การประมาณค่าด้วยสมการพหุนาม

Polynomial Interpolation

นางสาวเบญจวรรณ	อินทรารักษ์สกุล	38054131
นางสาวปาริฉัตต์	ลิ่ววิริยะ	38054135
นางสาววิภาวดี	อ่วมเจริญ	38054153

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2541

Polynomial Interpolation

Miss Benjawan	Intrarakskul	38054131
Miss Pharichat	Leuwiriya	38054135
Miss Wipawadee	Uamcharaen	38054153

A Special Project Submitted in Partial Fulfillment of

the Requirement for the Degree of Bachelor of Science

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

1998

ปัญหาพิเศษเรื่อง การประมาณค่าด้วยสมการพหุนาม

ชื่อนักศึกษา นางสาว เบญจวรรณ อินทรารักษ์สกุล รหัส 38054131

นางสาว ปาริฉัตต์ ลิ่ววิริยะ รหัส 38054135

นางสาว วิภาวดี อ่วมเจริญ รหัส 38054153

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ภัคคินี ชิตสกุล

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2541

(รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการโครงงานพิเศษ

(อาจารย์พรชัย เจนจิระพงศ์เวช)
ประธานกรรมการ

(อาจารย์ใจปอง วงษ์สวัสดิ์)
กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การประมาณค่าด้วยสมการพหุนาม		
นักศึกษา	นางสาวเบญจวรรณ	อินทรารักษ์สกุล	38054131
	นางสาวปาริฉัตต์	ลิ่ววิริยะ	38054135
	นางสาววิภาวดี	อ่วมเจริญ	38054153
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ภัคคินี ชิตสกุล		
	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุนทร สุชาติเวชภูมิ		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์		
ปีการศึกษา	2541		

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้สร้างขึ้นเพื่อวัตถุประสงค์เป็นสื่อการเรียนการสอนในวิชา Numerical Analysis โดยเน้นเฉพาะในหัวข้อการประมาณค่าโดยสมการพหุนาม รูปแบบของโปรแกรมช่วยสอนนี้จะออกแบบมาเน้นความสนใจในบทเรียน และง่ายต่อการเรียนรู้เนื้อหาในบทเรียน

เมื่อเรามีเซตของจุดข้อมูล ซึ่งอาจได้จากการทดลองทางวิทยาศาสตร์ เราสามารถหาพหุนามที่เหมาะสมกับเซตของจุดข้อมูลเหล่านี้ได้ โดยพหุนามที่หาได้ สามารถนำไปประมาณค่าที่จุดอื่น ๆ ได้ด้วย

โปรแกรมสื่อการเรียนการสอนนี้แบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 คำอธิบายและตัวอย่าง จะประกอบด้วย วิธีการในการประมาณค่าแต่ละวิธีและตัวอย่างเพิ่มเติม

ส่วนที่ 2 แบบฝึกหัด เพื่อให้ผู้เรียนได้ทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนมา

ส่วนที่ 3 กำหนดเอง ผู้เรียนสามารถนำชุดข้อมูลใด ๆ มาทดลองประมาณค่าตามวิธีการประมาณค่าแต่ละวิธีได้

Special Project Title	Polynomial Interpolation
Student	Miss Benjawan Intrarakskul 38054131
	Miss Pharichat Leuwiriya 38054135
	Miss Wipawadee Uamcharaen 38054153
Advisor	Associate Professor Pakkinee Chitsagul
	Assistant Professor Sunthorn Suchatvejapoom
Department	Mathematics and Computer Science
Year	1998

Abstraction

This special problem is created to be Computer Aided Instruction (CAI) in a subject " Numerical Analysis " which emphasis on " Polynomial Interpolation ". This program is designed to nave more interesting and easy to learn .

In according to approximation, you have the set of data points, which geted from the scientific experiments. You can find a polynomial that agree with those data points, and can use this polynomial to find the values at any data points.

This program is divided into three parts.

Part 1. Detail and Example. This part consists of steps of approximation in each methods and examples

Part 2. Exercise. This part helps the learner to review the lessons.

Part 3. User's Input Data. The learner can input the set of data points, and let program to approximate and find value at any data points.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดีก็เพราะหลายเหตุปัจจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

รองศาสตราจารย์ ภัคคินี ชิตสกุล
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ที่ได้ให้แนวทางในการดำเนินการ ตลอดจนคำปรึกษาอันก่อให้เกิดแนวความคิดที่สามารถแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในระหว่างการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ นอกจากนี้ยังช่วยแนะนำแนวทางในการดำเนินงานและตรวจทานแก้ไขด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างดียิ่ง

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ผู้จัดทำ จนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ และนอกจากนี้

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

ขอขอบพระคุณ
คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

หน้า

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญ / ที่มาของปัญหาพิเศษ

เนื่องจากวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) เป็นวิชาที่เปิดสอนในระดับอุดมศึกษาในหลายคณะเพื่อให้วิชาวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีประสิทธิภาพในด้า นการศึกษาเพิ่มมากขึ้น จึงมีความประสงค์ที่จะนำเสนอโปรแกรมช่วยสอน(CAI) ในวิชานี้ขึ้นโดยหัวข้อเรื่องที่จะนำเสนอจะเน้นเฉพาะในหัวข้อ "การประมาณค่าด้วยสมการพหุนาม"

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1) เพื่อทราบที่มาของการประมาณค่าในแต่ละวิธี
2) เพื่อเข้าใจขั้นตอนของการประมาณค่า และผู้ใช้สามารถนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง
3) สามารถนำไปใช้ในการประมาณค่าตามที่ผู้ใช้ต้องการได้

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

เป็นโปรแกรมช่วยสอน CAI ในหัวข้อเรื่อง "การประมาณค่าโดยสมการพหุนาม" (Polynomial Interpolation) ในวิชาวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numercial Analysis) โดยครอบคลุมเนื้อหา ในหัวข้อ Orthogonal Polynomial, Spline and Bezier - Bernstein Approximation และ Least Square Approximation

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) เพื่อการเรียนรู้และเข้าใจที่มาและขั้นตอนของการวิเคราะห์เชิงตัวในหัวข้อการประมาณค่าโดยสมการพหุนามได้ถูกต้อง
2) เพื่อพัฒนาระบบการเรียนการการสอนในระดับอุดมศึกษาในมหาวิทยาลัยให้ทันสมัยยิ่งขึ้น
3) ได้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการศึกษา

1.5 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1) เครื่องคอมพิวเตอร์ Pentium 166 MHz
2) RAM 32 MB ขึ้นไป
3) HDD 2.0 GB

4) LAN CARD

5) Window 95

6) CD-ROM

1.6 งบประมาณที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

- กระดาษ A4 5 ริม
- diskette 3 กล่อง
- เอกสารอ้างอิงอื่น ๆ / ค่าถ่ายเอกสารประมาณ 5,000 บาท
- Software C++Builder version 3.0

บทที่ 2
คอมพิวเตอร์ช่วยการเรียนการสอน

ความหมายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (Computer Aided Instruction : CAI) คือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เอาเนื้อหาต่าง ๆ ที่ต้องการนำเสนอ มานำเสนอโดยผ่านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ ในรูปแบบที่เหมาะสมสำหรับผู้ใช้ เช่น การนำเสนอแบบติวเตอร์ (Tutorial) แบบจำลองสถานการณ์ (Simulations) เป็นต้น โดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนสามารถโต้ตอบกับคอมพิวเตอร์ในขณะนั้นผ่านทางแป้นพิมพ์และหน้าจอได้

การเรียนในลักษณะนี้บางครั้งผู้เรียนอาจจะต้องพิมพ์เพื่อโต้ตอบหรือตอบคำถามกับคอมพิวเตอร์ในขณะนั้น ซึ่งขบวนการต่าง ๆ เหล่านี้เป็นปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นร่วมกันระหว่างผู้ใช้กับคอมพิวเตอร์

ประวัติความเป็นมา

ความคิดในเรื่องการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเริ่มต้นในประเทศสหรัฐอเมริกา ตั้งแต่ปลายทศวรรษที่ 1950 ผู้บุกเบิกในเรื่องนี้ คือ มหาวิทยาลัยฟลอริดาและมหาวิทยาลัยสแตนฟอร์ด อันที่จริงในวงการศึกษา ได้มีความคิดนี้มาก่อนหน้านั้นนานแล้ว โดยเฉพาะในการสอบและการรวมคะแนน แต่การนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการสอนซึ่งรวมถึงการทบทวนบทเรียน การแนะนำบทเรียนในรูปแบบต่าง ๆ เพิ่งจะมาเริ่มภายหลังได้ไม่นานนี้ อย่างไรก็ตามการติดตามความก้าวหน้า หรือ พัฒนาการของผู้เรียนไปจนถึงการแนะแนวจึงถือว่าเป็นส่วนหนึ่งของ “การช่วยสอน” ด้วย

ในระยะเริ่มแรกของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีการนำคอมพิวเตอร์เครื่องใหญ่ คือ IBM 1500 มาใช้ แต่จัดให้อยู่ในรูปแบบเทอร์มินอล ซึ่งจะโต้ตอบกับผู้เรียนได้ ภาษาที่ใช้เป็นภาษาระดับสูงที่เรียกว่าภาษา AI. วิชาที่ทำในตอนแรกเริ่มก็คือ ฟิสิกส์และสถิติ ซึ่งจะกำหนดให้นักศึกษาลงทะเบียนเรียนเพื่อเอาหน่วยกิต โดยจะไม่มีอาจารย์สอนหน้าชั้น ต่อมามีการใช้ภาษาเบสิกแทน ทำให้นักศึกษาใช้เครื่องคอมได้ง่ายขึ้น และได้มีการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในสาขาวิชาอื่น ๆ เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

ส่วนที่มหาวิทยาลัยสแตนฟอร์ดนั้นได้นำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้ โดยมุ่งพัฒนาทักษะของเด็กมากกว่าหนุ่มสาวระดับมหาวิทยาลัย มีการจัดทำรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและวิชาภาษาอังกฤษ ซึ่งกำหนดให้นักเรียนได้ทำแบบฝึกหัดเป็นสำคัญ เมื่อคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้รับความนิยมมากขึ้น นักศึกษาและนักคอมพิวเตอร์ก็มองเห็นพ้องร่วมกันว่าการนำคอมพิวเตอร์มาใช้กับ

การเรียน การสอนโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะทำได้เป็นอย่างดี บริษัทอันแรกขึ้นโดยเริ่มต้นด้วยการสอนระบบเลขฐานสอง จะกำหนดให้ระบบสามารถรับผู้เรียนได้ครั้งละ 32 คน ต่อมาได้มีการส่งเสริมให้มีการทำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเพิ่มขึ้นกันอย่างมากมาย จากนั้นได้ไม่นานมีคอมพิวเตอร์ช่วยสอนขายถึง 1500 เรื่อง

ในราว ค.ศ.1967 ได้มีการจัดสัมมนาให้คนทั่วไปได้รับความรู้เกี่ยวกับการจัดทำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในด้านอื่น ๆ เป็นวงกว้าง ต่อมาโครงการของหน่วยงานอื่น ๆ ก็เริ่มทำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกันบ้าง ได้มีการเพิ่มความคิดที่ให้มีการรวมคะแนนของผู้เรียนในการทำแบบฝึกหัดแต่ละตอน เพื่อใช้เป็นตัวตัดสินใจในการเลือกเนื้อหาที่จะเรียนต่อไปด้วย อย่างไรก็ตามในระยะแรกนี้ คอมพิวเตอร์ที่ใช้ก็คือเมนเฟรม ซึ่งค่าใช้จ่ายสูงมากอีกทั้งยังมีขีดความสามารถจำกัดอีกด้วย

ราวปี ค.ศ. 1960 มหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ ประสบความสำเร็จในการทำเทอร์มินัลที่สามารถพูดจาโต้ตอบกับผู้เรียนได้ และได้พัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนขึ้นใหม่ให้ชื่อว่าพลาโต (PLATO) โดยได้รับการสนับสนุนจากรัฐบาล โดยใช้คอมพิวเตอร์ของบริษัทคอนโทรล ดาต้า ในปัจจุบันนี้เราถือว่าโปรแกรมนี้เป็นต้นแบบของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ซึ่งใช้คอมพิวเตอร์ขนาดใหญ่ซึ่งประสบความสำเร็จเป็นอย่างดี อย่างไรตามโครงสร้างพื้นฐานทั่วไปของระบบ CAI ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่มาก เช่น ระบบปรับตัวเองให้เข้ากับลักษณะความต้องการ หรือ เป้าหมายของผู้เรียนได้ไม่ดีเท่าที่ควร เป็นต้น

ตั้งแต่ทศวรรษที่ 1970 เป็นต้นมา นักวิจัยหลายคนเริ่มตระหนักถึงข้อจำกัดของเทคโนโลยี CAI ในขณะนั้น จึงได้เริ่มประยุกต์ใช้เทคโนโลยีหลาย ๆ อย่าง เพื่อช่วยผลักดันให้การใช้คอมพิวเตอร์เพื่อการเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากขึ้น หนึ่งในเทคโนโลยีหลายประการนั้น ก็คือ เทคโนโลยีทางด้านปัญญาประดิษฐ์ (Artificial Intelligence) โดยจุดประสงค์หลักก็คือการหาหนทางทำให้ระบบ CAI มีความสามารถ หรือ ความฉลาดมากขึ้นในด้านช่วยการเรียนการสอน โครงสร้างสถาปัตยกรรมของระบบ ซึ่งในขณะนั้นได้รับการขนานนามว่าเป็นระบบ "Intelligent CAI System" (ICAL) มีลักษณะที่สำคัญดังนี้

1. มีโมเดลของปัญหาที่ชัดเจนและ ขณะเดียวกันก็มีโปรแกรมที่มีคุณสมบัติในลักษณะของระบบผู้เชี่ยวชาญ (Expert System) ซึ่งมีความสามารถในการคิดหาเหตุผลและแก้ปัญหาเหล่านั้น
2. มีโมเดลของนักเรียน (Student Model) ซึ่งสามารถตัดสินได้ว่านักเรียนแต่ละคนที่ใช้ระบบมีความเข้าใจในระดับใด
3. มีโมเดลของการสอน (Tutorial Model) ซึ่งสามารถตระเตรียมบทเรียนบทเรียนการสอนช่วยแก้ไขความผิดพลาดของนักเรียน หรือ ช่วยเสนอเนื้อหาของบทเรียนใหม่ ๆ ที่เหมาะสมสำหรับนักเรียนแต่ละคน

จิตวิทยาทางด้านการเรียน การสอน และการทำความเข้าใจ เป็นหัวข้อสำคัญเรื่องหนึ่งที่ได้รับความสนใจในการศึกษาวิจัย เนื่องจากความสำเร็จ หรือ ผลงานในด้านนี้มีผลกระทบ โดยตรงต่อความสำเร็จในการสร้างระบบคอมพิวเตอร์สำหรับช่วยสอนที่มีประสิทธิภาพ

เดเรค สลีแมน (Derek Sleeman) และจอห์น ซีลี บราวน์ (John Seely Brown) ได้ทำการรวบรวมผลการวิจัยทางระบบปัญญาประดิษฐ์สำหรับการพัฒนาระบบคอมพิวเตอร์ เพื่อการเรียนการสอนในยุคบุกเบิก (ผลงานในช่วงทศวรรษ ที่ 1970) โดยทำหน้าที่เป็นบรรณาธิการรวบรวมผลงานวิจัยทางด้านนี้ (Special Issues) ในวารสาร " International Journal of Man - Machine Studies " (พิมพ์ในปี 1978) ผลงานการวิจัยในช่วงประมาณ 10 ปีแรกนี้ ได้ถูกตีพิมพ์อีกครั้งในรูปเล่มหนังสือวิชาการที่ชื่อว่า " Intelligent Tutorial System " (พิมพ์ในปี 1982) หนังสือเล่มนี้นับว่าเป็นเอกสารอ้างอิงที่สำคัญของวิชาการสาขานี้ และชื่อหนังสือได้กลายเป็นชื่อที่ยอมรับสำหรับการวิจัยและการพัฒนาทางด้านนี้ ในที่นี้เราอาจจะเรียกว่า " ระบบการติวอย่างมีเชาว์ " (Intelligent Tutorial System ซึ่งเรียกสั้น ๆ ว่า ITS)

ในราวปี ค.ศ. 1971 มหาวิทยาลัยบริกคัมยังและมหาวิทยาลัยเท็กซัส ได้คิดค้นพัฒนานำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้กับมินิคอมพิวเตอร์ โดยผสมคอมพิวเตอร์และโทรทัศน์เข้าด้วยกัน ผลิตออกมาเป็นรายวิชาทางคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ โปรแกรมนี้มีชื่อว่า ทิกชิต (TICCIT) ซึ่งย่อมาจาก Time Shared Interactive Computer Controlled Information Television นับว่าเป็นโปรแกรมที่ประสบความสำเร็จพอสมควร ประเทศอื่นนอกจากประเทศสหรัฐอเมริกาที่สนใจการทำคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ก็มี อังกฤษ ญี่ปุ่น และแคนาดา เช่น ในอังกฤษ มหาวิทยาลัยที่สนใจก็มี ลีดส์ ควีนแมรี เชลซี และ เอดินเบิร์ก นับได้ว่าประสบความสำเร็จเช่นกัน โดยเฉพาะการนำไปใช้ในมหาวิทยาลัยเปิดต่าง ๆ เช่น ควีนส์ คอนคอร์เดีย อับเบอร์ดา และคัลการี คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ในประเทศแถบยุโรปมักจะเป็นที่รู้จักในชื่อว่า ซีเอแอล (CAL) ซึ่งย่อมาจาก Computer Asisted Learning หรือ ซีบีไอ (CBI) ซึ่งย่อมาจาก Computer Based Instruction โดยทั่วไปแล้วนั้น คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หรือ CAL หรือ CBI ก็มีความหมายเหมือนกันนั่นเอง

ในญี่ปุ่นนั้นได้มีการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนกันในระดับโรงเรียนมัธยม โดยนักวิชาการจากมหาวิทยาลัยโอซากาและฮอคไกโด ได้ทำการวิจัยกันอย่างจริงจัง งานคอมพิวเตอร์ช่วยสอนยังไม่พัฒนาไปเท่าที่ควร จนกระทั่งไมโครคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทในโรงเรียนและมหาวิทยาลัย การใช้แป้นพิมพ์และจอภาพติดต่อกับคอมพิวเตอร์เมนเฟรมไม่มีความคล่องตัวเท่ากับการใช้ไมโครคอมพิวเตอร์ ฉะนั้นความคิดในเรื่องการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในระดับโรงเรียนมัธยม จึงดูว่ามีความเป็นไปได้มากขึ้น แนวความคิดในการหาเครื่องช่วยสอนนั้นเริ่มต้นด้วยนักจิตวิทยาชื่อ B.F.Skinner ซึ่งพบว่า บุตรสาวของตนเรียนวิชาบางวิชาไม่รู้เรื่อง เพราะอาจารย์สอนไม่เป็น เขาจึงคิดค้นหาวิธีการสอนใหม่ ๆ โดยใช้อุปกรณ์แบบใหม่เข้ามาช่วย เครื่องมือของเขาเรียกว่า

“ เครื่องช่วยสอน” (Teaching Machine) และใช้วิธีการสอนแบบใหม่ที่เขาเรียกว่า “ การสอนแบบโปรแกรม” (Programmed Instruction) บทเรียนที่ทำขึ้นเรียกว่า “Programmed Lesson” การใช้เครื่องสอนและการสอนแบบโปรแกรมนี้เอง เป็นจุดสนใจให้นักคอมพิวเตอร์ทั้งหลายได้นำแนวความคิดไปปรับปรุง และนำมาสร้างเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในเวลาต่อมา

ลักษณะของบทเรียนของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การสอนแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้คือ ความพยายามที่จะสอน โดยไม่ผู้สอนมีบทบาทโดยตรง ซึ่งบทเรียนและวิธีการมีลักษณะสำคัญ ๆ ดังนี้

1. เริ่มจากสิ่งที่รู้จนไปถึงสิ่งที่ไม่รู้ (From The Know to The Unknown) จัดการสอนให้เนื้อหาเรียงตามลำดับ (Linear Sequence) หลาย ๆ กรอบ โดยผู้เรียนจะเรียนไปทีละกรอบตามลำดับของความง่ายไปสู่ความยาก
2. เนื้อหาที่เพิ่มนั้น จะต้องเพิ่มทีละน้อย ๆ ค่อนข้างง่าย และมีสาระใหม่ไม่มากนัก ความเปลี่ยนแปลงในแต่กรอบจะต้องสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตัวเอง
3. แต่ละกรอบจะต้องแนะนำความรู้ใหม่เพียงอันเดียว การแนะนำความรู้หรือเนื้อหาอะไรใหม่ ๆ ทีละมาก ๆ จะทำให้ผู้เรียนสับสนได้ง่าย
4. ในระหว่างการเรียนจะต้องให้ผู้เรียนแต่ละคนมีส่วนในการทำอะไรตามไปด้วย เช่น ตอบคำถาม ทำแบบทดสอบ ฯลฯ ไม่ใช่คิดตามอย่างเดียวเพราะจะทำให้เบื่อ
5. การเรียนด้วยวิธีนี้จะทำให้เรียนนั้น เรียนได้ด้วยความเร็วของตนเอง จะใช้เวลาในการทบทวนบทเรียน
6. การเรียนในลักษณะนี้เป็นการเรียนที่เน้นความถนัดของแต่ละคน (Individualized) ซึ่งแต่ละคนจะมีความถนัดแตกต่างกันแม้ในวิชาเดียวกันก็ตาม การเรียนบทเรียนในแต่ละบทก็จะใช้เวลาไม่เท่ากันอีกด้วย

ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้แบ่งวิธีการและประเภทงานของการสอนออกเป็นดังนี้

1. การฝึกทักษะและการทำแบบฝึกหัด

วิธีนี้เป็นวิธีที่รู้จักกันตั้งแต่เริ่มแรก โดยมักจะเริ่มด้วยการเตรียมเนื้อหามาให้อ่าน แล้วแบบฝึกหัดเป็นการวัดความเข้าใจ ทบทวนและช่วยเพิ่มพูนความรู้ความชำนาญ แต่แบบฝึกหัดมักจะเป็นบทเรียนสั้น ๆ ที่นิยมกันมากก็คือ จับคู่ จะชี้ว่าถูกหรือผิด และเลือกคำตอบที่ถูกจากตัวเลือกที่มีอยู่ 3-5 ตัวเลือก การสอนในลักษณะนี้จะต้องทำเป็นโปรแกรมบทเรียนคือ ค่อย ๆ เพิ่มเนื้อหาโดยเริ่มจากง่ายไปหายากการเตรียมคำถามจะต้องเตรียมคำถามไว้มาก ๆ ซึ่งผู้เรียนจะสุ่มเลือกขึ้นมาเอง โดยไม่สามารถจำคำตอบ หรือรู้คำตอบมา

ก่อนจากการทำในครั้งแรก ๆ ซึ่งวิธีนี้แบบฝึกหัดที่ทำจะถูกเรียงข้อต่างกันผู้เรียนจะไม่สามารถจำได้ โปรแกรมที่ดีจะต้องทำให้ผู้สอนสามารถวิจัยได้ว่า ถ้าผู้เรียนตอบคำถามอย่างหนึ่งก็จะให้ผลอย่างหนึ่ง ถ้าตอบอีกอย่างหนึ่งก็จะให้ผลอีกอย่างหนึ่ง ผู้สอนน่าจะมีโอกาสแก้ไขปรับปรุงแบบฝึกหัดให้เข้ากับกลุ่มเรียนที่มีลักษณะพิเศษบางกลุ่มได้ด้วย การเก็บทะเบียนของผู้เรียนมีส่วนสำคัญมาก บางโปรแกรมอาจกำหนดให้ผู้เรียนจะต้องทำแบบฝึกหัดให้ถูกต้องถึง 80% จึงจะถือว่าสอบผ่าน

2. การเจรจา (Dialgue)

วิธีนี้ได้รับความนิยมมากเช่นกัน ถึงแม้วิธีการทำจะค่อนข้างยุ่งยาก กล่าวคือพยายามให้เป็นการพูดคุยระหว่างผู้เรียนและผู้สอน โดยเลียนแบบการสอนในห้องเรียนเพียงแต่เปลี่ยนจากเสียงมาเป็นตัวอักษาบนจอภาพ แล้วมีการสอนโดยมีการตั้งปัญหาถามเช่น บทเรียนวิชาเคมีอาจถามหาสารเคมีบางชนิด ผู้เรียนอาจโต้ตอบด้วยวิธีใส่ชื่อสารเคมีเป็นคำตอบหรือบทเรียนสำหรับนักเรียนแพทย์อาจเป็นการสมมติสภาพของคนไข้ให้ผู้เรียนกำหนดวิธีการรักษา

3. การจำลองสภาพ (Simulation)

วิธีการนี้เป็นการเสนอปรากฏการณ์จำลองมาจากของจริง เพราะบางทีการลงมือทำจริง ๆ เสี่ยงหรือแพงเกินไป เช่น การเรียนวิธีขับเครื่องจำลองควรจะลองในเครื่องจำลอง (ด้วยคอมพิวเตอร์) มากกว่า การสอนด้วยวิธีนี้จะทำให้ผู้เรียนมีความชำนาญอย่างแท้จริง ความสำเร็จจริง ๆ อยู่ที่ว่าสามารถจำลองสภาพจริงได้มากน้อยเพียงใด

การจำลองมี 3 ลักษณะคือ

1. การจำลองสภาพแบบการทำงาน (Task Performance Simulation) เช่น การจำลองสภาพการบิน การขับรถ
2. การจำลองสภาพแบบการจำลองระบบ (System Modeling Simulation) เช่น การจำลองระบบจัดการจราจรวันเวย์ในนครหลวงดูว่าจะมีปัญหาอย่างไรหรือไม่ ก่อนที่จะมีการทำจริงบนถนน
3. การจำลองสภาพแบบประสบการณ์ (Experience / Encounter) เช่น การลองให้ผู้ฝึกงานได้ทดสอบทำงานบางอย่าง หรือตัดสินใจบางเรื่อง การทำจริง ๆ อาจยังไม่เกิด แต่ผู้เรียนจะได้เรียนรู้จากการจำลองหภาพว่าประสบการณ์ของคนจะเป็นอย่างไร ถ้าอยู่ในสถานการณ์เช่นนั้น ทำให้คิดได้ล่วงหน้าว่าควรจะพิจารณาปัจจัยอะไรบ้าง และจะรู้ว่ามีความรู้สึกเกี่ยวกับความคิดเห็นต่าง ๆ อย่างไร

4. เกม (Game)

การเรียนจากการเล่นเป็นเรื่องที่ยอมรับกันมานานแล้ว การเล่นเกมเป็นกิจกรรมที่ให้ความสนุกสนาน และหากเลือกเล่นให้เป็นแล้ว เกมจะช่วยในการเรียนรู้ได้อย่างมากโรงเรียนบางแห่งอนุญาตให้นำเกมบางเกมมาเล่นที่โรงเรียนได้

เกมมีเป้าหมายที่แน่นอน ผู้เล่นต้องพยายามเล่นให้บรรลุเป้าหมายโดยต้องคำนึงถึงหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ประกอบด้วยตลอดเวลา ในหลายกรณีเกมจะคล้ายกับการจำลองสภาพที่กล่าวถึงมาแล้ว

เกมสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. การแข่งขัน จะมองแต่ชัยชนะ สอนให้เป็นตัวของตัวเอง
2. เกมการร่วมมือ มักจะเป็นการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มเป้าหมายของทุกคนคือช่วยกันให้รอดนั่นเอง

เกมมีประโยชน์ทั้งเพื่อความสนุกสนาน และเพื่อการศึกษา ถ้าเป็นการเล่นเพียงคนเดียวก็อาจจะเป็นการฝึกให้ใช้ตาและมือให้สัมพันธ์กัน ถ้าเป็นการแข่งขันก็เป็นการสอนให้รู้จักใช้ปฏิภาณหรือความสามารถเอาสามารถเอาชนะคู่ต่อสู้ให้ได้ การเล่นเกมนี้อย่างน้อยก็มีประโยชน์คือ การสร้างความคุ้นเคยในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์

เกมที่ใช้เพื่อการเรียนการสอนได้แก่ เกมประเภทจับคู่ ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นการสอนศัพท์ เกมวิ่งแข่ง ซึ่งผู้เล่นจะต้องสุ่มเลือกเลขมา 3 ตัว แล้วทำการบวกลบให้ได้ได้ไกลที่สุดเท่าที่จะไปได้โดยไม่ตกบันได หรือถอยหลังไปตั้งต้นใหม่ ซึ่งเป็นการสอนเลขคณิตนั่นเอง

5. การแก้ปัญหาต่าง ๆ

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะเน้นให้ฝึกการคิด การตัดสินใจ โดยมีการกำหนดเกณฑ์ให้แล้วให้ผู้เรียนพิจารณาไปตามเกณฑ์ มีการให้คะแนนหรือน้ำหนักกับเกณฑ์แต่ละข้อ นอกจากนี้ในหลายสาขาวิชา เช่น คณิตศาสตร์ วิทยาสตร์ ผู้เรียนจำเป็นอย่างยิ่งจะต้องเข้าใจ และมีความสามารถในการแก้ปัญหา กล่าวคือ รู้จักเลือกสูตรมาใช้ให้ตรงกับปัญหา ผู้เรียนอาจต้องทดเลขในกระดาษคำตอบก่อนที่จะเลือกจ้อที่ถูก การทำเช่นนี้ผู้สอนอาจไม่ได้ต้องเพียงคำตอบที่ถูกต้อง หากยังต้องการขั้นตอนที่ผู้เรียนทำด้วย เช่น ถ้าเลือกข้อ ข แปลว่าใช้สูตรผิด ถ้าเลือกข้อ ค แปลว่า คำนวณผิด ถ้าเลือกข้อ ง แปลว่า ไม่เข้าใจเลยดังนี้เป็นต้น การแก้ปัญหาบางอันกว่าผู้เรียนจะตอบได้ ต้องใช้คอมพิวเตอร์แก้ปัญหาด้วยเพราะเป็นการคำนวณที่ซับซ้อน ก็เท่ากับเป็นการวัดด้วยว่าผู้เรียนมีความรู้ทางคอมพิวเตอร์มากน้อยเพียงไร

6. การค้นพบของใหม่

ให้โอกาสผู้เรียนมีประสบการณ์ในด้านต่าง ๆ ผู้เรียนจะเรียนจากประสบการณ์ของตัวเอง เป็นว่าการคิดภาษาโลโก (Logo) ซึ่งทำให้เด็กสามารถเข้าใจอะไรได้ง่าย

เพราะภาษาโลโกเป็นภาษาอิงภาพ ขณะที่เด็ก ๆ ได้เรียนการใช้ภาษาต่าง ๆ ของภาษาโลโก แล้วลองใช้คำสั่งต่าง ๆ จะทำให้มีภาพเกิดขึ้น เขาก็จะเรียนรู้ไปด้วย ตั้งแต่คำศัพท์ และหลักการพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์ และเรขาคณิต เช่น การทำมุมต่าง ๆ เป็นต้น

7. การทดสอบ

การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนมักจะต้องรวมการทดสอบไว้เป็นการวัดผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียนไปด้วย โดยการจัดการทำการทดสอบจะต้องคำนึงถึงหลักการต่าง ๆ ต่อไปนี้

1. การสร้างข้อสอบ
2. การจักการสอบ
3. การตรวจสอบให้คะแนน
4. การวิเคราะห์ข้อสอบเป็นรายข้อ
5. การสร้างคลังข้อสอบ และการจัดให้ผู้สอบสุ่มเลือกข้อสอบเองได้

การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

โดยทั่วไปสามารถแบ่งได้เป็น 2 วิธี

1. ใช้ตัวแปลภาษา เช่น ภาษาปาสคาล ภาษาซี เป็นต้น ข้อดีในการใช้ตัวแปลภาษา คือ สามารถพัฒนาขีดความสามารถของโปรแกรมได้ไม่จำกัด ขึ้นอยู่กับความคิดและความสามารถของผู้พัฒนา แต่มีข้อเสียในการพัฒนาโปรแกรมเป็นไปได้ช้า อีกทั้งผู้ที่จะพัฒนาโปรแกรมจะต้องมีความทางด้านไมโครคอมพิวเตอร์และการเขียนโปรแกรมเป็นอย่างดี จึงจะทำโปรแกรมออกมาน่าสนใน
2. ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ในปัจจุบันในการสร้างบทเรียนสอน ไดมีการใช้โปรแกรมสำเร็จซึ่งมีอยู่หลายโปรแกรม เช่น พีซีสตอรี่บอร์ด (PC Story Bord), โชว์พาร์ทเนอร์ (Show Partner), Mulitmedia Toolbook , Macromedia Director และ Macromedia Authorware ซึ่งแต่ละโปรแกรมก็มีลักษณะการทำงานที่คล้ายคลึงกัน ทำให้ไม่ต้องยุ่งยากในการเขียนโปรแกรมและช่วยลดเวลาในการสร้างบทเรียน

มัลติมีเดียคืออะไร

มัลติมีเดีย คือ การนำเอาเครื่องคอมพิวเตอร์มาต่อพ่วงกับอุปกรณ์ต่าง ๆ เพื่อให้สามารถเก็บข้อมูลและแสดงผลได้ทั้งภาพเคลื่อนไหวและมีเสียงประกอบด้วย จุดที่ทำให้มีการนำเอาระบบมัลติมีเดียมาใช้นั้นก็คือ การมองเห็นประโยชน์จากคอมพิวเตอร์ที่จะได้รับจากการนำมาใช้ในงานด้านการฝึกอบรม (Training) และการเสนอผลงาน (Presentation) เพราะการนำระบบมัลติมีเดียมาใช้งานทั้ง 2 ชนิดนี้ จะทำให้ได้ประโยชน์จากคอมพิวเตอร์มากขึ้น และยังเป็นการเอาเสียงและภาพวีดีโอ ที่เป็นเครื่องมือที่ดีในการดึงดูดผู้ชมหรือผู้ฟังได้อย่างมีประสิทธิภ าพมาใช้ร่วมกัน

มัลติมีเดียช่วยการเรียนการสอน

ประโยชน์ที่ได้รับจากการนำโปรแกรมมัลติมีเดียเข้าไปใช้ในการเรียนการสอนที่เห็นได้ชัดเจนได้แก่

