

การออกแบบประสิทธิภาพ วงจรกรองความถี่ เอฟ ไอ อาร์

EFFICIENT DESIGNS OF FIR FILTERS.



๑๙๙
ม ๑๖๓๓
๒๕๒๓
๑.๑
๐๑๐๔๐๖

กิติกรรมประกาศ	iv
บทคัดย่อ	v
ABSTRACT	vi
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ปัญหาของวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรี-เคอร์ซีฟ	1
1.2 แนวความคิดในวงจรแก้ปัญหา	1
บทที่ 2 แนะนำวงจรรองความถี่ดิจิทัล	3
2.1 บทนำ	3
2.1.1 สัญญาณที่มีความต่อเนื่องทางแกนเวลา	3
2.1.2 สัญญาณที่ไม่มีความต่อเนื่องทางแกนเวลา	4
2.2 การประมวลสัญญาณดิจิทัล	4
2.2.1 การรกรองสัญญาณดิจิทัล	4
2.2.2 การวิเคราะห์สเปกตรัม	5
2.3 ระบบและสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลา	6
2.3.1 สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลา	6
2.3.2 ระบบซิมป์-อินแวเรียนท์เชิงเส้น	8
2.3.3 เสถียรภาพและภาวะเหตุ	9
2.3.4 สมการแตกต่างเชิงเส้นสัมประสิทธิ์คงที่	9
2.3.5 การแทนระบบสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลาด้วย แกนความถี่	10
2.4 Z-ทรานส์ฟอร์ม	11
2.5 รูปแบบโครงสร้างของวงจรรองความถี่ดิจิทัล	12

2.6	การประมาณในการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัล	14
2.6.1	วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟ	15
2.6.2	วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ	19
2.7	การสร้างวงจรรองความถี่ดิจิทัล	19
2.7.1	วิธีซอฟต์แวร์	19
2.7.2	วิธีฮาร์ดแวร์	19
2.8	เปรียบเทียบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ และนอนรีเคอร์ซีฟ	20
2.9	สรุป	21
บทที่ 3	เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการออกแบบ	22
3.1	บทนำ	22
3.2	โพลีเนียร์ทรานส์ฟอร์ม	22
3.3	รีเมซัลกอริทึม	24
3.4	ไฟโบนาชีเทคนิค	26
3.5	สรุป	30
บทที่ 4	การออกแบบวงจรรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟที่ตัดจุดกำจัด ความถี่ใด ๆ ได้อย่างแน่นอน	31
4.1	บทนำ	31
4.2	การออกแบบ	31
4.2.1	วงจรรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟที่ให้ผล ตอบสนองทางขนาดราบเรียบมากที่สุด	31
4.2.2	การออกแบบแถบทรานซิชันระหว่างค่า K ที่ใกล้เคียงกัน	35
4.2.3	การออกแบบวงจรรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟ ให้ได้จุดกำจัดความถี่ตามค่าที่กำหนดใด ๆ	37

4.3	สรุป	39
บทที่ 5	การออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีแควซีฟชนิดแถบความถี่ต่ำผ่านแบบราบเรียบมากที่สุด และมียอดคลื่นเท่ากันหมดในแถบปลอดสัญญาณ	42
5.1	บทนำ	42
5.2	วิธีการออกแบบ	42
5.3	สรุป	47
บทที่ 6	การออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีแควซีฟที่ให้ผลตอบสนองทางขนาดต่อความถี่กลางราบเรียบที่สุด โดยใช้เทคนิคโฟโตนิกส์เชิงเอิร์ช	48
6.1	บทนำ	48
6.2	วิธีการออกแบบ	48
6.3	สรุป	52
บทที่ 7	สรุป	54
	บทความและหนังสืออ้างอิง	56
	ภาคผนวก	57
	คอมพิวเตอร์โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 5	58
	คอมพิวเตอร์โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 6	62
	ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ	64

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จขึ้นมาได้ด้วยความกรุณาจาก อาจารย์ ดร.ไพรัช รัชชพงษ์ ที่ได้ให้คำแนะนำที่มีค่าและชี้แนวทางที่เป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาการทำวิจัย ตลอดระยะเวลาที่ทำการศึกษายู่ ซึ่งผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

นอกจากนี้ผู้เขียนขอแสดงความขอบคุณต่อ นศ. รุ่นพี่ทุก ๆ คนที่ให้คำปรึกษาในหลาย ๆ สิ่งที่เป็นประโยชน์ ขอขอบคุณ คุณจรินทร์ บุญลิต์ ที่ให้ความสะดวกในระหว่างที่ศึกษายู่ และขอขอบคุณ คุณเพ็ญพร ตวงวโรภาส ที่กรุณาสละเวลามาช่วยพิมพ์ต้นฉบับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ไว้ ณ ที่นี้ด้วยเช่นกัน

มณูญ พ่วงพูล

บทคัดย่อ

การออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จัตตอลแบบนอนรีเคอร์ซีฟให้มีผลตอบสนองทางขนาด (magnitude response) ^{๑๐๐๓๓ ก็คืออยู่ใน}ราบเรียบมากที่สุด (The maximally flat FIR lowpass digital filter) สามารถหาคำตอบในการออกแบบให้อยู่ในรูปสูตรสำเร็จ (closed-form solution) ได้ แต่ก็ยังมีปัญหาในกรณีที่ต้องการให้ผลตอบสนองทางขนาดตัดผ่านจุดก้ำจัดความถี่ (cut-off frequency) ที่กำหนดให้ใด ๆ ได้อย่างแน่นอน วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้แสดงเทคนิคในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น โดยวิธีการออกแบบวงจรกรองความถี่ที่สามารถสร้างจุดก้ำจัดความถี่ให้มีถึงจำนวนอนันต์ เพื่อการเลือกจุดก้ำจัดความถี่ที่กำหนดให้ค่าใด ๆ ก็ได้ นอกจากนี้ยังแสดงวิธีการออกแบบในแถบความถี่ต่ำผ่านเป็นแบบราบเรียบมากที่สุด ส่วนในแถบปลอดสัญญาณเป็นแบบยอดคลื่นเท่ากันหมด (equipripple) รวมถึงการออกแบบแถบความถี่กลางผ่านแบบราบเรียบมากที่สุดไว้อีกด้วย

ABSTRACT

Maximally flat FIR lowpass digital filter design provides the advantages of giving closed-form solutions, but there still remains a problem of designing such a filter whose magnitude response passes through a prescribed cutoff frequency point. A design technique for the digital filter whose cutoff frequency can be arbitrarily specified is described to overcome such difficulty. Additionally, a design technique for monotone FIR filter with equipripple stopband including maximally flat FIR bandpass filter were also demonstrated as a consequence of the new technique developed here.

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ปัญหาของวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบอนรีเคอร์ซีฟ

ส่วนใหญ่แล้วการออกแบบวงจรรองความถี่แบบอนรีเคอร์ซีฟที่ดีที่สุด จะใช้เทคนิคของทฤษฎีออปติไมเซชัน (optimization theory) โดยเฉพาะในปัจจุบันที่มีคอมพิวเตอร์ขนาดใหญ่ประสิทธิภาพสูง อัลกอริทึม (algorithm) ต่าง ๆ ที่ซับซ้อนและเสียเวลาในการคำนวณมากในสมัยก่อนก็หมดไป เพราะเราสามารถเขียนโปรแกรม (program) ให้คอมพิวเตอร์ช่วยแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็ว แต่อย่างไรก็ตามก็มีข้อเสียอยู่ที่ว่าราคาของคอมพิวเตอร์สูง ค่าใช้จ่ายในการเช่าเวลาคอมพิวเตอร์ (computer time) ก็สูงตาม ดังนั้นบางเทคนิคในการออกแบบวงจรรองความถี่แบบอนรีเคอร์ซีฟที่ต้องใช้เวลาในการคำนวณซ้ำ ๆ (iteration) กันหลายครั้งก็ยหยาบคำตอบได้ จะเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงสูงตามไปด้วย

ปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้ทำให้มีผู้คิดเทคนิคในการออกแบบวงจรรองความถี่แบบอนรีเคอร์ซีฟให้อยู่ในรูปสูตรสำเร็จตลอดมา ตั้งแต่การใช้เทคนิคของอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) มาช่วยในการออกแบบ [1] โดยการใช้วินโดว์ฟังก์ชัน (window function) ช่วยขจัดปัญหาอันเกิดจากปรากฏการณ์ที่เรียกว่าปรากฏการณ์กิบส์ (Gibb's phenomena) ได้ แต่กระนั้นก็ยังพบปัญหาที่ไม่สามารถทำให้ผลตอบสนองทางขนาดตัดผ่านจุดก่าจัดความถี่ใด ๆ ที่กำหนดให้ได้

1.2 แนวความคิดในการแก้ปัญหา

สำหรับแนวความคิดในทางแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นนี้ ให้นำเทคนิคดั้งเดิม (classical technique) ของการออกแบบวงจรรองความถี่อนาลอกมาช่วย โดยการออกแบบ

วงจรรองความถี่แบบอนาล็อกที่สามารถออกแบบให้มีจุดกำจัดความถี่ที่จุดใด ๆ ก็ได้ถึงจำนวนอนันต์ เสร็จแล้วใช้สูตรการแปลงแบบไบลิเนียร์ (bilinear transformation) แปลงจากอนาล็อกให้เป็นดิจิทัลตามต้องการ

นอกจากนี้ผู้เขียนได้ขยายวิธีการออกแบบเพิ่มไปอีกเป็นวงจรรองความถี่ที่ให้ขนาดของผลตอบสนองมีความราบเรียบมากที่สุดในช่วงความถี่ต่ำผ่าน และมียอดคลื่นเท่ากันหมดในช่วงปลอตสัญญาณ อีกทั้งการออกแบบให้ผลตอบสนองทางขนาด มีความราบเรียบมากที่สุดในช่วงความถี่กลางผ่านไว้อีกด้วย



บทที่ 2

แนะนำวงจรกรองความถี่ดิจิทัล (Introduction to Digital Filter)

2.1 บทนำ

การกรองความถี่ (filtering) เป็นแขนงหนึ่งของการประมวลสัญญาณ (signal processing) ก่อนที่จะกล่าวถึงรายละเอียดปลีกย่อยของการกรองความถี่ ผู้เขียนจะนิยามความหมายของคำบางคำ ที่เป็นประโยชน์ในการทำความเข้าใจในหัวข้อต่อไป

คำว่าสัญญาณ (signal) จะให้คำจำกัดความว่า คือฟังก์ชันที่แทนความหมายของข้อมูล (data) หรือข่าวสาร (information) เกี่ยวกับภาวะหรือการประพฤติตัวของ ระบบทางกายภาพ (physical system) สัญญาณอาจจะเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ได้หลายตัวแปร เช่น สัญญาณคำพูด (speech signal) เขียนอยู่ในรูปแบบที่ตัวแปรเป็นแกนเวลา ส่วนสัญญาณรูปภาพจะใช้ระบบมิติเป็นตัวแปร - (spatial variables)

ตัวแปรอิสระที่ใช้เขียนเป็นคณิตศาสตร์แทนความหมายของสัญญาณ อาจจะเป็นตัวแปรที่ต่อเนื่อง (continuous) หรือไม่ต่อเนื่อง (discrete) ก็ได้ ดังนั้นการประมวลสัญญาณจึงแบ่งชนิดสัญญาณออกได้สองชนิดคือ

2.1.1 สัญญาณที่มีความต่อเนื่องทางเวลาหรือสัญญาณอนาล็อก (Continuous or Analog Signal)

คือสัญญาณที่มีความต่อเนื่องทั้งในแกนเวลาและขนาดของสัญญาณ คณิตศาสตร์พื้นฐานที่ใช้วิเคราะห์คือ สมการอนุพันธ์เชิงเส้น โดยใช้ลาปลาซทรานส์ฟอร์มช่วยแก้ปัญหา

2.1.2 สัญญาณที่ไม่มี ความต่อเนื่องทางแกนเวลาหรือสัญญาณดิจิทัล (Discrete or Digital Signal)

คือสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องกันทั้งในแกนเวลาและขนาดของสัญญาณ คณิตศาสตร์พื้นฐานที่ใช้วิเคราะห์คือ สมการแตกต่างเชิงเส้น โดยใช้ Z-ทรานส์ฟอร์มช่วยแก้ปัญหา

2.2 การประมวลสัญญาณดิจิทัล (Digital Signal Processing)

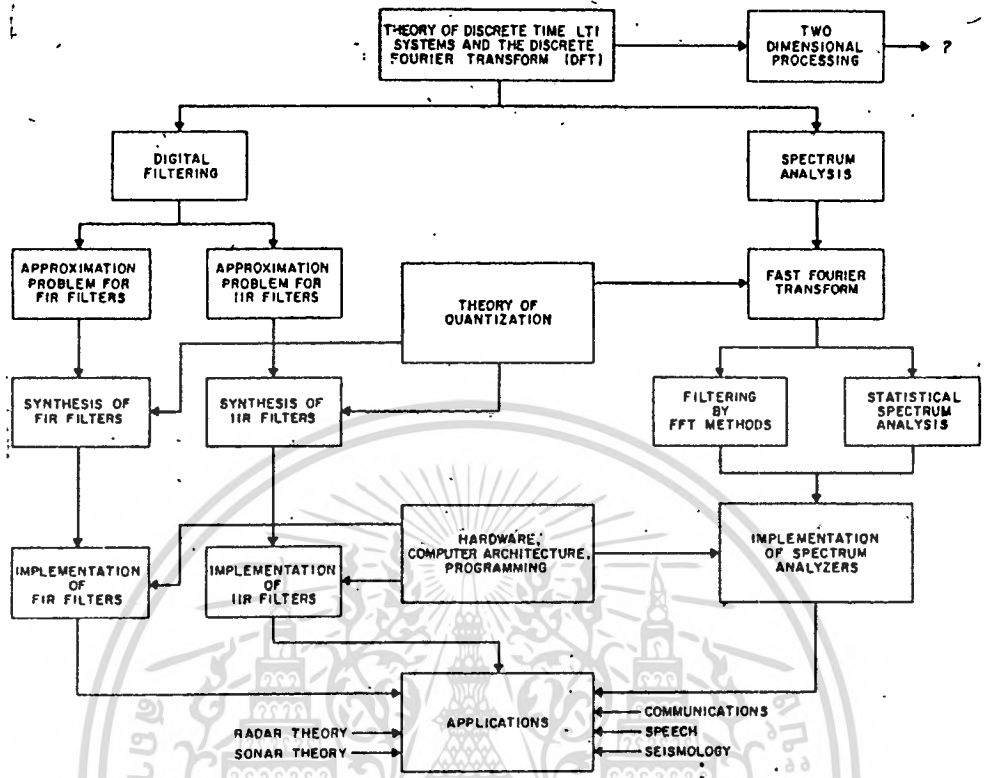
การประมวลสัญญาณดิจิทัลหมายถึง การแทนสัญญาณต่าง ๆ ด้วยลำดับของตัวเลขหรือสัญลักษณ์ และทำการประมวลลำดับเหล่านี้ออกมา วิธีการประมวลอาจจะมีจุดประสงค์ต่าง ๆ กันเช่น การประมวลคุณสมบัติของสัญญาณ หรือการแปลงสัญญาณหนึ่งให้ไปอยู่ในอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งเหมาะสมในการพิจารณาวิเคราะห์มากกว่าสัญญาณเดิม

ขอบข่ายหรือสาขาของการประมวลสัญญาณดิจิทัลได้พัฒนาขึ้นอย่างมากมายและรวดเร็ว และได้ช่วยขยายพื้นฐานทางทฤษฎีในสาขาอื่นอีกเป็นจำนวนมาก รูปที่ 2.1 แสดงถึงขอบข่ายและการพัฒนาในสาขาการประมวลสัญญาณดิจิทัล

ส่วนแขนงใหญ่ ๆ ของการประมวลสัญญาณดิจิทัลคือ การกรองสัญญาณดิจิทัล (digital filtering) และการวิเคราะห์สเปกตรัม (spectrum analysis) ซึ่งจะได้กล่าวคร่าว ๆ ดังนี้

2.2.1 การกรองสัญญาณดิจิทัล (Digital Filtering)

การกรองสัญญาณดิจิทัลคือ กระบวนการคำนวณ (computational process) หรืออัลกอริทึม (algorithm) ซึ่งสัญญาณดิจิทัลหรือลำดับของตัวเลขที่เป็นสัญญาณเข้า (input) ถูกแปลงให้เป็นลำดับของตัวเลขใหม่ที่เรียกว่าสัญญาณออกดิจิทัล (output digital signal) กระบวนการคำนวณอาจจะเป็นแบบการกรองความถี่ต่ำ (lowpass filter) การกรองความถี่กลาง (bandpass filter) การอินเตอร์โพล (interpolation) การหาค่าอนุพันธ์ (derivative) เป็นต้น การแบ่งชนิดของการกรองความถี่ดิจิทัลและรายละเอียด-



รูปที่ 2.1 ขอบข่ายของการประมวลสัญญาณดิจิทัล

เขี่ยคอื่น ๆ จะกล่าวในหัวข้อถัดไป

2.2.2 การวิเคราะห์สเปกตรัม (Spectrum Analysis)

สัญญาณบางชนิดเราไม่สามารถวิเคราะห์ได้ในโดเมนเวลา (time domain) จำเป็นต้องแปลงให้อยู่ในรูปของโดเมนความถี่ (frequency domain) จึงจะสามารถวิเคราะห์ออกมาได้ การวิเคราะห์สเปกตรัมจึงมีความสำคัญไม่ยิ่งหย่อนไปกว่าการกรองความถี่ ตัวอย่างเช่น การประมาณค่าอโตโควาเรียนซ์ (autocovariance) และค่าเพาเวอร์สเปกตรัม (power spectrum) ของลำดับสัญญาณที่ไม่แน่นอน (random sequences) เทคนิคการคำนวณที่สำคัญคือ ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม (fast Fourier transform)

2.3 ระบบและสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องตามแกนเวลา (Discrete-Time Signals and Systems) [1]

2.3.1 สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลา (Discrete-Time Signals Sequences)

ในระบบสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลาจะกล่าวถึงการประมวลสัญญาณ ซึ่งแทนด้วยลำดับตัวเลข (sequences) และลำดับตัวเลข x ตัวที่ n เขียนแทนด้วย $x(n)$ ซึ่งเขียนเป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้

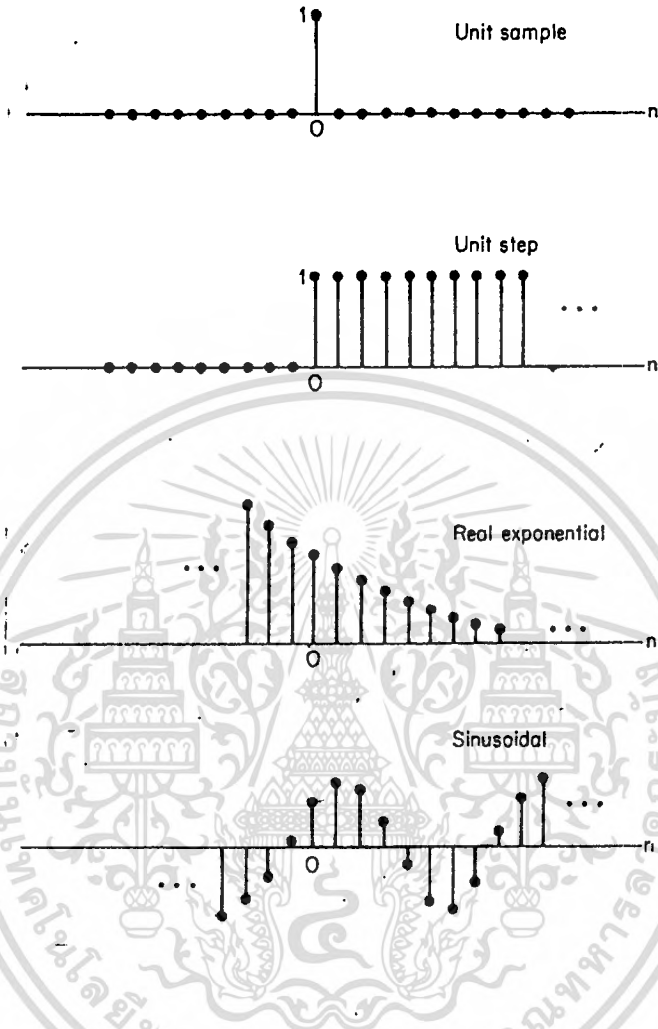
$$x = \{x(n)\}, \quad -\infty < n < \infty \quad (2.1)$$



