การลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้น

Model Reduction in Linear Systems

โดย

นาย บุญส่ง จิรวงษ์วิเศษ

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2540

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2540

ภาควิชา วิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง การลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้น

ผู้จัดทำ

นาย บุญส่ง จิรวงษ์วิเศษ 37014221

(...)

รองศาสตราจารย์ วิพันธ์ ปรีชาพานิช อาจารย์ที่ปรึกษา

หัวข้อปริญญานิพนธ์	การลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้น
นักศึกษา	นาย บุญส่ง จิรวงษ์วิเศษ 37014221
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ วิพันธ์ ปรีชาพานิช
ปีการศึกษา	2540

บทคัดย่อ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ได้นำเสนอวิธีในการสร้างแบบจำลองระบบลดทอน โดยประยุกต์วิธีการประมาณค่าของพาเด (Pade' Approximation) และวิธีการประมาณค่าของเราท์ (Routh Approximation) มาใช้เพื่อให้แบบจำลองระบบลดทอนมีผลตอบสนองของเอาท์พุทใกล้เคียงกับระบบต้นแบบเดิมมากที่สุด รวมทั้งยังคงรักษาสถานะทางเสถียรภาพของระบบเอาไว้ด้วย

THESIS	Model Reduction in Linear System
STUDENT	Mr. Boonsong Jiravongvisead 37014221
THE THESIS ADVISOR	Assoc. Vipan Prijapanij
ACADEMIC	1997

ABSTRACT

This thesis presents a method to construct a reduced model reduction by Pade' Approximation and Routh Approximation techiques that make time response of the reduced model very close to time response of the prototype system and still retains system stability in the sense that the model is stable if the system is stable.

สารบัญ

สารบัญรูป

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ปัจจุบันนี้การวิเคราะห์ระบบควบคุมที่มีขนาดใหญ่เมื่อทำการวิเคราะห์เป็นสมการสเตทสเปสแล้ว มักจะเกิดปัญหาเกี่ยวกับจำนวนตัวแปรสถานะ (State Variables) ซึ่งจะมีจำนวนมากมายหลายสถานะ ในขณะเดียวกันถ้าหากทำการวิเคราะห์ค่า tranfer funcion เพื่อจะศึกษาระบบในโดเมนของความถี่ ก็จะได้จำนวน order ของสมการ tranfer function ที่มีค่ามาก ทำให้การวิเคราะห์ระบบกระทำได้ยุ่งยากมาก จากปัญหาอันนี้จึงเกิดแนวความคิดที่จะสร้างตัวแบบของระบบที่สร้างขึ้นใหม่จะต้องมี Order ขนาดเล็กกว่าระบบเดิมขณะเดียวกันเอาท์พุทของระบบทั้งสองจะต้องใกล้เคียงกันมากที่สุด สำหรับตัวแบบของระบบที่สร้างใหม่นี้เรียกว่า " Reduced Model "

การวิเคราะห์ Reduced Model นี้ ได้มีผู้ที่สนใจศึกษาวิธีการต่างๆ ไว้เป็นจำนวนมาก และมีอยู่หลายวิธีการในการลดทอนอันดับของระบบ (Chidambara 1969, Davision 1966 และ Nagaraj 1971) ที่ยึดหลักการคงโพลเด่น (Dominant Poles) ของระบบเอาไว้ในแบบจำลองของระบบลดทอน ทำให้ได้ Reduced Model หลายรูปแบบด้วยกันขึ้นกับรูปแบบคณิตศาสตร์ที่ใช้ โดยที่วิธีการในโดเมนของเวลาส่วนใหญ่จะใช้วิธี Geometrical Techniques , Moment Matching Techniques หรือวิธี Eigenvalues Preservation Techniques ซึ่งวิธีสุดท้ายนี้เป็นวิธีที่ใช้หลักการของทฤษฎีเมตริกซ์เกี่ยวกับค่าไอเก็น และเป็นวิธีที่นิยมมากที่สุด เพราะเป็นวิธีที่เข้าใจง่าย มีนักวิจัยหลายท่านได้นำวิธีการนี้ไปพัฒนาหลายวิธีด้วยกัน ส่วนวิธีการวิเคราะห์ Reduced Model ในโดเมนของความถี่นั้นส่วนใหญ่จะใช้ทฤษฎีการประมาณค่า (Approximation Theory) เช่น Routh Approxmation , Pade' Approximation , Chebyshev Approximation หรือวิธีการประมาณค่าอื่นๆ ซึ่งวิธีการประมาณค่านี้จะสามารถลด Order ของ Tranfer function ได้

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ได้แสดงการวิเคราะห์ Reduced Model ในระบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลาในรูปโดเมนของความถี่ เนื้อหาของปริญญานิพนธ์ได้แบ่งออกเป็น 5 บท คือ

บทที่ 2 กล่าวถึงแนวความคิดทั่วไป ประวัติความเป็นมา เหตุผลที่จำเป็น เทคนิคและวิธีการต่างๆ ที่พยายามจะลดรูปแบบของระบบ ความหมายของ Reduced Model ตลอดจนปัญหาที่เกิดขึ้น

บทที่ 3 แสดงถึงทฤษฎี เทคนิคต่างๆ ในการลดทอนตัวแบบในโดเมนของความถี่ โดยใช้ทฤษฎีการประมาณค่าแบบต่างๆ ทั้งการประมาณค่าแบบ Pade' (Pade' Approximation) การประมาณค่าแบบ Routh (Routh Approximation) ในการลดทอนอันดับของสมการ tranfer function ของระบบเพื่อสร้างเป็น Reduced Model แสดงถึงวิธีการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์และการแก้ปัญหาเกี่ยวกับความมีเสถียรภาพ ของ Reduced Model

บทที่ 4 เป็นการทดสอบระบบ โดยได้แสดงตัวอย่างที่นำมาทดสอบระบบในโดเมนความถี่ โดยแสดงการหาค่าพารามิเตอร์การเปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบเดิมและระบบที่แทนด้วย Reduced Model

บทที่ 5 สรุปและการวิเคราะห์ผลตอบสนองของระบบที่แทนด้วย Reduced Model เมื่อเทียบกับระบบเดิม

บทที่ 2

ความเป็นมาและความหมายของ Reduce Model

ในบทนี้จะกล่าวถึงประวัติความเป็นมา เรื่องราวโดยทั่วไปและเหตุผลความจำเป็นในการที่จะลดทอนตัวแบบเพื่อสร้างเป็น Reduced Model ตลอดจนจุดมุ่งหมายหลักในการสร้าง Reduced Model

2.1 ความเป็นมาและเหตุผลจำเป็น

ในการวิเคราะห์และศึกษาระบบควบคุมสมัยใหม่ สำหรับระบบควบคุมเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Linear time-invariant) อาจแทนได้ด้วยสมการ

$$(D^{(n)} + a_{n-1}D^{(n-1)} + \dots + a_1 D + a_0)y(t) = (b_m D^{(m)} + b_{m-1}D^{(m-1)} + \dots + b_1 D + b_0)u(t) \text{......(1)}$$

เมื่อกำหนด u(t) และ y(t) คืออินพุทและเอาท์พุทของระบบตามลำดับ

ถ้าให้ $x_n(t)$ เป็นตัวแปรสถานะ (state variable) มีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z(t) \\ x_2(t) &= Dz(t) \\ x_3(t) &= D^2 z(t) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= D^{(n-1)}z(t) \end{aligned}$$

จะได้สมการที่(1)ซึ่งสามารถเขียนใหม่อยู่ในรูปของควบคุมได้ (controllable from) คือ

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & . & . & . & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

โดยมีสมการเอาท์พุทเป็น

$$y(t)= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} x(t)$$

เขียนเป็นรูปอย่างง่ายได้

$$x(t) = Ax(t)+Bu(t) \qquad \text{...............(2)}$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad \text{...............(3)}$$

สมการที่(2)เรียกว่า สมการสถานะ (state equation) และ x(t) เรียกว่า เวกเตอร์สถานะ (state vector) โดยที่ A,B และC เป็นเมตริกซ์ nxn,nx1 และ 1xn ตามลำดับ

เราสามารถแสดงการวิเคราะห์ระบบ ในโดเมนของความถี่ได้ โดยการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของสมการที่(1) ได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเป็น

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^m+...+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+a_0} \qquad \text{.....................(4)}$$

เมื่อ Y(s) และ U(s) เป็นการแปลงลาปลาซของ y(t) และ u(t) ตามลำดับ

สำหรับในกรณีระบบที่ทำการวิเคราะห์เป็นระบบขนาดใหญ่ เมื่อทำการวิเคราะห์แล้วจะได้จำนวนตัวแปรสถานะมากมายหลายร้อยสถานะ เมตริกซ์ที่ปรากฏอยู่ในสมการสถานะ จะมีมิติขนาดใหญ่มาก ถ้าวิเคราะห์ในโดเมนของความถี่ ก็จะได้สมการแสดงค่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีอันดับสูงๆ การวิเคราะห์ระบบเหล่านี้กระทำได้ยากมาก

ดังนั้นจึงเกิดแนวความคิดที่จะต้องการูแบบที่จะลดทอนอันดับของระบบให้อยู่ในรูปที่มีขนาดอันดับต่ำลง เพื่อสะดวกในการวิเคราะห์ และศึกษาผลตอบสนองของระบบ โดยผลตอบสนองของแบบจำลองของระบบลดทอนใหม่นี้จะต้องมีค่าใกล้เคียงกับระบบเดิมมากที่สุด

2.2 จุดมุ่งหมายหลัก

จากสมการที่(1) เป็นระบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา ระบบใดๆจะสามารถแสดงได้ด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน คือ

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0} \qquad \text{......................(5)}$$

เมื่อทำการลดทอนอันดับของระบบเดิม แล้วสร้างแบบจำลองระบบลดทอนเป็นระบบใหม่ ซึ่งมีสมการฟังก์ชันถ่ายโอนเป็นระบบที่มีอันดับน้อยกว่าระบบเดิมให้แทนด้วย

$$R(s)=\frac{q_k s^k + q_{k-1}s^{k-1}+\ldots+q_1 s+q_0}{p_l s^l + p_{l-1}s^{l-1}+\ldots+p_1 s+p_0} \qquad \text{....................................(6)}$$

(โดยที่ $k<m$ และ $l<n$)

ซึ่งเป็นเงื่อนไขของแบบจำลองระบบลดทอนคือ ผลตอบสนอง (6) จะต้องมีค่าใกล้เคียงกับระบบเดิม (5) มากที่สุด

บทที่ 3

การวิเคราะห์แบบจำลองระบบลดทอนในโดเมนของความถี่

ในระบบที่ทำการศึกษาวิเคราะห์เป็นระบบขนาดใหญ่ เมื่อทำการวิเคราะห์จะได้จำนวนตัวแปรสถานะมากมายหลายร้อยสถานะ เมตริกซ์ที่ปรากฏในสมการสถานะจะมีขนาดใหญ่มาก ได้มีผู้วิจัยทำการศึกษาแบบจำลองระบบลดทอนในโดเมนของเวลาเป็นจำนวนมาก ในรูปสมการสเตทสเปซ ซึ่งมีจุดมุ่งหมายหลักคือการลดจำนวนตัวแปรสถานะ โดยได้เสนอวิธีการลดขนาดเมตริกซ์ในสมการสถานะเมื่อปี ค.ศ 1966 ศึกษาระบบจากค่าไอเก็น (Eigen Values) วิธีการนี้เรียกว่า เทคนิค DAVISON แต่มีปัญหาที่ไม่สามารถทำได้สะดวกในการวิเคราะห์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเลือกค่าไอเก็นที่จะคงไว้ในแบบจำลองระบบลดทอน จึงมีผู้เสนอแนวความคิดที่สร้างแบบจำลองระบบลดทอนในโดเมนของความถี่ ซึ่งมีนักวิจัยหลายท่านได้เสนอวิธีการ เช่น วิธีการประมาณค่าพลังงานอิมพัลซ์ วิธีการประมาณค่าแบบพาเด วิธีการประมาณค่าแบบเราท์ วิธี Continued - Fraction Expansion หรืออื่นๆซึ่งส่วนใหญ่จะใช้ทฤษฎีการประมาณค่าทางคณิตศาสตร์และทางระบบควบคุม

3.1 ทฤษฎีการประมาณค่าแบบพาเด

ในความหมายทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎีนี้มีประโยชน์ในการประมาณฟังก์ชัน ให้เป็นเศษส่วนเชิงเส้นของฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบพาเด

กำหนดให้

$$F_{m,n}(s) = [m,n] = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \qquad \text{.....................................(1)}$$

เป็นเศษส่วนเชิงเส้นพหุนามที่ประมาณฟังก์ชัน $f(s)$: $P_m(s), Q_n(s)$ เป็นโพลิโนเมียลดีกรี m และ n ตามลำดับ และจะเรียก $N=m+n$ ว่าเป็นดัชนี (index) ของฟังก์ชัน

นิยาม (Definition)

[m,n] เป็นการประมาณค่าแบบพาเด ของ f(s) ถ้ากระจาย [m,n] และ f(s) ออกเป็นอนุกรมกำลังแล้ว จะต้องมีค่าที่เหมือนกัน N เทอม (นั่นคือพจน์จะต้องเหมือนกันถึงอันดับ S^{m+n})

เริ่มวิธีการประมาณ

ในการประมาณให้อยู่ในรูป (1) สำหรับค่า m,n ที่กำหนดมาให้เลือก $P_m(s)$ และ $Q_n(s)$ ให้ f(s) และ $F_{m,n}$ มีค่าเท่ากันที่ s=0 และมีค่าอนุพันธ์ (derivative) หลายค่าที่ s=0 ในกรณีที่ n=0 การประมาณจะอยู่ในรูปเป็นการกระจายแบบแมคคลอริน ของ f(s) เราจะสมมุติอนุกรมแมคคลอริน สำหรับ f(s) มีอยู่ในบริเวณย่านใกล้ๆรอบ s=0 มี 2 เหตุผลด้วยกันสำหรับข้อเลือกใดๆของ

1. จะเป็นวิธีการที่ง่ายกว่าสำหรับค่า s ใดๆ

2. ช่วงขอบเขตที่จะทำการประมาณฟังก์ชัน ส่วนใหญ่จะมีค่า 0 อยู่ แต่ถ้าไม่มีค่า 0 อยู่ก็สามารถเปลี่ยนตัวแปรด้วยวิธีง่ายๆเพื่อให้มี 0 ได้

สมมติว่า $P_m(s)$ และ $Q_n(s)$ ไม่สามารถแยกแฟคเตอร์ได้

ให้

$$P_m(s) = \sum_{j=0}^{m} a_j s^j$$
$$Q_n(s) = \sum_{j=0}^{n} b_j s^j, b_0 = 1 \qquad \text{.........................(2)}$$

จาก(7)จะได้ว่า

$$F_{m,n}(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n} \qquad \text{.........................(3)}$$

และให้ f(s) มีอนุกรมแมคคลอริน

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j s^j$$
$$= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots\ldots \qquad \text{...................................(4)}$$

จากสมการที่(3)และ(4)พิจารณาผลต่าง

$$f(s) - F_{m,n}(s) = \frac{(\sum_{j=0}^{\infty} c_j s^j)(\sum_{j=0}^{n} b_j s^j) - \sum_{j=0}^{m} a_j s^j}{\sum_{j=0}^{n} b_j s^j} \quad \text{.........................(5)}$$

เนื่องจากมีค่าคงที่ N+1 ตัว ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ a_j m+1 ตัว , ของ b_j n ตัว เราจะทำให้ $f(s) - F_{m,n}(s)$ และค่าอนุพันธ์ N ค่าแรก ให้มีค่าเท่ากับ 0 ที่ s=0 ซึ่งสามารถทำได้ ถ้าเทอมเศษทางด้านขวาของ (5) มีกำลังสูงสุดระดับดีกรี N+1 ดังนั้นอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$(\sum_{j=0}^{\infty} c_j s^j)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j) - \sum_{j=0}^{m} a_j s^j = \sum_{j=N+1}^{\infty} d_j s^j \quad \text{..............................(6)}$$

สัมประสิทธิ์ของ s กำลัง N+1 เทอมแรกที่หายไปทางซ้ายของสมการ (6) จะอยู่ในรูปสมการ

$$\sum_{j=0}^{n} c_{N-s-j} b_j = 0 \ , \ s=0,1,.....,N-m-1 \quad \text{...............................(7)}$$

$$(c_j = 0 \ \text{if} \ < 0 \ , \ b_0 = 1)$$

$$a_r = \sum_{j=0}^{r} c_{r-j} b_j \ , \ r=0,1,.....,m \quad \text{................................(8)}$$

$$(b_i = 0 \ \text{if} \ j > n)$$

จากสมการที่ (7) และ (8) สามารถเขียนใหม่ได้เซตของสมการเชิงเส้นดังนี้

$$a_0 = b_0 c_0$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$$

....

$$a_m = b_0 c_m + b_1 c_{m-1} + ... + b_m c_0$$

....

$$0 = b_0c_{m+n}+b_1c_{m+n-1}+....+b_nc_m \qquad \text{.......................................(9)}$$

จากสมการที่(3)เขียนใหม่ โดยเป็นสมการของฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G(s) = \frac{Y_m(s)}{U_n(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + ... + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + ... + b_ns^n} \qquad \text{.......................(10)}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ c_i (i=0,1,2,3,...)หาได้จากสมการที่(9)ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ ได้คือ

$$\begin{bmatrix} c_{m+1} & c_m & .. & .. & c_1 \\ c_{m+2} & c_{m+1} & .. & .. & c_2 \\ c_{m+3} & c_{m+2} & c_{m+1} & .. & c_3 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & .. & c_{m+2} & c_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ -c_2 \\ . \\ . \\ -c_m \end{bmatrix} \qquad \text{..........................(11)}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & .. & .. & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ c_m & c_{m-1} & .. & .. & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{............................(12)}$$

