงซ้อนและสามารถเลือกการคำนวณได้

5.3 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากปัญหาพิเศษนี้ มีการสร้างโปรแกรมย่อยเพื่อช่วยในการคำนวณเพียงบางส่วนเท่านั้น คือในส่วนของการบวก ลบ คูณ หาร การหาขนาดและสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งหากผู้ใดสนใจจะทำการพัฒนาโปรแกรมในส่วนนี้ สามารถทำเพิ่มเติมได้ในส่วนของเนื้อหาเรื่อง อินทิกรัลเชิงซ้อน อนุกรม และการส่งคงแบบและการประยุกต์ และเนื่องจากปัญหาพิเศษนี้ถูกพัฒนาโดยโปรแกรม Authorware และ Borland Delphi ดังนั้นผู้ที่จะทำการพัฒนาโปรแกรม ควรจะทำการศึกษาการใช้งานของโปรแกรมทั้ง 2 นี้ให้เข้าใจ เพื่อความสะดวกในการพัฒนาโปรแกรมต่อไป

ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบ

เฉลยแบบทดสอบท้ายบท จำนวนเชิงซ้อน

1. จงหา $\dfrac{(5-4i)-(3+7i)}{(4+2i)+(2-3i)}$ ในรูปแบบ x+yi

วิธีทำ

$$\frac{(5-4i)-(3+7i)}{(4+2i)+(2-3i)} = \frac{(5-3)+(-4i-7i)}{(4+2)+(2i-3i)}$$

$$= \frac{(2-11i)\times(6+i)}{|6-i|^2}$$

$$= \frac{23}{37}-\frac{64}{37}i$$

2. จงหาค่าของ $\left|\dfrac{5+7i}{7-5i}\right|$

วิธีทำ

$$\left|\frac{5+7i}{7-5i}\right| = \frac{|5+7i|}{|7-5i|}$$

$$= \frac{\sqrt{5^2+7^2}}{\sqrt{7^2+5^2}}$$

$$= 1$$

3. จงหาค่าของ $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ ในรูปแบบ x+yi

วิธีทำ

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left\{\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right\}^{2}$$

$$= \left(\frac{2[\cos(60^\circ)+i\sin(60^\circ)]}{2[\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)]}\right)^{10}$$

$$= (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)^{10}$$

$$= \cos 1200^\circ + i\sin 1200^\circ$$

$$= \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

4. จงหาผลคูณของ $8(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$ และ $4(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)$ ในรูปแบบ x+yi

วิธีทำ
$$8(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ) \times 4(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)$$
$$= (8)(4)[\cos(20^\circ + 100^\circ) + i\sin(20^\circ + 100^\circ)]$$
$$= 32(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$
$$= 32\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -16 + 16\sqrt{3}i$$

5. จงแทน $\dfrac{i\sqrt{2}}{4+4i}$ ในรูปแบบเชิงขั้ว

วิธีทำ
$$\frac{i\sqrt{2}}{4+4i} = \frac{i\sqrt{2} \times (4-4i)}{|4+4i|^2}$$
$$= \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}{32}$$

เนื่องจาก $r = \left|\dfrac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}{32}\right| = \dfrac{1}{4}$

และ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{4\sqrt{2}/32}{4\sqrt{2}/32} = \dfrac{\pi}{4}$

ดังนั้นคำตอบคือ $\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

เฉลยแบบทดสอบท้ายบท ฟังก์ชันวิเคราะห์

1. จงหาเงา (image) ของ y = x+1 ภายใต้การส่ง (mapping) ที่ถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $w = z^2$

$$= \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$$

วิธีทำ
$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = u + vi$$

ดังนั้น $u = x^2 - y^2$ และ $v = 2xy$

เราได้ $u^2 + v^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2$

จากความสัมพันธ์ที่ว่า $y = x+1$ เราได้ว่า $x - y = -1$

หรือ $(x-y)^2 = 1$ เราได้ $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

นั่นคือ $x^2 + y^2 = 1 + 2xy = 1 + v$

ดังนั้น $u^2+v^2=(1+v)^2=1+2v+v^2$

$$u^2=1+2v \quad \text{หรือ} \quad v=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}$$