รูปที่ 2.2 กราฟแสดงสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่อง

สัญญาณหรือลำดับตัวเลขแทนด้วยกราฟได้ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.2 แม้ว่าแกนแอบซิสส์ (abscissa) เป็นเส้นที่ต่อเนื่อง แต่จริง ๆ แล้ว $x(n)$ มีความหมายเฉพาะค่าอินทิเจอร์ (integer) ของ n ส่วนค่า n ที่ไม่ใช่ตัวเลขอินทิเจอร์ ไม่ได้หมายความว่าลำดับ $x(n)$ จะมีค่าเป็นศูนย์ เพียงแต่เราไม่กำหนดค่า $x(n)$ เมื่อ n ไม่ใช่ตัวเลขอินทิเจอร์

ตัวอย่างลำดับตัวเลขหรือสัญญาณที่สำคัญ ๆ แสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงตัวอย่างของลำดับสัญญาณ ซึ่งมีความสำคัญ
ในการวิเคราะห์ และการแทนความหมายในระบบ
และสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องตามแกน เวลา

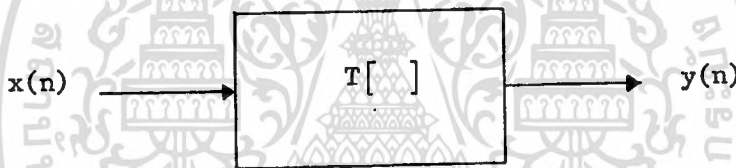
2.3.2 ระบบชีพท์-อินแวเรียนท์เชิงเส้น (Linear Shift-Invariant Systems)

ระบบ (system) มีความหมายทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นการแปลงหรือเป็นตัวกระทำ ซึ่งเปลี่ยนลำดับของสัญญาณเข้า $x(n)$ ไปเป็นลำดับของสัญญาณออก $y(n)$ เขียนได้เป็น

$$y(n) = T [x(n)] \quad (2.2)$$

T เป็นตัวแปลง (transform) ทางคณิตศาสตร์

สมการที่ (2.2) เขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมแทนได้ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงการแปลงลำดับสัญญาณเข้า $x(n)$ ไปเป็นสัญญาณออก $y(n)$

สำหรับระบบเชิงเส้น (linear systems) ถูกกำหนดด้วยรูปแบบทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\begin{aligned} T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

เมื่อ $y_1(n)$ และ $y_2(n)$ เป็นผลตอบสนองของสัญญาณเข้า $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ส่วนระบบชีพท์-อินแวเรียนท์ มีคุณสมบัติว่า ถ้า $y(n)$ เป็นผลตอบสนองของ

$x(n)$ แล้ว $y(n-k)$ จะเป็นผลตอบสนองของ $x(n-k)$ เมื่อ k เป็นเลขบวกหรือลบก็ได้

ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของระบบซีพท์-อินแวเรียนท์เชิงเส้นเขียนได้เป็น

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

หรือ

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.4)$$

เมื่อ $h(n)$ เป็นผลตอบสนองทางอิมพัลส์ของระบบ สมการ (2.4) เรียกว่า คอนโวลูชันซัม (convolution sum)

2.3.3 เสถียรภาพและภาวะเหตุ (Stability and Causality)

เรากำหนดระบบที่มีเสถียรภาพว่าเมื่อป้อนสัญญาณเข้าที่มีขอบเขตจะได้สัญญาณออกที่มีขอบเขตเช่นกัน ซึ่งระบบจะเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ

$$S \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.5)$$

ระบบตามภาวะเหตุ (causal system) หมายความว่า การเปลี่ยนแปลงที่สัญญาณออกจะไม่เกิดก่อนการเปลี่ยนแปลงที่สัญญาณเข้า สำหรับระบบซีพท์-อินแวเรียนท์ที่เป็นระบบตามภาวะเหตุ ผลตอบสนองทางอิมพัลส์เป็นศูนย์เมื่อ $n < 0$

2.3.4 สมการแตกต่างเชิงเส้นสัมประสิทธิ์คงที่ (Linear Constant Coefficient Difference Equations)

ระบบซีพท์-อินแวเรียนท์ สามารถเขียนแทนด้วยสมการแตกต่างเชิงเส้นสัมประสิทธิ์คงที่อันดับที่ N ดังนี้

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

หรือ

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (2.6)$$

b_0, b_1, \dots, b_M และ a_0, a_1, \dots, a_N เป็นค่าคงที่ที่ใช้ในการกำหนดคุณสมบัติ (characteristic) ของระบบ สมการที่ (2.6) ตัวแปรอยู่ในแกนเวลา แต่สามารถหาความสัมพันธ์ในแกนความถี่ได้ด้วย Z-ทรานส์ฟอร์ม (Z-transform)

2.3.5 การแทนระบบสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลาด้วยแกนความถี่ (Frequency-Domain Representation of Discrete-Time Systems and Signals)

สมมติเราป้อนสัญญาณเข้าด้วย $x(n) = e^{j\omega n}$ เมื่อ $-\infty < n < \infty$ เราสามารถหาผลตอบสนองของสัญญาณออกด้วยสมการ (2.4) ได้

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ถ้าเรากำหนด

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \quad (2.8)$$

เราจะได้

$$y(n) = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \quad (2.9)$$

จากสมการ (2.9) จะเห็นว่า $H(e^{j\omega})$ เป็นฟังก์ชันของความถี่ ω เราจะเรียก $H(e^{j\omega})$ ว่าผลตอบสนองทางความถี่ (frequency response) ของระบบ

2.4 Z- ทรานส์ฟอร์ม (Z-transform)

ลำดับสัญญาณ $x(0), x(1), \dots, x(n)$ เป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลา สามารถแปลงให้อยู่ในแกนความถี่เป็น $X(z)$ z เป็นตัวแปรคอมเพล็กซ์ (complex variable) หรือแปลงสัญญาณจากแกนความถี่ไปอยู่ในแกนเวลา ด้วยการใช้อนิวัตน์

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.10)$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz \quad (2.11)$$

สมการ (2.10) เรียกว่า : Z-ทรานส์ฟอร์ม ส่วนสมการ (2.11) เรียกว่า อินเวิร์ส Z-ทรานส์ฟอร์ม โดย $z = e^{j\omega}$

คุณสมบัติที่สำคัญของ Z-ทรานส์ฟอร์ม (Elementary Properties of Z-transform)

ก. ความเป็นเชิงเส้น (Linearity)

$$Z\text{-ทรานส์ฟอร์มของ } \{ax(n)+by(n)\} = aX(z)+bY(z)$$

ข. การเลื่อน (Shifts)

$$Z\text{-ทรานส์ฟอร์มของ } \{x(n+k)\} = z^k X(z)$$

ค. คอนโวลูชัน (Convolution)

ถ้า

$$g(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(m-n)$$

แล้ว

$$G(z) = X(z)Y(z)$$

2.5 รูปแบบโครงสร้างของวงจรกรองความถี่ดิจิทัล (Network Structures for Digital Filter) [1]

การสร้างวงจรกรองความถี่ดิจิทัลไม่ว่าจะวิธีฮาร์ดแวร์ หรือซอฟต์แวร์จะต้องเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้า-สัญญาณออกให้อยู่ในรูปแบบหรืออัลกอริทึมที่ใช้คำนวณก่อน อัลกอริทึมนี้จะใช้ตัวบวก (adder) ตัวหน่วง (delay) และตัวคูณด้วยค่าคงที่ (constant multiplier) มาใช้ช่วยเขียนโครงสร้างของวงจร ตัวอย่างเช่น เราพิจารณาระบบซึ่งมีทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันในรูป

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{2.12}$$

เราจะเขียนสมการแตกต่างได้เป็น

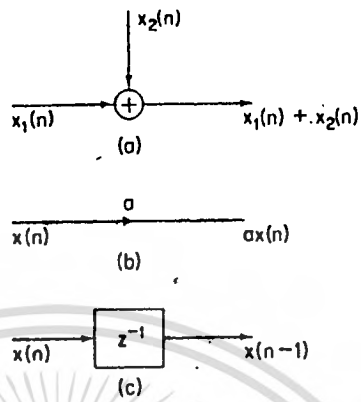
$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \tag{2.13}$$

เราสามารถแทนสมการ (2.13) ด้วยอัลกอริทึมในการคำนวณได้โดยตรงนั่นคือเอาค่าตัวเลขของสัญญาณเข้าคูณด้วยสัมประสิทธิ์ b_k และค่าตัวเลขของสัญญาณออกคูณด้วยสัมประสิทธิ์ a_k แล้วนำผลคูณทั้งหมดเอามารวมกัน

สัญลักษณ์ส่วนใหญ่ที่ใช้แทนสมการแตกต่าง เช่นตัวบวก ตัวคูณ ตัวดีเลย์ แสดงในรูปที่ 2.5

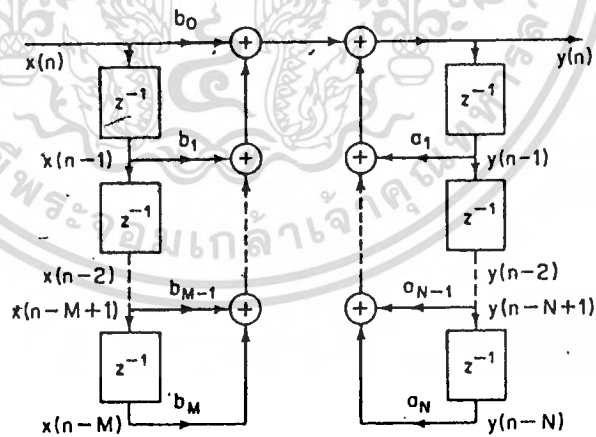
สำหรับสมการที่ (2.13) เมื่อนำมาเขียนวงจรจะได้ดังรูปที่ 2.6 ส่วนวิธีการเขียนบล็อกไดอะแกรมเพื่อแทนวงจรกรองความถี่ในแบบและชนิดต่าง ๆ ก็มีเทคนิคการเขียนแตกต่างกันออกไป แล้วแต่ความเหมาะสม เช่นในด้านความประหยัด ความเร็วในการ-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.5 สัญลักษณ์และบล็อกโตะแกรมสำหรับวงจรถอด

- (a) การบวกลำดับสัญญาณสองสัญญาณ
- (b) การคูณลำดับสัญญาณด้วยค่าคงที่
- (c) ค่าหน่วยหนึ่งหน่วย



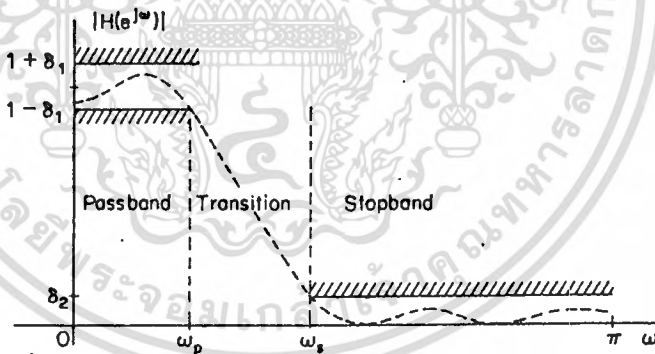
รูปที่ 2.6 บล็อกโตะแกรมสำหรับแทนสมการแตกต่างทั่ว ๆ ไป
อันดับที่ N

คำนวณ หรือความเที่ยงตรงในการคำนวณ เป็นต้น

2.6 การประมาณในการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิทัล (Approximation of Digital Filter)

วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบ่งออกได้เป็นสองแบบคือ นอนรีเคอร์ซีฟและรีเคอร์ซีฟ ทั้งสองแบบนี้มีเทคนิคในการประมาณบางเทคนิคที่คล้ายกัน บางเทคนิคก็แตกต่างกันออกไป ส่วนการกำหนด (specifications) ในการออกแบบขึ้นอยู่กับการใช้งาน เช่นอาจต้องการผลตอบสนองทางเฟส (phase) ที่เป็นเชิงเส้น (linear) หรืออาจต้องการผลตอบสนองทางขนาดเป็นแบบที่มียอดคลื่นเท่ากัน (equiripple) ลีบยอดในแถบความถี่ต่ำผ่าน และแถบปลอดสัญญาณให้มีขนาดราบเรียบมากที่สุด (maximally flat) ฯลฯ

รูปตัวอย่างในการออกแบบผลตอบสนองทางขนาดแสดงในรูปที่ 2.7 ซึ่งเป็นการออกแบบให้ความถี่ต่ำผ่าน โดยที่ช่วงกว้างของผลตอบสนองทางขนาดไม่เกินข้อกำหนดที่ให้มา



รูปที่ 2.7 แสดงการประมาณวงจรกรองความถี่ในอุดมคติ ในช่วงกว้างที่กำหนดขอบเขตให้

เส้นโค้งประแทนผลตอบสนองทางความถี่ของระบบ ซึ่งออกแบบให้ตรงข้อกำหนดได้อย่างแน่นอน ในกรณีนี้ในแถบความถี่ผ่านค่าผลตอบสนองทางขนาดให้ประมาณเท่ากับ 1 และมีความผิดพลาด (error) ไม่เกิน $\pm \delta_1$ เขียนในรูปคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad |\omega| \leq \omega_p$$

แถบปลอดสัญญาณซึ่งผลตอบสนองทางขนาดให้ประมาณเท่ากับศูนย์และให้ผิดพลาดได้น้อยกว่า δ_2 เขียนได้เป็น

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi$$

โดยที่ ω_p เป็นจุดจำกัดความถี่ในแถบสัญญาณผ่าน ω_s เป็นจุดจำกัดความถี่ในแถบปลอดสัญญาณ ทั้งสองจุดเป็นมุมในระนาบ z ส่วนในแถบ $(\omega_s - \omega_p)$ ให้มีค่ามากกว่า 0 เรียกว่า แถบทรานซิชัน (transition band) แถบนี้ผลตอบสนองทางขนาดลดย่างราบเรียบ จากแถบความถี่ผ่านจนถึงแถบปลอดสัญญาณ

2.6.1 วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบอนรีเคอร์ซีฟ (Nonrecursive Digital Filter)

วงจรกรองความถี่ชนิดนี้สามารถออกแบบให้เฟรมีสลักษณะเป็นเชิงเส้นได้โดยวิธีง่าย ๆ แล้วยังมีเสถียรภาพ (stable) เสมอ ในที่นี้ผู้เขียนขออธิบายคุณสมบัติของเฟสที่เป็นเชิงเส้นของวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบอนรีเคอร์ซีฟ เพื่อสะดวกในการอ้างอิงในบทต่อไป

ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน แบบอนรีเคอร์ซีฟเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \\ &= h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(N-1)z^{-(N-1)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

ผลตอบสนองทางความถี่ของสมการ (2.14)

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\
 &= |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

เมื่อ $|H(e^{j\omega})|$ คือผลตอบสนองทางขนาด $\theta(\omega)$ คือมุมเฟส

เฟสและกรุปดีเลย์ (group delay) มีคำจำกัดความว่า

$$\tau_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad \text{และ} \quad \tau_g = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}
 \tag{2.16}$$

ถ้าจะให้เฟสมีลักษณะเป็นเชิงเส้น (หรือกรุปดีเลย์คงที่) ต้องมีเงื่อนไขว่า

$$\theta(\omega) = -\tau\omega, \quad \tau \text{ เป็นค่าคงที่}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.15) จะเขียนให้อยู่ในรูปของเฟสได้

$$\theta(\omega) = -\tau\omega = \tan^{-1} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}
 \tag{2.17}$$

หรือ

$$\tan \omega\tau = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}
 \tag{2.18}$$

หรือ

$$\tan(\tau\omega) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \omega n} \quad (2.19)$$

พิจารณาสมการที่ (2.19) จะมีสองกรณีที่เป็นไปได้คือ กรณีที่หนึ่ง เมื่อ $\tau=0$ สมการที่ (2.19) จะเป็น

$$0 = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \omega n} \quad (2.20)$$

สมการที่ (2.20) จะเป็นจริงได้เมื่อ $h(n) = 0$ และ $n \neq 0$ ส่วน $h(0)$ แม้จะมีค่าแต่ก็ไม่มีประโยชน์ เพราะผลตอบสนองออกมาเป็นแบบอิมพัลส์ เหลืออีกกรณีหนึ่งคือเมื่อ $\tau \neq 0$ สมการ (2.18) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n) \sin(\omega \tau) - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n) \cos(\tau\omega) = 0 \quad (2.21)$$

หรือ รวมด้านซ้ายมือของสมการ (2.21) ได้เป็น

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin [(\tau-n)\omega] = 0 \quad (2.22)$$

สมการที่ (2.22) จะเป็นจริงได้เมื่อมีเงื่อนไข

$$\tau = \frac{(N-1)}{2} \quad (2.23)$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

ในกรณีที่ต้องการให้ผลตอบสนองทางความถี่รูปแบบเป็น

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j(\beta - \tau\omega)}$$

และให้เฟสเป็นเชิงเส้น เราก็สามารถหาได้ว่า

$$\tau = \frac{(N-1)}{2}$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2.24)$$

เมื่อหาซีโร (zero) ของสมการที่ (2.14) โดยใช้เงื่อนไขที่ (2.23) และ (2.24) จะได้ซีโรซึ่งมีลักษณะเป็นกระจกเงา (mirror-image) ในแนวแกน x และจะเรียกโพลีโนเมียลในลักษณะนี้ว่า โพลีโนเมียลกระจกเงา (mirror-image polynomial)

เทคนิคการออกแบบวงจรกรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟที่รู้จักกันดีมี [2]

- ก. วิธีการใช้วินโดว์ฟังก์ชัน (window function)
- ข. การแซมปลิงความถี่ (frequency sampling)
- ค. วิธีออปติไมเซชัน (optimization technique)

2.6.2 วงจรรองความถี่ดิจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟ (Recursive Digital Filter)

วงจรรองชนิดนี้มีข้อได้เปรียบกว่าแบบอนรีเคอร์ซีฟที่ค่าผลตอบสนองทางขนาด มีความคมกว่าในแถบทรานเซียนซ์ เมื่ออันดับ (order) ของวงจรมีจำนวนเท่ากัน แต่เทคนิคการออกแบบค่อนข้างซับซ้อน เมื่อต้องการให้เฟรมีลักษณะเป็นเชิงเส้น

เทคนิคการออกแบบวงจรรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟที่นิยมใช้กันมี [1]

ก. วิธีการออกแบบจากวงจรรองแบบอนาลอก (design of recursive digital filter from analog filter) โดยใช้เทคนิคอิมพัลส์อินแวเรียนซ์ (impulse invariance) และเทคนิคการแปลงแบบไบลิเนียร์ (bilinear transform)

ข. วิธีออปติไมเซชัน (optimization technique)