โดยที่สมการที่ (12) แทนชุดสมการที่ (9) จำนวน (m+1) ส่วนสมการที่ (11) จะแทนชุดของสมการที่ (9) ที่เหลือ สมการที่ (11) และ (12) เขียนเป็นรูปแบบใหม่ของสมการที่ (9) และสำหรับรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอนโดยทั่วไป มักจะกำหนดให้ $b_n=b_{m+1}=1$ สมการที่ (11) และ (12) สามารถเขียนให้ง่ายขึ้น ในรูปแบบพีชคณิตเมตริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{C_1b} = \mathbf{-C}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{C_2b} \qquad \text{.............................(13),(14)}$$

สมการที่ (13) และ (14) แทนสมการที่ (11) และ (12) ตามลำดับ โดย $\mathbf{C_1}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติขนาด เท่ากับ nxn ส่วน $\mathbf{C_2}$ มีมิติ (m+1)x(m+1) a, b และ c เป็นเวกเตอร์สดมภ์ (column vector) มีขนาด (m+1) , (n) และ (m+1) ตามลำดับ

ดังนั้นจากแนวความคิดของทฤษฎีการประมาณค่าแบบพาเดนี้ จะเห็นว่าถ้าเรามีสมการของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งมีรูปแบบตามสมการ (10) แล้วจัดการให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (10) เมื่อเราเลือกจำนวนอันดับที่จะคงไว้ในแบบจำลองระบบลดทอน แล้วจึงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ได้ จากชุดสมการที่ (4)

ถึงแม้ว่าแนวความคิดนี้จะมีผู้นำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบ Reduced Model ในโดเมนของความถี่กันอย่างกว้างขวาง แต่วิธีนี้ก็ยังมีข้อบกพร่องจะเห็นได้ว่ามีการนำค่าสัมประสิทธิ์ของระบบเดิมมาช่วยในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของ Reduced Model แต่ไม่มีการนำเอาค่าโพล(pole) ของระบบมาพิจารณาเลย ทำให้วิธีนี้ได้ผลไม่ดีนัก

อย่างไรก็ตาม มักพบอยู่เสมอว่าวิธีการนี้อาจจะยังคงให้ระบบ Reduced Model ที่ไม่เสถียร สำหรับการแก้ปัญหานี้ มีนักวิจัยบางท่านเสนอว่า จะต้องมีการแก้ไขชุดของสมการที่ (11) บ้างเล็กน้อย โดยเริ่มจากการคำนวณค่าโพลของระบบต้นแบบจากนั้นจึงเลือกค่าโพลที่มีขนาดเล็กที่สุดที่จะคงไว้ใน Reduced Model

ถ้าตัวแบบของ Reduced Model ที่ได้นี้ยังไม่เสถียรอีกให้เปลี่ยนมาใช้ค่าโพลที่จะคงไว้เป็นโพลที่มีขนาดใหญ่ที่สุดแทน เมื่อเลือกค่าโพลได้แล้ว สมการสุดท้ายในเซ็ทของสมการที่ (11) ให้แทนด้วยสมการ ที่ (15)

$$0 = b_0 - b_1 s_1 + b_2 s_1^2 + \dots (-1)^k s_1^k \qquad \text{.......................(15)}$$

เมื่อ s_1 คือ โพลที่จะคงไว้ในสมการ tranfer function G(s) ของ Reduced Model

3.2 การสร้างแบบจำลองโดยวิธี Routh Stability Criterion

การสร้างแบบจำลองระบบลดทอนโดยวิธี Routh Stability Criterion นักวิจัยที่ได้เสนอวิธีการประมาณค่านี้เป็นคนแรกคือนักวิจัยชื่อ Hutton และ Friedland (1971) ซึ่งวิธีการประมาณค่าอยู่บนพื้นฐานของ Routh Stability Criterion ดังนี้

Hutton (1971) ได้แนะนำวิธีการลดทอนอันดับของแบบจำลองระบบลดทอนด้วยการกำหนดฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับสูง

$$G(s) = \frac{d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \ldots + d_n}{e_0 s^n + e_1 s^{n-1} + \ldots + e_n} \qquad \ldots\ldots(16)$$

อัลกอลิธึมของ Hutton เริ่มต้นด้วยการคำนวณฟังก์ชันถ่ายโอน $\overline{G}(s)$

$$\overline{G}(s) = \frac{1}{s} G(\frac{1}{s}) \qquad \ldots\ldots(17)$$

$$\overline{G}(s) = \frac{d_n s^{n-1} + \ldots + d_1}{e_n s^n + e_{n-1} s^{n-1} + \ldots e_0} \qquad \ldots\ldots(18)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอน $\overline{G}(s)$ กระจายออกเป็นผลบวกและผลคูณของเศษส่วนต่อเนื่องดังแสดงข้างล่าง

$$\begin{aligned}\overline{G}(s) = \left(\frac{1}{1+\alpha_1 s +}\frac{1}{\alpha_2 s +}\cdots\frac{1}{+\alpha_n s}\right)[\beta_1 \\ +\left(\frac{1}{\alpha_2 s +}\frac{1}{\alpha_3 s +}\cdots\frac{1}{+\alpha_n s}\right)[\beta_2 \\ +\left(\frac{1}{\alpha_3 s +}\cdots\frac{1}{+\alpha_n s}\right)[\beta_3 \\ \ddots \\ +\left(\frac{1}{\alpha_n s}\right)[\beta_n]\cdots]]]\end{aligned} \qquad \ldots\ldots(19)$$

where

$$\left(\frac{1}{1+\alpha_1 s +}\frac{1}{\alpha_2 s +}\cdots\frac{1}{+\alpha_n s}\right) \triangleq \cfrac{1}{1+\alpha_1 s + \cfrac{1}{\alpha_2 s + \cfrac{1}{\alpha_3 s + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_n s}}}}$$

เป็นเศษส่วนต่อเนื่อง Stieltjes นิยาม อัลกอริธึมสำหรับคำนวณสัมประสิทธิ์ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ของเกณฑ์เสถียรภาพของเราท์ (ระบบจะเสถียรแบบอะซิมโตติกคอล ก็ต่อเมื่อ $\alpha_i > 0$; i=1,2,....n) สำหรับแบบจำลองของระบบลดทอน การกระจายแบบ $\alpha - \beta$ ของสมการ จะสิ้นสุดที่ลำดับ k

$$\begin{aligned}R(s) = \left(\frac{1}{1+\alpha_1 s +}\frac{1}{\alpha_2 s +}\cdots\frac{1}{+\alpha_k s}\right)[\beta_1 \\ +\left(\frac{1}{\alpha_2 s +}\cdots\frac{1}{+\alpha_k s}\right)[\beta_2 \\ +\left(\frac{1}{\alpha_k s}\right)[\beta_k]\cdots]]\end{aligned}$$

ซึ่งผลบวกจะปรากฏเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่ k

$$\overline{R}(s) = \frac{a_k s^{k-1} + \ldots + a_1}{b_k s^k + \ldots + b_1 s + b_0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

แล้วใช้เทคนิคแปลงส่วนกลับจะได้

$$R(s) = \frac{a_1 s^{k-1} + \ldots + a_1}{b_0 s^k + b_1 s^{k-1} + \ldots + b_k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

เนื่องจาก $\alpha_i > 0$; i=1,2,...,n

ระบบอันดับ n มีเสถียรภาพเชิงอะซิมโตติค และ เซต $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k\}$ เป็นสับเซตของ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ ดังนั้น ถ้าระบบอันดับสูงที่กำหนดให้ มีเสถียรภาพเชิงอะซิมโตติคแล้ว แบบจำลองของระบบลดทอนอันดับต่ำที่คำนวณโดยวิธีการนี้ จะมีเสถียรภาพด้วย นั่นคือ การลดทอนอันดับของระบบวิธีนี้จะคงไว้ซึ่งความที่เสถียรภาพ

สัมประสิทธิ์ในอนุกรมกำลังของ G(s) และ R(s) รอบ s=0 สามารถพิสูจน์ได้เหมือนกัน อย่างน้อย k เทอมแรก

ให้

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

นิยามพลังงานผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบเป็น

$$I = \int_0^{\infty} g(t)\,dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

จากทฤษฎีของแอสตรอม (Astrom(1970)) พลังงานผลตอบสนองอิมพัลส์ I_k ของแบบจำลองระบบลดทอนอันดับ k จะสามารถกำหนดได้เป็น

$$I_k = E_1 + E_2 + \ldots + E_k \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,n$$

โดย

$$E_i = \frac{\beta_i^2}{2\alpha_i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

และ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n\}$ เป็นลำดับพารามิเตอร์แอลฟาและเบตาที่ใช้ในการคำนวณแบบจำลองระบบลดทอน

เนื่องจากระบบที่มีเสถียรภาพเชิงอะซิมโตต ดังนั้น E_i จะมีค่าเป็นบวกเสมอ

$$I_1 \le I_2 \le \ldots \le I_n = I \qquad \text{.........................(25)}$$

จะเห็นว่า ระบบอันดับสูงจะมีการประมาณพลังผลตอบสนองอิมพัลซ์อย่างใกล้เคียง โดยใช้สมการ (24) เป็นเกณฑ์ ในการเลือกอันดับของแบบจำลองระบบลดทอน

ในปีค.ศ 1975 วิธีการประมาณค่าของ Hutton ถูกทำให้ง่ายขึ้นโดยการเสนอแนะวิธีการของ Sheshadri และ Krishanamurty ให้คำนวณแบบจำลองระบบลดทอนจากสมาชิกในตาราง Routh โดย Routh Stability Criterion

กำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่มีอันดับสูง ดังนี้

$$H(s) = \frac{b_{11}s^m + b_{21}s^{m-1} + b_{12}s^{m-2} + b_{22}s^{m-3} + \ldots}{a_{11}s^n + a_{21}s^{n-1} + a_{12}s^{n-2} + a_{22}s^{n-3} + \ldots} \qquad \text{...........(26)}$$

ซึ่งถ้าใช้ Routh Stability สำหรับตัวเศษและส่วนของโพลิโนเมียลของสมการ (26) เขียนเป็นตาราง I และ II ได้ดังนี้

TABLE I Numerator Stability Array	TABLE II Denominator Stability Array
b_{11} b_{12} b_{13} b_{14}	a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} . . . . . .
b_{21} b_{22} b_{23} b_{24}	a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} . . . . . .
b_{31} b_{32} b_{33}	a_{31} a_{32} a_{33} . . . . . .
b_{41} b_{42} b_{43}	a_{41} a_{42} a_{43} . . . . . .
. . . .	. . . .
. . . .	$a_{n-2,1}$ $a_{n-2,2}$
$b_{m,1}$	$a_{n-1,1}$ $a_{n-1,2}$

$b_{m+1,1}$ $a_{n,1}$

$a_{n+1,1}$

แถวแรกของแต่ละตารางประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของกำลังคี่และแถวที่ 2 จะประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ที่เป็นกำลังคู่ ตารางที่สมบูรณ์จะทำการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ในแถวถัดไปด้วยวิธี

$$C_{i,j} = C_{i-2,j+1} - (C_{i-2,1} \times C_{i-1,j+1}) / (C_{i-1,1}) \qquad \text{..................(27)}$$

$$for\ i \geq 3\ and\ \ \leq j \leq [(n-i+3)/2]$$

จะเห็นได้ว่า 2 แถวแรกของตารางจะสามารถหาได้จากฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับ n ถ้าต้องการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่อันดับ n-1 จะพิจารณาที่แถวที่ 2 และ 3 ซึ่งแถวที่ 3 นั้นได้จากการคำนวณของตารางที่ 1 และ 2 ได้ดังนี้

$$H_{n-1}(s) = \frac{b_{21}s^{m-1} + b_{31}s^{m-2} + b_{22}s^{m-3} + b_{32}s^{m-4} + \ldots}{a_{21}s^{n-1} + a_{31}s^{n-2} + a_{22}s^{n-3} + a_{32}s^{n-4} + \ldots} \qquad \text{.............(28)}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่จะลดทอนที่อันดับ k ($\leq n$) จะสามารถสร้างได้จากแถวที่ (m+2-k) และแถวที่ (m+3-k) ของตาราง 1 และแถวที่ (n+1-k) และแถวที่ (n+2-k) ของตารางที่ 2

$$H_k(s) = \frac{b_{(m+2-k),1}s^{k-1} + b_{(m+3-k),1}s^{k-2} + b_{(m+2-k),2}s^{k-3} + \ldots.}{a_{(n+1-k),1}s^{k} + a_{(n+2-k),1}s^{k-1} + a_{(n+1-k),2}s^{k-2} + \ldots.} \qquad \text{.......(29)}$$

โดยที่ k > (m+1)

สำหรับระบบที่ไม่เสถียร วิธีนี้จะใช้เมื่อระบบเสถียรแบบ Asymptotically ซึ่งถ้าระบบไม่เสถียรวิธีนี้ก็จะใช้ไม่ได้ โดยคอลัมน์แรกของตาราง Routh จะเป็นลบ ซึ่งจะได้ข้อสรุปมาข้อหนึ่งว่าถ้าระบบไม่เสถียร ระบบลดทอนจะไม่เสถียรด้วย ดังนั้น จะต้องทำการแยกโพลที่ไม่เสถียรออกมาและคงไว้ในระบบลดทอน

$$H(s) = \frac{p(s)}{v(s)q(s)} = \frac{1}{v(s)} H_s(s) \qquad \text{.....................(30)}$$

$v(s)$ เป็นโพลที่ 0 หรือโพลที่อยู่ทางด้านขวาของระนาบเชิงซ้อน

$H_S(S)$ เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนที่เสถียรก็ใช้วิธีตามที่ได้กล่าวมาแล้วมาประมาณค่า

$$H_R(s) = \frac{1}{v(s)} H_{R_s}(s) \qquad \text{.......................(31)}$$

แต่วิธีที่ Krishanamurty เสนอขึ้นมานั้นยังมีข้อจำกัดอยู่หลายประการ คือ ในกรณีที่หลักซ้ายสุดเป็นศูนย์ซึ่งเกิดจากส่วนของซีโร่ของฟังก์ชันถ่ายโอนอยู่ทางด้านขวามือของระนาบเชิงซ้อน (Complex Plane) หรือในกรณีที่มีแถวใดๆมีค่าเป็นศูนย์หมดสามารถเกิดขึ้นได้ในตาราง Routh แม้ว่าระบบเดิมนั้นจะเสถียรก็ตามที

หลังจากที่วิธีการประมาณค่าของ Hutton และ Krishanamurty ได้เผยแพร่แม้ว่าจะมีข้อจำกัดอยู่หลายประการ แต่ได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก นักวิจัยอีกหลายท่านได้นำวิธีการนี้ไปพัฒนาและปรับปรุงเป็นจำนวนมากมาย

3.3 การสร้างแบบจำลองระบบลดทอนโดย Routh Stability Criterion และ Pade' Approximation

Shamash ได้เสนอวิธีการสร้างแบบจำลองระบบลดทอนโดยใช้วิธี Routh Stability Criterion และ Pade' Approximation โดยนำข้อดีของวิธีการประมาณค่าแต่ละวิธีมารวมกัน กล่าวคือ วิธี Pade' Approximation มีประโยชน์อยู่หลายลักษณะ คือ คำนวณได้ง่าย คงโมเมนท์ของเวลาและค่า steady-state ของระบบเดิมให้ผลตอบสนองเอาท์พุทที่สถานะคงที่ในโดเมนเวลาของระบบเดิมและแบบจำลองระบบลดทอนเหมือนกันถ้าอินพุทอยู่ในรูป $\sum \alpha_i t^i$ ส่วนวิธี Routh Stability Criterion จะช่วยให้แบบจำลองระบบลดทอนที่สร้างขึ้นมีเสถียรภาพ

เริ่มต้นด้วยการกำหนดฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับสูง

$$G(s) = \frac{d_0 + d_1 s + \ldots + d_{n-1} s^{n-1}}{e_0 + e_1 s + \ldots + e_{n-1} s^{n-1} + e_n s^n} \qquad \text{.......................(32)}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอน G(s) สามารถกระจายอยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง

$$G(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots\ldots\ldots \qquad \text{.......................(33)}$$

เมื่อ

$$c_0 = \frac{d_0}{e_0}$$

และในรูปทั่วไป

$$c_i = \frac{1}{e_0}\left(d_i - \sum_{j=1}^{i} e_j c_{i-j}\right) \qquad \text{..................(34)}$$

เมื่อ

$$d_i = 0\ , \quad i>n-1$$

ค่าโมเมนท์ของ G(s) จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ c_i และสามารถกำหนดได้(Shamash 1973b)

$$c_i = \frac{1}{i!} \times (\ ith\ \ time - moment\ \ of\ \ the\ \ system\ )$$

ดังนั้นถ้าแบบจำลองระบบลดทอนกำหนดค่า c_i ที่เท่ากัน ซึ่งจะมีผลกระทบต่อการคงโมเมนท์เวลาของระบบ

สมมติว่าแบบจำลองระบบลดทอนที่ต้องการ R(s) อันดับ k

$$R(s)\frac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{k-1} s^{k-1}}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{k-1} s^{k-1} + b_k s^k} \qquad \text{...................(35)}$$

จะสังเกตว่าอันดับของตัวเศษของ R(s) และ G(s) จะน้อยกว่าตัวส่วนอยู่หนึ่ง

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอน R(s) ใช้การประมาณค่าแบบพาเดจาก G(s) เราจะได้ชุดสมการ

$$a_0 = b_0 c_0$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$$

....

$$a_{k-1} = b_0 c_{k-1} + b_1 c_{k-2} + \ldots + b_{k-1} c_1 + b_k c_0$$

....(36)

$$0 = b_0c_{2k-2} + b_1c_{2k-2} + ... + b_{k-1}c_k + b_kc_{k-1}$$

สมการที่ (44) ใช้ในการหาค่าของ b_i,a_i (i=0,1,.....,k-1) เมื่อ b_k=1 แต่แบบจำลองระบบลดทอนที่ได้อาจจะไม่เสถียรได้ถึงแม้ว่าระบบต้นแบบที่ทำการลดทอนจะเสถียรก็ตามที

วิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาเรื่องความไม่มีเสถียรภาพ คือ ให้ทำการคำนวณจากตัวส่วนของ R(s) ซึ่งให้อัลฟาพารามิเตอร์(alpha-parameters) เหมือนกับอัลฟาพารามิเตอร์ของ G(s) k ตัวแรก ในการคำนวณหาอัลฟาพารามิเตอร์ k ตัวแรกของ G(s) สามารถหาได้ดังนี้

