

การออกแบบวงจรดิจิทัลผ่านความถี่ต่ำ

แบบรีเคอร์ซีฟ

ที่ให้ผลตอบสนองขนาดและกรุปดีเลย์ตามความต้องการ

The Lowpass Recursive Digital Filter Design

Approximating to Both Magnitude and Group Delay Responses



วัน เดือน ปี.....
เลขทะเบียน..... ๐๑๐๖๑๔
เลขเรียกหนังสือ..... ๐พ. ๓ ๖๘๑๗ ๒๐๒๐

วิทยานิพนธ์สำหรับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า วิทยาเขตเจ้าคุณทหาร-ลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2522

สารบัญ

หน้า

กิตติกรรมประกาศ

iii

บทคัดย่อ

iv

Abstract

v

บทที่ 1

1

1.1 ปัญหาและที่มาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

1

1.2 ความคิดริเริ่ม

1

บทที่ 2

2

2.1 ภูมิหลัง

2

2.2 ความหมายของวงจรรองความถี่ดิจิทัล

2

2.3 การทำงานของวงจรรองความถี่ดิจิทัล

3

2.4 ข้อดีของวงจรรองความถี่ดิจิทัล

3

2.5 การออกแบบ

3

2.6 โครงสร้างของวงจรรองความถี่ดิจิทัล

3

2.6.1 วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ

4

2.6.2 วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟ

5

2.7 ข้อเปรียบเทียบของวงจรรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟกับนอนรีเคอร์ซีฟ

5

2.8 คณิตศาสตร์ที่ใช้

6

2.8.1 การกระจายอนุกรมกำลัง

6

2.8.2 โพลีโนเมียลเงา

6

2.8.3 แวนเตอร์มอดิตีเทอรัมเนนท

7

บทที่ 3 การออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีผลตอบสนองวงรีพีดี เลย์ราบ เรียบที่สุด

และสามารถควบคุมผลตอบสนองขนาด

12

3.1 บทนำ

12

3.2 ทฤษฎีในการออกแบบ

12

3.3 ตัวอย่างการออกแบบ

21

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4	สรุป	21
บทที่ 4	การออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเฟรชที่ให้ผลตอบสนองทั้งขนาดและกรูฟตีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมๆกัน สำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่าน	25
4.1	บทนำ	25
4.2	ทฤษฎีในการออกแบบ	25
4.3	ตัวอย่างในการออกแบบ	31
4.4	สรุป	31
บทที่ 5	การออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเฟรชที่มีผลตอบสนองกรูฟตีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมกับปรับปรุงผลตอบสนองขนาด สำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่าน	38
5.1	บทนำ	38
5.2	ทฤษฎีในการออกแบบ	38
5.3	ตัวอย่างในการออกแบบ	45
5.4	สรุป	46
บทที่ 6	สรุป	51
	บทความและหนังสืออ้างอิง	53
ภาคผนวกที่ 1	โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 4	55
ภาคผนวกที่ 2	โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 5	57
	กรณีที่ใช้สูตรสำเร็จ	57
	กรณีที่คำนวณค่าสัมประสิทธิ์จากสมการ	59
	ผลงานวิจัยที่พิมพ์ในวารสารนานาชาติ	61

กิติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของอาจารย์ที่ปรึกษาที่ได้ช่วยให้คำแนะนำและสนับสนุนผู้เขียนมาโดยตลอด จึงใคร่ขอขอบพระคุณท่าน ผศ. ดร. ไพรัช ธีชัยพงษ์ เป็นอย่างสูง และขอขอบคุณเพื่อนๆ ที่ร่วมศึกษาและทำการวิจัยในแขนงวิชาวางจรรยาบรรณที่ดีจิตตอลทุกท่าน โดยเฉพาะคุณพูนศักดิ์ ชิวสุวิทย์ และคุณไพศาล ล้อมทอง ที่ได้ร่วมงานวิจัยบางส่วนของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ด้วยดีตลอดมา

ภัทรินทร์ กาญจนาวดี



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทคัดย่อ

การออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิทัล (Digital filter) ที่ผ่านมา ส่วนมากมักจะออกแบบให้ผลตอบสนองของเฟสเป็นเชิงเส้นหรือผลตอบสนองกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด (Linear phase or maximally flat group delay) แต่เพียงอย่างเดียว อย่างเช่น ผลงานวิจัยของธีราน (Thiran) กับเฟทท์ไวส์ (Fettwise) [7,9] วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้เสนอแนวความคิดในการออกแบบที่ได้เปรียบแนวความคิดเดิม กล่าวคือ แนวความคิดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ นอกเหนือไปจากการออกแบบให้กรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดแล้ว ยังสามารถที่จะควบคุมความกว้างของผลตอบสนองขนาด (Magnitude response) หรือออกแบบให้ผลตอบสนองขนาดราบเรียบที่สุดด้วย



Abstract

The previous design techniques for the lowpass recursive digital filter [7,8,9] approximate the ideal group delay response only. The magnitude response is therefore uncontrollable. This thesis presents the design techniques which take both magnitude and group delay into consideration at the same time. These include (i) the design of maximally flat group delay recursive digital filter with adjustable magnitude response, (ii) the simultaneous maximally flat magnitude and group delay responses.



๑.๑ ปัญหาและที่มาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ผลงานวิจัยที่ผ่านมาอย่างเช่นของอิรานหรือเพททไวส์ [7,9] เป็นต้น นิยมที่จะออกแบบให้ วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ (Recursive digital filter) ชนิดผ่านความถี่ต่ำให้เฟสของ ระบบเป็นเชิงเส้นหรือผลตอบสนองกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดแต่เพียงอย่างเดียว โดยไม่คำนึงถึงคุณสมบัติของ ผลตอบสนองขนาดเลย เป็นสิ่งที่ไม่ถูกต้องนักที่จะมองข้ามความสำคัญของผลตอบสนองขนาด เพราะงานบาง อย่างมีความต้องการที่จะให้ผลตอบสนองขนาดราบเรียบที่สุดด้วย เมื่อเป็นเช่นนี้ทฤษฎีในการออกแบบของ บทความที่ [7] และ [9] ก็ไม่มีความหมาย หรืองานบางอย่างก็ต้องการที่จะควบคุมความกว้างของผลตอบสนองขนาด (Bandwidth) ซึ่งก็เป็นอีกสาเหตุหนึ่งที่ผลงานวิจัยที่ผ่านมาเข้ามาใช้งานในกรณีดังกล่าวไม่ได้

ปัญหาของการละทิ้งความสำคัญของผลตอบสนองขนาดนี้เอง เป็นสิ่งจูงใจให้ทำวิจัยซึ่งผลงาน ปรากฏในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยเสนอแนวความคิดในการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีผลตอบสนองกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมทั้งสามารถปรับความกว้างของผลตอบสนองขนาด หรือแนว ความคิดที่ให้ผลตอบสนองทั้งสองราบเรียบที่สุดพร้อมๆกัน

๑.๒ ความคิดริเริ่ม

ความคิดริเริ่มใหม่ที่ช่วยขจัดปัญหาที่กล่าวไว้ข้างต้นคือ

๑.๒.๑ การออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีผลตอบสนองกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดและ สามารถควบคุมความกว้างผลตอบสนองขนาด (A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filter with Controllable Magnitude)

๑.๒.๒ การออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟที่ให้ผลตอบสนองขนาดและกรุปดีเลย์ราบเรียบ ที่สุดพร้อมๆกันสำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่าน (An Alternative Simultaneous Maximally Flat Approximation for a Low-pass Recursive Digital Filter)

๑.๒.๓ การออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีผลตอบสนองกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด พร้อมทั้งปรับปรุงผลตอบสนองขนาดสำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่าน (A Maximally Flat Group Delay Low-pass Recursive Digital Filter with Improved Passband Magnitude Response)

บทที่ ๒

๒.๑ ภูมิหลัง

วงจรรองความถี่ดิจิทัลได้รับการพัฒนาขึ้นจากแนวความคิดในการพยายามที่จะนำเอาวิธีการสร้างวงจรไฟฟ้าแบบหน่วยตัวเลข (Digital) มาใช้ให้เป็นประโยชน์ หลังสงครามโลกครั้งที่สอง เป็นต้นมา วงจรรองความถี่ดิจิทัลยังไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร เนื่องจากราคา ขนาดและความถูกต้องของกลวิธีต่างๆที่นำมาใช้ จนกระทั่งทฤษฎีการแซมปลิง (Sampling theorem) ปรากฏและถูกศึกษาค้นคว้าจนเป็นที่เข้าใจและยอมรับกัน ประกอบกับทฤษฎี Z-ทรานส์ฟอร์ม (Z-transform) ก็ได้รับการคิดค้นขึ้นมาใช้แก้สมการความแตกต่างเชิงเส้น (Linear difference equation) นี้เองเป็นจุดเริ่มต้นแห่งความก้าวหน้าในการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัล อีกทั้งการพัฒนาทางด้านวงจรรวม (Integrated circuit) ได้รับความสนใจมากขึ้นจนถูกคาดหวังอย่างมีเหตุผลว่าจะนำมาพัฒนาเพื่อใช้กับงานด้านสัญญาณดิจิทัล (Digital signal processing) ในที่สุดเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๖๓ ไกเซอร์ (Kaiser) ได้แสดงผลงานการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลให้สามารถนำไปใช้งานได้จริงๆ ซึ่งเป็นสิ่งช่วยสนับสนุนแนวความคิดนี้ได้เป็นอย่างดี ต่อมาไม่นานในปี ค.ศ. ๑๙๖๕ คูเลย์ (Cooley) และตุคีย์ (Tukey) ได้ทำการพัฒนาขอบเขตการคำนวณสัญญาณดิจิทัลที่รู้จักกันทั่วไปว่า ฟาสฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม (Fast Fourier Transform) [1] ซึ่งช่วยลดเวลาในการคำนวณฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของสัญญาณดิจิทัลให้น้อยลงกว่าเดิมได้มาก ส่งผลให้การพัฒนางวงจรรองความถี่ดิจิทัลเป็นที่สนใจขึ้นมากอย่างรวดเร็ว

๒.๒ ความหมายของวงจรรองความถี่ดิจิทัล

วงจรรองความถี่ดิจิทัลคือวงจรรองความถี่ที่ทำงานกับสัญญาณที่มีรูปแบบขาดช่วง ไม่ต่อเนื่อง (Discrete signal) โดยปกติทั่วไปสัญญาณจะอยู่ในรูปต่อเนื่อง (Continuous signal) การทำงานกับสัญญาณต่อเนื่องนี้จะใช้วงจรรองความถี่ชนิดพาสซีฟ (Passive filter) อันประกอบด้วยตัวความต้านทาน ตัวเก็บประจุและขดลวดเป็นพื้นฐาน หรือวงจรรองความถี่ชนิดแอ็คทีฟ (Active filter) ซึ่งใช้พวกทรานส์ซิสเตอร์ (Transistor) หรือออปแอมป์ (Operation amplifier) แต่เนื่องจากสัญญาณดิจิทัลประกอบด้วยหน่วยเลขฐานสอง (Binary bit) ดังนั้นอุปกรณ์ที่ใช้ในวงจรรองความถี่ดิจิทัลจึงประกอบด้วยหน่วยความจำ ตัวคูณเลข ตัวหารเลข ตัวบวกเลขและตัวลบเลข ทำให้มี

ข้อได้เปรียบกว่าวงจรรองความถี่ของสัญญาณต่อเนื่องตรงที่สามารถเก็บสัญญาณที่จะกรองได้นานกว่า และสามารถที่จะสร้างวงจรรองความถี่ที่มีความถูกต้องแม่นยำเท่าใดก็ได้ ด้วยการเพิ่มหน่วยเลขฐานสอง

๒.๓ การทำงานของวงจรรองความถี่ดิจิทัล

วงจรรองความถี่ดิจิทัลทำงานโดยการแปลงสัญญาณที่ต่อเนื่องให้เป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องโดยวิธีการแซมปลิงกับสัญญาณต่อเนื่องด้วยความถี่ที่สูงกว่าหรืออย่างน้อยเท่ากับสองเท่าของความถี่สูงสุดของสัญญาณต่อเนื่องจึงจะทำให้ผลตอบสนองของวงจรรองที่ดิจิทัลยังคงถูกต้องในทุกๆความถี่ของสัญญาณนั้น กระบวนการคำนวณของวงจรรองความถี่ดิจิทัลจะเปลี่ยนกลุ่มของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่อง (Digital signal sequence) ให้เป็นกลุ่มของสัญญาณที่ต่อเนื่องอีกกลุ่มหนึ่งตามคุณสมบัติของวงจร

๒.๔ ข้อดีของวงจรรองความถี่ดิจิทัล

วงจรรองความถี่ดิจิทัลทำงานได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ ค่าสัมประสิทธิ์ของทรานส์ฟอร์ฟังก์ชันของวงจรสามารถออกแบบให้มีทศนิยมกี่ตำแหน่งก็ได้ จึงทำให้วงจรรองความถี่ดิจิทัลมีความคล่องตัวสูงในการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวงจรตามความต้องการ ซึ่งวงจรรองความถี่ของสัญญาณต่อเนื่องทำไม่ได้

๒.๕ การออกแบบ

จุดประสงค์ในการออกแบบของวงจรรองความถี่ดิจิทัลโดยทั่วไปแล้ว ต้องการให้ผลตอบสนองเป็นไปตามความต้องการทางแแกนความถี่ ผลตอบสนองที่ว่าคือ

๒.๕.๑ ผลตอบสนองขนาด (Magnitude)

๒.๕.๒ ผลตอบสนองเฟส (Phase) หรือกรุปดีเลย์ (Group delay)

ในการออกแบบเพื่อให้ได้ผลตอบสนองตามประสงค์นั้นสามารถใช้วิธีการออกแบบได้สองวิธีคือ

- ๑ การหาคำเฉลยสำเร็จ (Analytical solution)
- ๒ การใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ (Computer aided)

๒.๖ โครงสร้างของวงจรรองความถี่ดิจิทัล

โครงสร้างของวงจรรองความถี่ดิจิทัลสามารถแบ่งออกได้เป็นสองแบบคือ

๒.๖.๑ วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ (Recursive digital filter)

สมการที่จะแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของสัญญาณเข้าซึ่งแทนด้วย $x(nT)$ กับสัญญาณออกที่แทนด้วย $y(nT)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$y(nT) = \sum_{i=0}^m a_i x(nT-iT) - \sum_{i=1}^n b_i y(nT-iT) \quad (2-1)$$

เมื่อ T คือช่วงเวลาในการแซมปลิง

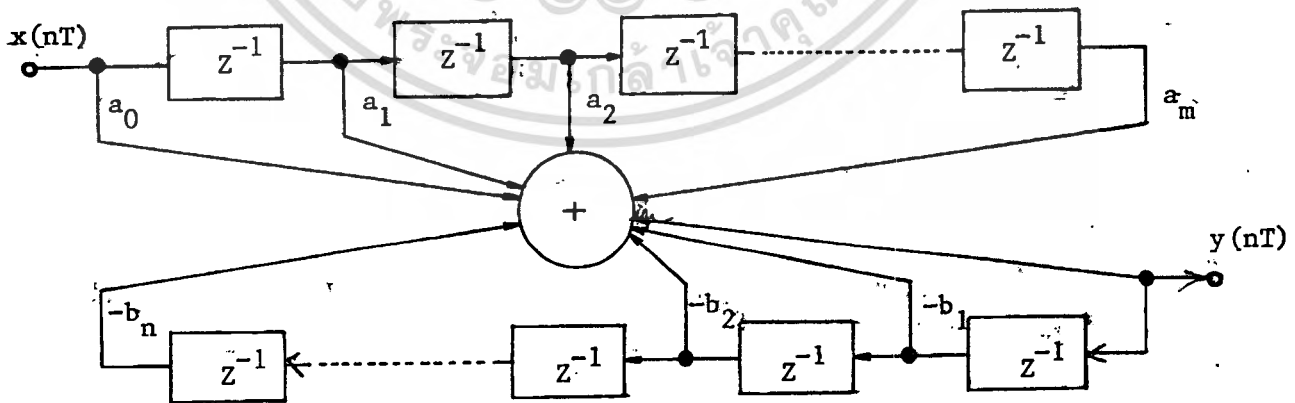
สมการ (2-1) แปลงให้อยู่ในแกนความถี่ได้โดยใช้ Z -ทรานส์ฟอร์ม นั่นคือ

$$Y(Z) = X(Z) \sum_{i=0}^m a_i Z^{-i} - Y(Z) \sum_{i=1}^n b_i Z^{-i} \quad (2-2)$$

ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟคือ

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i Z^{-i}} \quad (2-3)$$

จากสมการ (2-2) หรือ (2-3) สามารถเขียนรูปแผนภูมิได้ดังรูปข้างล่าง



รูปที่ ๒.๑ แผนภูมิของวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ

๒.๖.๒ วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟ (Non-recursive digital filter)

สามารถแสดงสมการความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้า $x(nT)$ กับสัญญาณออก $y(nT)$

ได้เป็น

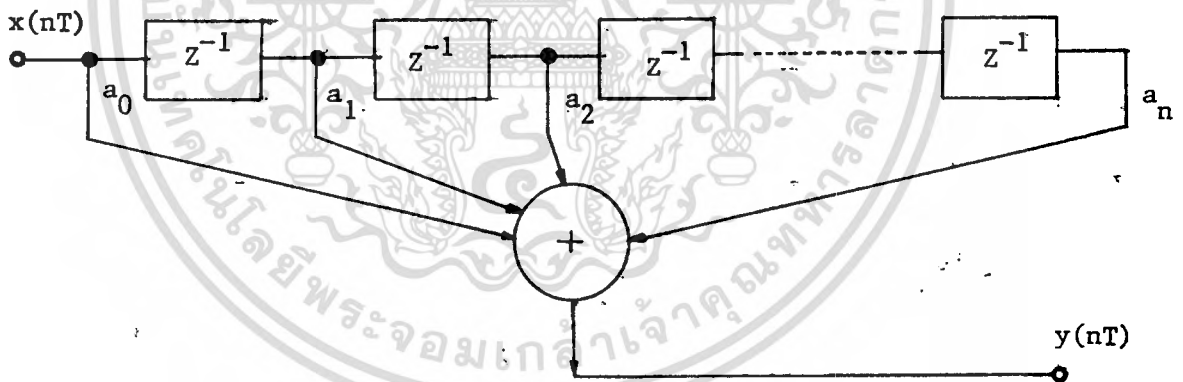
$$y(nT) = \sum_{i=0}^n a_i x(nT-iT) \tag{2-4}$$

แปลงให้อยู่ในแกนความถี่โดยใช้ Z-ทรานส์ฟอร์ม

$$Y(Z) = X(Z) \sum_{i=0}^n a_i Z^{-i} \tag{2-5}$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \sum_{i=0}^n a_i Z^{-i} \tag{2-6}$$

จากสมการ (2-5) หรือสมการ (2-6) สามารถเขียนเป็นรูปแผนภูมิได้ดังรูปข้างล่าง



รูปที่ ๒.๒ แผนภูมิของวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟ

๒.๗ ข้อเปรียบเทียบของวงจรกรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟกับแบบนอนรีเคอร์ซีฟ

การออกแบบของวงจรกรองความถี่แบบนอนรีเคอร์ซีฟนั้นจะรับประกันได้ว่าระบบจะเสถียรเสมอ ทั้งนี้เพราะขรานส์ฟอร์มฟังก์ชันของระบบมีแค่ซีโร (Zero) เพียงอย่างเดียว ส่วนวงจรกรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟ เสถียรภาพของระบบขึ้นอยู่กับตำแหน่งโพล (Pole) ถ้าหากตำแหน่งโพลอยู่ภายใน

ในวงกลมรัศมีเท่ากับหนึ่งในระบบ Z ระบบนั้นก็จะเสถียร แต่วงจรของความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟให้อัตราความคม (Cut-off rate) สูงกว่าแบบนอนรีเคอร์ซีฟ ที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องมาจากโพลของแบบรีเคอร์ซีฟ

๒.๘ คณิตศาสตร์ที่ใช้

๒.๘.๑ การกระจายอนุกรมกำลัง

$$\sin(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k}}{(2k)!}$$

๒.๘.๒ โพลีโนเมียลเงา (Mirror image polynomial)