2. จงหาค่าของ $\lim\limits_{z\to 1+i}\left(z^2-2z+1\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2-2z+1 \\ &= (x+iy)^2-2(x+iy)+1 \\ &= \left(x^2-y^2-2x+1\right)+i(2xy-2y) \\ &= u(x,y)+iv(x,y) \end{aligned}$$

$$\therefore u(x,y)=x^2-y^2-2x+1, u(x,y)=2xy-2y$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} u(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2-y^2-2x+1=-1$$

และ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} v(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} 2x-2y=0$

$$\therefore \lim_{z\to 1+i} f(z)=-1$$

3. จงหาอนุพันธ์ของ f(z) = z^2 ที่จุดใดๆ

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-(z)^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^2+2z(\Delta z)+(\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0} 2z+\Delta z \\ &= f'(z)=2z \end{aligned}$$

4. จงหา $f'(z)$ เมื่อ $f(z)=\left(z^2+i2z+3\right)^4$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz}\left(z^2+i2z+3\right)^4 \\ &= 4\left(z^2+i2z+3\right)^3\frac{d}{dz}\left(z^2+i2z+3\right)^4 \\ &= 4\left(z^2+i2z+3\right)^3(2z+2i) \\ &= 8\left(z^2+i2z+3\right)^3(z+i) \end{aligned}$$

5. ถ้า $f(z)=z^2+2z+1$ จงหา $f'(z)$

วิธีทำ เพราะว่า $f(z)=z^2+2z+1$

$$=(x+yi)^2+2(x+yi)+1$$

$$=\left(x^2-y^2+2x+1\right)+i(2xy+2y)$$

$$=u+iv$$

$$\therefore u=\left(x^2-y^2+2x+1\right), v=(2xy+2y)$$

$$u_x=2x+2,\ u_y=-2y,\ v_x=2y,\ v_y=2x+2$$

เฉลยแบบทดสอบท้ายบท ฟังก์ชันมูลฐาน

1. ข้อใดตรงกับค่าของ $\cosh i$

วิธีทำ
$$\cosh i=\frac{e^i+e^{-i}}{2}$$

$$=\frac{(\cos 1+i\sin 1)+(\cos 1-i\sin 1)}{2}$$

$$=\cos 1$$

2. จงหาค่าทั้งหมดของ $\log(-1)$

วิธีทำ จาก $\log z=\ln|z|+i\arg z$

เนื่องจาก $|-1|=1$ และ $\arg(-1)=p+2np=(2n+1)p\ ;n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

ดังนั้น $\log(-1)=\ln|-1|+i\arg(-1)$

$$=\ln 1+i(2n+1)\pi$$

$$=(2n+1)\pi i\ \ ;\mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

3. จงหาค่าของ i^i

วิธีทำ
$$i^i=e^{i\log i}$$

$$=e^{i\left[\ln|i|+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]}$$

$$=e^{i\left[\ln 1+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]}$$

$$\therefore i^i=e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\ \ ;(\mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

4. จงหาค่ามุขสำคัญของ $(1-i)^{1+i}$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
(1-i)^{1+i} &= e^{(1+i)Ln(1-i)} \\
&= e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}\right]} \\
&= e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}
$$

5. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดที่สมนัยกับสมการ $e^{iz} = 2$

<u>วิธีทำ</u>

$r = |2| = 2$

$\theta = \arg(2) = 2k\pi$ (เมื่อ $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$)

$$2 = e^{(\ln 2+i(2k\pi))}$$

$$e^{iz} = e^{i(\ln 2+i(2k\pi))}$$

$$z = 2k\pi - i\ln 2 \quad ; \; k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