ให้ (สมมติ n เป็นเลขคู่)

$$Q(s) = \frac{1}{1+\dfrac{e_0+e_2s^2+e_4s^4+...+e_ns^n}{e_1s+e_3s^3+...+e_{n-1}s^{n-1}}} \qquad ....(37)$$

$$Q(s) = \frac{1}{1+\alpha_1\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{\alpha_2\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{.....}}} \qquad ....(38)$$

$$+\frac{1}{\alpha_n\dfrac{1}{s}}$$

เทอมส่วนของ R(s) จะถูกกำหนดโดยเทอมส่วนของเศษส่วนต่อเนื่อง

$$Q(s) = \frac{1}{1+\alpha_1\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{\alpha_2\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{......}}} \qquad ....(39)$$

$$+\frac{1}{\alpha_k\dfrac{1}{s}}$$

เศษส่วนต่อเนื่อง (39) นี้สามารถอินเวอร์สโดยใช้เซตของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด หลังจากได้เทอมส่วนของ R(s) ทราบค่า a_i (i=0,1,...,k-1) และดังนั้น จะสามารถหาได้ โดย

การแก้สมการ (36) จะสังเกตว่าอันดับเทอมเศษของแบบจำลองระบบลดทอนสามารถเลือกได้อย่างอิสระจากเทอมส่วน ในขณะวิธีของเราท์ต้องให้อันดับเทอมเศษน้อยกว่าเทอมส่วนอยู่หนึ่ง

ในปีค.ศ 1982 Antonio และ Umberto Vario ได้เสนอวิธีการปรับปรุงการสร้างแบบจำลองระบบลดทอนของ Shamash ที่ได้เสนอไว้ โดยมุ่งให้ความสนใจในส่วนที่เป็นสมการ Characteristic ของระบบลดทอนทำการปรับปรุงวิธีการคำนวณให้มีกฎเกณฑ์และมีขอบเขตที่จะประกันว่าเมื่อทำการลดทอนอันดับของระบบแล้วยังคงมีเสถียรภาพ พิจารณาระบบที่ต่อเนื่องที่เป็นเชิงเส้นไม่ขึ้นกับเวลา (Linear Time Invarient) แบบ SISO (Single-Input Single-Output)

$$x = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ

$$W(s) = \frac{C adj(sI - A)B}{\det(sI - A)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \quad ; \quad a_n = 1 \quad m < n$$

และฟังก์ชันถ่ายโอนของแบบจำลองระบบลดทอนที่ได้จากระบบคือ

$$W_a(s) = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^{r} \alpha_i s^i} \quad ; \alpha_r = 1 \quad r < n$$

เป็นที่รู้กันว่าวิธีการประมาณค่าแบบพาเดจะทำให้แบบจำลองระบบลดทอน $W_a(s)$ ที่แสดงในรูปอนุกรมแมคคลอรินที่มีสัมประสิทธิ์ γ_i

$$W_a(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i s^i$$

จะเท่ากันกับระบบเดิม $W(s)$ ที่แสดงอยู่ในรูปอนุกรมแมคคลอรินที่มีสัมประสิทธิ์ c_i

$$W(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i$$

ให้อันดับ r ของ $W_a(s)$ จำนวนสัมประสิทธิ์ γ_i ที่จะเท่ากันหรือตรงกันกับสัมประสิทธิ์ c_i โดยการเลือกของ α_i และ β_i เท่ากับ 2r จากจุดมุ่งหมายนี้ มีความจำเป็นในการแก้กลุ่มสมการ

$$\gamma_i(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{r-1}) = c_i \qquad i = 0,1,\ldots,2r-1$$

มันมีค่าไม่ต่างกัน ถ้าเราทำการคูณ $\sum_{i=0}^{r} \alpha_i s^i$ ตลอดสมการ

$$\sum_{i=0}^{r-1} \beta_i s^i = \left(\sum_{i=0}^{r} \alpha_i s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i s^i\right)$$

ทำการแทนสัมประสิทธิ์ γ_i ใน ที่ตรงกับสัมประสิทธิ์ c_i และเท่ากันกับสัมประสิทธิ์ β_i ของ s^i ที่ ของ เราได้กลุ่มสมการดังนี้

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{i} \alpha_j c_{i-j} \qquad \begin{cases} i = 0,1,\ldots,2r-1 \\ \beta_i = 0 \quad for \quad i > r-1 \end{cases} \qquad \text{........(40)}$$

จะได้เป็นสมการเส้นตรงที่มี α_i และ β_i และได้คำตอบที่มีลักษณะเดียวกับสมการ

กำหนดให้โพลิโนเมียล

$$P_n(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \qquad \text{......................(41)}$$

เป็นตัวส่วนของ $W(s)$ ทำการเขียน Routh-table ของ $P_n(s)$ จะได้ว่า

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	.
n-1	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	.
n-2	$a_{n-2,n-2}$	$a_{n-4,n-2}$	.	
n-3	$a_{n-3,n-3}$	$a_{n-4,n-2}$	.	
.	.	.		
.	.	.		
3	a_{33}	a_{13}		
2	a_{22}	a_{02}		
1	a_{11}			
0	a_{00}			

จากแถวที่ 3 ลงมามีตัวดัชนี(index) อยู่ 2 ตัว โดยตัวดัชนีตัวที่ 2 จะเหมือนกันทุกตัวของสมาชิกในแถวนั้นๆและจะตรงกับอันดับของโพลิโนเมียล

ถ้าให้รูปแบบโพลิโนเมียล

$$Q_i(s) = \sum_{j=0}^{i} a_{ji} s^j$$

$a_{ji} = 0$ for j odd if i is even and for j even if i is odd จะได้ว่า

$$P'_i(s) = Q_i(s) + k_{i-1} Q_{i-1}(s) \quad ; \quad k_{i-1} > 0 \qquad ....(42)$$

เราจะสังเกตได้ทันทีว่า $P_n(s)$ เป็น Herwitz Polynomial , $P'_i(s)$ ทั้งหมดจะต้องเป็น Herwitz Polynomial ด้วย เมื่อเขียนตาราง Routh พบว่าสมาชิกแต่ละตัวจะเท่ากัน (หรือในแต่ละแถวจะถูกคูณด้วยจำนวนบวกของอันเดิม) จาก i ลงไปของ

ตาราง $P_n(s)$: ถ้าไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายที่คอลัมน์ซ้ายสุดของตารางของ $P_n(s)$ ก็จะไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายเหมือนกันในตาราง $P'_i(s)$

เราสามารถแสดงได้ว่า ถ้าคำตอบของ อยู่ทางซ้ายมือของเส้นจำนวนจริง ดังนั้นคำตอบ

$$P''_i(s) = Q_i(s) + k_{i-1}Q_{i-1}(s) + k_{i-2}Q_{i-2}(s) \qquad k_{i-1} > 0 \quad ; \quad k_{i-2} > -1 \quad ..(44)$$

ก็จะอยู่ทางซ้ายมือของเส้นจำนวนจริง

ก่อนอื่น เราจะสังเกตว่า k_{i-1} จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอในอันดับของ $P''_i(s)$ ที่เป็น Hurwitz Polynomial ยิ่งไปกว่านั้นสัมประสิทธิ์ที่ดีกรี i-1,i-3,........... ต้องเป็นลบหรือศูนย์ทั้งคู่

จากข้อกำหนดในสมการ (42)จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Q_i(s) &= a_{ii}s^i + a_{i-2,j}s^{i-2} + a_{i-4,j}s^{i-4} + \ldots\ldots\ldots \\ Q_{i-1}(s) &= a_{i-1,j-1}s^{i-1} + a_{i-3,j-1}s^{i-3} + a_{i-5,j-1}s^{i-5} + \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \ldots(45a,b)$$

แสดงสัมประสิทธิ์ของ $Q_{i-2}(s)$ ในเทอมของ $Q_i(s)$ และ $Q_{i-1}(s)$

$$Q_{i-2}(s) = (a_{i-2,j} - \frac{a_{i,j}a_{i-3,j-1}}{a_{i-1,j-1}})s^{i-2} + (a_{i-4,j} - \frac{a_{i,j}a_{i-5,j-1}}{a_{i-1,j-1}})s^{i-4} + \ldots. \qquad \ldots\ldots(46)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} Q''_i(s) &\triangleq Q_i(s) + k_{i-2}Q_{i-2}(s) \\ &= a_{i,j}s^i + \left[a_{i-2,j} + k_{i-2}(a_{i-2,j} - \frac{a_{i,j}a_{i-3,j-1}}{a_{i-1,j-1}})\right]s^{i-2} \\ &\quad + \left[a_{i-4,j} + k_{i-2}(a_{i-4,j} - \frac{a_{i,j}a_{i-5,j-1}}{a_{i-1,j-1}})\right]s^{i-4} + \ldots.. \end{aligned} \qquad \ldots.(47)$$

ทำการจัดพจน์ใหม่

$$\begin{aligned} Q''_i(s) &= a_{i,j}s^i + \left[(1+k_{i-2})a_{i-2,j} - k_{i-2}\frac{a_{i,j}a_{i-3,j-1}}{a_{i-1,j-1}}\right]s^{i-2} \\ &\quad + \left[(1+k_{i-2})a_{i-4,j} - k_{i-2}\frac{a_{i,j}a_{i-5,j-1}}{a_{i-1,j-1}}\right]s^{i-4} + \ldots.. \end{aligned} \qquad \ldots..(48)$$

ดังนั้น 3 แถวแรกของตาราง ของ $P_i''(s)$ คือ

$$
\begin{array}{c|cccc}
i & a_{ii} & (1+k_{i-2})a_{i-2,j} - k_{i-2}\dfrac{a_{ii}a_{i-3,j-1}}{a_{i-1,j-1}} & (1+k_{i-2})a_{i-4,j} - k_{i-2}\dfrac{a_{ii}a_{i-5,j-1}}{a_{i-1,j-1}} & . \\
i-1 & k_{i-1}a_{i-1,j-1} & k_{i-1}a_{i-3,j-1} & k_{i-1}a_{i-5,j-1} & . \\
i-2 & (1+k_{i-2})a_{i-2,j} - k_{i-2}\dfrac{a_{ii}a_{i-3,j-1}}{a_{i-1,j-1}} & (1+k_{i-2})a_{i-4,j} - k_{i-2}\dfrac{a_{ii}a_{i-5,j-1}}{a_{i-1,j-1}} & . & .
\end{array}
$$

จะเห็นได้ชัดว่าที่แถวอันดับ i-1 จะเท่ากับแถวที่มีอันดับตรงกันกับตาราง Routh ของ $P'_i(s)$ และ แถวที่มีอันดับ i-2 จะเท่ากับแถวที่มีอันดับเดียวกันกับตาราง Routh ของ $P'_i(s)$ โดยคูณด้วย $(1+k_{i-2})$ ที่แถวอันดับ i-3,i-5,i-7,.... จะเท่ากันกับแถวที่อันดับเดียวกันของตาราง Routh ของ $P'_i(s)$ ในขณะที่แถวอันดับ i-2,i-4,i-6,.... จะตรงกับแถวที่อันดับเดียวกันของ $P'_i(s)$ โดยคูณ $(1+k_{i-2})$ ยิ่งไปกว่านั้นสัมประสิทธิ์ที่อันดับสูงสุดใน $P'_i(s)$ และ $P''_i(s)$ เท่ากัน คือ a_{ii}

เราจะสรุปได้ว่าถ้าสมาชิกทุกตัวในคอลัมน์ซ้ายสุดของตาราง Routh ของ $P'_i(s)$ เป็นบวก และ จะสรุปได้ว่า $k_{i-2} > -1$ สมาชิกทุกตัวที่คอลัมน์ซ้ายสุดในตาราง Routh ขอ $P''_i(s)$ ก็จะเป็นบวกหมด

จากที่ได้ทำการพิจารณาข้างต้น

$$P_r(s) = Q_r(s) + k_{r-1}Q_{r-1}(s) + k_{r-2}Q_{r-2}(s) \qquad k_{r-1} > 0 \quad ; \quad k_{r-2} > -1 \quad ..(49)$$

ซึ่งสร้างมาจากตาราง Routh ในสมการ (41) และจะเป็น Hurwitz Polynomial ดังนั้นปัญหาในการสร้างสมการคุณลักษณะสามารถแก้ไขได้โดยใช้ $P_r(s)$ เป็นตัวส่วนของ $W_\alpha(s)$.

ทำการแทนลงไปในสมการ ในสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของ α_i ในรูปฟังก์ชันเส้นตรงของ k_{r-1} และ k_{r-2} เราจะได้ชุดสมการเชิงเส้น $r+2$ สมการที่ไม่ทราบค่าของ

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, k_{r-1}, k_{r-2}$ แน่นอนจะต้องเท่ากันกับสัมประสิทธิ์ γ_i ของแต่ละตัวในรูปอนุกรมแมคคลอรินของ $W_\alpha(s)$ และจะตรงกับสัมประสิทธิ์ c_i ของ $W(s)$ เมื่อ $0 \leqslant i \leqslant r+1.$

ถ้าเราเขียน $P_r(s)$ เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนตัวส่วนของ $W_\alpha(s)$

$$P_r(s) = \sum_{i=0}^{r} a_i s^i \quad ; \quad \alpha_r = 1 \qquad \text{......(50)}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{a_{i,r}}{a_{r,r}} + k_{r-2}\dfrac{a_{i,r-2}}{a_{r,r}}; & for \quad r-i \quad even \\ k_{r-1}\dfrac{a_{i,r-1}}{a_{r,r}}; & for \quad r-i \quad odd \end{cases} \qquad \text{......(51)}$$

ดังนั้น ชุดสมการ เพื่อสมมติให้ r=คู่ จะได้ว่า

$$\beta_0 - \alpha_0 c_0 = 0 \to \beta_0 = (a_{0,r} + k_{r-2} a_{0,r-2}) c_0$$
$$\beta_1 - \alpha_0 c_1 - \alpha_1 c_0 = 0 \to \beta_1 = (a_{0,r} + k_{r-2} a_{0,r-2}) c_1 + k_{r-1} a_{1,r-1} c_0$$
$$\vdots$$
$$\beta_{r-1} - \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j c_{r-1-j} = 0 \to \beta_{r-1} = (a_{0,r} + k_{r-2} a_{0,r-2}) c_{r-1} + k_{r-1} a_{1,r-1} c_{r-2} + \ldots.$$
$$-\sum_{j=0}^{r} \alpha_j c_{r-j} = 0 \to (a_{0,r} + k_{r-2} a_{0,r-2}) c_r + k_{r-1} a_{1,r-1} c_{r-1} + \ldots\ldots. = 0$$
$$-\sum_{j=0}^{r+1} \alpha_j c_{r+1-j} = 0 \to (a_{0,r} + k_{r-2} a_{0,r-2}) c_{r+1} + k_{r-1} a_{1,r-1} c_r + \ldots\ldots. = 0$$

ถ้า r=คี่ ก็จะได้ชุดสมการที่คล้ายๆกัน โดยสมการ อาจจะเขียนใหม่ในรูป

$$k_{r-1}\left(\sum_{i=0}^{r-1} a_{i,r} c_{r-i}\right) + k_{r-2}\left(\sum_{i=0}^{r} a_{i,r-2} c_{r-i}\right) = -\sum_{i=0}^{r} a_i c_{r-i}$$
$$k_{r-1}\left(\sum_{i=0}^{r-1} a_{i,r} c_{r-i+1}\right) + k_{r-2}\left(\sum_{i=0}^{r} a_{i,r-2} c_{r-i+1}\right) = -\sum_{i=0}^{r} a_i c_{r-i+1} \qquad \text{.....(53)}$$

จะได้ชุดสมการที่ประกอบด้วยค่า $\hat{k}_{r-1}, \hat{k}_{r-2}$ และ k_{r-1}, k_{r-2} โดยเฉพาะค่าเหล่านี้ที่ได้จะนำไปใช้ในชุดสมการ(52a) ในชุดสมการ(52a) จะได้ชุดสมการที่ประกอบด้วยตัวแปร

k_{r-1}, k_{r-2} และแก้สมการหาค่า k_{r-1}, k_{r-2} ได้ในที่สุด เมื่อได้ค่า k_{r-1}, k_{r-2} ก็สามารถนำไปแทนในชุดสมการ แต่ละสมการของชุดสมการใช้ในการหาค่าโดยตรงของค่า สัมประสิทธิ์ β_i

ถ้าเราทำการพิจารณาพื้นที่เปิด $k_{r-1} > 0, k_{r-2} > -1$ ถ้าจุด $(\hat{k}_{r-1}, \hat{k}_{r-2})$ อยู่ในพื้นที่ดังกล่าว เมื่อทำการหาแบบจำลองระบบลดทอน $W_a(s)$ จะเสถียรภาพและเมื่อทำอยู่ในรูปอนุกรมกำลังที่มีสัมประสิทธิ์เป็น γ_i ที่ $r+2$ พจน์แรกจะเท่ากันกับสัมประสิทธิ์ c_i ที่อยู่ในรูปอนุกรมกำลังของฟังก์ชันถ่ายโอน $W(s)$

ในทางตรงกันข้าม ถ้าจุด $(\hat{k}_{r-1}, \hat{k}_{r-2})$อยู่นอกพื้นที่เสถียรภาพ (Stability Region) หรืออยู่ใกล้ๆขอบของพื้นที่ ค่าของ k_{r-1} และ k_{r-2} สามารถเลือกเพื่อให้แน่ใจว่า Stability Margin นั้นเพียงพอและในเวลาเดียวกันจะทำให้มีค่าเบี่ยงเบนที่สามารถพอยอมรับได้ของ γ_r และ γ_{r+1} จาก c_r และ c_{r+1} โดยเฉพาะไม่ว่ากรณีใดๆ $\gamma_i = c_i$ เมื่อ $i = 0,1,\ldots,r-1$ โดยชุดสมการ(52b)

ในการหาค่าที่เหมาะสมของ k_{r-1} และ k_{r-2} สามารถใช้ทั้งการสุ่มค่าลงไปเรื่อยๆหรือ Error Method ก็เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพที่ถูกใช้โดยนักวิจัย Singh ที่ได้เคยเสนอไว้ แต่ควรมีวิธีที่เป็นระบบมากกว่านี้ในการค่าของ k_{r-1} และ k_{r-2}