ถ้ามีพหุนามสำหรับฟังก์ชันเป็น

$$H(Z) = a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_m Z^{-m}$$

$H(Z)$ จะเป็นโพลีโนเมียลเงาเมื่อ $a_{\frac{m}{2}-1} = a_{\frac{m}{2}+1}$

$$\therefore H(Z) = a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_2 Z^{-(m-2)} + a_1 Z^{-(m-1)} + a_0 Z^{-m}$$

$$H(Z) = Z^{-\frac{m}{2}} \left[a_0 Z^{\frac{m}{2}} + a_1 Z^{\frac{m}{2}-1} + a_2 Z^{\frac{m}{2}-2} + \dots + a_2 Z^{-\frac{m}{2}+2} + a_1 Z^{-\frac{m}{2}+1} + a_0 Z^{-\frac{m}{2}} \right]$$

$$+ a_1 Z^{-\left(\frac{m}{2}-1\right)} + a_0 Z^{-\frac{m}{2}} \quad]$$

$$H(Z) = Z^{-\frac{m}{2}} \left[a_0 (Z^{\frac{m}{2}} + Z^{-\frac{m}{2}}) + a_1 (Z^{\frac{m}{2}-1} + Z^{-\left(\frac{m}{2}-1\right)}) \right]$$

$$+ a_2 (Z^{\frac{m}{2}-2} + Z^{-\left(\frac{m}{2}-2\right)}) + \dots \quad]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

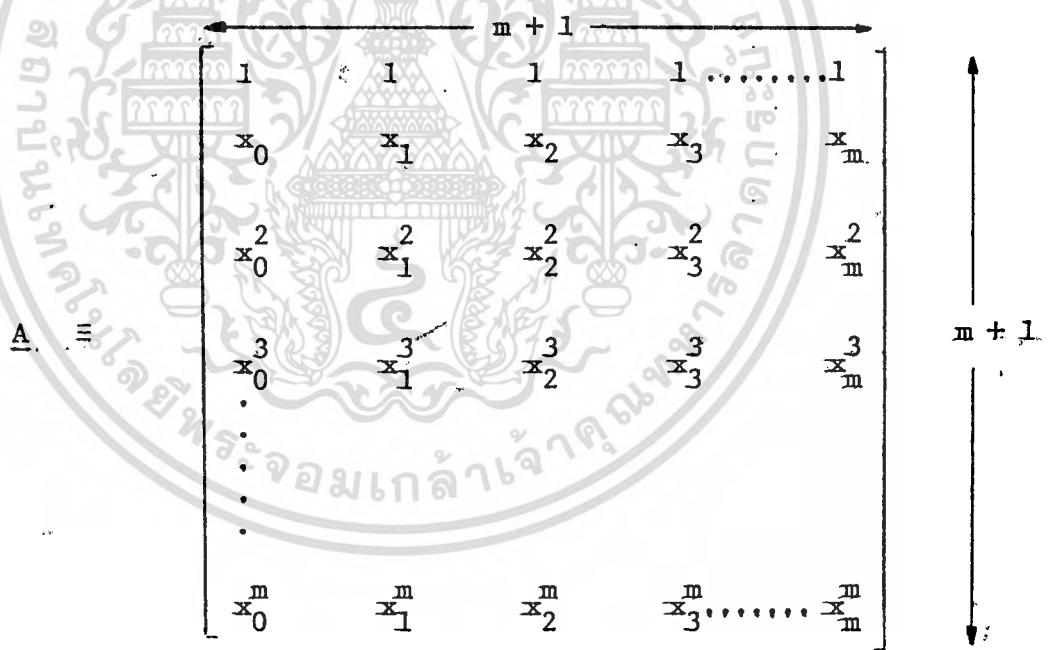
$$H(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega T}} = Z^{-\frac{m}{2}} \left[2a_0 \cos\left(\frac{m\omega T}{2}\right) + 2a_1 \cos\left(\frac{m-1}{2}\omega T\right) + 2a_2 \cos\left(\frac{m-2}{2}\omega T\right) + \dots \right]$$

ให้ $d_0 = a_{\frac{m}{2}}$, $d_i = 2a_{\frac{m}{2}-i} = 2a_{\frac{m}{2}+i}$ เมื่อ m เป็นอันดับคู่

$$\therefore H(Z) = Z^{-\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega T)$$

๒.๘.๓. แวนเดอร์มอนด์ดีเทอร์มิแนนท์ (Vandermonde determinant) [16].

ถ้าเมทริกซ์ (Matrix) ใดมีคุณสมบัติเป็นแวนเดอร์มอนด์เมทริกซ์ดังรูปแบบข้างล่าง



ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ A นี้สามารถหาอยู่ในรูปสูตรสำเร็จได้

ตัวอย่างในการหาสูตรสำเร็จ กำหนดให้ $m=4$

$$|A| \equiv \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline & x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ & x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ & x_0^4 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{array}$$

เอาคอลัมน์ (Column) ที่ ๑ ไปลบออกจากคอลัมน์อื่นๆ จะได้

$$|A| \equiv \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 & x_4 - x_0 \\ \hline & x_0^2 & x_1^2 - x_0^2 & x_2^2 - x_0^2 & x_3^2 - x_0^2 & x_4^2 - x_0^2 \\ & x_0^3 & x_1^3 - x_0^3 & x_2^3 - x_0^3 & x_3^3 - x_0^3 & x_4^3 - x_0^3 \\ & x_0^4 & x_1^4 - x_0^4 & x_2^4 - x_0^4 & x_3^4 - x_0^4 & x_4^4 - x_0^4 \end{array}$$

เอา x_0 คูณโรว์ (Row) ที่ ๔ แล้วนำไปลบออกจากโรว์ที่ ๔

$$|A| \equiv \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 & x_4 - x_0 \\ \hline & x_0^2 & x_1^2 - x_0^2 & x_2^2 - x_0^2 & x_3^2 - x_0^2 & x_4^2 - x_0^2 \\ & x_0^3 & x_1^3 - x_0^3 & x_2^3 - x_0^3 & x_3^3 - x_0^3 & x_4^3 - x_0^3 \\ & 0 & x_1^3(x_1 - x_0) & x_2^3(x_2 - x_0) & x_3^3(x_3 - x_0) & x_4^3(x_4 - x_0) \end{array}$$

เอา x_0 คูณโรว์ที่ ๓ แล้วลบออกจากโรว์ที่ ๔

$$|A| \equiv \begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 & x_4 - x_0 \\ x_0^2 & x_1^2 - x_0^2 & x_2^2 - x_0^2 & x_3^2 - x_0^2 & x_4^2 - x_0^2 \\ 0 & x_1^2(x_1 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) & x_3^2(x_3 - x_0) & x_4^2(x_4 - x_0) \\ 0 & x_1^3(x_1 - x_0) & x_2^3(x_2 - x_0) & x_3^3(x_3 - x_0) & x_4^3(x_4 - x_0) \end{array}$$

ลดตำแหน่งของโรว์ที่นำ x_0 ไปคูณลงทีละโรว์ ขณะเดียวกันตำแหน่งของโรว์ที่จะถูกลบก็ลดลงทีละโรว์เช่นกัน ทำอย่างขั้นตอนข้างบนเรื่อยๆ ในที่สุดจะได้

$$|A| \equiv \begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 & x_4 - x_0 \\ 0 & x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) & x_3(x_3 - x_0) & x_4(x_4 - x_0) \\ 0 & x_1^2(x_1 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) & x_3^2(x_3 - x_0) & x_4^2(x_4 - x_0) \\ 0 & x_1^3(x_1 - x_0) & x_2^3(x_2 - x_0) & x_3^3(x_3 - x_0) & x_4^3(x_4 - x_0) \end{array}$$

ตัดโรว์ที่ ๑ คอลัมน์ที่ ๑ ทั้ง จะได้

$$|A| \equiv \begin{array}{c|cccc|} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 & x_4 - x_0 & \\ x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) & x_3(x_3 - x_0) & x_4(x_4 - x_0) & \\ x_1^2(x_1 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) & x_3^2(x_3 - x_0) & x_4^2(x_4 - x_0) & \\ x_1^3(x_1 - x_0) & x_2^3(x_2 - x_0) & x_3^3(x_3 - x_0) & x_4^3(x_4 - x_0) & \end{array}$$

ดึงเอาตัวร่วมแต่ละคอลัมน์ออกมา จะได้

010398

$$|A| \equiv \begin{vmatrix} (x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_3-x_0)(x_4-x_0) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{ถ้าให้ } |A1| \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

จะเห็นว่าลักษณะดีเทอร์มิแนนท์ของ $A1$ คล้ายกับของ A ดังนั้นการลดขนาดของดีเทอร์มิแนนท์ $A1$ ก็ทำได้ทำนองเดียวกับของ A ซึ่งในที่สุดจะได้

$$|A1| \equiv \begin{vmatrix} (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1) & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{ถ้าให้ } |A2| \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

สามารถที่จะลดดีเทอร์มิแนนท์ $A2$ ลงได้อีกเป็น

$$|A2| \equiv \begin{vmatrix} (x_3-x_2)(x_4-x_2) & 1 & 1 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$|A_2| \equiv (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

$$\therefore |A| \equiv (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)(x_4 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \\ (x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

$$\text{หรือ } |A| \equiv \prod_{4 \geq j > i \geq 0} (x_j - x_i)$$

ดังนั้น สำหรับดีเทอร์มิแนนต์ของแวนเดอร์มอนต์เมทริกซ์ใดๆ หาสูตรสำเร็จได้เป็น

$$|A| \equiv \prod_{m \geq j > i \geq 0} (x_j - x_i)$$



บทที่ ๓

การออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จัตตอลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีผลตอบสนองกรูฟตีเลย์ราบเรียบที่สุด และสามารถควบคุมผลตอบสนองขนาด (A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filter with Controllable Magnitude)

๓.๑ บทนำ

การออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จัตตอลที่ผ่านมาของ [7, 9] นั้นได้ออกแบบให้ผลตอบสนองกรูฟตีเลย์ราบเรียบที่สุดแต่เพียงอย่างเดียว ส่วนผลตอบสนองขนาดไม่ได้คำนึงถึงในระหว่างการออกแบบเลย ประกอบกับได้เคยมีการออกแบบวงจรกรองความถี่อื่นนอกที่สามารถปรับความกว้างของผลตอบสนองขนาด [14, 15] จึงเป็นจุดสนใจทำให้เกิดแนวความคิดที่จะทำการออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จัตตอลแบบรีเคอร์ซีฟ ซึ่งให้กรูฟตีเลย์ราบเรียบที่สุด และสามารถควบคุมความกว้างของผลตอบสนองขนาด

๓.๒ ทฤษฎีในการออกแบบ

ในการออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จัตตอลแบบรีเคอร์ซีฟสำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่านแบนซ์ขึ้นตอนในการออกแบบได้เป็นคั้งขึ้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ ๑

ทำการประมาณทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันใดๆให้มีเฟสเป็นเชิงเส้นดังสมการ (3-1)

$$\beta_p(\omega) = -p\omega\tau \quad (3-1)$$

เมื่อกำหนดให้

τ : เป็นค่ากรูฟตีเลย์ มีหน่วยเป็นวินาที

p : เป็นตัวคูณกำหนดขนาดของค่ากรูฟตีเลย์ โดยที่ $0 \leq p \leq 1$.

ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่ต้องการให้มีเฟสตามสมการ (3-1) คือ

$$H_p(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \quad (3-2)$$

นั่นคือให้

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i Z^{-i}} = e^{-jp(\omega\tau)} \quad (3-3)$$

จึงต้องคำนวณหาค่า a_i ใดๆที่ให้เฟสของสมการ(3-2) เป็นเชิงเส้น

ขั้นตอนที่ ๒

กำหนดทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันอีกชุดเป็น

$$H_{p-1}(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^m b_i Z^{-i}} \quad (3-4)$$

และต้องการให้เฟสของสมการ(3-4) เป็นเชิงเส้นตามสมการ(3-5)

$$\beta_{p-1}(\omega) = -(p-1)\omega\tau \quad (3-5)$$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^m b_i Z^{-i}} = e^{-j(p-1)\omega\tau} \quad (3-6)$$

ขั้นตอนที่ ๓

ถ้าหากรวมสมการ(3-3)กับ(3-6) เข้าเป็นทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่

คือ $H(Z)$ ก็จะได้เฟสเป็นเชิงเส้นดังสมการ(3-7)คือ

$$\beta(\omega) = -\omega\tau \quad (3-7)$$

$$\therefore H(Z) = \frac{H_p(Z)}{H_{p-1}(Z)} = e^{-j\omega\tau}$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{\sum_{i=0}^m b_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}} = e^{-j\omega\tau} \quad (3-8)$$

ดังนั้นจึงต้องคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i และ b_i ออกมาเพื่อที่จะทำให้ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของ วงจรกรองความถี่จัตตอลแบบรีเคอร์ซีฟเฟสเป็นเชิงเส้น วิธีการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i กับ b_i จะแยก ออกจากกัน แต่ลักษณะวิธีหาเหมือนกัน

การหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i ใดๆ

จากสมการ (3-3) ให้ค่าความคลาดเคลื่อนของเฟสระหว่างเทอมที่อยู่ทางซ้ายและขวามือ เป็น $\delta_1(\omega)$

$$\delta_1(\omega) = -p\omega T - \tan^{-1} \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega T)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega T)}$$

เมื่อ T คือช่วงเวลาในการแซมปลิงที่ถูกนอร์มอลไลซ์ (Normalize) ให้เป็น ๑ วินาที หรืออาจเขียนความคลาดเคลื่อนเป็น $\epsilon_1(\omega)$ ว่า

$$\begin{aligned} \epsilon_1(\omega) &= -\tan(p\omega T) - \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)} \\ &= -\frac{\sin(p\omega T)}{\cos(p\omega T)} - \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)} \\ &= -\frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(p\omega T) \cos(i\omega) + \sum_{i=0}^n a_i \cos(p\omega T) \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(p\omega T) \cos(i\omega)} \\ &= -\frac{\sum_{i=0}^n a_i \{ \sin(p\omega T) \cos(i\omega) + \cos(p\omega T) \sin(i\omega) \}}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(p\omega T) \cos(i\omega)} \end{aligned}$$

จากความรู้ตรีโกณมิติที่ว่า $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$

$$\therefore \varepsilon_1(\omega) = - \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(p\omega\tau + i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(p\omega\tau) \cos(i\omega)} \quad (3-9)$$

$$\varepsilon_1(\omega) = - \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin\{(i + p\tau)\omega\}}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(p\omega\tau) \cos(i\omega)} \quad (3-10)$$

แต่ในการประมาณทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน $H_p(Z)$ กับสมการเชิงเส้นของเฟส $\beta_p(\omega)$ นั้น ค่าความคลาดเคลื่อนควรจะน้อยที่สุด ดังนั้นจึงกำหนดให้ $\varepsilon_1(\omega)$ มีค่าเป็นศูนย์

$$\sum_{i=0}^n a_i \sin\{(i + p\tau)\omega\} = 0 \quad (3-11)$$

จากเงื่อนไขของการประมาณที่ต้องการให้กรูฟต์เลย์เกิดความราบเรียบที่สุดที่บริเวณความถี่ $\omega=0$ เราเขียนต่อวินาที ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการ (3-11) เพื่อให้ง่าย ควรกระจายอนุกรมกำลังของ ω รอบจุดความถี่ศูนย์

$$\therefore \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-1)^k \{(i + p\tau)\omega\}^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0 \quad (3-12)$$

การหาอนุพันธ์ของสมการ (3-12) เพื่อให้เกิดความราบเรียบที่สุด จะได้ว่าสัมประสิทธิ์ทุกอันดับของ ω ต้องเป็นศูนย์

$$\sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-1)^k (i + p\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0 \quad (3-13)$$

หรือจะได้

$$\sum_{i=0}^n a_i (i + p\tau)^{2k+1} = 0 \quad (3-14)$$

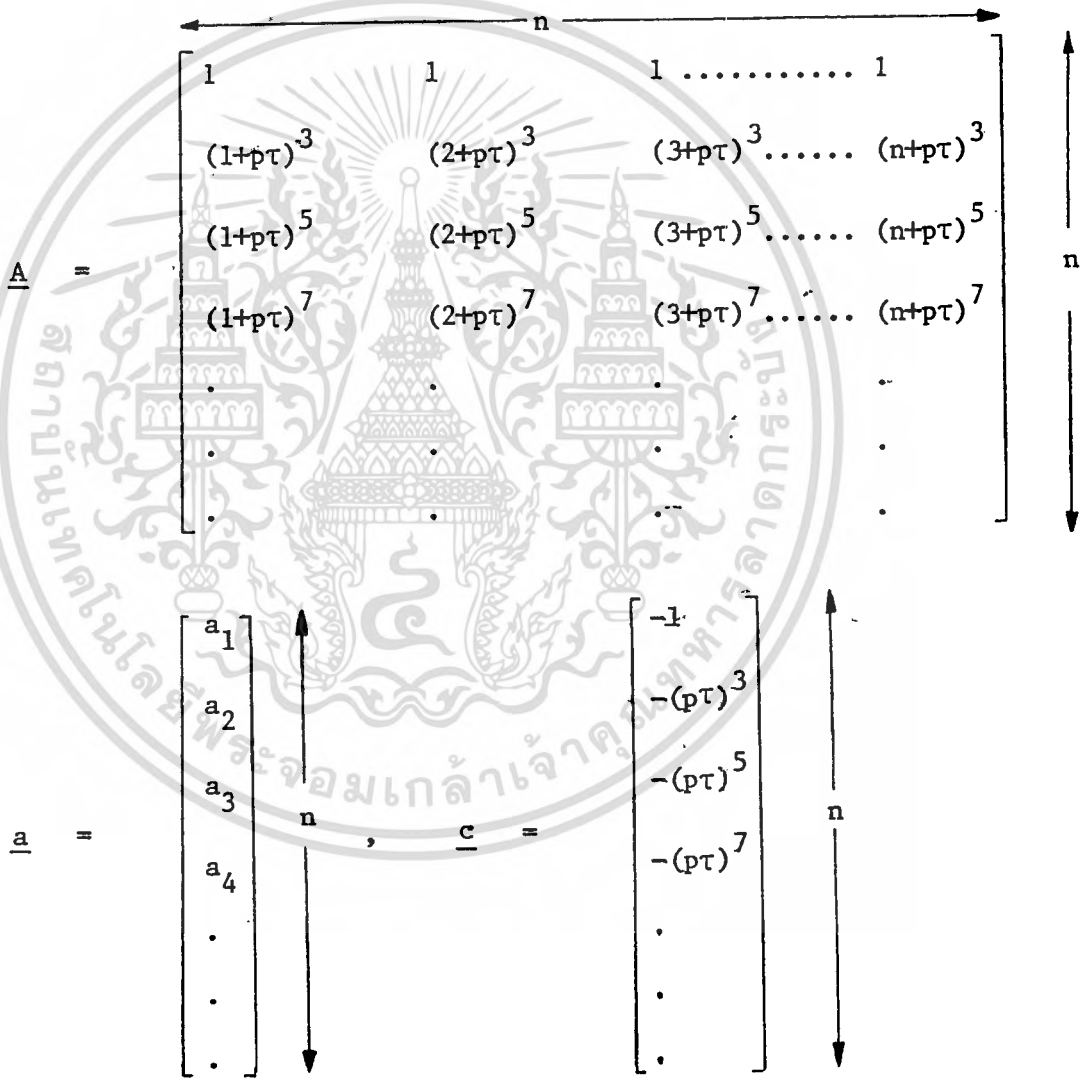
ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i นี้ กำหนดให้ $a_0=1$ สมการ(3-14) เขียนใหม่เป็น

$$\sum_{i=1}^n a_i (i + p\tau)^{2k+1} = - (p\tau)^{2k+1} \tag{3-15}$$

จะแปรค่าจาก 0 ถึง $\frac{n-1}{2}$ ทำให้สมการ(3-15) เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้

$$\underline{A} \underline{a} = \underline{c}$$

โดยที่



จากเมทริกซ์ดังกล่าวสามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i ที่ทำให้ $H_p(Z)$ มีเฟสเป็นเชิงเส้นได้

การหาค่า b_1 ใดๆ

จากสมการ (3-6) ให้ค่าความคลาดเคลื่อนของเฟสระหว่างเทอมที่อยู่ทางซ้ายและขวามือ

คือ $\delta_2(\omega)$

$$\delta_2(\omega) = - (p-1)\omega\tau - \tan^{-1} \frac{\sum_{i=0}^m b_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^m b_i \cos(i\omega)}$$

หรือเขียนเป็นความคลาดเคลื่อน $\varepsilon_2(\omega)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\omega) &= - \tan\{(p-1)\omega\tau\} - \frac{\sum_{i=0}^m b_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^m b_i \cos(i\omega)} \\ &= - \frac{\sin\{(p-1)\omega\tau\}}{\cos\{(p-1)\omega\tau\}} - \frac{\sum_{i=0}^m b_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^m b_i \cos(i\omega)} \\ &= - \frac{\sum_{i=0}^m b_i [\sin\{(p-1)\omega\tau\} \cos(i\omega) + \cos\{(p-1)\omega\tau\} \sin(i\omega)]}{\sum_{i=0}^m b_i \cos\{(p-1)\omega\tau\} \cos(i\omega)} \\ &= - \frac{\sum_{i=0}^m b_i \sin\{[i + (p-1)\tau]\omega\}}{\sum_{i=0}^m b_i \cos\{(p-1)\omega\tau\} \cos(i\omega)} \end{aligned} \quad (3-17)$$