1. เพิ่มแรงจูงใจในการเรียนการสอน โปรแกรมมัลติมีเดียเป็นโปรแกรมที่อาจออกแบบให้มีทั้งภาพ เสียง และภาพเคลื่อนไหว ทำให้นักเรียนมีความสนใจในการใช้งานมากกว่าโปรแกรมทั่ว โดยเฉพาะเมื่อเป็นการใช้โปรแกรมในลักษณะที่ให้นักเรียนมีการศึกษาและค้นคว้าด้วยตนเอง การออกแบบโปรแกรมที่เป็นมัลติมีเดียจะทำให้เด็กไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน
2. ความสามารถในการจำลองสถานการณ์หรือการทำงาน โปรแกรมมัลติมีเดียทำให้สามารถสร้างโปรแกรมที่มีการจำลองการทำงาน มีการเคลื่อนไหวเพื่อเลียนแบบการทำงานของอุปกรณ์ ทำให้ผู้เรียนสามารถเข้าได้ยิ่งขึ้น โดยเฉพาะในเรื่องราวที่เป็นเรื่องของนามธรรม โปรแกรมสามารถจำลองออกมาเพื่อให้เกิดความเข้าในได้
3. ใช้ในการฝึกการใช้งานอุปกรณ์ต่าง ๆ โปรแกรมที่เป็นมัลติมีเดีย อาจจะใช้สร้างเป็นโปรแกรมสำหรับการฝึกหัดอุปกรณ์ต่าง ๆ โดยคอมพิวเตอร์ มีการจำลองวิธีการใช้งานก่อนที่จุใช้งานกับอุปกรณ์จริง เพื่อลดความเสียหายจากการใช้อุปกรณ์โดยที่ยังไม่มีความชำนาญหรือในกรณีที่มีอุปกรณ์ไม่เพียงพอสำหรับนักเรียน
4. การเรียนภาษา เนื่องจากโปรแกรมมัลติมีเดียสามารถที่จะบันทึกเสียงไป ดังนั้นจึงมีประโยชน์มากเมื่อใช้ในการสอนเกี่ยวกับภาษา สามารถทำให้นักเรียนสามารถอ่านตามได้อย่างถูกต้องและโปรแกรมจะมีความเหมาะสมกว่าสื่อที่เป็นวีดีโอ เนื่องจากนักเรียนสามารถที่จะฟังในจุดที่ยังฟังไม่เข้าใจซ้ำ ๆ กันได้ตามที่ต้องการ

ขั้นตอนในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

1. การวิเคราะห์เนื้อหา

เป็นขั้นตอนพิจารณาว่าจะทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในเรื่องใด มีขอบเขตเนื้อหาแค่ไหน เมื่อมีการพิจารณาได้แล้วควรมีการวิเคราะห์เนื้อหาของเรื่องและแบ่งออกเป็นส่วน ๆ เพื่อง่ายต่อการจัดทำ ซึ่งจะทำให้สามารถจัดทำโปรแกรมได้อย่างรวดเร็ว พร้อมทั้งกำหนดความสัมพันธ์ของเนื้อเรื่องด้วยเพราะโปรแกรมที่ทำจะมีขนาดใหญ่

2. การออกแบบโปรแกรม

เมื่อได้เรื่องที่ต้องการแล้วมีการแยกเนื้อหาเป็นส่วน ๆ พร้อมกับกำหนดความสัมพันธ์ ก็ต้องมาพิจารณาว่าแต่ละส่วนจะต้องมีรูปแบบหน้าตาเป็นอย่าง ประกอบด้วยรายละเอียดอะไรบ้าง

3. สร้างโฟลว์ชาร์ตควบคุมการทำงานของโปรแกรม

การทำงานของโปรแกรมมีลักษณะคล้ายกับการออกแบบสไลด์ ต่างกันที่ว่าสไลด์แต่ละแผ่นนั้นมีความสัมพันธ์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์อาจมีการกระโดดไปมาระหว่างสไลด์แต่ละแผ่นได้ขึ้นกับผลการใช้งานของผู้ใช้ ในการที่จะควบคุมการทำงานของโปรแกรมให้เป็นไปตามความต้องการ

4. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ขั้นนี้จะเป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ ที่จะใช้ในแต่ละส่วนของโปรแกรม ซึ่งรวมไปถึงภาพต่าง ๆ หรือการจัดทำภาพเคลื่อนไหว

5. การจัดทำโปรแกรม

ขั้นนี้เป็นการนำข้อมูลต่าง ๆ ที่เก็บรวบรวมมาจากข้อ 4 เข้ามาเรียงให้เป็นเรื่องราวตามที่ต้องการ และการเขียนโปรแกรม

6. การทดสอบโปรแกรม

หลังจากที่สร้างโปรแกรมเสร็จ ขั้นตอนนี้ก็เป็นขั้นตอนที่สำคัญอีกขั้นตอนหนึ่งเพราะโปรแกรมที่สร้างเสร็จบางทียังอาจมีข้อผิดพลาดอยู่บ้าง ซึ่งจะต้องมีการแก้ไขให้ถูกต้อง

7. การจัดทำคู่มือในการใช้โปรแกรม

ก่อนที่จะมีการนำโปรแกรมไปใช้ ต้องมีการจัดทำคู่มือการใช้งานสำหรับผู้ใช้เพื่อความสะดวกของผู้ใช้

ข้อดีของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

1. ทำให้การเรียนน่าสนใจมากขึ้น ไม่น่าเบื่อ เพราะจะมีการโต้ตอบกันอยู่ตลอดเวลาอีกทั้งยังมีภาพและเสียง
2. สามารถเรียนรู้บทเรียนจากโปรแกรมได้โดยไม่จำกัดเวลา อีกทั้งยังสามารถเรียนรู้บทเรียนซ้ำไปซ้ำมาได้หลาย ๆ ครั้งจนกว่าจะเข้าใจ หรือจะข้ามบทเรียนที่เข้าใจแล้วไปก็ได้
3. ช่วยลดค่าใช้จ่ายและช่วยประหยัดเวลา เพราะเพียงโปรแกรมออกมาเพียงชุดเดียว ก็สามารถนำเอาไปแจกจ่ายให้ผู้ที่สนใจได้อีก
4. ช่วยให้เข้าใจในบทเรียนได้ง่ายขึ้น เพราะในการนำเสนอนั้นจะมีภาพซึ่งจะทำให้เข้าใจบทเรียนนั้นได้ง่าย

ลักษณะของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ดี

1. ใช้งานง่าย โดยผู้ใช้มีพื้นฐานทางคอมพิวเตอร์เพียงเล็กน้อย หรืออาจจะไม่มีพื้นฐานเลยก็ได้
2. เพิ่มแรงจูงใจให้กับผู้ใช้ เช่น ความสวยงาม ความแปลกใหม่ ความเร็วในการใช้งาน สามารถจำลองสถานการณ์หรือการทำงาน ทำให้ผู้ใช้มีความเข้าใจ ได้ดียิ่งขึ้น
3. ใช้งานคล่อง เช่น ในการเลือกเมนูต่าง ๆ สามารถมองเห็นได้ง่าย
4. มีข้อผิดพลาดในการใช้งานให้น้อยที่สุด

อุปกรณ์และวิธีการพัฒนาโปรแกรมช่วยสอน

ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าสมการพหุนาม
2. ศึกษาการใช้ C++ for Builder version 3.0 เพื่อใช้พัฒนาโปรแกรม
3. สร้างโปรแกรมเพื่อช่วยในการสอนการประมาณค่าสมการพหุนาม
4. ทดสอบการใช้งานโปรแกรม และทำการแก้ไขส่วนที่บกพร่อง
5. จัดเตรียมคู่มือการใช้โปรแกรม

คุณลักษณะของโปรแกรมที่จะออกแบบและพัฒนา

1. สามารถแสดงรูปภาพที่มีสีสันสวยงาม มีทั้งรูปภาพนิ่ง และรูปภาพที่เคลื่อนไหวได้ และคำบรรยายประกอบรูปที่เป็นทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษได้
2. สามารถแสดงเสียงได้
3. บทเรียนที่จะแสดงจะจัดออกเป็นออกเป็นหัวข้อ แต่ละหัวข้อจะเสนอบทเรียนเรื่องหนึ่งๆ
4. เนื้อหาบทเรียนแต่ละหัวข้อบางเรื่องอาจมีการต่อเนื่องกัน หรือเกี่ยวข้องกับเนื้อหาในบทอื่นๆ
5. ง่ายและสะดวกต่อการใช้
6. ง่ายต่อการเข้าใจตัวโปรแกรม สำหรับผู้สนใจที่จะนำไปศึกษาและพัฒนาต่อไป

บทที่ 3
เนื้อหาและทฤษฎีที่ใช้

3.1 การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนาม

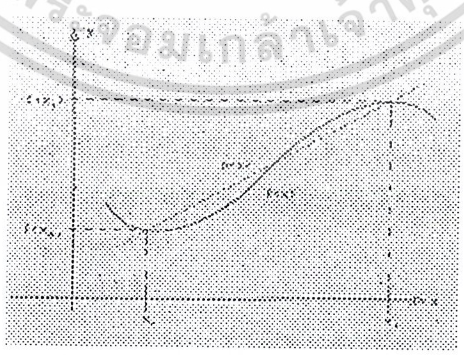
การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนาม หมายถึง การหาพหุนาม $p(x)$ ซึ่งเรียกว่าพหุนามประมาณค่าในช่วงเพื่อใช้ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เราจะประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ในกรณีต่อไปนี้

1. เราไม่ทราบว่าตัวฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นอย่างไร คือไม่มีสูตรหรือเงื่อนไขในการคำนวณค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เราทราบแต่เพียงค่าของฟังก์ชันที่จุดบางจุดเท่านั้น โดยค่าของฟังก์ชันนี้อาจได้มาจากการทดลองบางอย่าง หรอการวัดค่าทางกายภาพและอาจมีความคลาดเคลื่อน เราจะหาพหุนาม $p(x)$ ที่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลเหล่านี้ โดยพหุนามที่หาได้นี้สามารถใช้เพื่อราค่าของฟังก์ชันที่จุดอื่นๆ ที่ไม่ทราบค่าได้
2. เราทราบฟังก์ชัน $f(x)$ แต่สูตรอาจจะยุ่งยากหรือยากสำหรับการคำนวณ ดังนั้นเราจะหาฟังก์ชันที่สามารถคำนวณได้ง่าย เช่น พหุนามประมาณค่า

3.1.1 การประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้น

การประมาณค่า $f(x)$ ในกรณีนี้เป็นวิธีที่ง่ายที่สุด โดยจะประมาณ $f(x)$ ด้วยพหุนามดีกรีหนึ่ง $p(x)$ หรือเส้นตรงนั่นเอง

สมมติมีจุดสองจุด $A_0(x_0, f(x_0))$ และ $A_1(x_1, f(x_1))$ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 กราฟแสดงการประมาณค่า $f(x)$ ด้วยพหุนามดีกรีหนึ่ง

จากความรู้ในเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ สามารถเขียนสมการ $p(x)$ ได้หลายรูปแบบ ดังนี้

1. $p(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$ เรียกว่า **แบบลากรองจ์**
2. $p(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ เรียกว่า **แบบนิวตัน**
3. $p(x) = \dfrac{(x - x_0) f(x_1) - (x - x_1) f(x_0)}{x_1 - x_0}$ เรียกว่า **แบบเอตกิน - เนวิลล์**

3.1.2 การประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ (The Lagrange Interpolation Polynomial)

การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนามในที่นี้หมายถึง การหาพหุนาม $p(x)$ ที่มีกำลังไม่มากกว่า $n-1$ เพื่อนำไปแทนฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีค่าแน่นอนในช่วง $[a,b]$ เมื่อกำหนดจุด $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ในช่วง $[a,b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ ให้ โดย $p(x_k) = f(x_k)$ สำหรับ $k = 1,2,\ldots,n$

ก่อนอื่นจะต้องพิสูจน์ว่ามีพหุนาม $p(x)$ ที่มีคุณสมบัติที่ต้องการจริง การพิสูจน์นี้จะอยู่ในทฤษฎีบทที่ 3.1 ซึ่งเรียกว่า ทฤษฎีของลากรองจ์

__ทฤษฎีบทที่ 3.1__ ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีค่าแน่นอนในช่วง $[a,b]$ ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจุดในช่วง $[a,b]$ โดยที่ $x_1 \neq x_j$ เมื่อ $i \neq j$ และกำหนดค่า $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ ให้ แล้วมีพหุนาม $P_{n-1}(x)$ ที่มีกำลังไม่เกิน $n-1$ ที่มีคุณสมบัติ

$$P_{n-1}(x_k) = f(x_k) \quad , \quad k = 1,2,3,\ldots,n$$

__พิสูจน์__

ให้ $P_{n-1}(x) = L_{n-1,1}(x) f(x_1) + L_{n-1,2} f(x_2) + \ldots + L_{n-1,n}(x) f(x_n)$

เมื่อ $L_{n-1,k}(x)$ เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $n-1$

และ $$L_{n-1,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i \neq k \\ 0 & \text{ถ้า } i \neq k \end{cases} \quad , \; i,k = 1,2,\ldots,n$$

$\therefore L_{n-1,k}(x)$ มีราก $n-1$ ตัว คือ $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$

$\therefore L_{n-1,k}(x) = A_k (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)$

เมื่อ A_k เป็นค่าคงที่

แต่ $L_{n-1,k}(x_k) = 1$

$$\therefore \quad 1 = A_k (x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)$$

$$\therefore \quad A_k = \frac{1}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

$$= \frac{1}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i)}$$

$$\therefore\ L_{n-1,k}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

จาก $P_{n-1}(x) = L_{n-1,1}(x)f(x_1) + L_{n-1,2}(x)f(x_2) + \ldots + L_{n-1,n}(x)f(x_n)$

$\therefore\ P_{n-1}(x_k) = L_{n-1,1}(x_k)f(x_1) + L_{n-1,2}(x_k)f(x_2) + \ldots + L_{n-1,n}(x_k)f(x_n)$

$= f(x_k) \quad , \quad k = 1,2,3,\ldots,n$

ทฤษฎีบทที่ 3.2 $P_{n-1}(x)$ ในทฤษฎีบทที่ 3.1 จะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

พิสูจน์

สมมติว่ามีพหุนาม $q_{n-1}(x)$ ที่คุณสมบัติเหมือนกับ $P_{n-1}(x)$ นั่นคือ

$q_{n-1}(x_k) = f(x_k) \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n$

ให้ $r(x) = P_{n-1}(x) - q_{n-1}(x)$

$\therefore\ r(x_k) = P_{n-1}(x_k) - q_{n-1}(x_k)$

$= f(x_k) - f(x_k)$

$= 0$

$\therefore\ r(x)$ มีราก n ตัว คือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$

เป็นไปไม่ได้ เพราะ $r(x)$ เป็นพหุนามที่กำลังไม่เกิน $n-1$

$\therefore\ r(x) = 0$

$\therefore\ P_{n-1}(x) = q_{n-1}(x)$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.1 อาจจะพิสูจน์โดยวิธีเมตริกซ์ได้ดังนี้

ต้องการ $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ เป็นจำนวนจริงที่ต้องการหาเพื่อที่จะทำให้

$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} = f(x_1)$

$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} = f(x_2)$

.

.

.

$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} = f(x_n)$

ซึ่งจะเหมือนกับระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ที่ได้นี้เรียกว่า เมตริกซ์วองแดร์มงด์ (Van de Monte Matrix) ซึ่งอาจพิสูจน์ได้ว่าตัวกำหนดของเมตริกซ์นี้มีค่าไม่เท่ากับ 0 นั่นคือ เมตริกซ์นี้เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้นนี้มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว

$\therefore$ มี $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ เพียงชุดเดียวที่ทำให้ $P_{n-1}(x)$ มีคุณสมบัติตามต้องการ หรือ มีพหุนาม $P_{n-1}(x)$ เพียงพหุนามเดียวที่มีคุณสมบัติตามที่ต้องการ

ดังนั้นเมื่อกำหนดจุด $x_1, x_2, \dots, x_n$ และค่า $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ การประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนามลากรองจ์ เขียนในรูปพหุนามได้ดังนี้

$$P_{n-1}(x) = L_{n-1,1}(x)f(x_1) + L_{n-1,2}f(x_2) + \dots + L_{n-1,n}(x)f(x_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_{n-1,k}(x)$$

โดยที่ $$L_{n-1,k}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

<u>*ตัวอย่างที่ 3.1*</u> จงหาพหุนามที่ผ่านจุด $(-2,-3), (-1,0), (1,0), (2,9)$ พร้อมทั้งหา $P_3(3)$

<u>*วิธีทำ*</u>

$$P_3(x) = f(x_1)L_{3,1}(x) + f(x_2)L_{3,2}(x) + f(x_3)L_{3,3}(x)$$

$$L_{3,1}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)}$$

$$= \frac{-x^3+2x^2+x-2}{12}$$

$$L_{3,2}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$
$$=\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)}$$
$$=\frac{x^3-x^2-4x+4}{6}$$
$$L_{3,3}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$
$$=\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)}$$
$$=\frac{-x^3-x^2+4x+4}{6}$$
$$L_{3,4}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$
$$=\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)}$$
$$=\frac{x^3+2x^2-x-2}{12}$$
$$P_3(x)=(-3)\left(\frac{-x^3+2x+x-2}{12}\right)+(0)\left(\frac{x^3-x^2-4x+4}{6}\right)$$
$$+(0)\left(\frac{-x^3-x^2+4x+4}{6}\right)+(9)\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{12}\right)$$
$$P_3(x)=x^3+x^2-x-1$$
$$P_3(3)=(3)^3+(3)^2-(3)-1$$
$$\therefore \quad P_3(3)=32$$

3.1.3 การประมาณค่าในช่วงแบบทำซ้ำของเอตกินและเนวิลล์ (Aitkin Neville Repeated Linear Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงแบบเอตกินและเนวิลล์นี้ เป็นการประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนามดีกรีสูงกว่าหนึ่ง โดยการแทนด้วยการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้น ซ้ำกันหลายหน ดังนี้

จากสูตรการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นของเอตกินและเนวิลล์

$$p(x)=\frac{(x-x_0)f(x_1)-(x-x_1)f(x_0)}{x_1-x_0}$$
$$=p_{01}(x)=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} f(x_1) & x-x_1 \\ f(x_0) & x-x_0 \end{vmatrix}$$

คือ พหุนามประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นซึ่งผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และ $(x_1, f(x_1))$

ในขณะเดียวกัน

$$p_{12}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} f(x_2) & x - x_2 \\ f(x_1) & x - x_1 \end{vmatrix}$$

ผ่านจุด $(x_1, f(x_1))$ และ $(x_2, f(x_2))$

ต่อไปโดยการรวม $p_{01}(x)$ และ $p_{12}(x)$ เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$p_{012}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} p_{12}(x) & x - x_2 \\ p_{01}(x) & x - x_0 \end{vmatrix}$$

คือ พหุนามดีกรีสองที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$

ในทำนองเดียวกัน

$$p_{123}(x) = \frac{1}{x_3 - x_1}\begin{vmatrix} p_{23}(x) & x - x_3 \\ p_{12}(x) & x - x_1 \end{vmatrix}$$

เป็นพหุนามดีกรีสองที่ผ่าน $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ และ $(x_3, f(x_3))$

ในกรณีทั่วไป

$$p_{1,i+1,\ldots,i+k}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i}\begin{vmatrix} p_{i+1,i+2,\ldots,i+k}(x) & x - x_{i+k} \\ p_{i,i+1,\ldots,i+k-1}(x) & x - x_i \end{vmatrix}$$

$$k = 1,2,\ldots,n$$

$$i = 0,1,\ldots,n-k$$

เป็นพหุนามดีกรี k ที่ผ่านจุด $k+1$ จุด $(x_1, f(x_1)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})), \ldots, (x_{i+k}, f(x_{i+k}))$

พหุนามนี้เป็นพหุนามเดียวกับที่ได้จากการเขียนแบบลากรองจ์ และ แบบนิวตัน ในทางปฏิบัติจะไม่หาพหุนามนี้ แต่จะหาค่าของพหุนามที่จุดที่กำหนดให้ x^+ โดยการสร้างเป็นตาราง ดังตาราง 3.1 ซึ่งการคำนวณตามตาราง 3.1 นี้ เรียกว่า **ระเบียบวิธีของเอตกิน-เนวิลล์**

<u>*ตาราง 3.1*</u>

x_i	$f(x_i)$	ดีกรี 1	ดีกรี 2	ดีกรี 3	ดีกรี 4	$x^+ - x_i$
x_0	$f(x_0)$					$x^+ - x_0$
		$p_{01}(x^+)$				
	$f(x_1)$					
x_1			$p_{012}(x^+)$			$x^+ - x_1$
	$f(x_2)$	$p_{12}(x^+)$		$p_{0123}(x^+)$		
x_2			$p_{123}(x^+)$		$p_{01234}(x^+)$	$x^+ - x_2$
	$f(x_3)$	$p_{23}(x^+)$		$p_{1234}(x^+)$		
x_3			$p_{234}(x^+)$			$x^+ - x_3$
	$f(x_4)$	$p_{34}(x^+)$				
x_4						$x^+ - x_4$

การคำนวณโดยอาศัยระเบียบวิธีการของเอตกิน - เนวิลล์ นี้นิยมเรียงตัวแปรในตารางโดยให้ x_0 คือ จุดที่อยู่ใกล้กับ x^+ ที่ต้องการหาค่า $f(x)$ มากที่สุด ถัดออกไปเป็น $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่ห่างออกไปตามลำดับ

<u>*ตัวอย่างที่ 3.2*</u> จงหาค่า $f(x)$ ที่ $x = 3$ จากค่าที่กำหนดให้

x	0	1	2	4
$f(x)$	3	2	7	59

<u>*วิธีทำ*</u> โดยเรียงจุดที่ใกล้ $x^+ = 3$ มากที่สุด คือ $x = 2$ เป็นค่าแรก แล้วคำนวณค่าได้ดังตาราง 3.3

ตาราง 3.3

i	x_i	$f(x_i)$	ดีกรี 1	ดีกรี 2	ดีกรี 3	$x^+ - x_i$
0	2	7				1
			12			
1	1	2		18		2
			0		24	
2	0	3		30		3
			45			
3	4	59				-1

จากตาราง $p_3(3) = 24$

3.1.4 การประมาณค่าในช่วงแบบนิวตัน

3.1.4.1 การประมาณค่าในช่วงแบบนิวตัน

จากสูตรการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นของนิวตัน

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

โดย $f[x_1, x_0] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ เรียกว่า ผลหารผลต่างสืบเนื่องอันดับหนึ่ง (first divided difference) ดังนั้น ก่อนที่กล่าวถึงการประมาณค่าในช่วงแบบนิวตัน จะกล่าวถึง ผลหารผลต่างสืบเนื่อง (divided difference) ก่อน

ผลหารผลต่างสืบเนื่อง

ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ แบบเชิงเส้นในช่วง $[a,b]$ อัตราส่วน $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ มีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุด x_0, x_1 ในช่วง $[a,b]$ อัตราส่วนนี้ เรียกว่า ผลหารผลต่างอันดับหนึ่งของ $f(x)$ ที่มีอาร์กิวเมนต์ x_0, x_1 เขียนแทนด้วย $f[x_0, x_1]$ นั่นคือ

$$\Delta f_0 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

เนื่องจาก
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

ดังนั้น
$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$$

ในทำนองเดียวกัน $\Delta f_1 = f\left[x_2, x_1\right] = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f\left[x_1, x_2\right]$

และต่อ ๆ ไป นั่นคือ ผลหารผลต่างมีความสมมาตรในอาร์กิวเมนต์

ผลหารผลต่างอันดับที่สองของ $f(x)$ ที่มีอาร์กิวเมนต์ x_0, x_1, x_2 คือ

$$f\left[x_2, x_1, x_0\right] = \frac{f\left[x_2, x_1\right] - f\left[x_1, x_0\right]}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{x_2 - x_1} = \Delta^2 f_0$$

$$= \frac{f\left(x_0\right)}{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 - x_2\right)} + \frac{f\left(x_1\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_1 - x_2\right)} + \frac{f\left(x_2\right)}{\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)}$$

และ $$f\left[x_3, x_2, x_1\right] = \frac{f\left[x_3, x_2\right] - f\left[x_2, x_1\right]}{x_3 - x_1} = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{x_3 - x_1} = \Delta^2 f_1$$

รูปทั่วไปของผลหารผลต่างอันดับที่ n ของ $f(x)$ ที่อาร์กิวเมนต์ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\Delta^n f_0 = \frac{\Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{f\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{f\left(x_0\right)}{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 - x_2\right)\ldots\left(x_0 - x_n\right)}$$

$$+\ldots+ \frac{f\left(x_1\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_1 - x_2\right)\ldots\left(x_1 - x_n\right)}$$

$$+ \frac{f\left(x_n\right)}{\left(x_n - x_0\right)\left(x_n - x_2\right)\ldots\left(x_n - x_{n-1}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}$$

กำหนดค่าของฟังก์ชันที่จุด $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็น $f\left(x_0\right), f\left(x_1\right), \ldots, f\left(x_n\right)$ โดยที่ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ไม่จำเป็นต้องมีช่วงห่างเท่ากัน สามารถสร้างตารางผลต่างสืบเนื่องได้ดังตาราง 3.4

<u>*ตาราง 3.4*</u>

x	$f(x)$	ผลหารผลต่างสืบเนื่องอันดับหนึ่ง หรือ $\Delta f(x)$	ผลหารผลต่างสืบเนื่องอันดับสอง หรือ $\Delta^2 f(x)$	ผลหารผลต่างสืบเนื่องอันดับสาม หรือ $\Delta^3 f(x)$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

ตัวอย่างที่ 3.3 จงสร้างตารางผลหารผลต่างจาก x และ $f(x)$ ที่กำหนด

ตาราง 3.5

	4	5	7	10	11	13
$f(x)$	48	100	294	900	1210	2029

วิธีทำ สร้างตารางผลหารผลต่างได้ดังตาราง 3.6

ตาราง 3.6

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
4	48			
		52		
5	100		15	
		97		1
7	294		21	
		202		1
10	900		27	
		310		1
11	1210		33	
		409		
13	2028			

จากผลหารผลต่างอันดับต่าง ๆ

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x] \quad (3.1)$$

$$f[x_0, x] = f[x_1, x_0] + (x - x_1) f[x_1, x_0, x] \quad (3.2)$$

$$f[x_1, x_0, x] = f[x_2, x_1, x_0] + (x - x_2) f[x_2, x_1, x_0, x] \quad (3.3)$$

....

โดยการแทน (3.2) ใน (3.1) ได้ว่า

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_1, x_0, x] \quad (3.4)$$

แล้วแทน (3.3) ใน (3.4) ได้ว่า

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$

$$+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)f\left[x_2,x_1,x_0,x\right]$$

โดยการทำซ้ำเช่นนี้เรื่อยไป จะได้

$$\begin{aligned}f(x) &= f\left(x_0\right)+\left(x-x_0\right)f\left[x_1,x_0\right]+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)f\left[x_2,x_1,x_0\right] \\ &+\ldots+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_{n-1}\right)f\left[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0\right] \\ &+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_{n-1}\right)f\left[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0,x\right]\end{aligned}$$

แล้วพหุนามการประมาณค่าในช่วงแบบนิวตัน คือ

$$\begin{aligned}p_n(x) &= f\left(x_0\right)+\left(x-x_0\right)f\left[x_1,x_0\right]+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)f\left[x_2,x_1,x_0\right] \\ &+\ldots+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_{n-1}\right)f\left[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0\right] \\ &= f\left(x_0\right)+\left(x-x_0\right)\Delta f\left(x_0\right)+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\Delta^2 f\left(x_0\right) \\ &+\ldots+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\ldots\left(x-x_{n-1}\right)\Delta^n f\left(x_0\right)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาพหุนามที่ผ่านจุด $(0,3),(1,2),(2,7)$ และ $(4,59)$ และ ค่า $p_3(3)$

วิธีทำ จากจุดที่กำหนดสร้างตารางผลหารผลต่างสืบเนื่องดังตาราง 3.7

ตาราง 3.7

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	3			
		-1		
1	2		3	
		5		1
2	7		7	
		26		
4	59			

$$\begin{aligned}p_3(x) &= f\left(x_0\right)+\left(x-x_0\right)\Delta f\left(x_0\right)+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\Delta^2 f\left(x_0\right) \\ &+\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\Delta^3 f\left(x_0\right) \\ &= 3+(x-0)(-1)+(x-0)(x-1)(3) \\ &+(x-0)(x-1)(x-2)(1) \\ &= x^3-2x+3\end{aligned}$$

$$p_3(0.5)=24$$

โดยวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ และ แบบนิวตันนี้ จะได้พหุนามดีกรี n เมื่อกำหนดจุด $n+1$ จุด ดังนั้นจึงหาการประมาณค่านอกช่วงที่กำหนด (extrapolation) ได้ เช่น กำหนดจุด $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,7)$, และ $(4,59)$ พหุนามที่ผ่านจุดที่กำหนดทั้ง 4 คือ $p(x) = x^3 - 2x + 3$ บนช่วง $[0,4]$ แล้วที่ $x = -1$ ได้ $p(-1) = 0$ และที่ $x = 5$ ได้ $p(x) = 118$ ซึ่งคือการประมาณค่านอกช่วงที่กำหนด

3.1.4.2 การประมาณค่าในช่วงแบบนิวตัน-ข้างหน้า และนิวตัน-ย้อนหลัง

ผลต่างสืบเนื่อง

ในคณิตศาสตร์ทั่วไป ฟังก์ชันของ x เขียนแทนด้วยนิพจน์ เช่น $f(x) = \sin x$ หรือ $f(x) = x^2$ ในการศึกษาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ฟังก์ชันถูกกำหนดด้วยตาราง โดยกำหนดค่าตัวเลขของฟังก์ชันที่แต่ละค่าของอาร์กิวเมนต์ x ค่าของ x แต่ละค่าแทนด้วย $x_0, x_1, x_2, \ldots$ และฟังก์ชันที่สมนัย แทนด้วย $f_0, f_1, f_2, \ldots$

หรือ $$f_j = f(x_j)$$

เมื่อ $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_j = x_0 + jh, \ldots$

โดย h เป็นค่าคงที่ที่มากกว่าศูนย์

หรือ $x_0 - x_1 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \ldots = h$

อัตราการเปลี่ยนแปลง $f_1 - f_0, f_2 - f_1, f_3 - f_2, \ldots$ ซึ่งสมนัยกับค่าเปลี่ยนแปลงจำกัด h ของ x เรียกว่า ผลต่างสืบเนื่อง (finite difference) ผลต่างสืบเนื่องนี้สามารถหาผลต่างสืบเนื่อง ครั้งที่ สอง, สาม, สี่ และต่อ ๆ ไปได้ โดยผลต่างครั้งที่สอง คือ การหาผลต่างครั้งที่หนึ่ง และ ต่อ ๆ ไป

ตัวอย่างที่ 3.5 ตาราง 3.8 คือ ตารางผลต่างสืบเนื่องของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2 - 6x$ เมื่อ $x = -1(1)2$

ตาราง 3.8

x	$f(x)$	ผลต่างครั้งที่ 1	ผลต่างครั้งที่ 2	ผลต่างครั้งที่ 3
-1	9			
		-9		
0	0		6	
		-3		0
1	-3		6	
		3		
2	0			

สัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนผลต่างมี สาม แบบ คือ **ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า** (forward difference) : Δ, **ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง** (backward difference) :∇ และ**ผลต่างสืบเนื่องส่วนกลาง** (central difference) : δ โดย

$$\Delta f_r = f_{r+1} - f_r$$
$$\Delta f_r = f_r - f_{r-1}$$
$$\delta_{r+1/2} = f_{r+1} - f_r$$

นอกจากนี้ยังมี**ตัวดำเนินการเลื่อน** (shift operator) : E และ μ ตัวดำเนินการเฉลี่ย (mean - value operator) โดย

$$E^n f_r = f_{r+n}$$
$$\mu f_{r+1/2} = (f_r + f_{r+1})/2$$

ความสัมพันธ์ของแต่ละตัวดำเนินการ

1. $\Delta = E - 1$ หรือ $E = \Delta + 1$
2. $\nabla = 1 - E^{-1}$ หรือ $E^{-1} = 1 - \nabla$
3. $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$
4. $\mu = (E^{1/2} + E^{-1/2})/2$
5. $\delta^n f_r = \nabla^n f_{r+n/2}$ หรือ $\delta^n f_r = \Delta^n f_{r-n/2}$

ผลต่างสืบเนื่องพหุนาม **(difference of a polynomial)**

จากตัวอย่าง 3.5 ตารางผลต่างของฟังก์ชัน $3x^2 - 6x$ นั้น ผลต่างครั้งที่ 2, เป็นค่าคงที่ที่เท่ากัน และทำให้หลักต่อมาเป็นศูนย์หมด คุณสมบัตินี้เป็นคุณสมบัติเฉพาะของพหุนาม

ถ้า $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ แล้วผลต่างครั้งที่ n ของ $f(x)$ จะเป็นค่าคงที่ และมีค่า $n!a_n h^n$ และผลต่างครั้งสูงกว่านี้จะเป็นศูนย์ เปรียบเทียบได้กับการหาอนุพันธ์อันดับที่ n ของ $f(x)$ คือ $n!a_n$ และอนุพันธ์อันดับสูงกว่านี้เป็นศูนย์

<u>ตัวอย่างที่ 3.6</u> จงสร้างตารางผลต่างของ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ เมื่อ $x = 0(0.1)1$

<u>วิธีทำ</u> สัญลักษณ์ $x = 0(0.1)1$ นี้หมายความว่า จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$ โดย x เพิ่มขึ้นช่วงละ 0.1

เริ่มแรกเราจะคำนวณ $f(x)$ เมื่อ $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ และหาผลต่างครั้งที่สาม โดย $3! \times (0.1)^3 = 0.006$ จะใช้ความจริงที่ว่าผลต่างครั้งที่สามมีค่าคงที่ และจะใช้ข้อมูลนี้สร้างส่วนที่เหลือของตาราง ดังตาราง 3.9

ตาราง 3.9

x	$f(x)$	δ	δ^2	δ^3
0.0	$0+0+0+1=1.000$			
		431		
0.1	$0.001+0.03+0.4+1=1.431$		66	
		497		6
0.2	$0.008+0.12+0.8+1=1.928$		72	
		569		6
0.3	$0.027+0.27+1.2+1=2.497$		78	
		647		6
0.4	3.144		84	
		731		6
0.5	3.875		90	
		821		6
0.6	4.696		96	
		917		6
0.7	5.613		102	
		1019		6
0.8	6.632		108	
		1127		6
0.9	7.759		144	
		1241		
1.0	$1+3+4+1=9$			