Antonio Lepschy และ Umberto Viaro ได้เสนอว่าในขั้นแรก เราจะทำการพิจารณาที่ $\gamma_r = c_r$ โดยยังไม่พิจารณาที่ c_{r+1} จุดมุ่งหมายก็เพื่อทำการพิจารณาสมการแรกที่เป็นสมการหนึ่งในชุดสมการ ซึ่งจะไม่มี c_{r+1} เข้ามาเกี่ยวข้อง สมการแรกนี้จะมีลักษณะเป็นเชิงเส้นที่ประกอบด้วย k_{r-1} และ k_{r-2} เมื่อนำมาแสดงที่ระนาบ k_{r-1} และ k_{r-2} จะเป็นเส้นตรงเมื่อ $\gamma_r = c_r$ ถ้าเส้นตรงเข้าไปในพื้นที่เสถียรภาพ จุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้ที่อยู่ในพื้นที่จะทำให้แบบจำลองระบบลดทอนมีเสถียรภาพและค่าของ $|\gamma_{r+1} - c_{r+1}|$ จะมีค่าเบี่ยงเบนไม่มากนัก

ถ้าเส้นตรงไม่เข้าไปในพื้นที่เสถียรภาพ เราจะทำการพิจารณาที่ $\gamma_{r+1} = c_{r+1}$ โดยค่า γ_r เป็นค่าคงที่ ขณะที่สัมประสิทธิ์ c_r จะเป็นฟังก์ชัน k_{r-1} และ k_{r-2} ที่ได้จากสมการแรกในชุดสมการ(52b) และทำการแทนลงไปในสมการที่ 2 ของชุดสมการ (52b) จะได้สมการเป็นกำลังสองของรูปวงรีที่ $\gamma_{r+1} = c_{r+1}$ ถ้าวงรีดังกล่าวผ่านพื้นที่เสถียรภาพก็สามารถเลือกจุดที่อยู่ในพื้นที่นั้นมาใช้ได้เช่นกัน

ถ้าทั้งเส้นตรงและวงรีไม่ผ่านเข้าไปในพื้นที่เสถียรภาพ (k_{r-1}, k_{r-2}) จะถูกเลือกระหว่าง Stability Margin และ Fitting Accuracy

ถ้าต้องการ Fitting Accuracy เราสามารถอ้างอิงฟังก์ชัน

$$(\gamma_r - c_r)^2 + h^2(\gamma_{r+1} - c_{r+1})^2 \qquad ....(54)$$

แต่จะเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อนระหว่าง k_{r-1} และ k_{r-2} เราสามารถใช้ดัชนี

$$F(k_{r-1}, k_{r-2}) = \{(a_{0,r} + k_{r-2}a_{0,r-2})c_r + k_{r-1}a_{1,r-1}c_{r-1} + \ldots\}^2 \\ + h^2\{(a_{0,r} + k_{r-2}a_{0,r-2})c_{r+1} + k_{r-1}a_{1,r-1}c_r + \ldots.\}^2 \quad ....(55)$$

ซึ่งมันก็คือ Weighted Sum of the Squares ของสมาชิกที่อยู่ทางซ้ายมือของสมการ F จะเป็นศูนย์ ถ้า $\gamma_r = c_r$ และ $\gamma_{r+1} = c_{r+1}$ และ มันเป็นบวกเสมอ

ถ้าเราเลือก Stability Margin ที่เป็นค่าคงที่ใดๆเราสามารถทำการคำนวณอย่างง่ายจากฟังก์ชันที่สามารถให้ค่า k_{r-1} และ k_{r-2} อยู่ในพื้นที่เสถียรภาพ

$$M = k_{r-1}(k_{r-2} + 1) \qquad ....(56)$$

โดย M=0 ถ้าอยู่ที่ขอบของพื้นที่เสถียรภาพ และจะเป็นค่าคงที่ตามกราฟ Hyperbola ที่มีแกนเส้นตรง $k_{r-1} = 0$ และ $k_{r-2} = -1$ เป็นแกน

ดังนั้นปัญหาในการหาค่าต่ำสุดในพื้นที่เสถียนภาพ จากฟังก์ชัน

$$I(k_{r-1}, k_{r-2}) = \frac{1}{M} + h_w F \qquad ....(57)$$

Weighting Coefficient $h_w(h_w>0)$ ขึ้นอยู่กับการกำหนดค่า (goodness of fit) และ Stability Margin จะมีค่าต่ำสุดและยังอยู่ในพื้นที่เสถียรภาพและสามารถทำการวิเคราะห์ได้ง่ายขึ้น

3.4 การสร้างแบบจำลองระบบลดทอนโดยการประมาณค่าพลังงานอิมพัลซ์

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ ดังนี้

$$G(s) = \frac{b_{11} + b_{12}s + \ldots + b_{1,n}s^{n-1}}{a_{11} + a_{12}s + \ldots + a_{1,n+1}s^{n}} \qquad \ldots\ldots(58)$$

ตัวแปร α , β นั้นได้มาจากการกระจายของ G(s) ในรูปของเศษส่วนต่อเนื่องที่ Hutton และ Friedland เคยเสนอไว้และสามารถจัดรูปแบบเป็นตาราง α , β ได้ อย่างไรก็ตาม การประมาณค่าโดยใช้พลังงานอิมพัลซ์สามารถจัดให้อยู่ในรูปที่สะดวกในการใช้ได้โดยการใช้ตาราง D และ N ของ Lucas และ Davidson จะมีลักษณะรูปแบบที่ต่างจากตาราง α , β ทั่วไป เพื่อสะดวกในการคำนวณและทำความเข้าใจ (โดยมีพื้นฐานจากการใช้วิธีการประมาณค่าแบบเราท์)

ตาราง D มีความสัมพันธ์กับ G(s) (จากผลการแลกเปลี่ยนถ่ายโอนจาก $G(s) \rightarrow \frac{1}{s}G(\frac{1}{s})$) มีรูปแบบดังนี้

$$\alpha_1 = \frac{a_{11}}{a_{12}} \Big< \begin{array}{llllll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & \cdots & \end{array}$$

$$\alpha_2 = \frac{a_{21}}{a_{22}} \Big< \begin{array}{llllll} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & & a_{2,n} \\ a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

$$\alpha_n = \frac{a_{n,1}}{a_{n,2}} \Big< \begin{array}{ll} a_{n,1} & a_{n,2} \\ a_{n,2} & \end{array}$$

where $a_{i,j} = c_{i-1,j+1}$ (j odd) and $a_{i,j} = a_{i-1,j+1} - \alpha_{i-1}a_{i-1,j+2}$ (j even)
for $i = 2, 3, \cdots, n$.

ตาราง N มีรูปแบบโดยแถวที่เป็นเลขคู่จะเหมือนกับตาราง D และมีโครงสร้างดังนี้

$$\beta_1 = \frac{b_{11}}{a_{12}} \Big< \begin{array}{llllll} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdots & b_{1,n} \\ a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & \cdots & \end{array}$$

$$\beta_2 = \frac{b_{21}}{a_{22}} \Big< \begin{array}{llllll} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \cdots & b_{2,n-1} \\ a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

$$\beta_n = \frac{b_{n,1}}{a_{n,2}} \Big< \begin{array}{l} b_{n,1} \\ a_{n,2} \end{array}$$

$$b_{i,j} = b_{i-1,j+1} \ (j \text{ odd}) \qquad b_{i,j} = b_{i-1,j+1} - \beta_{i-1}a_{i-1,j+2} \ (j \text{ even})$$

จาก พลังงานอิมพัลซ์ของระบบต้นแบบที่ได้ทั้งหมด

$$I = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i^2}{\alpha_i}$$

ทำการเปรียบเทียบค่า $\frac{\beta_i^2}{\alpha_i}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$ k คู่ ของ ที่กระจายอยู่ใน I จะถูกเลือกค่าขึ้นมาเพื่อคงไว้ในแบบจำลองระบบลดทอน เมื่อเลือกค่า α, β ที่จะคงไว้ได้แล้วก็สามารถทำการประมาณค่าได้โดยทำวิธีย้อนกลับในการคำนวณของตาราง D และ N

ถ้าให้ความสำคัญแก่ค่า Steady-State ของระบบต้นแบบและแบบจำลองระบบลดทอนเมื่อเทียบกับอินพุทที่เป็น Unit-Step ค่า $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ จะถูกคงไว้ในแบบจำลองระบบลดทอนเสมอใน k-1 คู่ ของคู่ α, β

บทที่ 4

การทดสอบระบบ

การทดสอบระบบในโดเมนของความถี่

การสร้างแบบจำลองระบบลดทอนในโดเมนของความถี่ คือ การลดทอน order ของ tranfer function ของระบบนั้นเอง ปัญหาในโดเมนของความถี่นั้น คือ การหาค่าสัมประสิทธิ์ของ tranfer function หลังจากเลือก order ของ tranfer function ได้แล้ว โดยใช้ทฤษฎีการประมาณค่าทางคณิตศาสตร์และทฤษฎีทางระบบควบคุมในการหาค่าสัมประสิทธิ์ และปัญหาที่สำคัญในการสร้างแบบจำลองระบบลดทอน คือ ปัญหาเรื่องเสถียรภาพของแบบจำลองระบบลดทอน และ เอาท์พุทของแบบจำลองระบบลดทอนและระบบเดิมจะต้องใกล้เคียงกันมากที่สุด การที่รู้ได้ว่าผลตอบสนองของระบบทั้งสองใกล้เคียงกันมากน้อยเพียงใด เราจะวิเคราะห์ผลตอบสนองของเวลาได้ง่ายขึ้นเมื่อเราป้อนอินพุทเป็น unit-step โดยวิเคราะห์เอาท์พุทของผลตอบสนองที่สำคัญคือ

1. เวลาที่ผลตอบสนองสูงสุด (Time to peak) คือ เวลาที่ step-response มีค่ามากที่สุดและเป็นการเกิดขึ้นครั้งแรก (first overshoot)

2. เปอร์เซ็นต์โอเวอร์ชูต (Percent overshoot) = $100\left(\dfrac{Peakvalue - Finalvalue}{Finalvalue}\right)$

3. เวลารุ่ง (Rise time) คือ ระยะเวลาที่ step-response มีค่า 90% ของค่าสุดท้าย ลบด้วยระยะเวลาที่ step-response มีค่า 10% ของค่าสุดท้าย

4. เวลาเข้าสู่สมดุลย์ (Settling time) คือ ระยะเวลาที่กระบวนการใช้ในการตอบสนองจนมีค่าเข้าใกล้ค่าสุดท้ายไม่เกิน 2% หรือ 5%

วิธีการประมาณค่าที่เราใช้ทดสอบระบบในโดเมนของความถี่ จะใช้วิธีการต่างๆ ที่ได้เสนอไว้ในบทที่ 3 โดยจะศึกษาเปรียบเทียบแบบจำลองระบบลดทอนที่ได้ในแต่ละวิธีการ แบบจำลองลดทอนของวิธีการประมาณค่าแบบใดที่ให้ผลตอบสนองใกล้เคียงและยังคงมีเสถียรภาพ กล่าวคือ ระบบเดิมก่อนถูกลดอันดับมีสถานะที่เสถียรแล้ว

ระบบที่ถูกลดทอนอันดับแล้วควรจะยังเสถียรอยู่ ถ้าวิธีการประมาณค่าแบบใดมีคุณสมบัติตามที่ได้กล่าวไว้ก็เรียกได้ว่าวิธีการประมาณค่านั้นสามารถนำมาใช้ได้ดี

ตัวอย่างที่ 1 ระบบที่มีสมการ tranfer function order เท่ากับ 3 และมีรูปแบบเป็น

$$G(s) = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}$$

ระบบนี้มีโพลอยู่ที่ -0.4859 , -2.4280 และ -5.0867 เมื่อเรากระจาย G(s) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง

$$G(s) = 1 - 1.3333s + 2.5555s^2 - 5.2036s^3 + \ldots$$

1. วิธีการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 คำนวณค่าต่างๆ ได้ดังนี้

a_0=1.9093 b_0=1.9093

a_1=1.8639 b_1=4.4095

b_2=1

ดังนั้นแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 $G_{P,2}(s) = \dfrac{1.8639s + 1.9093}{s^2 + 4.4095s + 1.9093}$

มีโพลอยู่ที่ -0.4867 , -3.9228 ระบบเสถียรภาพ

2. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh โดยนำสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง Routh

Numerator Table

2	2	6
1	8	0
0	6	

Denominator Table

3	1	16
2	8	6
1	15.25	0
0	6	

ดังนั้นแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 $G_{R,2}(s) = \dfrac{8s + 6}{8s^2 + 15.25s + 6}$

มีโพลอยู่ที่ -0.5557 , -1.3512 ระบบเสถียรภาพ

3. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Padc' ของ Y.Shamash

พิจารณาตัวส่วนของ G(s) ในรูปของเศษส่วนต่อเนื่อง

$$Q(s)=\cfrac{1}{1+\cfrac{6}{16}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{128}{61}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{61}{8}\cfrac{1}{s}}}}$$

ต้องการแบบจำลองระบบที่อันดับ 2 ดังนั้นโพลิโนเมียลตัวส่วนคือ$s^2+2.0984s+0.7869$ เราสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของตัวเศษส่วนได้จากการประมาณค่าแบบพาเด

$$a_0=b_0c_0=0.7869$$

$$a_1=b_0c_1+b_1c_0=1.0492$$

ดังนั้นแบบจำลองระบบที่อันดับ 2 $G_{R-P,2}(s)=\dfrac{1.0492s+0.7869}{s^2+2.0984s+0.7869}$

มีโพลอยู่ที่ -0.4889 และ -1.6095 ระบบเสถียรภาพ

4. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Pade' ของ Lepschy และ Viaro

ทำการพิจารณาตัวส่วนของ G(s) ให้อยู่ในรูปตัวแปร 2 ตัวแปร เพื่อกำหนดขอบเขตจากตาราง Routh

$$P_2^*(s)=s^2+1.9063k_1s+(0.75+0.75k_0) \qquad k_1>0,k_0>-$$

ทำการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ จะได้ดังนี้

$$a_0=0.75+0.75k_0$$

$$a_1=-1.3333(0.75+0.75k_0)+1.9063k$$

$$1.9166k_0-2.5417k_1=-2.9166$$

$$-3.9027k_0+4.8715k_1=5.236$$

ทำการพิจารณาสมการ $1.9166k_0-2.5417k_1=-2.9166$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงเมื่อนำไปเขียนบนระนาบ k_0-k_1 จะผ่านพื้นที่เสถียรภาพ เราสามารถคำนวณค่า k_0,k_1 จากชุดสมการข้างบนได้ว่า $k_0=1.5441$, $k_1=2.3119$ จะได้แบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2

$$G'_{R-P,2}(s)=\frac{1.8632s+1.9081}{s^2+4.4072s+1.9081}$$

มีโพลอยู่ที่ -0.4867 และ -3.9205 ระบบเสถียรภาพ

5. วิธีการประมาณค่าโดยใช้พลังงานอิมพัลซ์ นำค่าสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง D และ N ตามรูปแบบที่ได้เสนอไว้

จากตาราง D และ N ได้ค่า α , β ดังนี้

$$\alpha_1 = 0.375, \alpha_2 = 2.0984, \alpha_3 = 7.625$$
$$\beta_1 = 0.375, \beta_2 = 1.0492, \beta_3 = 1.625$$

ทำการพิจารณาเปรียบเทียบค่า $\frac{\beta_i^2}{\alpha_i}$ ของระบบที่อันดับเท่ากับ 2

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1} = 0.375, \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} = 0.5246, \frac{\beta_3^2}{\alpha_3} = 0.3463$$