แต่การประมาณต้องการให้ค่าความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้

$$\sum_{i=0}^m b_i \sin\{[i + (p-1)\tau]\omega\} = 0 \quad (3-18)$$

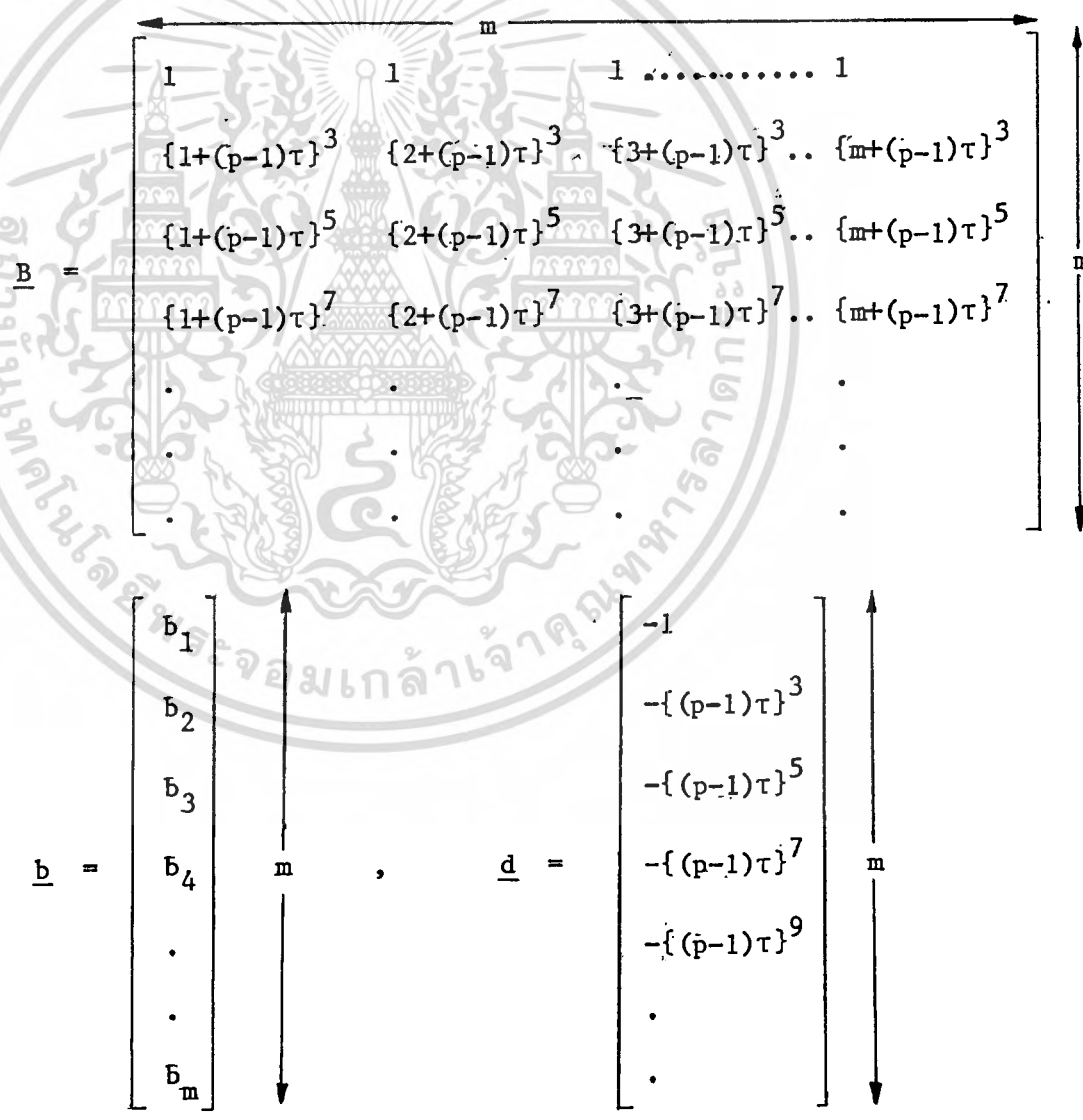
ในการประมาณให้เกิดความราบเรียบที่สุดโดยการกระจายอนุกรมกำลังของพหุนามวงรี
 ทำการหาอนุพันธ์ก็จะได้ว่าสัมประสิทธิ์ทุกอันดับของพหุนามจะต้องเป็นศูนย์ ในขณะที่เดียวกันเพื่อให้การทำคณิตศาสตร์
 ง่ายขึ้นก็สามารถที่จะกำหนดให้ $b_0=1$ ซึ่งในที่สุดจะได้

$$\sum_{i=1}^m b_i \{1 + (p-1)\tau\}^{2k+1} = - \{(p-1)\tau\}^{2k+1} \tag{3-19}$$

k แปรค่าจาก 0 ถึง $\frac{m-1}{2}$ และสมการ (3-19) เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์เป็น

$$\underline{B} \underline{b} = \underline{d}$$

โดยที่



จากเมทริกซ์ที่ได้เมื่อกำหนดหาค่าสัมประสิทธิ์ b_1 ก็จะได้ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของ $H_{1-p}(Z)$ ซึ่งมีเฟสเป็นเชิงเส้น

ในที่สุด เมื่อได้ค่าสัมประสิทธิ์ a_1 และ b_1 : จึงนำเอาทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันทั้งสองรวมเข้าด้วยกันก็จะได้ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่จิตคอลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น อีกทั้งสามารถควบคุมความกว้างของผลตอบสนองขนาดได้ด้วยการแปรค่า p ไป

ที่กล่าวมาข้างต้น เป็นการออกแบบที่ต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยแก้ปัญหา แต่ก็สามารถทำเป็นสูตรสำเร็จสำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์ a_1 และ b_1 ได้โดยเฉพาะกรณีที่มี $m=n$ แล้ว สามารถเขียนได้ดังตารางที่ ๓.๑ โดยอาศัยทฤษฎีในบทความที่ [9] ซึ่งได้ออกแบบไว้ในระนาบ S แต่สามารถที่จะแปลงจากระนาบ S ให้ไปอยู่ในระนาบ Z ได้ด้วยการใช้ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transform)

บทความที่กล่าวไว้ว่า ถ้ามีทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันใดๆเป็น

$$\begin{aligned}
 H(Z) &= \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}} \quad \text{เมื่อ } Z = e^{-j\omega T} \\
 H(S) &= H(Z) \Big|_{Z = \frac{1+S}{1-S}} \\
 &= \frac{(1+S)^n}{d} = \frac{(1+S)^n}{d_o + d_e} \\
 &= \frac{(1+S)^n}{(1+F_n)d_e}
 \end{aligned}$$

d เป็นโพลิโนเมียลของ S ที่ประกอบด้วยเทอม S อันดับคือ d_o และเทอม S อันดับคือ d_e โดยที่

$$F_n = \frac{d_o}{d_e}$$

$$\text{เมื่อ } F_n = \frac{\mu | \frac{1}{S} | + \frac{(\mu^2 - 1) | \frac{3}{S} | + \dots + \{ \mu^2 - (n-1)^2 \} | \frac{(2n-1)}{S} |}{| \frac{1}{S} |}$$

ตัวอย่างเช่น เมื่อ $n=2$

$$F_2 = \frac{\mu}{\frac{1}{s} + \frac{(\mu^2 - 1)}{\frac{3}{s}}}$$

$$= \frac{3\mu s}{3 + (\mu^2 - 1)s^2}$$

$$= \frac{d_o}{d_e}$$

$$\therefore H(s) = \frac{(1 + s)^2}{3 + 3\mu s + (\mu^2 - 1)s^2}$$

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}}$$

$$= \frac{4}{(2+3\mu+\mu^2) + (8-2\mu^2)z^{-1} + (2-3\mu+\mu^2)z^{-2}}$$

ก็จะได้

$$a_0 = 2 + 3\mu + \mu^2$$

$$a_1 = 8 - 2\mu^2$$

$$a_2 = 2 - 3\mu + \mu^2$$

สำหรับทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของแนวความคิดแบบนี้คือ

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}$$

สัมประสิทธิ์สามารถหาเป็นสูตรสำเร็จดังตารางที่ ๓.๑ สัมประสิทธิ์ a_i อยู่ในเทอมของ μ_1

และสัมประสิทธิ์ b_i อยู่ในเทอมของ μ_2 เมื่อ

$$\mu_1 = n + \frac{2p\tau}{T}$$

$$\mu_2 = m + \frac{2(p-1)\tau}{T}$$

ในกรณีของผลตอบสนองเป็นออลพาสส์ (All pass) เมื่อ $m=n$ จะได้ว่า $\mu_1 = -\mu_2$ คือ

$$n + \frac{2p\tau}{T} = - \left\{ n + \frac{2(p-1)\tau}{T} \right\}$$

$$2n + \frac{4p\tau}{T} = \frac{2\tau}{T}$$

$$p = \frac{1}{2} - \frac{nT}{2\tau} \quad (3-21)$$

นั่นคือ ถ้า p มีค่าตามสมการ (3-21) และ p จะต้องอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 ด้วยถึงจะทำให้ผลตอบสนองขนาด เป็นแบบออลพาสส์

๓.๓ ตัวอย่างการออกแบบ

รูปที่ ๓.๑ แสดงถึงผลตอบสนองขนาดเมื่อ $m=n=4$ และ $\tau=๕$ วินาที โดยอาศัยค่าสัมประสิทธิ์ a_1 และ b_1 ที่ได้จากรูปที่ ๓.๑ ส่วนรูปที่ ๓.๒ เป็นผลตอบสนองกรุปดีเลย์ของรูปที่ ๓.๑

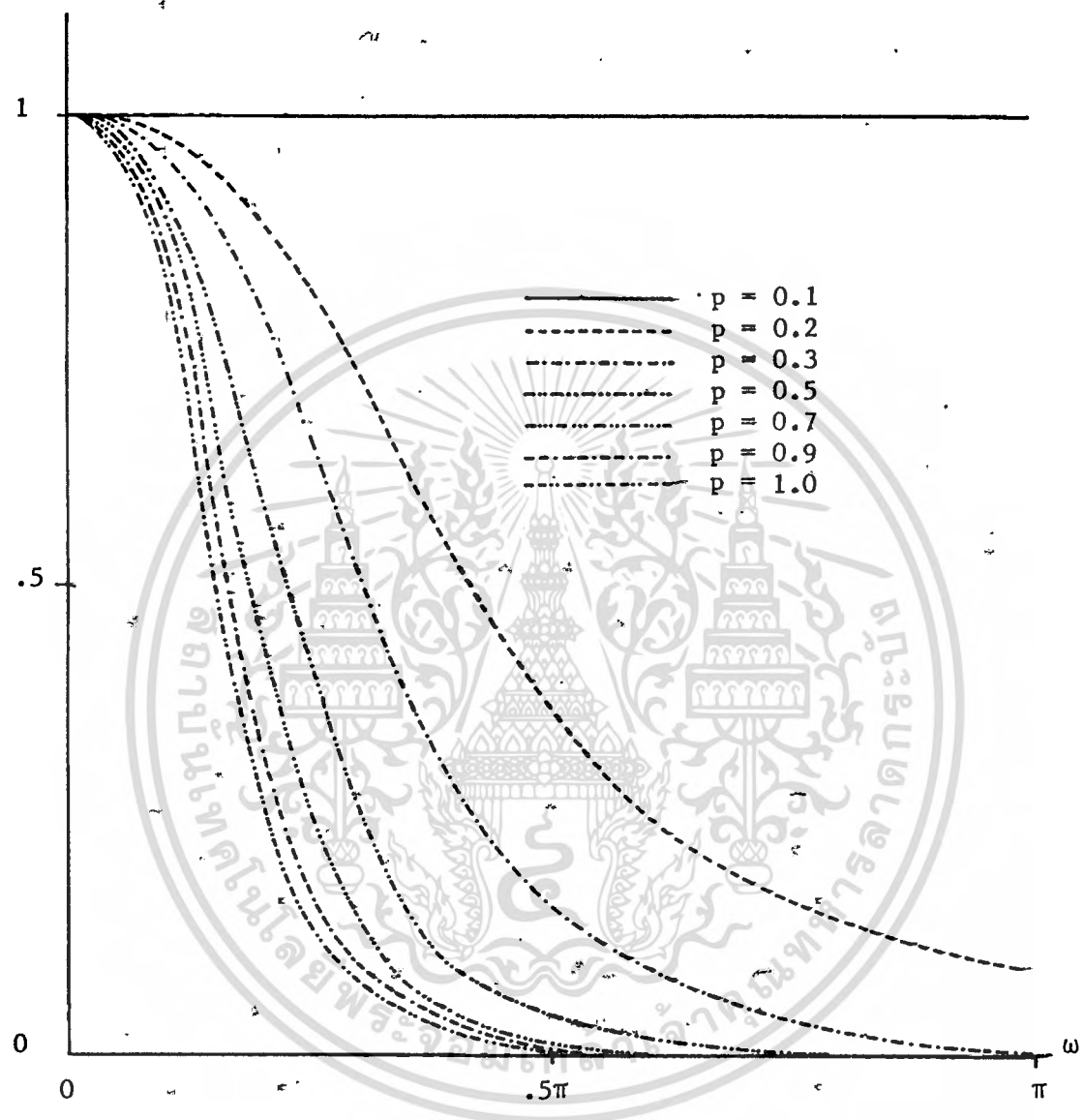
๓.๔ สรุป

จากรูปที่ ๓.๑ จะเห็นได้ว่าการออกแบบวิธีนี้สามารถควบคุมความกว้างของผลตอบสนองขนาด ได้ด้วยการแปรค่า p ไปเท่านั้น แต่มีข้อนำสังเกตว่าถึงแม้ p จะอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้วก็ตาม แต่ถ้าหากการออกแบบ ที่ค่า p อยู่ต่ำกว่าค่าที่ทำให้เกิดออลพาสส์แล้วจะไม่นำมาใช้ เพราะระบบที่ได้จะไม่เสถียร ดังนั้นในการออกแบบ จึงควรหาค่า p ที่ทำให้เกิดออลพาสส์ก่อน มิฉะนั้นแล้วจะทำให้เสียเวลาโดยใช้เหตุผล เมื่อไปเลือกค่า p ที่ต่ำกว่าค่า ที่ทำให้เกิดออลพาสส์

ตารางที่ ๓.๑ สมบัติของวงจรรองความถี่จัตตอลแบบรีเคอร์ซีฟ

	a_0, b_0	a_1, b_1	a_2, b_2	a_3, b_3	a_4, b_4
1	$1 + \mu$	$1 - \mu$	-	-	-
2	$2 + 3\mu + \mu^2$	$8 - 2\mu^2$	$2 - 3\mu + \mu^2$	-	-
3	$6 + 11\mu + 6\mu^2 + \mu^3$	$54 + 27\mu - 6\mu^2 - 3\mu^3$	$54 - 27\mu - 6\mu^2 + 3\mu^3$	$6 - 11\mu + 6\mu^2 - \mu^3$	-
4	$48 + 74\mu + 35\mu^2 + 10\mu^3 + \mu^4$	$384 + 272\mu + 40\mu^2 - 20\mu^3 - 4\mu^4$	$816 - 150\mu^2 + 6\mu^4$	$384 - 272\mu + 40\mu^2 + 20\mu^3 - 4\mu^4$	$48 - 74\mu + 35\mu^2 - 10\mu^3$

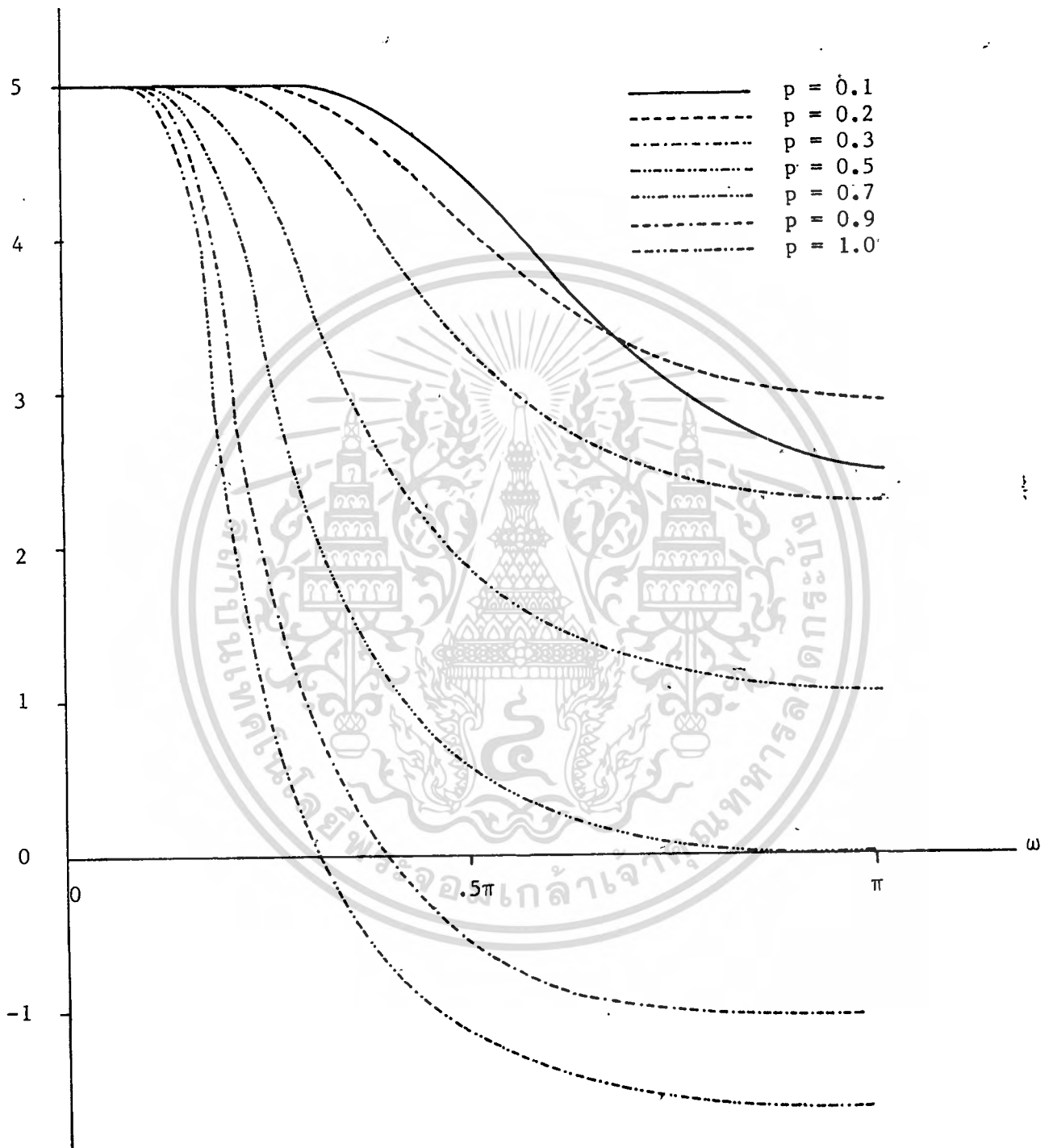
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 1
 2
 3
 4
 ไม่ว่ากรณีใดๆก็ตาม หากมีให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ๓.๑ ผลตอบสนองขนาดเมื่อ $m=n=4$ และ $\tau=1$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ๓.๒ ผลตอบสนองกรุปดีเลย์เมื่อ $m=n=4$ และ $\tau=5$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความหมายของ τ และ T เช่นเดียวกับที่ได้กำหนดไว้ในบทที่ ๓ เทคนิคในการออกแบบของบทนี้

ต้องการให้ช่วงความถี่ต่ำผ่านเท่านั้น

$$\left. \frac{\sum_{i=0}^m a_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} \right|_{Z=e^{-j\omega}} = e^{-j\omega\tau} \quad (4-3)$$

$$\frac{\sum_{i=0}^m a_i e^{-ji\omega}}{\sum_{i=0}^n b_i e^{-ji\omega}} = e^{-j\omega\tau} \quad (4-4)$$

$$\frac{\sum_{i=0}^m a_i e^{-ji\omega}}{\sum_{i=0}^n b_i e^{-ji\omega}} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i e^{-ji\omega} \cdot e^{-j\tau\omega}}{\sum_{i=0}^n b_i e^{-j(i+\tau)\omega}} \quad (4-5)$$