ตารางผลต่างของฟังก์ชันที่มีการปัดเศษ

ตัวอย่างที่ 3.7 จงสร้างตารางผลต่างของ $f(x) = \sin x$ เมื่อ $x = 1(5)45$

วิธีทำ

ตาราง 3.10

x^0	$\sin x^0$	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	δ^6	δ^7	δ^8	δ^9
0	0.00000									
		8716								
5	08716		− 67							
		8649		− 65						
10	17365		− 132		0					
		8517		− 65		+ 2				
15	25882		− 197		2		− 3			
		8320		− 63		− 1		+ 7		
20	34202		− 260		1		+ 4		− 17	
		8060		− 62		+ 3		− 10		+ 40
25	42262		− 332		4		− 6		+ 23	
		7738		− 58		− 3		+ 13		
30	50000		− 380		1		+ 7			
		7358		− 57		+ 4				
35	57358		− 437		5					
		6921		− 52						
40	64279		− 489							
		6432								
45	0.7071									

ฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพหุนาม เช่น ฟังก์ชัน $\sin x^0$ ซึ่งเกิดจากการปัดเศษให้เหลือ 5 ตำแหน่ง ตารางผลต่างจะเป็นดังตัวอย่างที่ 3.7 ซึ่งจะเห็นว่าแตกต่างไปจากตารางผลต่างในตัวอย่างที่ 3.6

ตารางผลต่างของฟังก์ชันที่มีการปัดเศษ อาจแบ่งออกได้เป็น สามส่วน คือ ส่วนปรกติ หลัก $\delta - \delta^3$ ในตัวอย่างที่ 3.7 ผลต่างจะมีลักษณะปรกติเหมือนตารางผลต่างพหุนาม, ส่วนระยะเปลี่ยน หลัก δ^4 ในตัวอย่างที่ 3.7 และส่วนไม่ปรกติ ตั้งแต่หลัก $\delta^5 - \delta^9$ เป็นต้นไป ผลต่างจะมีลักษณะแตกต่างจากตารางผลต่างพหุนาม

การประมาณค่าในช่วงโดยตารางผลต่างสืบเนื่อง

จาก $E^n f_0 = f_p$ และ $E = 1+\Delta$

แล้ว $f_p = (1+\Delta)^p f_0$

และจากทฤษฎีบททวินาม

$$(1+\Delta)^p f_0 = f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots$$

เมื่อ $p = (x - x_0)/h$ แล้วจะได้ สูตรผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าของนิวตัน-เกอร์กอรี (the Newton-Gregory forward difference) คือ

$$f_p = f_0 + p\Delta f_0 + \frac{P(p-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots$$

หรือ

$$f_p = f_0 + (x-x_0)\frac{\Delta f_0}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 f_0}{h^2} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}\frac{\Delta^3 f_0}{h^3} + \ldots \tag{3.5}$$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหา $f(0.36)$ จากตาราง 3.11

ตาราง 3.11

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.2	0.2304				
		484			
0.3	0.2788		-50		
		434		11	
0.4	0.3222		-39		-5
		395		6	
0.5	0.3617		-33		
		362			
0.6	0.3979				

วิธีทำ $p = (x - x_0)/h = (0.36 - 0.3)/0.1 = 0.6$

$$f(0.36) = f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$= 0.3053416$$

สูตรการประมาณค่าในช่วง โดยผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

จาก $E^{-1}f_1 = f_{1-1} = f_0$ แล้ว $E^{-p}f_1 = f_{1-p} = f_{1-p} = f_q$

$p = \dfrac{x - x_0}{h}$ ดังนั้น $q = \dfrac{x_1 - x}{h}$

และ $E^{-1} = 1 - \nabla$ สูตรผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังของนิวตัน-เกอร์กอรี (the Newton-Gregory backward difference) คือ

$$f_p = f_1 - q\nabla f_1 + \frac{q(q-1)}{2!}\nabla^2 f_1 - \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\nabla^3 f_1 + \ldots \tag{3.6}$$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงหา $f(0.57)$ จากตาราง 3.11

วิธีทำ $q = \dfrac{x_1 - x}{h} = \dfrac{(0.6 - 0.57)}{0.1} = 0.3$

$$f(0.57) = f_1 - q\nabla f_1 + \frac{q(q-1)}{2!}\nabla^2 f_1 - \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\nabla^3 f_1 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\nabla^4 f_1$$

$$= 0.3874222$$

1.4.3 การประมาณค่าในช่วงแบบเกาส์

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ในทฤษฎีบททวินามสามารถเขียนในรูปแบบ $\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}$ โดย

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)}{r!}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (3.6) จะได้สมการในรูปแบบ

$$f_p = f_0 + p\Delta f_0 + \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}\Delta^2 f_0 + \begin{bmatrix} p \\ 3 \end{bmatrix}\Delta^3 f_0 + \ldots$$

และ $E^{p} = 1 + p\Delta + \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}\Delta^{2} + \begin{bmatrix} p \\ 3 \end{bmatrix}\Delta^{3} + \ldots$

อาจเขียนได้ว่า $E^{p} = 1 + p\Delta + R_2$

เมื่อ $R_2 = \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}\Delta^{2} + \begin{bmatrix} p \\ 3 \end{bmatrix}\Delta^{3} + \begin{bmatrix} p \\ 4 \end{bmatrix}\Delta^{4} + \ldots$

โดยที่ $E^{-1}(1+\Delta) = 1$ ดังนั้น

$$R_2 = \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}E^{-1}(\Delta^{2} + \Delta^{3}) + \begin{bmatrix} p \\ 3 \end{bmatrix}E^{-1}(\Delta^{3} + \Delta^{4}) + \begin{bmatrix} p \\ 4 \end{bmatrix}E^{-1}(\Delta^{4} + \Delta^{5}) + \ldots$$

$$= \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{2} + \left(\begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ 3 \end{bmatrix}\right)E^{-1}\Delta^{3} + \left(\begin{bmatrix} p \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ 4 \end{bmatrix}\right)E^{-1}\Delta^{4} + \ldots$$

จากสูตรทางพีชคณิต $\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ r+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+1 \\ r+1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $R_2 = \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{2} + \begin{bmatrix} p+1 \\ 3 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{3} + \begin{bmatrix} p+1 \\ 4 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{4} + \ldots$

$$= \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{2} + \begin{bmatrix} p+1 \\ 3 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{3} + R_4$$

โดย $R_4 = \begin{bmatrix} p+1 \\ 4 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{4} + \begin{bmatrix} p+1 \\ 5 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{5} + \ldots$

$$= \begin{bmatrix} p+1 \\ 4 \end{bmatrix}E^{-2}(\Delta^{4} + \Delta^{5}) + \begin{bmatrix} p+1 \\ 5 \end{bmatrix}E^{2}(\Delta^{5} + \Delta^{6}) + \ldots$$

$$= \begin{bmatrix} p+1 \\ 4 \end{bmatrix}E^{-2}\Delta^{4} + \left(\begin{bmatrix} p+1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ 5 \end{bmatrix}\right)E^{-2}\Delta^{5} + \ldots$$

$$= \begin{bmatrix} p+1 \\ 4 \end{bmatrix}E^{-2}\Delta^{4} + \begin{bmatrix} p+1 \\ 5 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{5} + \ldots$$

ดังนั้น $E^{p} = 1 + p\Delta + \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{2} + \begin{bmatrix} p+1 \\ 3 \end{bmatrix}E^{-1}\Delta^{3} + \begin{bmatrix} p+1 \\ 4 \end{bmatrix}E^{-2}\Delta^{4} + \begin{bmatrix} p+2 \\ 5 \end{bmatrix}E^{-2}\Delta^{5} + \ldots$

โดย $\Delta f_0 = \delta f_{1/2}, E^{-1}\Delta^{2} f_0 = \delta^{2} f_0, E^{-1}\Delta^{3} f_0 = \delta^{3} f_{1/2}$ และอื่น ๆ

ดังนั้น $f_p = f_0 + p\delta f_{1/2} + \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}\delta^{2} f_0 + \begin{bmatrix} p+1 \\ 3 \end{bmatrix}\delta^{3} f_{1/2}$

$$+ \begin{bmatrix} p+1 \\ 4 \end{bmatrix}\delta^{4} f_0 + \begin{bmatrix} p+2 \\ 5 \end{bmatrix}\delta^{5} f_{1/2} + \ldots$$

หรือ $f_p = f_0 + p\delta f_{1/2} + \dfrac{p(p-1)}{2!}\delta^{2} f_0 + \dfrac{(p+1)p(p-1)}{3!}\delta^{3} f_{1/2}$

$$+ \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{4!}\delta^{4} f_0 + \frac{(p+2)(p+1)p(p-1)(p-2)}{5!}\delta^{5} f_{1/2}$$

$$+ \ldots \tag{3.7}$$

เรียกสูตรการประมาณค่าในช่วงแบบเกาส์ (Gauss' interpolation formula) ซึ่งเป็นสูตรการประมาณค่าในช่วง โดยการใช้ผลต่างสืบเนื่องส่วนกลาง

3.1.4.4 การประมาณค่าในช่วงแบบเบสเซล

สำหรับสูตรการประมาณค่าในช่วง ซึ่งใช้ผลต่างสืบเนื่องส่วนกลาง สูตรอื่น ๆ มีดังนี้สูตรการประมาณค่าในช่วงแบบเบสเซล (Bessel's interpolation formula)

$$
\begin{aligned}
f_p &= f_0 + p\delta f_{1/2} + \frac{p(p-1)}{2!}\frac{\left(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1\right)}{2} + \frac{p(p-1/2)(p-1)}{3!}\delta^3 f_{1/2} \\
&+ \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{4!}\frac{\left(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1\right)}{2} \\
&+ \frac{(p+1)p(p-1/2)(p-1)(p-2)}{5!}\delta^5 f_{1/2} + \ldots
\end{aligned}
$$

3.1.4.5 การประมาณค่าในช่วงแบบเอเวอร์เรตต์

สูตรการประมาณค่าในช่วงแบบเอเวอร์เรตต์ (Everett's formula)

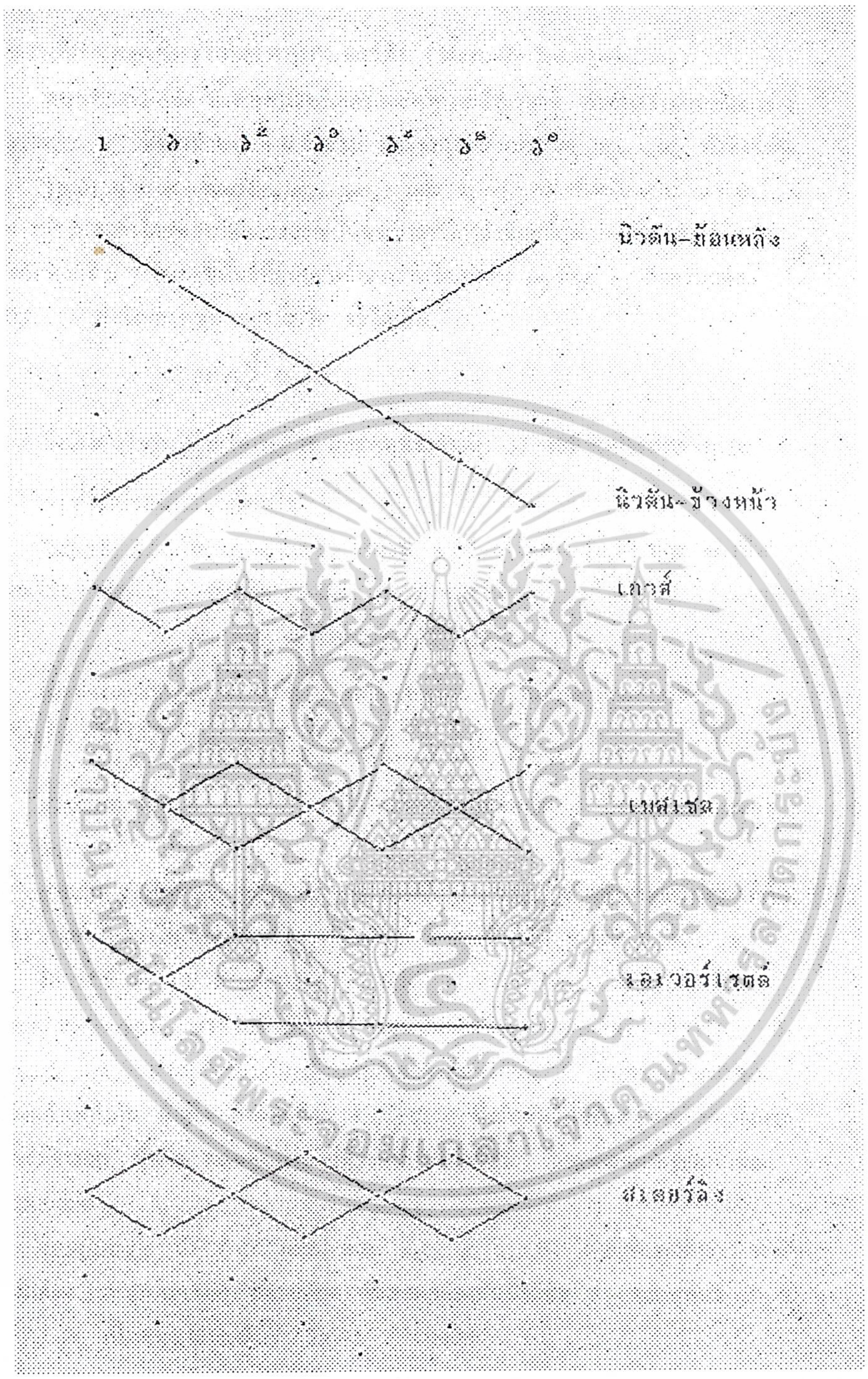
$$
\begin{aligned}
f_p &= f_0 + p\delta f_{1/2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\delta^2 f_0 \\
&+ \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{5!}\delta^4 f_0 + \ldots \\
&+ \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\delta^2 f_1 + \frac{(p+2)(p+1)p(p-1)(p-2)}{5!}\delta^4 f_1 + \ldots
\end{aligned}
$$

3.1.4.6 การประมาณค่าในช่วงแบบสเตอร์ลิง

สูตรการประมาณค่าในช่วงแบบสเตอร์ลิง (Stirling formula)

$$
\begin{aligned}
f_p &= f_0 + \frac{p\left(\delta f_{1/2} + \delta f_{-1/2}\right)}{2} + \frac{1}{2!}p^2\delta^2 f_0 + \frac{p\left(p^2-1\right)}{3!}\frac{\left(\delta^3 f_{1/2} + \delta^3 f_{-1/2}\right)}{2} \\
&+ \frac{p\left(p^2-1\right)}{3!}\frac{\left(\delta^3 f_{1/2} + \delta^3 f_{-1/2}\right)}{2} + \frac{p^2\left(p^2-1\right)}{4!}\delta^4 f_0 \\
&+ \frac{p(p^2-1(p^2-2^2)}{5!}\frac{\left(\delta^5 f_{1/2} + \delta^5 f_{-1/2}\right)}{2} + \ldots
\end{aligned}
$$

และรูปแบบการแทนค่าจากตารางผลต่างสำหรับแต่ละสูตรแสดง ดังนี้



รูปที่ 3.2 รูปแบบการแทนค่าจากตารางผลต่างสำหรับแต่ละสูตร

3.1.5 การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนามแอร์มิต (Hermite Interpolation)

พหุนามแกว่งกวัด ทั้งพหุนามเทย์เลอร์และพหุนามลากรองจ์ กำหนดจำนวนที่แตกต่างกัน $x_0, x_1, \ldots, x_n$ เป็นจำนวน $n+1$ จำนวน และจำนวนเต็มบวก $m_0, m_1, \ldots, m_n$ ถ้าฟังก์ชัน $f = C^m[a,b]$ เมื่อ $m = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$ และ $x_i \in [a,b]$ สำหรับแต่ละ $i = 0, \ldots, n$ แล้วการประมาณค่าโดยพหุนามแกว่งกวัดเป็นพหุนามที่มีกำลังน้อยที่สุด โดยมีคุณสมบัติสอดคล้องกับฟังก์ชั น f และอนุพันธ์ที่มีอันดับน้อยกว่าหรือเท่ากับ m_i ที่จุด x_i สำหรับแต่ละ $i = 0,1,\ldots,n$ กำลังของพหุนามแกว่งกวัด จะได้เป็น

$$M = \sum_{i=o}^{n} m_i + n \quad ,$$

ซึ่งมีเงื่อนไขว่า $\sum_{i=0}^{n} m_i + (n+1)$ และพหุนามอันดับ M จะมีสัมประสิทธิ์จำนวน $M+1$ ค่า ที่ใช้เพื่อสนับสนุนเงื่อนไข

<u>*บทนิยามที่ 3.1*</u> ให้ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ จำนวน $n+1$ ค่าในช่วง $[a,b]$ และ m_i เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งจะมี x_i สำหรับ $i = 0,1,\ldots,n$ กำหนดให้

$$m = \max_{0 \le i \le n} m_i \quad \text{และ} \quad f \in C^m[a,b]$$

การประมาณพหุนามแกว่งกวัด f ก็คือ พหุนาม P ที่มีกำลังน้อยที่สุดซึ่ง

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k}, \quad \text{สำหรับแต่ละ } i = 0,1,\ldots,n \text{ และ } k = 0,1,\ldots,m_i$$

<u>*หมายเหตุ*</u> เมื่อ $n = 0$, การประมาณโดยพหุนามแกว่งกวัด f เป็นพหุนามเทย์เลอร์อันดับ m_0

สำหรับ f ที่จุด x_0 เมื่อ $m_i = 0$ สำหรับ $i = 0,1,\ldots,n$ พหุนามแกว่งกวัด ก็คือการประมาณค่าในช่วงโดยพหุนามลากรองจ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน f บน $x_0, x_1, \ldots, x_n$

ในกรณีที่ $m_i = 1$ สำหรับแต่ละ $i = 0,1,\ldots,n$ เราจะเรียกว่า พหุนามแอร์มิต (Hermite Polynomials) สำหรับฟังก์ชัน f พหุนามเหล่านี้จะไม่สอดคล้องกับฟังก์ชัน f ที่จุด $x_0, x_1, \ldots, x_n$ แต่อนุพันธ์อันดับหนึ่งจะสอดคล้องกับฟังก์ชัน f โดยจะมีลักษณะของฟังก์ชันคล้ายคลึงกัน นั่นคือ ฟังก์ชันที่จุด $(x_i, f(x_i))$ ที่เส้นสัมผัสของพหุนาม และสิ่งแรกที่ควรจะพิจารณา นั่นคือ ทฤษฎีบทต่อไปที่จะกล่าวดังต่อไปนี้ โดยจะอธิบายรูปแบบของพหุนามแอร์มิต

<u>*ทฤษฎีบทที่ 3.3*</u> ถ้า $f \in C^1[a,b]$ และ $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ โดยมีค่าแตกต่าง. จะมีพหุนามเพียง 1 พหุนามของดีกรีที่น้อยที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชัน f และอนุพันธ์ f' ที่จุด $x_0, \ldots, x_n$ เป็นพหุนามของดีกรี $2n+1$ กำหนดให้

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

โดยที่

$$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)]L^2{}_{n,j}(x)$$

และ $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2{}_{n,j}(x)$

โดย $L_{n,j}$ ก็คือ สัมประสิทธิ์ของพหุนามลากรองจ์ดีกรี n อันดับที่ j ฉะนั้น ถ้า $f \in C^{(2n+2)}[a,b]$ แล้ว

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2 \ldots (x - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+1)}(\xi)$$

สำหรับบางค่าของ ξ โดยที่ $a < \xi < b$

<u>*พิสูจน์*</u> จากที่ว่า

$$L_{n,j} = \begin{cases} 0 \ , & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 \ , & \text{ถ้า } i = j \end{cases}$$

เมื่อ $i \neq j$, $H_{n,j}(x_i) = 0$ และ $\hat{H}_{n,j}(x_i) = 0$

โดยที่ $H_{n,i}(x_i) = [1 - 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)] \cdot 1 = 1$

และ $\hat{H}_{n,i}(x_i) = (x_i - x_i) \cdot 1^2 = 0$

ดังนั้น $H_{2n+1}(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} f(x_j) \cdot 0 + f(x_i) \cdot 1 + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \cdot 0 = f(x_i),$

ฉะนั้น H_{2n+1} สอดคล้องกับฟังก์ชัน f ที่จุด $x_0, x_1, \ldots, x_n$

ซึ่งแสดงให้เห็นถึง ความสอดคล้องระหว่าง H'_{2n+1} กับอนุพันธ์ f' ณ จุดใด ๆ โดยที่ $L_{n,j}(x)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $H'_{n,j}(x)$ ดังนั้น $H'_{n,j}(x_i) = 0$ เมื่อ $i \neq j$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $i = j$,

$$\begin{aligned} H'_{n,i}(x_i) &= -2L'_{n,i}(x_i) \cdot L^2{}_{n,i}(x_i) + [1 - 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)] \cdot 2L_{n,i}(x_i)L'_{n,i}(x_i) \\ &= -2L'_{n,i}(x_i) + 2L'_{n,i}(x_i) = 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $H'_{n,j}(x_i) = 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ i และ j

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{n,j}(x_i) &= L^2{}_{n,j}(x_j) + (x_j - x_j) \cdot 2L_{n,j}(x_i)L'_{n,j}(x_j) \\ &= L_{n,j}(x_i)[L_{n,j}(x_i) + 2(x_i - x_j)L'_{n,j}(x_i)], \end{aligned}$$

ฉะนั้น $\hat{H}'_{n,j}(x_i) = 0$ ถ้า $i \neq j$ และ $\hat{H}'_{n,j}(x_j) = 0$

แล้วจะได้

$$H'_{2n+1}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot 0 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} f'(x_j) \cdot 0 + f'(x_i) \cdot 1 = f'(x_i)$$

ดังนั้น H_{2n+1} สอดคล้องกับฟังก์ชัน f และอนุพันธ์ f' ที่จุด $x_0, x_1, \ldots, x_n$

ตัวอย่างที่ 3.10 จากข้อมูลในตาราง 3.12 จงหาค่าประมาณของ $f(1.5)$

ตาราง 3.12

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x)$
0	1.3	0.620086	-0.5220232
1	1.6	0.455402	-0.5698959
2	1.9	0.281818	-0.5811571

วิธีทำ หาพหุนามลากรองจ์ และอนุพันธ์

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{-175}{9}x + \frac{152}{9}$$

$$L'_{2,0}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{175}{9}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{-100}{9}x^2 + 320x - \frac{247}{9}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{-200}{9}x + \frac{320}{9}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}$$

$$L'_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}$$

หาพหุนาม $H_{2,j}$ และ $\hat{H}_{2,j}$,

$$H_{2,0}(x) = [1-2(x-1.3)(-5)]\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$= (10x-12)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x) = 1\cdot\left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x) = 10(2-x)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x) = (x-1.3)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x-1.6)\left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x) = (x-1.9)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

เพราะฉะนั้น

$$H_5(x) = 0.6200860H_{2,0(}(x) + 0.4554022H_{2,1}(x) + 0.2818186H_{2,2}(x)$$
$$-0.5220232\hat{H}_{2,0}(x) - 0.5698959\hat{H}_{2,1}(x) - 0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)$$

แล้วจะหาค่า $f(1.5)$ ได้จาก

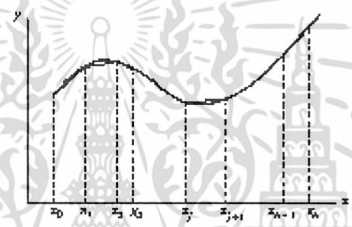
$$H_5(1.5) = 0.6200860\left(\frac{4}{27}\right) + 0.4554022\left(\frac{64}{81}\right) + 0.2818186\left(\frac{5}{81}\right)$$
$$-0.5220232\left(\frac{4}{405}\right) - 0.5698959\left(\frac{-32}{405}\right) - 0.5811571\left(\frac{-2}{405}\right)$$
$$= 0.5118277$$

3.2 การประมาณค่าเป็นช่วง

ในหัวข้อที่ 3.1 ที่กล่าวถึงการประมาณค่าในช่วง คือเมื่อเรามีค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เราจะหาพหุนาม $p(x)$ ที่สอดคล้องกับค่าของฟังก์ชัน และเราใช้พหุนาม $p(x)$ ที่หาได้นี้ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุดอื่น ๆ ได้ โดยมีหลักว่าถ้ามีจำนวนข้อมูล n จำนวน พหุนามที่ใช้ประมาณค่าจะมีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ $n-1$ พหุนามดังกล่าวจะสอดคล้องกับค่าของฟังก์ชันทุกค่า แต่ในหัวข้อนี้เราจะใช้พหุนามที่มีดีกรีต่ำ คือมีดีกรีต่ำกว่า $n-1$ ในการประมาณค่า ดังนั้นพหุนามการประมาณค่าเพียงพหุนามเดียวก็จะไม่สอดคล้องกับค่าของฟังก์ชันทั้งหมด ดังนั้นจึงจำเป็นที่ต้องใช้พหุนามหลายพหุนามต่อกันเพื่อให้สอดคล้องกับค่าของฟังก์ชัน

วิธีการประมาณค่าเป็นช่วงมีดังนี้

3.2.1 สไปล์น (Spline)



รูปที่ 3.3 แสดงช่วงปิด $[a,b]$ ที่มีจุด $x_0,x_1,\ldots,x_n$ เป็นจุดแบ่งช่วงปิด

จากรูปที่ 3.3 กำหนดช่วงปิด $[a,b]$ ที่มีจุด $x_0,x_1,\ldots,x_n$ เป็นจุดแบ่งช่วงปิดเป็นช่วง ๆ และที่ $x_0=a$ และ $x_n=b$ กำหนดพหุนาม

$$P_j(x) \qquad j=0,1,\ldots,n-2$$

สำหรับแต่ละ k ซึ่งเป็นจำนวนเต็มและ $k\ge 1$ ได้ว่า

$$p_{j+1}(x_{j+1})=p_j(x_{j+1}) \qquad j=0,1,\ldots,n-2$$

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน g คือ

$$g(x)=p_j(x) \qquad j=0,1,\ldots,n-2$$

แล้วเราจะเรียก g ว่าพหุนามแบ่งช่วงดีกรี k (piecewise polynomial of degree k) บนช่วงปิด $[a,b]$ และถ้าอนุพันธ์ $g^{(m)}(x)$ ต่อเนื่องสำหรับ $m\le k-1$ เราจะกล่าวว่า g เป็นฟังก์ชันสไปล์นดีกรี k (spline function of degree k) บนช่วงปิด [a,b] หรืออาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันสไปล์นดีกรี k โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 และมีจุด $x_0,x_1,\ldots,x_n$ เป็นจุดแบ่งช่วง ก็คือฟังก์ชัน s ซึ่ง

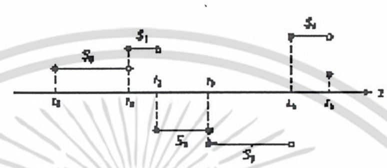
1) ในแต่ละช่วง $[s_{i-1},x_i]$, s จะเป็นพหุนามที่มีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ k

2) s จะมีอนุพันธ์ต่อเนื่องดีกรีที่ $k-1$ บนช่วงปิด $[a,b]$

ถ้า $k = 0$ แล้ว $p_j(x) = c_j$ เป็นสไปล์นดีกรีศูนย์ เป็นค่าคงที่ในแต่ละช่วง โดยมีรูปแบบ

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = c_0, x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) = c_1, x \in [x_1, x_2] \\ . \\ . \\ . \\ s_{n-1}(x) = c_{n-1}, x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

เราจะเรียกจุด $x_0, x_1, ..., x_n$ ที่เป็นจุดแบ่งช่วงนี้ว่าจุดปมหรือจุดน็อท (knot) กราฟของฟังก์ชันสไปล์นที่มีดีกรีศูนย์และมีจุดน็อท 6 จุด เป็นดังนี้

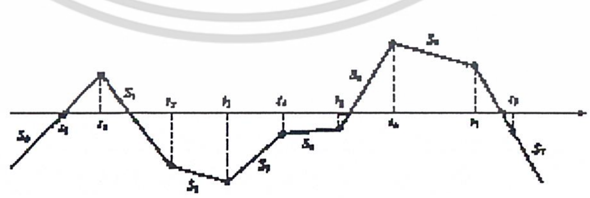


รูปที่ 3.4 แสดงสไปล์นดีกรีศูนย์

ถ้า $k = 1$ แล้ว $p_j(x) = m_j x + c_j$ เป็นสไปล์นที่มีดีกรีหนึ่ง พหุนามในแต่ละช่วงเป็นพหุนามดีกรีหนึ่ง เรียกว่า สไปล์นเชิงเส้น (Linear Spline) มีรูปแบบดังนี้

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = m_0 x + c_0, x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) = m_1 x + c_1, x \in [x_1, x_2] \\ . \\ . \\ . \\ s_{n-1}(x) = m_{n-1} + c_{n-1}, x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

แสดงกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 3.5 แสดงสไปล์นดีกรีหนึ่ง

ถ้า $k = 2$ แล้ว $p_j(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j$ พหุนามในแต่ละช่วงเป็นพหุนามกำลังสองและสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน g บนช่วงปิด $[a,b]$ ในแต่ละช่วงได้ เราจะเรียกว่าเป็น สไปล์นกำลังสอง (quadratic spline)

ในกรณีที่ $k = 3$ ซึ่งเป็นที่นิยมกันมาก เราจะได้ฟังก์ชัน g ในแต่ละช่วงเป็นพหุนามกำลังสามและสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) $P_{j+1}(x_{j+1}) = P_j(x_{j+1})$

2) $P'_{j+1}(x_{j+1}) = P'_j(x_{j+1})$

3) $P''_{j+1}(x_{j+1}) = P''_j(x_{j+1})$ สำหรับ $j = 0,1,2,\ldots,n$

นั่นคือ ฟังก์ชัน g จะมีอนุพันธ์ดีกรีหนึ่งและสองที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ เราจะเรียกว่าเป็นสไปล์นกำลังสาม (Cubic Spline) ต่อไปเราจะหาสูตรสำหรับสไปล์นกำลังสาม $g(x)$ ซึ่ง $g(x_k) = y_k$ สำหรับแต่ละจุด (x_k, y_k) กำหนด $P_j(x)$ ดังนี้

$$P_j(x) = a_j(x-x_j)^3 + b_j(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j, \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{3.8}$$

ถ้า $p_j(x_j) = d_j$ แล้ว $d_j = y_j$ ให้

$$h_j = x_{j+1} - x_j,\ j = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{3.9}$$

และจากเงื่อนไขข้อที่ 1 $P_j(x_{j+1}) = P_{j+1}(x_{j+1})$

นั่นคือ $y_{j+1} = a_j h_j^3 + b_j h_j^2 + c_j h_j + d_j$

ดังนั้น $$y_{j+1} - y_j = a_j h_j^3 + b_j h_j^2 + c_j h_j \tag{3.10}$$

หาอนุพันธ์ดีกรีหนึ่งและสองของ $p_j(x)$ จะได้

$$P'_j(x) = 3a_j(x-x_j)^2 + 2b_j(x-x_j) + c_j \tag{3.11}$$

และ $$P''_j(x) = 6a_j(x-x_j) + 2b_j \tag{3.12}$$

จาก (3.12) แทน $x = x_j$ และให้ $s_j = p''_j(x_j)$ จะได้

$$s_j = p''_j(x_j) = 2b_j \tag{3.13}$$

นำ 2 คูณทั้งสองข้างของสมการ (3.13) จะได้

$$b_j = \frac{s_j}{2} \tag{3.14}$$

จากเงื่อนไขข้อที่ 3 $P''_{j+1}(x_{j+1}) = P''_j(x_{j+1})$

จาก (3.12) แทน $x = x_{j+1}$ จาก (2.2) และให้ $s_{j+1} = P'_{j+1}(x_{I+1})$ จะได้

$$s_{j+1} = 6a_j h_j + 2b_j$$

จาก (3.13) ได้ $s_j = 2b_j$ จะได้ $s_{j+1} = 6a_j h_j + s_j$

ดังนั้นเราสามารถหาค่า a_j ได้คือ $$a_j = \frac{s_{j+1} - s_j}{6h_j} \tag{3.15}$$

แทน (3.12) และ (3.13) ลงในสมการที่ (3.8) จะได้

$$y_{j+1} - y_j = \frac{1}{6}(s_{j+1} - s_j)h_j^2 + \frac{1}{2}s_j h_j^2 + c_j h_j$$

แก้สมการหาค่า c_j ได้

$$c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{1}{6}(s_{j+1} - s_j)h_j + \frac{1}{2}s_j h_j$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{1}{6}(s_{j+1} + 2s_j)h_j \tag{3.16}$$

ถ้าเราทราบค่าของ $s_0, s_1, \ldots, s_n$ เราจะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ a_j, b_j และ c_j ในที่สุดเราก็จะสามารถหา $p_j(x)$ เมื่อเราใช้เงื่อนไข (จากเงื่อนไขข้อที่ 2)

$$P'_{j+1}(x_{j+1}) = P'_j(x_{j+1})$$

เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง s_j

จาก (3.11) แทน $x = x_{j+1}$ จะได้ว่า

$$P'_j(x_{j+1}) = 3a_j h_j^2 + 2b_j h_j + c_j \tag{3.17}$$

และ
$$P'_{j+1}(x_{j+1}) = c_{j+1} \tag{3.18}$$

แทน (3.17) และ (3.18) ในเงื่อนไขข้อที่ 2 จะได้

$$3a_j h_j^2 + 2b_j h_j + c_j = c_{j+1} \tag{3.19}$$

แทนสมการ (3.12) ,(3.15) และ (3.16) ในสมการ (3.19) ได้

$$\frac{s_{j+1} - s_j}{2} h_j + s_j h_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{s_{j+1} + 2s_j}{6} h_j = \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{s_{j+2} + 2s_{j+1}}{6} h_{j+1}$$

จัดรูปใหม่

$$h_j s_j + 2(h_j + h_{j+1})s_{j+1} + h_{j+1}s_{j+2} = 6\left(\frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}\right), j = 0,1,2,\ldots,n-2 \tag{3.20}$$

เมื่อให้
$$\hat{b}_j = 6\left(\frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{y_{j+1} + y_j}{h_j}\right)$$

เราจะได้สมการจำนวน $n-1$ สมการ ที่มี $n+1$ ตัวไม่ทราบค่าคือ $s_0, s_1, \ldots, s_n$ ดังนั้นเราจะกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่จุดปลายเพื่อทำให้เป็นระบบสมการที่มีผลเฉลยและจะมีผลเฉลยที่ถูกต้องเพียงชุดเดียว เรามีวิธีในการกำหนดเงื่อนไขได้หลายวิธีดังนี้