สรุปแล้วการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิตอลทั้งสองแบบมีวิธีการใหญ่ ๆ สองวิธีคือ การออกแบบให้อยู่ในรูปสูตรสำเร็จ (closed-form solution) และการออกแบบโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วย (computer aided designed)

2.7 การสร้างวงจรรองความถี่ดิจิตอล (Implementation of Digital Filter) [7]

วงจรรองความถี่ดิจิตอลสร้างได้ 2 รูปแบบคือ

2.7.1 วิธีซอฟต์แวร์ (Software)

สร้างโดยการเลียนแบบ (simulation) โครงสร้างวงจรรองความถี่ดิจิตอล ด้วยดิจิตอลคอมพิวเตอร์ คือการเขียนโปรแกรมทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่ดิจิตอล เก็บไว้ นำเอาสัญญาณดิจิตอลที่จะกรอง บ้อนเข้าไปให้ทำการคำนวณกับโปรแกรมของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน ผลลัพธ์ที่ได้คือ สัญญาณดิจิตอลที่ผ่านวงจรรองความถี่ดิจิตอลนั่นเอง

2.7.2 วิธีฮาร์ดแวร์ (Hardware)

โดยการเอาอุปกรณ์ทางดิจิทัลเช่น ชิฟรีจิสเตอร์ (shift-register) ตัวบวก (adder) ตัวลบ (subtractor) และตัวคูณ (multiplier) มาต่อเป็นวงจร

2.8 เปรียบเทียบวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟและนอนรีเคอร์ซีฟ (Comparison of Recursive and Nonrecursive Digital Filters) [1]

วงจรกรองความถี่ดิจิทัลทั้งสองแบบ มีวิธีการออกแบบได้หลายวิธี แต่มีปัญหาว่าวิชัน หรือวงจรความถี่แบบโหนดที่สุด ปัญหานี้ตอบได้ยาก เพราะแต่ละวิธีหรือแต่ละแบบมีข้อดีข้อเสียที่แตกต่างกันอยู่ วิธีการเลือกไปใช้จึงขึ้นอยู่กับข้อดีข้อเสียเหล่านี้ ตัวอย่างเช่น วงจรกรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟสามารถออกแบบโดยใช้สูตรสำเร็จจากเทคนิคดั้งเดิมที่ใช้กันมาก่อนในการออกแบบทางอนาล็อก (เช่น บัตเตอร์เวิร์ธ, เชบปีเชฟ หรือเอลลิปติก) เสร็จแล้วเปลี่ยนให้เป็นแบบดิจิทัลโดยตรงได้โดยง่าย เทคนิคง่าย ๆ นี้ใช้ออกแบบได้ไม่กี่แบบ และแต่ละแบบไม่ต้องใช้วิธีการคำนวณที่ยุ่งยากเกินไป

ส่วนแบบนอนรีเคอร์ซีฟการออกแบบให้อยู่ในรูปสูตรสำเร็จทำได้ยาก แม้ว่าจะใช้วินโดว์ฟังก์ชันช่วย ก็ยังต้องมีการคำนวณซ้ำ ๆ เพื่อให้ได้ผลเที่ยงตรงตามต้องการ ส่วนใหญ่แล้วการออกแบบนอนรีเคอร์ซีฟต้องใช้การคำนวณซ้ำ ๆ กัน ทำให้ต้องใช้คอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูงเข้าช่วย ซึ่งเปรียบเทียบกับรีเคอร์ซีฟใช้แค่เพียงเครื่องคิดเลขและตารางการออกแบบวงจรแบบอนาล็อกเท่านั้น แต่การออกแบบรีเคอร์ซีฟก็ไม่สามารถทำให้เฟสเป็นเชิงเส้นได้โดยง่าย ผิดกับแบบนอนรีเคอร์ซีฟที่สามารถออกแบบให้เฟสเป็นเชิงเส้นได้อย่างแน่นอน

ส่วนปัญหาทางด้านการประหยัด และความเร็วในการคำนวณ (ถ้าตีคปัญหาเรื่องเฟสที่เป็นเชิงเส้นออก) การออกแบบรีเคอร์ซีฟจะมีผลตอบสนองทางขนาดคึกกว่าแบบนอนรีเคอร์ซีฟ เมื่ออันดับของวงจรเท่า ๆ กัน แต่ถ้าต้องการเฟสที่เป็นเชิงเส้น แบบนอนรีเคอร์ซีฟจะดีกว่า

จะ เห็นว่ามีเงื่อนไขมากมายที่ต้องพิจารณาในการออกแบบวงจรกรองความถี่

แต่ผลสุดท้ายก็ต้องพิจารณาความเหมาะสมทางวิศวกรรม (engineering judgement) เช่นปัญหาในการกำหนดคุณสมบัติ วิธีการสร้าง และความสามารถทางการคำนวณ

2.9 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงพื้นฐานต่าง ๆ ที่จะนำไปสู่การพิจารณา วิเคราะห์ และ ออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลอย่างย่อ ๆ โดยเริ่มตั้งแต่ การประมวลสัญญาณดิจิทัล ระบบและสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลา Z-ทรานส์ฟอร์ม โครงสร้างและการสร้าง วงจรรองความถี่ดิจิทัล เทคนิคการประมาณในการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัล และจบลงด้วยการเปรียบเทียบข้อดีข้อเสียของการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลทั้ง แบบรีเคอร์ซีฟและนอนรีเคอร์ซีฟ

บทที่ 3

เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการออกแบบ

3.1 บทนำ

เทคนิคการประมาณในการออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จិតตอลมีอยู่มากมายหลายแบบ มีทั้งการออกแบบอยู่ในรูปสูตรสำเร็จ และการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการออกแบบ ในบทนี้จะกล่าวถึงเทคนิคที่ช่วยในการออกแบบวงจรกรองความถี่ของวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

3.2 ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear Transform)

เมื่อต้องการแปลงวงจรกรองความถี่แบบอนาลอกให้เป็นแบบดิจิตอล สามารถแปลงได้โดยใช้สูตร

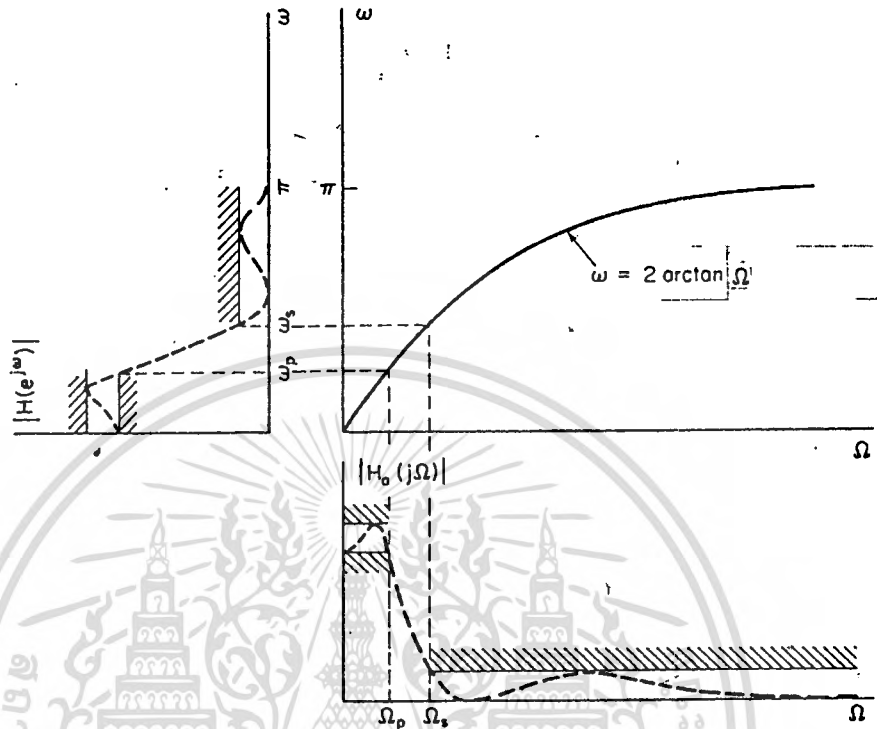
$$s = \frac{z-1}{z+1} \quad (3.1)$$

ส่วนการแปลงความถี่ใช้สูตร

$$\Omega_{Ai} = \tan \frac{\omega_{Di}}{2} \quad (3.2)$$

เมื่อ $s = j\Omega$, $z = e^{j\omega}$ Ω_{Ai} เป็นความถี่แบบอนาลอกใด ๆ

ω_{Di} เป็นความถี่แบบดิจิตอลใด ๆ



รูปที่ 3.1 กราฟแสดงผลของความไม่เป็นเชิงเส้นในการแปลงจากอนุภาคเป็นดิจิทัล โดยใช้โบลีเนียร์ทรานส์ฟอร์ม

ในการออกแบบวงจรของความถี่ดิจิทัลบางครั้งจะนิยมออกแบบทางอนุภาคก่อนจะง่ายกว่าการออกแบบทางดิจิทัลโดยตรง เสร็จแล้วค่อยแปลงจากอนุภาคเป็นดิจิทัลโดยใช้สูตร (3.1) และ (3.2)

เนื่องจากมีความไม่เป็นเชิงเส้นในแถบความถี่สูงของการแปลงแบบโบลีเนียร์เทคนิคนี้จึงใช้เฉพาะในการออกแบบผลตอบสนองทางขนาดเราจะไม่ใช้ออกแบบผลตอบสนองทางเฟส เพราะจะทำให้ได้เฟสที่ไม่เป็นเชิงเส้น

3.3. รีเมซัลกอริทึม (Remez algorithm) [8]

เป็นเทคนิคหนึ่งที่ใช้ประมาณฟังก์ชันที่มีลักษณะแบบเชบิเชฟ (chebyshev) โดยวิธีการคำนวณซ้ำ ๆ กัน (iteration) จนกระทั่งได้ผลตามที่ตั้งข้อพิจารณามาตรฐาน (criteria) ไว้

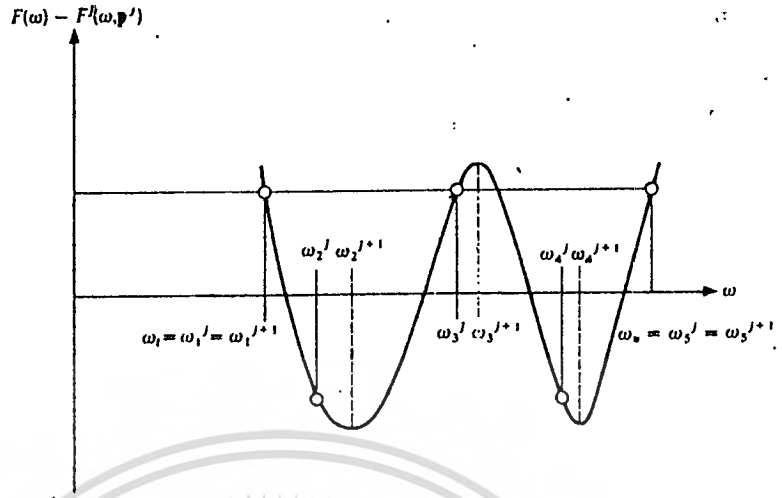
สมมติว่าต้องการค่าผิดพลาดที่ยอมให้มีได้ระหว่างค่าที่ตั้งข้อกำหนดไว้กับค่าฟังก์ชันที่จะหา เราสามารถเขียนอยู่ในรูปคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$E^j(\omega, p_1^j, p_2^j, \dots, p_n^j) = F(\omega) - F^j(\omega, p_1^j, p_2^j, \dots, p_n^j) \quad (3.3)$$

ในที่นี้ $F(\omega)$ เป็นข้อกำหนดที่เราตั้งไว้ (specified response) ค่าพารามิเตอร์ (parameters) p_i จะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาทำการคำนวณซ้ำกัน j ครั้ง เราจะใช้สัญลักษณ์ p_i^j เช่น p_2^4 จะหมายความว่าทำการคำนวณค่า p_2 มาแล้ว 4 ครั้ง ดังนั้น $F^j(\omega, p_1^j, p_2^j, \dots, p_n^j)$ เป็นฟังก์ชันประมาณที่ได้จากการคำนวณมาแล้ว j ครั้ง ส่วน E^j เป็นค่าผิดพลาดที่ยอมให้ได้เรียกว่า เออเรอร์ไครทีเรียม (error criterion)

วิธีการของรีเมซัลกอริทึมมีลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

- ก. เลือกค่า ω_1^j ที่เหมาะสม $n+1$ ค่าในช่วง $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$ (โดยปกติ $\omega_1^j = \omega_l$ และ $\omega_{n+1}^j = \omega_u$ ทุก ๆ ค่า j) นั่นคือ $\omega_1^j, \omega_2^j, \dots, \omega_{n+1}^j$ โดยให้ $\omega_1^j < \omega_2^j < \dots < \omega_{n+1}^j$ แล้วนำไปแทนในสมการ (3.3) จะได้



รูปที่ 3.2

$$F^j(\omega_1^j, p_i^j) - E^j = F(\omega_1^j)$$

$$F^j(\omega_2^j, p_i^j) + E^j = F(\omega_2^j)$$

.....

$$F^j(\omega_{n+1}^j, p_i^j) + (-1)^{n+1} E^j = F(\omega_{n+1}^j)$$

(3.4)

เสร็จแล้วหาค่า p_i^j และ E^j

ข. จากข้อ ก. ที่จุด ω_k^j ต่าง ๆ เราจะได้ค่าผิดพลาดที่ยอมให้มีได้ตามที่ต้องการ แต่อาจจะมี ω จุดอื่น ๆ นอกเหนือจาก ω_k^j ที่อยู่ในช่วง $\omega_u \leq \omega \leq \omega_u$ ที่ทำให้ค่าผิดพลาดเกิน E^j ที่ยอมให้ (ดูรูปบน) เรา

จึงต้องหาค่า ω เหล่านี้ แล้วกำหนดให้เป็น ω_k^{j+1}

- ค. ต่อกันให้ทำข้อ ก. ซ้ำ โดยใช้จุด ω_k^{j+1} ที่ได้ใหม่ เสร็จแล้วหา p_i^{j+1}, E^{j+1} ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงจุดที่ต้องการนั่นคือ จะได้

$$E^{j+1} = E^j, p_i^{j+1} = p_i^j \text{ และ } \omega_k^{j+1} = \omega_k^j \quad (3.5)$$

ถ้า $F^j(\omega, p_1^j)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ p_1^j เราจะได้ว่า

$$F^j(\omega, p_1^j) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i f_i(\omega) \quad (3.6)$$

หรือถ้าอยู่ในรูปของโพลีโนเมียล

$$F^j(\omega, p_1^j) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \omega^{2i} \quad (3.7)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (3.6), (3.7) เมื่อนำไปแทนใน (3.4) จะกลายเป็นระบบสมการเชิงเส้นซึ่งสามารถหาคำตอบได้หลายวิธี

3.4 ไฟโบนัชชีเทคนิค (The Fibonacci Search Technique) [10]

ไฟโบนัชชีเทคนิคเป็นวิธีการหาจุดออฟติมัม (optimum point) ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรตัวเดียววิธีหนึ่ง ซึ่งฟังก์ชันจะต้องเป็นแบบยูนิโมดอล (unimodal) ด้วย ส่วนเทคนิคการหาจะใช้การทดลองกำหนดตัวแปรขึ้นสองจุดในแต่ละครั้ง แล้วนำมาพิจารณาค่าของฟังก์ชัน เลือกจุดที่ให้ค่าที่ใกล้เคียงจุดออฟติมัมไว้ เพื่อนำมาพิจารณาเปรียบเทียบกับจุดใหม่ในครั้งต่อไป

เทคนิคของไฟโบนัชชีแบ่งเป็นขั้น ๆ ดังนี้ (ดูรูปที่ 3.3 ประกอบ)

ขั้นที่ 1 กำหนดช่วง L_1 ($L_1 = b_1 - a_1$) ที่คาดว่าจุดออฟติมิ่มจะอยู่ในช่วงนี้ขึ้นก่อน แล้วเลือกจุด x_1 และ x_2 ($x_2 > x_1$) ให้มีระยะห่างจุด a_1 และ b_1 เท่ากับ ℓ_1 ซึ่ง ℓ_1 หาได้จาก [10]

$$\ell_k = \frac{F_{N-(k+1)}}{F_{N-(k-1)}} \cdot L_k \quad (3.8)$$

ในที่นี้ F_j เป็นเลขไฟโบนัชชี ซึ่ง F_j หาได้จากความสัมพันธ์ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (เมื่อ $F_0 = F_1 = 1$) ค่า N คือจำนวนครั้งที่ทำการทดลองทั้งหมด ค่า N จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความต้องการความแม่นยำ (accuracy)

ดังนั้น

$$x_1 = a_1 + \ell_1$$

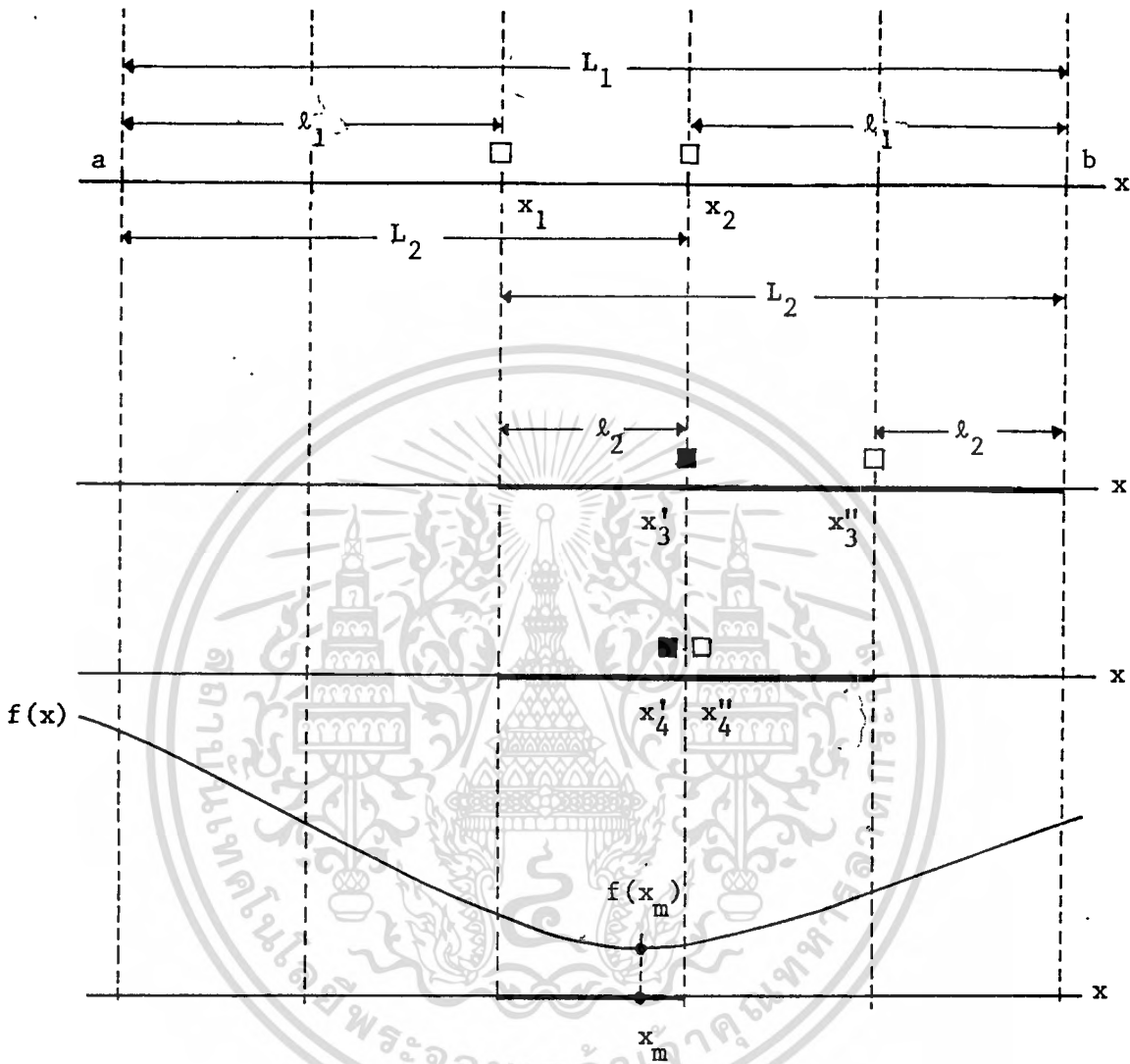
$$x_2 = b_1 - \ell_1 = a_1 + L_1 - \left(\frac{F_{N-2}}{F_N} \right) L_1 = a_1 + \frac{F_{N-1}}{F_N} L_1$$