กระจายเทอม $e^{-j\tau\omega}$ ออกเป็นเทอมของ \cos และ \sin

$$\sum_{i=0}^m a_i \{ \cos(i\omega) - j \sin(i\omega) \} = \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos(i+\tau)\omega - j \sin(i+\tau)\omega \}$$

$$\sum_{i=0}^m a_i \cos(i\omega) - \sum_{i=0}^n b_i \cos(i+\tau)\omega = j \left\{ \sum_{i=0}^m a_i \sin(i\omega) - \sum_{i=0}^n b_i \sin(i+\tau)\omega \right\} \quad (4-6)$$

จากสมการ (4-6) จะเห็นว่าเทอมค่าจริง (Real part) เท่ากับเทอมค่าจินตยะ (Imaginary part) ซึ่งจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อต่างก็เท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้นสมการ (4-6) ก็แยกออกเป็นสองสมการได้คือ

$$\sum_{i=0}^m a_i \cos(i\omega) - \sum_{i=0}^n b_i \cos(i+\tau)\omega = 0 \quad (4-7)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i \sin(i\omega) - \sum_{i=0}^n b_i \sin(i+\tau)\omega = 0 \quad (4-8)$$

ทำการกระจายอนุกรมกำลังของสมการ (4-7) และ (4-8)

$$\sum_{i=0}^m a_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (i\omega)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{i=0}^n b_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \{(i+\tau)\omega\}^{2k}}{(2k)!} = 0 \quad (4-9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สวอนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sum_{i=0}^m a_i \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-1)^k (i\omega)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{i=0}^n b_i \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-1)^k [(i+\tau)\omega]^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0 \quad (4-10)$$

ในการประมาณให้เกิดความราบเรียบที่สุดนั้นต้องทำอนุพันธ์เทียบกับ ω ซึ่งในที่สุดจะได้ว่า

สัมประสิทธิ์ทุกอันดับของ ω ต้องมีค่าเป็นศูนย์

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k} - \sum_{i=0}^n b_i (i+\tau)^{2k} = 0 \quad (4-11)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k+1} - \sum_{i=0}^n b_i (i+\tau)^{2k+1} = 0 \quad (4-12)$$

เพื่อให้ง่ายในการทำคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $b_0 = 1$

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k} - \sum_{i=1}^n b_i (i+\tau)^{2k} = \tau^{2k} \quad (4-13)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k+1} - \sum_{i=1}^n b_i (i+\tau)^{2k+1} = \tau^{2k+1} \quad (4-14)$$

เมื่อ $k=0, 1, 2, 3, \dots, (m+n+1)/2$

สมการทั้งสอง สามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์เป็น

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{c}$$

โดยที่

$$\underline{A} = \begin{array}{c|cc} \begin{array}{c} \leftarrow m+1 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1^2 \\ 1^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1^{m+n} \end{array} & \begin{array}{c} 1 \dots 1 \\ 2 \dots m \\ 2^2 \dots m^2 \\ 2^3 \dots m^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2^{m+n} \dots m^{m+n} \end{array} & \begin{array}{c} \hline -1 \\ -(1+\tau) \\ -(1+\tau)^2 \\ -(1+\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -(1+\tau)^{m+n} \end{array} & \begin{array}{c} \leftarrow n \\ \hline -1 \dots -1 \\ -(2+\tau) \dots -(n+\tau) \\ -(2+\tau)^2 \dots -(n+\tau)^2 \\ -(2+\tau)^3 \dots -(n+\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -(2+\tau)^{m+n} \dots -(n+\tau)^{m+n} \end{array} & \begin{array}{c} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \end{array}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ m+n+1 \\ \downarrow \end{matrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \tau^2 \\ \tau^3 \\ \tau^4 \\ \vdots \\ \tau^{m+n} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ m+n+1 \\ \downarrow \end{matrix}$$

จะเห็นว่า Δ อยู่ในรูปของแวนเตอร์มอดต์เมทริกซ์ ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a และ b ได้โดยการใช้กฎของแครมเมอร์ (Cramer's Rule) โดยหาอยู่ในรูปดีเทอร์มิแนนต์ [16].

$$\Delta = |\underline{A}| = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & m & (1+\tau) & (2+\tau) & \dots & (n+\tau) \\ 0 & 1^2 & 2^2 & \dots & m^2 & (1+\tau)^2 & (2+\tau)^2 & \dots & (n+\tau)^2 \\ 0 & 1^3 & 2^3 & \dots & m^3 & (1+\tau)^3 & (2+\tau)^3 & \dots & (n+\tau)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1^{m+n} & 2^{m+n} & \dots & m^{m+n} & (1+\tau)^{m+n} & (2+\tau)^{m+n} & \dots & (n+\tau)^{m+n} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (-1)^n \left[\prod_{m>i>j>0} (i-j) \right] \left[\prod_{j=0}^m \prod_{i=0}^n (i+\tau-j) \right] \left[\prod_{n>i>j>1} (i-j) \right] \quad (4-15)$$

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{m+1} \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{n} \\
 \left| \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\
 0 & 1 & \dots & (k-1) & \tau & (k+1) & \dots & m & (1+\tau) & \dots & (n+\tau) \\
 0 & 1^2 & \dots & (k-1)^2 & \tau^2 & (k+1)^2 & \dots & m^2 & (1+\tau)^2 & \dots & (n+\tau)^2 \\
 0 & 1^3 & \dots & (k-1)^3 & \tau^3 & (k+1)^3 & \dots & m^3 & (1+\tau)^3 & \dots & (n+\tau)^3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 1^{m+n} & \dots & (k-1)^{m+n} & \tau^{m+n} & (k+1)^{m+n} & \dots & m^{m+n} & (1+\tau)^{m+n} & \dots & (n+\tau)^{m+n}
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

\uparrow
 $m+n+1$
 \downarrow

$$\Delta_k = (-1)^n$$

$$= (-1)^n \left[\prod_{\substack{m \geq i > j \geq 0 \\ i, j \neq k}} (i-j) \right] \left[\prod_{m \geq i > k} (i-\tau) \right] \left[\prod_{k > j \geq 0} (\tau-j) \right] \left[\prod_{\substack{j=0 \\ i=1 \\ j \neq k}}^m \prod_{i=1}^n (i+\tau-j) \right]$$

$$\left[\prod_{i=1}^n (i) \right] \left[\prod_{\substack{m \geq i > j \geq 1}} (i-j) \right]$$

(4-16)

เมื่อ $0 \leq k \leq m$

$$\begin{array}{c}
 \Delta_h = (-1)^n \\
 \left| \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & m & (1+\tau) & (h-1+\tau) & \tau & (h+1+\tau) & (n+\tau) \\
 0 & 1^2 & 2^2 & m^2 & (1+\tau)^2 & (h-1+\tau)^2 & \tau^2 & (h+1+\tau)^2 & (n+\tau)^2 \\
 0 & 1^3 & 2^3 & m^3 & (1+\tau)^3 & (h-1+\tau)^3 & \tau^3 & (h+1+\tau)^3 & (n+\tau)^3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 1^{m+n} & 2^{m+n} & m^{m+n} & (1+\tau)^{m+n} & (h-1+\tau)^{m+n} & \tau^{m+n} & (h+1+\tau)^{m+n} & (n+\tau)^{m+n}
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\Delta_h = (-1)^{n-1} \left[\prod_{m \geq i > j \geq 0} (i-j) \right] \left[\prod_{j=0}^m \prod_{i=1}^n (i+\tau+j) \right] \left[\prod_{j=0}^m \prod_{i=1}^n (\tau-j) \right] \left[\prod_{n \geq i > j \geq 1} (i-j) \right] \quad (4-17)$$

$$\left[\prod_{n \geq i > h} (i) \right] \left[\prod_{h > j \geq 1} (-j) \right]$$

เมื่อ $1 \leq h \leq n$

สัมประสิทธิ์ a_k และ b_h เมื่อใช้กฎของแครมเมอรคือ

$$a_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{\prod_{m \geq i > k} (i-\tau) \prod_{k > j \geq 0} (\tau-j) \prod_{i=1}^n (i)}{\Delta}, \quad 0 \leq k \leq m \quad (4-18)$$

$$b_h = \frac{\Delta_h}{\Delta} = \frac{\prod_{m \geq i > k} (i-k) \prod_{i=1}^n (i+\tau-k) \prod_{j=0}^m \prod_{n \geq i > h} (\tau-j) \prod_{h > j \geq 1} (i) \prod_{i=1}^n (-j)}{\Delta} \quad (4-19)$$

$$\frac{(h-1)! \prod_{j=0}^m (h+\tau-j) \prod_{n \geq i > 1} (i-h)}{\Delta}$$

จากการรวมสมการ (4-18) และ (4-19) เข้าด้วยกันแล้ว สามารถเขียนเป็นทราנסเฟอร์ฟังก์ชัน

รูปทั่วๆไปได้ว่า

$$H(Z^{-1}) = \frac{P_{m,n}(Z^{-1})}{Q_{m,n}(Z^{-1})}$$

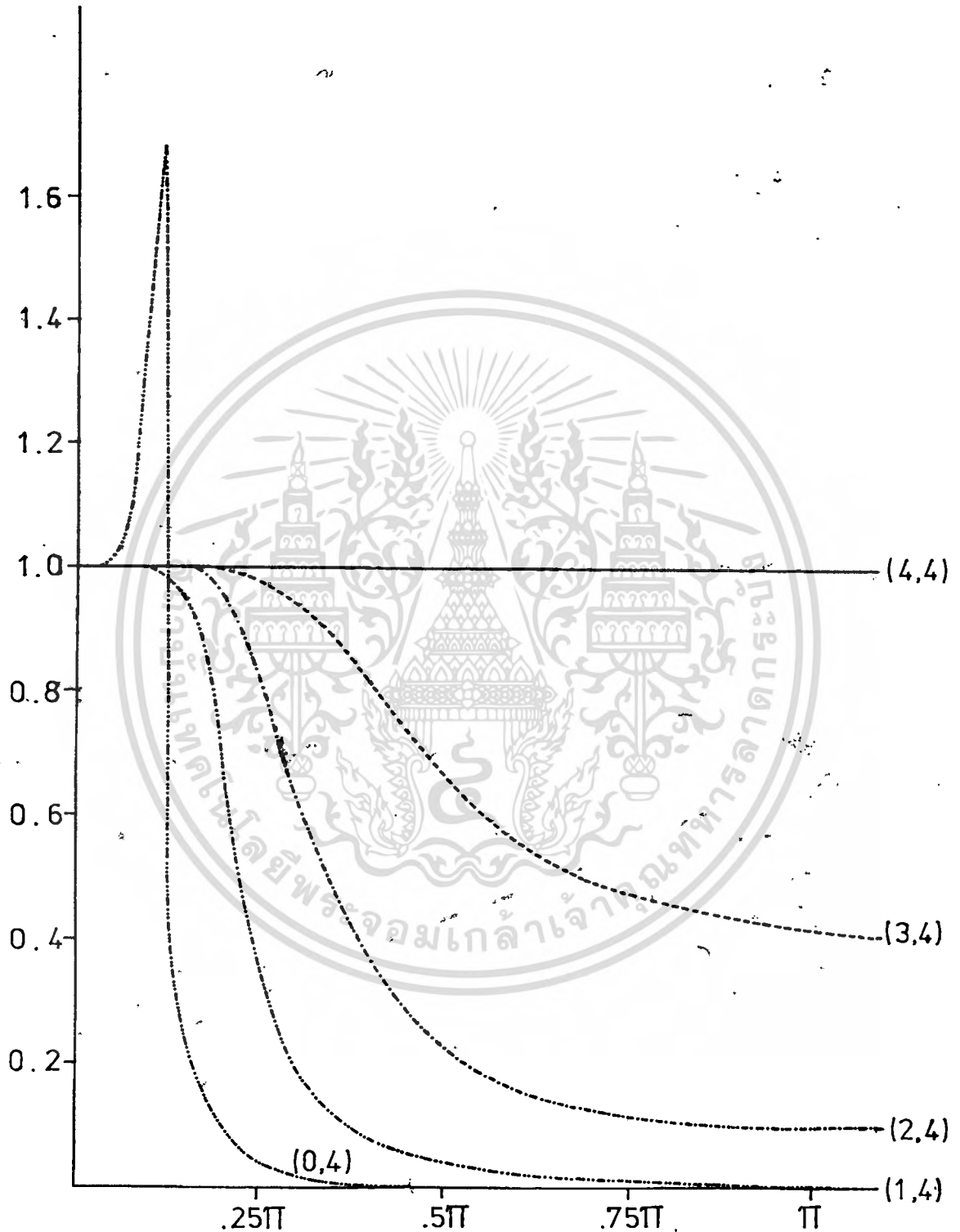
$$= \frac{\frac{n!}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \left[\prod_{i=0}^m \prod_{\tau-i} (\tau-i) / \prod_{i=0}^m \prod_{\tau+i-k} (\tau+i-k) \right] Z^{-k}}{\sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{n}{h} \left[\prod_{i=0}^m \prod_{\tau-i} (\tau-i) / \prod_{i=0}^m \prod_{\tau+h-1} (\tau+h-1) \right] Z^{-h}} \quad (4-20)$$

๔.๓ ตัวอย่างการออกแบบ

สมการ (4-20) นี้เป็นทราานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบซีเคอร์ซีฟที่มีผลตอบสนองทั้งขนาดและกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมๆกันสำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่าน ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นจริงได้โดยการนำทราานส์เฟอร์ฟังก์ชันไปพล็อตด้วยการกำหนดค่า m, n, τ และกระจาย Z^{-1} เป็น $\cos(\omega) + j\sin(\omega)$. ดังรูปที่ ๔.๑ก เป็นผลตอบสนองขนาดเมื่อ $m=4, \tau=5$ วินาที m จะแปรค่าจาก 0 ถึง 4 รูปที่ ๔.๑ข เป็นผลตอบสนองกรุปดีเลย์ของรูปที่ ๔.๑ก รูปที่ ๔.๒ก เป็นผลตอบสนองขนาดเมื่อ $m-n=2$ ขณะที่ $\tau=15$ วินาที รูปที่ ๔.๒ข เป็นผลตอบสนองกรุปดีเลย์ของรูปที่ ๔.๒ก และรูปที่ ๔.๓ก เป็นผลตอบสนองขนาดเมื่อ $m-n=1$ ขณะที่ $\tau=15$ วินาที รูปที่ ๔.๓ข เป็นผลตอบสนองกรุปดีเลย์ของรูปที่ ๔.๓ก

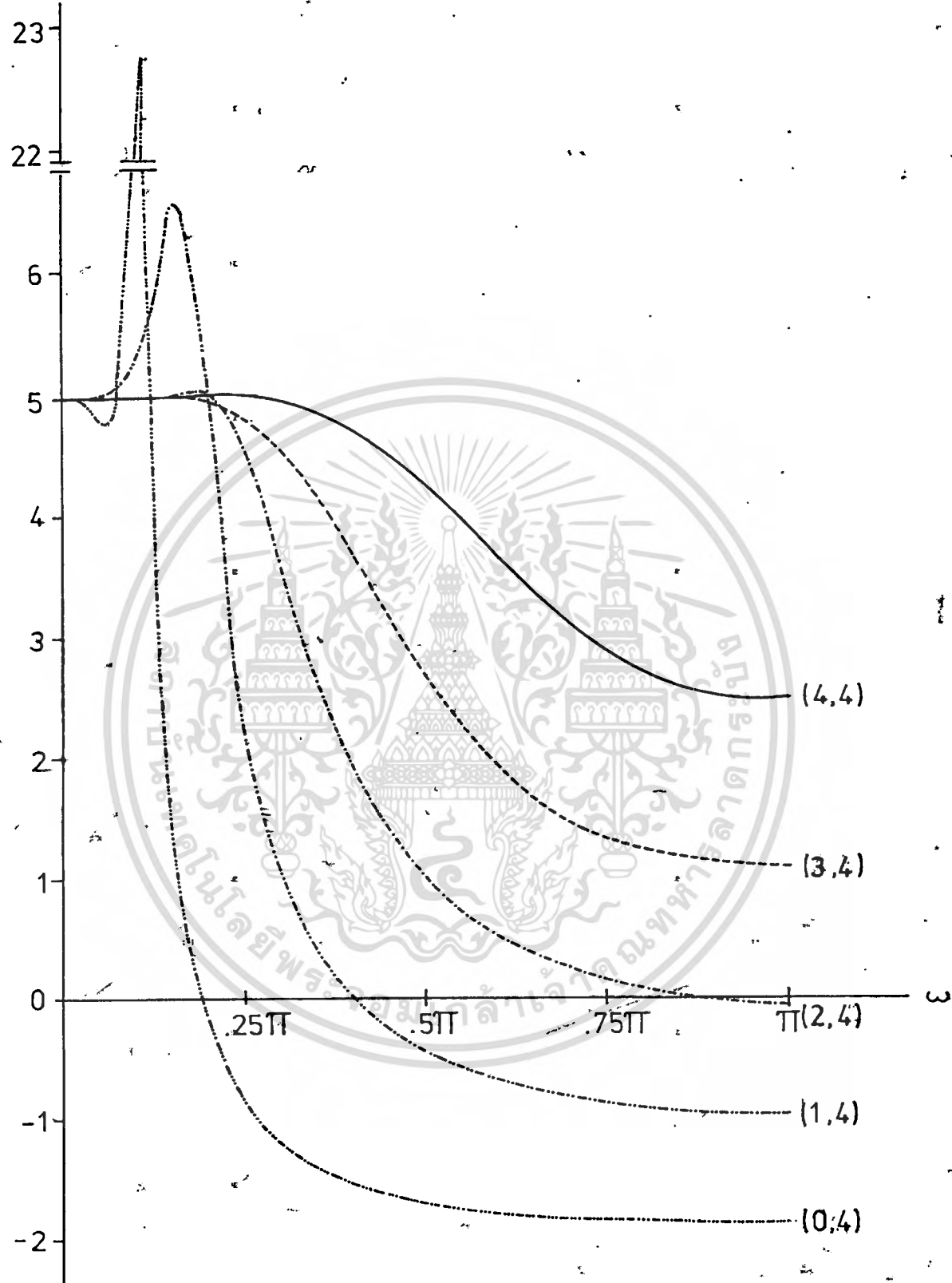
๔.๔ สรุป

จากตัวอย่างการออกแบบ แสดงให้เห็นว่าในการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบซีเคอร์ซีฟสำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่านของเทคนิคนี้ จะให้ผลตอบสนองทั้งขนาดและกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าหากอันติบของเศษและส่วนต่างก็น้อยๆ จะได้ผลตอบสนองราบเรียบดีมาก แต่ถ้าหากอันติบของเศษและส่วนต่างก็มาก จะทำให้เกิดยอดขึ้นในผลตอบสนอง ซึ่งงานบางอย่างไม่ต้องการให้เกิดเหตุการณ์อย่างนี้ ในการแก้ไขจุดบกพร่องนี้จึง เป็นสิ่งที่ควรรววิจัยหาข้อแก้ไขซึ่งจะแสดงในบทต่อไป