<u>เฉลยแบบทดสอบบท อินทิกรัลเชิงซ้อน</u>

1. จงอินทิเกรต $\bar{z}$ ตามเส้นตรงจากจุด i ไปยัง $2+3i$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\bar{z} = x - iy = u + iv$ เราได้ว่า $u = x, v = -y$

$\frac{y-1}{x-0} = \frac{3-1}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$ ดังนั้น $y = x+1$

จาก $\int f(z)dz = \int_c (udx - vdy) + i\int_c (vdx + udy)$

$$= \int_c (xdx + ydy) + i(\int_c (-ydx + xdy)$$

$$
\begin{aligned}
\int_c f(z)dz &= \int_0^2 (xdx + (x+1)dx) + i\int_0^2 ((-x-1)dx + (x)dx) \\
&= \int_0^2 (2x+1)dx + i\int_0^2 (-1)dx \\
&= 6 - 2i
\end{aligned}
$$

2. จงหาค่าของ $\oint_c \left(y^2 dx - xydy\right)$ โดยใช้ทฤษฎีบทของกรีน เมื่อ c คือเส้นโค้งปิด

ประกอบด้วยเส้น $y=1$, $y=1+x^2$, $x=1$ และ $x=2$ (ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา)

วิธีทำ $P(x,y)=y^2$, $Q(x,y)=-xy$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=y^2 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-y$$

เนื่องจากฟังก์ชัน $P(x,y)$, Q(x, y) , $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ มีความต่อเนื่องที่ทุกๆ (x,y) บน และภายใน จากทฤษฎีบทของกรีนเราได้

$$\oint_c \left(y^2 dx - xydy\right) = \iint_R (-y-2y)dxdy$$

$$= \iint_R (-3y)dxdy$$

$$= \int_1^2 \int_1^{1+x^2} (-3y)dydx \qquad = -16.3$$

3. จงหาค่าของ $\int_c \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ เมื่อ c เป็นเส้นรอบวงของวงกลม $x^2+y^2=1$

ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

วิธีทำ ใช้สมการอ้างอิงตัวแปรเสริม ดังนี้

ให้ $x=\cos t$, $y=\sin x \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$dx = -\sin tdt \quad , \quad dy=\cos tdt$$

$$\int_c \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)(-\sin tdt)-(\cos t)(\cos tdt)}{\cos^2 t+\sin^2 t}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1)dt = -2\pi$$

4. จงหาค่าของ $\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$ เมื่อ c คือวงกลมรัศมี 1หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่

$z=-1+\frac{1}{2}i$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

วิธีทำ
$$\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_c \frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)}dz = \oint_c \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1}dz$$

ให้ $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2-1}$ และเนื่องจาก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับ

ทุกๆ z บน c และภายใน c และ $z_0=1$ อยู่ภายใน c ดังนั้น

$$\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_c \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1}dz = 2\pi i f(1) = (2\pi i)(1) = 2\pi i$$

5. จงหาค่าของ $\oint_c \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3}$

วิธีทำ $\oint_c \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3} = \frac{2\pi i}{2!}\left(z^4-3z^2+6\right)''$

$$C:|z+i|=2 \quad = \frac{2\pi i}{2}\left(4z^3-6z\right)'$$

$$= \pi i\left(12z^2-6\right)$$

เฉลยแบบทดสอบบท อนุกรม

1. จงตรวจดูว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ $z_n = \frac{i^n}{3^i} \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|1+i|}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. จงตรวจดูว่า $\sum_{n=0}^{\infty} n!(1+i)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{\left|(n+1)!(1+i)^{n+1}\right|}{n!(1+i)^n} = (n+1)|1+i| = (n+1)\sqrt{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\sqrt{2} = \infty > 1$

อาศัยการทดสอบแบบเศษส่วนสรุปว่า $\sum_{n=0}^{\infty} n!(1+i)^n$ ลู่ออก

3. จงตรวจดูว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>วิธีทำ</u>

$$z_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n$$

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{\frac{|4-i|^n}{2^{2n}+3}} = \frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^n+3}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[n]{4^n+3}}$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[n]{4^n\left(1+\frac{3}{4^n}\right)}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{4^n\left(1+\frac{3}{4^n}\right)}} = \frac{\sqrt{17}}{4} > 1$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