1. $s_0 = s_n = 0$
2. $s_0 = s_1 = 0$ และ $s_n = s_{n-1}$
3. $P'_0(x) = f'(x_0) = y'_0$ และ $P'_{n-1}(x_n) = f'(x_n) = y'_n$

กรณีที่ 1 เลือก $s_0 = s_n = 0$ ก็จะได้ระบบสมการที่มี n สมการ n ตัวไม่ทราบค่า ดังนั้น $s_1, \ldots, s_{n-1}$ ก็จะสามารถหาค่าได้ เมื่อนำมาเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \dots & 0 \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & \dots & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ . \\ . \\ . \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{b}_{n-2} \end{bmatrix}$$

เราอาจเรียกสไปล์นลักษณะนี้ว่า สไปล์นธรรมชาติ (Natural Spline)

<u>*กรณีที่ 2*</u> เลือก $s_0 = s_1$ และ $s_n = s_{n-1}$ นั่นคือ สมมติว่าที่จุดด้านปลายของสมการกำลังสามมีลักษณะเป็นแบบพาราโบลา แล้วสมการแรก ($j = 0$)

$$h_0 s_0 + 2(h_0 + h_1)s_1 + h_1 s_2 = \hat{b}_0$$

เป็น
$$(3h_0 + 2h_1)s_1 + h_1 s_2 = \hat{b}_0$$

ส่วนสมการสุดท้าย ($j = n-2$) เป็น

$$h_{n-2}s_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})s_{n-1} + h_{n-1}s_n = \hat{b}_{n-2}$$

ก็จะได้ระบบสมการที่มี n สมการ n ตัวไม่ทราบค่า ดังนั้น $s_1,\dots,s_{n-1}$ ก็จะสามารถหาค่าได้เมื่อเขียนในรูปเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} (3h_0+2h_1) & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \dots & 0 \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & \dots & & h_{n-2} & (2h_{n-2}+3h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ . \\ . \\ . \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{b}_{n-2} \end{bmatrix}$$

กรณีที่ 3 สมมติให้ความชันที่จุดปลายเป็นค่าคงที่ กำหนดเงื่อนไข $P_0'(x_0) = y_0'$ และ $P_{n-1}'(x_n) = y_n'$

เงื่อนไขนี้จะจำกัดค่าของ s_j ซึ่งมีที่มาดังนี้

$$P_j'(x) = 3a_j(x - x_j)^2 + 2b_j(x - x_j) + c_j$$

แล้ว
$$P_0'(x_0) = c_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{s_1 + 2s_0}{6}h_0$$

ดังนั้น
$$\frac{h_0}{6}(s_1 + 2s_0) = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - y_0' \qquad (3.21)$$

ซึ่ง $P_{n-1}'(x_n) = y_n'$ จะได้ว่า

$$3a_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1} = y_n'$$

แทน a_{n-1}, b_{n-1} และ c_{n-1} โดยหารจากสมการ (2.5), (2.6) และ (2.7) เมื่อทำการจัดสมการใหม่ ในที่สุดจะได้

$$\frac{1}{6}h_{n-1}s_{n-1} + \frac{1}{3}h_{n-1}s_n = y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

นำ 6 คูณทั้งสองข้างได้

$$h_{n-1}s_{n-1} + 2h_{n-1}s_n = 6y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \tag{3.22}$$

เราเพิ่มสมการ (3.21) และ (3.22) เข้าไปในระบบสมการ จะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $n+1$ สมการ และ $n+1$ ตัวไม่ทราบค่า ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ได้ดังนี้
ทั้ง 3 กรณี เมื่อเราทำการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาผลเฉลย เราจะได้ $s_0, s_1, \ldots, s_n$ เป็นผลเฉลยเพียงชุดเดียวของระบบสมการ หลังจากนั้นหาค่า a_i, b_i, c_i และ d_i สำหรับสมการกำลังสามในแต่ละช่วง

$$a_j = \frac{s_{j+1} - s_j}{6h_j}$$

$$b_j = \frac{s_j}{2}$$

$$c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{1}{6}(s_{j+1} + 2s_j)h_j$$

$$d_j = y_j$$

ซึ่งมีที่มาตามที่กล่าวไว้ข้างต้น

<u>*ตัวอย่างที่ 3.11*</u> จากข้อมูลต่อไปนี้จงหาฟังก์ชันสไปล์นกำลังสาม

x	0	1	2	3	4
y	-8	-7	0	19	56

<u>*วิธีทำ*</u> จาก $h_j = x_{j+1} - x_j, j = 0,1,2,\ldots,n-1$

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$$

$$h_1 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$$

$$h_2 = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1$$

$$h_3 = x_4 - x_3 = 4 - 3 = 1$$

จาก $\hat{b}_j = 6\left(\dfrac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \dfrac{y_{j+1} + y_j}{h_j}\right)$

$$\hat{b}_0 = 6\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 + y_0}{h_0}\right) = 6\left(\frac{0-(-7)}{(1)} - \frac{(-7)-(-8)}{(1)}\right) = 36$$

$$\hat{b}_1 = 6\left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 + y_1}{h_1}\right) = 6\left(\frac{19-(0)}{(1)} - \frac{(0)-(-7)}{(1)}\right) = 72$$

$$\hat{b}_2 = 6\left(\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 + y_2}{h_2}\right) = 6\left(\frac{56-19}{1} - \frac{19-0}{1}\right) = 108$$

เราใช้กรณีที่ 1 คือให้ $s_0 = s_n = 0$ นำค่าต่าง ๆ ที่คำนวณได้ แทนลงในเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-2} \end{bmatrix}$$

ได้ $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{bmatrix}$

แก้ระบบสมการได้ $s_0 = 0, s_1 = 6.4285, s_2 = 10.2857, s_3 = 24.4285, s_4 = 0$

หาค่าสัมประสิทธิ์พหุนามได้ดังนี้

จาก $a_j = \dfrac{s_{j+1} - s_j}{6h_j}$

$$a_0 = \frac{s_1 - s_0}{6h_0} = \frac{6.4285 - 0}{6(1)} = 1.0714$$

$$a_1 = \frac{s_2 - s_1}{6h_1} = \frac{10.2875 - 6.4285}{6(1)} = 0.6432$$

$$a_2 = \frac{s_3 - s_2}{6h_2} = \frac{24.4285 - 10.2875}{6(1)} = 2.3568$$

$$a_3 = \frac{s_4 - s_3}{6h_3} = \frac{0 - 24.4285}{6(1)} = 4.0714$$

จาก $b_j = \dfrac{s_j}{2}$

$$b_0 = \frac{s_0}{2} = 0$$

$$b_1 = \frac{s_1}{2} = \frac{6.4285}{2} = 3.21425$$

$$b_2 = \frac{s_2}{2} = \frac{10.2875}{2} = 5.14375$$

$$b_3 = \frac{s_3}{2} = \frac{24.4285}{2} = 12.21425$$

จาก $c_j = \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \dfrac{1}{6}(s_{j+1} - 2s_j)h_j$

$$c_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{1}{6}(s_1 - 2s_0)h_0 = \frac{-7 - (-8)}{1} - \frac{1}{6}(6.4285 - 2(0))(1) = -0.7381$$

$$c_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{1}{6}(s_2 - 2s_1)h_1 = \frac{0 - (-7)}{1} - \frac{1}{6}(10.2875 - 2(6.4285)) = 7.428251$$

$$c_2 = \frac{19 - 0}{1} - \frac{1}{6}(24.4285 - 2(10.2857)) = 18.35715$$

$$c_3 = \frac{56-19}{1} - \frac{1}{6}(0-2(24.4285)) = 45.142833$$

จาก $d_j = y_j$

$d_0 = y_0 = -8$

$d_1 = y_1 = -7$

$d_2 = y_2 = 0$

$d_3 = y_3 = 19$

ดังนี้เราจะได้สไปล์นกำลังสามดังนี้

$$P(x) = \begin{cases} 1.0714x^3 - 0.7381x - 8, 0 \le x \le 1 \\ 0.6432x^3 + 3.21425x^2 + 7.428251x - 7, 1 \le x \le 2 \\ 2.3568x^3 + 5.14375x^2 + 8.35715x, 2 \le x \le 3 \\ 4.0714x^3 + 12.21425x^2 + 45.14587x + 19, 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

3.2.2 สไปล์นในรูปแบบอื่น ๆ (others splines)

จากเนื้อหาในหัวข้อที่ 3.2.1 ที่กล่าวเกี่ยวกับสไปล์น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสไปล์นในรูปแบบอื่น คือ เบซิเยร์ (Bezier) และ บี-สไปล์น (B-Spline) ซึ่งนิยมใช้ในงานคอมพิวเตอร์กราฟฟิกและคอมพิวเตอร์เพื่อการออกแบบ

<u>ความแตกต่างระหว่างสไปล์นดีกรีสามกับเบซิเยร์และบี-สไปล์น</u>

- สไปล์นดีกรีสามจะผ่านเซตของจุดจ้อมูลทั้งหมด แต่เบซิเยร์และบี-สไปล์นจะผ่านจัดข้อมูลบางจุด

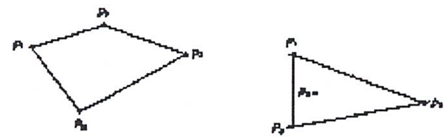
- เราใช้จุดข้อมูล (data point) ในการอธิบายเรื่องสไปล์นดีกรีสาม แต่ในหัวข้อนี้จะใช้จุดควบคุม (control point) ในการอธิบาย

- ในเรื่องสไปล์นดีกรีสาม ถ้าเราเปลี่ยนตำแหน่งของจุดเพียง 1 จุด เส้นโค้งจะเปลี่ยนรูปร่างไปตั้งแต่ตำแหน่งแรกจนดังตำแหน่งสุดท้าย ซึ่งต่างกับเบซิเยร์และบี-สไปล์นคือเปลี่ยนตำแหน่งจุดเพียง 1 จุด เส้นโค้งจะเปลี่ยนรูปร่างไปเพียงบางส่วน กล่าวคือมีผลกระทบเฉพาะที่

<u>คุณสมบัติที่สำคัญ</u>

ทั้งเบซิเยร์และบี-สไปล์นมีคุณสมบัติที่สำคัญ คือ เส้นโค้งจะอยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยมที่เรียกว่า Convex hull

Convex hull ของเซตของจุดต่างๆ คือ convex ที่เล็กที่สุดของเซตที่บรรจุเซตของจุดทั้งหมดดังตัวอย่างในรูปที่ 3.6 แสดง Convex hull ของเซตของจุด 4 จุด



รูปที่ 3.6 แสดง convex hull ของจุด 4 จุด

พิจารณาเฉพาะรูปแบบกำลังสามของเส้นโค้งทั้ง 2 เส้นโค้ง โดยเราจะแทน $y = f(x)$ ในรูปพาราเมตริกที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ด้วยสมการพาราเมตริก 2 สมการ คือ $x = F_1(u)$ และ $y = F_2(u)$ โดยเรียก u ซึ่งเป็นตัวแปรอิสระว่า พารามิเตอร์ ยกตัวอย่างเช่น สมการวงกลม เมื่อให้ θ เป็นพารามิเตอร์ สามารถเขียนดังนี้

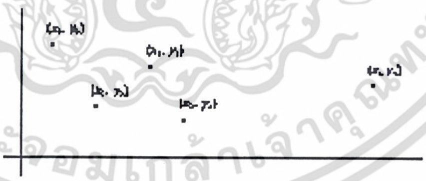
$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

เมื่อ x และ y อยู่ในเทอมของพารามิเตอร์ $u,(x(u),y(u)),0 \le u \le 1$

3.2.2.1 เบซิเยร์ (Bezier)

กำหนดจุดควบคุม (control point) $p_i = (x_i, y_i), i = 0,1,\ldots,n$ (อาจเรียกจุดเหล่านี้ว่าจุดเบซิเยร์)



รูปที่ 3.7 แสดงจุดควบคุม $p_i = (x_i, y_i), i = 0,1,\ldots,n$

เราจะแทนพิกัดของแต่ละจุดด้วย เวกเตอร์ที่มี 2 คอมโพเนนท์ดังนี้

$$p_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

เซตของจุดในรูปพาราเมตริกคือ

$$P(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le 1$$

เมื่อกำหนด n+1 จุด จะได้พหุนามเบซิเยร์ดีกรีที่ n คือ

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-u)^{n-1} u^i p_i , \qquad (3.23)$$

$$\text{เมื่อ} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-1)!} \text{ สำหรับ } n \geq i$$

สำหรับ $n = 2$ จะได้สมการกำลังสอง กำหนดโดยจุด 3 จุด p_0, p_1, p_2

$$P(u) = (1)(1-u)^2 p_0 + 2(1-u)(u)p_1 + (1)u^2 p_2$$

เพราะเมื่อ $n = 2$ แล้ว $i = 0,1,2$ จะได้ $\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1$ จากสมการการข้างต้น สามารถเขียนในรูปของ x และ y ได้ดังนี้

$$x(u) = (1-u)^2 x_0 + 2(1-u)(u)x_1 + (1)u^2 x_2 ,$$

$$y(u) = (1-u)^2 y_0 + 2(1-u)(u)y_1 + (1)u^2 y_2 ,$$

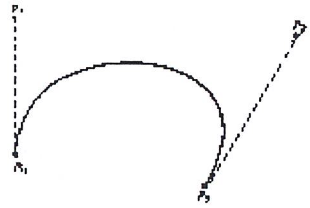
จะสังเกตได้ว่า ถ้า $u = 0, x(0)$ ก็คือ x_0 และ $y(0)$ ก็คือ y_0 ถ้า $u = 1$ จุดที่อ้างอิงถึงคือ (x_2, y_2) จากที่เรากำหนดว่า u มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 จะได้เส้นโค้งที่เริ่มจากจุดแรกไปยังจุดที่สามในเซตของจุด โดยปกติแล้วเส้นโค้งจะไม่ผ่านจุดควบคุมที่อยู่ตรงกลางระหว่างจุดปลาย จากสมการเส้นโค้งเบซิเยร์ดีกรีสองจะเป็นผลบวกถ่วงน้ำหนักของพหุนามทั้งสามพหุนามในเทอมของ u โดยมีปัจจัยถ่วงน้ำหนักคือพิกัดของจุดสามจุด

ด้วยคำนิยามเดียวกัน สามารถนำมาประยุกต์ใช้หาสมการเบซิเยร์เมื่อ $n = 3$ เราจะได้พหุนามเบซิเยร์กำลังสาม ซึ่งมีสมการดังนี้

$$x(u) = (1-u)^3 x_0 + 3(1-u)^2 u x_1 + 3(1-u)u^2 x_2 + u^3 x_3 ,$$

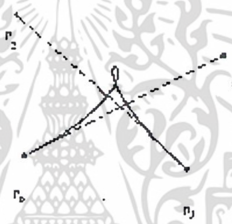
$$y(u) = (1-u)^3 y_0 + 3(1-u)^2 u y_1 + 3(1-u)u^2 y_2 + u^3 y_3 ,$$

สังเกตได้ว่า $(x(0), y(0)) = p_0$ และ $(x(1), y(1)) = p_3$ พิจารณารูปที่ 3.8 เห็นได้ว่าเส้นโค้งไม่ผ่านจุดที่อยู่ระหว่างจุดปลายทั้งสอง จากรูปที่ 3.8(ก) ถึง 3.8(ค) แสดงเส้นโค้งเบซิเยร์ที่กำหนดโดยเซตของจุด 4 จุดเดียวกัน เส้นโค้งจะเปลี่ยนรูปร่างไป เมื่อเปลี่ยนตำแหน่งจุดตรงกลางระหว่างจุดปลายทั้งสอง

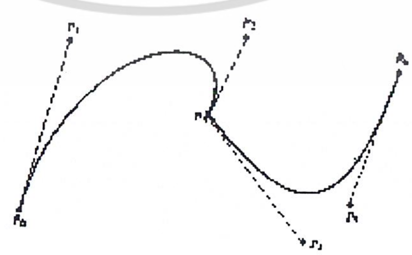


รูปที่ 3.8(ก)

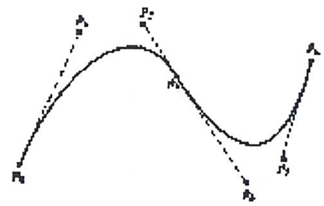
รูปที่ 3.8(ข)



รูปที่ 3.8(ค)



รูปที่ 3.8(ง) จุด p_2, p_3, p_4 ไม่มีคุณสมบัติร่วมกันเชิงเส้น (colinear)



รูปที่ 3.8(จ) จุด p_2, p_3, p_4 มีคุณสมบัติร่วมกันเชิงเส้น (colinear)

รูปที่ 3.8(ง) และ 3.8(จ) แสดงความต่อเนื่องของเส้นโค้งเบซิเยร์ดีกรีสาม โดยมีการแบ่งจุด p_0 ถึง p_6 ออกเป็น 2 กลุ่มๆละ 4 จุด มีจุด p_3 เป็นจุดกลางและเป็นจุดร่วมกันของทั้งสองกลุ่ม รูปที่ 3.8(ง) แสดงว่า p_2, p_3 และ p_4 เป็นมีคุณสมบัติรวมกันเชิงเส้น (colinear) เพื่อให้เกิดความต่อเนื่อง
ที่ p_3

คุณสมบัติของเบซิเยร์กำลังสาม

1. $P(0) = p_0, \quad p(1) = p_3$
2. เนื่องจาก $dx/du = 3(x_1 - x_0)$ และ $dy/du = 3(y_1 - y_0)$ ที่ $u = 0$ ดังนั้นความชันของเส้นโค้งที่จุด $u = 0$ คือ $dy/dx = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ ซึ่งเป็นความชันของ secant line ระหว่าง p_0 กับ p_1 ในทำนองเดียวกันกับความชันเมื่อ $u = 1$ คือความชันชองเส้นตรงที่ลากระหว่างจุดสองจุดสุดท้าย ในรูปแสดงโดยเส้นประ
3. เส้นโค้งเบซิเยร์จะบรรจุดยู่ใน Convex hull ที่ได้จากจุด 4 จุด

เราจะแสดงสมการเบซิเยร์ในรูปเมตริกซ์ สำหรับเบซิเยร์ดีกรีสามมีรูปแบบดังนี้

$$P(u) = 1/6[u^3, u^2, u, 1]\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$= u^T M_2 / 6$$

3.2.2.2 เบซิเยร์-เบิร์นสไตน์ (Bezier-Bernstein)

พิจารณาสมการเบซิเยร์จากสมการ (3.23)

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} u^i p_i,$$

เราอาจเขียนในรูป $P(u) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) p_i$

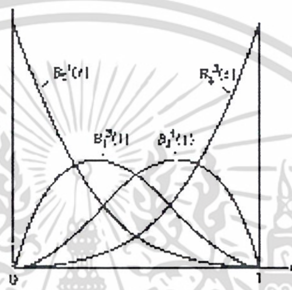
เราเรียก $B_i^n(u)$ ว่าพหุนามเบิร์นสไตน์ โดยพหุนามเบิร์นสไตน์ที่ i กำหนดได้ดังนี้

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^k$$

เมื่อ $\binom{n}{i}$ คือ สัมประสิทธิ์ทวินาม

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-1)!} \text{ สำหรับ } n \geq i$$

รูปที่ 3.9 แสดงพหุนามเบิร์นสไตน์ดีกรี 3 จำนวน 4 พหุนาม สำหรับ u มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1



รูปที่ 3.9 แสดงพหุนามเบิร์นสไตน์ดีกรี 3

3.2.2.3 บี-สไปล์น

บี-สไปล์นจะเหมือนกับเบซิเยร์คือ เส้นโค้งไม่ต้องผ่านจุดข้อมูลที่กำหนดให้ทั้งหมด และมีหลายดีกรี แต่ที่จะกล่าวถึงคือรูปของดีกรีสาม บี-สไปล์นดีกรีสามคล้ายกับสไปล์นดีกรีสามในหัวข้อ 3.2.1 คือ สมการกำลังสามในแต่ละส่วนจะได้จากจุดข้อมูลแต่ละคู่ของเซตข้อมูล

เราจะกล่าวถึงรายละเอียดจากสูตรของสไปล์นดีกรีสาม ในรูปสมการพาราเมตริกที่มีพารามิเตอร์ คือ u กำหนด $p_i = (x_i, y_i), i = 0,1,\ldots,n$ สมการของบี-สไปล์นดีกรีสามในช่วง $(p_i, p_{i+1}), i = 1,2,\ldots,n-1$ คือ

$$B_i(u) = \sum_{k=-1}^{2} b_k p_{i+k}$$

ซึ่ง
$$\begin{aligned} b_{-1} &= (1-u)^3/6 \\ b_0 &= u^3/2 - u^2 + 2/3 \\ b_1 &= -u^3/2 + u^2/2 + u/2 + 1/6 \\ b_2 &= u^3/6 \qquad 0 \leq u \leq 1 \end{aligned} \tag{3.24}$$

จากที่เรากล่าวว่า p_i คือ จุด (x_i, y_i) ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มี 2 คอมโพเนนท์ สัมประสิทธิ์ b_k เป็นตัวพื้นฐานจะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเปลี่ยนคู่ของจุดไปยังคู่ต่อไป สังเกตได้ว่าเราสามารถที่จะนำ

ปัจจัยถ่วงน้ำหนัก มาประยุกต์ใช้กับพิกัดของทั้ง 4 จุด ผลบวกถ่วงน้ำหนักจะเป็นตัวสร้างเส้นโค้ง เมื่อ u เปลี่ยนค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1

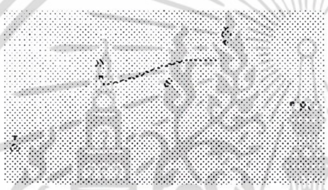
จากสมการ (2.16) สามารถเขียนสมการสำหรับค่า x และ y ได้ดังนี้

$$x_i(u) = \frac{1}{6}(1-u)^3 x_{i-1} + \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4)x_i - \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)x_{i+1} + \frac{1}{6}u^3 x_{i+2}.$$

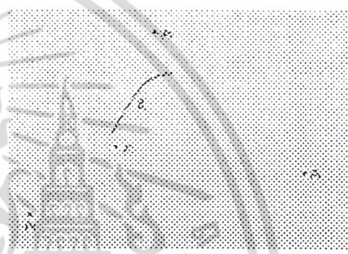
$$y_i(u) = \frac{1}{6}(1-u)^3 y_{i-1} + \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4)y_i - \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)y_{i+1} + \frac{1}{6}u^3 y_{i+2}.$$

สังเกตได้ว่า $x_i(u)$ เป็นฟังก์ชันของ u และ x_i, y_i เป็นคอมโพเนนท์ของจุด p_i

u-cubic ทำหน้าที่เป็นปัจจัยถ่วงน้ำหนักบนจุดทั้ง 4 จุดตามลำดับในการสร้างเส้นโค้ง ยกตัวอย่าง เช่น ที่ $u = 0$ ค่าถ่วงน้ำหนักที่ได้คือ 1/6,2/3,1/6 และ 0 , ที่ $u = 1$ ค่าถ่วงน้ำหนักคือ 0,1/6,2/3 และ1/6 ค่าเหล่านี้จะเปลี่ยนไปตลอดช่วงตั้งแต่ $u = 0$ ถึง $u = 1$



รูปที่ 3.10(ก) แสดงบี-สไปล์น ที่เกิดจากจุด 4 จุด



รูปที่ 3.10(ข) แสดงบี-สไปล์นที่เกิด จากการเปลี่ยนตำแหน่งจุด p_2 จากรูปที่ 3.10(ก)

เมื่อพิจารณาบี-สไปล์นที่เกิดจากจุด 4 จุด ในรูป 3.10(ก) และ 3.10(ข) แสดงถึงผลกระทบที่เกิดขึ้นเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งจุดเพียง 1 จุด คือเลื่อนจุด p_2 ขึ้นไปข้างบนทางด้านซ้ายเส้นโค้งเปลี่ยนรูปตาม

เมื่อเรามีจุด p_0, p_1, p_2, p_3 เราจะสามารถสร้างเส้นโค้ง B_1 เป็นการสร้างเส้นโค้งบี-สไปล์นจากเซตของจุด 4 จุดเราจะมาศึกษาว่าการสร้างเส้นโค้งจากจุดมากกว่า 4 จุด เราใช้วิธีเดียวกับสไปล์นดีกรีสาม เมื่อสร้างเส้นโค้งจากเซตของจุด 4 จุดแรกเสร็จแล้ว ก็จะสร้างเส้นโค้งจากเซตของจุด 4 จุดใหม่ โดยที่เซตของจุด 4 จุดใหม่นี้ได้จากการนำเอาจุดแรกของเซตเก่าออกแล้วเพิ่มจุดต่อไปเข้าไปเป็นจุดใหม่ ทำเช่นนี้ไปจนหมดเซตของจุด

รูปที่ 3.11 การต่อกันระหว่างบี-สไปล์นสามส่วน

รูปที่ 3.11 แสดงการต่อกันระหว่างเส้นโค้ง 3 ส่วนของบี-สไปล์น การต่อกันระหว่างเส้นโค้งบี-สไปล์นในแต่ละส่วนมีเงื่อนไขที่คล้ายกับสไปล์นดีกรีสามในหัวข้อ 3.2.1 ดังรูปที่ 3.10 แสดงความต่อเนื่องระหว่างเส้นโค้งบี-สไปล์นทั้งสามส่วน

คุณสมบัติของบี-สไปล์น

1. เช่นเดียวกับสไปล์นดีกรีสาม บี-สไปล์นจะแบ่งเป็นช่วงๆ โดยที่ตำแหน่งร่วมกันจะมีลักษณะดังนี้

   a) $B_i(1) = B_{i+1}(0) = (p_i + 4p_{i+1} + p_{i+2})/6.$

   b) $B_i'(1) = B_{i+1}'(0) = (-p_i + p_{i+2})/2.$

   c) $B_i''(1) = B_{i+1}''(0) = (p_i - 2p_{i+1} + p_{i+2}).$

   ตัวห้อยท้ายในที่นี้หมายถึงส่วนต่างๆ ของเส้นโค้ง และจุดต่างๆ ในรูปที่ 3.11

2. ในแต่ละส่วนของเส้นโค้งที่เกิดจากแต่ละกลุ่มของจุด 4 จุด จะอยู่ภายใน convex hull ของจุดเหล่านั้น

ต่อไปเราจะพิจารณาที่จุดปลายของเส้นโค้ง เมื่อเรามีจุด p_0 ถึง p_n จากที่กล่าวเราจะสามารถสร้างเส้นโค้งบี-สไปล์น B_1 ถึง B_{n-2} แต่ยังเหลือที่จุดปลาย เราต้องการสร้าง B_0 และ B_{n-1} เราจะยังใช้วิธีการเดิมโดยเพิ่มจุดหลอกๆ (ไม่มีจริงในเซตของข้อมูล) เข้าไปจากจุดข้อมูลเดิม โดยเส้นโค้งใหม่ที่ได้จะไม่เชื่อมพอดีแต่จะมีจุดเริ่มและจุดสิ้นสุดที่จุดปลาย

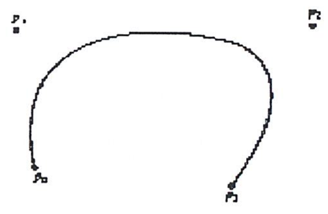
กล่าวคือเราเพิ่มจุด p_{-2}, p_{-1}, p_{n+1} และ p_{n+2}

เมตริกซ์สำหรับสมการบี-สไปล์น

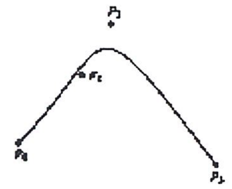
$$B_i(u) = 1/6[u^3, u^2, u, 1]\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \end{bmatrix}$$

$$= u^T M_b p / 6$$

ใช้กับช่วงปิด [0,1] และจุด (p_i, p_{i+1}) เราจะพิจารณาตัวอย่างบี-สไปล์นในรูป 3.11 ซึ่งเซตของจุดเป็นเซตเดียวกับตัวอย่างของเบซิเยร์

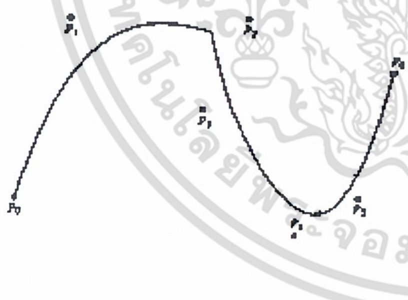


รูปที่ 3.12 (ก)



รูปที่ 3.12(ข)

รูปที่ 3.12(ค)



รูปที่ 3.12(ง)

รูปที่ 3.12(จ)

ความแตกต่างระหว่างบี-สไปล์นกับเบซิเยร์

1. สำหรับบี-สไปล์น เส้นโค้งจะไม่เริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดปลาย
2. ความชันของเส้นโค้งบี-สไปล์นไม่มีความสัมพันธ์อย่างง่ายกับเส้นที่ลากระหว่างจุด
3. จุดสิ้นสุดของบี-สไปล์นจะอยู่ใกล้จุดกลางของจุดที่กำหนดให้ จะเป็นพิกัดของ x และพิกัดของ y ที่จุดจบ ในบางครั้งก็เท่ากับพิกัดของจุดกลาง

3.3 การประมาณค่าด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด

พิจารณาปัญหาของการประมาณค่าฟังก์ชันโดยกำหนดจุดต่างๆ จากตารางข้างล่างนี้ แสดงข้อมูลจากการทดลองดังนี้

ตาราง 3.13

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.3	3.5	4.2	5.0	7.0	8.9	10.1	12.5	13.0	15.6

การประมาณค่าเพื่อหาพหุนามที่สามารถประมาณค่า y_i สำหรับ $i = 1,2,3,\ldots,10$ จากรูปที่ 3.13 แสดงกราฟจากตารางข้างบน เมื่อพิจารณากราฟจะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งไม่มีเส้นตรงใดที่จะผ่านจุดข้อมูลเหล่านี้ได้พอดี ดังนั้นในการแก้ปัญหานี้ เราจะหาเส้นที่เหมาะสมที่สุดที่สามารถใช้เป็นพหุนามประมาณค่า ถึงแม้ว่าพหุนามที่ได้นั้นจะไม่ผ่านจุดข้อมูลใดๆ เลย

รูปที่ 3.13 แสดงจุดของข้อมูลจากตาราง 3.13

ให้ $ax_i + b$ แทนค่าที่ i ของพหุนามประมาณค่าและ y_i เป็นค่าที่ i จากค่า y ที่กำหนดให้ การหาพหุนามประมาณค่าเชิงเส้นที่เหมาะสมที่สุดก็คือ หาค่า a และ b ที่ทำให้

$$\max_{i=1,2,\ldots,10}\left\{\left|y_i - (ax_i + b)\right|\right\} \quad \text{มีค่าน้อยที่สุด}$$

ซึ่งก็คือปัญหา minimax ซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้โดยวิธีพื้นฐานโดยทั่วไป จึงมีอีกวิธีหนึ่งที่ใช้หาการประมาณค่าเชิงเส้นที่ดีที่สุด โดยการหาค่า a และ b ที่ทำให้

$$\sum_{i=1}^{10}\left|y_i - (ax_i + b)\right| \quad \text{มีค่าน้อยที่สุด}$$

เราเรียก $\sum_{i=1}^{10}\left|y_i-(ax_i+b)\right|$ ว่า ส่วนเบี่ยงเบนสมบูรณ์ ทำให้ส่วนเบี่ยงเบนสมบูรณ์มีค่าน้อยที่สุด โดย

$$0=\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{10}\left|y_i-(ax_i+b)\right|$$

และ

$$0=\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{10}\left|y_i-(ax_i+b)\right|$$

ซึ่งปัญหาที่เกิดจากวิธีนี้ คือ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุดศูนย์ ทำให้คำตอบของทั้งสอง สมการไม่สามารถหาได้

จึงหาวิธีใหม่โดยเราจะนำเอาค่าความคลาดเคลื่อนมาคิด โดยค่าความคลาดเคลื่อนได้จากผลบวกของกำลังสองของผลต่างระหว่างค่า y ของพหุนามประมาณค่ากับค่า y ที่กำหนดมาให้ โดยเราจะหาค่าคงที่ a และ b ที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อน

$$\sum_{i=1}^{10}[y_i-(ax_i+b)]^2 \quad \text{มีค่าน้อยที่สุด}$$

รูปแบบทั่วไปของการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด คือเมื่อกำหนดเซตของจุด $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{m}$ เพื่อทำให้ $\sum_{i=1}^{10}[y_i-(ax_i+b)]^2$ มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นกับพารามิเตอร์ a และ b ทำให้ $\sum_{i=1}^{10}[y_i-(ax_i+b)]^2$ มีค่าน้อยที่สุด

$$0=\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{10}[y_i-(ax_i+b)]^2 = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i-ax_i-b)(-x_i) \qquad (3.25)$$

และ

$$0=\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{10}[y_i-(ax_i+b)]^2 = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i-ax_i-b)(-1) \qquad (3.26)$$

(เมื่อ m คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด)

จัดรูปสมการใหม่เป็น

$$a\sum_{i=1}^{m}x_i^2+b\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i$$

$$a\sum_{i=1}^{m}x_i+b\cdot m=\sum_{i=1}^{m}y_i \qquad (3.27)$$

เราเรียกทั้งสองสมการนี้ว่า สมการปกติ เป็นระบบสมการที่มี 2 สมการ 2 ตัวไม่ทราบค่า เราสามารถใช้สูตรในการหาตัวไม่ทราบค่า

$$a=\frac{m(\sum_{i=1}^{m}x_iy_i)-(\sum_{i=1}^{m}x_i)(\sum_{i=1}^{m}y_i)}{m(\sum_{i=1}^{m}x_i^2)-(\sum_{i=1}^{m}x_i)^2} \qquad (3.28)$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^{m} x_i^2)(\sum_{i=1}^{m} y_i) - (\sum_{i=1}^{m} x_i y_i)(\sum_{i=1}^{m} x_i)}{m(\sum_{i=1}^{m} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2} \tag{3.29}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.12</u> จากตัวอย่างข้อมูลในตารางข้างบน เราใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด โดยหาผลบวกของค่าในตารางดังนี้

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากลักษณะของเส้นกราฟจากรูป 3.13 เป็นเส้นตรง เราใช้การประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดที่มีดีกรีหนึ่ง คำนวณหาค่าต่างๆ แล้วแทนลงในสูตร (3.28) และ (3.29)