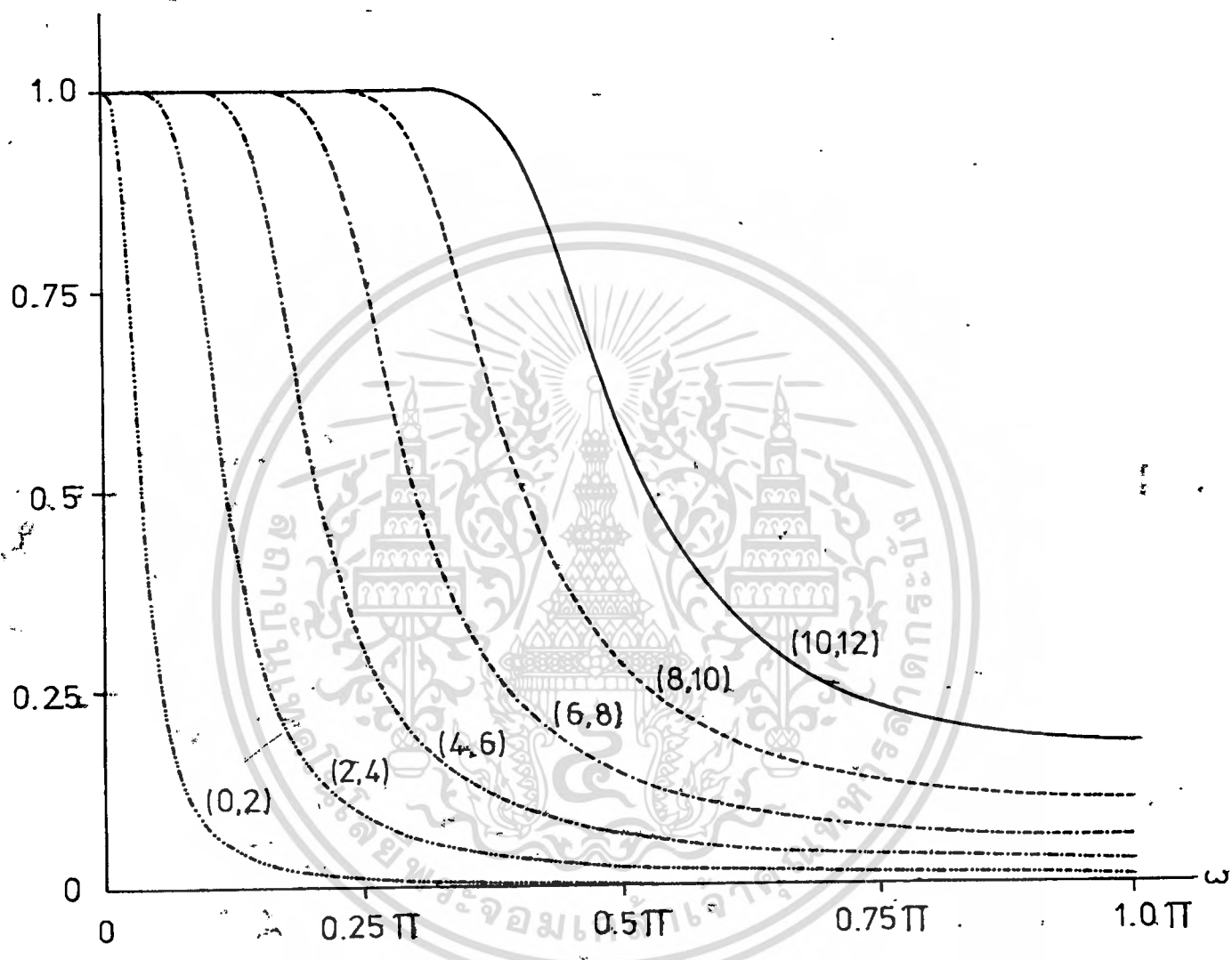


รูปที่ ๔.๑๓. ผลตอบสนองขนาดเมื่อ $n=4$, $\tau=5$ นาที π จะแปรค่าจาก 0 ถึง 4

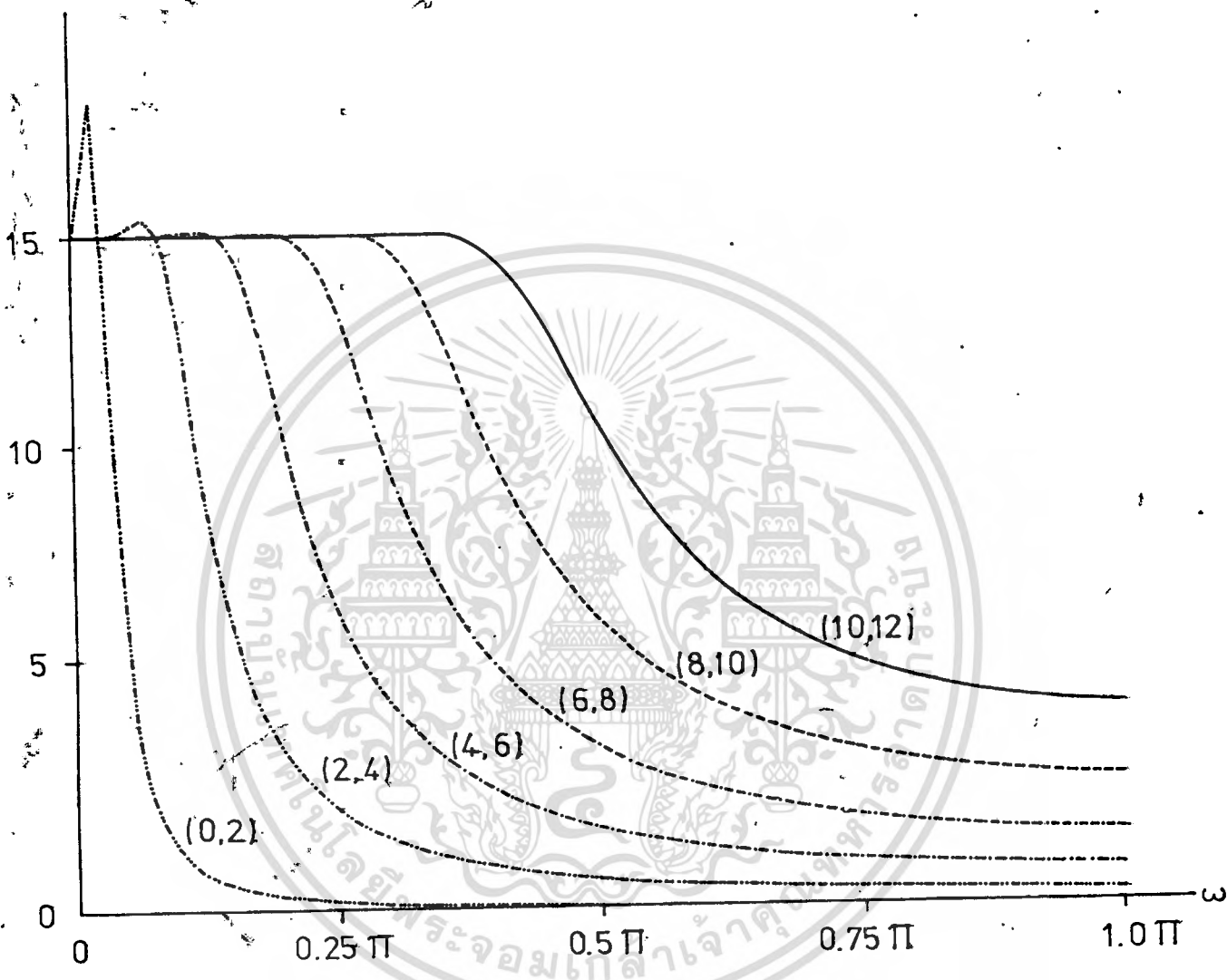
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีเหตุเปลี่ยนแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



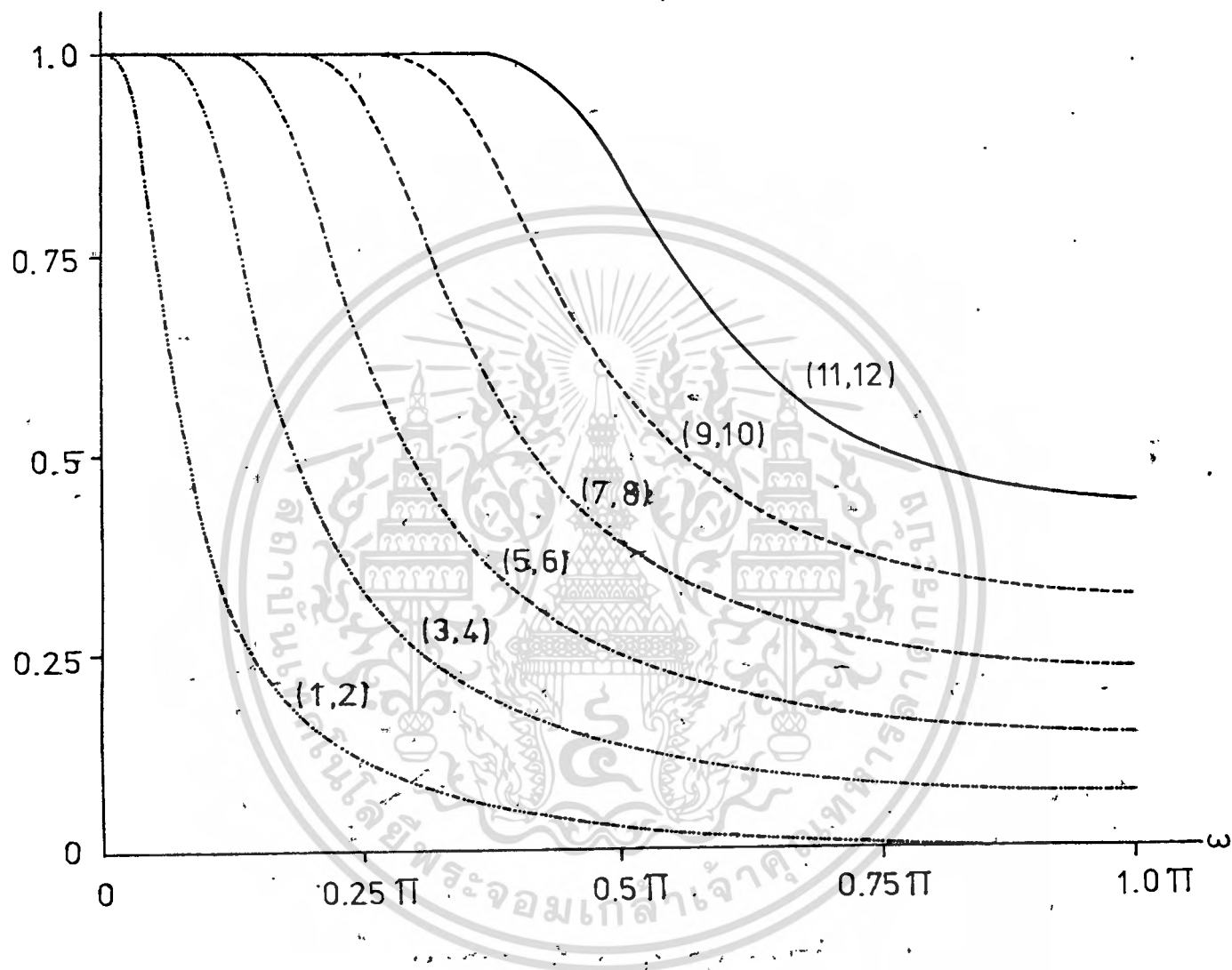
รูปที่ ๔.๑๖ ผลตอบสนองกรุปที่เลขมี $m=4, \tau=5$ วินาที. m จะแปรค่าจาก 0 ถึง 4



รูปที่ ๔.๒๓ ผลตอบสนองขนาดเมื่อ $\pi - \pi = 2$ ขณะที่ $\tau = 15$ วินาที

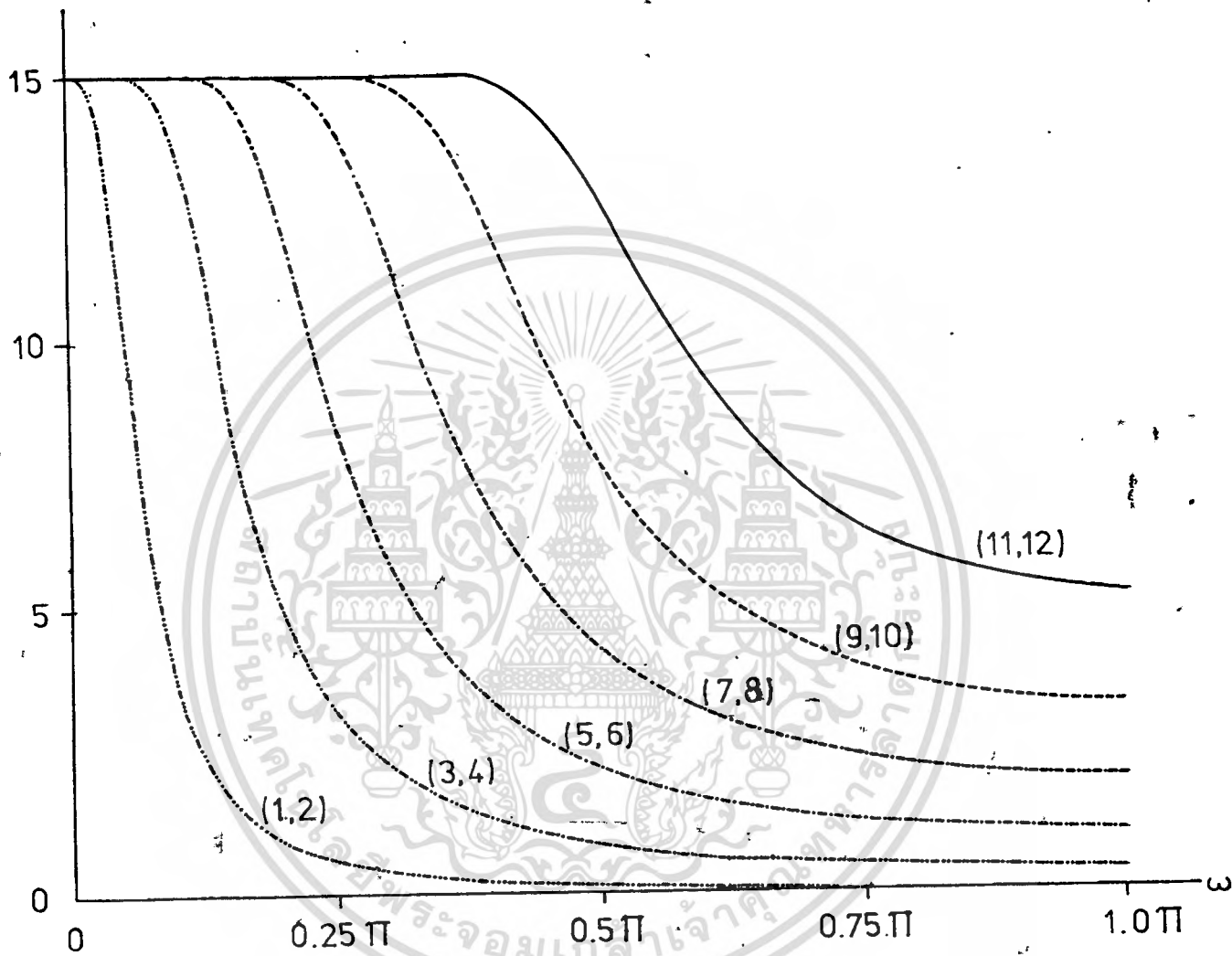


รูปที่ ๔.๒๖ ผลตอบสนองกรุปดีเลย์เมื่อ $m=2$ ขณะที่ $\tau=15$ วินาที



รูปที่ ๔.๓๓ ผลตอบสนองขนาดเมื่อ $n-m=1$ ขณะที่ $\tau=15$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาในเอกสารต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ๕.๓๖. ผลตอบสนองกราฟที่เลขี่เมื่อ $m=1$ ขณะที่ $\tau=15$ วินาที

บทที่ ๔

การออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จិតอลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีผลตอบสนองกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมกับปรับปรุงผลตอบสนองขนาดสำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่าน (A Maximally Flat Group Delay Low-pass Recursive Digital Filter with Improved Passband Magnitude Response)

๔.๑ บทนำ

ดังได้กล่าวไว้ในบทสรุปของบทที่ ๔ ว่า ถ้าอันดับของเศษและของส่วนต่างกันมากผลตอบสนองที่ได้จะเกิดยอด การแก้ไขข้อบกพร่องนี้ก็เป็นงานที่น่าจะทำกรวิจัยยิ่ง บทนี้จึงเป็นการแสดงการออกแบบวงจรกรองความถี่ที่จิตอลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีผลตอบสนองกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมกับปรับปรุงผลตอบสนองขนาดให้ราบเรียบที่สุดด้วย ซึ่งในการออกแบบต้องนำเอาโพลีโนเมียลเงาเข้ามาช่วย โดยนำมาเติมเป็นเศษของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจกรองความถี่ ส่วนโพลีโนเมียลส่วนของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันนั้นได้มาจาก [7] หรือ [9] ก็ได้ ซึ่งทั้ง [7] และ [9] มีผลตอบสนองขนาดไม่สี่

๔.๒ ทฤษฎีการออกแบบ

จากวงจกรองความถี่ที่จิตอลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดและเป็นทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่มีโพลีโนเมียลส่วนอย่างเดียวยุ่อย่างเช่นของ [7] หรือ [9] กล่าวคือ

$$H_1(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}} \quad (5-1)$$

สัมประสิทธิ์ b_i ของสมการ (5-1) นั้นได้มาจาก 7 หรือ 9

ในการปรับปรุงผลตอบสนองขนาดทำได้ด้วยการเติมโพลีโนเมียลเงาเข้าเป็นเศษของสมการ (5-1)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}} \quad (5-2)$$

เมื่อ $\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}$ เป็นโพลีโนเมียลเงา

หรือ
$$H(Z) = \frac{Z^{-\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega T)}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} \quad (5-3)$$

เมื่อ $d_0 = a \frac{m}{2}$, $d_i = a \frac{m}{2} - i \frac{m}{2} + i$ โดย $i=1,2,3,\dots,\frac{m}{2}$ เมื่อ m เป็นอันดับคู่

ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรกรองความถี่จัตตอลนี่ ต้องการออกแบบให้ผลตอบสนองทั้งขนาด และกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมๆกัน นั่นคือต้องนำเอาทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันนี้ไปทำการประมาณกับฟังก์ชัน $\exp(-j\omega T)$ ซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่งเสมอและมีเฟสเป็นเชิงเส้นหรือกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดนั่นเอง

τ และ T มีความหมายเช่นเดียวกับที่กำหนดไว้ในบทที่ ๓ เทคนิคในการออกแบบของบัพที่ออกแบบ สำหรับวงจรช่วงความถี่ต่ำผ่าน ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{Z^{-\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega) }{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} = e^{-j\omega T} \quad (5-4)$$

เนื่องจาก $Z^{-\frac{m}{2}}$ นั้นมีขนาดเป็นหนึ่งเสมอและมีกรุปดีเลย์คงที่เท่ากับ $\frac{mT}{2}$ จึงเป็นเทอมที่ละ

ทิ้งได้ จะได้สมการใหม่เป็น

$$\frac{\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega) }{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} \Big|_{Z=e^{j\omega}} = e^{-j\omega T} \quad (5-5)$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega) }{\sum_{i=0}^n b_i e^{-j\omega i}} = e^{-j\omega T} \quad (5-6)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega) = \sum_{i=0}^n b_i e^{-j\omega i} e^{-j\omega T}$$

$$= \sum_{i=0}^n b_i e^{-j(i+\tau)\omega}$$

$$= \sum_{i=0}^n b_i \cos(i+\tau)\omega - j \sum_{i=0}^n b_i \sin(i+\tau)\omega$$

$$\frac{m}{2} \sum_{i=0}^m d_i \cos(i\omega) - \sum_{i=0}^n b_i \cos(i+\tau)\omega = -j \sum_{i=0}^n b_i \sin(i+\tau)\omega \quad (5-7)$$

สมการ(5-7) จะเห็นว่าเทอมค่าจริงเท่ากับเทอมค่าจินตยะ ซึ่งเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ เทอมทั้งสองต่างก็เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\frac{m}{2} \sum_{i=0}^m d_i \cos(i\omega) - \sum_{i=0}^n b_i \cos(i+\tau)\omega = 0 \quad (5-8)$$

$$\sum_{i=0}^n b_i \sin(i+\tau)\omega = 0 \quad (5-9)$$

สมการ(5-9) ไม่ได้ช่วยในการหาค่าสัมประสิทธิ์ d_i เพราะว่าสัมประสิทธิ์ b_i รู้ค่าแล้วจาก [7] หรือ [9] จึงเหลือเฉพาะสมการ(5-8) ที่ต้องนำมาใช้ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ d_i

$$\frac{m}{2} \sum_{i=0}^m d_i \cos(i\omega) = \sum_{i=0}^n b_i \cos(i+\tau)\omega \quad (5-10)$$

เพื่อให้ง่ายในการหาอนุพันธ์ ควรกระจายเทอม cos ในสมการ(5-10) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง

$$\frac{m}{2} \sum_{i=0}^m d_i \left[\sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-1)^k (i\omega)^{2k}}{2k!} \right] = \sum_{i=0}^n b_i \left[\sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-1)^k \{(i+\tau)\omega\}^{2k}}{2k!} \right] \quad (5-11)$$

ในการประมาณให้เกิดความราบเรียบที่สุดทำได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ ω ในที่สุดจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ทุกอันดับของ d_i ต้องเท่ากับศูนย์

$$\frac{m}{2} \sum_{i=0}^m (i)^{2k} d_i = \sum_{i=0}^n (i+\tau)^{2k} b_i \quad (5-12)$$

เมื่อ $k=0,1,2,3,\dots,m$
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวน 2 ไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นสมการ (5-12) เขียนเป็นเมทริกซ์ได้

$$\underline{A} \underline{d} = \underline{B} \underline{b} \tag{5-13}$$

เมื่อ

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & \left(\frac{m}{2}\right)^2 \\ 0 & 1^4 & 2^4 & 3^4 & \dots & \left(\frac{m}{2}\right)^4 \\ 0 & 1^6 & 2^6 & 3^6 & \dots & \left(\frac{m}{2}\right)^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1^m & 2^m & 3^m & \dots & \left(\frac{m}{2}\right)^m \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{\frac{m}{2} + 1} \quad \xrightarrow{\quad}$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tau^2 & (1+\tau)^2 & (2+\tau)^2 & (3+\tau)^2 & \dots & (n+\tau)^2 \\ \tau^4 & (1+\tau)^4 & (2+\tau)^4 & (3+\tau)^4 & \dots & (n+\tau)^4 \\ \tau^6 & (1+\tau)^6 & (2+\tau)^6 & (3+\tau)^6 & \dots & (n+\tau)^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau^m & (1+\tau)^m & (2+\tau)^m & (3+\tau)^m & \dots & (n+\tau)^m \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{m}{2} + 1 \\ \downarrow \end{array} \quad , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ n+1 \\ \downarrow \end{array}$$