4. จงหาบริเวณที่ลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}$

<u>วิธีทำ</u>

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, z_0 = 0$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} = 0$$

$$R = \infty$$

ซึ่งแสดงว่าอนุกรมดังกล่าว ลู่เข้าสำหรับทุก ๆ ค่าของ z

กล่าวคือ ลู่เข้าทุกค่า z ซึ่ง $|z| < \infty$

5. จงหารัศมีของการลู่เข้าและบริเวณของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$

<u>วิธีทำ</u>

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\therefore L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{[(n+1)!]^2(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$$

ดังนั้น $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{4}$ และบริเวณที่ลู่เข้าคือ $|z-3i| < \frac{1}{4}$

เฉลยแบบทดสอบบท เรซิดิว

1. จงอินทิเกรตฟังก์ชัน $f(z)=z^{-4}\sin z$ ทวนเข็มนาฬิการอบวงกลมหนึ่งหน่วย c

วิธีทำ เนื่องจากจุดเอกฐานของ $f(z)=z^{-4}\sin z$ มีเพียง 1 ตัวที่อยู่ภายใน C คือ $z=0$ และอนุกรมโลรองต์ของ $f(z)=z^{-4}\sin z$ รอบจุด $z=0$ ลู่เข้าหา $f(z)$ ในบริเวณ $0<|z|<\infty$ คือ

$$f(z)=z^{-4}\sin z=\frac{\sin z}{z^4}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+-\ldots}{z^4}$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!z}+\frac{z}{5!}-\frac{z^3}{7!}+-\ldots$$

$f(z)$ มีโพลอันดับ 3 ที่ $z=0$ และ $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=b=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$

$$\therefore \int_c f(z)dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

$$\oint_c z^{-4}\sin z dz=(2\pi i)\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{\pi}{3}i$$

2. กำหนด $f(z)=\dfrac{4-3z}{z^2-z}$ จงหาโพลและเรซิดิวที่โพลเหล่านั้น

วิธีทำ $f(z)$ มีโพลเชิงเดียวที่ $z=0,1$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{4-3z}{2z-1}=-4$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\frac{4-3z}{2z-1}=1$$

3. จงหาค่าของ $\oint_c \dfrac{4-3z}{z^2-z}dz$ เมื่อ c คือ $|z-1|=\dfrac{1}{2}$ (ทวนเข็มนาฬิกา)

วิธีทำ จุดเอกฐาน $z=1$ อยู่ภายใน C แต่ $z=0$ อยู่ภายนอก C เราได้

$$\oint_c \frac{4-3z}{z^2-z}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$$

$$=(2\pi i)(1)=2\pi i$$

4. จงหาค่าของ $\oint\limits_{c:|z|=8} \dfrac{e^z}{\cosh z}dz$ (ทวนเข็มนาฬิกา)

<u>วิธีทำ</u> หาจุดเอกฐานของ $\dfrac{e^z}{\cosh z}$

ให้ $\cosh z = 0$ เราได้ $z = \pm\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi i \quad n = 0,1,2,\ldots$

ดังนั้นจุดเอกฐานที่อยู่ภายใน C คือ $z = \pm\dfrac{\pi}{2}i, \pm\dfrac{3\pi}{2}i$

ซึ่งเป็นโพลเชิงเดียว ดังนั้น $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^z}{\cosh z} = \dfrac{e^z}{\sinh z} = 1$

ทำนองเดียวกัน $\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^z}{\cosh z} = 1$

$\operatorname*{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}i} \dfrac{e^z}{\cosh z} = 1, \operatorname*{Res}_{z=-\frac{3\pi}{2}i} \dfrac{e^z}{\cosh z} = 1$