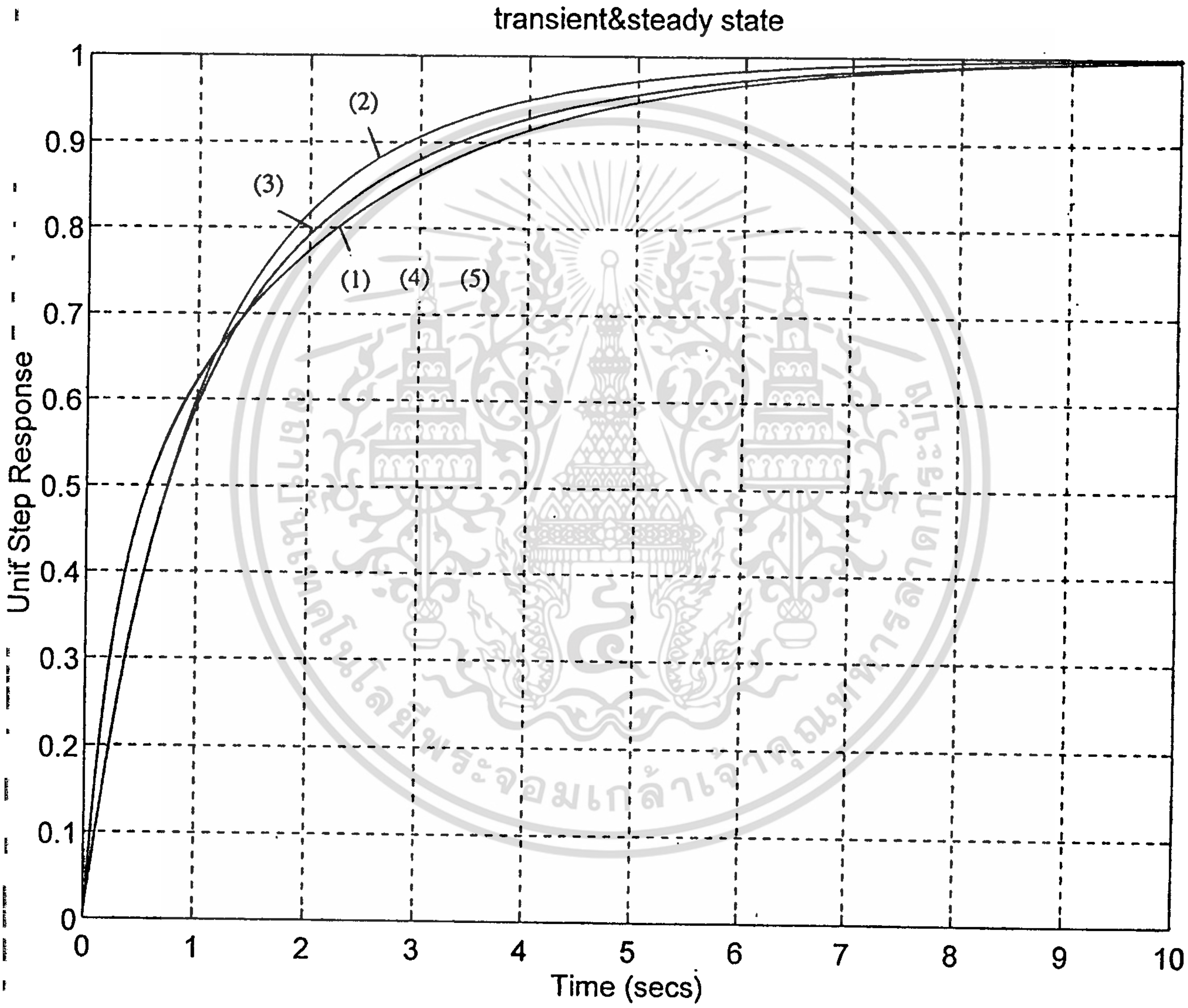
ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับเท่ากับ 2 อินพุทเป็น unit step ดังนั้นค่า α, β ที่จะคงไว้คือ $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$

$$G_{1,2}(s) = \frac{1.0462s + 0.7869}{s^2 + 2.0984s + 0.7869}$$

มีโพลอยู่ที่ -0.4889 และ -1.6095 ระบบเสถียรภาพ

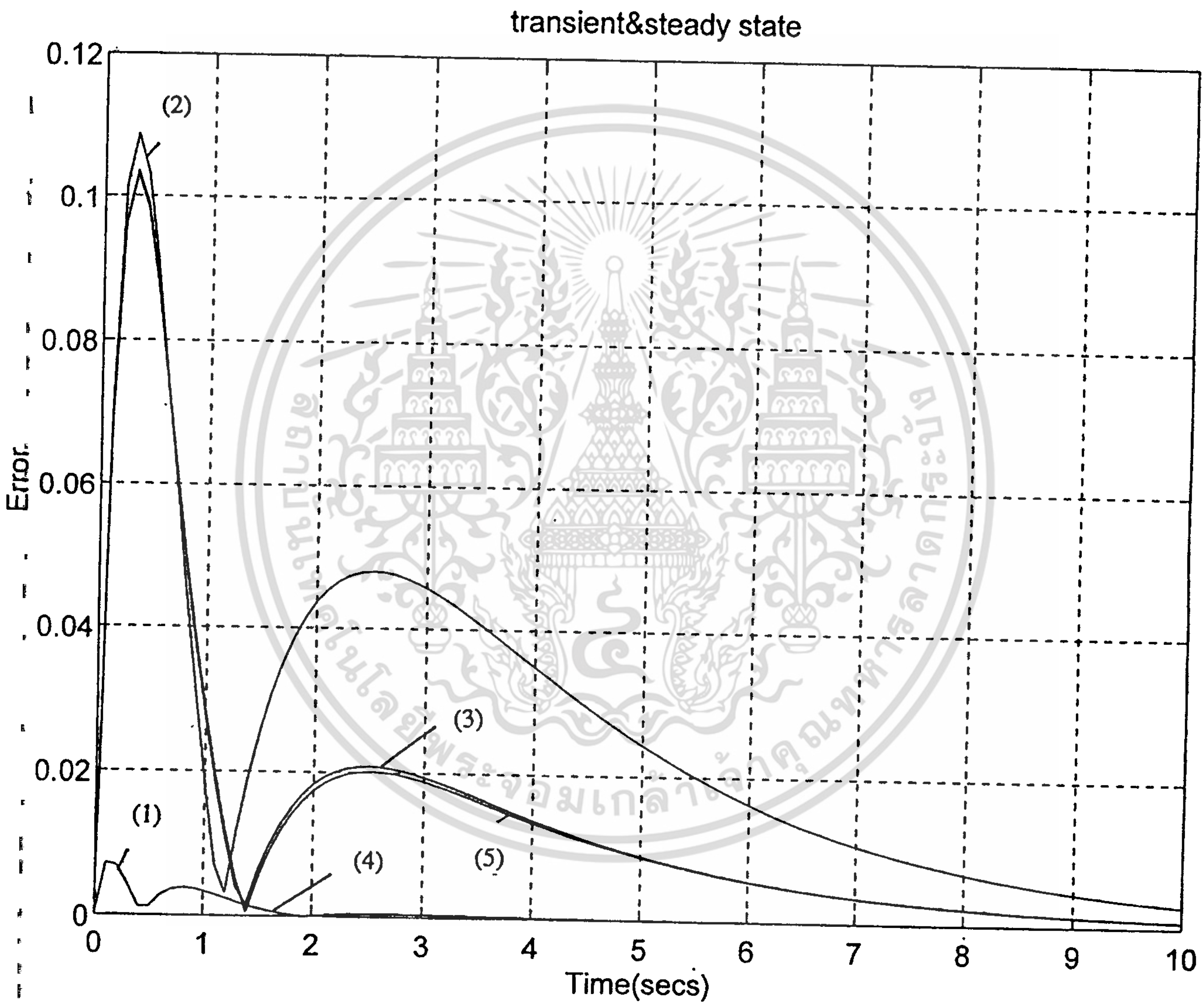
Order System	Peak Time	PercentOvershoot	Rise Time	Settling Time
Original System	_	_	3.62242	6.97727
Pade Approximation	_	_	3.62658	6.96497
Routh Approximation	_	_	2.79244	5.58487
Routh-Pade (Y.Shamash)	_	_	3.25211	6.56557
Routh-Pade (Lepschy&Viaro)	_	_	3.63675	6.96531
Impulse Approximation	_	_	3.23165	6.58603

Table 1 Show the time performance of Original System and Model Reduction



(1) $y(t)$ (2) $y_{R,2}(t)$ (3) $y_{R\text{-}P,2}(t)$ (4) $y'_{R\text{-}P,2}(t)$ (5) $y_{I,2}(t)$

รูปที่ 1.1 รูปแสดงผลตอบสนองในโดเมนของเวลาของตัวอย่างที่ 1



(1) $|y(t)-y_{P,2}(t)|$ (2) $|y(t)-y_{R,2}(t)|$ (3) $|y(t)-y_{R\text{-}P,2}(t)|$ (4) $|y(t)-y'_{R\text{-}P,2}(t)|$ (5) $|y(t)-y_{I,2}(t)|$

รูปที่ 1.2 รูปแสดงค่าความผิดพลาดของตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 2 ระบบที่มีสมการ tranfer function order เท่ากับ 3 และมีรูปแบบเป็น

$$G(s) = \frac{s^2 + 5.5s + 6}{s^3 + 9s^2 + 20s + 12}$$

ระบบนี้มีโพลอยู่ที่ -1 , -2 และ -6 เมื่อเรากระจาย G(s) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง

$$G(s) = 4.5 - 0.375s + 0.3333s^2 - 0.315972s^3 + \ldots$$

1. วิธีการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 คำนวณค่าต่างๆ ได้ดังนี้

a_0=3.2307 b_0=6.4615

a_1=1.1153 b_1=7.0769

b_2=1

ดังนั้นแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 $G_{P,2}(s) = \dfrac{1.1153s + 3.2307}{s^2 + 7.0769s + 6.4615}$

มีโพลอยู่ที่ -1.0769 , -6 ระบบเสถียรภาพ

2. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh โดยนำสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง Routh

Numerator Table

2	1	6
1	5.5	0
0	6	

Denominator Table

3	1	20
2	9	12
1	18.6667	0
0	12	

ดังนั้นแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 $G_{R,2}(s) = \dfrac{5.5s + 6}{9s^2 + 18.6667s + 12}$

มีโพลอยู่ที่ -1.0370-0.5078j , -1.0370+0.5078j ระบบเสถียรภาพ

3. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Pade' ของ Y.Shamash

พิจารณาตัวส่วนของ G(s) ในรูปของเศษส่วนต่อเนื่อง

$$Q(s)=\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{50}{21}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{42}{5}\cfrac{1}{s}}}}$$

ต้องการแบบจำลองระบบที่อันดับ 2 ดังนั้นโพลิโนเมียลตัวส่วนคือ $s^2+2.381s+1.4286$
เราสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของตัวเศษส่วนได้จากการประมาณค่าแบบพาเด

$$a_0=b_0c_0=0.6548$$

$$a_1=b_0c_1+b_1c_0=0.7143$$

ดังนั้นแบบจำลองระบบที่อันดับ 2 $\quad G_{R-P,2}(s)=\dfrac{0.6548s+0.7143}{s^2+2.381s+1.4286}$

มีโพลอยู่ที่ -1.1905-0.1063j และ -1.1905+0.1063j ระบบเสถียรภาพ

4. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Pade' ของ Lepschy และ Viaro

ทำการพิจารณาตัวส่วนของ G(s) ให้อยู่ในรูปตัวแปร 2 ตัวแปร เพื่อกำหนดขอบเขตจากตาราง Routh

$$P_2^{*}(s)=s^2+2.0741k_1s+(1.3333+1.3333k_0) \qquad k_1>0, k_0>-1$$

ทำการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 จะได้ดังนี้

$$a_0=4.5(1.3333+1.3333k_0)$$

$$a_1=-0.375(1.3333+1.3333k_0)+9.3335k_1$$

$$0.4444k_0+0.6913k_1=-0.9444$$

$$-0.4213k_0+0.6913k_1=0.7963$$

ทำการพิจารณาสมการ $0.4444k_0+0.6913k_1=-0.9444$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงเมื่อนำไปเขียนบนระนาบ k_0-k_1 จะผ่านพื้นที่เสถียรภาพ เราสามารถคำนวณค่า k_0,k_1 จากชุดสมการข้างบนได้ว่า $k_0=1.6363$, $k_1=2.1491$ จะได้แบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2

$$G_{R-P,2}^{'}(s)=\frac{0.9106s+1.7575}{s^2+4.4574s+3.515}$$

มีโพลอยู่ที่ -3.4337 และ -1.0237 ระบบเสถียรภาพ

5. วิธีการประมาณค่าโดยใช้พลังงานอิมพัลซ์ นำค่าสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง D และ N ตามรูปแบบที่ได้เสนอไว้

จากตาราง D และ N ได้ค่า α, β ดังนี้

$$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 2.381, \alpha_3 = 8.4$$
$$\beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.6548, \beta_3 = 0.7$$

ทำการพิจารณาเปรียบเทียบค่า $\frac{\beta_i^2}{\alpha_i}$ ของระบบที่อันดับเท่ากับ 2

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1} = 0.15, \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} = 0.1801, \frac{\beta_3^2}{\alpha_3} = 0.058$$

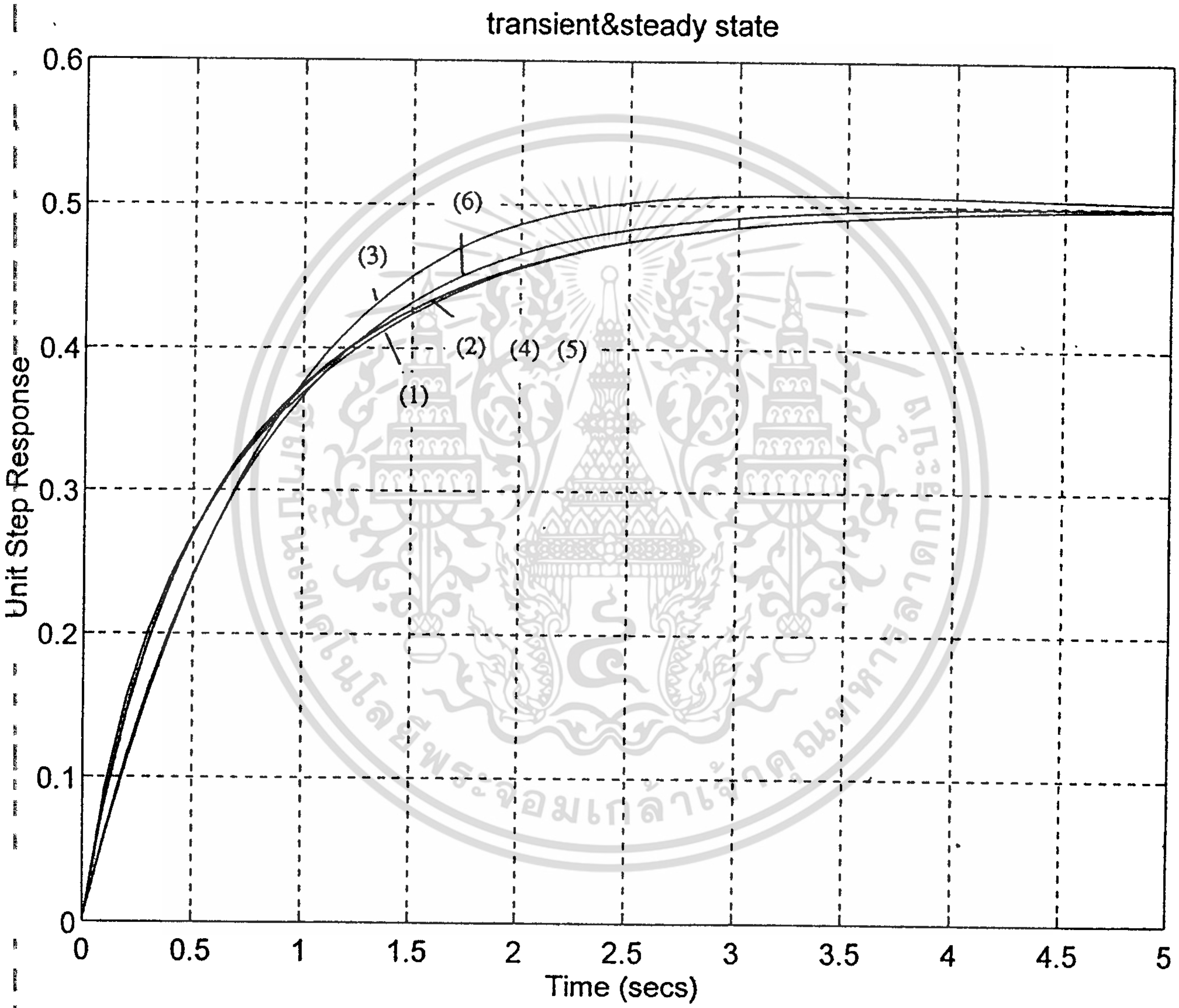
ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับเท่ากับ 2 อินพุทเป็น unit step ดังนั้นค่า α, β ที่จะคงไว้คือ $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$

$$G_{I,2}(s) = \frac{0.6548s + 0.7143}{s^2 + 2.381s + 1.4286}$$

มีโพลอยู่ที่ -1.1905-0.1063j และ -1.1905+0.1063j ระบบเสถียรภาพ

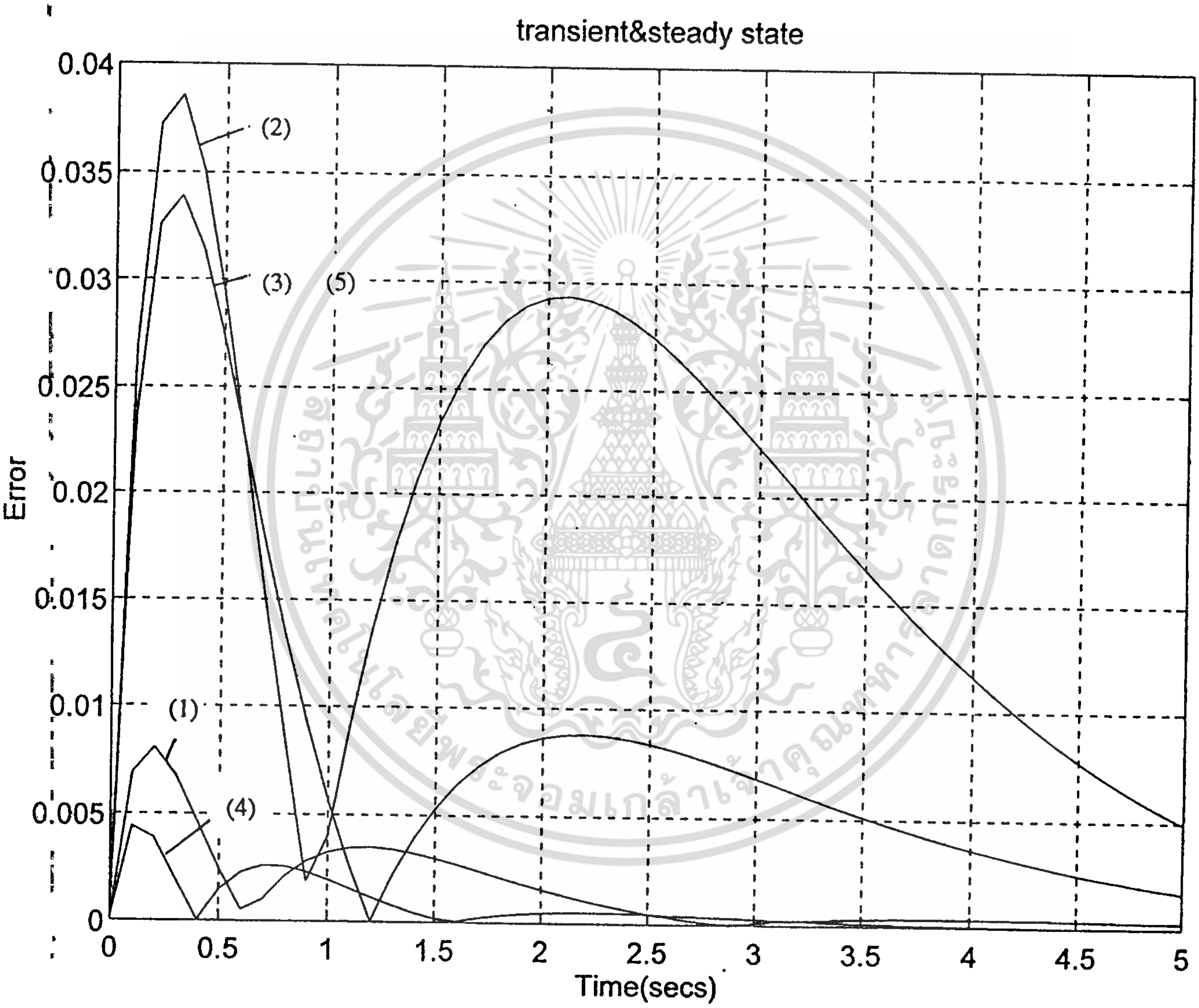
Order System	Peak Time	PercentOvershoot	Rise Time	Settling Time
Original System	_	_	1.9	3.41
Pade Approximation	_	_	1.83858	3.38001
Routh Approximation	3.29785	1.52582	1.4175	0
Routh-Pade (Y.Shamash)	7.69425	0.0014092	1.64637	0
Routh-Pade (Lepschy&Viaro)	_	_	1.79753	3.42899
Impulse Approximation	7.69425	0.0014092	1.64637	0