จากเมทริกซ์ในสมการ (5-13) สามารถที่จะคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ d_i โดยการเขียนโปรแกรมใช้แก้สไลม์เนชั่น (Gauss elimination) เป็นซับรูทีน (Subroutine) หรืออาจจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ d_i จากสูตรสำเร็จ ซึ่งสูตรสำเร็จนี้ได้จากการใช้กฎของแครมเมอร์ในเมื่อเมทริกซ์ A เป็นแวนเตอร์มอดต์เมทริกซ์ การหาสูตรสำเร็จทำได้ดังต่อไปนี้

จากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A คือ Δ เพื่อความชัดเจนในการแสดงวิธีหาสูตรสำเร็จนี้กำหนดให้ $m=8$ และ $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^2 & x^2 & x^2 & x^2 & x^2 \\ x^4 & x^4 & x^4 & x^4 & x^4 \\ x^6 & x^6 & x^6 & x^6 & x^6 \\ x^8 & x^8 & x^8 & x^8 & x^8 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1^2 - x_0^2)(x_2^2 - x_0^2)(x_3^2 - x_0^2)(x_4^2 - x_0^2)(x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_4^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_2^2)(x_4^2 - x_2^2)(x_4^2 - x_3^2)$$

$$\text{ให้ } x_e = (i+\tau) \quad \text{จะได้ว่า} \quad \sum_{i=0}^n (i+\tau)^{2k} b_i = \sum_{i=0}^n (x_e)^{2k} b_i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากกฎของแครมเมอร์ ถ้า $d_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}$ โดย ได้จากการนำ $\sum_{i=0}^n (i+1)^{2k} b_i$ ไปแทนลงในคอลัมน์ที่ 1 ของ Δ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n b_i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 b_i & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i^4 b_i & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \\ \sum_{i=0}^n x_i^6 b_i & x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 \\ \sum_{i=0}^n x_i^8 b_i & x_1^8 & x_2^8 & x_3^8 & x_4^8 \\ \sum_{i=0}^n b_i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \\ x_1^6 & x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 \\ x_1^8 & x_1^8 & x_2^8 & x_3^8 & x_4^8 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^n b_i (x_1^2 - x_e^2) (x_2^2 - x_e^2) (x_3^2 - x_e^2) (x_4^2 - x_e^2) (x_2^2 - x_1^2) (x_3^2 - x_1^2) (x_4^2 - x_1^2) (x_3^2 - x_2^2) (x_4^2 - x_2^2) (x_4^2 - x_3^2)$$

$$\therefore d_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{\sum_{i=0}^n (x_1^2 - x_e^2) (x_2^2 - x_e^2) (x_3^2 - x_e^2) (x_4^2 - x_e^2) b_i}{(x_1^2 - x_0^2) (x_2^2 - x_0^2) (x_3^2 - x_0^2) (x_4^2 - x_0^2)} \quad (5-14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ภายในเท่านั้น ไม่ควรเผยแพร่ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หา d_2 โดยการนำเอา $\sum_{i=0}^n x_e^{2k} b_i$ แทนลงในคอลัมน์ที่ 3 ของ Δ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sum_{i=0}^n b_i & 1 & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \sum_{i=0}^n x_e^2 b_i & x_3^2 & x_4^2 \\ x_0^4 & x_1^4 & \sum_{i=0}^n x_e^4 b_i & x_3^4 & x_4^4 \\ x_0^6 & x_1^6 & \sum_{i=0}^n x_e^6 b_i & x_3^6 & x_4^6 \\ x_0^8 & x_1^8 & \sum_{i=0}^n x_e^8 b_i & x_3^8 & x_4^8 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^n b_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_e^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_0^4 & x_1^4 & x_e^4 & x_3^4 & x_4^4 \\ x_0^6 & x_1^6 & x_e^6 & x_3^6 & x_4^6 \\ x_0^8 & x_1^8 & x_e^8 & x_3^8 & x_4^8 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^n b_i (x_1^2 - x_0^2) (x_e^2 - x_0^2) (x_3^2 - x_0^2) (x_4^2 - x_0^2) (x_e^2 - x_1^2) (x_3^2 - x_1^2) (x_4^2 - x_1^2) (x_3^2 - x_e^2) (x_4^2 - x_e^2) (x_4^2 - x_3^2)$$

$$d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\sum_{i=0}^n (x_e^2 - x_0^2) (x_e^2 - x_1^2) (x_3^2 - x_e^2) (x_4^2 - x_e^2) b_i}{(x_2^2 - x_0^2) (x_2^2 - x_1^2) (x_3^2 - x_2^2) (x_4^2 - x_2^2)} \tag{5-15}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (5-14) และ (5-15) เป็นตัวอย่างที่พอจะสรุปสูตรในการหาค่าสัมประสิทธิ์ d_k

สำหรับ ใดๆ ได้ว่า

$$d_k = \frac{\sum_{f=0}^n \prod_{h=0}^{k-1} (x_e^2 - x_h^2) \prod_{h=k+1}^{\frac{m}{2}} (x_h^2 - x_e^2) b_f}{\prod_{h=0}^{k-1} (x_k^2 - x_h^2) \prod_{h=k+1}^{\frac{m}{2}} (x_h^2 - x_k^2)}$$

$$\text{หรือ } d_k = \frac{\sum_{f=0}^n \left\{ \prod_{h=0}^{k-1} (i+\tau)^2 - h^2 \right\} \left\{ \prod_{h=k+1}^{\frac{m}{2}} h^2 - (i+\tau)^2 \right\} b_f}{\prod_{h=0}^{k-1} (k^2 - h^2) \prod_{h=k+1}^{\frac{m}{2}} (h^2 - k^2)}$$

เมื่อ $x_h = h$, $x_k = k$ และ $x_e = (i+\tau)$

๔.๓ ตัวอย่างในการออกแบบ

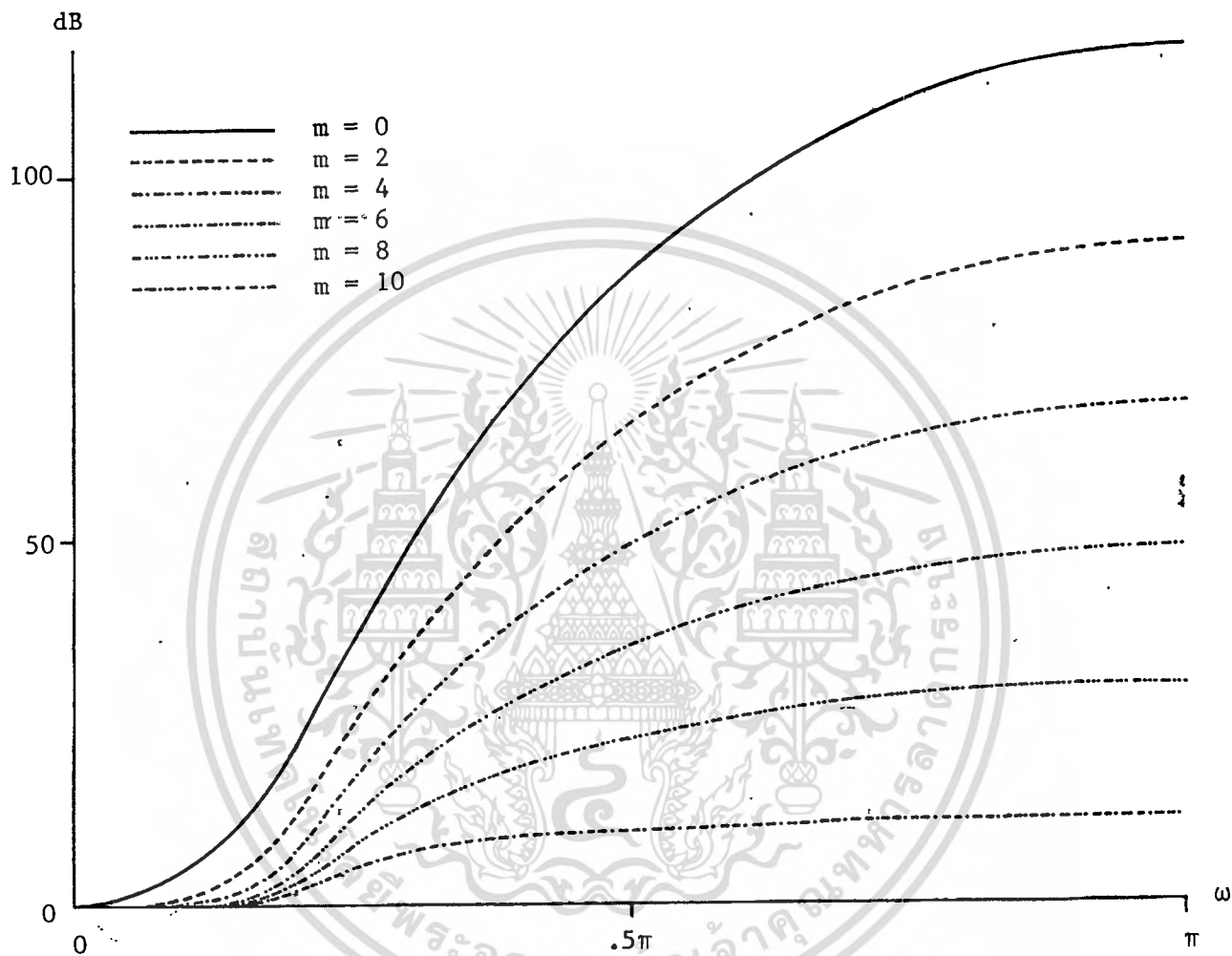
หลังจากหาค่าสัมประสิทธิ์ d_k ได้แล้วนำไปแทนลงในสมการ (5-3) ก็จะได้ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่จัตตอลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด ในขณะที่เดียวกันผลตอบสนองขนาดก็ได้รับการปรับปรุงจนราบเรียบที่สุดด้วย ตัวอย่างในการออกแบบได้แสดงไว้ในรูปที่ ๔.๑ เมื่อกำหนดให้ $m=10$, $\tau=10$ วินาที และ n แปรค่าไปจาก 0 ถึง 10 รูปที่ ๔.๒ เป็นค่ากรุปดีเลย์ของรูปที่ ๔.๑ รูปที่ ๔.๓ เป็นผลตอบสนองขนาดเมื่อกำหนดให้ $m=8$, $n=10$ โดย n แปรค่าไป รูปที่ ๔.๔ เป็นกรุปดีเลย์ของรูปที่ ๔.๓ โดยที่กรุปดีเลย์ขึ้นอยู่กับโพลโนเมียลของส่วนอันดับของฟังก์ชัน

๔.๔ สรุป

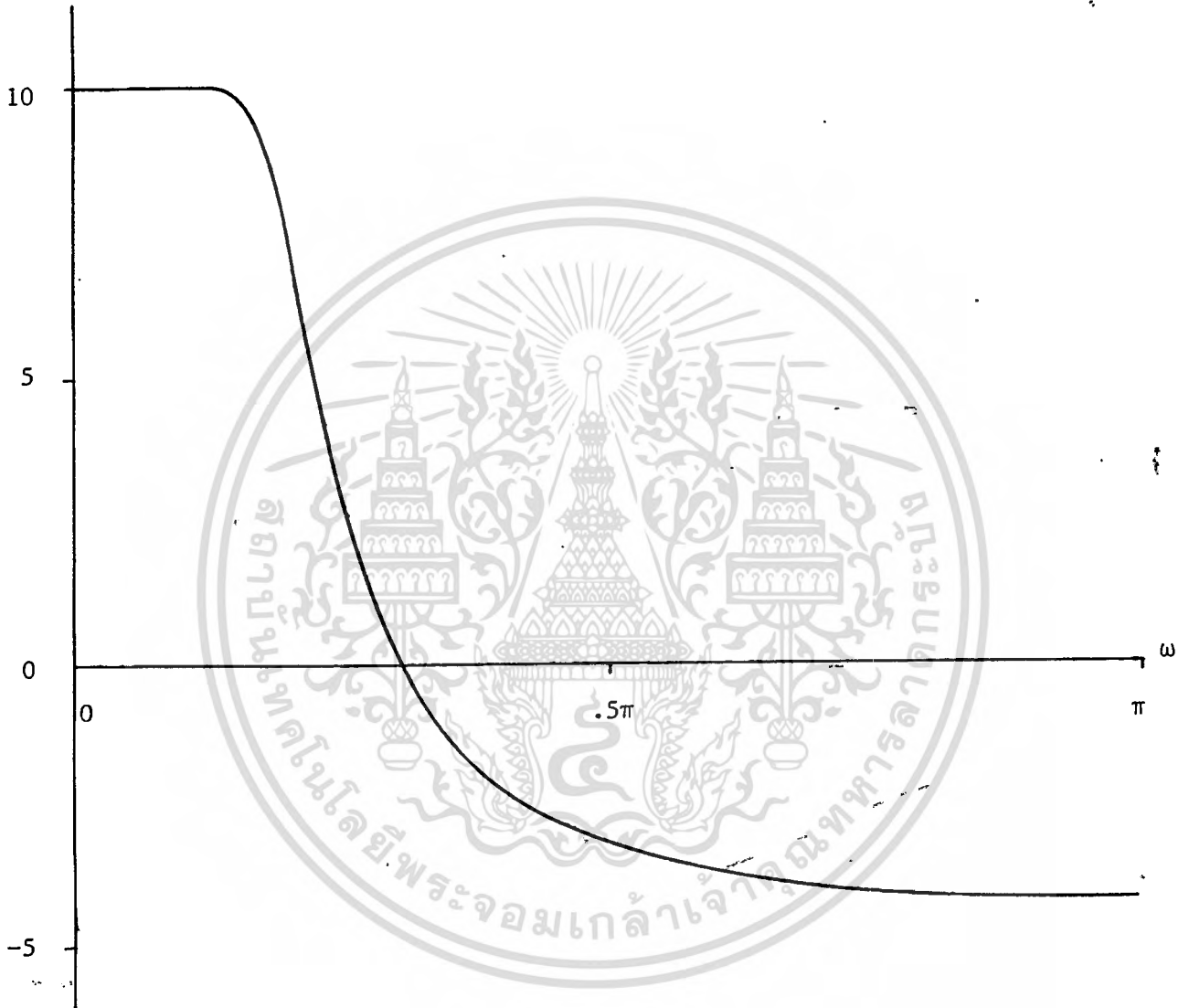
การออกแบบนี้เป็นการแก้ไขจุดบกพร่องของแนวความคิดในบทที่๓ ที่อันดับของเศษและส่วนต่างกันมากๆแล้วจะเกิดยอด จากรูปตัวอย่างในการออกแบบของบทนี้ได้แสดงให้เห็นว่าวงจรร่องความถี่ที่จัดอลแบบรีเคอร์ซีฟที่ต้องการให้ทั้งผลตอบสนองขนาดและกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมๆกันแล้วจะไม่เกิดปัญหาเรื่องการเกิดยอดของผลตอบสนองเลยไม่ว่าอันดับเศษและส่วนจะต่างกันแค่ไหน งานวิจัยนี้ได้รับการขยายนำไปใช้กับการออกแบบสำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่านของ [17] แต่บทความ [17] นั้นไม่ได้หาค่าสัมประสิทธิ์เป็นสูตรสำเร็จ

ในการออกแบบของบทนี้กรณีที่ต้องการใช้สูตรสำเร็จจะกระทำได้ดีก็ต่อเมื่ออันดับของวงจรร่องความถี่ไม่สูงเกินไปและค่ากรุปดีเลย์ก็ไม่ควรสูงเกินไปด้วย เพราะมีฉะนั้นแล้วจะเกิดความผิดพลาดเนื่องจากการคูณการหารของตัวเลขจำนวนมากชุด เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวก็ควรที่จะคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์จากสมการ (5-13) โดยตรง