นำช่วง $a_1 - x_1$ หรือ $x_2 - b_1$ มาพิจารณาตัดส่วนที่ไม่ต้องการทิ้ง โดยหากจากผลการคำนวณฟังก์ชัน $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ ดังนั้นเราจะได้ช่วงใหม่ที่คาดว่าจะมีจุดออฟติมิ่มอยู่ สมมติว่าได้ช่วง $x_2 - b_1$

ขั้นที่ 2 ให้ช่วงใหม่เป็น L_2 ซึ่งสั้นกว่า L_1 นั่นคือ

$$L_2 = L_1 - \ell_1 = b_1 - x_1 \text{ หรือ } x_2 - a_1$$

แทนค่า ℓ_1 เราจะได้



รูปที่ 3.3, แสดงวิธีการหาจุดออฟติมัมโดยไฟโบนาสีเทคนิค

ตำแหน่งของจุดที่ใช้ทดลอง

□ = ตำแหน่งใหม่

■ = ตำแหน่งเก่า

$$L_2 = L_1 - L_1 \frac{F_{N-2}}{F_N} = L_1 \left(1 - \frac{F_{N-2}}{F_N} \right) = L_1 \frac{F_{N-1}}{F_N} \quad (3.9)$$

ขั้นที่ 3 หากจุดทดลองครั้งที่สองใหม่ซึ่งอยู่ในช่วง L_2 ให้เป็น x'_3 และ x''_3 โดยให้

$$\begin{aligned} x'_3 &= x_1 + \ell_2 = x_1 + \frac{F_{N-3}}{F_{N-1}} L_2 \\ &= \left(a_1 + \frac{F_{N-2}}{F_N} L_1 \right) + \frac{F_{N-3}}{F_{N-1}} \left(\frac{F_{N-1}}{F_N} L_1 \right) \\ &= a_1 + \frac{F_{N-1}}{F_N} L_1 \equiv x_2 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า x'_3 ทับกับ x_2 ที่เราเลือกไว้ เพราะว่า ℓ_2 คือระยะระหว่าง x_1 และ x_2 ส่วน

$$\begin{aligned} x''_3 &= b_1 - \ell_2 = x_1 + L_2 - \frac{F_{N-3}}{F_{N-1}} L_2 \\ &= \left(a_1 + \frac{F_{N-2}}{F_N} L_1 \right) + \left(\frac{F_{N-1} - F_{N-3}}{F_{N-1}} \right) \frac{F_{N-1}}{F_N} L_1 \\ &= x_1 + \frac{F_{N-2}}{F_N} L_2 \equiv x_3 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่าการเลือกจุดใหม่ในครั้งต่อไป เราจะได้จุดเดิมที่หามาได้ก่อนหน้านั้นหนึ่งครั้ง หนึ่งจุดในสองจุดเสมอ ($x'_3 = x_2$) ซึ่งจุดนี้คือจุดที่เราเลือกมาจากการทดลองครั้งก่อนหน้านั้นหนึ่งครั้งนั่นเอง ดังนั้นเราเพียงหาค่าฟังก์ชันใหม่มาเปรียบเทียบกับฟังก์ชันเดิมที่ทำไว้ก่อนหน้านั้นหนึ่งครั้ง แล้วเลือกจุดที่ใกล้เคียงจุดอพติมัมไว้ เพื่อ

ทำการทดลองในครั้งต่อไป

เมื่อทำการทดลองครั้งที่สองเสร็จจะหา L_3 ได้จาก

$$L_3 = L_2 - \ell_2 = L_2 \frac{F_{N-1} - F_{N-3}}{F_{N-1}} = \frac{F_{N-2}}{F_{N-1}} L_2 \quad (3.10)$$

แทนค่า L_2 สมการ (3.9) ลงในสมการ (3.10)

$$L_3 = \frac{F_{N-2}}{F_N} L_1$$

ดังนั้นถ้าเราทำการทดลองครั้งที่ m เราจะหาค่า L_m ได้จาก

$$L_m = \frac{F_{N-(m-1)}}{F_N} L_1 \quad (3.11)$$

โฟโบนาสซีเทคนิคเป็นเทคนิคในการหาจุดอพติมัมที่ง่ายและใช้จำนวนครั้ง (N) ในการคำนวณน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีลิเนียร์เซิร์ช (linear search) วิธีอื่น ๆ

3.5 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงเทคนิคที่ช่วยในการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิตอล 3 เทคนิค คือ โบลีเนียร์ทรานส์ฟอร์ม เป็นการแปลงวงจรรองความถี่แบบอนาลอกไปเป็นดิจิตอล ส่วนใหญ่เทคนิคนี้ใช้กับวงจรรองความถี่อนาลอกที่ได้ออกแบบไว้คืออยู่แล้ว ส่วนอีกเทคนิคหนึ่งคือ รีเมซอัลกอริทึม เป็นการออกแบบโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยให้คอมพิวเตอร์คำนวณซ้ำ ๆ กัน จนกระทั่งได้ฟังก์ชันที่ประพุดิตัวเป็นแบบยอตคสันเท่า ๆ กัน และวิธีสุดท้ายเป็นการหาจุดอพติมัมของยูนิโมดอลฟังก์ชันที่เรียนกว่า โฟโบนาสซีเซิร์ช

บทที่ 4

การออกแบบวงจรกรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟที่ตัดจุกก่าจัดความถี่ใด ๆ ได้อย่างแน่นอน
(Maximally Flat Nonrecursive Digital Filter
with Prescribed Cutoff Frequency)

4.1 บทนำ

การออกแบบวงจรกรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟได้มีผู้พยายามออกแบบให้อยู่ในรูปสูตรสำเร็จ [5] โดยใช้การแปลงตัวแปรและวิธีเฮอริไมท์อินเตอร์โพลชัน (Hermite interpolation) แต่ก็ไม่สามารถทำให้ผลตอบสนองทางขนาดตัดผ่านจุกก่าจัดความถี่ที่ต้องการใด ๆ ได้อย่างแน่นอน และเทคนิคที่ใช้ค่อนข้างจะยุ่งยาก ในบทนี้จะแสดงวิธีการออกแบบที่สามารถให้ผลตอบสนองทางขนาดมีจุกก่าจัดความถี่ใด ๆ ก็ได้ที่ต้องการ โดยวิธีง่าย ๆ

4.2 การออกแบบ

การออกแบบเราจะแยกลำดับชั้นออกเป็น 3 ชั้นดังต่อไปนี้

4.2.1 วงจกรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟที่ให้ผลตอบสนองทางขนาดราบเรียบมากที่สุด (Maximally Flat Nonrecursive Digital Filter)

ปัญหาการออกแบบวงจกรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟที่ให้เฟสเป็นเชิงเส้นคือ การหาสัมประสิทธิ์ของโพลีโนเมียลกระจกเงา (mirror-image polynomial)

ถ้าเราให้

$$H(z^{-1}) = z^{-N} \sum_{n=0}^N C_n (z^n + z^{-n}) = z^{-N} H_0(z^{-1}) \quad (4.1)$$

การที่จะให้ผลตอบสนองทางขนาดมีความราบเรียบมากที่สุดทั้งในช่วงแถบความถี่ต่ำผ่าน และช่วงปอดคสัญลักษณ์ในด้านความถี่สูง เราจะต้องมีเงื่อนไขดังสมการข้างล่างคือ

$$|H\{\exp(-j\omega)\}|_{\omega=0} = 1 \quad (4.2a)$$

$$\frac{d^v |H\{\exp(-j\omega)\}|}{d\omega^v} = 0 \quad (4.2b)$$

เมื่อ $v = 1, 2, \dots, 2(N-K)+1$ และ $\omega = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

$$\frac{d^v |H\{\exp(-j\omega)\}|}{d\omega^v} = 0 \quad (4.2c)$$

เมื่อ $v = 0, 1, 2, \dots, 2K-1$ และ $\omega = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

ค่า K ใช้เป็นตัวกำหนดอันดับของความราบเรียบ (degree of flatness) ในช่วงปอดคสัญลักษณ์

การหาค่าตอบของสมการที่ (4.2) โดยวิธีการหาอนุพันธ์ (differentiation) จะพบข้อยุ่งยากมาก จึงได้มีการแปลง (transforming) สมการที่ (4.1) ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเศษส่วน (rational function) โดยใช้สูตรการแปลงแบบ-

ไบลิเนียร์ (หรือ conformal mapping)

$$z^{-1} = \frac{1-s}{1+s} \quad (s=j\Omega) \quad (4.3)$$

เมื่อ Ω เป็นความถี่นาลอก

แทนค่า z^{-1} ในสมการ (4.3) ลงในสมการ (4.1) จะได้ฟังก์ชันใหม่
มีรูปแบบเป็น

$$\bar{H}_0(s) = \frac{\sum_{\ell=0}^N \bar{c}_\ell s^{2\ell}}{(1-s^2)^N} \quad (4.4)$$

ในที่นี้ค่า \bar{c}_ℓ ยังเป็นตัวไม่รู้ค่า (unknown) อยู่

จะเห็นว่าการใช้คุณสมบัติของ คอนฟอร์มอล (conformal properties)
ของสมการ (4.3) ทำให้ข้อกำหนดในสมการ (4.2) ถูกนำมาพิจารณาใหม่ในระนาบ s
แทนระนาบ z^{-1} สมการที่ (4.2) เขียนใหม่ได้เป็น

$$|\bar{H}_0(j\Omega)| = 1 \quad (4.5a)$$

เมื่อ $\Omega = 0$

$$\frac{d^v |\bar{H}_0(j\Omega)|}{d\Omega^v} = 0 \quad (4.5b)$$

เมื่อ $v = 1, 2, \dots, 2(N-K)+1$ และ $\Omega = 0$

$$\frac{d^v |\bar{H}_0(j\Omega)|}{d\Omega^v} = 0 \quad (4.5c)$$

เมื่อ $v = 0, 1, 2, \dots, 2K-1$ และ $\Omega = \infty$

ถ้าสังเกตสมการที่ (4.5) จะพบว่า เป็นสมการเดียวกับสมการดั้งเดิมที่ใช้กำหนดคุณสมบัติของวงจรรองความถี่แบบอนาลอกที่มีผลตอบสนองทางขนาดความเรียบมากที่สุดในช่วงสัญญาณผ่าน และช่วงปลอดสัญญาณ

ดังนั้นเราจะใช้เทคนิคดั้งเดิม [3] มาพิจารณา นั่นคือค่าของอนุพันธ์ (derivatives) เป็นศูนย์เมื่อ $\Omega = 0$ จะเกิดขึ้นได้เมื่อสัมประสิทธิ์ของเศษเท่ากับสัมประสิทธิ์ของส่วนเมื่อเทียบกับอันดับกำลังของ s ในตัวเศษและตัวส่วน

สำหรับการที่จะให้ช่วงปลอดสัญญาณมีความราบเรียบทำได้โดยการลดเทอมที่มีกำลังสูงสุดของเศษในสมการ (4.4) ลง จะลดลงมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความต้องการ การที่ลดเทอมที่มีกำลังสูงสุดลงก็หมายความว่าเราได้เพิ่มจำนวนซีโร (zeros) ที่อนันต์มากขึ้น (และค่าอนุพันธ์ที่จุดนั้นจะเท่ากับศูนย์ด้วย)

เพราะฉะนั้นผลที่ได้เราจะนำมาเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\bar{H}_0(s) = \frac{\sum_{\ell=0}^{N-K} \binom{N}{\ell} (-s^2)^\ell}{\sum_{\ell=0}^N \binom{N}{\ell} (-s^2)^\ell} \quad (4.6)$$

แทน $s = j\Omega$

$$\bar{H}_0(j\Omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{N-K} \binom{N}{\ell} \Omega^{2\ell}}{(1+\Omega^2)^N} \quad (4.7)$$

เมื่อ $2N$ เป็นอันดับของวงจรกรองความถี่ K เป็นคี่หรือของความราบเรียบ ถ้าแปลงสมการ

(4.7) กลับไปใหม่จะได้

$$H(z^{-1}) = \frac{(1-z^{-1})^{2K}}{4^N} \sum_{\ell=0}^{N-K} \binom{N}{\ell} (1+z^{-1})^{2(N-K-1)} (1-z^{-1})^{2\ell} (-1)^\ell \quad (4.8)$$

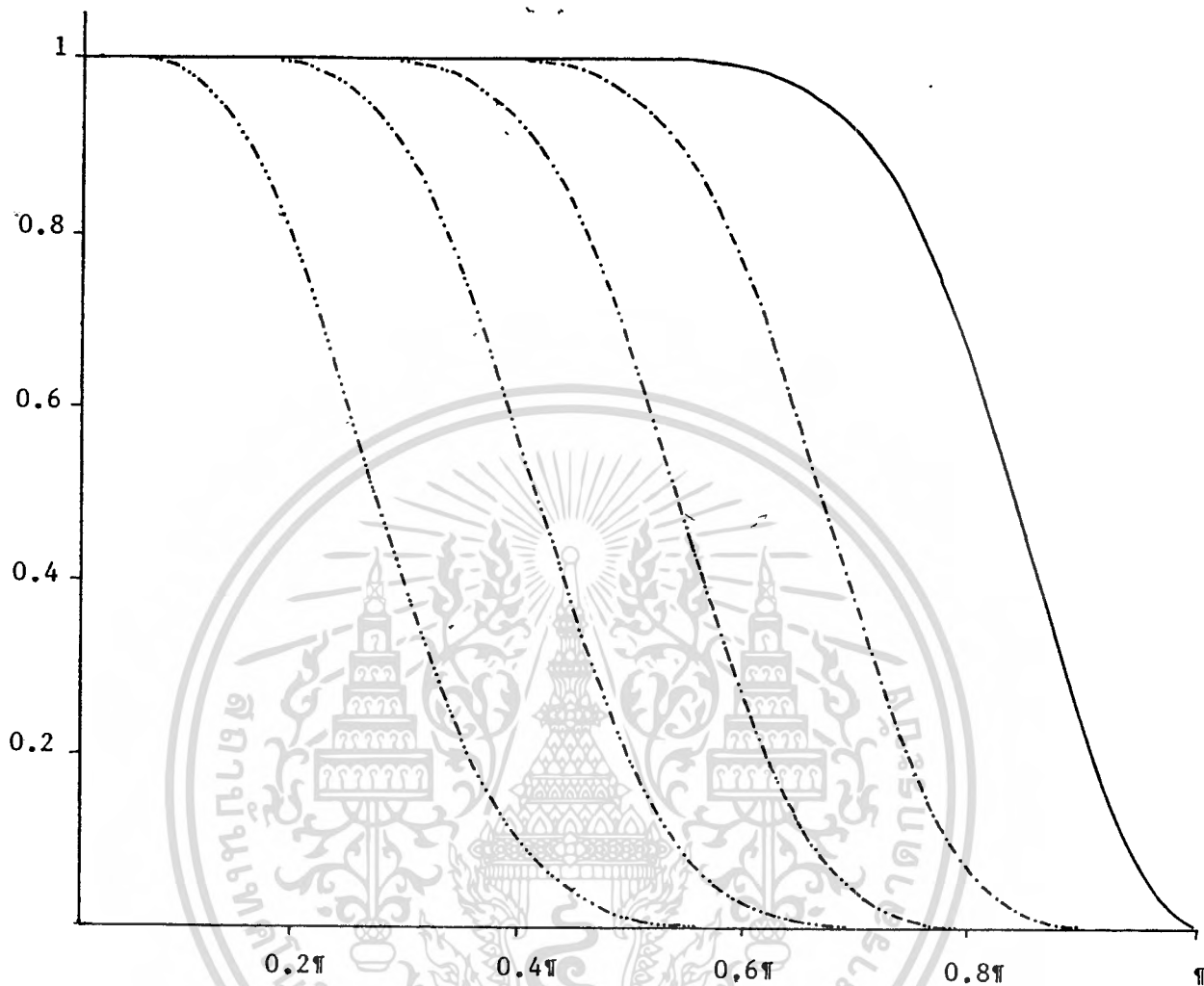
ซึ่งเป็นทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่เราต้องการ สำหรับค่า N และ K ต่าง ๆ ที่ใช้สมการ(4.8) ออกแบบ แสดงในรูปที่ 4.1

4.2.2 การออกแบบแถบทรานซ์ชันระหว่างค่า K ที่ใกล้เคียงกัน (Transitional Filters Between Two Adjacent Value of K)

พิจารณาสูตรที่ (4.1) ค่าผลตอบสนองทางขนาดจะออกแบบได้เป็นช่วง ๆ เมื่อเปลี่ยนค่า K ไป ถ้าต้องการสร้างให้ช่วงทรานซ์ชันครบทุก ๆ จุด จะต้องนำสมการ (4.7) มาพิจารณาใหม่

การที่จะให้ได้ช่วงทรานซ์ชันอยู่ระหว่างค่า K ที่ใกล้เคียงกันเราต้องกำหนดค่า K ขึ้นใหม่เป็น K_1 และพารามิเตอร์อีกตัวหนึ่งคือ K_2 โดยที่ $K_2 = K_1 - 1$ แล้วบวกเทอมใหม่เพิ่มอีกหนึ่งเทอมในเศษของสมการที่ (4.7) โดยให้ K_2 เป็นตัวดัชนีช่วยบ่งบอกถึงเทอมที่เพิ่มขึ้น

ดังนั้นเราเขียนสมการใหม่ได้



รูปที่ 4.1 แสดงผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่

ดิจิทัลเมื่อ ค่า $N=10$ และ K ต่าง ๆ กัน

————— $K=1$

----- $K=3$

----- $K=5$

----- $K=7$

----- $K=9$

$$\bar{H}_0(\Omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{N-K_1} \binom{N}{\ell} \Omega^{2\ell} + \bar{C}_{N-K_2} \Omega^{2(N-K_2)}}{(1+\Omega^2)^N} \quad (4.9)$$