Table 2 Show the time performance of Original System and Model Reduction



(1) $y(t)$ (2) $y_{P,2}(s)$ (3) $y_{R,2}(t)$ (4) $y_{R\text{-}P,2}(t)$ (5) $y'_{R\text{-}P,2}(t)$ (6) $y_{I,2}(t)$

รูปที่ 2.1 รูปแสดงผลตอบสนองในโดเมนของเวลาของตัวอย่างที่ 2



(1) $| y(t)-y_{P,2}(t) |$ (2) $| y(t)-y_{R,2}(t) |$ (3) $| y(t)-y_{R-P,2}(t) |$ (4) $| y(t)-y'_{R-P,2}(t) |$ (5) $| y(t)-y_{I,2}(t) |$

รูปที่ 2.2 รูปแสดงค่าความผิดพลาดของตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 3 ระบบที่มีสมการ tranfer function order เท่ากับ 4 และมีรูปแบบเป็น

$$G(s)=\frac{24s^3+60s^2+72s+24}{s^4+10s^3+35s^2+50s+24}$$

ระบบนี้มีโพลอยู่ที่ -1 , -2 , -3 และ -4 เมื่อเรากระจาย G(s) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง

$$G(s)=1+0.9167s-0.8681s^2 1.0550s^3-1.3556s^4+1.6091s^5+....$$

1. วิธีการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3 คำนวณค่าต่างๆ ได้ดังนี้

a_0=5.5287	b_0=5.5287
a_1=5.5296	b_1=0.4614
a_2=-11.3932	b_2=-7.0167
	b_3=1

ดังนั้นแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3 $G_{P,3}(s)=\dfrac{-11.3932s^2+5.5296s+5.5287}{s^3-7.0167s^2+0.4614s+5.5287}$

มีโพลอยู่ที่ -0.8114 , 0.9975 และ 6.8307 ระบบไม่เสถียรภาพ

2. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh โดยนำสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง Routh

Numerator Table

3	24	72
2	60	24
1	62.4	0
0	24	

Denominator Table

4	1	35	24
3	10	50	0
2	30	24	
1	42		
0	24		

ดังนั้นแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 $G_{R,3}(s)=\dfrac{60s^2+62.4s+24}{10s^3+30s^2+50s+24}$

มีโพลอยู่ที่ -1.1440+1.436j,-1.1440-1.436j และ -0.712 ระบบเสถียรภาพ

3. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Padc' ของ Y.Shamash

พิจารณาตัวส่วนของ G(s) ในรูปของเศษส่วนต่อเนื่อง

$$Q(s)=\cfrac{1}{1+\cfrac{24}{50}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{250}{151}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{3.6192\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{8.3444\cfrac{1}{s}}}}}$$

ต้องการแบบจำลองระบบที่อันดับ 3 ดังนั้นโพลิโนเมียลตัวส่วนคือ

$s^3+4.0992s^2+5.9919s+2.876$

เราสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของตัวเศษส่วนได้จากการประมาณค่าแบบพาเด

$$a_0=b_0c_0=2.8761$$

$$a_1=b_0c_1+b_1c_0=8.6284$$

$$a_2=b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=7.0952$$

ดังนั้นแบบจำลองระบบที่อันดับ 3 $G_{R-P,3}(s)=\dfrac{7.0952s^2+8.6284s+2.8761}{s^3+4.0992s^2+5.9919s+2.8761}$

มีโพลอยู่ที่ -1.5598+0.7092j , -1.5598-0.7092j และ -0.9797 ระบบเสถียรภาพ

4. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Pade' ของ Lepschy และ Viaro

ทำการพิจารณาตัวส่วนของ G(s) ให้อยู่ในรูปตัวแปร 2 ตัวแปร เพื่อกำหนดขอบเขตจากตาราง Routh

$$P_3^{*}(s)=s^3+3k_2s^2+(4.2k_1+5)s+2.4k_2 \qquad k_2>0, k_1>-$$

ทำการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ จะได้ดังนี้

$$a_0=2.4k_2$$

$$a_1=2.2001k_2+4.2k_1+5$$

$$a_2=1.0834k_2+3.8501k_1+4.5835$$

$$5.2821k_2-3.646k_1=3.3405$$

$$-5.8577k_2+4.4310k_1=-6.1917$$

$$7.0268k_2-5.6935k_1=7.6461$$

ทำการพิจารณาสมการ $5.2821k_2-3.646k_1=3.3405$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงเมื่อนำไปเขียนบนระนาบ k_0-k_1 จะผ่านพื้นที่เสถียรภาพ เราสามารถคำนวณค่า k_0,k_1 จากชุดสมการข้างบนได้ว่า $k_2=0.6197$, $k_1=-0.5782$ จะได้แบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3

$$G'_{R-P,3}(s)=\frac{2.9254s^2+3.935s+1.4873}{s^3+1.8591s^2+2.5716s+1.4873}$$

มีโพลอยู่ที่ -0.4950+1.2109j , -0.4950-1.2109j และ -0.8692 ระบบเสถียรภาพ

5. วิธีการประมาณค่าโดยใช้พลังงานอิมพัลซ์ นำค่าสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง D และ N ตามรูปแบบที่ได้เสนอไว้

จากตาราง D และ N ได้ค่า α, β ดังนี้

$$\alpha_1 = 0.48, \alpha_2 = 1.6556, \alpha_3 = 3.6192, \alpha_4 = 8.3444$$
$$\beta_1 = 0.48, \beta_2 = 2.3841, \beta_3 = 6.6152, \beta_4 = 21.6159$$

ทำการพิจารณาเปรียบเทียบค่า $\frac{\beta_i^2}{\alpha_i}$ ของระบบที่อันดับเท่ากับ 3

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1} = 0.48, \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} = 3.4332, \frac{\beta_3^2}{\alpha_3} = 12.0913, \frac{\beta_4^2}{\alpha_4} = 55.9953$$

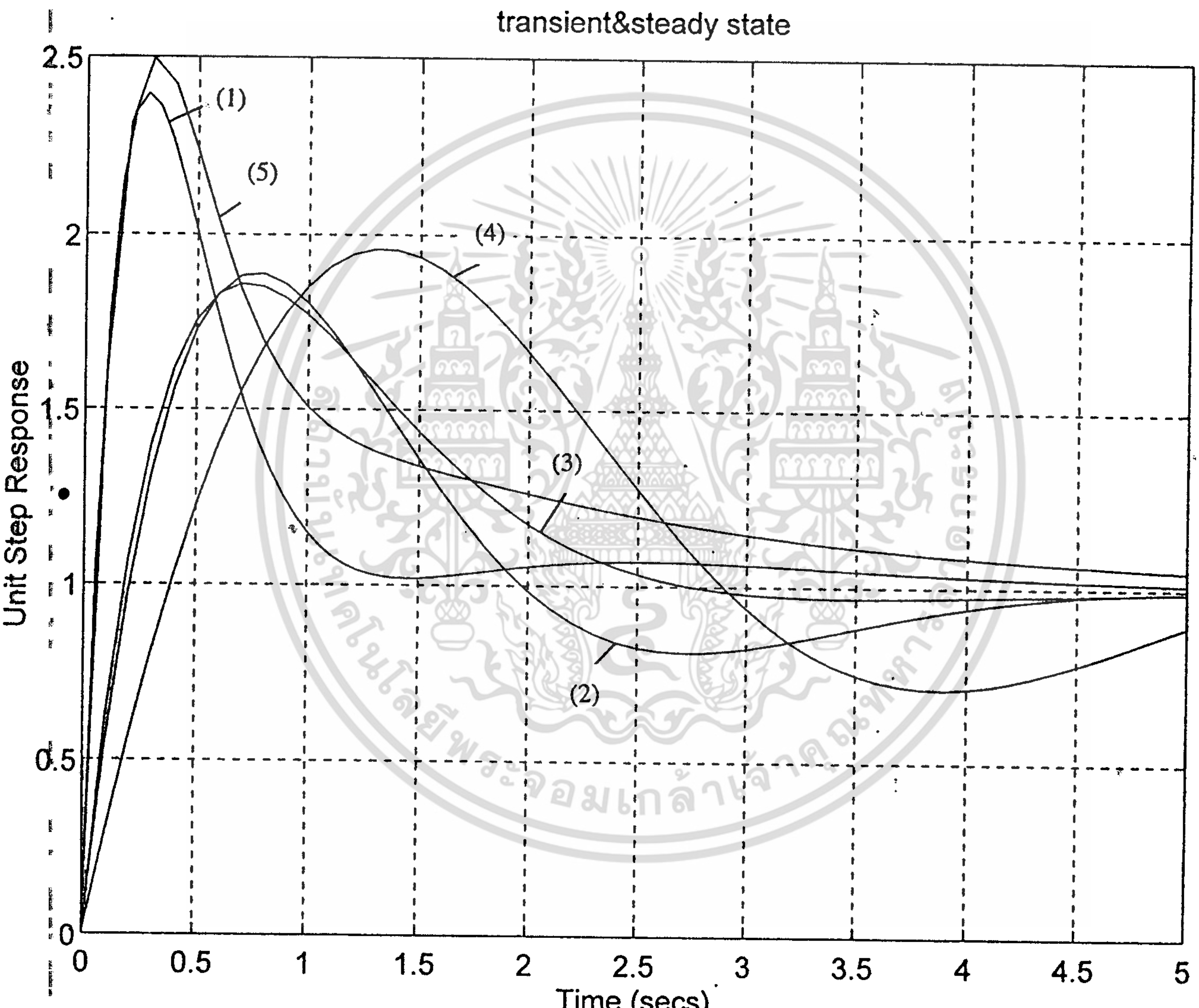
ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับเท่ากับ 2 อินพุทเป็น unit step ดังนั้นค่า α, β ที่จะคงไว้คือ $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_4, \beta_4)$

$$G_{I,3}(s) = \frac{22.0959s^2 + 55.1979s + 14.496}{s^3 + 8.8244s^2 + 30.2s + 14.496}$$

มีโพลอยู่ที่ -4.1281+2.9099j , -4.1281-2.9099j และ -0.5683 ระบบเสถียรภาพ

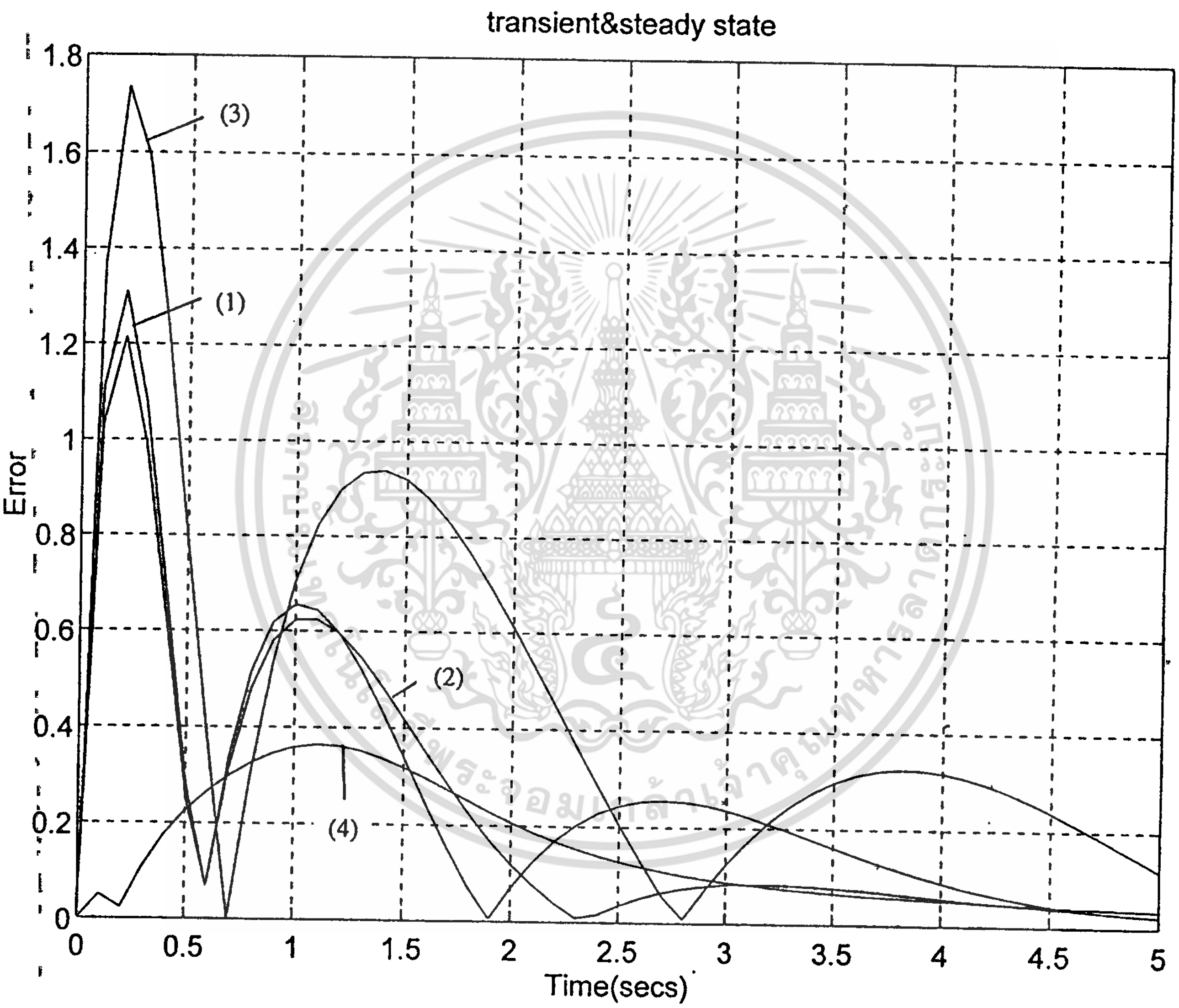
Order System	Peak Time	PercentOvershoot	Rise Time	Settling Time
Original System	0.28	139.554	0.04	4.5
Routh Approximation	0.75848	89.1595	0.154505	4.57897
Routh-Pade (Y.Shamash)	0.720996	862082	0.144199	4.39253
Routh-Pade (Lepschy&Viaro)	1.33342	96.0592	0.323253	9.39455
Impulse Approximation	0.31674	149.782	0.0351934	6.51077

Table 3 Show the time performance of Original System and Model Reduction



(1) $y(t)$ (2) $y_{R,3}(t)$ (3) $y_{R\text{-}P,3}(t)$ (4) $y'_{R\text{-}P,3}(t)$ (5) $y_{I,3}(t)$

รูปที่ 3.1 รูปแสดงผลตอบสนองในโดเมนของเวลาของตัวอย่างที่ 3



(1) $|y(t)-y_{R,3}(t)|$ (2) $|y(t)-y_{R-P,3}(t)|$ (3) $|y(t)-y'_{R-P,3}(t)|$ (4) $|y(t)-y_{I,3}(t)|$

รูปที่ 3.2 รูปแสดงค่าความผิดพลาดของตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 4 ระบบที่มีสมการ tranfer function order เท่ากับ 4 และมีรูปแบบเป็น

$$G(s)=\frac{267s^3+527s^2+385s+100}{s^4+4s^3+6s^2+4s+1}$$

ระบบนี้มีโพลอยู่ที่ -1 ซ้ำกัน 4 ตัว เมื่อเรากระจาย G(s) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง

$$G(s)=100-15s-13s^2+9s^3+2s^4+5s^5+....$$

1. วิธีการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3 คำนวณค่าต่างๆ ได้ดังนี้

a_0=-204.8551 b_0=-2.0486

a_1=473.7467 b_1=4.4302

a_2=119.9827 b_2=1.5980

b_3=1

ดังนั้นแบบจำลองระบบที่อันดับ 3 $G_{P,3}(s)=\dfrac{119.9827s^2+473.7467s-204.8551}{s^3+1.5980s^2+4.4302s-2.0486}$

มีโพลอยู่ที่ -0.9955+2.0547j , -0.9955-2.0547j และ 0.393 ระบบไม่เสถียรภาพ

2. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh โดยนำสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง Routh

Numerator Table

3	267	385
2	527	100
1	334.3359	
0	100	

Denominator Table

4	1	6	1
3	4	4	
2	5	1	
1	3.2		
0	1		

ดังนั้นแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 2 $G_{R,3}(s)=\dfrac{527s^2+334.3359s+100}{4s^3+5s^2+4s+1}$

มีโพลอยู่ที่ -0.4395+0.6933j , -0.4395-0.6933j และ -0.3710 ระบบเสถียรภาพ

3. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Pade' ของ Y.Shamash

พิจารณาตัวส่วนของ G(s) ในรูปของเศษส่วนต่อเนื่อง

$$Q(s)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{4}{5}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{25}{16}\cfrac{1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{16}{5}\cfrac{1}{s}}}}}$$

ต้องการแบบจำลองระบบที่อันดับ 3 ดังนั้นโพลิโนเมียลตัวส่วนคือ

$s^3+1.8125s^2+1.25s+0.312$

เราสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของตัวเศษส่วนได้จากการประมาณค่าแบบพาเด

$$a_0=b_0c_0=31.25$$

$$a_1=b_0c_1+b_1c_0=120.3125$$

$$a_2=b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=158.4375$$

ดังนั้นแบบจำลองระบบที่อันดับ 3 $G_{R-P,3}(s)=\dfrac{158.4375s^2+120.3125s+31.25}{s^3+1.8125s^2+1.25s+0.3125}$