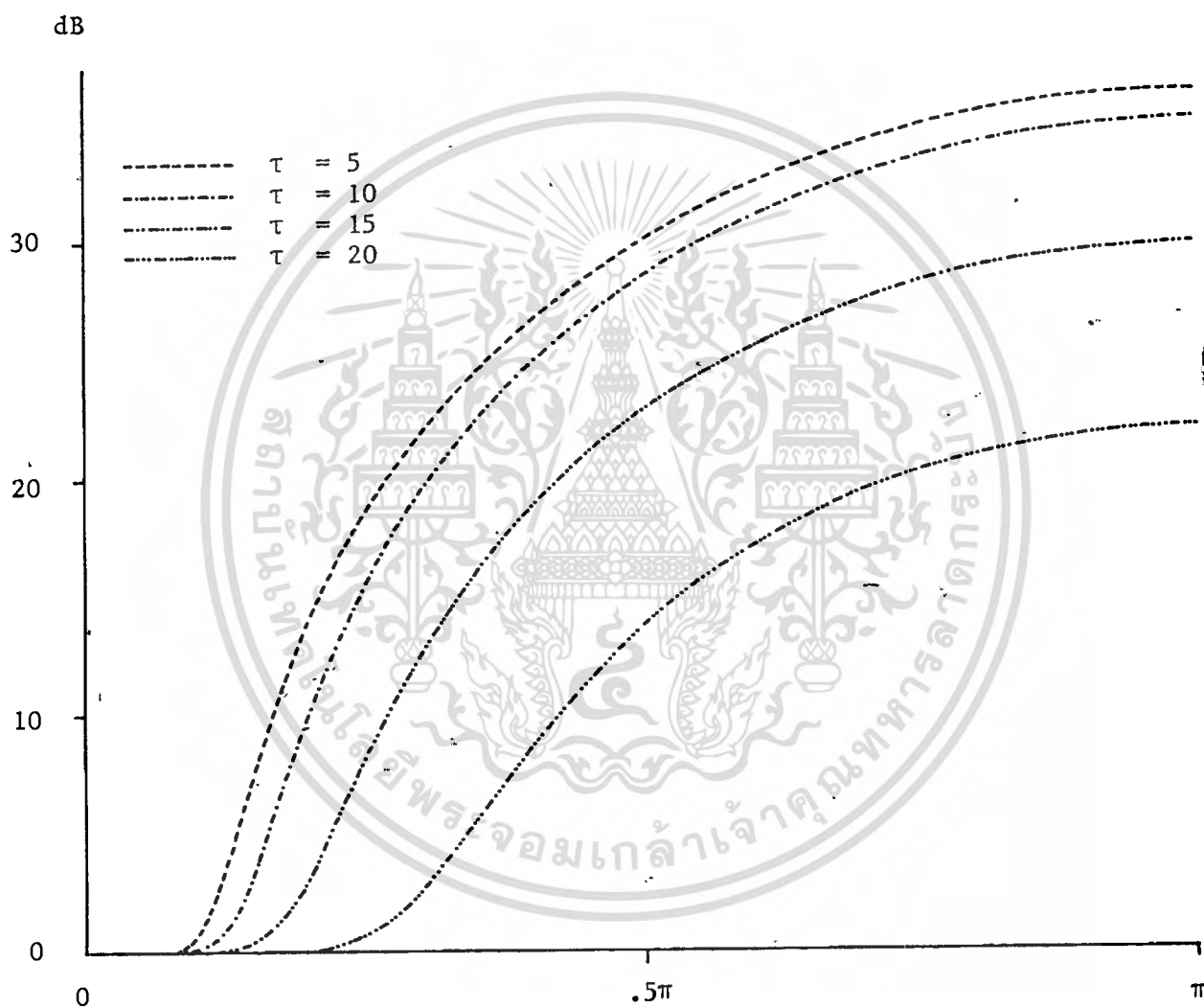




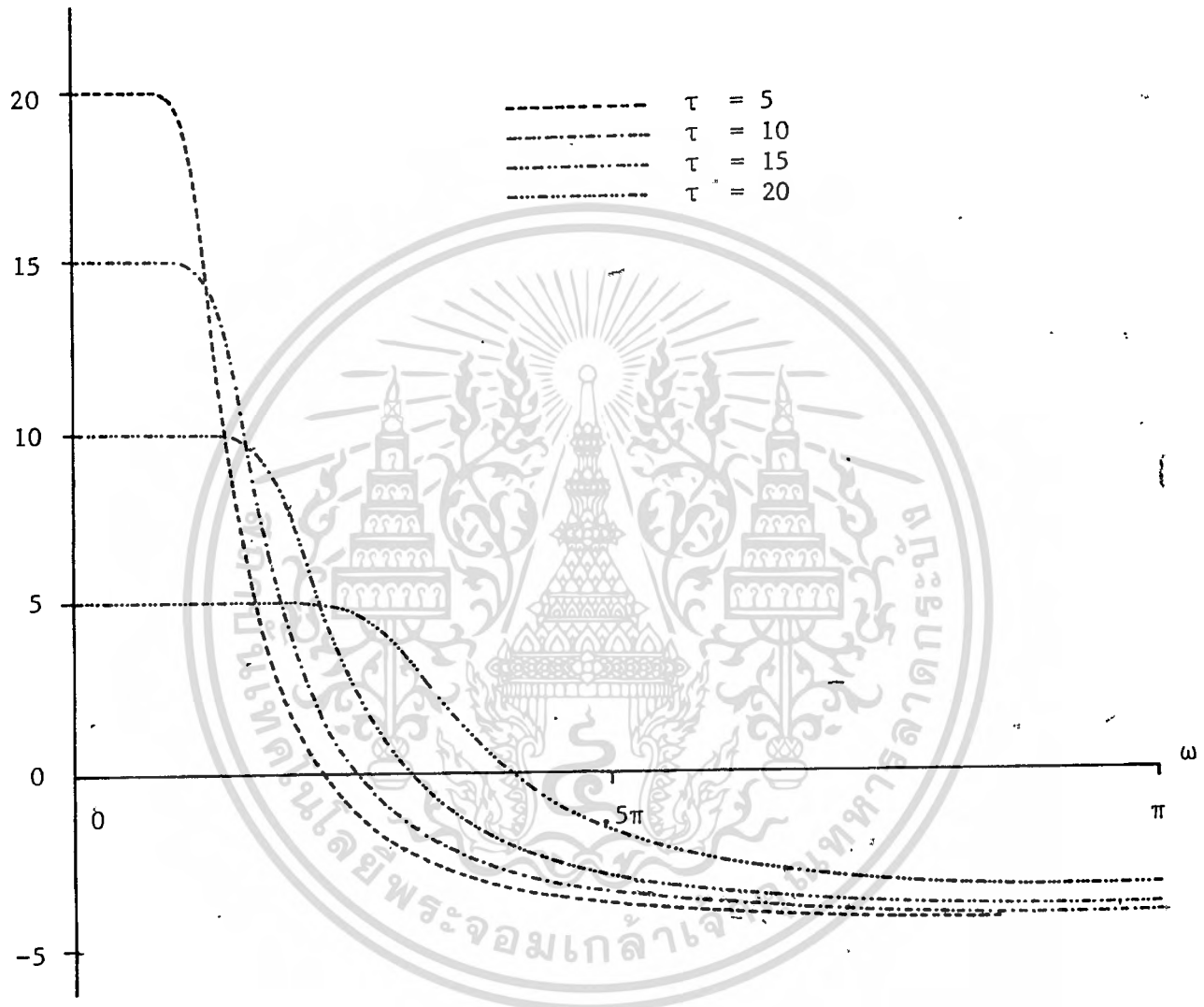
รูปที่ ๔.๑ ผลตอบสนองขนาดเมื่อ $\eta=10$, $\tau=10$ วินาที และ m แปรค่าจาก 0 ถึง 10



รูปที่ ๔.๒ ผลตอบสนองกรุปที่เลยเมื่อ $\eta=10, \tau=10$ วินาที



รูปที่ ๔.๓ ผลตอบสนองขนาดเมื่อ $m=8$, $n=10$ และ τ แปรค่าไป



รูปที่ ๕.๔ ผลตอบสนองของกรุปที่เลขเมื่อ $m=8, n=10$ และ τ แปรค่าไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ ๖

สรุป

บทที่ ๑ ได้กล่าวถึงปัญหาและเทคนิคการเริ่มต้นช่วยในการแก้ปัญหาของกรรออกแบบวงจรรองความถี่ดีจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟเกี่ยวกับบทความที่ผ่านมาซึ่งนิยมออกแบบทางด้านพีชคณิตโดยเพียงอย่างเดียว โดยได้มองข้ามความสำคัญของผลตอบสนองขนาด บทที่ ๒ ได้กล่าวถึงความจำเป็นมาของวงจรรองความถี่ดีจิตอล โดยสังเขป บทที่ ๓ เป็นการออกแบบวงจรรองความถี่ดีจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีรูปพีชคณิตเรียบง่ายที่สุดและสามารถควบคุมความกว้างของผลตอบสนองขนาดได้ด้วย การออกแบบในบทนี้ แบ่งการทำให้มีประสิทธิผลได้เป็นสองวิธี วิธีแรกจะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์แก้ปัญหาแมทริกซ์ วิธีที่สองเป็นการคำนวณหาสูตรสำเร็จสำหรับค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองความถี่ดีจิตอลนั้น บทที่ ๔ เป็นการออกแบบวงจรรองความถี่ดีจิตอลให้ได้ทั้งผลตอบสนองขนาดและกรูฟตี เลย์ราบเรียบที่สุดพร้อมๆกัน ซึ่งสังเกตุได้จากรูปผลตอบสนองของตัวอย่างการออกแบบ แต่วิธีนี้มีข้อบกพร่องอยู่บ้างคือถ้าหากอันดับของเศษและส่วนต่างกันมาากๆจะทำให้เกิดการยกขึ้นบริเวณช่วงความถี่ที่ผ่าน แต่ข้อบกพร่องนี้สามารถแก้ไขได้โดยใช้โพลีโนเมียลเอนา ซึ่งเป็นอีกเทคนิคหนึ่งดังได้กล่าวไว้ในบทที่ ๕ รูปผลตอบสนองจากการออกแบบในบทที่ ๕ นี้แสดงให้เห็นได้ชัดว่าความแตกต่างของอันดับของเศษและส่วนไม่มีผลต่อความราบเรียบของผลตอบสนองเลย จึงทำให้ได้ผลตอบสนองทั้งขนาดและกรูฟตี เลย์ราบเรียบที่สุดอย่างสมบูรณ์

เสถียรภาพของวงจรรองความถี่บทที่ ๓, ๔ และ ๕ นั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งของโพลหรือรากของโพลีโนเมียลของส่วนของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันแต่เพียงอย่างเดียว ถ้าหากโพลทุกตัวอยู่ภายในวงกลมรัศมีเท่ากับหนึ่งบนระนาบZแล้ว ก็ถือได้ว่าวงจรรองความถี่ดีจิตอลนั้นเสถียร หรืออาจดูจากขนาดของตำแหน่งโพลว่ามีค่าน้อยกว่าหนึ่งในระนาบZหรือไม่ ถ้าขนาดน้อยกว่าหนึ่งวงจรรองความถี่ดีจิตอลนั้นก็จะเป็นเสถียร สำหรับระนาบZ⁻¹ โพลต้องอยู่ภายนอกวงกลมหรือขนาดของตำแหน่งโพลต้องมากกว่าหนึ่งจึงจะทำให้วงจรรองความถี่ดีจิตอลนั้นเสถียร

ข้อแนะนำสำหรับผู้ที่ต้องการทำวิจัยต่อจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้พอจะเสนอแนะได้ดังต่อไปนี้

๑. ออกแบบให้ช่วงความถี่กลางผ่าน (Bandpass filter) ในบทความที่ผ่านมารวมทั้งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นิยมทำการออกแบบเฉพาะให้ช่วงความถี่ผ่านเท่านั้น ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่เหล่านี้สามารถนำไปออกแบบให้ช่วงความถี่กลางผ่านได้โดยใช้สูตรการแปลงความถี่ (Spectral transform) [2] ช่วย แต่สูตรการแปลงความถี่นี้มีความไม่เป็นเชิงเส้นในตัว ทำให้ผลตอบสนองที่ได้มีคุณสมบัติผิดไปจากเดิม ตัวอย่างเช่นถ้าหากวงจรรองความถี่ดีจิตอลสำหรับช่วงความถี่ต่ำผ่านเดิมเฟสเป็นเชิงเส้น เมื่อทำการแปลงให้

เป็นวงจรรองความถี่ช่วงความถี่กลางผ่าน เฟสที่ได้จะไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นควรจะออกแบบให้ช่วงความถี่กลางผ่านโดยตรง เพื่อที่จะรักษาความเป็นเชิงเส้นของเฟส

๒. ออกแบบวงจรรองความถี่ดีจิตอลแบบนอนรีเคอร์ซีฟ ซึ่งวงจรรองความถี่ดีจิตอลชนิดนี้จะเสถียรเสมอ จึงเป็นข้อได้เปรียบอย่างยิ่งที่นักออกแบบไม่ต้องประสบปัญหาเรื่องเสถียรภาพของวงจรเลย ในการออกแบบวงจรรองความถี่ดีจิตอลแบบนอนรีเคอร์ซีฟให้มีรูปดีเลย์คงตัวต้องประสบกับปัญหาเรื่องนอนมินิมั่มเฟส (Non-minimum phase) คือรากของโพลีโนเมียลของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันไม่ได้อยู่ภายในวงกลมรัศมีเท่ากับหนึ่งของระนาบ เพียงอย่างเดียว แต่จะอยู่ในตำแหน่งที่เป็นกระจกเงาซึ่งกันและกัน คือรากบางตัวจะอยู่นอกวงกลมด้วย ทำให้เฟสที่ได้ไม่น้อยที่สุด สัญญาณที่ผ่านเข้าระบบนี้จะถูกหน่วงให้เสียเวลา จึงน่าที่จะวิจัยค้นคว้าต่อไปว่าทำอย่างไรถึงจะออกแบบให้วงจรรองความถี่ดีจิตอลแบบนอนรีเคอร์ซีฟที่มีรูปดีเลย์ราบเรียบที่สุดซึ่งจะเป็นแบบมินิมั่มเฟสได้



บทความและหนังสืออ้างอิง

- [1] B. Gold and C.M. Rader, Digital Processing of Signals, New York, McGraw-Hill, 1969
- [2] A.G. Constantinides, "Spectral Transformations for Digital Filters," Proc. Inst. Elec. Eng., Vol. 117, pp. 1585-1590, August 1970
- [3] K. Steiglitz, "Computer-Aided Design of Recursive Digital Filter," IEEE. Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-18, pp. 123-129, June 1970
- [4] P. Thajchayapong and P.J.W. Rayner, "Design of Lowpass Recursive Digital Filters with Linear Phase Using Linear Programming," University of Cambridge Internal Report, 1973
- [5] P. Thajchayapong and P.J.W. Rayner, "Recursive Digital Filter Design by Linear Programming," IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-21, pp. 107-117, 1973
- [6] P. Thajchayapong and P.J.W. Rayner, "Design of Recursive Digital Filter Approximating to Arbitrary Prescribed Magnitude Response," Electron. Lett., Vol. 10, pp. 159-161, 1974
- [7] J.P. Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, pp. 659-664, Nov. 1971
- [8] J.P. Thiran, "Equal-ripple delay recursive digital filters," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, pp. 664-669, Nov. 1971
- [9] A. Fettweis, "A simple design of maximally flat delay digital filters," IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-20, pp. 112-114, June 1972
- [10] A.G. Dezky, "Recursive digital filters having equiripple group delay," IEEE Trans. Circuit and Syst., Vol. CAS-21, pp. 131-134, January 1974
- [11] P. Thajchayapong and P. Lomtong, "A maximally flat group delay recursive digital filters with Chebyshev stopband attenuation," Proc. IEEE, Vol. 66,

No. 2, pp. 255-257, February 1978

- [12] P. Thajchayapong and P. Lomtong, "A recursive Digital Filters with Maximally Flat Linear Phase at an Arbitrary Specified Frequency," Proc. IEEE, Vol. 66, pp. 594-596, May 1978
- [13] P. Thajchayapong and P. Lomtong, "A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filters with Controllable Magnitude," IEEE Trans. Circuit Syst., Vol. CAS-25, No. 1, pp. 51-53, January 1978
- [14] A. Budak, "A maximally flat phase and controllable magnitude approximation," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-12, pp. 279, June 1965
- [15] A.H. Marshak, D.E. Johnson, and J.R. Johnson, "A Bessel rational filter," IEEE Trans. Circuit Syst., Vol. CAS-21, pp. 797-799, Nov. 1974
- [16] E. Isaacson and H.B. Keller, Analysis of Numerical Method, New York, John Wiley & Sons, Inc. 1966, pp. 328-329
- [17] P. Thajchayapong and F. Cheevasuvit, "A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filter with Improved Passband Magnitude Response," Proc. IEEE, Vol. 67, No. 12, pp. 1663-1665, Dec. 1979

ภาคผนวกที่ ๑

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ ๔

```

10 REM PROGRAMME GENERATE COEFFICIENTS FOR " AN ALTERNATIVE SIMULTANEOUS MAXIMALLY.
15 REM FLAT APPROXIMATION FOR A LOW PASS RECURSIVE DIGITAL FILTER "
20 REM A(*) IS NUMERATOR COEFFICIENTS
25 REM B(*) IS DENOMINATOR COEFFICIENTS
30 OPTION BASE 1
35 DIM A(20),B(20)
40 INPUT M,N
45 PRINT "M=";M,"N=";N
50 T0=5
60 M1=1
70 N1=1
80 N2=N+1
90 M2=M+1
100 IF N>0 THEN 120
110 GOTO 150
120 FOR I=1 TO N
130 N1=N1*I
140 NEXT I
150 IF M>0 THEN 190
160 B1=1
170 P=T0
180 GOTO 420
190 FOR L=1 TO M
200 M1=M1*L
210 NEXT L
220 FOR K=1 TO M
230 T=1
240 P=1
250 F=1
260 Q=1
270 FOR I=1 TO M2
280 P=P*(T0-I+1)
290 IF M-K>=I THEN 330
300 F=F
310 Q=Q
320 GOTO 350
330 F=F*(M-I+1)
340 Q=Q*(M-K-I+1)
350 NEXT I
360 B1=F/Q
370 FOR L=1 TO N2
380 T=T*(T0+L-K-1)
390 NEXT L
400 A(K)=P*(-1)^(M-K)*B1/(M1*T)*N1
410 NEXT K
420 T=1
430 FOR L=1 TO N2

```

```

440 T=T*(T0+L-1)
450 NEXT L
460 A(0)=N1*(-1)^M*P/(M1*T)
470 IF N=0 THEN 650
480 FOR L=1 TO N
490 Q1=1
500 P1=1
510 F1=1
520 FOR I=1 TO M2
530 P1=P1*(T0-I+1)/(T0+L+1-I)
540 NEXT I
550 FOR I=1 TO N2
560 IF N-L>=I THEN 600
570 F1=F1
580 Q1=Q1
590 GOTO 620
600 F1=F1*(N-I+1)
610 Q1=Q1*(N-L-I+1)
620 NEXT I
630 B(L)=P1*(-1)^L*F1/Q1
640 NEXT L
650 B(0)=1
660 FOR J=0 TO M
670 PRINT "A(";J;")=";A(J)
680 NEXT J
690 FOR C=0 TO N
700 PRINT "B(";C;")=";B(C)
710 NEXT C
720 END

```



ภาคผนวกที่ ๒

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ ๔

กรณีที่ใช้สูตรสำเร็จ

```

10 OPTION BASE 0
20 REM A MAXIMALLY FLAT GROUP DELAY LOW PASS RECURSIVE DIGITAL FILTER WITH
30 REM IMPROVED PASSBAND MAGNITUDE RESPONSE
40 REM B(*) IS THE COEFFICIENT FROM THIRAN'S PAPER
50 REM A(*) IS THE COEFFICIENT OF MIRROR IMAGE POLYNOMIAL
60 DIM A(20),B(20)
70 PRINT "M=____";"N=____";"DELAY=____"
80 INPUT N1,N,T
90 PRINTER IS 16
100 PRINT "M=";M1,"N=";N,"DELAY=";T
110 M=M1/2
120 B(0)=1
130 FOR K=1 TO N
140 Q=1
150 F=1
160 P=1
170 L=N+1
180 FOR I=1 TO L
190 P=P*(2*T+K+I-1)
200 IF N-K>=1 THEN 240
210 F=F
220 Q=Q
230 GOTO 260
240 F=F*(N-I+1)
250 Q=Q*(N-K-I+1)
260 NEXT I
270 B(K)=(-1)^K*P*F/Q
280 PRINT "B(";K;")=";B(K)
290 NEXT K
300 F2=0
310 FOR L=0 TO N
320 F1=1
330 FOR I=1 TO M
340 F1=F1*(I+L+T)*(I-L-T)/(I*I)
350 NEXT I
360 F2=F2+F1*B(L)
370 NEXT L
380 A(0)=F2
390 FOR K=1 TO M
400 E3=0
410 FOR L=0 TO N
420 E1=1
430 E11=1
440 FOR I=0 TO K-1
450 E1=E1*(T+L+I)*(T+L-I)

```

```

46Ø E11=E11*(K-I)*(K+I)
47Ø NEXT I
48Ø E2=1
49Ø E22=1
50Ø FOR J=K+1 TO M
51Ø E2=E2*(J+L+T)*(J-L-T)
52Ø E22=E22*(J-K)*(J+K)
53Ø NEXT J
54Ø E3=E3+E1*B(L)*E2/(E11*E22)
55Ø NEXT L
56Ø A(K)=E3
57Ø NEXT K
58Ø FOR N1=Ø TO M
59Ø PRINT "A(";N1;")=";A(N1)
60Ø NEXT N1
61Ø FOR N2=Ø TO N
62Ø PRINT "B(";N2;")=";B(N2)
63Ø NEXT N2
64Ø END

```



กรณีศึกษาคำนวณค่าสัมประสิทธิ์จากสมการ(5-13)

```

10 OPTION BASE 1
20 REM " A MAXIMALLY FLAT GROUP DELAY LOW PASS RECURSIVE DIGITAL FILTER WITH
30 REM IMPROVED PASSBAND MAGNITUDE RESPONSE "
40 REM Z(*) IS THE COEFFICIENT FROM THIRAN'S PAPER
50 REM B(*) IS THE COEFFICIENT OF IMAGE POLYNOMIAL
60 DIM C(20,20),B(20),F(300),G(20),H(20),Z(0:20),X(20)
65 T=10
70 N=10
80 M=8
90 M1=1+M/2
100 FOR K=1 TO N
110 Q=1
120 F=1
130 P=1
140 L=N+1
150 FOR I=1 TO L
160 P=P*(2*T+I-1)/(2*T+K+I-1)
170 IF N-K>=I THEN 210
180 F=F
190 Q=Q
200 GOTO 230
210 F=F*(N-I+1)
220 Q=Q*(N-K-I+1)
230 NEXT I
240 Z(K)=(-1)^K*P*F/Q
250 NEXT K
260 Z(0)=1
270 FOR I=0 TO N
280 PRINT "Z(";I;")=";Z(I)
290 NEXT I
300 T3=T+M1/2
310 PRINT "M=";M,"N=";N,"DELAY=";T
320 FOR I=1 TO M1
330 C(1,I)=1
340 REDIM C(M1,M1)
350 NEXT I
360 FOR I=2 TO M1
370 FOR J=1 TO M1
380 C(I,J)=(J-1)^(2*(I-1))
390 REDIM C(M1,M1)
400 NEXT J
410 NEXT I
420 FOR I=1 TO M1
430 A=0
440 FOR J=0 TO N
450 A=A+(J+T)^(2*(I-1))*Z(J)
460 NEXT J
470 B(I)=A
480 H(I)=A
490 REDIM B(M1),H(M1)

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

500 NEXT I
510 FOR I=1 TO M1
520 FOR J=1 TO M1
530 L5=M1*(I-1)+J
540 F(L5)=C(J,I)
550 NEXT J
560 NEXT I
570 CALL Simq(F(*),B(*),M1,Ks)      **สับรู่ทีน( Subroutine )ของ IBM
580 MAT G=C*B
590 MAT X=H_G
600 GOSUB Print
610 END
620 Print:
630 PRINT "HERE IS THE SOLUTION";TAB(40);"HERE IS THE ERROR"
640 FOR I=1 TO M1
650 PRINT SPA(5);"B("&VAL$(I)&") = "&VAL$(B(I));TAB(45);VAL$(X(I))
660 NEXT I
670 PRINT LIN(2)
680 RETURN

```



ผลงานวิจัยที่พิมพ์ในวารสารนานาชาติ

- 1 P. Thajchayapong, F. Cheevasuvit and P. Karnchanawadee, "An Alternative Simultaneous Maximally Flat Approximation for a Low-Pass Recursive Digital Filter, " Proc. IEEE, Vol. 67, No. 3, pp. 429-430, March 1979
- 2 P. Thajchayapong, P. Karnchanawadee and F. Cheevasuvit, " A Recursive Digital Filter with Simultaneous Maximally Flat Magnitude and Group Delay at an arbitrary Specified Frequency, " Proc. IEEE, Vol. 67, No. 5, pp. 871-873, May 1979



approach to the design of a recursive digital filter with simultaneous approximation to both magnitude and phase. Although the same Taylor norm is used, this described technique is different from the previous approach [4] in the sense that it employs a power series expansion around $\omega = 0$ in the z -plane. It gives an alternative insight into the problem for the designers who are more familiar with the z -plane than the Richards' λ -plane. The filter transfer functions are obtained explicitly in closed forms.