เพื่อรักษาความราบเรียบของผลตอบสนองต้องมีเงื่อนไขว่า

$$\bar{H}_0(\Omega) \leq 1 \quad \text{ทุก ๆ ค่า } \Omega \geq 0 \quad (4.10)$$

ดังนั้น

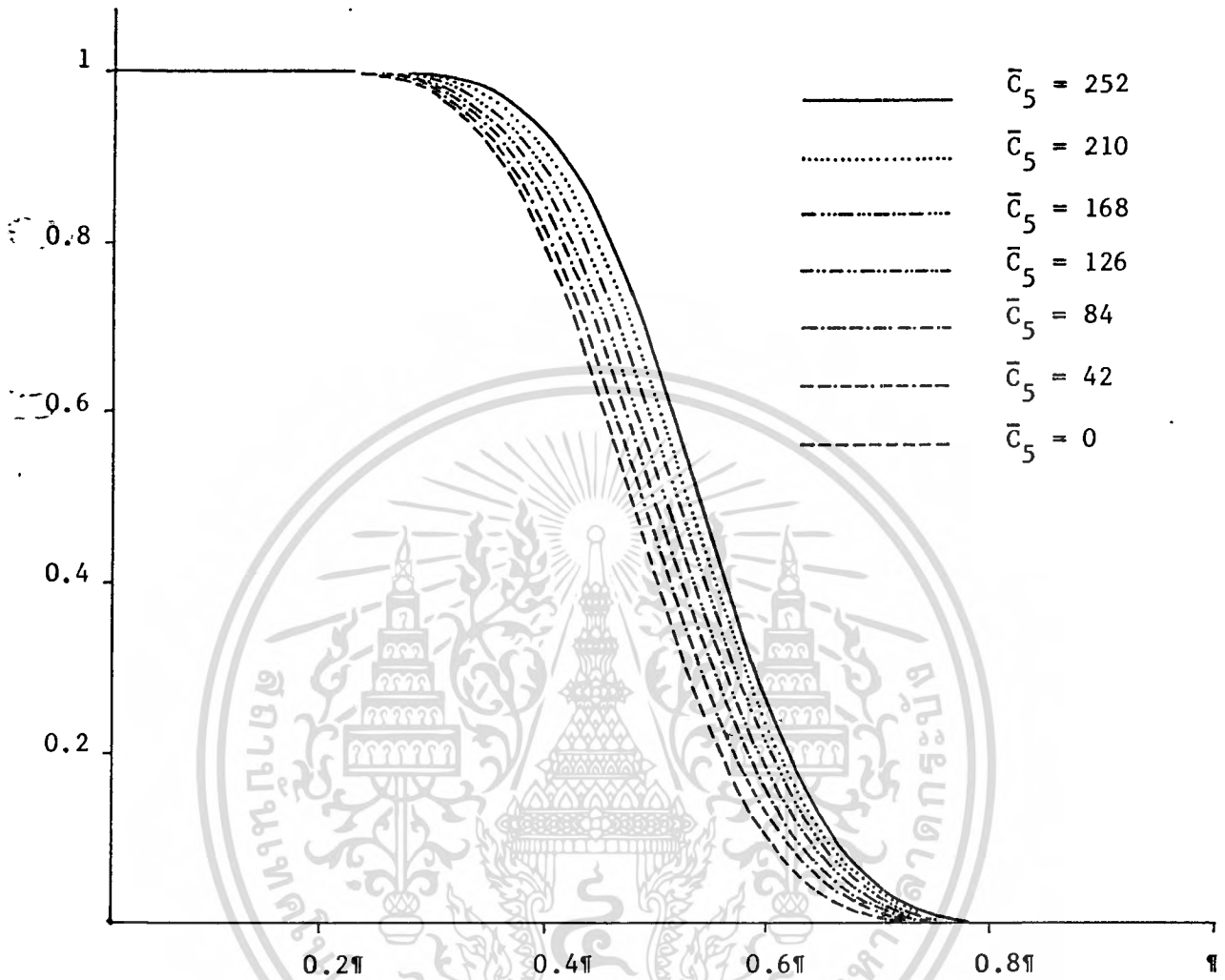
$$(1+\Omega^2)^N - \left[\sum_{\ell=0}^{N-K_1} \binom{N}{\ell} \Omega^{2\ell} + \bar{C}_{N-K_2} \Omega^{2(N-K_2)} \right] \geq 0 \quad \text{ทุก ๆ ค่า } \Omega \geq 0 \quad (4.11)$$

เพราะฉะนั้นต้องเลือกค่า \bar{C}_{N-K_2} ให้อยู่ในช่วง $0 \leq \bar{C}_{N-K_2} \leq \binom{N}{N-K_2}$ จึงจะได้ตามเงื่อนไขของสมการ (4.11)

ตัวอย่างของการออกแบบเพื่อสร้างช่วงทรานเซียนของวงจรรองความถี่ดิจิทัล ซึ่งให้ค่าผลตอบสนองทางขนาดอยู่ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของความราบเรียบ K_1 และ K_2 แสดงในรูปที่ 4.2 ในกรณีที่ $N=10$, $K_1=6$ และ $K_2=5$

4.2.3 การออกแบบวงจรรองความถี่แบบอนรีเคอร์ซีฟให้ได้จุดกำจัดความถี่ตามค่าที่กำหนดใด ๆ (Nonrecursive Digital Filter with Specified Cutoff Point)

ในกรณีที่กำหนดจุดกำจัดในระนาบ z เราจะแปลงให้อยู่ในระนาบ s ได้จากความสัมพันธ์



รูปที่ 4.2 แสดงช่วงทรานซิชันของวงจรรองความถี่คงตลอด
 แบบนอนรีเคอร์ซีฟ ระหว่างค่า $K_1 = 6$ และ
 $K_2 = 5$ เมื่อ $N = 10$

$$\Omega_{OA} = \tan \frac{\omega_{OD}}{2} \quad (4.12)$$

โดยที่ Ω_{OA} และ ω_{OD} เป็นจุดก่าจัดความถี่ทางอนาลอกและดิจิทัลตามลำดับ ให้ความถี่ของการแซมปลิง (sampling frequency) เป็น 1 ชั้นดับต่อไป คือ การเลือกค่าพารามิเตอร์ K ที่ใกล้กัน 2 ค่า เพื่อให้ผลตอบสนองทางขนาดครอบคลุมจุดก่าจัดคือ K_1 และ K_2 โดยที่ K_1 และ K_2 ทำให้เกิดผลตอบสนองทางขนาดที่มีแถบทรานซิชั่นต่ำกว่าและสูงกว่าจุดก่าจัดสัญญาณตามลำดับ

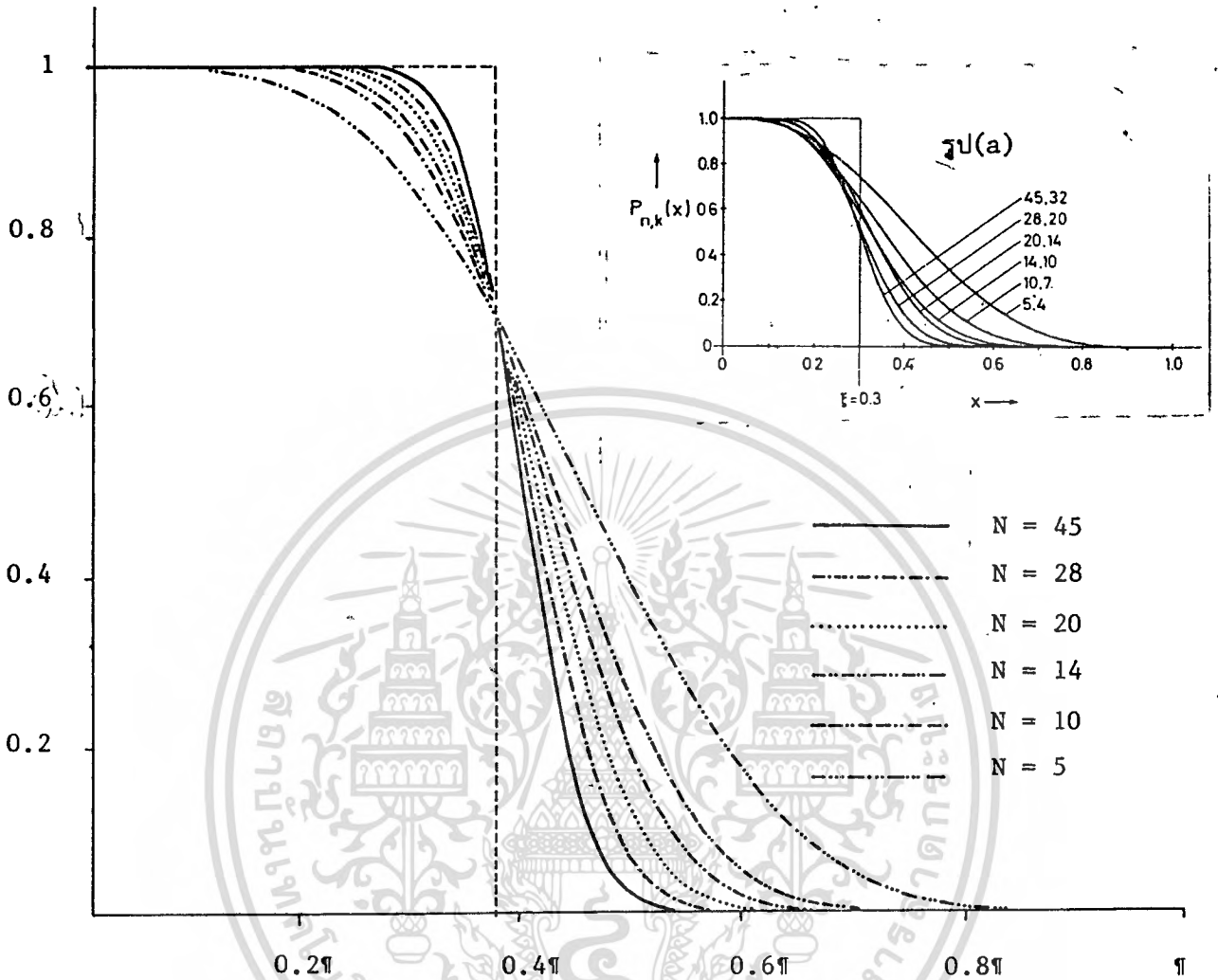
การเลือกค่า K ทั้งสองเราจะใช้สมการเอมไพริคอล (empirical expression) ในสมการที่ (9) ของบทความอ้างอิงที่ [5] ช่วย ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ \bar{C}_{N-K_2} ที่บังคับให้ผลตอบสนองทางขนาดผ่านจุดก่าจัดความถี่ Ω_{OA} หาได้จาก

$$\bar{C}_{N-K_2} = \frac{1}{\Omega_{OA}^{2(N-K_2)}} \left[\frac{(1+\Omega_{OA}^2)^N}{\sqrt{2}} - \sum_{\ell=0}^{N-K_2} 1 \cdot \binom{N}{\ell} \Omega_{OA}^{2\ell} \right] \quad (4.13)$$

ลองเปรียบเทียบดูบทความอ้างอิงที่ [5] รูปที่ 2 (นำมาแสดงประกอบกับรูปที่ 4.3 แล้ว) ในกรณีที่ $\omega_{OD} = 1.159$ เรเดียน (หรือ $\xi = 0.3$) ถูกเลือกให้เป็นจุดก่าจัดสัญญาณจะเห็นว่าไม่สามารถทำให้ผลตอบสนองทางขนาดผ่านจุดก่าจัดที่ต้องการได้ แต่ถ้าดูในรูปที่ 4.3 ของบทนี้ ผลตอบสนองทางขนาดในกรณีที่ N หลาย ๆ ค่า สามารถออกแบบให้ผ่านจุดก่าจัดใด ๆ ได้อย่างแน่นอน

4.3 สรุป

การออกแบบวงจรกรองความถี่ที่เรียกว่า transitional maximally flat FIR digital filter ที่อยู่ระหว่างค่าพารามิเตอร์ K ที่ใกล้กันสองค่า ใน



รูปที่ 4.3 แสดงผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่
 ดิจิตอล ที่อันดับ N ของวงจรมีค่าต่าง ๆ และให้
 ค่าจุดก่าจัดความถี่ $\xi = 1.159$ เรเดียนทุก ๆ
 อันดับ เปรียบเทียบกับรูป (a) ซึ่ง Herrmann
 ได้ออกแบบไว้ แต่ไม่สามารถให้ผลตอบสนองทาง
 ขนาดตัดที่จุด ξ ได้

กรณีที่อันดับของวงจรรองความถี่เป็น $2N$ สามารถสร้างได้ถึงจำนวนอนันต์ ซึ่งผลอันนี้ นำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหของบทความอ้างอิงที่ [5] ที่ไม่สามารถออกแบบให้ผลตอบสนอง ทางขนาดตัดผ่านจุดก่าจำกัดความถี่ใด ๆ ที่ต้องการได้ โดยการเลือกค่า K_1 ที่เหมาะสม แล้วหาสัมประสิทธิ์ที่เหลืออีกเพียง 1 ตัว เราก็จะได้วงจรรองความถี่ที่มีจุดก่าจำกัดความถี่ที่ต้องการได้เสมอ



บทที่ 5

การออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จัตตอลแบบนอนรีเคอร์ซีฟชนิดแถบความถี่ต่ำผ่านแบบราบ
เรียบมากที่สุด และมียอดคลื่นเท่ากันหมดในแถบปลอดสัญญาณ
(A Design Method for Monotone FIR with Equi-
ripple Stopband)

5.1 บทนำ

การออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จัตตอลในบทที่ 4 จะให้ผลตอบสนองทางขนาดในแถบความถี่ต่ำและในแถบปลอดสัญญาณเป็นแบบราบเรียบมากที่สุด สำหรับในบทนี้จะปรับปรุงให้ความคมของการกำจัด (cutoff rate) มีมากขึ้น โดยการออกแบบให้ผลตอบสนองแถบปลอดสัญญาณเป็นแบบยอดคลื่นเท่ากันหมด โดยใช้เทคนิคที่รู้จักกันดีคือ รีเมซัลกอริทึม ให้คอมพิวเตอร์คำนวณซ้ำ ๆ กันจนได้คำตอบที่ต้องการ ข้อดีของการออกแบบในบทนี้คือ เราใช้ตัวแปรควบคุม (constraint variables) เพียงชุดเดียวในแถบปลอดสัญญาณ จึงมีข้อได้เปรียบทางการคำนวณกว่าวิธีของ ฮอฟส์เตเตอร์ (Hofstetter) [1] ซึ่งต้องให้ตัวแปรควบคุมทั้งในแถบสัญญาณผ่านและแถบปลอดสัญญาณ หรือแม้จะเปรียบเทียบกับวิธีโปรแกรมมิ่ง (linear programming) [2] ก็มีข้อได้เปรียบที่มีความเร็ว (speed) ทางการคำนวณสูงกว่า

5.2 วิธีการออกแบบ

นำสมการที่ (4.7) มาพิจารณาใหม่

$$\bar{H}_0(j\Omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{N-K} \binom{N}{\ell} \Omega^{2\ell}}{(1+\Omega^2)^N} \quad (5.1)$$

สมการที่ (5.1) จะให้ผลตอบสนองทางขนาดเป็นแบบราบเรียบมากที่สุด ในแถบความถี่ต่ำและแถบปลอดสัญญาณความถี่สูง เป็นไปตามเงื่อนไขของสมการที่ (4.5) สำหรับในกรณีที่จะให้ผลตอบสนองทางขนาดมีความราบเรียบมากที่สุด ในแถบความถี่ต่ำ และมี ยอดคลื่นเท่ากัน ในแถบปลอดสัญญาณ เราต้องกำหนดเงื่อนไขใหม่ขึ้นนั่นคือ

$$\bar{H}_0(j\Omega) \leq 1 \quad \text{เมื่อ} \quad 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \quad (5.2a)$$

และ

$$\bar{H}_0(j\Omega) = \pm \delta \quad \text{เมื่อ} \quad \Omega_s \leq \Omega \leq \infty \quad (5.2b)$$

ในที่นี้ $\pm \delta$ เป็นค่าผิดพลาดที่ยอมรับได้ ในแถบปลอดสัญญาณ Ω_p และ Ω_s เป็นจุดก่าจัดความถี่แถบสัญญาณผ่าน (passband cutoff frequency) และจุดก่าจัดความถี่แถบปลอดสัญญาณ (stopband cutoff frequency) ตามลำดับ ซึ่งจุดทั้งสองจะปล่อยไว้ อย่างอิสระ

เงื่อนไขในสมการ (5.2a) เราจะใช้สัมประสิทธิ์ของวงจรรองที่หาได้ แล้วจากสมการ (5.1) นั่นคือตัวเลขไบโนเมียล (binomial) $N-K+1$ ตัว ส่วนเงื่อนไขในสมการ (5.2b) เราจะเพิ่มสัมประสิทธิ์นอกเหนือจากตัวเลขไบโนเมียลขึ้น-อีก นำมาเขียนเป็นสมการได้

$$\bar{H}_0(j\Omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{N-K} \binom{N}{\ell} \Omega^{2\ell} + \sum_{\ell=N-K+1}^M \bar{c}_\ell \Omega^{2\ell}}{(1+\Omega^2)^N} \quad (5.3)$$

ในที่นี้ $M \leq N$

รวมสมการที่ (5.2b) และ (5.3) เข้าด้วยกัน แล้วจัดใหม่ทำให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น (simultaneous linear equations) เพื่อสะดวกในการใช้กับวิธีเมทริกซ์

เราจะได้

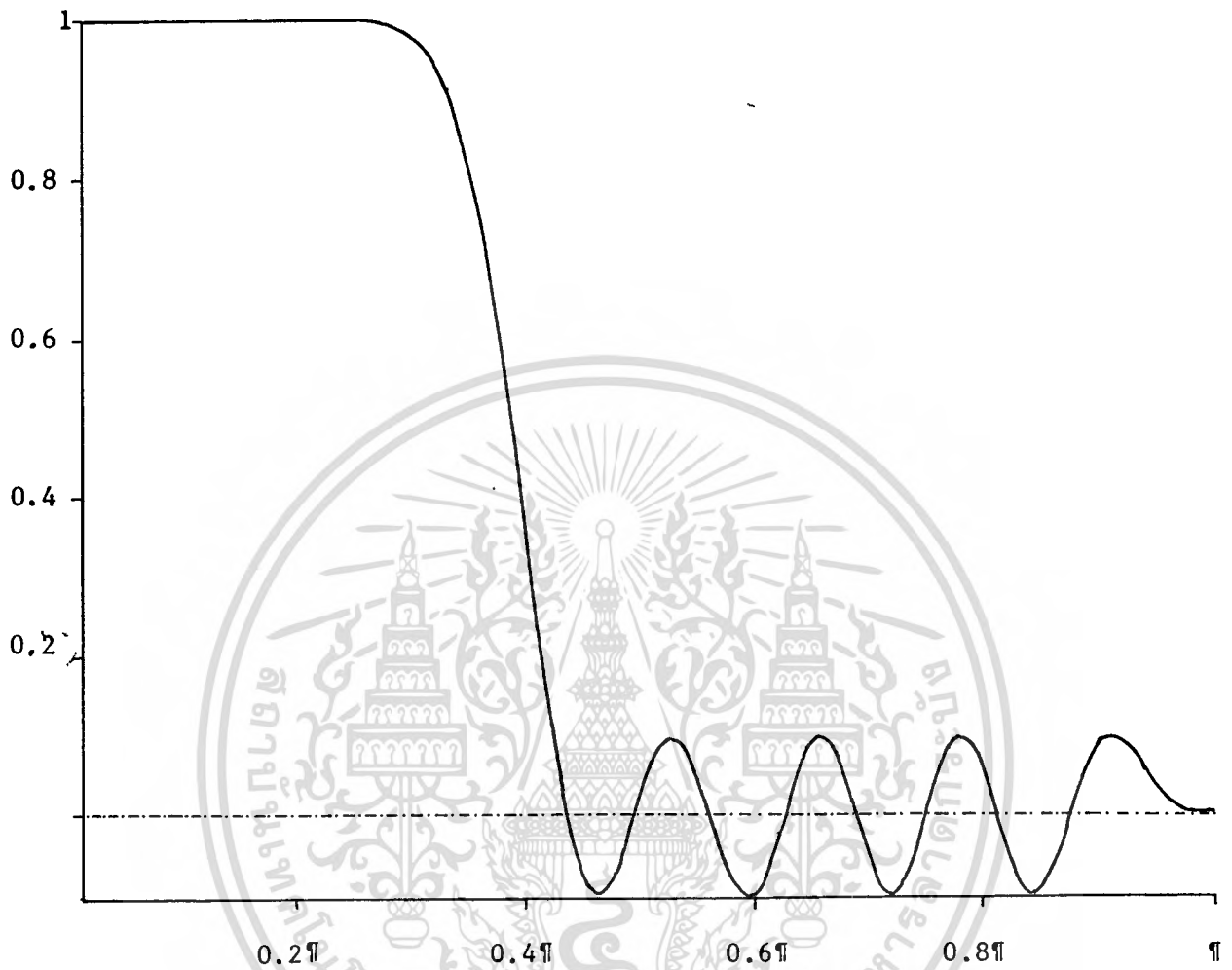
$$\sum_{\ell=N-K+1}^M \bar{C}_\ell \Omega^{2\ell} = \pm \delta (1 + \Omega^2)^N - \sum_{\ell=0}^{N-K} \binom{N}{\ell} \Omega^{2\ell} \quad (5.4)$$