$\therefore \oint\limits_c \dfrac{e^z}{\cosh z}dz = 2\pi i(1+1+1+1) = 8\pi i$

5. จงหาค่าของ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{(x^2+4)^2}$

ดังนั้น $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+4)^2} = \dfrac{e^{iz}}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$

$f(z)$ มีโพลอันดับ 2 ที่ $z = 2i, -2i$ แต่ที่อยู่เหนือแกน x คือ $z = 2i$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}(z-2i)^2\frac{e^{iz}}{(z+4)^2}$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{(z+2i)^2(ie^{iz})-(e^{iz})(2z+4i)}{(z+2i)^4}$$

$$= \frac{(-16)(ie^{-2})-8ie^{-2}}{256} = -\frac{3e^{-2}i}{32}$$

เฉลยแบบทดสอบท้ายบท การส่งคงแบบ

1. ภายใต้การแปลงเศษส่วนเชิงเส้น $w=\frac{z+3}{z-1}$ จงหาเงาของจุด $z=i,-i$ และ ∞

วิธีทำ $z=i$ เราได้ $w=\frac{3+i}{-1+i}=\frac{3+i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i$

$z=-i$ เราได้ $w=\frac{3-i}{-1-i}=\frac{3-i}{-1-i}\cdot\frac{-1+i}{-1+i}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$

$z=\infty$ เราได้ $w=\dfrac{1+\frac{3}{z}}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{1}=1$

2. จงหาการแปลงเศษส่วนเชิงเส้นที่ส่ง $2,\infty,i$ ลงบน $0,2,\infty$ ตามลำดับ

วิธีทำ จาก $\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_3}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

เนื่องจาก $z_2=\infty, w_3=\infty$ เราเขียนเสียใหม่เป็น

$$\frac{w-w_1}{w_2-w_1}\cdot\frac{w_2-w_3}{w-w_3}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

แทนค่า เราได้

$$\frac{w-0}{2-0}\cdot\frac{2-\infty}{w-\infty}=\frac{z-2}{z-i}\cdot\frac{\infty-i}{\infty-2}$$

เนื่องจาก

$$\frac{2-\infty}{w-\infty}=1 \text{ และ } \frac{\infty-i}{\infty-2}=1$$

ดังนั้น เราได้

$$w=\frac{2z-4}{z-i}$$

3. ภายใต้การส่ง $w=e^z$ จงหาเงาของเส้นตรง $x=c=$ ค่าคงที่ และ $y=b=$ ค่าคงที่

วิธีทำ เนื่องจาก $|w|=|e^z|=e^x$ และ $\arg w=y$ ดังนั้น $x=c$ ถูกส่งทั่วถึงลงบน วงกลม $|w|=e^c$ และ $y=y_0$ ถูกส่งทั่วถึงลงบนรังสี $\arg w=y_0$ สำหรับเส้นตรง $x=c$, $-\pi<y\le\pi$ จะถูกส่งโดยการส่ง $w=e^z$ จะได้เงาเป็นวงกลม $|w|=e^c$ เต็มวงหนึ่งวง ซึ่งเป็นวงกลมในระนาบ w จุดศูนย์กลางที่ $w=0$ รัศมีเท่ากับ e^c

4. จงหาฟังก์ชันฮาร์มอนิก $h(x,y)$ ในบริเวณที่อยู่ระหว่างวงกลม $|z-1|=1$ และวงกลม $\left|z-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$ กำหนดค่าขอบให้ว่า บนวงกลมวงในค่า $h(x,y)=0$ บนวงกลมวงนอกค่า $h(x,y)=100$

วิธีทำ จะเห็นว่า H ไม่ขึ้นกับ v ดังนั้น $\dfrac{\partial^2 H}{\partial v^2}=0$

ดังนั้น สมการลาปลาซในระนาบ กลายเป็น $\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2}=0$