I. INTRODUCTION

Design techniques via Richards' variables in the λ -plane for a digital filter with simultaneous flat magnitude and delay are known [4]. This correspondence offers an alternative approach to obtain the closed form transfer functions for the equal emphasis on flat magnitude and delay. Although the same Taylor norm is used, the mathematical procedure is rather different in the sense that it employs a power series expansion around $\omega = 0$ directly in the z -plane. It gives an alternative insight into the design techniques for the digital filter designers who have not yet familiarized themselves with the Richards' variables. It may also be regarded as a Padé approximation of $\exp(-j\omega\tau)$ for digital filters in comparison to the existing analog version [5].

II. THEORY

Let

$$H(z^{-1}) = \frac{P_{m,n}(z^{-1})}{Q_{m,n}(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}} = (m, n) \quad (1)$$

be the transfer function of a digital filter which is ideally required to exhibit a unity magnitude and also a linear phase of slope τ seconds. This requirement is written mathematically as

$$H(z^{-1})|_{z=\exp(j\omega)} = \exp(-j\omega\tau) \quad (2)$$

The sampling period is understood to be normalized to unity. Expression (2) can now be written explicitly as

$$\frac{\sum_{i=0}^m a_i \cos i\omega - j \sum_{i=0}^m a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^n b_i \cos i\omega - j \sum_{i=0}^n b_i \sin i\omega} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$$

i.e.,

$$\left\{ \sum_{i=0}^m a_i \cos i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \cos (i + \tau)\omega \right\} - j \left\{ \sum_{i=0}^m a_i \sin i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \sin (i + \tau)\omega \right\} = 0 \quad (3)$$

from which the real part and the imaginary part can be expanded into power series as

$$\sum_{i=0}^m a_i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (i\omega)^{2k}}{2k!} \right] - \sum_{i=0}^n b_i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \{(i + \tau)\omega\}^{2k}}{2k!} \right] = 0 \quad (4a)$$

and

$$\sum_{i=0}^m a_i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (i\omega)^{2k+1}}{(2k + 1)!} \right] - \sum_{i=0}^n b_i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \{(i + \tau)\omega\}^{2k+1}}{(2k + 1)!} \right] = 0 \quad (4b)$$

Without loss of generality, it is assumed that $b_0 = 1$. Hence, for a maximally flat approximation, the coefficients of $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots$,

An Alternative Simultaneous Maximally Flat Approximation for a Low-Pass Recursive Digital Filter

P. THAJCHAYAPONG, F. CHEEVASUVIT, AND P. KARNCHANAWADEE

Abstract—Digital filters with either maximally flat magnitude or maximally flat group delay are known [1]–[3]. This paper offers an

Manuscript received September 26, 1978.

The authors are with the Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology, Ladkrabang, Bangkok, Thailand.

ω^{m+n} must be set to zero, i.e.,

$$\sum_{i=0}^m (i)^{2k} a_i - \sum_{i=1}^n (i + \tau)^{2k} b_i = \tau^{2k} \quad (5a)$$

and

$$\sum_{i=0}^m (i)^{2k+1} a_i - \sum_{i=0}^n (i + \tau)^{2k+1} b_i = \tau^{2k+1} \quad (5b)$$

where $k = 0, 1, 2, \dots, (m + n - 1)/2$.

Equations (5a) and (5b) may be written in a matrix form as

$$Ax = c \quad (6)$$

where

$$A \equiv \begin{bmatrix} \overbrace{1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1}^{m+1} & \overbrace{-1 \ \dots \ -1}^n \\ 0 \ 1 \ 2 \ \dots \ m & -(1+\tau) \ \dots \ -(n+\tau) \\ 0 \ 1^2 \ 2^2 \ \dots \ m^2 & -(1+\tau)^2 \ \dots \ -(n+\tau)^2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \ 1^{m+n} \ 2^{m+n} \ \dots \ m^{m+n} & -(1+\tau)^{m+n} \ \dots \ (n+\tau)^{m+n} \end{bmatrix} \quad m+n+1$$

$$x \equiv \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad m+n+1$$

and

$$c \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \tau^2 \\ \vdots \\ \tau^{m+n} \end{bmatrix} \quad m+n+1$$

A is recognized as a Vandermonde matrix; hence, to determine a_i 's and b_i 's, the following determinants [6, pp. 328-329] are defined.

$$\Delta = |A| = (-1)^n \begin{bmatrix} \prod_{m>i>j>0} (i-j) \\ \prod_{n>i>j>1} (i-j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \prod_{j=0}^m \prod_{i=1}^n (i+\tau-j) \\ \prod_{n>i>j>1} (i-j) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\Delta_k^{(1)} = (-1)^n \begin{bmatrix} \prod_{m>i>j>0} (i-j) \\ \prod_{l,j \neq k} (i-j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \prod_{m>i>k} (i-\tau) \\ \prod_{j=0}^m \prod_{i=1}^n (i+\tau-j) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta_l^{(2)} = (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} \prod_{m>i>j>0} (i-j) \\ \prod_{j=0}^m \prod_{i=1}^n (i+\tau-j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \prod_{n>i>j>1} (i-j) \\ \prod_{i,j \neq l} (i-j) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \prod_{j=0}^m (\tau-j) \\ \prod_{n>i>j>1} (i-j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \prod_{n>i>l} (i) \\ \prod_{l>j>1} (-j) \end{bmatrix}, \quad \text{where } 1 < l < n.$$

Using Cramer's rule, a_k and b_l can be written as

$$a_k = \frac{\Delta_k^{(1)}}{\Delta}$$

$$b_l = \frac{\Delta_l^{(2)}}{\Delta} = \frac{\prod_{m>i>k} (i-\tau) \prod_{k>j>0} (\tau-j) \prod_{i=1}^n (i)}{k! \prod_{m>i>k} (i-k) \prod_{i=1}^n (i+\tau-k)}, \quad 0 < k < m \quad (10a)$$

$$b_l = \frac{\Delta_l^{(2)}}{\Delta} = \frac{\prod_{j=0}^m (\tau-j) \prod_{n>i>l} (i) \prod_{l>j>1} (-j)}{\prod_{j=0}^m (l+\tau-j) (l-1)! \prod_{n>i>l} (i-l)}, \quad 1 < l < n. \quad (10b)$$

After manipulating (10a) and (10b), the transfer function can be written in a general form as

$$H(z^{-1}) = \frac{P_{m,n}(z^{-1})}{Q_{m,n}(z^{-1})} = (m, n) \frac{n! \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \left(\prod_{i=0}^m (\tau-i) / \prod_{i=0}^n (\tau+i-k) \right) z^{-k}}{\sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} \left(\prod_{i=0}^m (\tau-i) / \prod_{i=0}^m (\tau+l-i) \right) z^{-l}} \quad (11)$$

which coincides with the previous result [4, eq. (10)].

III. CONCLUSIONS

A design technique has been described whereby a digital filter with both magnitude and phase approximating the ideal low-pass characteristics in a maximally flat sense can be obtained. The transfer function of any order can be expressed explicitly in closed forms. The technique is useful for the design of a low pass and also an all pass with constant group delay. It may be regarded as a discrete version of a Padé approximation of $\exp(-j\omega\tau)$ in comparison to the available analog design technique [5].

REFERENCES

- [1] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.
- [2] J. P. Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-18, pp. 659-664, Nov. 1971.
- [3] A. Fettweis, "A simple design of maximally flat delay digital filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-20, pp. 112-114, June 1972.
- [4] C. J. Wellekens and A. N. Godard, "Simultaneous flat approximations of the ideal low-pass attenuation and delay for recursive digital, distributed, and lumped filters," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol. CAS-24, pp. 221-230, May 1977.
- [5] K. L. Su, *Time Domain Synthesis of Linear Networks*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [6] E. Isaacson and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*. New York: Wiley, 1966.

scribed group delay in seconds. The sampling period is understood to be normalized to 1 s. Hence, from (2),

$$\frac{\sum_{i=0}^m a_i \cos i\omega - j \sum_{i=0}^m a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^n b_i \cos i\omega - j \sum_{i=0}^n b_i \sin i\omega} = \cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) - j \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) \quad (3)$$

or

$$\left[\sum_{i=0}^m a_i \cos i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos i\omega \cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) - \sin i\omega \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) \} - j \left[\sum_{i=0}^m a_i \sin i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \{ \sin i\omega \cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) + \cos i\omega \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) \} \right] \right] = 0. \quad (4)$$

Let $x \equiv \omega - \omega_0$. Then, after some manipulations, we can write the real and imaginary parts of (4) separately in terms of the variable x as

$$\sum_{i=0}^m a_i (\cos ix \cos i\omega_0 - \sin ix \sin i\omega_0) - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos(i+\tau)x \cos(i\omega_0 + \beta_0) - \sin(i+\tau)x \sin(i\omega_0 + \beta_0) \} = 0 \quad (5a)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (\sin ix \cos i\omega_0 + \cos ix \sin i\omega_0) - \sum_{i=0}^n \{ b_i \sin(i+\tau)x \cos(i\omega_0 + \beta_0) + \cos(i+\tau)x \sin(i\omega_0 + \beta_0) \} = 0. \quad (5b)$$

By expanding into the power series in x , (5a) and (5b) become

$$\sum_{i=0}^m a_i \left\{ \cos i\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k}}{2k!} - \sin i\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\} - \sum_{i=0}^n b_i \left\{ \cos(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k}}{2k!} - \sin(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\} = 0 \quad (6a)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i \left\{ \cos i\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin i\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k}}{2k!} \right\} - \sum_{i=0}^n b_i \left\{ \cos(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k}}{2k!} \right\} = 0. \quad (6b)$$

For a maximally flat approximation, it is necessary that the coefficients of x^0, x^1, x^2, \dots must vanish. Also without loss of generality, we may assume $b_0 = 1$. These lead to

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k} \cos i\omega_0 - \sum_{i=1}^n b_i (i+\tau)^{2k} \cos(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k} \cos \beta_0 \quad (7a)$$

A Recursive Digital Filter with Simultaneous Maximally Flat Magnitude and Group Delay at an Arbitrary Specified Frequency

P. THAJCHAYAPONG, P. KARNCHANAWADEE, AND F. CHEEVASUVIT

Abstract—A design technique for a recursive digital filter with simultaneously maximally flat magnitude and group delay at an arbitrary specified frequency is presented. It employs the power series expansion to formulate a set of simultaneous linear equations which can be solved with a standard computational algorithm.

I. INTRODUCTION

Design techniques for a low-pass recursive digital filter with maximally flat group delay are known [1], [2]; however, due to the nonlinearity in frequency transformations [3], a generalized design method [4] has to be developed to obtain, for example, a bandpass filter with maximally flat group delay. The passband magnitude responses of these bandpass filters, however, do not give a close approximation to the desired unity magnitude. A design technique which yields a simultaneous maximally flat approximation on both magnitude and group delay is described.

II. DESIGN THEORY

Let

$$H(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} / \sum_{i=0}^n b_i z^{-i} \quad (1)$$

be the transfer function of a recursive digital filter whose complex frequency response is required to approximate $\exp(-j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\})$, i.e., ideally

$$H(z)|_{z=\exp(j\omega)} = \exp(-j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}) \quad (2)$$

where $\omega_0 \equiv$ an arbitrary specified frequency in rad/s around which the approximation is made, $\beta_0 \equiv$ a prescribed phase at $\omega = \omega_0$, $\tau \equiv$ a pre-

Manuscript received November 8, 1978; revised December 21, 1978. The authors are with the Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology, Ladkrabang Campus, Ladkrabang, Bangkok, Thailand.

$$\sum_{i=0}^m a_i(i)^{2k} \sin i\omega_0 - \sum_{i=1}^n b_i(i+\tau)^{2k} \sin(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k} \sin \beta_0 \tag{7b}$$

$$\sum_{i=0}^m a_i(i)^{2k+1} \cos i\omega_0 - \sum_{i=1}^n b_i(i+\tau)^{2k+1} \cos(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k+1} \cos \beta_0 \tag{7c}$$

$$\sum_{i=0}^m a_i(i)^{2k+1} \sin i\omega_0 - \sum_{i=1}^n b_i(i+\tau)^{2k+1} \sin(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k+1} \sin \beta_0. \tag{7d}$$

Now by letting $k = 0, 1, 2, \dots$, we may write a set of simultaneous linear equations with the filter coefficients as the unknowns as

$$Ax = c \tag{8}$$

where

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \dots & \cos m\omega_0 & | & -\cos(\omega_0 + \beta_0) & -\cos(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -\cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 & \sin \omega_0 & \sin 2\omega_0 & \dots & \sin m\omega_0 & | & -\sin(\omega_0 + \beta_0) & -\sin(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -\sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 & \cos \omega_0 & 2 \cos 2\omega_0 & \dots & m \cos m\omega_0 & | & -(1+\tau) \cos(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau) \cos(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau) \cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 & \sin \omega_0 & 2 \sin 2\omega_0 & \dots & m \sin m\omega_0 & | & -(1+\tau) \sin(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau) \sin(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau) \sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 & \cos \omega_0 & 2^2 \cos 2\omega_0 & \dots & m^2 \cos m\omega_0 & | & -(1+\tau)^2 \cos(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau)^2 \cos(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau)^2 \cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 & \sin \omega_0 & 2^2 \sin 2\omega_0 & \dots & m^2 \sin m\omega_0 & | & -(1+\tau)^2 \sin(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau)^2 \sin(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau)^2 \sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 & \cos \omega_0 & 2^3 \cos 2\omega_0 & \dots & m^3 \cos m\omega_0 & | & -(1+\tau)^3 \cos(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau)^3 \cos(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau)^3 \cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 & \sin \omega_0 & 2^3 \sin 2\omega_0 & \dots & m^3 \sin m\omega_0 & | & -(1+\tau)^3 \sin(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau)^3 \sin(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau)^3 \sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$x = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T$$

$$c = [\cos \beta_0 \ \sin \beta_0 \ \tau \cos \beta_0 \ \tau \sin \beta_0 \ \tau^2 \cos \beta_0 \ \tau^2 \sin \beta_0 \ \tau^3 \cos \beta_0 \ \tau^3 \sin \beta_0 \ \dots]^T$$

Although the elements in the last row of A are not expressed explicitly, they can always be generated, using (7a)-(7d) in accordance with value of m and n , to give a square matrix of dimension $(m+n+1) \times (m+n+1)$. The last element of c is also generated accordingly.

III. NUMERICAL RESULTS

To demonstrate the design technique, some results are presented. Fig. 1 illustrates the loss and group delay responses for the case of $\omega_0 = 0.5 \pi$ rad/s., $\beta_0 = 0$ rad and $\tau = 10$ s. It can be seen that for m closer to n , the responses become smoother. Fig. 2, therefore, illustrates the cases of $n - m = 2$. Also Fig. 3 shows the responses for various τ with $m = 4$ and $n = 6$.

IV. CONCLUDING REMARKS

A design technique which yields a recursive digital filter with a simultaneous maximally flat approximation on both magnitude and group delay at any prescribed frequency has been described. It employs the power series expansion to give a set of simultaneous linear equations, which can be solved by a computational algorithm such as Gauss-Jordan elimination. The responses show large deviation near the band-edges when the transfer function has the degree of numerator poly-

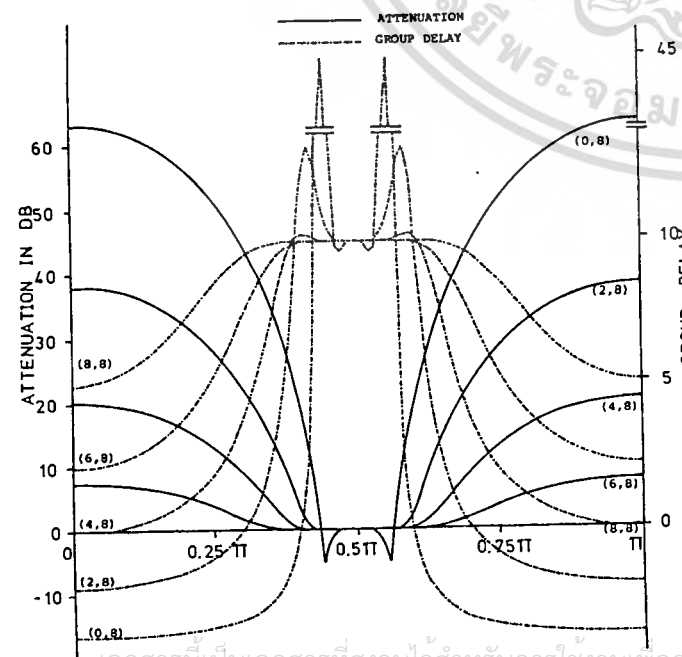


Fig. 1. Attenuation and group delay responses for $\tau = 10$, $n = 8$, and $m = 0, 1, \dots, 8$.

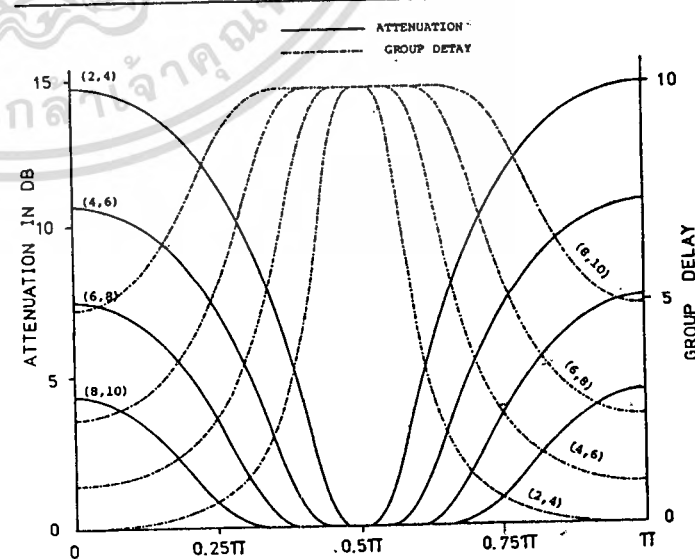


Fig. 2. Attenuation and group delay responses for $\tau = 10$, and $n - m = 2$.

nomial much lower than that of the denominator polynomial. However, they render the useful smooth responses when the degrees are closer. Finally, it should be mentioned that although the case of symmetrical

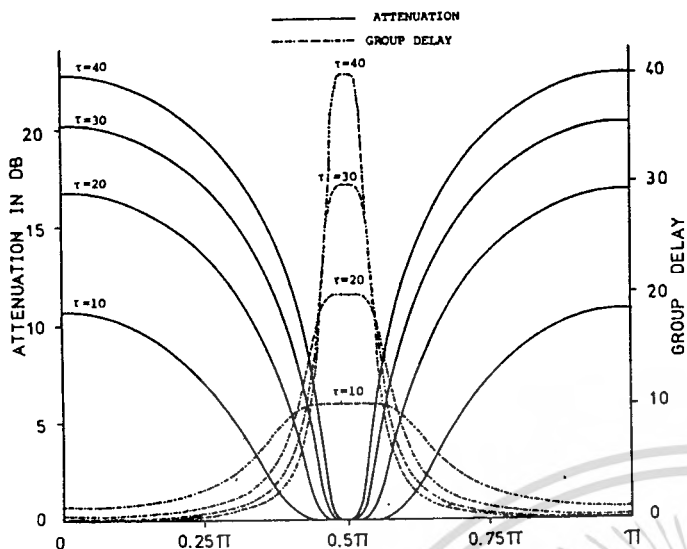


Fig. 3. Attenuation and group delay responses for $\tau = 10, 20, 30, 40$, $n = 6$, and $m = 4$.

bandpasses are illustrated, the technique is applicable for the approximation around any frequency including the low pass and high pass.

REFERENCES

- [1] J. P. Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay," *IEEE Trans. Circuits Theory*, vol. CT-18, pp. 659-664, Nov. 1971.
- [2] A. Fettweis, "A simple design of maximally flat delay digital filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-20, pp. 112-114, June 1972.
- [3] See for example R. E. Bognor and A. G. Constantinides, *Introduction to Digital Filtering*. New York: Wiley, 1975.
- [4] P. Thajchayapong and P. Lomtong, "A recursive digital filter with maximally flat linear phase at an arbitrary specified frequency," *Proc. IEEE*, vol. 66, pp. 594-596, May 1978.