มีโพลอยู่ที่ -0.6095+0.3937j , -0.6095-0.3937j และ -0.5936 ระบบเสถียรภาพ

4. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Pade' ของ Lepschy และ Viaro

ทำการพิจารณาตัวส่วนของ G(s) ให้อยู่ในรูปตัวแปร 2 ตัวแปร เพื่อกำหนดขอบเขตจากตาราง Routh

$$P_3^*(s)=4s^3+5k_2s^2+(\frac{16}{5}k_1+4)s+k_2 \qquad k_2>0, k_1>-1$$

ทำการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3 จะได้ดังนี้

$$a_0=100k_2$$

$$a_1=-15k_2+320k_1+400$$

$$a_2=487k_2-48k_1-60$$

$$0=-66k_2-41.6k_1+348$$

$$0=-63k_2+28.8k_1-24$$

ทำการพิจารณาสมการ $0=-66k_2-41.6k_1+348$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงเมื่อนำไปเขียนบนระนาบ k_0-k_1 จะผ่านพื้นที่เสถียรภาพ เราสามารถคำนวณค่า k_0,k_1 จากชุดสมการข้างบนได้ว่า $k_2=1.99575$, $k_1=5.19904$ จะได้แบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3

$$G'_{R-P,3}(s)=\frac{331.89s^2+1019.04s+100}{2.0043s^3+5s^2+10.9404s+1}$$

มีโพลอยู่ที่ -1.1996+1.9469j , -1.1996-1.9469j และ -0.0954 ระบบเสถียรภาพ

5. วิธีการประมาณค่าโดยใช้พลังงานอิมพัลซ์ นำค่าสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง D และ N ตามรูปแบบที่ได้เสนอไว้

จากตาราง D และ N ได้ค่า α, β ดังนี้

$$\alpha_1 = 0.25, \alpha_2 = 0.8, \alpha_3 = 1.5625, \alpha_4 = 3.2$$
$$\beta_1 = 25, \beta_2 = 77, \beta_3 = 133.4375, \beta_4 = 190$$

ทำการพิจารณาเปรียบเทียบค่า $\frac{\beta_i^2}{\alpha_i}$ ของระบบที่อันดับเท่ากับ 4

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1} = 2500, \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} = 7411.25, \frac{\beta_3^2}{\alpha_3} = 11395.5625, \frac{\beta_4^2}{\alpha_4} = 11281.25$$

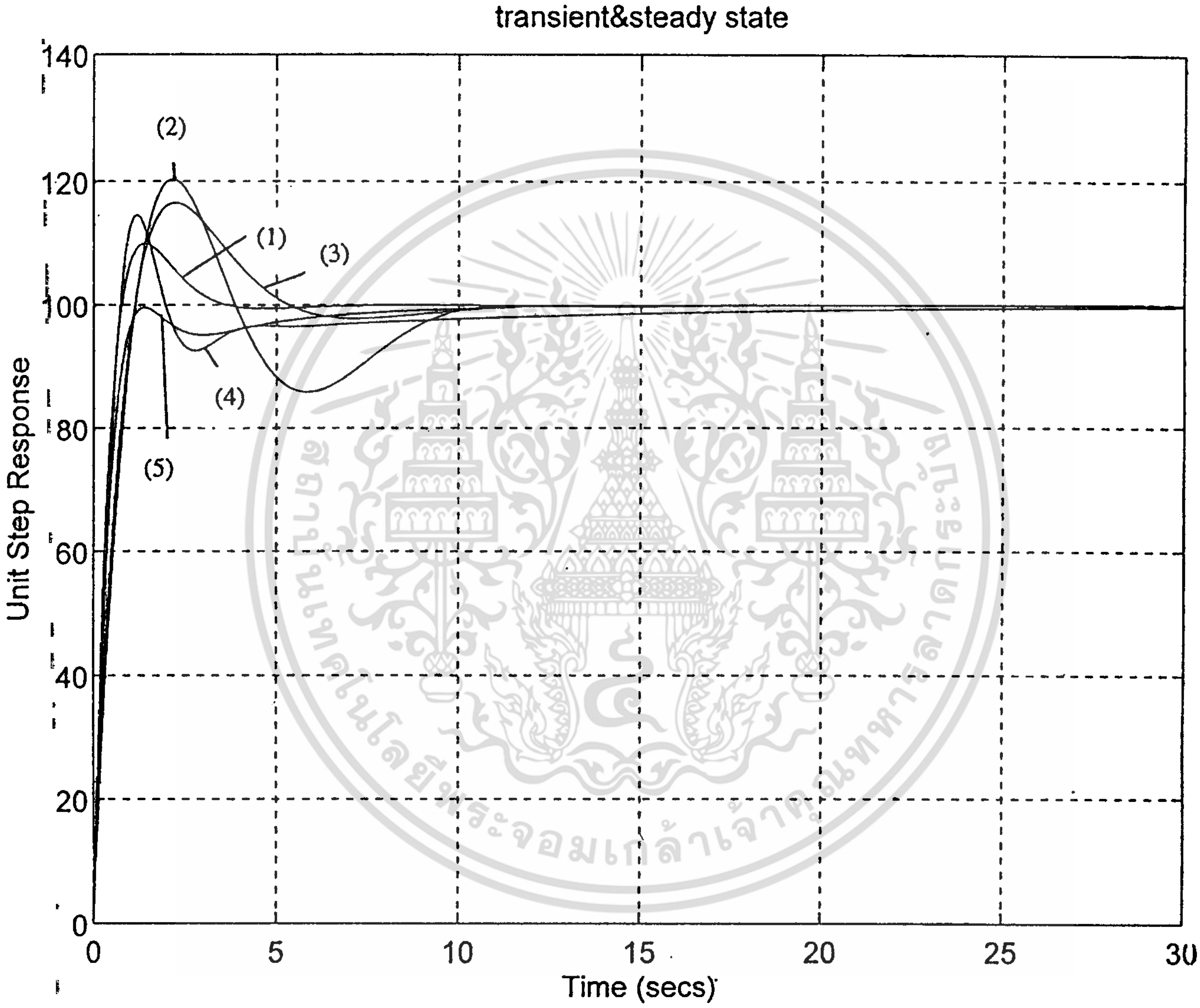
ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับเท่ากับ 3 อินพุทเป็น unit step ดังนั้นค่า α, β ที่จะคงไว้คือ $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_3, \beta_3), (\alpha_4, \beta_4)$

$$G_{I,3}(s) = \frac{215s^2 + 427s + 125}{s^3 + 3.45s^2 + 5s + 1.25}$$

มีโพลอยู่ที่ -1.5697+1.2494j , -1.5697-1.2494j และ -0.3106 ระบบเสถียรภาพ

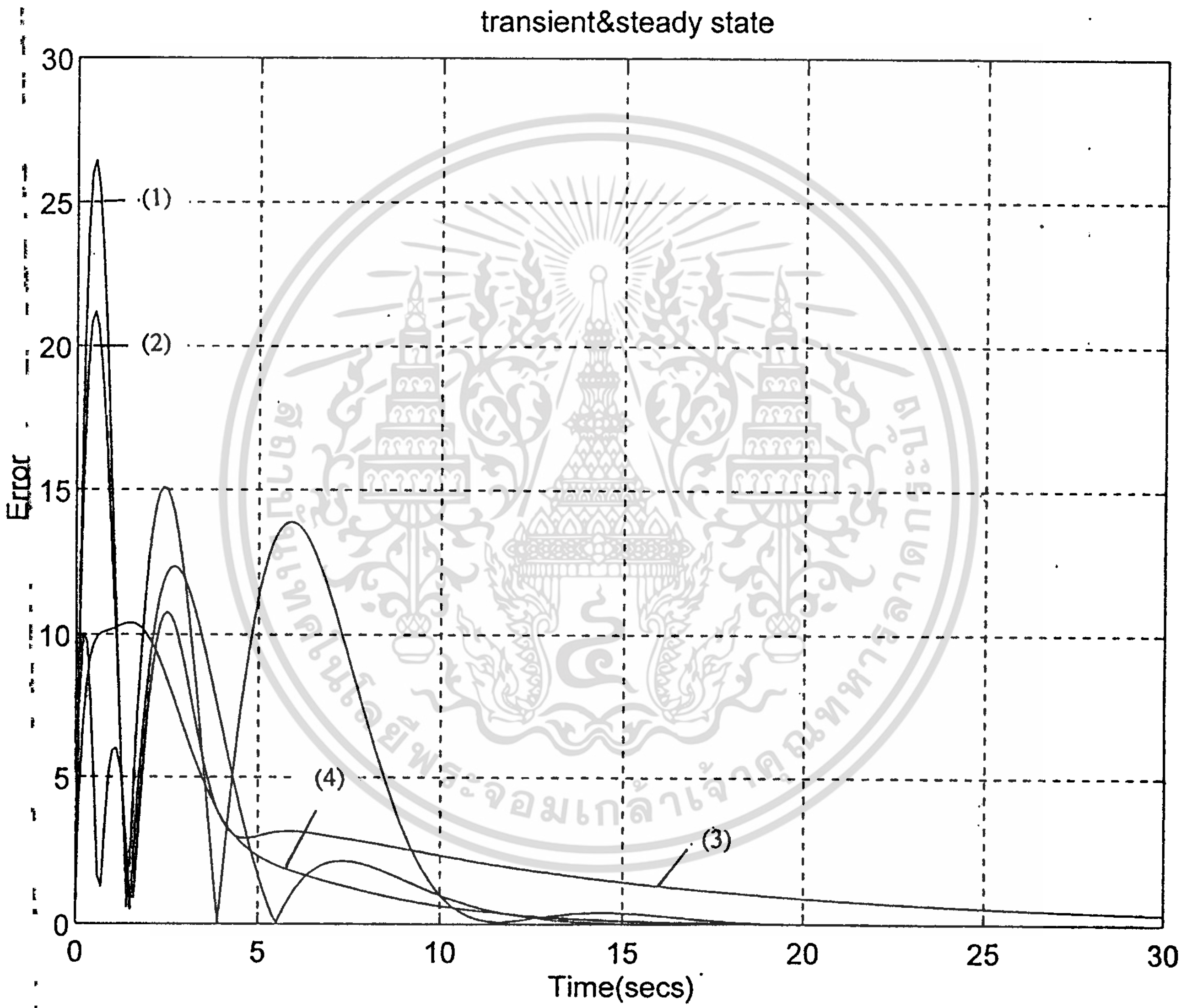
Order System	Peak Time	PercentOvershoot	Rise Time	Settling Time
Original System	1.41014	9.95781	0.560055	2.89028
Routh Approximation	2.18345	20.3066	0.889555	9.40772
Routh-Pade (Y.Shamash)	2.24074	16.5514	0.859232	8.03634
Routh-Pade (Lepschy&Viaro)	1.15298	14.5461	0.524081	11.5298
Impulse Approximation	_	_	0.740604	6.11804

Table 4 Show the time performance of Original System and Model Reduction



(1) $y(t)$ (2) $y_{R,3}(t)$ (3) $y_{R\text{-}P,3}(t)$ (4) $y'_{R\text{-}P,3}(t)$ (5) $y_{I,3}(t)$

รูปที่ 4.1 รูปแสดงผลตอบสนองในโดเมนของเวลาของตัวอย่างที่ 4



(1) $| y(t)-y_{R,3}(t) |$ (2) $| y(t)-y_{R-P,3}(t) |$ (3) $| y(t)-y'_{R-P,3}(t) |$ (4) $| y(t)-y_{I,3}(t) |$

รูปที่ 4.2 รูปแสดงค่าความผิดพลาดของตัวอย่างที่ 4

ตัวอย่างที่ 5 ระบบที่มีสมการ tranfer function order เท่ากับ 4 และมีรูปแบบเป็น

$$G(s)=\frac{s^3-s^2+14s+14}{s^4+3s^3+13s^2+8s+15}$$

ระบบนี้มีโพลอยู่ที่ -0.2047-1.1768j , -0.2074+1.1768j , -1.2953-2.9723j , -1.2953+2.9723j
เมื่อเรากระจาย G(s) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง

$$G(s)=0.9334+0.4356s-1.1078s^2+0.0934s^3+0.761s^4-0.2943s^5+....$$

1. วิธีการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3 คำนวณค่าต่างๆ ได้ดังนี้

a_0=5.0268 b_0=5.386

a_1=5.1508 b_1=3.0051

a_2=-0.6013 b_2=4.3462

b_3=1

ดังนั้นแบบจำลองระบบที่อันดับ 3 $G_{P,3}(s)=\dfrac{-0.6013s^2+5.1508s+5.0268}{s^3+4.3462s^2+3.0051s+5.386}$

มีโพลอยู่ที่ -0.2080+1.1520j , -0.2080-1.1520j และ -3.9303 ระบบเสถียรภาพ

2. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh โดยนำสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง Routh เนื่องจากตัวเศษของฟังก์ชันถ่ายโอนมีรากอยู่ทางด้านขวาของระนาบเชิงซ้อน 2 ราก คือ 0.9462-3.8462j , 0.9462+3.8462j ทำการแยกส่วนที่มีรากอยู่ทางด้านขวาออก แล้วทำการลดทอนฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีเสถียรภาพแทน

$$G(s)=\frac{(s+0.89236)(s^2-1998624s+15.6885)}{s^4+3s^3+13s^2+8s+15}$$

Numerator_Table

1	1
0	0.89236

Denominator_Table

4	1	13	15
3	3	8	
2	31/8	15	
1	113/31		
0	15		

ดังนั้นแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3 $G_{R,3}(s)=\dfrac{0.89236(s^2-1.8924s+15.6885)}{3s^3+10.3333s^2+8s+15}$

มีโพลอยู่ที่ -0.1701+1.2577j , -0.1701-1.2577j และ -3.1043 ระบบเสถียรภาพ

3. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Pade' ของ Y.Shamash

พิจารณาตัวส่วนของ G(s) ในรูปของเศษส่วนต่อเนื่อง

$$Q(s) = \cfrac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{1}{s} + \cfrac{1}{1.0847\frac{1}{s} + \cfrac{1}{3.8506\frac{1}{s} + \cfrac{1}{1.9153\frac{1}{s}}}}}$$

ต้องการแบบจำลองระบบที่อันดับ 3 ดังนั้นโพลิโนเมียลตัวส่วนคือ

$s^3 + 5.7256s^2 + 4.1767s + 7.8313$

เราสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของตัวเศษส่วนได้จากการประมาณค่าแบบพาเด

$$a_0 = b_0c_0 = 7.3090$$

$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 = 7.3094$$

$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = -1.5124$$

ดังนั้นแบบจำลองระบบที่อันดับ 3 $\quad G_{R-P,3}(s) = \dfrac{-1.5124s^2 + 7.3094s + 7.3090}{s^3 + 5.7256s^2 + 4.1767s + 7.8313}$

มีโพลอยู่ที่ -0.2565+1.1986j , -0.2565-1.1986j และ -5.2125 ระบบเสถียรภาพ

4. วิธีการประมาณค่าแบบ Routh-Pade' ของ Lepschy และ Viaro

ทำการพิจารณาตัวส่วนของ G(s) ให้อยู่ในรูปตัวแปร 2 ตัวแปร เพื่อกำหนดขอบเขตจากตาราง Routh

$$P_3^{*}(s) = s^3 + 3.4444k_2s^2 + (1.2151k_1 + 2.6667)s + 5k_2 \qquad k_2 > 0, k_1 > -1$$

ทำการประมาณค่าแบบพาเด ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3 จะได้ดังนี้

$$a_0 = 4.667k_2$$

$$a_1 = 2.1780k_2 + 1.1342k_1 + 2.4891$$

$$a_2 = -2.3240k_2 + 0.5293k_1 + 1.1616$$

$$0 = 1.9670k_2 - 1.3461k_1 - 2.0208$$

$$0 = -0.0107k_2 + 0.1134k_1 + 0.6844$$

$$0 = -1.1496k_2 + 0.9247k_1 + 0.9215$$

ทำการพิจารณาสมการ $0=1.9670k_2-1.3461k_1-2.0208$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงเมื่อนำไปเขียนบนระนาบ k_0-k_1 จะผ่านพื้นที่เสถียรภาพ เราสามารถคำนวณค่า k_0,k_1 จากชุดสมการข้างบนได้ว่า $k_2=2.3146$, $k_1=1.8810$ จะได้แบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับ 3

$$G'_{R-P,3}(s)=\frac{-3.2228s^2+9.6631s+10.8011}{s^3+7.9724s^2+4.9522s+11.5730}$$

มีโพลอยู่ที่ -0.2270+1.2197j , -0.2270-1.2197j และ -7.5185 ระบบเสถียรภาพ

5. วิธีการประมาณค่าโดยใช้พลังงานอิมพัลซ์ นำค่าสัมประสิทธิ์ของตัวเศษและตัวส่วนมาคำนวณโดยใช้ตาราง D และ N ตามรูปแบบที่ได้เสนอไว้

จากตาราง D และ N ได้ค่า α,β ดังนี้

$$\alpha_1=1.8750,\alpha_2=1.0847,\alpha_3=3.8506,\alpha_4=1.9153$$
$$\beta_1=1.75,\beta_2=1.8983,\beta_3=2.2190,\beta_4=-0.8983$$

ทำการพิจารณาเปรียบเทียบค่า $\frac{\beta_i^2}{\alpha_i}$ ของระบบที่อันดับเท่ากับ 4

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1}=1.6333,\frac{\beta_2^2}{\alpha_2}=3.3222,\frac{\beta_3^2}{\alpha_3}=1.2788,\frac{\beta_4^2}{\alpha_4}=0.4213$$