ตัวอย่างการออกแบบในกรณีที่ $N=20$, $M=18$, $K=10$ และให้ $\delta=0.1$ จะได้กลุ่มของสมการเชิงเส้นดังนี้

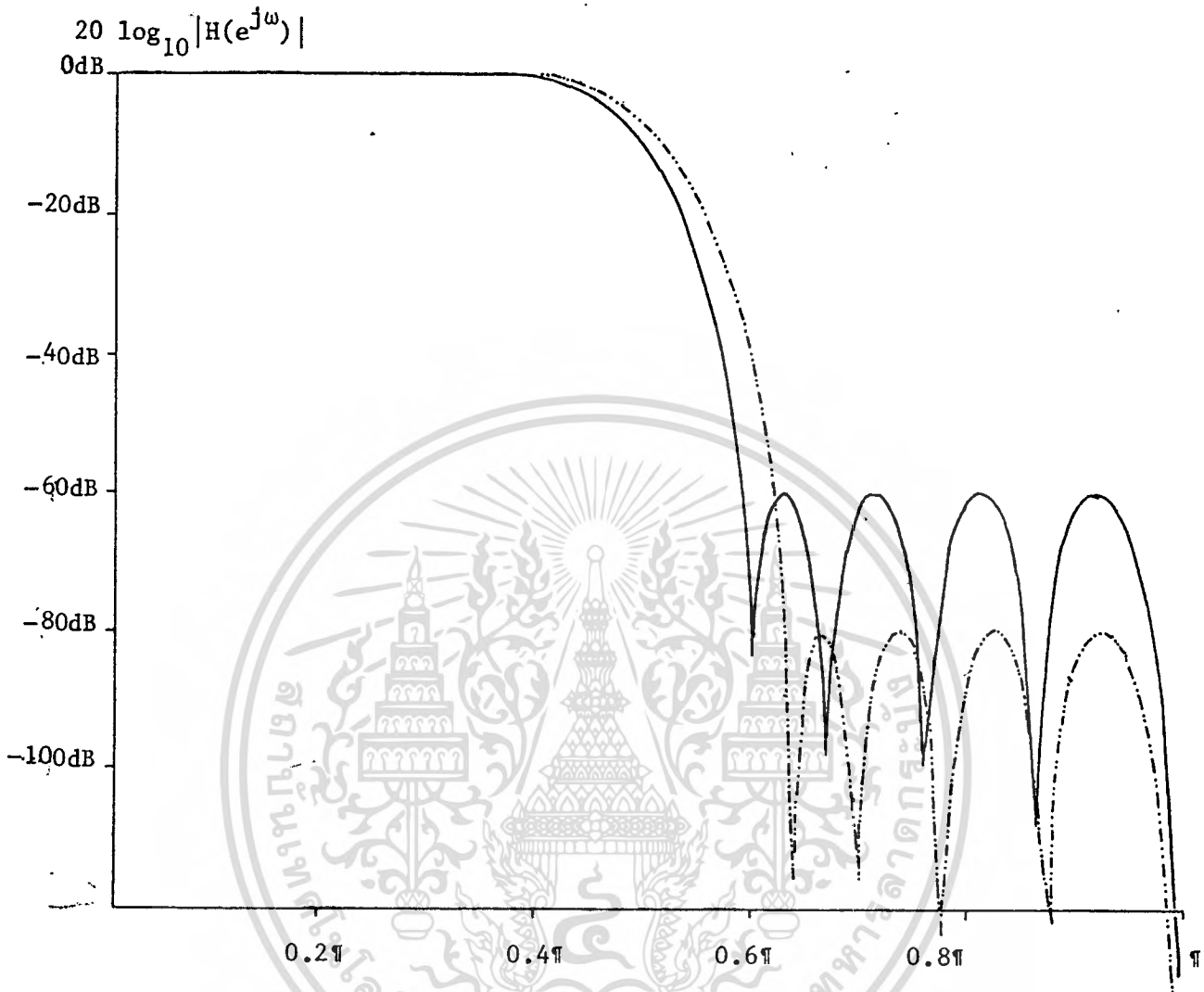
$$\begin{aligned} \sum_{\ell=11}^{18} \bar{C}_\ell \Omega_1^{2\ell} &= -0.1(1 + \Omega_1^2)^{20} - \sum_{\ell=0}^{10} \binom{20}{\ell} \Omega_1^{2\ell} \\ \sum_{\ell=11}^{18} \bar{C}_\ell \Omega_2^{2\ell} &= +0.1(1 + \Omega_2^2)^{20} - \sum_{\ell=0}^{10} \binom{20}{\ell} \Omega_2^{2\ell} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\sum_{\ell=11}^{18} \bar{C}_\ell \Omega_8^{2\ell} = +0.1(1 + \Omega_8^2)^{20} - \sum_{\ell=0}^{10} \binom{20}{\ell} \Omega_8^{2\ell}$$

ในที่นี้ $\Omega_8 < \Omega_1 < \Omega_2 \dots < \Omega_8$ เราจะให้ Ω_1 ใด ๆ ที่เหมาะสมเป็นจุดเริ่มต้น แล้วใช้วิธีเมทริกซ์ลกอริทึมความซ้ำ ๆ จนกระทั่งได้จุด Ω_1 ใหม่ที่ทำให้ $\bar{H}_0(j\omega)$ อยู่ในเงื่อนไขที่ (5.2b) เราก็จะได้กลุ่มสัมประสิทธิ์ \bar{C}_ℓ ที่ให้ผลตอบ



รูปที่ 5.1 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำ
เมื่อ $N=20$, $M=18$, $K=10$ และ $\delta=0.1$



รูปที่ 5.2 เปรียบเทียบผลตอบสองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำ
เมื่อ $N=22$, $M=20$, $K=10$ และ δ ต่างกัน

————— $0 < \delta < 0.001$

----- $0 < \delta < 0.0001$

สนองทางขนาดในแถบปลอดสัญญาณตามที่ต้องการ

5.3 สรุป

ผลการออกแบบในบทนี้จะให้ความชื้นที่จุดกำเนิดคมากกว่าในบทที่ 4 อย่างไรก็ดีตามจุดกำเนิดความถี่ยังถูกปล่อยเป็นอิสระ (free) เพื่อแลกเปลี่ยนกับการควบคุมค่าผิดพลาด δ ข้อดีอีกอย่างหนึ่งก็คือ สมประสิทธิ์ที่ทำให้เกิดความราบเรียบมากที่สุดจะเป็นค่าที่เราารู้และกำหนดแน่นอน (fixed) ไว้แล้ว เราเพียงแต่หาสมประสิทธิ์ซึ่งเป็นตัวแปรควบคุมที่ทำให้เกิดยอคคั่นเท่ากันในแถบปลอดสัญญาณ

เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการออกแบบของฮอฟส์เทเดเตอร์ ซึ่งออกแบบโดยใช้ตัวแปรควบคุมทั้งแถบสัญญาณผ่านและแถบปลอดสัญญาณ จะเห็นว่าต้องกำหนดตัวแปรถึงสองชุด จึงเป็นวิธีการที่ยุ่งยากและสูญเสียตัวแปรควบคุมมากกว่าการออกแบบในบทนี้ อีกทั้งยังให้ผลตอบสนองทางขนาดในแถบปลอดสัญญาณไม่ราบเรียบมากที่สุดด้วย

นอกจากนี้เราจะเห็นว่า การออกแบบทางอนาลอกมีข้อได้เปรียบกว่า- ดีจิตอลที่แทนความถี่ทางอนาลอกมีช่วงกว้าง (space) ตั้งแต่ 0 ถึง ∞ ดังนั้นถ้าต้องการ Ω_1 หลาย ๆ ค่าที่ทำให้เกิดยอคคั่นเท่า ๆ กันจึงมีระยะห่างระหว่างกันมากพอทำให้มีความง่ายในการเลือกค่า Ω_1 เริ่มต้นที่เหมาะสมที่ทำให้การคำนวณซ้ำ ๆ พบจุด (converge) ที่เป็นค่าตอบ ส่วนแทนความถี่ดีจิตอลมีช่วงกว้างตั้งแต่ 0 ถึง π ดังนั้นค่า ω_1 ที่จะเลือกจึงเบียดกันมาก ยากในการเลือกจุดเริ่มต้น

หมายเหตุ ผู้เขียนใช้ HP45 ในการออกแบบ พบปัญหาในกรณีที่ Ω_1 มีค่ามาก เมื่อยกกำลัง 2 ℓ จึงเป็นค่าจำนวนมหาศาล ความแม่นยำจึงลดน้อยลงเมื่อ ℓ มีค่าเพิ่มมากขึ้น แต่ถ้าใช้เครื่อง NEC 300 (ACOS-4) จะแก้ปัญหาทางตัวเลขได้เป็นอย่างดี เพราะสามารถใช้คำสั่งเพิ่มจำนวนบิต (bit) ซึ่งทำให้เกิดความแม่นยำในการคำนวณสูง

บทที่ 6

การออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบอนรีเคอร์ซีฟที่ให้ผลตอบสนองทางขนาด ต่อความถี่กลางราบเรียบที่สุด โดยใช้เทคนิคไฟโบนาซซีเชิร์ช (Design of Bandpass Maximally Flat FIR Digital Filter Using Fibonacci's Search Technique)

6.1 บทนำ

ในการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบอนรีเคอร์ซีฟโดยให้ผลตอบสนองทางขนาดราบเรียบมากที่สุด ในแถบความถี่กลางผ่านมีอยู่หลายแบบ ในบทนี้จะเสนอวิธีการออกแบบโดยการกระจายเทเลอร์ซีรีส์ (Taylor's series - expansion) แปลงจากความถี่ต่ำผ่าน ให้เป็นแบบความถี่กลางผ่าน แล้วใช้เทคนิคที่เรียกว่า ไฟโบนาซซีเชิร์ช ช่วยให้แถบความถี่ต่ำมีการสูญเสียสัญญาณ (loss) มากที่สุด

6.2 วิธีการออกแบบ

จากสมการที่ (4.4) เพื่อความเหมาะสมเราจะเปลี่ยนให้อยู่ในแกนความถี่อนาลอกได้

$$\bar{H}_0(j\Omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{N-K} \bar{c}_{\ell} \Omega^{2\ell}}{\sum_{\ell=0}^N \binom{N}{\ell} \Omega^{2\ell}} \quad (6.1)$$

\bar{C}_l เป็นสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่รู้ค่า

สมการที่ (6.1) เมื่อต้องการออกแบบให้แถบความถี่ค่าผ่านเป็นแบบราบเรียบมากที่สุด จะได้สัมประสิทธิ์ \bar{C}_l อยู่ในรูปของตัวเลขไบโนเมียล และผลตอบสนองทางขนาดจะราบเรียบมากที่สุด เมื่อ Ω เข้าใกล้ศูนย์และค่าอนันต์ เพื่อให้ผลตอบสนองทางขนาดมีความราบเรียบมากที่สุดในช่วงความถี่กลางผ่านเรา จะสมมติให้ $\Omega = x + \Omega_0$ โดยที่ x เป็นตัวแปรตามแกนความถี่ และ Ω_0 เป็นค่าความถี่คงที่ใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์ นั่นคือการทำเทเลอร์ซีรีส์รอบ ๆ จุด $\Omega = \Omega_0$ นำไปแทนในสมการ (6.1)

$$\bar{H}_0(j\Omega) = \frac{\sum_{l=0}^{N-K} \bar{C}_l (x + \Omega_0)^{2l}}{\sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (x + \Omega_0)^{2l}} \tag{6.2}$$

Ω_0 เป็นความถี่กลาง (center frequency) ที่ทำให้เกิดความราบเรียบมากที่สุด คุณสมบัติของทรานส์ ฟอรั่มฟังก์ชันที่ทำให้เกิดความราบเรียบมากที่สุดคือ

$$\bar{H}_0(j\Omega) = 1$$

สมการข้างบนเป็นจริง เมื่อค่าโพลีโนเมียลเศษเท่ากับค่าโพลีโนเมียลส่วนนั่นคือ

$$\sum_{l=0}^{N-K} \bar{C}_l (x + \Omega_0)^{2l} = \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (x + \Omega_0)^{2l} \tag{6.3}$$

การที่จะหาค่า \bar{C}_ℓ ในสมการที่ (6.3) ต้องกำหนดค่า Ω_0 ขึ้นก่อน แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x ที่มีกำลังเท่ากันทางด้านซ้ายมือกับขวามือตัวต่อตัว โดยตั้งรูปแบบให้อยู่ในรูปแมทริกซ์ (matrix) จากสมการเชิงเส้น แล้วใช้เกาส์เอลิมีเนชัน (Gauss elimination) หาค่า \bar{C}_ℓ ต่าง ๆ ออกมา ตัวอย่างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ เมื่อ $N=4, K=1$ เขียนได้ดังนี้

$$\sum_{\ell=0}^3 \bar{C}_\ell (x+\Omega_0)^{2\ell} = \sum_{\ell=0}^4 \binom{4}{\ell} (x+\Omega_0)^{2\ell} \quad (6.4)$$

กระจายสมการข้างบน แล้วใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ของ x ยกกำลังต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เราจะได้

$$x^0 : \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \Omega_1^2 + \bar{c}_2 \Omega_2^4 + \bar{c}_3 \Omega_3^6 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} \Omega_0^2 + \binom{4}{2} \Omega_0^4 + \binom{4}{3} \Omega_0^6 + \binom{4}{4} \Omega_0^8$$

$$x^1 : 2\bar{c}_1 \Omega_1 + 4\bar{c}_2 \Omega_2^3 + 6\bar{c}_3 \Omega_3^5 = \binom{4}{1} 2\Omega_0 + \binom{4}{2} 4\Omega_0^3 + \binom{4}{3} 6\Omega_0^5 + \binom{4}{4} 8\Omega_0^7$$

$$x^2 : \bar{c}_1 + 6\bar{c}_2 \Omega_2^2 + 15\bar{c}_3 \Omega_3^4 = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} 6\Omega_0^2 + \binom{4}{3} 15\Omega_0^4 + \binom{4}{4} 28\Omega_0^6$$

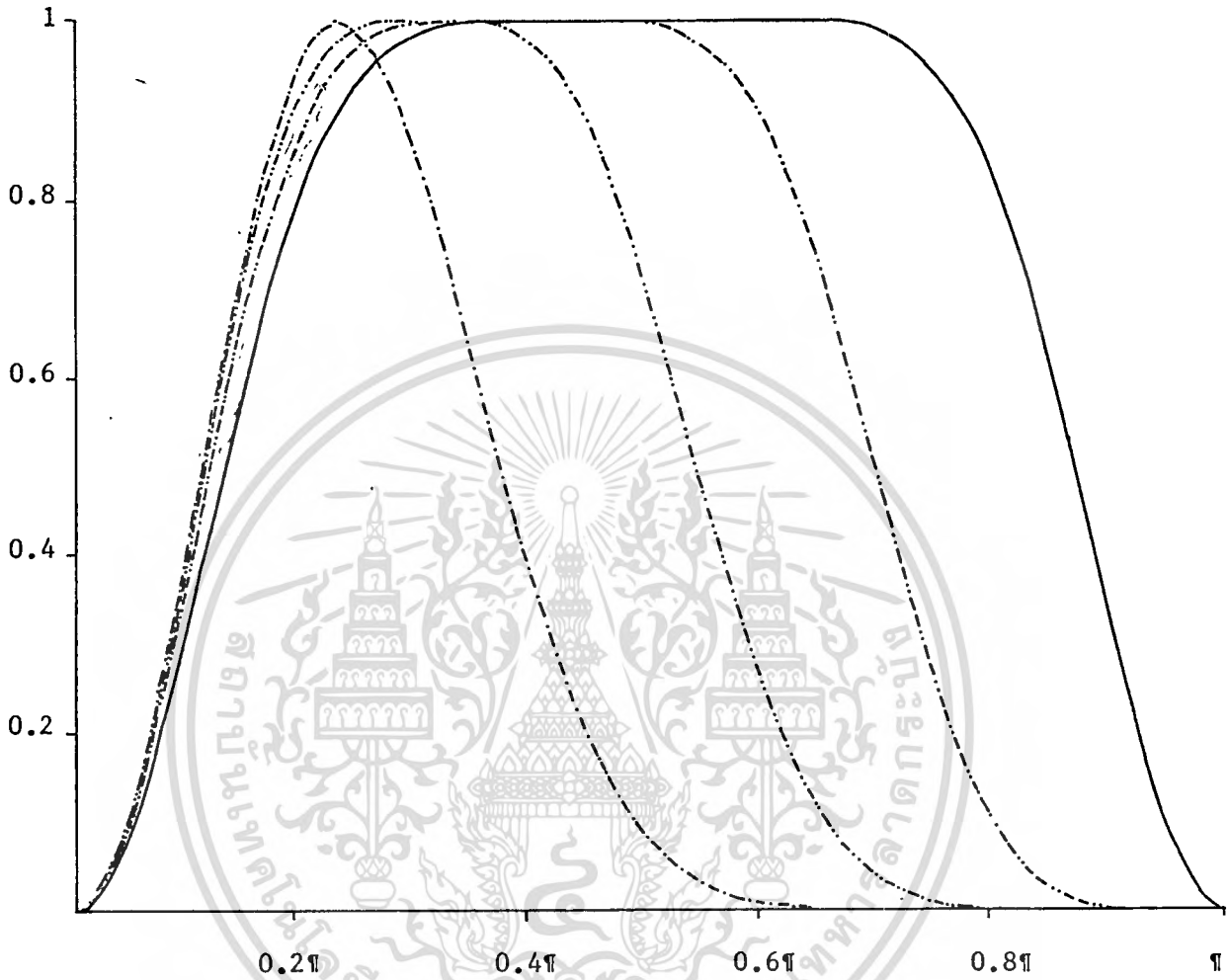
$$x^3 : 4\bar{c}_2 \Omega_2 + 20\bar{c}_3 \Omega_3^3 = \binom{4}{2} 4\Omega_0 + \binom{4}{3} 20\Omega_0^3 + \binom{4}{4} 56\Omega_0^5$$