เราได้ $H=c_1u+c_2$

จากเงื่อนไขขอบ $u=\frac{1}{3}, H=100$ และ $u=\frac{1}{2}, H=0$

เราได้ว่าผลเฉลยของปัญหาดีริชเลต์ ใน D' คือ

$$H(u,v)=-600u+300=-600\,\mathrm{Re}W+300$$

$\therefore$ ผลเฉลยของปัญหาคือดีริชเลต์ ใน D คือ

$$h(x,y)=-600\frac{x}{x^2+y^2}+300$$

5. ภายใต้การส่ง $w=\sin z$ จงหาเงาของ เส้นตรง $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ และ $x=-\frac{\pi}{2}$

วิธีทำ เส้นตรง $x=0$ หรือแกนจินตภาพ

นั่นคือ เราได้ $u=0$ และได้ว่า $v=\cos 0\sinh y=\sinh y$

แต่ $-\infty<\sinh y<\infty$ $\quad(\because -\infty<y<\infty)$

นั่นคือ เงาของแกนจินตภาพ ในระนาบ z $(x=0)$ จะถูกส่งไปเป็นแกนจินตภาพในระนาบ w เช่นกัน และการส่งเป็นแบบ 1-1 ระหว่างแกนทั้งสองนี้ โดยที่

แกนครึ่งบนสมนัยกับแกนครึ่งบน แกนครึ่งล่างสมนัยกับแกนครึ่งล่าง

เฉลยแบบทดสอบรวมชุดที่ 1

1. จงหาค่าของ $\dfrac{8+3i}{9-2i}$

วิธีทำ

$$\frac{8+3i}{9-2i}=\frac{8+3i}{9-2i}\cdot\frac{9+2i}{9+2i}$$
$$=\frac{(8+3i)(9+2i)}{|9-2i|^2}$$

$$= \frac{72+16i+27i+6i^2}{9^2+(-2)^2}$$

$$= \frac{66}{85} + i\frac{43}{85}$$

2. จงหาค่าของ $\dfrac{(3-i)(2+3i)}{1+i}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{(3-i)(2+3i)}{1+i} = \frac{(6+3)+(-2i+9i)}{1+1}$$

$$= \frac{(9+7i)(1-i)}{|1+i|^2}$$

$$= \frac{(9+7)+(7i-9i)}{2}$$

$$= 8+i$$

3. จงหาค่าของ $Log-100$

<u>วิธีทำ</u>

$$Log-100 = \ln|-100| + iArg(-100)$$

$$= \ln 100 + \pi i$$

4. จงหาค่าทั้งหมดของ $\log 1$

<u>วิธีทำ</u>

$$\log 1 = \ln|1| + i\arg(1)$$

$$= \ln 1 + i(2k\pi) \;\; ; \text{k} = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$= 2k\pi i \;\; ; \text{k} = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

5. จงหาค่าของ $\oint_c \dfrac{\cos z}{(z-\pi i)^2}dz$

<u>วิธีทำ</u>

$$\oint_c \frac{\cos z}{(z-\pi i)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{1!}\right)(\cos z)'\Big|_{z=\pi i}$$

$$c: |z-\pi i| = 1 \quad = 2\pi i(-\sin z)\Big|_{z=\pi i}$$

$$= -2\pi i \sin \pi i$$

$$= 2\pi \sinh \pi$$

6. จงหาค่าของ $\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$ เมื่อ c คือวงกลมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา รัศมี 1 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=1$

วิธีทำ
$$\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_c \frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)}dz = \oint_c \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1}dz$$

ให้ $f(z)=\frac{z^2+1}{z+1}$ และเนื่องจาก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับทุกๆ z บน c และภายใน c และ $z_0=1$ อยู่ภายใน c ดังนั้น

$$\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_c \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1}dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i$$

7. จงหาบริเวณที่ลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n} z^n$

วิธีทำ
$$a_n = 3^{2n} \quad , z_0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n 3^n} = 9$$
$$\therefore R = \frac{1}{L} = \frac{1}{9}$$