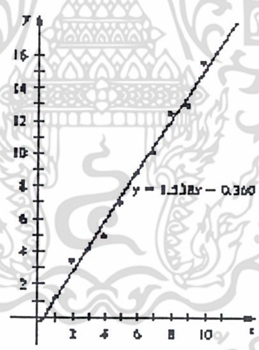
$$n = 10, \sum_{i=1}^{10} x_i = 55, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = .385, \sum_{i=1}^{10} y_i = 81.0, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 872.4$$

ทำให้ได้ว่า

$$a = \frac{10(572.4) - (55)(81)}{10(385) - (55)^2} = 1.538$$

และ $$b = \frac{385(81) - 55(572.4)}{10(385) - (55)^2} = -0.360$$

เราจะได้พหุนาม $p(x) = 1.538 + 0.360x$ ซึ่งแสดงกราฟและจุดข้อมูลได้ดังรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 แสดงกราฟของพหุนาม $p(x) = 1.538 + 0.360x$
และจุดข้อมูลจากตาราง 3.14

ที่กล่าวมาเป็นการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดที่มีดีกรีหนึ่ง ต่อไปจะกล่าวถึงรูปแบบโดยทั่วไปของปัญหาในการประมาณค่า เมื่อกำหนดเซตของจุด $\{(x_i, y_i) | i = 1,2,\ldots,n\}$ จะมีพหุนาม $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ที่มีดีกรี $n < m-1$ เราจะใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด เหมือนกับที่กล่าวมา เพื่อหาค่าคงที่ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด

$$E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - P_n(x_i))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} P_n(x_i) y_i + \sum_{i=1}^{m} (P_n(x_i))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j\right) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}\right)$$

เช่นเดียวกับในกรณีของดีกรีหนึ่ง ต้องการทำให้ E มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ $\partial E / \partial a_j = 0$ สำหรับแต่ละ $j = 0,1,\ldots,n$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j \atop k}$$

จัดรูปสมการได้เป็นสมการปกติที่มี $n+1$ สมการ $n+1$ ตัวไม่ทราบค่า

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{k=1}^{m} y_i x_i^j, \ j = 0,1,\ldots,n \qquad (3.30)$$

เราอาจเขียนเป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \ldots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \ldots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \ldots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n \qquad (3.31)$$

จะได้ผลเฉลยที่ถูกต้องเพียงชุดเดียวคือ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เราจะได้พหุนามประมาณค่าคือ

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$$

<u>*ตัวอย่างที่ 3.13*</u> จากข้อมูลในตาราง 3.14 จงใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเพื่อหาพหุนามประมาณค่า

<u>*ตาราง 3.14*</u>

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2.105	2.808	3.614	4.604	8.857	7.451	6.457	11.985

โดยใช้พหุนาม $y = a + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$

<u>*วิธีทำ*</u> ได้จำนวนข้อมูลคือ $m = 8$ ต้องการพหุนามประมาณค่าดีกรีสาม ดังนั้นเราจะได้สมการปกติ $n = 4$ สมการ จาก (3.31) ได้ดังนี้

$$8a_0 + a_1\sum_{i=1}^{8} x_i + a_2\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + a_3\sum_{i=1}^{8} x_i^3 = \sum_{i=1}^{8} y_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{8} x_i + a_1\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{8} x_i^3 + a_3\sum_{i=1}^{8} x_i^4 = \sum_{i=1}^{8} y_i x_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{8} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{8} x_i^4 + a_3\sum_{i=1}^{8} x_i^5 = \sum_{i=1}^{8} y_i x_i^2$$

$$a_0\sum_{i=1}^{8} x_i^3 + a_1\sum_{i=1}^{8} x_i^4 + a_2\sum_{i=1}^{8} x_i^5 + a_3\sum_{i=1}^{8} x_i^6 = \sum_{i=1}^{8} y_i x_i^3$$

คำนวณหาสัมประสิทธิ์

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 36, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 204, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^3 = 1296$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^4 = 8772, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^5 = 61776, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^6 = 416964$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_i = 47891, \quad \sum_{i=1}^{8} y_i x_i = 273119, \quad \sum_{i=1}^{8} y_i x_i^2 = 1765111 \quad \sum_{i=1}^{8} y_i x_i^4 = 12141845$$

แทนสัมประสิทธิ์ที่คำนวณได้ลงในสมการปกติ

$$8a_0 + 36a_1 + 204a_2 + 1296a_4 = 47891$$

$$36a_0 + 204a_1 + 1296a_2 + 8772a_4 = 273119$$

$$204a_0 + 1296a_1 + 8772a_2 + 61776a_4 = 1765111$$

$$1296a_0 + 8772a_1 + 61776a_2 + 446964a_4 = 12141845$$

ได้ผลเฉลยของระบบสมการ

$$a_0 = 1.426, a_1 = 0.693, a_2 = -0028, a_3 = 0.013$$

ดังนั้นพหุนามประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดคือ

$$y = 0.013x^3 - 0.028x^2 + 0.693x + 1.426$$

ตัวอย่างที่ 3.14 จากข้อมูลในตาราง 3.15 จงใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเพื่อหาพหุนามประมาณค่าที่มีดีกรีสอง

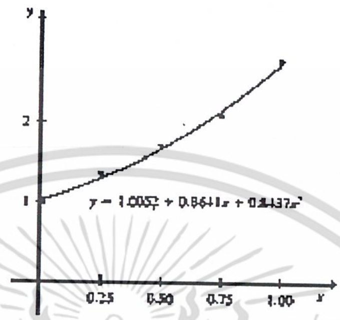
ตาราง 3.15

x_i	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7153

วิธีทำ ได้ $m=5$ เมื่อคำนวณหาค่าต่างๆ เราจะได้สมการปกติ (จาก 3.31) ที่มี 3 สมการ 3 ตัวไม่ทราบค่า คือ a_0, a_1, a_2

$$5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680$$
$$2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514$$
$$1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015$$

เมื่อแก้สมการจะได้ผลเฉลยเพียงชุดเดียวคือ $a_0 = 1.0052, a_1 = 0.8641, a_2 = 0.8437$
ดังนั้นพหุนามประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด มีดีกรีสองสำหรับข้อมูลที่กำหนดให้คือ
$P_2(x) = 1.0052 + 0.8641x + 0.8437x^2$ ซึ่งกราฟแสดงในรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 แสดงกราฟของพหุนาม $P_2(x) = 1.0052 + 0.8641x + 0.8437x^2$
และจุดข้อมูลจากตารางที่ 3.16

ในการประมาณค่าบางครั้งความสัมพันธ์ของข้อมูลมีลักษณะเป็นแบบเอ็กซ์โพเนนท์เชียล ดังนั้นแบบของพหุนามประมาณค่าจะอยู่ในรูป

เส้นโค้งชี้กำลัง $y = be^{ax}$ (3.32)

หรือเส้นโค้งเรขาคณิต $y = bx^a$ (3.33)

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่ ความยากลำบากในการนำเอาวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมาใช้คือการที่จะทำให้ $E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - be^{ax})^2$ มีค่าน้อยที่สุด ในกรณีของสมการ (3.32)

และ $E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - bx_i^a)^2$ มีค่าน้อยที่สุด ในกรณีของสมการ (3.33)

จะได้สมการปกติ

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m} (y_i - be^{ax_i})(-e^{as_i})$$

และ $$0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m} (y_i - be^{ax_i})(-bx_i e^{as_i})$$ ในกรณีของสมการ (3.32)

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m} (y_i - bx_i^a)(-x_i^a)$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m} (y_i - bx_i^a)(-b(\ln\ x_i)x_i^a)$$ ในกรณีของสมการ (3.33)

จะไม่มีผลเฉลยที่ถูกต้องสำหรับระบบสมการ

จึงมีวิธีที่ง่ายกว่า คือสำหรับข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ในแบบเอ็กซ์โพเนนท์เชียล เราจะพิจารณาในรูปของลอการิทึม

จาก (3.32) $\ln\ y = \ln\ b + ax$

จาก (3.33) $\ln\ y = \ln\ b + a\ \ln x$

ทั้ง 2 กรณีเห็นได้ว่าเป็นปัญหาเชิงเส้น ทำการแก้สมการหาผลเฉลยสำหรับค่า $\ln\ b$ และ a โดยใช้สมการปกติจาก (3.28) และ (3.29) และสามารถหาผลเฉลยได้

$$a = \frac{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \ln y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \ln y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2} \tag{3.34}$$

$$\ln b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \ln y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \ln y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2} \tag{3.35}$$

ในกรณีของสมการ (3.32)

<u>ตัวอย่างที่ 3.15</u> กำหนดข้อมูลในตารางข้างล่างนี้ เพื่อประมาณค่า

$y = be^{ax}$ or $\ln\ y = \ln\ b + ax$

<u>ตาราง 3.16</u>

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	5.10	5.79	6.53	7.48	8.46

<u>วิธีทำ</u> จำนวนข้อมูล $m = 5$ คำนวณหาค่าต่างๆ เพื่อแทนลงในสูตร (3.34) และ (3.35)

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 7.50\ ,\ \sum_{i=1}^{m} \ln y_i = 9.404\ ,\ \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 11.875, \sum_{i=1}^{m} x_i \ln y_i = 14.422$$

แทนค่าในสูตร

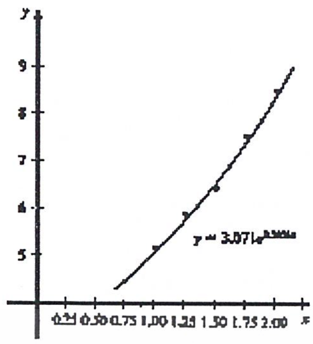
$$a = \frac{(5)(14.422) - (7.5)(9.404)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 0.5056$$

$$\ln b = \frac{(11.875)(9.404) - (14.422)(7.5)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 1.122$$

นั่นคือ $b = e^{1.122} = 3.071$ ได้ฟังก์ชันประมาณค่า คือ

$$y = 3.071e^{0.5056x}$$

แสดงรูปกราฟได้ดังรูป



รูปที่ 3.16 แสดงกราฟของพหุนาม $y = 3.071e^{0.5056x}$
และจุดข้อมูลจากตาราง 3.17

3.4 การประมาณค่าด้วยพหุนามเชิงตั้งฉาก

<u>*นิยามที่ 3.2*</u> ให้ $p_k(x)$ เป็นพหุนามกำลัง k เรียก $p_k(x)$ ว่าเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้า

$$\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$$

เมื่อ $q_m(x)$ เป็นพหุนามกำลัง m ใดๆที่ $m \le k-1$

<u>*นิยามที่ 3.3*</u> ให้ $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots p_k(x), \ldots$ เป็นอันดับของพหุนาม เรียกอันดับของพหุนามนี้ว่า อันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้าทุก ๆ พหุนาม $p_k(x)$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉาก ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$

<u>*ทฤษฎีบทที่ 3.4*</u> พหุนาม $p_k(x)$ ที่ทำให้ $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$ สำหรับทุก ๆ พหุนาม $q_m(x)$ ที่ $m \le k-1$ มีจริงและเป็นได้อย่างเดียว (ยกเว้นพหุนามที่เป็นผลคูณของ $p_k(x)$ กับค่าคงที่ใดๆ)

<u>*พิสูจน์*</u> สิ่งที่ต้องการคือ

$$\int_a^b w(x)(a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)\cdot 1\, dx = 0$$

$$\int_a^b w(x)(a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)\cdot x\, dx = 0$$

$$\int_a^b w(x)(a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)\cdot x^2 dx = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\int_a^b w(x)(a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)\cdot x^{k-1}dx = 0$$

ถ้าให้ $c_i = \int_a^n w(x)x^i dx$ เมื่อ $k - 0,1,2,\ldots$

$$\therefore a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_{k-1}c_{k-1} = -c_k$$

$$a_0c_1 + a_1c_2 + a_2c_3 + \ldots + a_{k-1}c_k = -c_{k-1}$$

$$a_0c_2 + a_1c_3 + a_2c_4 + \ldots + a_{k-1}c_{k-1} = -c_{k-2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_0c_{k-1} + a_1c_k + a_2c_{k+1} + \ldots + a_{k-1}c_{2k-2} = -c_{2k-1}$$

$\therefore$ มีสมการอยู่ k สมการและมีตัวไม่ทราบค่าอยู่ k ตัว คือ $a_0, a_1, \ldots a_{k-1}$

ให้ c เป็นเมตริกซ์ขนาด $k \times k$

$$c = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_k \\ c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_{k+1} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \ldots & c_{2k-2} \end{bmatrix}$$

ต้องพิสูจน์ว่า $|c| \neq 0$

ถ้า $|c| \neq 0$ แล้ว $a_0, a_1, \ldots a_{k-1}$ มีจริงและมีเพียงชุดเดียว

$\therefore p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k$ มีจริงและมีเพียงชุดเดียว

สมมติว่า $|c| = 0$

สามารถหา $b_0, b_1, \ldots b_{k-1}$ ที่ทำให้

$$\therefore b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_{k-1}c_{k-1} = -c_k$$

$$b_0c_1 + b_1c_2 + b_2c_3 + \ldots + b_{k-1}c_k = -c_{k-1}$$

$$b_0c_2 + b_1c_3 + b_2c_4 + \ldots + b_{k-1}c_{k-1} = -c_{k-2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$b_0c_{k-1} + b_1c_k + b_2c_{k+1} + \ldots + b_{k-1}c_{2k-2} = -c_{2k-1}$$

นั่นคือ

$$\int_a^b w(x)(b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1}) \cdot 1\ dx = 0 \quad (1)$$

$$\int_a^b w(x)(b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1}) \cdot x\ dx = 0 \quad (2)$$

$$\int_a^b w(x)(b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1}) \cdot x^2 dx = 0 \quad (3)$$

. .

. .

. .

$$\int_a^b w(x)(b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1}) \cdot x^{k-1} dx = 0 \quad (k)$$

$(1) \times b_0$, $\int_a^b w(x)(b_0^2 + b_0 b_1 x + b_0 b_2 x^2 + \ldots + b_0 b_{k-1} x^{k-1}) \cdot 1\ dx = 0$ (k+1)

$(2) \times b_1$, $\int_a^b w(x)(b_1 b_o + b_1^2 x + b_1 b_2 x^2 + \ldots + b_1 b_{k-1} x^{k-1}) \cdot x\ dx = 0$ (k+2)

$(3) \times b_2$, $\int_a^b w(x)(b_2 b_o + b_2 b_1 x + b_2^2 x^2 + \ldots + b_2 b_{k-1} x^{k-1}) \cdot x^2 dx = 0$ (k+3)

$(k) \times b_{k-1}$, $\int_a^b w(x)(b_{k-1} b_o + b_{k-1} b_1 x + b_{k-1} b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1}^2 x^{k-1}) \cdot x^{k-1} dx = 0$ (2k)

นำสมการ (k+1)+(k+2)+(k+3)+…+(2k) จะได้

$$\int_a^b w(x)(b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1})^2 dx = 0$$

แต่ $w(x)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1})^2 > 0$

$\therefore \int_a^b w(x)(b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1})^2 dx > 0$

$\therefore$ เกิดการขัดแย้งกัน

$\therefore |c| \neq 0$

$\therefore a_0, a_1, \ldots a_{k-1}$ มีจริงและมีเพียงชุดเดียว

$\therefore p_k(x)$ มีจริงและมีเพียงชุดเดียว ซ.ต.พ

ตัวอย่างที่ 3.16 ให้ $w(x) = 1, a = -1$ และ $b = 1$ จงหา $p_4(x)$

วิธีทำ จากสูตร $c_i = \int_a^n w(x) x^i dx$

$c_0 = \int_{-1}^1 (1) dx = 2$, $c_1 = \int_1^{-1} (1) x\ dx = 0$, $c_2 = \int_1^{-1} (1) x^2 dx = \frac{2}{3}$,

$c_3 = \int_1^{-1} (1) x^3 dx = 0$ $c_4 = \int_1^{-1} (1) x^4 dx = \frac{2}{5}$, $c_5 = \int_1^{-1} (1) x^5 dx = 0$, $c_6 = \int_1^{-1} (1) x^6 dx = \frac{2}{7}$

$c_7 = \int_1^{-1} (1) x^7 dx = 0$

$$\therefore c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, |c| \neq 0$$

เมื่อเราแก้สมการจะได้ผลเฉลยที่ถูกต้องเพียงชุดเดียวคือ

$$a_0 = \frac{3}{35}, a_1 = 0, a_2 = -\frac{6}{7}, a_3 = 0$$

$$\therefore p_4(x) = \frac{3}{35} - \frac{6}{7}x^2 + x^4$$

จากทฤษฎีที่ 3.4 ที่กล่าวว่า $p_k(x)$ มีจริงและมีเพียงอย่างเดียว ยกเว้นผลคูณของพหุนามนั้นกับค่าคงที่ซึ่งจะได้จาก $p_4(x)$ ในตัวอย่าง 3.16 อาจจะเป็น $dp_4(x)$ เมื่อ d คือค่าคงที่ เช่น ถ้า $d = 35$ จะได้ $p_4(x) = 3 - 30x^2 + 35x^4$ จะเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[-1,1]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ เช่นเดียวกับฟังก์ชัน $\frac{3}{35} - \frac{6}{7}x^2 + x^4$

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.5</u> ให้ $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x), \ldots$ เป็นอันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ สามพหุนามตั้งฉากเรียงกันในอันดับพหุนามนี้จะมีความสัมพันธ์กันตามรูปแบบดังนี้

$$p_n(x) = (x - \beta_n)p_{n-1}(x) - \gamma_n p_{n-2}(x)$$

โดย $p_0(x) = 1$ และ $p_1(x) = x - \beta_1$

$$\beta_n = \frac{I_{n,n-1}}{I_{n-1,n-1}} + a_{n-1,n-2}$$

$$\gamma_n = \frac{I_{n-1,n-1}}{I_{n-2,n-2}}$$

$a_{n-1,n-2} =$ สัมประสิทธิ์ของเทอม x^{n-2} ใน $p_{n-1}(x)$

$$I_{m.k} = \int_a^b w(x)x^m p_k(x)dx$$

<u>พิสูจน์</u> เราจะพิสูจน์โดยใช้การพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของ n

เมื่อ <u>$n = 2$</u>

$$a_{1,0} = -\beta_1$$

ถ้า $p_2(x) = (x - \beta_2)p_1(x) - \gamma_2 p_0(x)$

แต่ $\int_a^b w(x)p_2(x)dx = 0$ ……(3.36) และ $\int_a^b w(x)p_2(x)\ xdx = 0$ …..(3.37)

จาก (3.36) $\therefore \int_a^b w(x)(x-\beta_2)p_1(x)dx - \int_a^b w(x)\gamma_2 p_0(x)dx = 0$ (3.38)

และจาก(3.37) $\int_a^b w(x)(x-\beta_2)p_1(x)\ x\ dx - \int_a^b w(x)\gamma_2 p_0(x)\ x\ dx = 0$ (3.39)

จาก(3.38) $\int_a^b w(x)p_1(x)\ x\ dx - \beta_2\int_a^b w(x)p_1(x)dx - \gamma_2\int_a^b w(x)p_0(x)dx = 0$

(3.40)

และจาก(3.39) $\int_a^b w(x)p_1(x)\ x^2dx - \beta_2\int_a^b w(x)p_1(x)\ xdx - \gamma_2\int_a^b w(x)p_0(x)\ x\ dx = 0$

(3.41)

จาก (3.40) $\therefore I_{1,1} - \beta_2(0) - \gamma_2(I_{0,,0}) = 0$ (3.42)

และจาก(3.41) $I_{2,1} - \beta_2(I_{1,1}) - \gamma_2(I_{1,,0}) = 0$ (3.43)

จาก(3.42) $\therefore \gamma_2 = \dfrac{I_{1,1}}{I_{0,0}}$

แทน γ_2 ใน (3.43) $I_{2,1} - \beta_2(I_{1,1}) - \dfrac{I_{1,1}}{I_{0,0}}(I_{1,,0}) = 0$

$$\therefore \beta_2 I_{1,1} = I_{2,1} - \frac{I_{1,1}}{I_{0,0}}.I_{1,0}$$

$$\beta_2 = \frac{I_{2,1}}{I_{1,1}} - \frac{I_{1,0}}{I_{0,0}}$$

$$= \frac{I_{2,1}}{I_{1,1}} - \beta_1 = \frac{I_{2,,1}}{I_{1,1}} + a_{1,0}$$

$\therefore$ เป็นจริงเมื่อ $n=2$

สมมติเป็นจริงเมื่อ $\underline{n=k}$

นั่นคือ $p_k(x) = (x-\beta_k)p_{k-1}(x) - \gamma_k p_{k-2}(x)$

เมื่อ $n=k+1$

ถ้า $p_{k+1}(x) = (x-\beta_{k+1})p_k(x) - \gamma_{k+1}p_{k-1}(x)$

แต่ $\int_a^b w(x)p_{k+1}(x)x^m dx = 0,\quad m = 0,1,2,\ldots,k$

$$\int_a^b w(x)p_{k+1}(x)x^{k-1}dx = \int_a^b w(x)(x-\beta_{k+1})p_k(x)x^{k-1}dx - \int_a^b \gamma_{k+1}w(x)p_{k-1}(x)x^{k-1}dx = 0$$

$$\therefore \int_a^b w(x)p_k(x)x^k dx - \beta_{k+1}\int_a^b w(x)p_k(x)x^{k-1}dx - \gamma_{k+1}\int_a^b \gamma w(x)p_{k-1}(x)x^{k-1}dx = 0$$

$$\therefore I_{k,k} - \beta_{k+1}(0) - \gamma_{k+1}I_{k-1,k+1} = 0$$

$\therefore \gamma_{k+1} = \dfrac{I_{k,k}}{I_{k-1,k-1}}$ และ

$$\int_a^b w(x)p_k(x)x^k dx = \int_a^b w(x)(x-\beta_{k+1})p_k(x)x^k dx - \int_a^b \gamma_{k+1}w(x)p_{k-1}(x)x^k dx = 0$$

$$\therefore \int_a^b w(x)p_k(x)x^{k+1}dx - \beta_{k+1}\int w(x)p_k(x)x^k dx - \gamma_{k+1}\int_a^b \gamma w(x)p_{k-1}(x)x^k dx = 0$$

$$\therefore I_{k+1,k} - \beta_{k+1}I_{k,k} - \gamma_{k+1}I_{k,k-1} = 0$$

$$\beta_{k+1}I_{k,k} = I_{k+1,k} - \gamma_{k+1}I_{k,k-1}$$

$$= I_{k+1,k} - \frac{I_{k,k}}{I_{k-1,k-1}}I_{k,k-1}$$

$$\therefore \beta_{k+1} = \frac{I_{k+1,k}}{I_{k,k}} - \frac{I_{k,k-1}}{I_{k-1,k-1}}$$

$$= \frac{I_{k+1,k}}{I_{k,k}} + a_{k,k-1}$$

$\therefore$ เป็นจริงเมื่อ $n = k+1$

$\therefore$ เป็นจริงทุก n

$\therefore \quad p_n(x) = (x-\beta_n)p_{n-1}(x) - \gamma_n p_{n-2}(x)$ ซ.ต.พ.

เมื่อเราได้เรียนรู้ถึงทฤษฎีแล้ว จะเสนออันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากชนิดต่าง ๆ ที่นิยมใช้ หรือนิยมใช้ในวิชาคณิตศาสตร์สาขาต่างๆ

3.4.1 พหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์

อันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์ที่ $w(x)=1, a=-1, b=1, p_0(x)=1$ และ

$p_1(x) = x$

จากทฤษฎีบทที่ 3.5 $\quad I_{m.k} = \int_a^b w(x)x^m p_k(x)dx$

$I_{1.1} = \int_{-1}^{1}(1)x\ xdx = \dfrac{2}{3}$

$I_{0.0} = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$

จาก $\gamma_n = \dfrac{I_{n-1,n-1}}{I_{n-2,n-2}}$

จะได้ว่า $\gamma_2 = \dfrac{I_{1,1}}{I_{0,0}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$

$I_{2.1} = \int_{-1}^{1}(1)x^2 xdx = 0$

$a_{1,0} = 0$

$\therefore \beta_2 = 0$

$$\therefore\ p_2(x) = (x-0)x - \frac{1}{3}(1) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$I_{2.2} = \int_{-1}^{1}(1)x^2(x^2 - \frac{1}{3})dx = \frac{8}{45}$

$\gamma_3 = \frac{I_{2,2}}{I_{1,1}} = \frac{\frac{8}{45}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{15}$

$I_{3,2} = \int_{-1}^{1}(1)x^3(x^2 - \frac{1}{3})dx = 0$

$a_{2,1} = 0$

$\therefore \beta_3 = 0$

$$\therefore\ p_3(x) = (x-0)(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{45}x = x^3 - \frac{9}{15}x$$

ด้วยวิธีในทำนองเดียวกัน เราจะได้

$$p_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

$$p_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

ที่มาของพหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์

กำหนดให้ $P_n(x)$ แทนด้วยพหุนามเลอจองด์อันดับที่ n นิยามโดย

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right],\ n \in N_0 \qquad (3.44)$$

สมการดังกล่าวนี้เป็นพหุนามดีกรี $2n$ เทอมที่เป็นอนุพันธ์ดีกรี n ก็คือ พหุนามของดีกรี n

ทฤษฎีบทที่ 3.6 พหุนามเลอจองด์ $P_n(x)$, $n = 0,12,\ldots$ มาจากระบบเชิงตั้งฉากในช่วง $[-1,1]$ จะได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, m = n \end{cases} \qquad m,n \in N_0 \qquad (3.45)$$

พิสูจน์ ต้องแสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติของพหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์

สมมติให้ $m < n$ แล้วทำการอินทิเกรตแบบแยกส่วน (Integration by parts)

จะได้

$$I_{m,n} := 2^m m! 2^n n! \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2-1)^m\right] \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] dx$$

$$= \frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2-1)^m\right] \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x^2-1)^n\right]\Bigg|_{-1}^{1} \qquad (3.46)$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[(x^2-1)^m\right] \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x^2-1)^n\right] dx$$

จะสังเกตเห็นได้ว่า พหุนาม $(x^2-1)^n$ จะมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับ $x = \pm 1$ ดังนั้น จะมี

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right] = 0 \quad \text{สำหรับ } x = \pm 1 \text{ และ } k = 1,2,\ldots,n \qquad (3.47)$$

ดังนั้นจากสมการที่ (3.46) หลังจากอินทิเกรตโดยแยกส่วน เราจะได้

$$I_{m,n} = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}\left[(x^2-1)^m\right](x^2-1)^n dx \qquad (3.48)$$

จากสมมติฐาน $m+n \geq 2m$, แล้วจะได้ $I_{m,n} = 0$

ในส่วนที่ 2 ของสมการที่ (3.45) , จากสมการที่ (3.48) โดยให้ $m = n$ จะได้

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left[(x^2-1)^n\right] = (2n)!$$

จากสมการที่ (3.48) หลังจากอินทิเกรตโดยแยกส่วน เราจะได้

$$I_{n,n} = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n dx$$

$$= (-1)^n (2n)! \left((x-1)^n \frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1} \Bigg|_{-1}^{1} - \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (x-1)^{n-1}(x+1)^{n+1} dx \right)$$

$$= (-1)^{2n} (2n)! \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n)} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} dx$$

$$= (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

จากสมการที่ (3.46) , ได้ตามสมการที่ (3.45)

โดยจากนิยามในสมการที่ (3.44) ของพหุนามเลอจองด์ จะได้ว่า $P_n(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่ของ x สมนัยกับภาวะคู่หรือคี่ของ n จากความจริงที่ว่า $(x^2-1)^n$ เป็นจำนวนคู่ และอนุพันธ์ของฟังก์ชันคู่เป็นจำนวนคี่ เราจะได้

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad , n \in N_0 \tag{3.49}$$

<u>*ทฤษฎีบทที่ 3.7*</u> พหุนามเลอจองด์ที่มีอันดับเรียงกัน จะสอดคล้องกับสูตรดังนี้

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{3.50}$$
$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x$$

<u>*พิสูจน์*</u> จากพหุนาม $P_0(x) = 1$ และพหุนาม $P_1(x) = x$ ได้มาจากนิยามในสมการที่ (3.51) โดยต้องแสดงให้เห็นว่าสอดคล้องกับสมการที่ (3.50) พหุนามเลอจองด์และในขั้นตอนที่สอง จะแสดงให้เห็นถึงสัมประสิทธิ์เฉพาะ และให้ a_n แทนสัมประสิทธิ์ของกำลังสูงสุดของพหุนาม $P_n(x) = a_n x^n + \ldots$ จะได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$P_{n+1}(x) - \frac{a_{n-1}}{a_n} x P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x) \quad n \geq 1 \tag{3.51}$$

เพราะว่าสมการทางด้านซ้ายของสมการที่ (3.51) เป็นพหุนามของดีกรีสูงสุด $n-1$ ซึ่งคือผลต่างพหุนามคู่หรือพหุนามคี่ กับสัมประสิทธิ์ที่มีค่าเหมือนกันของกำลังสูงสุด ดังนั้นจะมี วิธีจัดหมู่เชิงเส้นของพหุนามเลอจองด์ $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ โดยแทนด้วยผลต่างดังสมการที่ (3.51) ในแต่ละค่า $j = 0,1,\ldots,n-2$ จะได้

$$\int_{-1}^{1} P_j(x) P_{n+1}(x) dx - \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{-1}^{1} P_j(x) x P_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{-1}^{1} P_j(x) P_i(x) dx \tag{3.52}$$

อินทิกรัลทั้งสอง ทางด้านซ้ายของสมการที่ (3.52) มีค่าเป็นศูนย์ โดยได้จากสมการที่ (3.45) $xP_j(x)$ เป็นพหุนามของดีกรีน้อยกว่า n และสามารถแทนได้ด้วย วิธีการจัดหมู่เชิงเส้นของ

พหุนามเลอจองด์ของดีกรีน้อยกว่า n ส่วนทางด้านขวาของสมการ เทอมที่ยังอยู่ คือ $\dfrac{2c_j}{2j+1}$ เนื่องมาจากสมการที่ (3.45) ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (3.51) สำหรับ $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-2} = 0$ และ $c_{n-1} \neq 0$

เพื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ เราจำเป็นต้องมีสัมประสิทธิ์ของ x^n และ x^{n-2} ของพหุนาม $P_n(x)$ เนื่องมาจากสมการที่ (3.44) เราจะได้

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{2n} - \binom{n}{1} x^{2n-2} + \ldots \right] \right\}$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{n(2n-2)!}{2^n n! (n-2)!} x^{n-2} + \ldots \tag{3.53}$$

จากสมการที่ (3.53) จะได้

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)]!2^n(n!)^n}{2^{n+1}[(n+1)!]^2(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}$$

ถ้าเราเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ในสมการที่ (3.51) จะได้

$$-\frac{(n+1)(2n)!}{2^{n+1}(n+1)!(n-1)!} + \frac{2n+1}{n+1}\frac{n(2n-2)!}{2^n n(n-2)!} = c_{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}[(n-1)!]^2}$$

ทำการคำนวณจะได้

$$c_{n-1} = -\frac{n}{n+1}$$

จากสมการที่ (3.50) จะได้ พหุนามเลอจองด์ พหุนามต่อไป คือ

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$$

โดยการพิสูจน์แบบอุปนัยสำหรับ n โดยแสดงว่าพหุนามเลอจองด์มีคุณสมบัติ ดังนี้

$$P_n(1) = 1 \quad , P_n(-1) = (-1)^n \quad (n = 0,1,2,\dots) \tag{3.54}$$

<u>3.4.2. พหุนามเชิงตั้งฉากเชบีเชฟ</u>

อันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากเชบีเชฟมีสองแบบ ดังนี้

แบบที่ 1 $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, a=-1, b=-1, p_0(x)=1$ และ $p_1(x) = x$

หา $p_2(x)$, $\quad I_{1,1} = \int_{-1}^{1}\frac{x\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{\pi}{2}$

$$I_{0,0} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

$$I_{2,1} = \int_{-1}^{1}\frac{x^2\cdot x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

$\therefore \beta_2 = 0$ เพราะ $a_{1,0} = 0$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}$$

$$p_2(x) = x\cdot x - \frac{1}{2} = x^2 - \frac{1}{2}$$

หา $p_3(x)$ $\quad I_{2,2} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(x^2-\frac{1}{2})}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{8}$

$$I_{3,2} = \int_{-1}^{1} \frac{x^3(x^2-\frac{1}{2})}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

$\therefore \beta_3 = 0$ เพราะ $a_{2,1} = 0$

$$\gamma_3 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore p_3(x) = x(x^2-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}x$$

$$= x^3 - \frac{3}{4}x$$

ในทำนองเดียวกัน

$$p_4(x) = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$$

$$p_5(x) = x^5 - \frac{7}{4}x^3 + \frac{5}{8}x$$

แบบที่ 2 $\quad w(x) = \sqrt{1-x^2}, a = -1, b = -1, p_0(x) = 1$ และ $p_1(x) = x$

หา $p_2(x)$, $\quad I_{1,1} = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{8}$

$$I_{0,0} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2,,1} = \int_{-1}^{1} 2x^3\sqrt{1-x^2}dx = 0$$

$\therefore \beta_2 = 0$ เพราะ $a_{1,0} = 0$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4}$$

$$p_2(x) = x \cdot x - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{1}{4}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\therefore p_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

$$p_4(x) = x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}$$

$$p_5(x) = x^5 - x^3 + \frac{3}{16}x$$

ที่มาและคุณสมบัติที่สำคัญของพหุนามเชบีเชฟ

การประมาณค่าพหุนามเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน f ไม่เหมาะสมที่จะประมาณค่าของฟังก์ชัน f ในช่วง $[a,b]$ ถ้าการประมาณค่ายังไม่มีรูปแบบที่ถูกต้อง การประมาณค่าพหุนามแบบเทย์เลอร์จะให้ค่าคลาดเคลื่อนเล็กน้อยจากจุด c แต่ค่าคลาดเคลื่อนจะเพิ่มขึ้น (อย่างรวดเร็วในบางกรณี) ถ้าเราเคลื่อนห่างจาก c เราต้องการประมาณค่าพหุนามที่ไม่มีรูปแบบ และให้มีค่าคลาดเคลื่อนน้อย ๆ เราจะแนะนำวิธีการประมาณค่าพหุนามเชบีเชฟ

<u>**พหุนามเชบีเชฟ**</u> ดีกรี n นิยามได้ดังนี้

$$T_n(x) = \cos(n \ \arccos x) \qquad n \geq 0, -1 \leq x \leq 1$$

ให้ $\theta = \arccos x$ ดังนั้น $x = \cos\theta$ จะได้

$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

เนื่องจาก $\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta$

และ $\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta$

จะได้ $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta$

และเขียนได้ว่า $T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos n\theta$