เมื่อกำหนด Ω_0 ที่เหมาะสม เราจะหาค่า \bar{C}_0 ออกมาได้ แต่จะมีปัญหาเมื่อ $\bar{C}_0 > 0$ จะทำให้ผลตอบสนองทางขนาดมีการสูญเสียสัญญาณน้อย เพื่อการแก้ปัญหานี้เราจะใช้ไฟโบนาซชีเทคนิค [หัวข้อ 3.4] โดยให้ค่า \bar{C}_0 เป็นจุดออฟติมัม (optimum) ที่เราจะหา โดยเริ่มแรกเราจะเลือกจุด Ω_0 ขึ้นสองจุด ที่คาดว่าจะได้ค่า \bar{C}_0 อยู่ในระหว่างค่า + และค่า - แล้วนำค่าที่ได้มาพิจารณาว่า $|\bar{C}_0|$ ค่าไหนในสองค่ามีค่าน้อยกว่ากัน นำค่าที่น้อยกว่ามาเลือก Ω_0 เพื่อทำการทดลองในครั้งต่อไปโดยใช้ไฟโบนาซชีเชิร์ชเป็นตัวเลือก Ω_0 ใหม่ ทำการทดลองจนกระทั่งได้ค่า $\bar{C}_0 = \pm \delta$ โดยที่ δ เป็นค่าผิดพลาดที่ยอมให้ได้

จากรูป 6.1 เมื่อกำหนดค่า N คงที่ค่าหนึ่ง และเลือกค่า K ที่เหมาะสมจะได้ผลตอบสนองทางขนาดที่มีความราบเรียบดีมาก ในช่วงความถี่กลางผ่านอีกทั้งแถบความถี่ต่ำมีการสูญเสียสัญญาณมากที่สุด ความแม่นยำในการออกแบบแถบความถี่ต่ำให้มีการสูญเสียสัญญาณมากขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งของไฟโบนาซชีเทคนิคที่ใช้ทดลอง

6.3 สรุป

ในบทนี้ได้แสดงวิธีการออกแบบวงจรกรองความถี่ดีจิตอลที่ให้ความถี่กลางผ่าน โดยใช้การกระจายเทเลอร์ซีวีรอบ ๆ จุดความถี่กลาง ส่วนการสูญเสียในแถบความถี่ต่ำใช้เทคนิคที่เรียกว่าไฟโบนาซชีเชิร์ชมาช่วยลดค่าสัมประสิทธิ์ที่มีผลต่อความถี่ต่ำ เพื่อให้ค่าออฟติมัมที่สุด



รูปที่ 6.1 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำ
เมื่อ $N=8$ และ K ต่าง ๆ

- | | | | |
|---------------|-------|---------------|-------|
| ————— | $K=1$ | | $K=3$ |
| - · - · - · - | $K=5$ | - · - · - · - | $K=7$ |

บทที่ 7

สรุป

บทที่ 1 กล่าวถึงปัญหาทั่ว ๆ ไปของวงจรรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟและแนวความคิดในการแก้ปัญหา บทที่ 2 เป็นการกล่าวอย่างกว้าง ๆ เกี่ยวกับทฤษฎีการประมวลสัญญาณดิจิทัล โดยเน้นเรื่องเทคนิคการประมาณในการออกแบบจรรองความถี่ดิจิทัลทั้งแบบรีเคอร์ซีฟและนอนรีเคอร์ซีฟ นอกจากนี้ยังเปรียบเทียบข้อดีข้อเสียของทั้งสองแบบไว้ด้วย บทที่ 3 กล่าวถึงเทคนิคต่าง ๆ ที่ช่วยในการออกแบบในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งทั้งสามบทนี้เป็นพื้นฐานโดยย่อที่เป็นหัวใจพื้นฐานในการทำวิทยานิพนธ์

ส่วนที่เหลืออีกสามบท แสดงการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟ โดยในบทที่ 4 เป็นการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟที่มีความราบเรียบมากที่สุดทั้งในแถบสัญญาณผ่านและแถบปลอดสัญญาณ และยังสามารถเลือกความถี่ที่จุดกำเนิดสัญญาณเป็นความถี่ใด ๆ ก็ได้ เทคนิคการออกแบบกระทำอยู่ในรูปสูตรสำเร็จ ซึ่งง่าย มีความประหยัดและมีความเที่ยงตรงสูง ทำให้ได้ประสิทธิภาพในการออกแบบดี บทที่ 5 เป็นการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟที่ขยายมาจากบทที่ 4 โดยการเพิ่มความชันในช่วงทรานซิชันให้มากขึ้น โดยใช้เทคนิครีเมซซัลกอริทึมทำให้เกิดยอดคลื่นเท่า ๆ กันในแถบปลอดสัญญาณส่วนในแถบสัญญาณผ่านจะกำหนดตายตัวให้มีความราบเรียบไว้ด้วยสเปส. จากผลการออกแบบในบทที่ 4 บทสุดท้ายคือบทที่ 6 เป็นการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบความถี่กลางผ่าน โดยใช้เทคนิคไฟโบนาสซ์ซึ่งช่วยทำให้เกิดการสูญเสียในช่วงความถี่ต่ำมากที่สุด

สำหรับผู้สนใจที่จะทำวิจัยต่อจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ พอที่จะแนะนำได้

คือในบทที่ 5 ซึ่งใช้เทคนิครีเมซัลกอรี่ที่มออกแบบให้เกิดยอดคลื่นเท่ากันในแถบปลอด
สัญญาณนั้น ผู้เขียนใช้ HP 45 ช่วยออกแบบ เกิดปัญหาในกรณีที่อันดับวงจรรองความ
ถี่มีค่าสูง ทำให้ความแม่นยำลดลง ถ้าใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ NEC 300 (ACOS-4)
ช่วยแก้ปัญหานี้ได้ ส่วนในบทที่ 6 ปัญหาต่อไปที่ต้องขบคิดคือ ทำอย่างไรจึงจะเพิ่ม
ความราบเรียบในแถบความถี่ทำให้เพิ่มมากขึ้นต่อไปอีกได้ และสามารถเลือกความถี่
กึ่งกลางใด ๆ ก็ได้



บทความและหนังสืออ้างอิง

- 1 A.V.Oppenheim and R.W.Schafer, 'Digital Signal Processing', Prentice-Hall, 1975.
- 2 R.L.Rabiner and B.Gold, 'Theory and Application of Digital Signal Processing', Prentice-Hall, 1975.
- 3 L.Weinberg, 'Network Analysis and Synthesis', McGraw-Hill, 1962.
- 4 A.Antoniou, 'Digital Filter Analysis and Design', McGraw-Hill, 1979.
- 5 O.Herrmann, "On The Approximation Problem in Nonrecursive Digital Filter Design", Vol.CT-18, pp.411-413, May 1971.
- 6 B.Gold and C.M.Rader, 'Digital Processing of Signal', McGraw-Hill, 1969.
- 7 A.Peled and B.Liu, 'Digital Signal Processing Theory, Design and Implementation', John Wiley & Sons, 1979.
- 8 G.C.Temes and J.Lapatra, 'Introduction to Circuit Synthesis and Design', McGraw-Hill, 1977.
- 9 F.F.Kuo and W.G.Magnuson, 'Computer Oriented Circuit Design', Chapter 6, pp.264-277, Prentice-Hall, 1979.
- 10 G.S.G.Beveridge and R.S.Schechter, 'Optimization Theory and Practice', McGraw-Hill, 1970, pp.180-189.

ภาคผนวก

สำหรับภาคผนวก เป็นการแสดง BASIC Program ของเครื่อง - HP 45 ที่ช่วยในการออกแบบในบทที่ 5 และ 6 ซึ่งตัวแปรและสับรoutines (subroutine) ต่าง ๆ อธิบายได้ดังนี้

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 5

<u>ตัวแปร</u>	2*N	เป็นค่าอันดับของฟิลเตอร์
	N-K	เป็นดัชนีของความราบเรียบในแถบความถี่ต่ำ
	M-K	เป็นจำนวนยอคคัสในแถบพลาสมา
<u>สับรoutines</u>	Bino	ใช้สร้างตัวเลขไบโนเมียล
	Simq	ใช้หาคำตอบของสมการเชิงเส้น
	Siljak	ใช้หารากของโพลีโนเมียล
	Vectorsort_s	ใช้จัดเรียงอันดับของตัวเลข

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 6

<u>ตัวแปร</u>	2*N	อันดับของวงจรรองความถี่
	K	เป็นดัชนีของความราบเรียบในแถบความถี่สูง
	Lflat	เป็นดัชนีของความราบเรียบในแถบความถี่ต่ำ
<u>สับรoutines</u>	Solve	ใช้สร้างสเปส. ของสมการเชิงเส้นและหาค่าตัวที่ไม่รู้ค่า
	Simq	ใช้หาคำตอบของสมการเชิงเส้น

คอมพิวเตอร์โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 5

```

100 OPTION BASE 1
200 DIM B(0:40),G(0:40),D(0:40),Cf(0:40),F(400),P(40),O(0:40)
300 DIM X(0:40),A(0:40,0:40),Rcoef(0:40),Icoef(0:40),Rroot(40)
400 DIM Iroot(40),W(40),Xroot(40),S(40),H(40)
500 N=20
600 M=18
700 K=10
800 Eps1=-.001
900 Eps2=.001
1000 W(1)=1.24
1100 W(2)=1.37
1200 W(3)=1.58
1300 W(4)=1.89
1400 W(5)=2.3
1500 W(6)=3
1600 W(7)=4.17
1700 W(8)=6
1800 W(9)=6.4
1900 W(10)=7
2000 FOR L=0 TO N-K
2100 CALL Bino(N,L,Pi)
2200 Cf(L)=Pi
2300 NEXT L
2400 FOR I=1 TO M-(N-K) STEP 2
2500 B(I)=0
2600 B(I+1)=0
2700 FOR L=0 TO N-K
2800 B(I)=Cf(L)*W(I)^(2*L)+B(I)
2900 B(I+1)=Cf(L+1)*W(I+1)^(2*(L+1))+B(I+1)
3000 NEXT L
3100 C(I)=Eps1*(1+W(I)*W(I))^N
3200 C(I+1)=Eps2*(1+W(I+1)*W(I+1))^N
3300 D(I)=C(I)-B(I)
3400 D(I+1)=C(I+1)-B(I+1)
3500 NEXT I
3600 !
3700 FOR I=1 TO M-(N-K)
3800 FOR L=N-K+1 TO M
3900 A(I,L-(N-K))=W(I)^(2*L)
4000 NEXT L
4100 NEXT I

```

```

420 FOR I=1 TO M-(N-K)
430   FOR J=1 TO M-(N-K)
440     L5=(M-(N-K))*(I-1)+J
450     F(L5)=A(J,I)
460   NEXT J
470 NEXT I
480 CALL Simq(F(*),D(*),M-(N-K),Ks)
490 MAT O=A*D
500 MAT X=B-O
510 PRINT "N=";N;"M=";M;"K=";K;"Eps1=";Eps1;"Eps2=";Eps2
520 FOR I=1 TO M-(N-K)
530   PRINT "D(";I;")=";D(I),"Error(";I;")=";X(I)
540 NEXT I
550 REM: SOLVE ROOT
560 FOR L=0 TO N-K-1
570   Rcoef(L)=(L*Cf(L)+(L+1)*Cf(L+1))/N
580 NEXT L
590 Rcoef(N-K)=((N-K)*Cf(N-K)+(N-K+1)*D(1))/N
600 FOR L=N-K+1 TO M
610   Rcoef(L)=(L*D(L-(N-K))+(L+1)*D(L+1-(N-K)))/N
620 NEXT L
630 FOR L=0 TO N-K
640   Rcoef(L)=Rcoef(L)-Cf(L)
650 NEXT L
660 FOR L=N-K+1 TO M
670   Rcoef(L)=Rcoef(L)-D(L-(N-K))
680 NEXT L
690 FOR I=0 TO M-(N-K)
700   Rcoef(I)=Rcoef(I+(N-K))
710 NEXT I
720 MAT Icoef=ZER
730 Tola=.000001
740 Tolf=.000001
750 Itmax=500
760 Mnk=M-(N-K)
770 CALL Siljak(Mnk,Rcoef(*),Icoef(*),Tola,Tolf,Itmax,W(*),
  Iroot(*))
780 FOR J=1 TO Mnk
790   PRINT "W(";I;")=";W(J),"Iroot(";J;")=";Iroot(J)
800 NEXT J
810 MAT S=W
820 !
830 CALL Vectorsort_s(W(*),1,Mnk,1)
840 FOR Ll=1 TO Mnk
850   E=1
860   FOR Kk=1 TO Mnk
870     T=Ll-1
880     IF W(Ll)-S(Kk)<>0 THEN 970

```

```

89Ø      IF L1=1 THEN 94Ø
90Ø      IF E>1 THEN 94Ø
91Ø      IF W(L1)<>W(T) THEN 94Ø
92Ø      E=2
93Ø      GOTO 97Ø
94Ø      Xroot(L1)=Iroot(Kk)
95Ø      PRINT "NW(";L1;")=";W(L1),"Nroot(";L1;")=";Xroot(L1)
96Ø      GOTO 98Ø
97Ø      NEXT Kk
98Ø      NEXT L1
99Ø      Mm=Ø
100Ø     FOR I=1 TO Mnk
101Ø     IF W(I)<.ØØØØ1 THEN 107Ø
102Ø     IF ABS(Xroot(I))>.5 THEN 107Ø
103Ø     Mm=Mm+1
104Ø     H(Mm)=W(I)
105Ø     Hroot(Mm)=Xroot(I)
106Ø     PRINT H(Mm),Mm,Hroot(Mm)
107Ø     NEXT I
108Ø     FOR L1=1 TO Mm+1
109Ø     Kk=L1+(Mnk-Mm)
110Ø     W(Kk)=H(L1)
111Ø     NEXT L1
112Ø     FOR Kk=1 TO Mnk-Mm
113Ø     W(Kk)=Ø
114Ø     NEXT Kk
115Ø     MAT W=SQR(W)
116Ø     PRINT
117Ø     FOR I=1 TO Mnk
118Ø     W(I)=SQR(H(I))
119Ø     PRINT "W(";I;")=";W(I)
120Ø     NEXT I
121Ø     PRINT
122Ø     FOR I=1 TO M-(N-K)
123Ø     B(I)=Ø
124Ø     FOR L=Ø TO N-K
125Ø     B(I)=Cf(L)*W(I)^(2*L)+B(I)
126Ø     NEXTLL
127Ø     NEXT I
128Ø     FOR I=1 TO M-(N-K)
129Ø     J(I)=Ø
130Ø     FOR L=N-K+1 TO M
131Ø     J(I)=D(L-(N-K))*W(I)^(2*L)+J(I)
132Ø     NEXT L
133Ø     NEXT I
134Ø     FOR I=1 TO M-(N-K)
135Ø     Z(I)=(1+W(I)*W(I))^N

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

1360 NEXT I
1370 PRINT TAB(10);"-----"
1380 PRINT
1390   FOR I=N-K+1 TO M
1400     Tran(I-(N-K))=(B(I-(N-K))+J(I-(N-K)))/Z(I-(N-K))
1410     PRINT TAB(10);"Tran(";I-(N-K);")=";Tran(I-(N-K))
1420   NEXT I
1430 PRINT TAB(10);"-----"
1440 BEEP
1450 WAIT 1000
1460 GOTO 240
1470 END

```



คอมพิวเตอร์โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 6

```

10 OPTION BASE 1
20 DIM B(0:40),Bi(0:40,0:40),Ff(0:100),L1k(0:50),Lk(0:50)
30 .N=10
40 K=2
50 PRINT "N=";N;"K=";K
60 Nk=N-K
70 FOR I=2 TO 2*N STEP 2
80 FOR J=0 TO I
90 CALL Bino(I,J,Pi)
100 Bi(I,J)=Pi
110 NEXT J
120 NEXT I
130 A1=.8
140 CALL Solve(A1,B(*),Bi(*),Nk,N)
150 B1=1.2
160 CALL Solve(B1,B(*),Bi(*),Nk,N)
170 Nf=20
180 Ff(0)=1
190 Ff(1)=1
200 FOR J=2 TO Nf
210 Ff(J)=Ff(J-1)+Ff(J-2)
220 NEXT J
230 Lk(1)=B1-A1
240 L1k(1)=Ff(Nf-2)/Ff(Nf)*Lk(1)
250 X1=A1+L1k(1)
260 X2=B1-L1k(1)
270 FOR K=1 TO Nf-1
280 Lk(K)=Ff(Nf-(K-1))/Ff(Nf)*Lk(1)
290 L1k(K)=Ff(Nf-(K+1))/Ff(Nf-(K-1))*Lk(K)
300 X1=A1+L1k(K)
310 X2=B1-L1k(K)
320 CALL Solve(X1,B(*),Bi(*),Nk,N)
330 Y1=B(1)
340 CALL Solve(X2,B(*),Bi(*),Nk,N)
350 Y2=B(1)
360 IF ABS(Y1)>ABS(Y2) THEN A1=X1
370 IF ABS(Y1)<ABS(Y2) THEN B1=X2
380 PRINT " _____ "
390 NEXT K
400 END
410 !
420 SUB Solve(Wo,B(*),Bi(*),Nk,N)

```

```

420 DIM A(0:40,0:40),F(500)
430   Bi(0,0)=1
440   FOR J=0 TO N
450     FOR I=0 TO 2*N
460       A(I,J)=Bi(2*J,I)*Wo^(2*J-I)
470       PRINT "A(";I;J;")=",A(I,J)
480     NEXT I
490   NEXT J
500   FOR I=0 TO 2*N
510     B(I)=0
520     FOR J=0 TO N
530       B(I)=Bi(N,J)*A(I,J)+B(I)
540     NEXT J
550   NEXT I
560   Nn=Nk+1
570   FOR I=Nn TO 1 STEP -1
580     FOR J=Nn TO 1 STEP -1
590       A(I,J)=A(I-1,J-1)
600     NEXT J
610     B(I)=B(I-1)
620   NEXT I
630   Lflat=1
640   FOR I=1 TO Nn-Lflat
650     FOR J=1 TO Nn-Lflat-1
660       A(I,J+1)=A(I,J+Lflat+1)
670     NEXT J
680   NEXT I
690   FOR I=1 TO Nn-Lflat
700     FOR J=1 TO Nn-Lflat
710       L5=Nn*(I-1)+J
720       F(L5)=A(J,I)
730     NEXT J
740   NEXT I
750   !
760   CALL Simq(F(*),B(*),Nn-Lflat,Ks)
770   FOR I=1 TO Nn-Lflat
780     PRINT "B(";I;")=";B(I)
790   NEXT I
800   SUBEND

```

ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ

- [1] P.THAJCHAYAPONG, M.PUANGPOOL and S.BANJONGJIT, "Maximally Flat F.I.R. Filter with Prescribed Cutoff Frequency", Electron. Lett., Vol.16, NO.12, pp. 114-115, 19th June 1980.
- [2] P.THAJCHAYAPONG, M.PUANGPOOL and S.BANJONGJIT, "A Chebyshev IIR Lowpass Digital Filter with Adjustable Cut-off Rate", Inter.Electronics, Vol.49, NO.4, pp. 301-305, 1980.
- [3] P.THAJCHAYAPONG, S.BANJONGJIT and M.PUANGPOOL, "A Design for The Additional Members of The Transitional Micromachined Filters", Proc, IEEE.

MAXIMALLY FLAT F.I.R. FILTER WITH PRESCRIBED CUTOFF FREQUENCY

Indexing terms: Filters, Digital control

Maximally flat f.i.r. digital filter design provides the advantage of giving a closed-form solution, but there still remains a problem of designing such a filter whose magnitude response passes through a prescribed cutoff frequency point. It is described here how to generate a class of transitional maximally flat f.i.r. digital filters to overcome such a difficulty.

Introduction: Maximally flat f.i.r. digital filter design¹⁻⁴ offers an advantageous feature over other optimal designs,⁵ e.g. the minimax design, in providing the weighting coefficients in closed form. There still, however, remains a problem of choosing the coefficients of this filter type with its magnitude response passing through an arbitrary specified cutoff frequency. So far, for a given filter of order $2N$, the 'flatness' parameter K must be chosen in accordance with expr. 9 of Reference 1 to give the filter cutoff point near to the desired value. But as is seen from Fig. 2 of Reference 1, the magnitude responses never exactly pass through the desired cutoff frequency. The purpose of this paper is twofold. First, it is shown that for any two adjacent values of K , a class of transitional maximally flat f.i.r. filters can be generated. It is then shown further that for any given filter order $2N$, one can design such an f.i.r. filter with its magnitude response passing through a prescribed cutoff frequency.