ซึ่งแสดงว่าอนุกรมดังกล่าวลู่เข้าสำหรับทุกๆค่าของ z ซึ่ง $|z|<\frac{1}{9}$

8. กำหนดฟังก์ชัน $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$ จงหาอนุกรมโลรองต์ของ $f(z)$ รอบจุด $z=1$ ซึ่งลู่เข้าภายในบริเวณของ $0<|z-1|<3$

วิธีทำ
$$\because f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+2}\right)$$
$$\therefore f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}\right)-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(z-1)+3}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}\right)-\frac{1}{9}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{3}\right)}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}\right)-\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{z-1}{3}\right)+\left(\frac{z-1}{3}\right)^2-\left(\frac{z-1}{3}\right)^3+-\ldots\right]$$
$$\therefore f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}\right)+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}(z-1)+\frac{1}{81}(z-1)^2+\frac{1}{243}(z-1)^3-+\ldots \quad ; 0<|z-1|<3$$

9. จงหาค่าของ $\oint\limits_{c:|z-1|=1} \frac{50z}{(z-4)(z-1)^2}dz$

วิธีทำ เนื่องจากจุดเอกฐานของตัวถูกอินทิเกรตคือ $-4,1$ แต่ $z=-4$ อยู่นอกวงกลม c แต่ $z=1$ อยู่ภายในวงกลม c ดังนั้น

$$\oint_c \frac{50z}{(z-4)(z-1)^2}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{50z}{(z-4)(z-1)^2}$$

$\because z=1$ เป็นโพลอันดับ 2 ของ $\frac{50z}{(z-4)(z-1)^2}$

และเนื่องจาก

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{50z}{(z-4)(z-1)^2} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{50z}{(z-4)(z-1)^2}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{(z+4)(50)-(50z)(1)}{(z+4)^2}$$

$$= \frac{250-50}{25} \qquad = 8$$

ดังนั้น

$$\oint\limits_{c:|z-1|=1} \frac{50z}{(z-4)(z-1)^2}dz = (2\pi i)(8) = 16\pi i$$

10. จงหาค่าของ $P.V. \int_0^\infty \frac{\mathrm{x}^a}{x(x+1)}dx$,($0<a<1$)

วิธีทำ ให้ $f(z)=\frac{z^a}{z(z+1)}$

เห็นได้ว่า $f(z)$ มีโพลที่ไม่ใช่ศูนย์ที่ $z=-1$

$$P.V. \int_0^\infty \frac{\mathrm{x}^a}{x(x+1)}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{ia2\pi}}\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{z^a}{z(z+1)}$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{e^{a\ln z}}{-1} \qquad = \frac{e^{a(\ln|1|+i\pi)}}{-1} = \frac{e^{i\pi a}}{-1}$$

ดังนั้น

$$P.V. \int_0^\infty \frac{\mathrm{x}^a}{x(x+1)}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{ia2\pi}}\cdot\frac{e^{i\pi a}}{-1} = \frac{\pi}{\frac{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}{2i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

เฉลยแบบทดสอบรวมชุดที่ 2

1. จงหาค่าของ $Log(1+i)$

วิธีทำ
$$Log(1+i) = \ln|1+i| + iArg(1+i)$$
$$= \ln 2 + \frac{\pi}{4}i$$

2. จงหาค่าทั้งหมดของ $\log(\sqrt{3}+i)$

วิธีทำ
$$\log(\sqrt{3}+i) = \ln\left|\sqrt{3}+1\right| + i\arg(\sqrt{3}+i)$$
$$= \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right) \quad ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. จงหาค่าของ $3(2+i)-2i(-2+i)+5$

วิธีทำ
$$3(2+i)-2i(-2+i)+5 = (6+3i)+(2+4i)+5$$
$$= 13+7i$$

4. จงหาค่าของ $\dfrac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

วิธีทำ
$$\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2} = \frac{(6+2+3i-4i)(1+2i)}{(1-i)^2}$$
$$= \frac{(8-i)(1+2i)}{1-i}$$
$$= \frac{8+2-i+16i}{1-i}$$
$$= \frac{(10+15i)\cdot(1+i)}{|1-i|^2}$$
$$= \frac{10-15+10i+15i}{2}$$
$$= \frac{-5+25i}{2}$$