ดังนั้น $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$

คุณสมบัติของพหุนามเชบีเชฟ

<u>**คุณสมบัติข้อที่ 1**</u>

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad \text{ถ้า } n \geq 1$$

โดย $T_0(x) = 1$ และ $T_1(x) = x$

เมื่อใช้คุณสมบัตินี้จะได้

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

<u>**คุณสมบัติข้อที่ 2**</u>

$T_n(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n และสัมประสิทธิ์ของ x^n คือ 2^{n-1}

แล้วค่า x ที่ทำให้ $T_n(x)$ เป็นศูนย์ ในช่วง $[-1,1]$

$$T_n(x) = \cos(n \ \arccos x) = 0$$

ที่จุด $x_k = \cos\theta_k$

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad , k = 1,2,\ldots,n$$

ตัวอย่างที่ 3.17 $T_4(x)$ เป็นศูนย์ที่จุด

$x_1 = \cos(\pi/8) = 0.9238795,$

$x_2 = \cos(3\pi/8) = 0.3826834$

$x_3 = \cos(5\pi/8) = -x_2$

และ $x_4 = \cos(7\pi/8) = -x_1$

ดังนั้น $T_n(x)$ มีค่าสูงสุดที่จุดซึ่งมีอนุพันธ์เป็นศูนย์ จะมีจุด

$$\overline{x_k} = \cos(k\pi/n) \qquad ,k = 0,1,\ldots,n$$

คุณสมบัติข้อที่ 3 มีจำนวนจริง $n+1$ ที่ทำให้พหุนาม $T_n(x)$ เป็นศูนย์

จำนวนจริงเหล่านั้นคือ $\overline{x_k} = \cos(k\pi/n) \qquad ,k = 0,1,\ldots,n$

ในช่วง $[-1,1]$, ค่าของ $T_n(x)$ ที่จุด $\overline{x_k}$ คือ

$$\cos(n\ \arccos\overline{x_k}) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

คุณสมบัติข้อที่ 4 ถ้า $|x| \le 1$, แล้ว $|T_n(x)| \le 1$ พิจารณาพหุนาม

$$T_n^*(x) = 2^{1-n}T_n(x)$$

แต่ละ $T_n^*(x)$ เป็นพหุนาม monic ดีกรี n มีสัมประสิทธิ์ของเทอม x^n ใน $T_n^*(x)$ คือ หนึ่งพหุนาม $T_n^*(x)$ มีค่าเป็นศูนย์ที่จุด x_k และค่าสูงสุดที่จุด $\overline{x_k}$ เช่นเดียวกับพหุนาม $T_n(x)$ จาก $|T_n(x)| \le 1$ ดังนั้น $|\ T_n^*(x)\ | \le 2^{1-n}$,

สำหรับ $n \ge 1$ ดังนั้น

$$\max_{-1\le x\le 1}|\ T_n^*(x)\ |$$

มีลิมิตเป็นศูนย์ที่ n เข้าใกล้อนันต์

สำหรับพหุนาม monic อื่น ๆ , พหุนาม $T_n^*(x)$ มีความสำคัญในเรื่องของคุณสมบัติน้อยที่สุด โดยแสดงในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.8 ถ้า $P_n(x)$ เป็นพหุนาม monic ดีกรี n แล้ว

$$\max_{-1\le x\le 1}|P_n(x)| \ge \max_{-1\le x\le 1}|T_n^*(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

พิสูจน์ สมมติว่า $P_n(x)$ เป็นพหุนาม monic ดีกรี $n \ge 1$ และ

$$\max_{-1\le x\le 1}|P_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{(จากคุณสมบัติข้อที่ 4)}$$

ให้ $Q(x) = T_n^*(x) - P_n(x)$

แล้ว $Q(x)$ คือ พหุนามดีกรี $n-1$ หรือน้อยกว่า ดังนั้น

$$Q(x_k) = T_n^*(\overline{x_k}) - P_n(\overline{x_k}) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(\overline{x_k})$$

เนื่องจาก $\quad | \ P_n(\overline{x_k}) \ | < \frac{1}{2^{n-1}}$

เครื่องหมายทางพีชคณิตของ $Q(\overline{x_k})$ จะถูกกำหนดโดยเทอมของ

$$\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

ถ้า k เป็นจำนวนคี่ $Q(\overline{x_k}) < 0$

และ ถ้า k เป็นจำนวนคู่ $Q(\overline{x_k}) > 0$

และ $Q(\overline{x_k}) = 0$ ที่จุดอย่างน้อยที่สุด n จุดในช่วงปิด $[-1,1]$

แต่ถ้า $P(x)$ ไม่เป็นพหุนามค่าคงที่ , แล้วค่า x ที่ทำให้ $Q(x)$ มีค่าเป็นศูนย์มีได้มากกว่า $n-1$ ค่า

ถ้า $Q(x)$ เป็นค่าคงที่ แล้ว $Q(x)$ ต้องเป็นศูนย์ ทำให้ได้ว่า $T_n^*(x) = P_n(x)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า

$$\max|P_n(x)| < \max|T_n^*(x)|$$

บนช่วง $[-1,1]$ ขึ้นกับการเลือก $P_n(x)$ ทำให้ได้ว่าไม่มีพหุนาม $P_n(x)$

เราจะเห็นได้ว่าในพหุนาม monic $P_n(x)$ ดีกรี n ทั้งหมดนั้น, พหุนาม $T_n^*(x)$ มีค่าเล็กที่สุดที่เป็นไปได้สำหรับ $\max|P_n(x)|$ บนช่วง $[-1,1]$

ในส่วนที่เหลือของหัวข้อนี้ เราจะหา 2 วิธีก่อนหน้านี้ โดยสามารถพิจารณาปัญหาของการประมาณค่าพหุนาม

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-1,1]$ และเราต้องการประมาณค่า f ด้วยพหุนามดีกรี n หรือน้อยกว่า เราเลือกจุดจำนวน $n+1$ จุด $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ใน $[-1,1]$ และจากการประมาณค่าในช่วงของพหุนาม $P_n(x)$ สำหรับแต่ละตัวเลือกของเซตการประมาณค่าในช่วง เราจะได้พหุนามประมาณค่า ซึ่งจะหาว่าวิธีประมาณค่าใดจะประมาณค่าได้ดีที่สุด เราทราบว่า

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|f^{n+1(\xi)}|}{(n+1)!}|\psi_n(x)|$$

ซึ่ง $\psi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

ถ้า $|f^{n+1}(x)| \le M$ บน $[-1,1]$ แล้ว

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\max_{-1\le x\le 1}|\psi_n(x)|$$

โดย $\psi_n(x)$ คือ พหุนาม monic ของดีกรี $n+1$ เนื่องจากนี้ $\max\limits_{-1\le x\le 1}|\psi_n(x)|$ จะมีค่าน้อยที่สุด ถ้า $\psi_n(x) = T_{n+1}^*(x)$ ซึ่งหมายความว่า จุด $x_0, x_1, \ldots, x_n$ จะให้ $T_{n+1}^*(x)$ เป็นศูนย์ใน $[-1,1]$ ถ้า $P_n(x)$ เป็นการประมาณค่าพหุนามในช่วงเซตของจุด แล้ว

$$\left|f(x)-P_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}$$

และวิธีนี้ดีที่สุด เราสามารถนำมาใช้ในการประมาณค่าพหุนามดีกรี n หรือน้อยกว่าในช่วงเพื่อประมาณฟังก์ชัน f บนช่วง $[-1,1]$

<u>*ตัวอย่างที่ 3.18*</u> ให้ $f(x)=\sin x$ บน $[-1,1]$ เลือก $n=3$ ดังนั้น

$$\left|f(x)-P_3(x)\right| \le \frac{1}{4!}\frac{1}{2^3} = 5.208\times 10^{-3} < 5.21\times 10^{-3}$$

$\therefore$ สร้างพหุนาม $P_3(x)$

<u>*วิธีทำ*</u> จากตาราง 3.17 แสดงค่าของ $\sin x$ ที่จุดที่ทำให้ $T_4(x)$ เป็นศูนย์ใน $[-1,1]$

<u>*ตาราง 3.17*</u>

x_k	$\sin x_k$
-0.9238795	-0.797945906
-0.3826834	-0.373411110
0.3826834	0.373411110
0.9238795	0.79745906

หาพหุนามลากรองจ์ $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ และ $L_3(x)$ ดังนั้นพหุนาม $P_3(x)$ คือ

$$-0.797945906L_0(x)-0.373411110L_1(x)+0.37341111L_2(x)+0.797945906L_3(x)$$

โดยเราได้

$$L_0(x) = -0.765367x^3+0.7071068x^2+0.1120854x-0.1035534$$

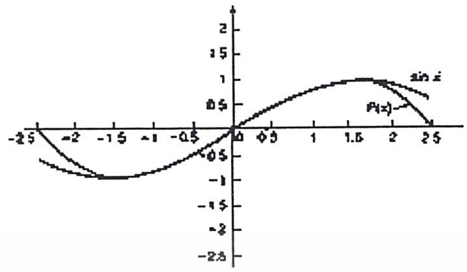
$$L_1(x) = 1.847759x^3-0.7071068x^2-1.577161x+0.6035534$$

$$L_2(x) = -1.847759x^3-0.7071068x^2+1.577161x+0.6035534$$

$$L_3(x) = 0.765367x^3+0.7071068x^2-0.1120854x-0.1035534$$

และ $P_3(x) = -0.1585047x^3+0.9989828x$

เปรียบเทียบค่าของ $P_3(x)$ และ $\sin x$ บน $[-1,1]$ ผลลัพธ์ที่ได้ในตาราง 3.18ในคอลัมภ์ค่าคลาดเคลื่อน ในตารางได้จากการหาค่าของ $\sin x$ - $P_3(x)$ สำหรับแต่ละค่า x เราสังเกตได้ว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จะเป็นอันดับของค่าที่อยู่ในช่วง 10^{-4} คอลัมภ์เทย์เลอร์ในตาราง 4.1 แสดงค่าของพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 สำหรับ $\sin x$ ที่มี $c=0$ หมายเหตุ การประมาณค่าเทย์เลอร์จะดีเมื่อ เข้าใกล้ $x=0$ พหุนาม $P_3(x)$ จะมีความแม่นยำเมื่อเข้าใกล้จุดสุดท้ายของช่วง และ more uniformly แน่นอนของการประมาณค่า รูปที่ 3.17 แสดงภาพของการประมาณค่า โดยให้ $\sin x$ อยู่ในช่วง $[-1,1]$



รูปที่ 3.17 แสดงการประมาณค่าโดยให้ $\sin x$ อยู่ในช่วง $[-1,1]$

<u>*ตาราง 3.18*</u>

x	$P(x)$	$\sin x$	*ERROR*	*TAYLOR*
-1	-0.8404779	-0.841471	-9.93073E -04	-8.137703E -03
-0.9	-0.7835345	-0.7833269	2.075434E -04	-4.826904E -03
-0.8	-0.7180317	-0.717356	6.756783E -04	-2.689421E-03
-0.7	-0.6449207	-0.6442177	7.030368E -04	-1.384378E -03
-0.6	-0.5651525	-0.5646425	5.100966E -04	-6.425381E -04
-0.5	-0.4796782	-0.4794255	2.526641E -04	-2.589226E -04
-0.4	-0.3894487	-0.3894183	3.042817E -05	-8.499622E -05
-0.3	-0.2954151	-0.2955202	-1.050532E -04	-2.023578E -05
-0.2	-0.1985284	-0.1986693	-1.408458E -04	2.667308E -06
-0.1	-9.973969E -02	-9.983338E –04	-9.366125E -05	-8.940697E -08
0	7.443001E -08	7.450581E –08	7.58007E -11	0
0.1	9.793984E -02	9.983349E –02	9.36538E -05	8.195639E -08
0.2	0.1985286	0.1986694	1.408309E -04	2.667308E -06
0.3	0.2954153	0.2955203	1.050234E -04	2.020598E -05
0.4	0.3894488	0.3894184	-3.042817E -05	8.499622E -05
0.5	0.4796783	0.4794256	-2.526939E -04	2.588928E -04
0.6	0.5651526	0.564626	-5.10037E -04	6.425381E -04
0.7	0.6449208	0.6442178	-7.030368E -04	1.384378E -03
0.8	0.7180318	0.7173561	-6.756783E -04	2.689421E -03
0.9	0.7835345	0.7833271	-2.074838E -04	4.826963E -03

ข้อสังเกต ถ้าเราใช้ $n = 8$ ในการประมาณค่าในตัวอย่าง 3.18 ค่าคลาดเคลื่อนจะมีขอบเขตคือ

$$\left|\sin x - P_8(x)\right| < \frac{1}{9!}\cdot\frac{1}{2^8} = 1.077\times10^{-8}$$

ดังนั้นการประมาณค่าที่จะมีความถูกต้องจะอยู่ที่ดีกรีต่ำ ๆ

รูปที่ 3.17 $P(x) = 0.9989828x - 0.1585047x^3$

สำหรับการประมาณค่าฟังก์ชันในช่วง $[a,b]$ ที่ไม่ใช่ช่วงปิด $[-1,1]$ เราต้องเปลี่ยนรูปโดยใช้สูตร

$$\hat{x} = \frac{(b-a)x+(a+b)}{2}$$

เพื่อเปลี่ยนค่าที่ศูนย์ของพหุนามเชบีเชฟที่เลือกไว้เพื่อให้สอดคล้องกับจุดใน $[a,b]$ ซึ่งการหาพหุนามประมาณค่าตามแบบข้างต้นค่อนข้างลำบาก แม้ว่าจะเป็นพหุนามดีกรีต่ำก็ตาม สิ่งสำคัญต้องทราบว่าผลลัพธ์มีความถูกต้องมากน้อยแค่ไหนในแต่ละแบบของการประมาณค่า เช่น พหุนามเทย์เลอร์ เราสามารถหาพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่าแต่ยังคงความถูกต้องเพียงพอสำหรับการนำไปใช้

สมมติว่า พหุนาม

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

ประมาณค่าฟังก์ชัน f ด้วย

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x), \qquad x \in [-1,1]$$

ขณะที่

$$T_n^*(x) = 2^{1-n}T_n(x)$$

เป็นพหุนาม monic ดีกรี n ดังนั้น

$$Q_{n-1}(x) = P_n(x) - a_nT_n^*(x)$$

เป็นพหุนามดีกรี $n-1$ หรือน้อยกว่า แต่

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + a_nT_n^*(x) + E_n(x)$$

ดังนั้นค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า f โดย $Q_{n-1}(x)$ จะมากกว่าค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า f โดย $P_n(x)$ โดย

$$|\ a_nT_n^*(x)\ | \le \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

ถ้า $|a_n|$ มีค่าน้อยหรือ n มีค่ามาก ค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า f ด้วยพหุนาม $Q_{n-1}(x)$ จะไม่ต่างจากค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า $P_n(x)$ เราเรียกวิธีการที่มาแทนพหุนาม $P_n(x)$ โดยการประมาณค่าพหุนามดีกรีต่ำกว่า Chebyshev economization โดยพหุนามดีกรีต่ำกว่า $Q_{n-1}(x)$ เรียกว่า economized polynomial

ตัวอย่างที่ 3.19 ฟังก์ชัน e^x สามารถและการประมาณค่าบน $[-1,1]$ โดยพหุนามเทย์เลอร์

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

จงหา economized polynomial $Q_3(x)$

วิธีทำ จาก $Q_{n-1}(x) = P_n(x) - a_nT_n^*(x)$

ให้ $Q_3(x) = P_4(x) - \frac{1}{24}T_4^*(x)$

เนื่องจาก $T_4^*(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$

ดังนั้นจะได้ $Q_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

และพิจารณา $\left| \, Q_3(x) - P_4(x) \, \right| = \frac{1}{24}\left|T_4^*(x)\right| < \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{8} < 0.00521$

จะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นเล็กน้อย ซึ่งถือว่าเป็นค่าที่น้อยสำหรับการลดดีกรีของพหุนามประมาณค่า

ตัวอย่างต่อมาจะแสดง พหุนาม economized ว่าให้ความแม่นยำเพียงใด

<u>*ตัวอย่างที่ 3.20*</u> ให้ $f(x) = \frac{1}{4-x}$ โดยประมาณค่า f ด้วยพหุนาม

$$P_4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{256}x^3 + \frac{1}{1024}x^4$$

บน $(-4,4)$ เราสนใจเพียงช่วง $[-1,1]$

ให้
$$Q_3(x) = P_4(x) - \frac{1}{1024}T_4^*(x)$$

$$Q_3(x) = \frac{2047}{8192}\ \frac{1}{16}x + \frac{65}{1024}x^2 + \frac{1}{256}x^3$$

หรือ
$$Q_3(x) = 0.24987793\ 0.0625x + 0.06347656x^2 + 0.0039062x^3$$

ตาราง 3.19 ต่อไปนี้แสดงถึงผลลัพธ์ของการประมาณค่า f โดยพหุนาม economized $Q_3(x)$

<u>*ตาราง 3.19*</u>

x	$P(x)$	$1/(4-x)$	ค่าคลาดเคลื่อน
-1	0.2000732	0.2	-7.320941E -05
-0.9	0.2042275	0.2040816	-1.458824E -04
-0.8	0.2085029	0.2083333	-1.695752E -04
-0.7	0.2129228	0.212766	-1.568645E -04
-0.6	0.2175107	0.2173913	-1.19403E -04
-0.5	0.22229	0.2222222	-6.778538E -05
-0.4	0.2272842	0.2272727	-1.142919E -05
-0.3	0.2325166	0.2325582	4.158914E -05
-0.2	0.2380107	0.2380953	8.453429 E-05
-0.1	0.24379	0.2439025	1.124293E -04
0	0.2498779	0.25	1.221001E -04
0.1	0.2562978	0.2564103	1.124442E -04
0.2	0.2630732	0.2631579	8.46982E -05
0.3	0.2702275	0.2702703	4.276634E -05
0.4	0.2777842	0.2777778	-6.377697E -06
0.5	0.2857666	0.2857143	-5.230308E -05
0.6	0.2941982	0.2941177	-8.055568E -05
0.7	0.3031025	0.3030303	-7.221103E -05
0.8	0.3125029	0.3125	-2.890825E -06
0.9	0.3224228	0.3225807	1.578331E -04

ค่าของ $Q_3(x)$ จะอยู่ในคอลัมภ์ $P(x)$ โดยสังเกตได้ว่าค่าคลาดเคลื่อนจะไม่ต่างกันมากนักในช่วง เราเปรียบเทียบตาราง 3.20 ต่อมาแสดงผลของการประมาณค่า f โดยใช้พหุนามดีกรีสามซึ่งได้จาก $P_4(x)$ ที่ตัดเทอมดีกรีสี่ออก

ตาราง 3.20

x	$P(x)$	$1/(4-x)$	ค่าคลาดเคลื่อน
-1	0.1992188	0.2	7.81253E -04
-0.9	0.2035586	0.2040816	5.230308E -04
-0.8	0.208	0.2083333	3.333241E -04
-0.7	0.2125664	0.212766	1.995564E -04
-0.6	0.2172813	0.2173913	1.1006E -04
-0.5	0.222168	0.2222222	5.425513E -05
-0.4	0.22725	0.2272727	2.270937E -05
-0.3	0.2325508	0.2325582	7.376075E -06
-0.2	0.2380938	0.2380953	1.505017E -06
-0.1	0.2439024	0.2439025	8.940697E -08
0	0.25	0.25	0
0.1	0.2564102	0.2564103	1.192093E -07
0.2	0.2631563	0.2631579	1.639128E -06
0.3	0.2702617	0.2702703	8.553266E -06
0.4	0.27775	0.2777778	2.777577E -05
0.5	0.2856445	0.2857143	6.973744E -05
0.6	0.2939688	0.2941177	1.488924E -04
0.7	0.3027461	0.3030303	2.84195E -04
0.8	0.312	0.3125	5.000234E -04
0.9	0.3217539	0.3225807	8.267463E -04

พหุนามเทย์เลอร์ของดีกรีสามจะให้ค่าถูกต้องมากขึ้นเมื่อเข้าใกล้ $x = 0$ แต่จะมีความถูกต้องน้อยลงเมื่อเข้าใกล้จุดปลายของช่วง การประมาณค่าด้วยพหุนาม $Q_3(x)$ จะให้ความถูกต้องมากกว่าในการประมาณค่าในช่วงทั้งหมด ตามทฤษฎีจะได้

$$\left| Q_3(x) - P_4(x) \right| = \frac{1}{1024}\left|T_4^*(x)\right| < \frac{1}{1024}\cdot\frac{1}{8} < 1.221 \times 10^{-4}$$

ผลลัพธ์จะอยู่ในขอบเขตนี้ การประมาณค่า f โดยใช้พหุนามดีกรีสี่ $P_4(x)$ เป็นดังตาราง 3.21 ข้างล่างนี้

<u>*ตาราง 3.21*</u>

x	$P(x)$	$1/(4-x)$	ค่าคลาดเคลื่อน
-1	0.2001953	0.2	-1.953095E -04
-0.9	0.2041993	0.2040816	-1.176894E -04
-0.8	0.2084	0.2083333	-6.66827E -05
-0.7	0.2128009	0.212766	-3.492832E -05
-0.6	0.2174078	0.2173913	-1.651049E -05
-0.5	0.222229	0.2222222	-6.780029E -06
-0.4	0.227275	0.2272727	-2.279878E -06
-0.3	0.2325587	0.2325582	-5.364418E -07
-0.2	0.2380953	0.2380953	-5.960465E -08
-0.1	0.2439025	0.2439025	0
0	0.25	0.25	0
0.1	0.2564103	0.2564103	0
0.2	0.2631578	0.2631579	8.940697E -08
0.3	0.2702696	0.2702703	6.556511E -07
0.4	0.277775	0.2777778	2.771616E -06
0.5	0.2857056	0.2857143	8.702278E -06
0.6	0.2940953	0.2941177	2.232194E -05
0.7	0.3029806	0.3030303	4.974008E -05
0.8	0.3124	0.3125	1.000166E -04
0.9	0.3223947	0.3225807	1.860261E -04

เมื่อเข้าใกล้บริเวณตรงกลางของช่วง ค่าคลาดเคลื่อนจะน้อยกว่าการใช้ $Q_3(x)$ แต่เมื่อใกล้จุดปลายของช่วง การประมาณโดย $Q_3(x)$ จะให้ความถูกต้องที่เท่ากับหรือในบางครั้งก็ให้ความถูกต้องได้ดีกว่า

3.4.3 พหุนามเชิงตั้งฉากลาแกร์

อันดับพหุนามเชิงตั้งฉากลาแกร์ มี $w(x) = e^{-x}, a = 0, b = \infty, p_0(x) = 1,$ และ

$p_1(x) = x - 1$

หา $p_2(x), I_{1,1} = \int_0^\infty e^{-x}(x-1)x\,dx = 1$

$$I_{0,0} = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

$$I_{2,1} = \int_0^\infty e^{-x}(x-1)x^2 dx = 4$$

$$\beta_2 = \frac{4}{1} - 1 = 3$$

$$\gamma_2 = 1$$

$$\therefore p_2(x) = (x-3)(x-1) - 1$$

$$= x^2 - 4x + 3 - 1 = x^2 - 4x + 2$$

ในทำนองเดียวกันอาจหาได้ว่า

$$p_3(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$$

$$p_4(x) = x^4 - 16x^3 + 78x^2 - 144x + 66$$

$$p_5(x) = x^5 - 25x^4 + 206x^3 - 702x^2 + 978x - 402$$

3.4.4 พหุนามเชิงตั้งฉากแอร์มิต

อันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากแอร์มิต มี $w(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$,

$p_0(x) = 1$ และ $p_1(x) = x$

การหา $p_2(x)$, $I_{1,1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{\pi}{2}$

$$I_{0,0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi$$

$$I_{2,1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2x^3 dx = 0$$

$\therefore \quad \beta_2 = 0$ เพราะ $a_{1,0} = 0$

$$\therefore \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad p_2(x) = x \cdot x - \frac{1}{2}$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}$$

ในทำนองเดียวกันอาจหาได้ว่า

$$p_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$p_4(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$$

$$p_5(x) = x^5 - 5x^3 + \frac{15}{4}x$$

3.4.5 การประมาณค่าแบบพาเด

ในการประมาณค่าจำนวนตรรกยะสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $f(x) = \cos(x)$ ซึ่งโดยปกติ เราสามารถใช้สูตรในการประมาณค่าในช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$ โดยนำคุณสมบัติของตรีโกณมิติ ไปคำนวณค่า $\cos(x)$ สำหรับ x ใด ๆ ที่อยู่นอกช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$

การประมาณค่าจำนวนตรรกยะของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ คือ ผลหารของพหุนาม $P_N(x)$ และ $Q_M(x)$ ของที่มีดีกรี N และ M โดยจะใช้สัญกรณ์ $R_{N,M}(x)$ แทนด้วยผลหาร :

$$R_{N,M}(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)}, \text{ สำหรับ } a \le x \le b \qquad (3.55)$$

จุดประสงค์ในการประมาณค่า ก็คือได้ค่าคลาดเคลื่อนที่มีค่าน้อยที่สุด เพื่อสะดวกในด้านการคำนวณ จึงได้มีผู้ใช้การประมาณค่าแบบตรรกยะที่มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าการประมาณพหุนามปกติจึงมีการพัฒนาวิธีการ จนในที่สุดคือ การประมาณค่าแบบพาเด

วิธีของพาเด จะมีฟังก์ชัน $f(x)$ และอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ โดยจะมีเหตุผล 2 ประการ ที่ตัวเลือกจุด $x = 0$ ประการแรก,คือง่ายต่อการคำนวณ ประการที่สอง , การเปลี่ยนค่าตัวแปรสามารถใช้การคำนวณบนช่วงซึ่งบรรจุศูนย์ พหุนามที่ใช้ในสมการที่ (3.55) ก็คือ

$$P_N(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_N x^N \qquad (3.56)$$

และ

$$Q_M(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_M x^M \qquad (3.57)$$

จากพหุนามในสมการที่ (3.56) และ (3.57) สามารถหาฟังก์ชัน $f(x)$ และ $R_{N,M}(x)$ ที่จุด $x = 0$ ได้ และหาอนุพันธ์ได้ $N + M$ ดีกรีขึ้นไปที่จุด $x = 0$ ในกรณีที่ $Q_0(x) = 1$, การประมาณค่าจะต้องใช้การกระจายแมคลอริน (Maclaurin expansion) สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$

เมื่อให้ $N+M$ เป็นค่าคงที่ จะได้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดเมื่อ $P_N(x)$ และ $Q_M(x)$ มีดีกรีเดียวกัน หรือ $P_N(x)$ มีดีกรีสูงกว่า $Q_M(x)$

จะสังเกตเห็นได้ว่า สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ของ $Q_M(x)$ เป็น q_0 ซึ่ง $q_0 = 1$ เพราะว่า q_0 มีค่าเป็นศูนย์ไม่ได้ และ $R_{N,M}(x)$ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ ทั้ง $P_N(x)$ และ $Q_M(x)$ ถูกหารด้วยค่าคงที่ที่เหมือนกัน โดยฟังก์ชันของจำนวนตรรกยะ $R_{N,M}(x)$ จะมีสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า $N+M+1$ ค่า

สมมติให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และมีการกระจายแมคลอริน (Maclaurin expansion)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots, \tag{3.58}$$

และรูปแบบของผลต่าง $f(x)Q_M(x) - P_N(x) = Z(x)$:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{M} q_j x^j\right) - \sum_{j=0}^{N} p_j x^j = \sum_{j=N+M+1}^{\infty} c_j x^j \tag{3.59}$$

ให้ค่าต่ำสุดของ j คือ $j = M+N+1$ อยู่ในผลบวกด้านขวาของสมการที่ (3.59) เพราะว่า อนุพันธ์ $N+M+1$ อันดับของ $f(x)$ และ $R_{N,M}(x)$ สอดคล้องที่ $x=0$

เมื่อทางด้านซ้ายของสมการที่ (3.59) คูณกันและกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของเทอม x^j มีค่าเป็นศูนย์ สำหรับ $j = 0,1,\ldots,N+M$ จะได้ ระบบสมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} a_0 - p_0 &= 0 \\ q_1 a_0 + a_1 - p_1 &= 0 \\ q_2 a_0 + q_1 a_1 + a_2 - p_2 &= 0 \\ q_3 a_0 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + a_3 - p_3 &= 0 \\ q_3 a_{N-M} + q_{M-1} a_{N-M-1} + \ldots + a_N - p_N &= 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

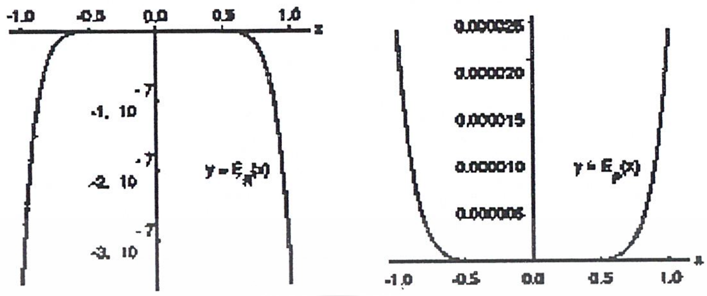
และ

$$\begin{aligned} q_M a_{N-M-1} + q_{M-1} a_{N-M+2} + \ldots + q_1 a_N \quad + a_{N+1} &= 0 \\ q_M a_{N-M-2} + q_{M-1} a_{N-M+3} + \ldots + q_1 a_{N+1} \quad + a_{N+2} &= 0 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad &. \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad &. \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad &. \\ q_M a_N \quad + q_{M-1} a_{N+1} \quad + \ldots + q_1 a_{N+M-1} \quad + a_{N+2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

จะเห็นได้ว่า ในแต่ละสมการ ผลรวมของดรรชนีล่าง บนตัวประกอบของแต่ละผลคูณมีลักษณะเช่นเดียวกัน และผลรวมนี้จะเพิ่มขึ้นจาก 0 ไปยัง $N+M$ จะมีสมการ M สมการ จากสมการที่ (3.16) สัมพันธ์กับตัวไม่ทราบค่า $q_1, q_2, \ldots, q_M$ และต้องทำการหาผลลัพธ์ก่อนเป็นสิ่งแรก โดยสมการที่ (3.60) จะใช้ในการหาค่า $p_0, p_1, \ldots, p_N$

<u>*ตัวอย่างที่ 3.21*</u> การประมาณค่าแบบพาเด

$$\cos(x) = R_{4,4}(x) = \frac{15{,}120 - 6{,}900x^2 + 313x^4}{15{,}120 + 660x^2 + 13x^4} \tag{3.62}$$



รูปที่ 3.18 กราฟแสดงฟังก์ชัน $y = \cos(x)$ และ การประมาณค่าแบบพาเดของ $R_{4,4}(x)$

จากรูปที่ 3.18 แสดงกราฟของ $\cos(x)$ และ $R_{4,4}(x)$ บนช่วง $[-5,5]$

<u>*วิธีทำ*</u> ถ้าการกระจายแมคลอริน (Maclaurin expansion) ของฟังก์ชัน $\cos(x)$ ที่เราใช้ โดยจะมี 9 สมการและ 9 ตัวไม่ทราบค่า และจะเห็นได้ว่า ทั้ง $\cos(x)$ และ $R_{4,4}(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่และมีความสัมพันธ์กับกำลังของ (x^2) สามารถทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยเริ่มจากคำนวณ $f(x) = \cos(x^{\frac{1}{2}})$:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{40320}x^4 - \ldots \tag{3.63}$$

ในกรณีนี้ จากสมการที่ (3.59) จะได้เป็น

$$\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{720} + \frac{x^4}{40320} - \ldots\right)\left(1 + q_1 x + q_2 x^2\right) - p_0 - p_1 x - p_2 x^2$$

$$= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + \ldots$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ของกำลังทั้ง 5 กำลังแรกของ x ถูกนำมาเปรียบเทียบ เราจะได้ระบบของสมการเชิงเส้น ดังนี้

$$\begin{aligned} 1 - p_0 &= 0 \\ -\frac{1}{2} + q_1 - p_1 &= 0 \\ \frac{1}{24} - \frac{1}{2}q_1 + q_2 - p_2 &= 0 \\ -\frac{1}{720} + \frac{1}{24}q_1 - \frac{1}{2}q_2 &= 0 \\ \frac{1}{40{,}320} - \frac{1}{720}q_1 + \frac{1}{24}q_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.64}$$

จาก 2 สมการสุดท้ายในสมการที่ (3.64) ต้องทำการแก้สมการก่อน โดยจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$q_1 - 12q_2 = \frac{1}{30} \qquad \text{และ} \qquad -q_1 + 30q_2 = -\frac{1}{56}$$

สิ่งแรกที่จะหา คือ q_2 โดยการบวกสมการ แล้วหา q_1

$$q_2 = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{56}\right) = \frac{13}{15{,}120} \tag{3.65}$$

$$q_1 = \frac{1}{30} + \frac{156}{15{,}120} = \frac{11}{252}$$

จากสามสมการแรกในสมการที่ (3.64) จะเห็นได้ชัด ที่จุด $p_0 = 1$ และเราจะใช้ q_1 และ q_2

ในสมการที่ (3.65) เพื่อแก้สมการหา p_1 และ p_2 :

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{11}{252} = -\frac{115}{252} \tag{3.66}$$

$$p_2 = \frac{1}{24} - \frac{11}{504} + \frac{13}{15{,}120} = \frac{313}{15{,}120}$$

เราจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์จากสมการที่ (3.65) และ (3.66) มาสร้างเป็นรูปแบบการประมาณค่าจำนวนตรรกยะของฟังก์ชัน $f(x)$ จะได้

$$f(x) \approx \frac{1 - \dfrac{115}{252}x + \dfrac{313}{15{,}120}x^2}{1 + \dfrac{11}{252}x + \dfrac{13}{15{,}120}x^2} \tag{3.67}$$

$\cos(x) = f(x^2)$ เราสามารถแทน x^2 ลงในสมการที่ (3.67) ได้ และผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นไปตามสูตรของ $R_{4,4}(x)$ ในสมการที่ (3.62)

<u>รูปแบบเศษส่วนย่อยต่อเนื่อง</u> (Continued Fraction Form)

จากการประมาณค่าแบบพาเด จำเป็นต้องมีค่าต่ำสุดของ 12 การดำเนินการแบบเลขคณิตในการแสดงการประเมินค่า ซึ่งอาจจะเป็นไปได้ที่จะลดจำนวน 7 จำนวนเหล่านี้ลงไป โดยใช้เศษส่วนย่อยต่อเนื่อง ด้วยการเริ่มต้นจากสมการที่ (3.62) และจากการหาค่าผลหารและเศษของพหุนาม คือ

$$R_{4,4}(x) = \frac{\dfrac{15{,}120}{313} - \left(\dfrac{6{,}900}{313}\right)x^2 + x^4}{\dfrac{15{,}120}{13} + \left(\dfrac{660}{13}\right)x^2 + x^4}$$

$$= \frac{313}{13} - \frac{296{,}280}{169}\,\frac{\dfrac{12{,}600}{823} + x^2}{\dfrac{15{,}120}{13} + \left(\dfrac{660}{13}\right)x^2 + x^4}$$