Design procedure

Transitional filters between two adjacent values of K : The elegant design of Miller² is comparatively simple and readily applicable to our proposal. From exprs. 4 and 6 of Reference 2 the maximally f.i.r. filter function in the q -plane is rewritten here again as

$$H_0(q) = \left| \sum_{l=0}^{N-K} \binom{N}{l} (-q^2)^l \right| / (1 - q^2)^N \quad (1)$$

where $2N$ is the filter order and K is the degree of flatness in the stopband. Substitution of $q = j\Omega$ gives

$$H_0(\Omega) = \left| \sum_{l=0}^{N-K} \binom{N}{l} \Omega^{2l} \right| / (1 + \Omega^2)^N \quad (2)$$

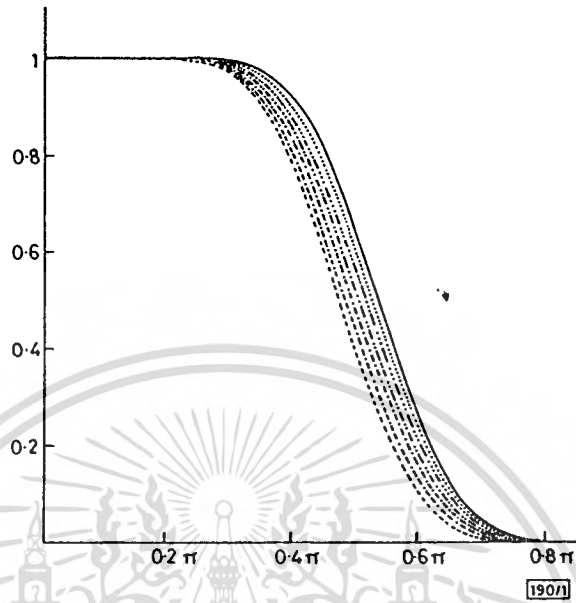


Fig. 1 Transitional maximally flat f.i.r. digital filters with $N = 10$, $K_1 = 6$ and $K_2 = 5$

C_5 values

————— 252	— · — · — 84
······ 210	- - - - - 42
- · · · - 168	----- 0
- · · - 126	

To obtain a transitional filter between two adjacent values of K , say K_1 and K_2 with $K_2 = K_1 - 1$, we add an extra term in the numerator of eqn. 2 as

$$H_0(\Omega) = \left\{ \sum_{l=0}^{N-K_1} \binom{N}{l} \Omega^{2l} + C_{N-K_2} \Omega^{2(N-K_2)} \right\} / (1 + \Omega^2)^N \quad (3)$$

If C_{N-K_2} is now allowed to vary between $0 \leq C_{N-K_2} \leq \binom{N}{N-K_2}$, a class of transitional filters whose magnitude responses lie between those with the flatness parameters K_1 and K_2 is obtained. Fig. 1 shows the case of transitional responses with $N = 10$, $K_1 = 6$ and $K_2 = 5$.

F.I.R. filter with arbitrary specified cutoff point: For a specified cutoff point in the z -plane, the corresponding cutoff point in the q -plane is determined via

$$\Omega_{OA} = \tan \frac{\Omega_{OD}}{2} \quad (4)$$

where Ω_{OA} and Ω_{OD} are the analogue and digital cutoff frequencies, respectively. The sampling frequency is normalised to unity. Next, the two adjacent values of K (i.e. K_1 and K_2) between which the magnitude response with the specified cutoff point falls into are determined. This can be done with the help of the empirical expr. 9 of Reference 1. The coefficient C_{N-K_2} , giving the filter function whose magnitude response passes through the cutoff point Ω_{OA} , is then determined from

$$C_{N-K_2} = \frac{1}{\Omega_{OA}^{2(N-K_2)}} \left[\frac{(1 + \Omega_{OA}^2)^N}{\sqrt{2}} - \sum_{l=0}^{N-K_1} \binom{N}{l} \Omega_{OA}^{2l} \right] \quad (5)$$

To compare with the previous results,¹ the case of $\Omega_{OD} = 1.159$ rad (corresponding to $\xi = 0.3$ in Reference 1) is chosen as the

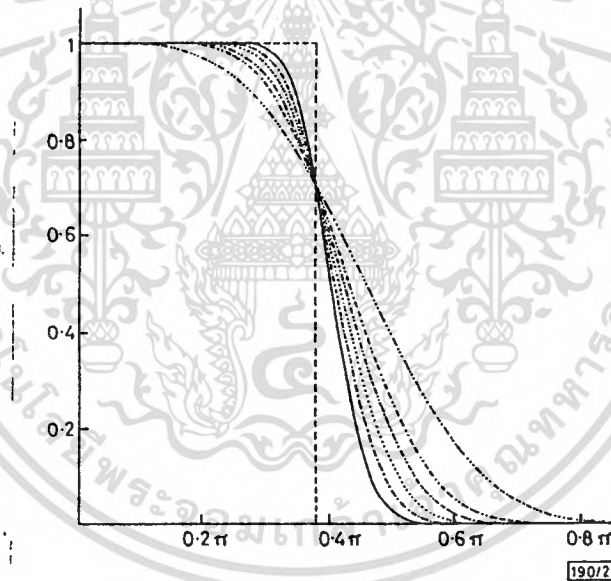


Fig. 2 Maximally flat f.i.r. digital filters with cutoff frequency at 1.159 rad.

N values			
—	45	- - - -	14
- . - .	28	- - - - -	10
.....	20	- - - -	5

Table 1 VARIOUS PARAMETERS FOR FIG. 2

114	N	K_1	K_2	C_{N-K_2}
115	5	4	3	5-79138
116	10	7	6	60-22232
117	14	10	9	1252-29180
118	20	14	13	46716-343698
119	28	19	18	2549414-08372
120	45	31	30	223613681064

cutoff point. The responses with various N are illustrated in Fig. 2. Table 1 also indicates the related parameters.

Conclusions: It has been described how to generate the transitional maximally flat f.i.r. digital filters between any two adjacent flatness parameters. For a given filter order $2N$, the previous designs^{1,2} give only N useful filters (see Fig. 1, Reference 1). However, the technique described above shows that an infinite number of this filter type can be generated. The technique is then extended to the design of a maximally flat f.i.r. filter whose magnitude response passes through an arbitrary cutoff frequency. Hence, a solution to the problem encountered in the previous design¹ is found.

Acknowledgments: One of the authors, P. Thajchayapong, wishes to acknowledge the Japanese Society for the Promotion of Science (JSPS) and the National Research Council of Thailand (NRCT) for the JSPS scholarship support during his stay in Japan at the University of Electrocommunications.

P. THAJCHAYAPONG
M. PUANGPOOL
S. BANJONGJIT

16th May 1980

Faculty of Engineering
King Mongkut Institute of Technology
Ladkrabang Campus, Ladkrabang, Bangkok, Thailand

Reprinted from *ELECTRONICS LETTERS* 19th June 1980 Vol.16 No.13 pp. 514-515

A Chebyshev IIR lowpass digital filter with adjustable cut-off rate

P. THAJCHAYAPONG† M. PUANGPOOL†
and S. BANJONGJIT†

For a given order of a Chebyshev IIR digital filter, existing design techniques using the squared magnitude function or the bilinear transform do not allow the freedom of adjusting the cut-off rate. An available transform method is used to overcome this difficulty.

1. Introduction

The standard design techniques for an n th order Chebyshev IIR digital filter give the number of zeros at $Z = -1$ either n or none at all. This depends on whether a tangent or a sine function is employed in the squared magnitude expression (Rader and Gold 1967). The well known bilinear transform design also always gives n zeros at that location (Gold and Rader 1969). The purpose of this paper is to apply an available transform method (Temes and Mitra 1973) which can give any desired number $m < n$ of zeros at $Z = -1$. It is shown further that a sharp cut-off can also be achieved by assigning a number of zeros near to the passband edge. It is seen as an application of the transform method which has been used previously in analogue filter design (Temes and Mitra 1973) to IIR digital filter design.

2. Design procedure and examples

From the transformation between the S -plane and the W -plane (Temes and Mitra 1973)

$$W = \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_{PA}^2}{S^2}\right)}, \quad \text{Re}[W] \geq 0 \quad (1)$$

we may obtain the transformation between the Z -plane and the W -plane by the substitution of

$$S = \frac{Z-1}{Z+1} \quad (2)$$

into (1) as

$$W = \sqrt{\left(1 + \frac{\tan^2(\omega_{PD}/2)}{[(Z-1)/(Z+1)]^2}\right)}, \quad \text{Re}[W] \geq 0 \quad (3)$$

where ω_{PA} and ω_{PD} are the passband edges for the analogue and digital lowpass filters respectively. The two cases of lowpass digital filters of our interest can be designed as follows.

Received 14 July 1980 ; accepted 15 September 1980.

† Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology, Ladkrabang Campus, Ladkrabang, Bangkok, Thailand.

2.1. IIR filter with an assigned number of zeros at $Z = -1$

For an n th order lowpass IIR filter, let m and $(n-m)$ be the number of zeros at $Z = -1$ and $Z = 0$ respectively. Using (3), these zeros transform respectively into the W -plane as 1 and $(1 + \tan^2 \frac{1}{2}\omega_{PD})$ respectively. We then formulate the polynomial (Temes and Mitra 1973)

$$E(W^2) + WF(W^2) = \{W + 1\}^m \{W + (1 + \tan^2 \frac{1}{2}\omega_{PD})^{1/2}\}^{n-m} \quad (4)$$

where $E(W^2)$ and $WF(W^2)$ are the even and odd parts of the polynomial respectively. The transfer function in the W -plane with the equi-ripple passband and the specified zeros is therefore given by

$$|H(W)|^2 = H(W)H(-W) = \frac{E^2(W^2) - W^2F^2(W^2)}{(1 + j_p^2)E^2(W^2) - W^2F^2(W^2)} \quad (5a)$$

or

$$H(-W) = \frac{E(W^2) - WF(W^2)}{\sqrt{(1 + k_p^2)E^2(W^2) - W^2F^2(W^2)}} \quad (5b)$$

where k_p is related to α_p , the passband loss, via

$$k_p^2 = 10^{\alpha_p/10} - 1 \quad (6)$$

the squared magnitude function of the required IIR filter may be obtained from (5b) by the transformation

$$\begin{aligned} |H(Z)|^2 &= H(Z)H(Z^{-1}) \\ &= |H(W)|^2_{W^2=1+(Z-1)/(Z+1)} = 1 + (\tan^2 \frac{1}{2}\omega_{PD})/[(Z-1)/(Z+1)]^2 \end{aligned} \quad (7)$$

However, it is numerically advantageous to solve for the poles of $H(-W)$ in (5b) and then transform them into the Z -plane to formulate the IIR filter transfer function.

A 6th order lowpass filter with $\alpha_p = 3$ db, $\omega_{PD} = 1$ rad/s with $m = 3$ and $n - m = 3$ is given by

$$H(Z) = \frac{2.766215 \times 10^{-3}(Z+1)^3}{(Z^2 - 1.668339Z + 0.747975)(Z^2 - 1.352446Z + 0.813321)(Z^2 - 1.077917Z + 0.929357)} \quad (8)$$

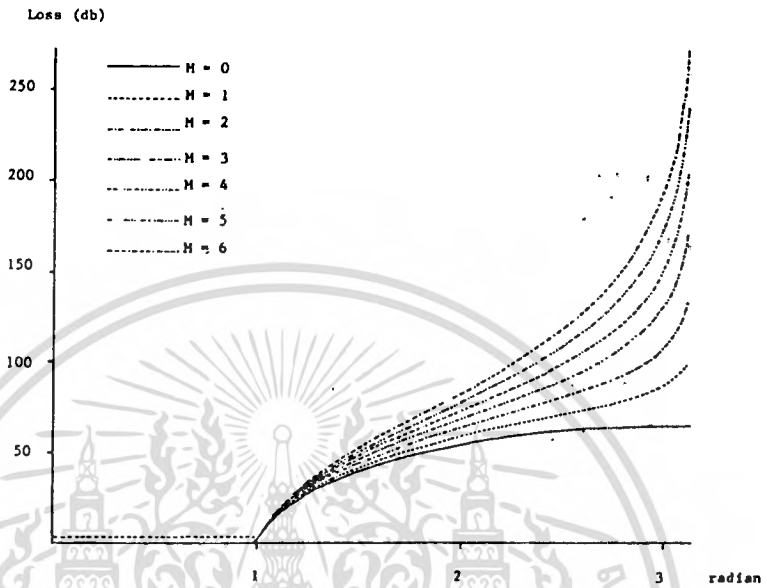
The filter with other values of m has also been designed as illustrated in Fig. 1. The sampling period T is normalized to unity.

2.2. IIR filter with sharp cut-off

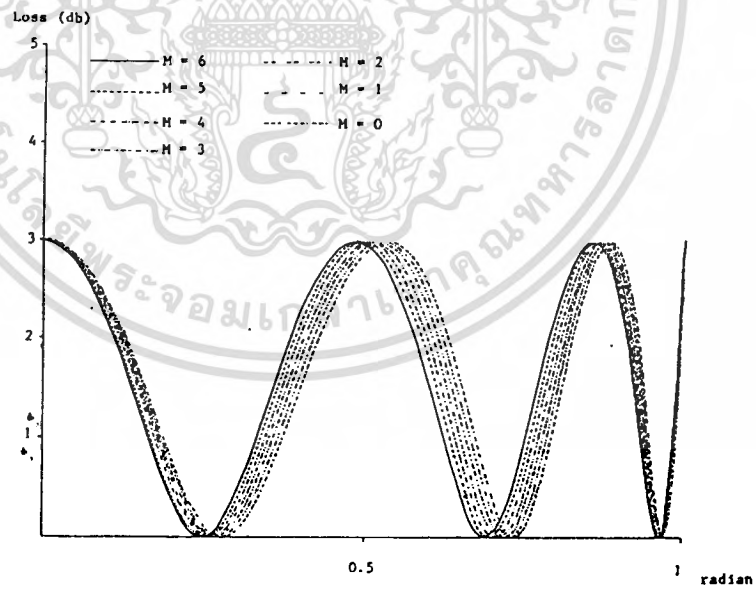
If we now specify p pairs of zeros at $Z = \exp(\pm j\omega_i)$, where $\pi \geq \omega_i > \omega_{PD}$, and the rest $(n - 2p)$ to be at $Z = -1$, a sharp cut-off filter can be obtained. Using (3), the polynomial in (4) becomes

$$E(W^2) + WF(W^2) = \{W + [1 - (\tan^2 \frac{1}{2}\omega_i / \tan^2 \frac{1}{2}\omega_{PD})]^{1/2}\}^{2p} (W + 1)^{n-2p} \quad (9)$$

where $2p \leq n$. The transfer function of the digital filter can subsequently be obtained using (5), (6) and (7) respectively.

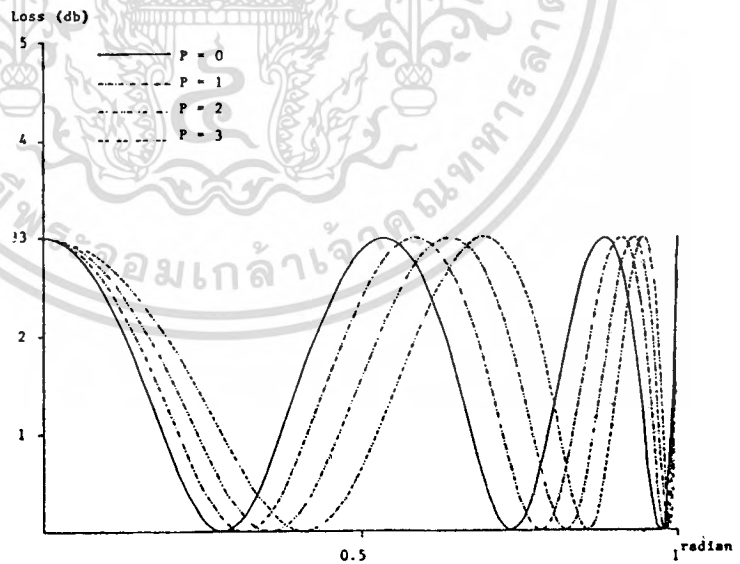
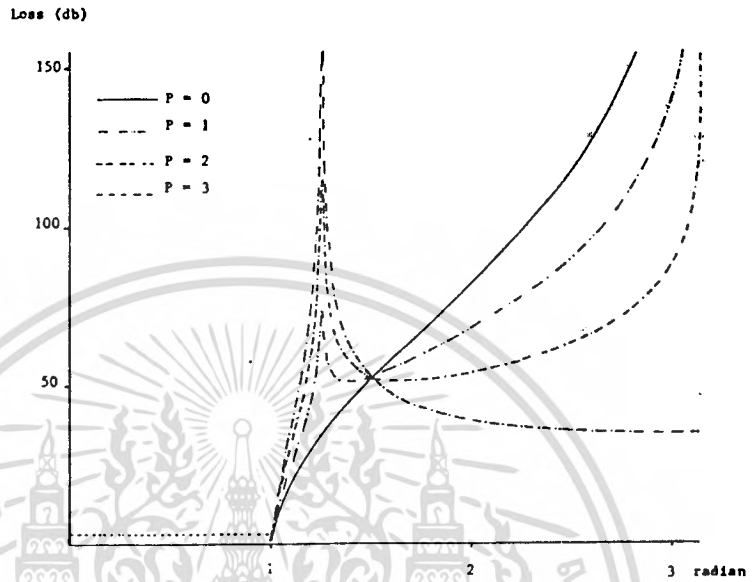


(a)



(b)

Figure 1 (a). Loss responses in the stopband. (b) Loss responses in the passband.



(b)

Figure 2 (a). Loss responses in the stopband. (b) Loss responses in the passband.

A 6th order lowpass filter with $\omega_p = 3$ db, $\omega_{pd} = 1$ rad/s with $p = 1$ and $n - 2p = 4$ is given by

$$H(Z) = \frac{1.741084 \times 10^{-3}(Z+1)^4(Z^2 - 0.630645Z + 1)}{(Z^2 - 1.602331Z + 0.713555)(Z^2 - 1.280609Z + 0.83403)} \quad (10)$$

$$\times (Z^2 - 1.077652Z + 0.953002)$$

It is illustrated in Fig. 2 (a) in comparison with the case of all zeros at $Z = -1$.

3. Conclusions

It has been described how to design a Chebyshev IIR digital filter using an existing transform technique. Two cases of interest have been demonstrated i.e. (i) a monotone stopband Chebyshev IIR filter with prescribed number of zeros at $Z = -1$ and (ii) a sharp cut-off Chebyshev IIR filter with prescribed number of pole pairs at $Z = \exp(+j\omega)$ in the stopband. Finally it should be noticed that, in fact, the technique allows the zeros to be anywhere outside the passband without disturbing the equi-ripple passband characteristics.

REFERENCES

- GOLD, B., and RADER, C. M., 1969, *Digital Processing of Signals* (New York : McGraw-Hill), pp. 70-78.
- RADER, C. M., and GOLD, B., 1967, *Proc. Inst. elect. electron. Engrs.*, **55**, 149-171 ; 1972, Reprinted in *Digital Signal Processing*, L. R. Rabiner, and C. M. Rader, Eds. (New York : I.E.E.E. Press).
- TEMES, G. C., and MITRA, S. K., 1973, *Modern Theory and Design* (New York : Wiley), pp. 48-53.