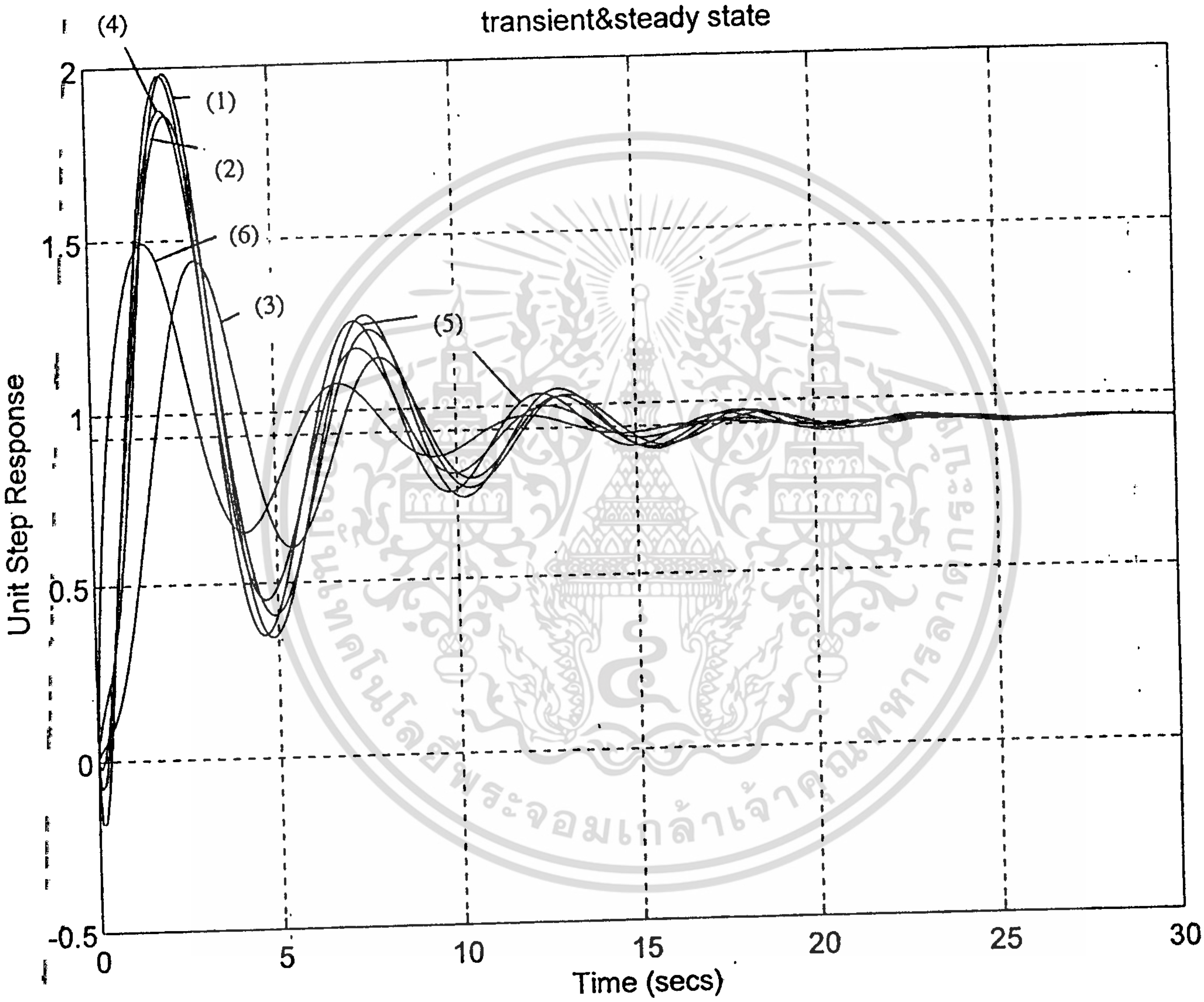
ต้องการแบบจำลองระบบลดทอนที่อันดับเท่ากับ 3 อินพุทเป็น unit step ดังนั้นค่า α,β ที่จะคงไว้คือ $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3)$

$$G_{I,3}(s)=\frac{3.969s^2+7.3096s+7.3092}{s^3+5.7256s^2+4.1767s+7.8313}$$

มีโพลอยู่ที่ -0.2565+1.1986j , -0.2565-1.1986j และ -5.2125 ระบบเสถียรภาพ

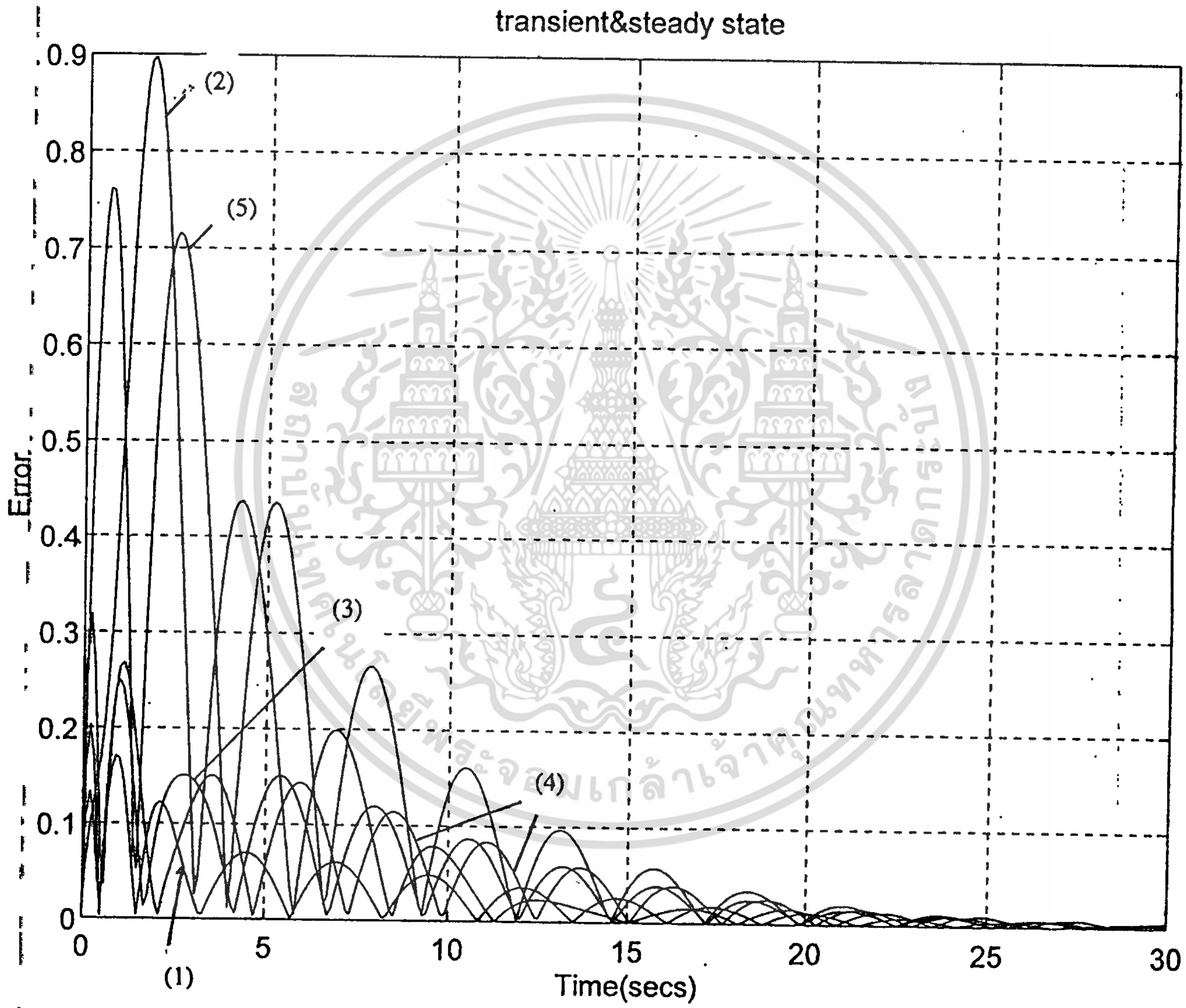
Order System	Peak Time	PercentOvershoot	Rise Time	Settling Time
Original System	2.14695	112.49	0.879402	21.3499
Pade Approximation	2.21192	99.4456	0.577023	19.3783
Routh Approximation	2.9397	54.3642	1.23468	20.9895
Routh-Pade (Y.Shamash)	2.06607	101.111	0.506772	15.9828
Routh-Pade (Lepschy&Viaro)	2.07076	111.884	0.44058	18.2844
Impulse Approximation	1.52031	60.0173	0.350842	14.8133

Table 5 Show the time performance of Original System and Model Reduction



(1) $y(t)$ (2) $y_{P,3}(s)$ (3) $y_{R,3}(t)$ (4) $y_{R\text{-}P,3}(t)$ (5) $y'_{R\text{-}P,3}(t)$ (6) $y_{I,3}(t)$

รูปที่ 5.1 รูปแสดงผลตอบสนองในโดเมนของเวลาของตัวอย่างที่ 5



(1) $|y(t)-y_{P,3}(t)|$ (2) $|y(t)-y_{R,3}(t)|$ (3) $|y(t)-y_{R-P,3}(t)|$ (4) $|y(t)-y'_{R-P,3}(t)|$ (5) $|y(t)-y_{I,3}(t)|$

รูปที่ 5.2 รูปแสดงค่าความผิดพลาดของตัวอย่างที่ 5

บทที่ 5
บทสรุปและวิจารณ์

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษาทฤษฎีการประมาณค่าแบบพาเด ทฤษฎีการประมาณค่าแบบเราท์ และการประยุกต์เอาข้อดีของทฤษฎีการประมาณค่าทั้ง 2 อย่างมาใช้ในการลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้น เพื่อให้ได้แบบจำลองระบบลดทอนมีลักษณะผลตอบสนองของเอาท์พุทใกล้เคียงกับระบบเดิมมากที่สุด และคงไว้ซึ่งสถานะเสถียรภาพของระบบต้นแบบ เมื่อทำการทดสอบระบบ Reduced Model ตามวิธีการที่ได้ศึกษา สามารถวิเคราะห์แยกออกเป็นสองส่วน คือ

1. ช่วง Transient State เป็นช่วงเริ่มต้นที่ระบบยังไม่มีค่าเข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งในช่วงนี้ เมื่อทำการพิจารณาจากผลตอบสนองและกราฟแสดงค่าความผิดพลาดในโดเมนของเวลาเห็นได้ว่าวิธีต่างๆที่ทำการประมาณค่ามีความผิดพลาดค่อนข้างมาก ซึ่งเกิดจากการตัดสถานะบางสถานะทิ้งไปจากการลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้น โดยสถานะเหล่านี้เป็นสถานะที่มีผลในช่วง transient state

2. ช่วง Steady State เป็นช่วงที่ระบบมีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง สำหรับผลตอบสนองของระบบ Reduced Model เมื่อเปรียบเทียบกับระบบเดิมมีความผิดพลาดน้อย แต่จะเพิ่มขึ้นตามอันดับ(order)ของระบบ

ในด้านเสถียรภาพนั้นการประมาณค่าแบบพาเดไม่สามารถกำหนดได้แน่นอนว่าเมื่อทำการลดทอนอันดับในระบบเชิงเส้นจะยังสถานะเสถียรภาพไว้ได้ ในขณะที่การประมาณค่าแบบเราท์ หรือ การประมาณค่าโดยใช้วิธีแบบพาเดและเราท์ร่วมกันของ Y. Shamash และ Lepschy& Viaro แบบจำลองระบบที่ได้จากการลดทอนอันดับจะยังสถานะเสถียรภาพไว้ได้เสมอ

วิธีการประมาณค่าแบบต่างๆในที่ได้ศึกษามานี้ การประมาณค่าแบบเราท์จะมีค่าความผิดพลาดมากที่สุดในวิธีการประมาณค่าแบบต่างๆ โดยเฉพาะในช่วง transient state ในขณะที่วิธีการประมาณค่าแบบพาเดและเราท์ร่วมกันของ Lepschy&Viaro จะให้ผลตอบสนองใกล้เคียงกับระบบต้นแบบมากกว่าวิธีอื่นๆด้วยกัน ส่วนวิธีการประมาณค่าแบบพาเดนั้นไม่สามารถรับประกันได้ว่าแบบจำลองระบบที่ได้จะยังคงสถานะเสถียรภาพ

บรรณานุกรม

[1]. Katsuhiko Ogata , *Modern Control Engineering* , Prentice-Hall International , Inc. (1990)

[2]. Y.Shamash , *Model Reduction Using the Routh Stability Criterion and the Pade' Approximation Technique* , INT.J. Control , 1975 , Vol 21 , No.3 , 475-484

[3]. Lucas , T.N , *Linear System Reduction by Impulse Energy Approximation* , IEEE Trans Automat. Contr., Vol AC-30 , No.8 , Aug. 1985 , pp 784-786

[4]. Antonio Lepschy , Umberto Viaro , *An Improvement in the Routh-Pade' approximation techniques* , INT.J. Control , 1982 ,Vol. 36 , No.4 , 643-661

[5]. V. Krishnamurthy and V. Seshadri , *Model Reduction Using the Routh Stability Criterion* , IEEE Trans Automat. Contr., Vol. AC-23 , No.4 , Aug. 1978 , pp. 729-731

[6]. Y.Shamash , *Linear system reduction using Pade' approximation allow retention of dominant modes* , INT.J. Control , 1975 , Vol.21 , No.2 , 257-272

[7]. Y.Shamash , *Failure of the Routh-Herwitz Method of Reduction* , IEEE Trans Automat. Contr., Vol. AC-25 , No.2 , April . 1980 , pp 313-314

ภาคผนวก ก

โปรแกรม MATLAB วิเคราะห์ TIME DOMAIN

```
function timespec(num, den)

  discr=[
' function timespec(num, den) returns the time domain performance     '
' specifications of the system step response.  num & den are row vectors '
' of the numerator & denominator coefficients of the closed-loop transfer'
' function.                                                            '
'                                                                      '];
% disp(discr)

m=length(num);n=length(den);
r=roots(den); r=(real(r));
nr=length(r);
for i=1:nr-1
     if r(i) >=0  disp('Unbounded response'), return
     else, end
end
rp=abs(real(r)); i=find(rp>0); rn0=rp(i);
rmn=min(rn0); tf=10/rmn; dt=tf/1000;

Css=num(m)/den(n);
if Css==inf
  disp('Unbounded response')
  return,else end

t=0:dt:tf;
l=length(t);
```

```
c=step(num, den, t);

if c(l) > Css+0.1*Css | c(l) < Css-0.1*Css
disp(' Unbounded response'),return
else,end

j=0 ;m =0;
Cmax=max(c);

if Cmax > Css
   po= (Cmax - Css)/Css * 100;
   i=find(c==Cmax); tp=t(i); else,tp=0; end

if tp < 10*dt & tp>0
   tf=round(10*tp); dt=tf/200;
   t=0:dt:tf;
   l=length(t);
   c=step(num, den, t);
   j=0 ;m =0;
   Cmax=max(c);
else, end
if Cmax > Css
   po= (Cmax - Css)/Css * 100;
   i=find(c==Cmax); tp=t(i);

   fprintf('Peak time = %g',tp),fprintf('          Percent overshoot = %g',po),
else, tp=0;end

    for i =1:l
         if j == 0
            if c(i) >= 0.1*Css  t1=t(i); j=1;
         end
```

```
        else, end
        if  m ==0
            if c(i) >= 0.9*Css  t9 = t(i); m =1;
            end
        else, end
    end
end
if t9 ~= 0
  tr = t9 -t1;
fprintf('\n')
fprintf('Rise time = %g',tr),fprintf('\n')
end
if tp > tr  t0=tp; else t0=tr; end


tfu=1.02*Css; tfd=.98*Css;
ts1=0;ts2=0;
for i=1:l
 if t(i) >t0 & t(i) <tf
    if c(i) >= tfu  ts1=t(i); else, end
    if c(i) <= tfd  ts2=t(i); else, end
  else,end
end
ts=max(ts1,ts2);
fprintf('Settling time = %g ',ts),fprintf('\n\n')
```

ภาคผนวก ข

โปรแกรม MATLAB ทดสอบเสถียรภาพด้วย ROUTH-HERWITZ

```
% Function routh(a) constructs the Routh table for a polynomial of degree n
function  routh(a)
head=['
     '   Routh-Hurwitz Array '
     '                        '];
n=length(a);
jw=0;
m=2;
nc=round(n/2);
b=zeros(n,nc);
z=zeros(1,nc);
if round(n/2) > n/2
a(n+1)=0;
else,end
for i=1:2:n
k=(i+1)/2;
b(1,k)=a(i);
b(2,k)=a(i+1);
end
if b(2 ,:)==z
  fprintf('Elements of row %g',2)
  fprintf(' are all zero.\n')
  fprintf('They are replaced by the auxiliary Eq. coefficients \n\n')
  jw=1;
  for k=1:nc
  j=n-1;  d=j+2-2*k;
  b(2,k)=d*b(1,k);
  end
```

```
else,end
for i=1:n-2
  for j=1:nc-1
    if b(i+1,1)==0
    b(i+1,1)=0.00001;
    fprintf('Zero in the first column is replaced by 0.00001 \n\n')
    else,end
    b(m+i,j)=(b(i+1,1)*b(i, j+1)-b(i+1,j+1)*b(i,1)) /b(i+1,1);
  end

   if b(m+i,:) == z
    if m+i <n

     fprintf('Elements of row %g',m+i)
     fprintf(' are all zero.\n')
     fprintf('They are replaced by the auxiliary Eq. coefficients \n\n')
     jw=1;
       for k=1:nc
         j=n-m-i+1;
         d=j+2-2*k;
         if d< 0
         b(m+i,k)= b(m+i-1,k);
         else,
         b(m+i,k)=d*b(m+i-1,k);
         end
       end
    else, jw=3; end
   else,end
end
disp(head)
format short e
disp(b)
```

```
format short
j=0 ;nr=0;
for i= 1:n
   if j ==0
        if b(i,1) <0 ,nr=nr+1 ;j =1;
        else,end
     else,if b(i,1) > 0 ,nr=nr+1; j=0 ; else, end
   end
end

if jw==3, fprintf('Characterisitc Equation contain root at origin\n'),end
if jw==1, fprintf('Characteristic Equation include roots on jw-axis or \n')
    fprintf('pairs of real or complex roots symmetrical about jw-axis \n\n'),end
if nr==0
    if jw==0, fprintf('System is stable \n\n'),end
    else,fprintf('There are %g',nr)
fprintf(' roots in the right half s-plane \n\n'),end
```