จัดรูปอีกครั้งโดยการใช้พจน์ของเศษเหลือ ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ

$$R_{4,4}(x) = \frac{313}{13} - \cfrac{\frac{296,280}{169}}{\cfrac{\frac{15,120}{13} + \left(\frac{660}{13}\right)x^2 + x^4}{\frac{12,600}{823} + x^2}}$$

$$= \frac{313}{13} - \cfrac{\frac{296,280}{169}}{\frac{379,380}{10,699} + x^2 + \frac{420,078,960/667,329}{12,600/823 + x^2}}$$

เศษส่วนย่อยจะถูกเปลี่ยนเป็นรูปแบบทศนิยมเพื่อการคำนวณ เราจะได้ว่า

$$R_{4,4}(x) = 24.07692308 - \frac{1753.13609467}{35045938873 + x^2 + 620.19928277/(15.30984204 + x^2)} \tag{3.68}$$

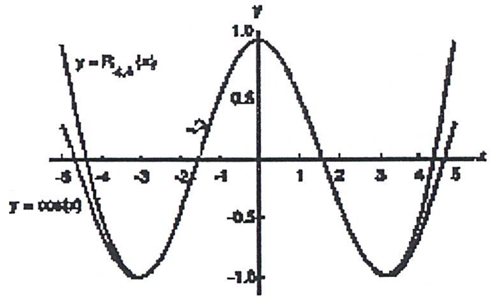
ทำการประมาณค่าสมการที่ (3.68) สิ่งแรก ก็คือ คำนวณและเก็บค่า x^2 เนื่องมาจากเทอมล่างทางด้านขวาของสมการ ในส่วนของตัวหารและการดำเนินการ : การบวก, การหาร, การบวก, การบวก, การหาร และการลบ รวมทั้งหมด 7 การดำเนินการแบบเลขคณิตทั้งหมด ที่ใช้การประมาณค่า $R_{4,4}(x)$ ในรูปแบบเศษส่วนย่อยต่อเนื่องในสมการที่ (3.68)

เราสามารถเปรียบเทียบ $R_{4,4}(x)$ กับพหุนามเทย์เลอร์ $P_6(x)$ ของดีกรี $n = 6$ ซึ่งต้องการ 7 การดำเนินการแบบเลขคณิต เมื่อเขียนใหม่ในรูปแบบซ้อนใน จะได้ว่า

$$P_6(x) = 1 + x^2\left(-\frac{1}{2} + x^2\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{720}x^2\right)\right)$$

$$= 1 + x^2(-0.5 + x^2(0.0416666667 - 0.0013888889x^2)) \tag{3.69}$$

กราฟของ $E_R(x) = \cos(x) - R_{4,4}(x)$ และ $E_P(x) = \cos(x) - P_6(x)$ บนช่วง $[-1,1]$ จะแสดงไว้ดังรูป 3.19 (a) และ(b) ตามลำดับ จะมีค่าคลาดเคลื่อนที่มีค่ามากที่สุดเกิดขึ้นที่จุดปลายและมีค่าเท่ากับ $E_R(1) = -0.0000003599$ และ $E_T(x) = 0.0000245281$ ตามลำดับ ขนาดของค่าคลาดเคลื่อนที่มีค่ามากที่สุดของ $R_{4,4}(x)$ มีค่าประมาณ 1.467% ของค่าคลาดเคลื่อนของ $P_6(x)$ การประมาณค่าแบบพาเด จะแสดงว่า การประมาณค่าแบบเทย์เลอร์จะดีกว่าในช่วงแคบ ๆ และบนช่วง $[-0.1,0.1]$ เราจะได้ $E_R(x) = -0.0000000004$ และ $E_T(1) = 0.0000000966$ เพื่อให้ ขนาดของค่าคลาดเคลื่อนสำหรับ $R_{4,4}(x)$ มีค่าประมาณ 0.384% ของขนาดของค่าคลาดเคลื่อนสำหรับ $P_6(x)$



รูปที่ 3.19 (a) กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อน $E_R(x) = \cos(x) - R_{4,4}(x)$ สำหรับการประมาณค่าแบบพาเดของ $R_{4,4}(x)$ (b) กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อน $E_P(x) = \cos(x) - P_6(x)$ ของการประมาณค่าแบบเทย์เลอร์ของ $P_6(x)$

บทที่ 4

การออกแบบระบบ

เนื่องจากโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมช่วยสอน ในเรื่องการประมาณค่าด้วยพหุนาม ดังนั้นในการออกแบบโปรแกรม จึงทำให้ง่ายต่อความเข้าใจแก่ผู้เรียนมากที่สุด โดยมีการรับข้อมูลเข้าเป็นขั้นตอน นำข้อมูลเข้าที่ได้มาผ่านวิธีการประมาณค่าแต่ละวิธีเป็นขั้นตอน และแสดงผลลัพธ์ที่ได้ออกทางหน้าจอ

เมื่อการเรียนในเรื่องการประมาณค่าให้ได้ผลมากที่สุด จึงจัดให้มีวิธีการศึกษาเป็น 3 วิธีดังนี้

วิธีที่ 1 คำอธิบายและตัวอย่าง

วิธีที่ 2 แบบฝึกหัด

วิธีที่ 3 กำหนดข้อมูลเอง

1. การนำเสนอ

ขั้นตอนการทำงานทั้ง 3 วิธีจะเหมือนกัน ในส่วนการของการเก็บข้อมูล, การประมาณค่า และการแสดงผล แต่จะต่างกันที่วิธีการนำเสนอ กล่าวคือ

1. วิธีที่ 1 คำอธิบาย และตัวอย่าง

   จะแสดงคำอธิบาย และขั้นตอนการประมาณค่าแต่ละวิธีในส่วนท้ายของแต่ละวิธีจะมีตัวอย่างเพิ่มเติมโดยข้อมูลในตัวอย่างจะกำหนดจากในส่วนของโปรแกรม และมีการแสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

2. วิธีที่ 2 แบบฝึกหัด

   จะแสดงตารางข้อมูล โดยข้อมูลที่ใช้ได้จากการกำหนดไว้ในส่วนของโปรแกรมจะแสดงโจทย์คำถาม และตัวเลือกให้ 4 ตัวเลือกให้เลือก และยังมีการแสดงวิธีเฉลยเป็นขั้นตอนด้วย

3. วิธีที่ 3 กำหนดเอง

   จะมีการรับข้อมูลจากเรียนคือ จำนวนข้อมูล วิธีการประมาณค่าที่ใช้ และข้อมูลเป็นคู่อันดับ (x,y) ผ่านวิธีการประมาณค่า และแสดงผล

   <u>การเก็บข้อมูล</u>

   จะเก็บข้อมูลเป็นอะเรย์ 2 อะเรย์ คือ

   คู่อันดับ (x,y) จะเก็บ x เป็นอะเรย์ x 1 มิติ

   และ y เป็นอะเรย์ y 1 มิติ

   และมีการเรียงลำดับตาม x

   เช่น ข้อมูล 5 ตัว คือ $(1,2),(2,4),(3,5),(6,7),(8,10)$

ตำแหน่งที่	1	2	3	4	5
อะเรย์ x	1	2	3	6	8
อะเรย์ y	2	4	5	7	12

2. ขั้นตอนการทำงาน

อาจจะสรุปขั้นตอนการทำงานโดยทั่วไปของวิธีการประมาณค่าแต่ละวิธีซึ่งอาจมีบางวิธีที่แตกต่างกันไปบ้างเล็กน้อย แต่ก็จะมีขั้นตอนที่เหมือน ๆ กัน ดังนี้

1. รับวิธีการประมาณค่า โดยให้ผู้เรียนเลือกจากตัวเลือกที่มีให้
2. รับจำนวนข้อมูล
3. ตรวจสอบความถูกต้องของชนิดข้อมูลที่รับจะต้องเป็นชนิด int (จำนวนเต็ม) เท่านั้น หากไม่ถูกต้องจะแสดงข้อความบอกความผิดพลาดที่เกิดขึ้นต่อผู้เรียน และให้ผู้เรียนป้อนข้อมูลใหม่
4. รับข้อมูล (x, y) จำนวน n ชุด โดยตรวจสอบชนิดข้อมูลที่รับว่าต้องเป็นชนิดfloat (จำนวนจริง) เท่านั้น หากไม่ถูกต้องจะแสดงข้อความบอกความผิดพลาดต่อผู้เรียน และให้ผู้เรียนป้อนข้อมูล ใหม่

   และจากข้อบังคับของวิธีการประมาณค่าที่ข้อมูล$\{ (x_i, y_i) | i = 1,2,3,\ldots,n \}$จะมีข้อกำหนด คือ $x_i \neq y_i$ สำหรับ $i \neq j$ จึงต้องตรวจสอบข้อมูล (x, y) ที่รับค่าใหม่ว่ามีค่า x ซ้ำกับค่า x ของข้อมูล (x, y) ที่รับไปแล้วหรือไม่ ถ้าซ้ำให้แสดงข้อความบอกความผิดพลาดต่อผู้เรียน และให้ผู้เรียนป้อนข้อมูลใหม่
5. นำข้อมูลทั้งหมดที่รับมาผ่านวิธีการประมาณค่าตามแต่ละวิธีที่รับเข้ามา
6. แสดงผลการประมาณค่าที่จุด x

3. การเชื่อมโยงแต่ละส่วนของโปรแกรม

จะมีการใช้หน้าจอต่าง ๆ เชื่อมโยงเข้าด้วยกัน การแสดงแต่ละหน้าจอเป็นแบบ 2 ทาง คือ ทางไป และย้อนกลับ ผู้เรียนสามารถดูหน้าจอถัดไปได้เรื่อย ๆ และสามารถย้อนกลับไปหน้าจอแรก ๆ ที่ผ่านมา เพื่อดูหน้าจอหรือเปลี่ยนข้อมูลที่ใส่ลงไปได้

4. Software ที่ใช้พัฒนาโปรแกรม

4.1 Borland C++ Builder

เนื่องจากภาษา C เป็นภาษาที่มีประสิทธิภาพในการเขียนโปรแกรม และการเขียนโปรแกรมบน Window กำลังเป็นที่สนใจในขณะนี้ จึงได้เลือกใช้ Borland C++ Builder version 1.0 ในการพัฒนาโปรแกรม เพราะมี Component และ tool ต่าง ๆ ที่เอื้ออำนวยต่อการติดต่อกับผู้เรียน โดยจะกล่าวถึง Component ดังนี้

<u>Form</u> - หน้าจอต่าง ๆ ที่ใช้จะสร้างจาก Form

EditBox - เป็น Component ที่ให้ผู้เรียนใส่ข้อมูลลงไป เช่น จำนวนข้อมูล , ค่าของ x , ค่าของ y ฯลฯ

RadioButton - ใช้ในส่วนของตัวเลือกให้ผู้เรียนเลือกตัวเลือกใดตัวเลือกหนึ่งเพียงอันเดียวคือ ตัวเลือกวิธีการประมาณค่า และตัวเลือกคำตอบ

StringGrid - ใช้แทนตารางข้อมูลที่มีข้อมูลคู่อันดับ (x, y) ซึ่งเป็น Componentที่สำคัญที่ช่วยทำให้ง่ายต่อการแสดงข้อมูลคู่อันดับ (x, y)

ListBox - ใช้แสดงวิธีทำเป็นบรรทัด ๆ และพหุนามประมาณค่าที่ได้ที่มีมากกว่า 1 สมการ (สไปลน์ดีกรีสาม) มีลูกศรเลื่อนขึ้นลงเมื่อเลื่อนไปบรรทัดอื่น ๆ ที่ต้องการ

ในส่วนของอัลกอริทึมที่ใช้ เราใช้ C++ ในการเขียน

4.2 Microsoft Word 7.0

ในส่วนของการตกแต่งโปรแกรม เช่น ชื่อหัวข้อ , ชื่อเมนู เพื่อความสะดุดตา และน่าสนใจ จึงใช้การประดิษฐ์ตัวอักษรใน Microsoft Word 7.0 และแปลงเป็นไฟล์ .BMP ใน Photoshop 5.0 และตกแต่งเพิ่มเติมให้สวยงามยิ่งขึ้น

5. การออกแบบหน้าจอ และอินเตอร์เฟส

เน้นการใช้งานให้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมถึงแสดงข้อมูล และรายละเอียดที่สำคัญในหน้าจอเดียว ซึ่งสิ่งสำคัญคือ ความสวยงาม เนื่องจากโปรแกรมเป็นโปรแกรมช่วยสอน เพื่อให้เกิดความสะดุดตาแต่ผู้เรียนจึงต้องมีความเด่น และดึงดูดความสนใจ

บทที่ 5

การประเมินผล

ผลการประเมินจากการทดลองโปรแกรมช่วยสอนเรื่องการประมาณค่าด้วยสมการหุนาม มีดังนี้

1. ความดึงดูดความสนใจในการใช้โปรแกรม

   เนื่องจากรูปแบบและสีที่ใช้ในการตกแต่งหน้าจอมีลักษณะที่โดดเด่นและสะดุดตา โดยการใช้ลักษณะของตัวอักษรที่แปลก การนำรูปภาพเข้ามาช่วยเพิ่มสีสันให้กับหน้าจอ ทำให้โปรแกรมช่วยสอนนี้มีรูปแบบที่ไม่เหมือนโปรแกรมบนวินโดว์โดยทั่วๆ ไป ทำให้ผู้ที่ใช้โปรแกรมไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการใช้โปรแกรม

2. ความสะดวกในการใช้งานของผู้ใช้

   เนื่องจากโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมช่วยสอน ดังนั้นการใช้คำสั่งต่างๆ เพื่อให้โปรแกรมทำงานจึงออกแบบมาให้ง่ายต่อความเข้าใจ และสามารถใช้ได้ทันที ไม่ต้องเสียเวลาในการพิจารณาว่าปุ่มนั้นใช้ทำอะไร (ในกรณีที่ใช้ภาพเป็นสื่อ) ได้มีการนำตารางมาใช้เพื่อแสดงเซตของจุดข้อมูลต่างๆ ทำให้ง่ายต่อความเข้าใจ มีการเก็บข้อมูลอย่างเป็นระเบียบ มี scrollbar ให้เลื่อนในกรณีที่มีจำนวนข้อมูลมาก เพื่อไม่ทำให้เปลืองที่บนหน้าจอ

3. ความเข้าใจในสิ่งที่โปรแกรมต้องการสื่อต่อผู้ใช้

   วัตถุประสงค์ที่สำคัญของโปรแกรมช่วยสอนนี้คือ ต้องการให้ผู้ใช้ได้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาของวิชา Numerical Analysis มากขึ้น ซึ่งเมื่อนำไปทดลองใช้ก็ปรากฏว่า ได้ผลดีในระดับหนึ่ง คือผู้ใช้สามารถเข้าใจขั้นตอนในการประมาณค่า และสามารถคิดตามไปกับโปรแกรมเป็นขั้นๆ ได้ดี และผู้ใช้เองก็สามารถนำข้อมูลมาทดลองประมาณค่าเพื่อตรวจสอบคำตอบได้อีกด้วย

4. ความพิเศษเหนือกว่าโปรแกรมช่วยสอนโดยทั่วๆ ไป

   ในส่วนของวิธีเรียนในวิธีที่ 3 กำหนดเอง ในส่วนนี้สามารถใช้เป็น Application ตัวหนึ่งในทางคอมพิวเตอร์ เช่น เมื่อมีเซตของข้อมูลชุดหนึ่งที่อาจได้จากการทดลองหรือการวัดค่าทางกายภาพ เราต้องการประมาณค่าที่จุดใดๆ หรือต้องการหาพหุนามที่สอดคล้องกับข้อมูลชุดนี้ ก็สามารถนำข้อมูลชุดดังกล่าวมาใช้กับโปรแกรมนี้ได้

บทที่ 6

สรุปผลและเสนอแนะ

1. สรุปผล

โปรแกรมช่วยสอนเรื่องการประมาณค่าด้วนสมการพหุนาม จะสามารถแสดงคำอธิบายถึงขั้นตอนการประมาณค่า และมีตัวอย่างประกอบที่แสดงถึงการประมาณค่าสำหรับวิธีนั้นๆ ในส่วนของแบบฝึกหัดที่ต้องการให้ผู้ใช้ได้มีโอกาสทบทวนเนื้อหาที่ได้ศกษามาจากบทเรียน และมีส่วนของผลเฉลยเองให้ผู้เรียนได้เข้าใจและทราบถึงวิธีการทำให้ได้มาซึ่งคำตอบนั้นๆ และในส่วนสุดท้ายคือส่วนของการกำหนดค่าเอง เป็นการเอื้อประโยชน์ให้ผู้เรียนสามารถนำข้อมูลมาเพื่อทำการประมาณค่าหรือครวจสอบคำตอบที่คิดได้ สำหรับในการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด มีการแสดงกราฟ เพื่อเพิ่มความเข้าใจให้กับผู้ใช้มากยิ่งขึ้น

2. ข้อจำกัดของโปรแกรม

   1. โปรแกรมช่วยสอนนี้ถูกเขียนขึ้นบน Windows 95 หรือ Windows 98 จึงไม่สามารถนำไปใช้กับ Windows 16 บิต หรือเรียกใช้งานจากดอสได้
   2. เนื่องจากเป็นการประมาณค่า ซึ่งย่อมเกิดความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า โปรแกรมนี้ยังไม่สามารถแสดงค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดตากการประมาณค่าได้

3. ข้อเสนอแนะ

จากการออกแบบและพัฒนาโปรแกรมซึ่งทำมาถึงระดับหนึ่ง หากมีผู้สนใจและต้องการพัฒนาโปรแกรมต่อ จึงมีข้อเสนอแนะ ซึ่งจะเป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมต่อไปดังนี้

   1. เนื่องจากในปัจจุบันการทำงานบนเครือข่ายอินเตอร์เน็ตกำลังเป็นที่นิยมกัน จึงน่าจะได้มีการนำโปรแกรมนี้ขึ้นใช้บนเครือข่าย เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้ที่สนใจได้เข้ามาใช้โปรแกรม
   2. ควรจะมีการแสดงกราฟเปรียบเทียบระหว่างจุดข้อมูลและกราฟของพหุนามที่ประมาณค่าได้ เพื่อให้เห็นถึงความสอดคล้องกันในทุกๆ วิธีการประมาณค่า ซึ่งโปรแกรมนี้ได้ทำเพียงบางส่วนคือในเรื่องการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดเท่านั้น
   3. ควรจะทำโปรแกรมช่วยสอนนี้ในรูปของ Multimedia เพื่อเพิ่มความสนใจให้กับผู้เรียนมากยิ่งขึ้น
   4. ควรจะมีการเขียนโปรแกรมในส่วนของการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าต่างๆ โดยใช้ข้อมูลชุดเดียว เพื่อให้เห็นถึงความคลาดเคลื่อน และความแตกต่างสำหรับการประมาณค่าในแต่ละวิธี
   5. ในส่วนของแบบฝึกหัดและตัวอย่าง ควรจะมีส่วนของโปรแกรมที่สามารถปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงได้ เพื่อให้มีข้อมูลที่ทันสมัยตลอดเวลา

6. ควรจะมีการเขียนโปรแกรมในส่วนที่ติดต่อกับเครื่องพิมพ์ เพื่อสามารถสิ่งพิมพ์ผลลัพธ์ออกทางเครื่องพิมพ์ได้

<u>หมายเหตุ</u>

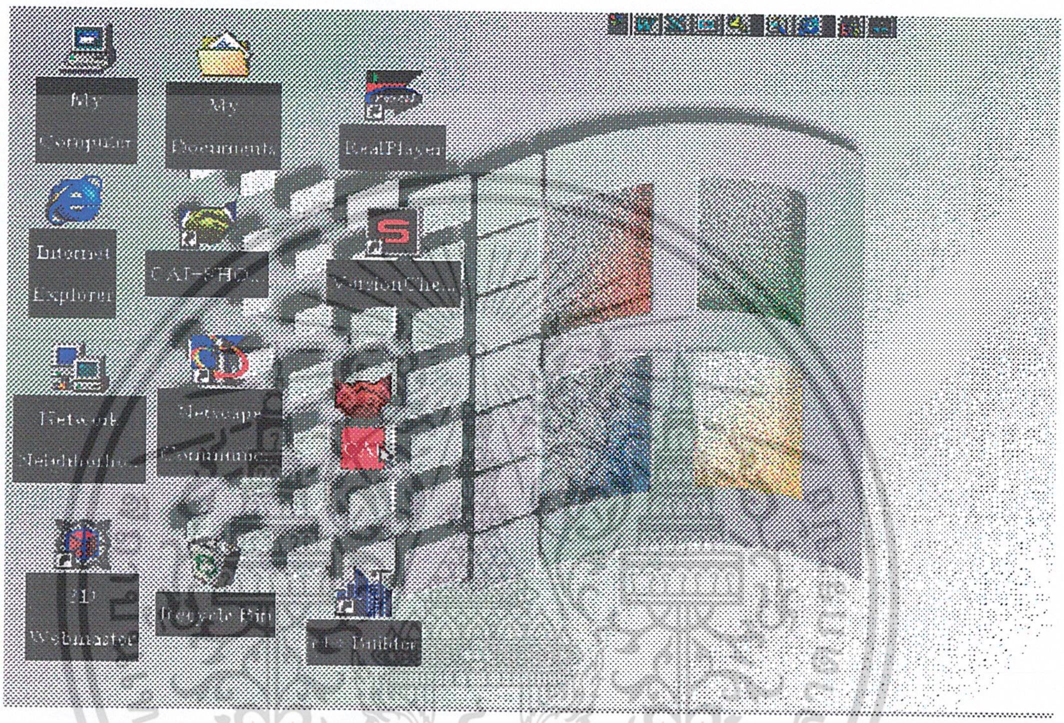
ในเรื่องการประมาณพหุนามเชิงตั้งฉากและประมาณค่าเป็นช่วง (Bezier และB-Spline) ไม่ได้จัดทำโปรแกรมในส่วนนี้ เนื่องจากการใส่ข้อมูลและการแสดงผลแตกต่างจากการประมาณค่า โดยวิธีอื่น ๆ จึงขอเสนอแนะให้นักศึกษาปีต่อ ๆ ไป ได้ศึกษาเพิ่มเติมในส่วนนี้

ภาคผนวก

คู่มือการใช้โปรแกรมช่วยสอน

1. การเรียกใช้โปรแกรม

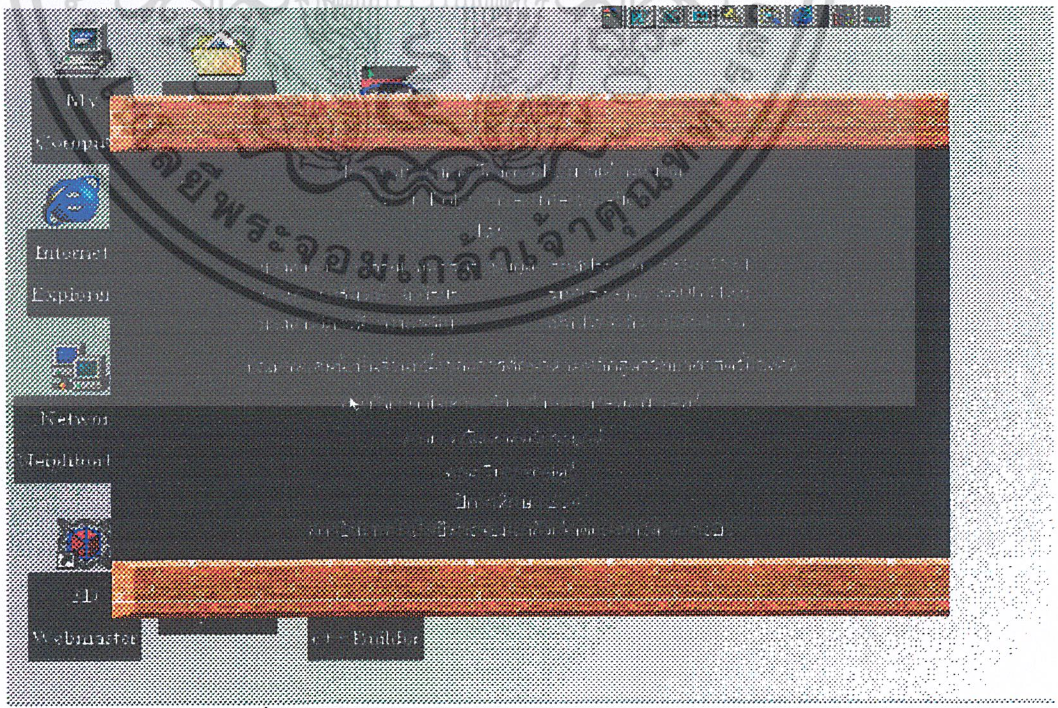
เมื่อทำการเปิดเครื่อง และบูทโปรแกรม Windows เรียบร้อยแล้ว เมื่อต้องการเรียกใช้โปรแกรม ให้นำเมาส์ไปคลิกที่ไอคอนดังภาพที่ 1



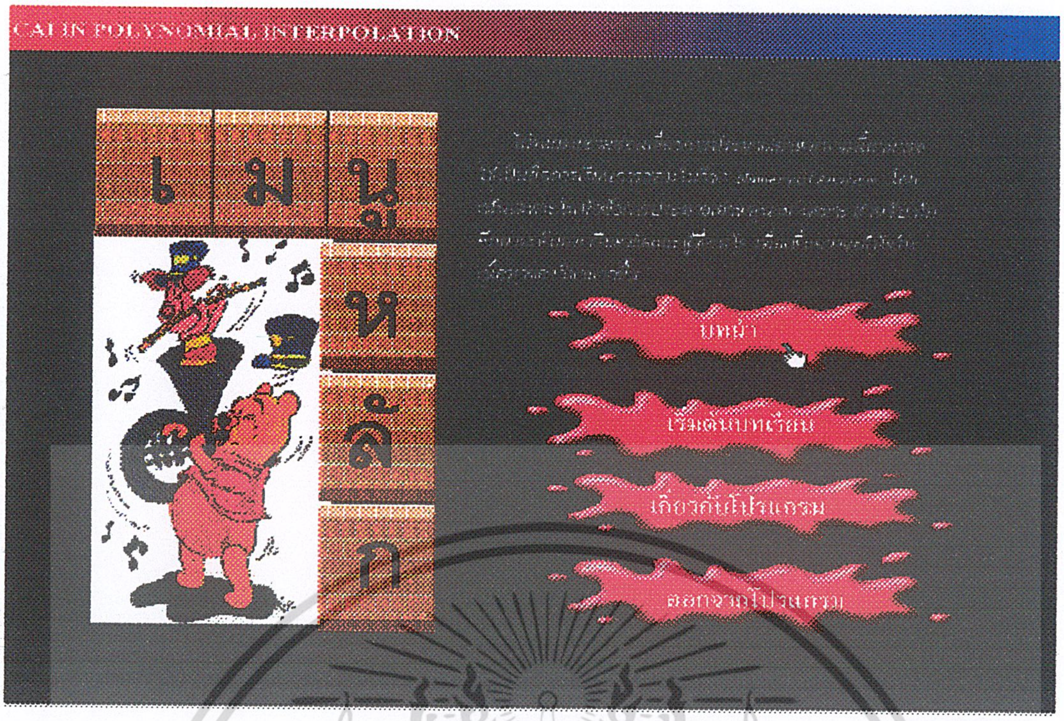
ภาพที่ 1 แสดงไอคอนของโปรแกรม

หลังจากนั้นหน้าจอจะแสดงชื่อของโปรแกรม (ภาพที่ 2) และรายละเอียดเกี่ยวกับโปรแกรม (ภาพที่ 3) จนกระทั่งหน้าจอจะแสดงเมนูหลักของโปรแกรม(ภาพที่ 4)

ภาพที่ 2 แสดงชื่อของโปรแกรม



ภาพที่ 3 แสดงรายละเอียดของโปรแกรม

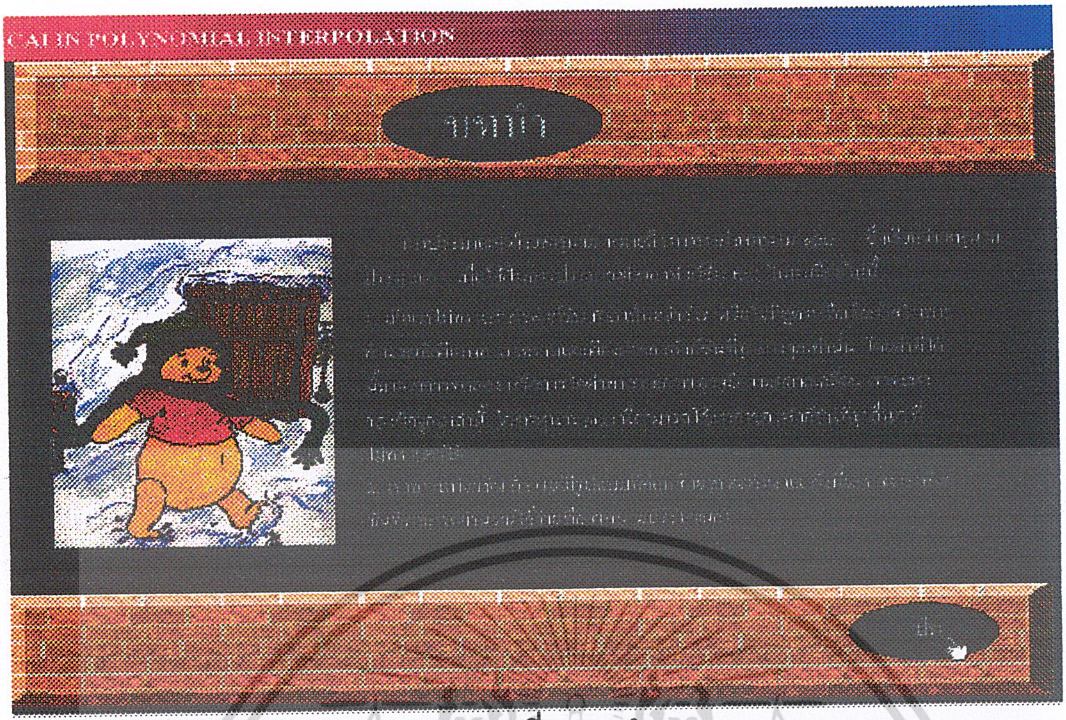


ภาพที่ 4 แสดงเมนูหลักของโปรแกรมช่วยสอน

2. **<u>เมนูหลักของโปรแกรม</u>**

เมนูหลักของโปรแกรมจะมีรายการให้เลือกด้วยกันจำนวน 4 รายการ ให้คลิกเลือกที่รายการที่ต้องการ โดยรายละเอียดของแต่ละรายการ มีดังนี้

- ***บทนำ*** เมื่อเลือกรายการนี้จะปรากฏหน้าจอที่บอกถึงที่มาของการประมาณค่าด้วยพหุนาม (ภาพที่ 5)
- ***เริ่มต้นโปรแกรม*** เมื่อเลือกรายการนี้จะนำผู้เรียนเข้าสู่การเรียน โดยจะกล่าวรายละเอียดในหัวข้อที่ 3
- ***เกี่ยวกับโปรแกรม*** เมื่อเลือกรายการนี้ จะแสดงหน้าจอที่บอกรายละเอียดเกี่ยวกับโปรแกรม เช่น รายชื่อผู้จัดทำ,อาจารย์ที่ปรึกษา. ภาควิชา,ปีการศึกษา ฯลฯ (ภาพที่ 6)
- ***ออกจากโปรแกรม*** เมื่อเลือกรายการนี้จะนำผู้เรียนออกจากโปรแกรมช่วยสอนกลับไปสู่หน้าจอ Windows ตามเดิม



ภาพที่ 5 บทนำ

ภาพที่ 6 เกี่ยวกับโปรแกรม

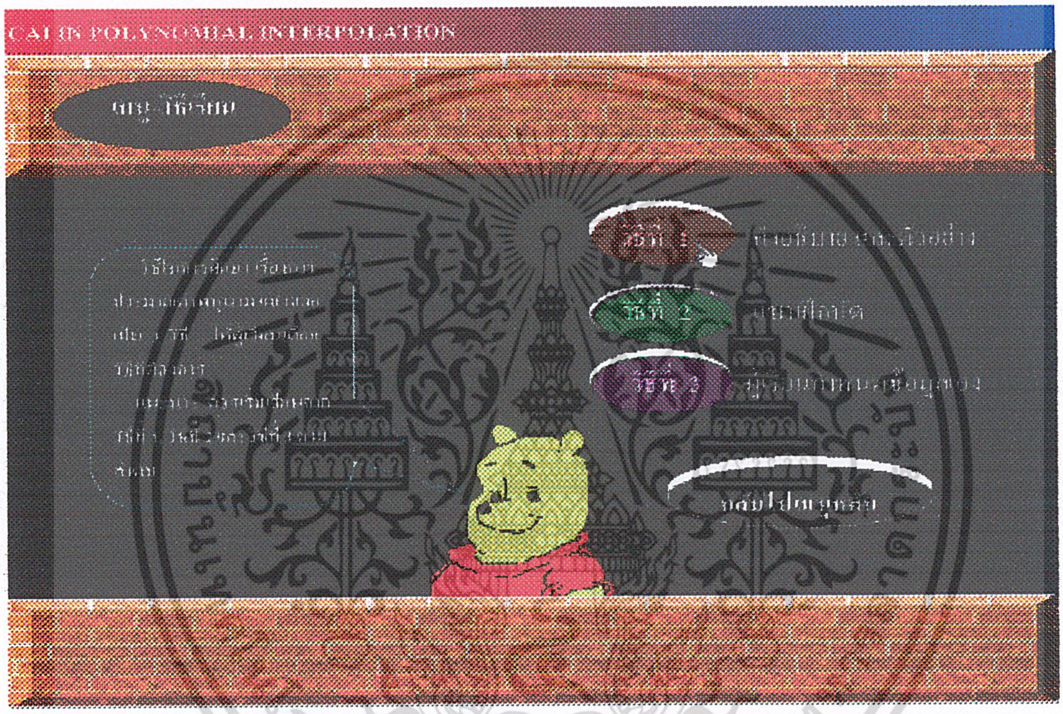
3. เริ่มต้นบทเรียน

เมื่อเลือกรายการ " เริ่มต้นบทเรียน " จากเมนูหลักแล้ว จะแสดงเมนู-วิธีเรียน (ภาพที่ 7)