5. จงหาค่าของ $\oint_c \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$

<u>วิธีทำ</u>

$$\oint_c \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^z}{z^2+4}\right)'\Bigg|_{z=1}$$

$$c:|z-1|=1 \quad = 2\pi i\left(\frac{(z^2+4)(e^z)-(e^z)(2z)}{(z^2+4)^2}\right)\Bigg|_{z=1}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{z^2e^z+4e^z-2ze^z}{(z^2+4)^2}\right)\Bigg|_{z=1}$$

$$= 2\pi\left(\frac{e+4e-2e}{25}\right)$$

$$= \frac{6e\pi i}{25}$$

6. จงหาค่าของ $\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$ เมื่อ c คือวงกลมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา รัศมี 1 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=i$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากตัวถูกอินทิเกรต $\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกๆค่า z บน c และภายใน c อาศัยทฤษฎีบทอินทิกรัลของโคชี เราได้ว่า

$$\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 0$$

7. จงตรวจดูว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4+3i)^n}{3^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>วิธีทำ</u>

$$z_n = \frac{(4+3i)^n}{3^n} \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|4+3i|}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{3} = \frac{5}{3} > 1$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4+3i)^n}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

8. จงตรวจดูว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$\left|\frac{(3+4i)\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{|3+4i||\cos n|}{n^{\frac{3}{2}}}$$

แต่ $|\cos n| \le 1$

ดังนั้น $\left|\dfrac{(3+4i)\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}\right| < \dfrac{5}{n^{\frac{3}{2}}}$

แต่ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^{\frac{3}{2}}} = 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $(\because p > 1)$

9. จงหาค่าของ $\displaystyle\oint_c \frac{4-3z}{z^2 - z}dz$ เมื่อ c คือ $|z| = 3$ (ทวนเข็มนาฬิกา)

วิธีทำ จุดเอกฐาน $z = 0,1$ อยู่ภายใน c ทั้งสองจุดเราได้

$$\oint_c \frac{4-3z}{z^2 - z}dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)\right]$$

$$= 2\pi i(-4+1) = -6\pi i$$

10. ภายใต้การส่ง $w = \sin z$ จงหาเงาของเส้นตรง $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$

วิธีทำ เมื่อ $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$ เราได้ว่า

$-1 \le u \le 1$, $\mathrm{v} = 0$ $(\because$ $-1 \le \sin x \le 1$, $\sinh = 0$, $\cosh 0 = 1)$

ดังนั้นเงาในระนาบ w ก็คือ ส่วนของเส้นตรง $-1 \le u \le 1$, $\mathrm{v} = 0$ บนแกนจริงในระนาบ w

บรรณานุกรม

กิตติ ภักดีวัฒนะกุล และคณะ. 2541. **Authorware 4**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : ไทยเจริญการพิมพ์.

วีระพนธ์ คำดี. 2542. **สร้างงานมัลติมีเดียอย่างสมบูรณ์แบบโดยใช้ Macromedia Authorware 5**. กรุงเทพฯ : ซัคเซสมีเดีย.

สุธีร์ กิจฉวี และอรนุช อุทานนท์. 2541. **คู่มือการใช้ Macromedia Authorware 4 ด้วยตนเอง.** กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สุนทร สุชาติเวชภูมิ. 2541. **คณิตศาสตร์ประยุกต์ 3:ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน**. กรุงเทพฯ : โครงการตำราคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

Churchill, R.V. and Brown, J.W. 1990. Complex Variables and Applications. 6th ed. McGraw-Hill Company.

Mathews, J.H. 1977. Complex Variables for Mathematics and Engineering. 2nd ed. Iowa: WM. C. Brown Publishers.