ซึ่งมีวิธีเรียนด้วยกัน 3 วิธีคือ

- ***วิธีที่ 1*** คำอธิบาย และ ตัวอย่าง
- ***วิธีที่ 2*** แบบฝึกหัด
- ***วิธีที่ 3*** กำหนดเอง

ให้ผู้ใช้เลือก โดยนำเมาส์ไปคลิกที่คำว่า " วิธีที่ ..." (เมาส์จะปรากฏเป็นรูปมือชี้ แสดงว่าคลิกเลือกรายการได้)



ภาพที่ 7 เมนู-วิธีเรียน

4. **<u>วิธีที่ 1 คำอธิบาย และตัวอย่าง</u>**

เมื่อเลือกเรียนจากวิธีที่ 1 หน้าจอจะแสดงเมนู-บทเรียน (ภาพที่ 8) ให้ผู้เรียนเลือกหัวข้อที่ต้องการ โดยลากเมาส์ไปคลิกที่ลูกศรหน้าชื่อหัวข้อนั้น ๆ

เนื่องจากในเมนูนี้ จะมีทั้งหมด 4 หัวข้อ เมื่อเลือกแต่ละหัวข้อจากเมนูนี้ โปรแกรมจะแสดงหน้าจอที่คล้ายกัน แต่ต่างกันที่เนื้อกาของแต่ละหัวข้อ ทางผู้เขียนโปรแกรมจึงขออธิบายการใช้งานเพียงหัวข้อที่ 1 หัวข้อเดียวเท่านั้น สำหรับในหัวข้ออื่นๆ ก็มีลักษณะการใช้งานที่เหมือนๆ กัน

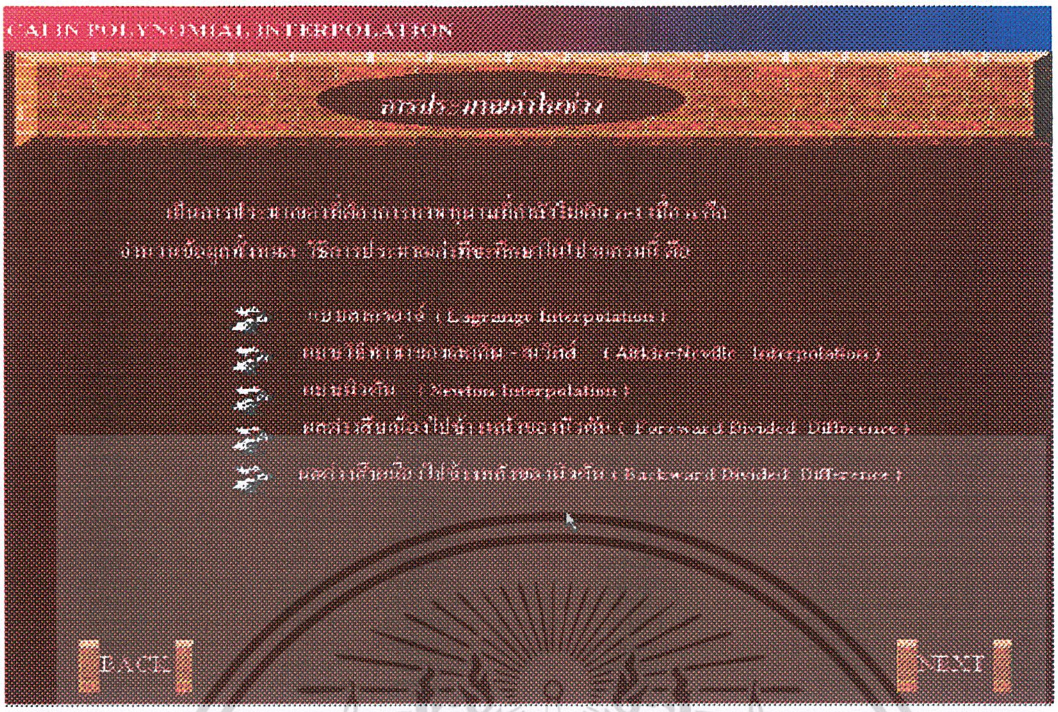
หลังจากลากเมาส์ไปคลิกที่ ลูกศรหน้าชื่อแล้ว จะปรากฏหน้าจอแรกของบทเรียน (ภาพที่ 9) ที่ด้านล่างของจอที่คำสั่งให้เลือก 2 คำสั่ง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้ ดังนี้

- " ***BACK*** " เมื่อต้องการไปบทเรียนในหน้าที่แล้ว
- " ***NEXT*** " เมื่อต้องการไปบทเรียนในหน้าต่อไป

ให้ผู้ใช้ลองคลิกที่ " NEXT " ไปเรื่อย ๆ จะสังเกตได้ว่าเมื่อจบคำอธิบายในแต่ละเรื่อง จะปรากฏคำสั่ง " EXAMPLE " ที่ด้านล่างของจอ

- " ***EXAMPLE*** " เมื่อผู้ใช้ต้องการดูตัวอย่างเพิ่มเติม ให้ลากเมาส์ไปคลิกEXAMPLE

ภาพที่ 8 เมนู-บทเรียน



ภาพที่ 9 แสดงชื่อวิธีการประมาณค่าเมื่อเลือกหัวข้อที่ 1

ภาพที่ 10 แสดงคำอธิบาย

5. <u>หน้าจอตัวอย่าง</u>

เมื่อคลิกที่ " EXAMPLE " จากบทเรียน จะแสดงหน้าจอตัวอย่าง (ภาพที่ 11) หน้าจอแสดงตัวอย่าง

หน้าจอตัวอย่างจะประกอบด้วยตารางข้อมูล และโจทย์อยู่ด้านบนของจอโดยผู้ใช้สามารถเลือกใช้คำสั่งที่ต้องการได้ โดยคลิกที่เมาส์ทางด้านขวา(ที่ตัวเมาส์)ที่บริเวณใดๆ บนจอ จะปรากฏป๊อปอัพเมนูขึ้น (ภาพที่ 12) ให้กดเมาส์ทางด้านขวาค้างไว้ แล้วลากไปยังคำสั่งที่ต้องการ จะมีแถบสีปรากฏขึ้นที่คำสั่งนั้นๆ แล้วทำการคลิกเพื่อเลือกคำสั่งนั้น

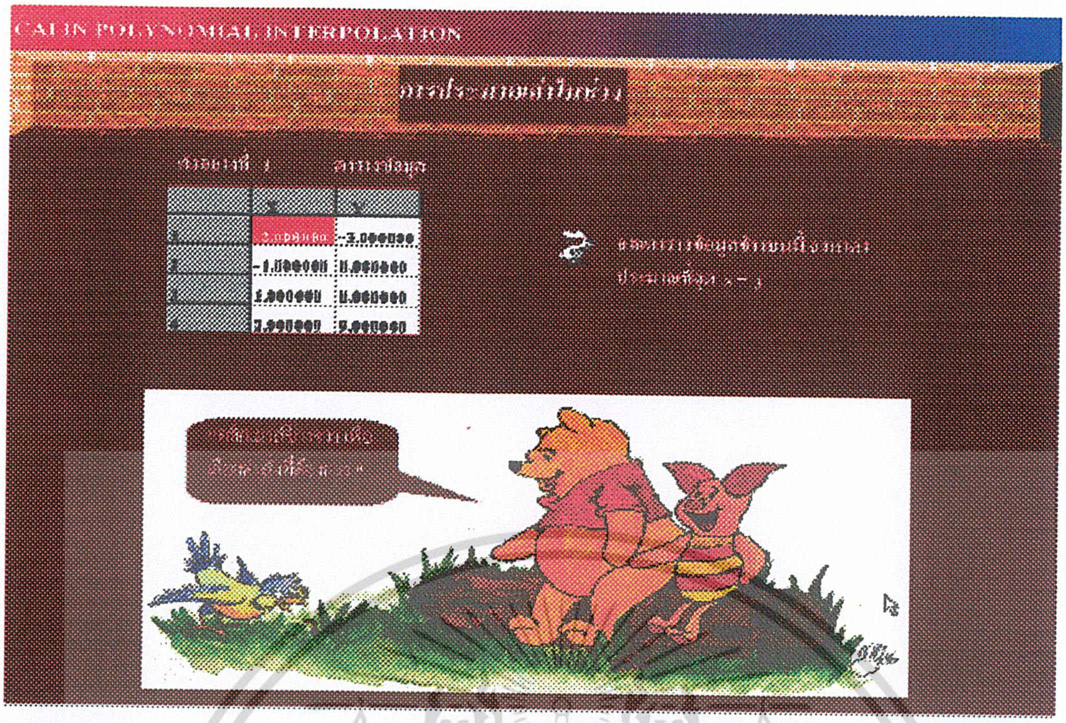
คำสั่งที่ใช้ในหน้าจอตัวอย่างมีดังนี้

- ***แสดงวิธีทำ*** เมื่อต้องการดูวิธีทำสำหรับชุดข้อมูลและโจทย์ในตัวอย่างนั้นๆ หน้าจอจะแสดง Listbox เพื่อแสดงวิธีทำ (ภาพที่ 13) หากขั้นตอนในการแสดงวิธีทำมีหลายบรรทัด ผู้ใช้สามารถใช้ Scrollbar (ลูกศรเลื่อนขึ้นลงทางด้านขวาของ Listbox) เพื่อไปดูในบรรทัดต่อๆ ไป
- ***แสดงกราฟ*** คำสั่งนี้มีเฉพาะในเรื่องการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดเท่านั้น เพื่อแสดงการเปรียบเทียบระหว่างเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดข้อมูลทั้งหมดเข้าด้วยกัน

  กับเส้นกราฟที่ได้พหุนามที่ประมาณค่าได้
- ***ตัวอย่างต่อไป*** เมื่อต้องการดูตัวอย่างต่อไป
- ***ตัวอย่างที่แล้ว*** เมื่อต้องการดูตัวอย่างที่แล้ว
- ***กลับไปหน้าจอที่แล้ว*** คำสั่งนี้มีเฉพาะในเรื่องการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดเท่านั้น หลังจากที่แสดงกราฟแล้วต้องการกลับไปยังหน้าจอตัวอย่างดังเดิม
- ***ปรับขนาดตัวอักษร*** คำสั่งนี้จะทำงานได้ เมื่อใช้คำสั่งแสดงวิธีทำแล้ว โดยคำสั่งนี้จะปรับขนาดตัวอักษรใน Listbox ให้มีขนาด 14,16,18 และ 20
- ***ปรับสี*** คำสั่งนี้จะใช้ได้ เมื่อใช้คำสั่งแสดงวิธีทำแล้ว โดยคำสั่งนี้จะปรับสีตัวอักษรและสีพื้นใน Listbox โดยมีให้เลือก 2 สี คือ

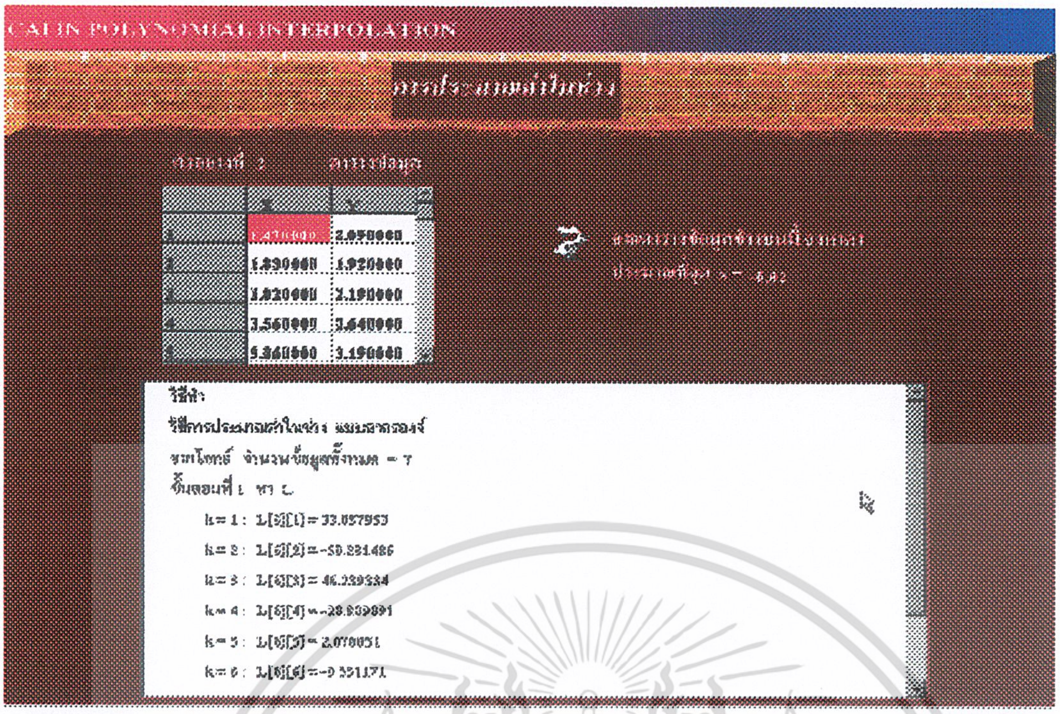
  สีดำ ตัวอักษรสีขาว สีพื้นเป็นสีดำ

  สีขาว ตัวอักษรสีดำ สีพื้นเป็นสีขาว
- ***กลับไปบทเรียน*** เมื่อต้องการออกจากหน้าจอตัวอย่าง



ภาพที่ 11 แสดงหน้าจอตัวอย่าง

ภาพที่ 12 แสดงป็อปอัพเมนู



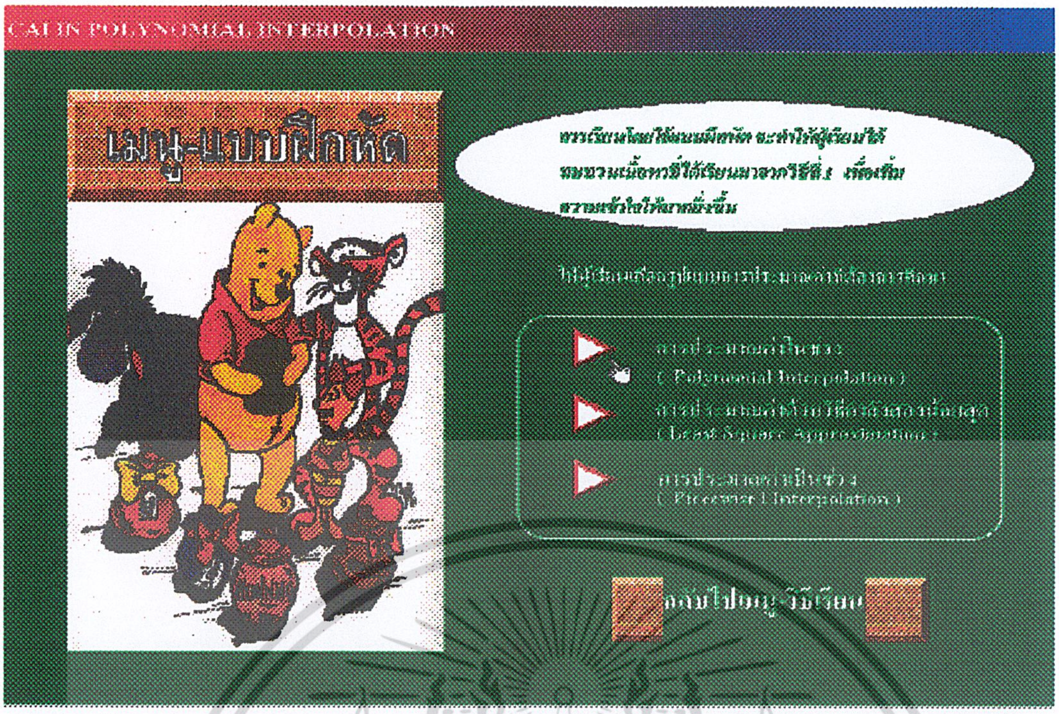
ภาพที่ 13 แสดงหน้าจอเมื่อเลือกคำสั่ง " แสดงวิธีทำ "

6. <u>วิธีที่ 2 แบบฝึกหัด</u>

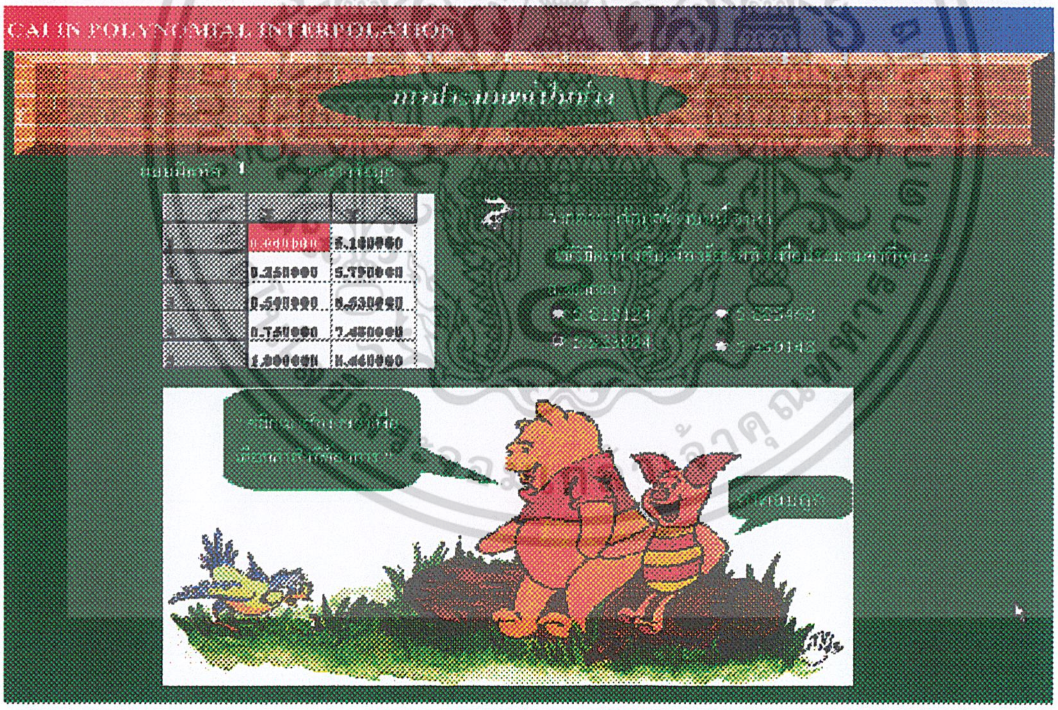
จากเมนูวิธีเรียน เมื่อเลือกวิธีเรียนวิธีที่ 2 หน้าจอจะแสดงเมนู-แบบฝึกหัด (ภาพที่ 14) เมื่อเลือกชื่อเรื่องที่ต้องการจะปรากฎหน้าจอแบบฝึกหัด (ภาพที่ 15) ซึ่งมีตาราง ข้อมูล , โจทย์และตัวเลือก 4 ตัวเลือก ทางด้านบนของจอภาพ

เช่นเดียวกับในตัวอย่าง การเรียกใช้คำสั่งต่างๆ ทำโดยการคลิกที่เมาส์ทางด้านขวา เพื่อเลือกคำสั่งที่ต้องการ ซึ่งคำสั่งโดยส่วนใหญ่จะเหมือนในตัวอย่าง ยกเว้นคำสั่ง

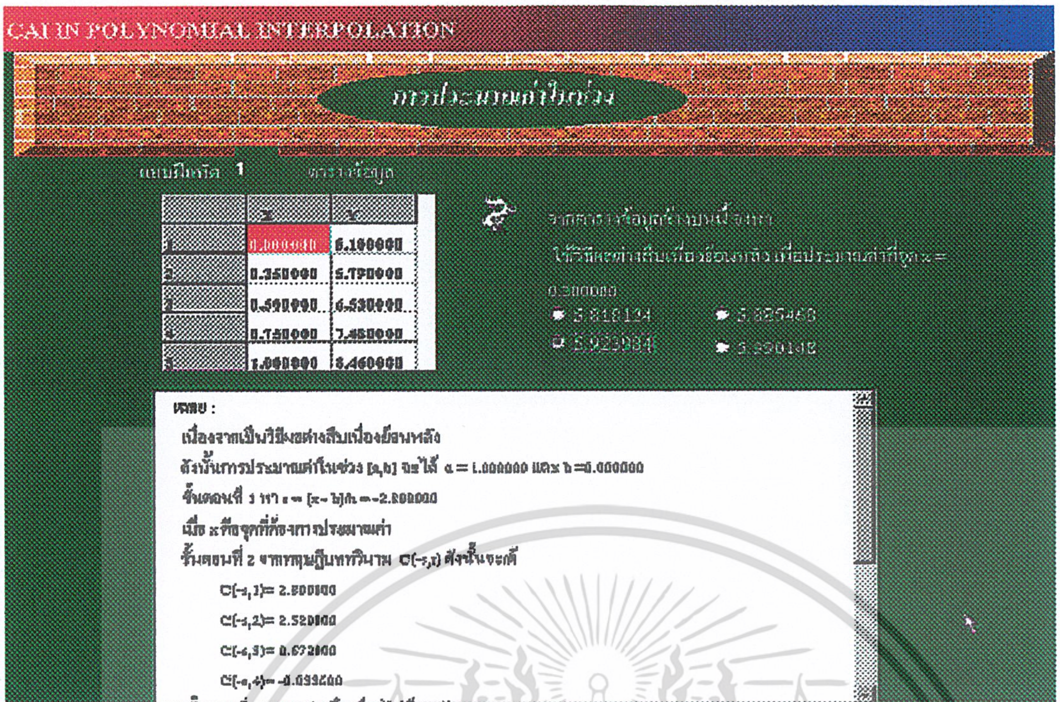
- ***ตรวจคำตอบ*** ผู้ใช้ต้องเลือกตัวเลือกใดตัวเลือกหนึ่งจากตัวเลือกทั้ง 4 ก่อน เมื่อต้องการตรวจคำตอบก็ให้เลือกคำสั่งนี้



ภาพที่ 14 แสดงเมนู-แบบฝึกหัด



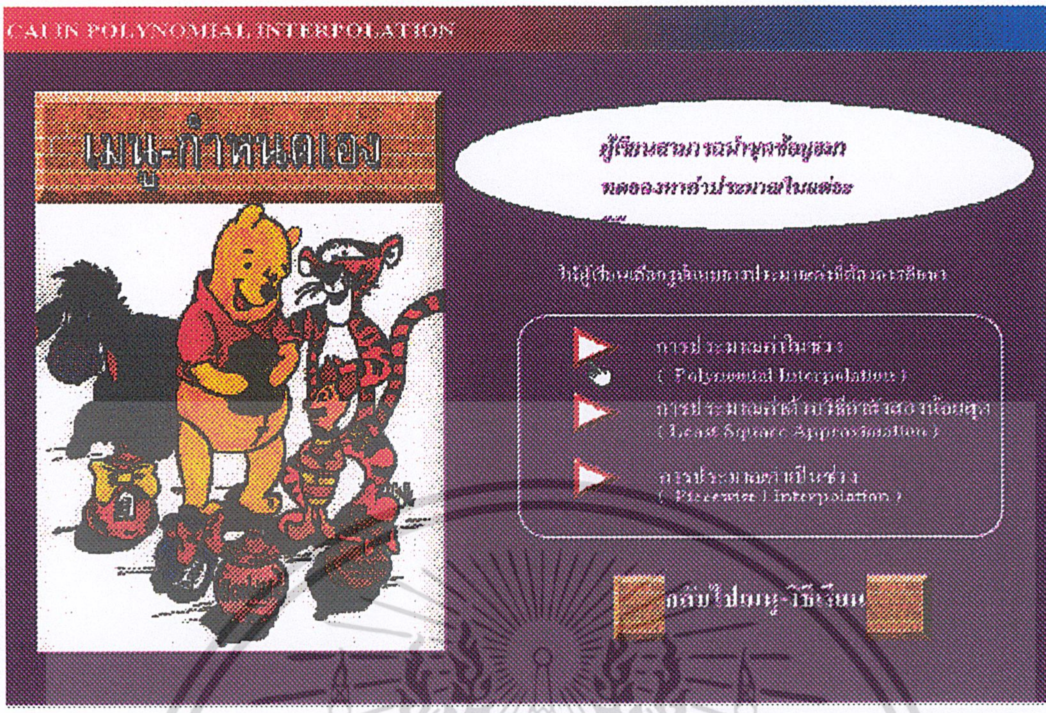
ภาพที่ 15 แสดงแบบฝึกหัด



ภาพที่ 16 แสดงหน้าจอเมื่อเลือกคำสั่งแสดงวิธีทำ

7. <u>วิธีที่ 3 กำหนดเอง</u>

จากเมนูวิธีเรียน เมื่อเลือกวิธีเรียนวิธีที่ 3 หน้าจอจะแสดงเมนู-กำหนดเอง (ภาพที่ 17) เมื่อเลือกขื่อเรื่องที่ต้องการจะปรากฎหน้าจอกำหนดเอง (ภาพที่ 18) จะให้ผู้ใช้สามารถนำข้อมูลใส่เป็นขั้นตอน ซึ่งเขียนไว้ทางด้านซ้าย

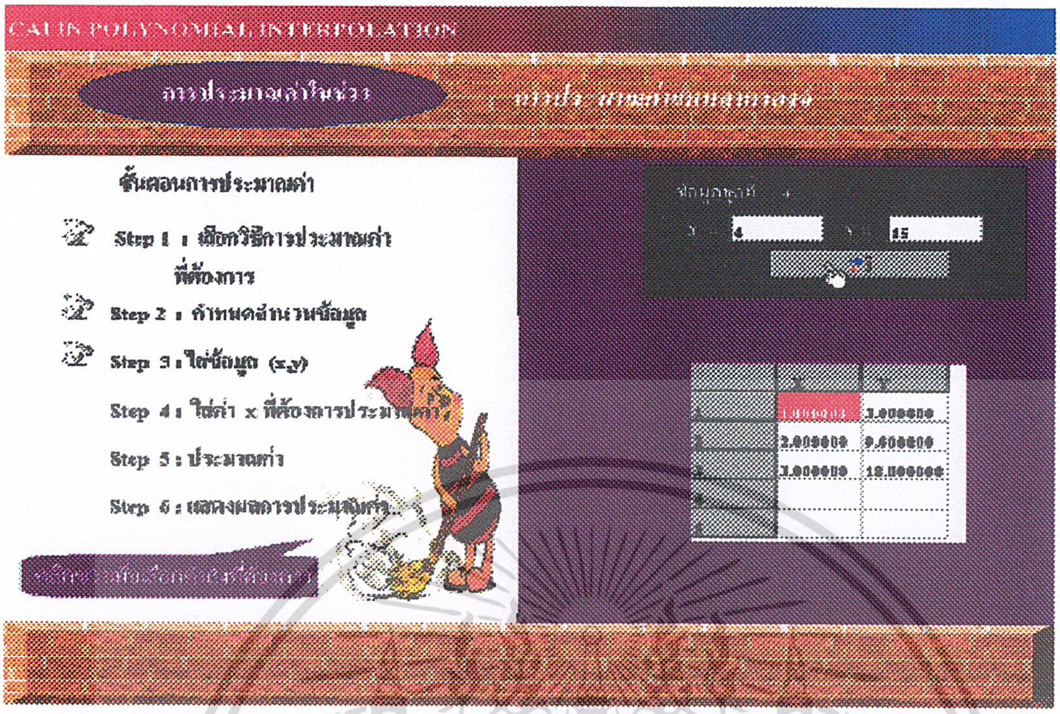


ภาพที่ 17 แสดงเมนูกำหนดเอง

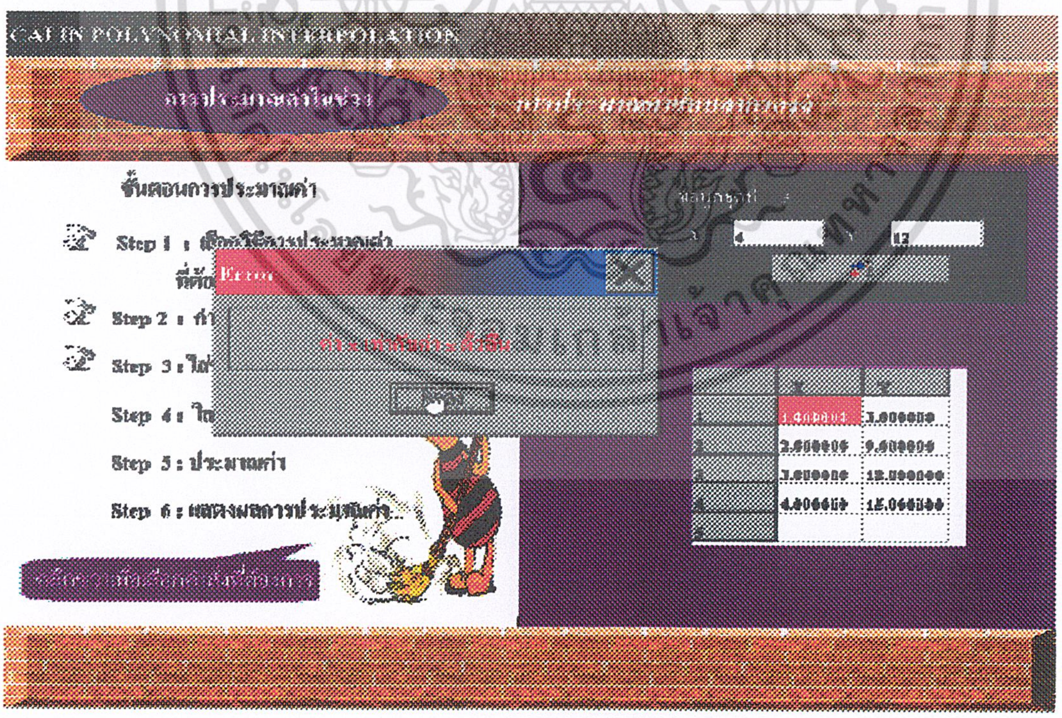
ภาพที่ 18 ให้ผู้ใช้เลือกวิธีการประมาณค่าที่ต้องการ

ภาพที่ 19 คลิกเมาส์ทางขวาเพื่อเลือกคำสั่งที่ต้องการ

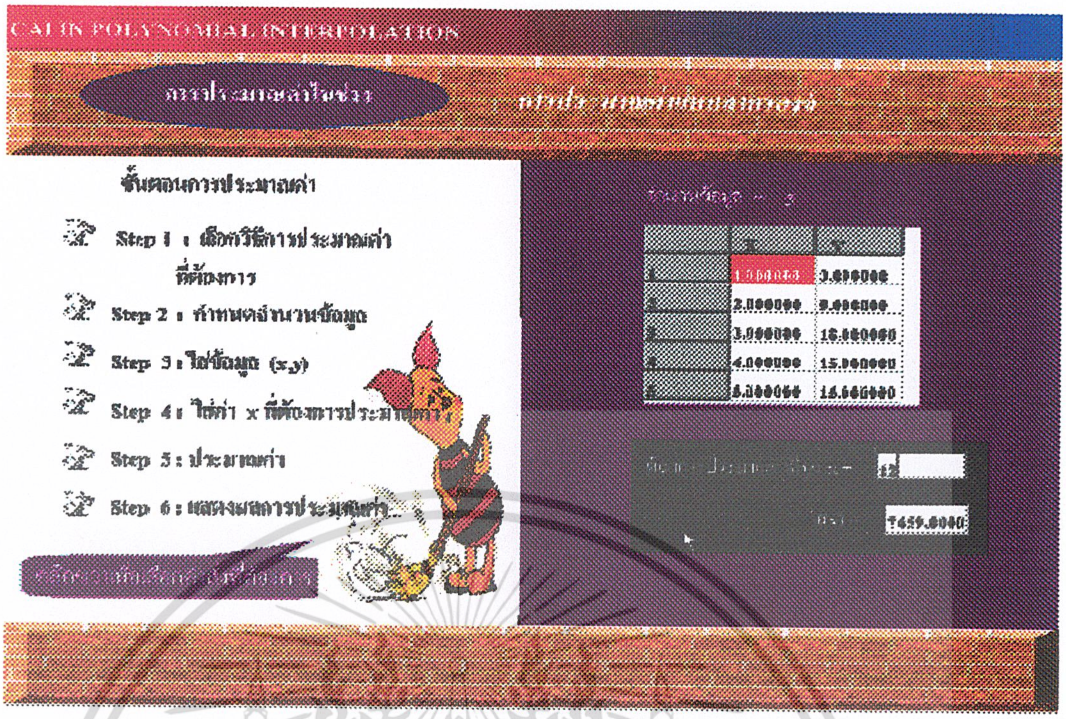
ภาพที่ 20 หน้าจอให้ผู้ใช้ป้อนจำนวนข้อมูล



ภาพที่ 21 ให้ผู้เรียนใส่ข้อมูล



ภาพที่ 22 ให้ผู้ใช้เลือกเรื่องที่ต้องการ



ภาพที่ 23 แสดงผลการประมาณค่า

บรรณานุกรม

1. ภัคคินี ยิมเรวัต. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข , โครงการตำรา : คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง , 2535.
2. ไมตรี โพธิ์สุข. การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน , โครงการตำรา : คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
3. Faires , J. Douglas. Numerical Methods. PWS Publishing Company , P.74-81,1933.
4. Gerald , Curtis F. and Wheatley. Applied numerical Analysis. 5 th ed. Massachusetts : Addison - Wesley Publishing Company , Inc.,P.233-260 , 1994.
5. Hill , Francis S. and Jr. Computer Graphics . New York : Macmillan Publishing Company , P.487-498 , 1990.
6. Kincaid , David R. and E. Ward Chency. Numerical Analysis : Mathematics of Scientific Computing. California : Brooks/Cole Publishing Company , P. 57-75 , 226-370 , 1991.
7. Mathews , John H. Numerical Methods for Mathematics , Sciences and Engineering. New York : Prentice-Hall , P.249-256 , 1993.
8. Plybon , Benjamin F. An Introduction to Applied Numerical Analysis. New York : PWS-KENT Publishing Company , P. 298-307 , 317-327 , 1992.
9. Schwarz , Hans Rudolf. Numerical Analysis : a Comprehensive Introduction. Great Britain : Anchor Press , P.199-188 , 1989.
10. Skeel ,Robert D. and Keiper , Jerry B. Elementary Numerical Computing with Mathematica. Mc Graw - Hill International Editions , P. 233-251,1993.
11. Yakowitz , Sidney and Szidarovszky ,Ferenc. An Introduction to Numerical Computation. 2 nd ed. New York : Macmillan Publishing Company , P.297-232 , 1989.