

การออกแบบผลตอบสนองขนาดและกรุปดีเลย์

ของ

วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ

THE MAGNITUDE AND GROUP DELAY DESIGN OF RECURSIVE DIGITAL FILTERS



การศึกษา 2522

๑๗.

๗๖๗

๕๕๕

๐๐๘๖๗

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	iv
บทคัดย่อ	v
Abstract	vi
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ปัญหาของวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ	1
1.2 เทคนิคซีเอ็ม	1
บทที่ 2 ภูมิหลังของวงจรกรองความถี่ดิจิทัล	3
2.1 บทนำ	3
2.1.1 สัญญาณที่มีความต่อเนื่องทางแกนเวลา	3
2.1.2 สัญญาณที่ไม่มีความต่อเนื่องทางแกนเวลา	3
2.2 ระบบสัญญาณที่มีความต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลา	3
2.3 Z-ทรานส์ฟอร์ม	6
2.4 คุณสมบัติที่สำคัญของZ-ทรานส์ฟอร์ม	7
2.4.1 ความเป็นเชิงเส้น	7
2.4.2 การเลื่อน	7
2.4.3 คอนโวลูชัน	7
2.5 แนะนำวงจรกรองความถี่ดิจิทัล	8
2.6 รูปแบบของวงจรกรองความถี่ดิจิทัล	9
2.6.1 แบบนอนรีเคอร์ซีฟ	9
2.6.2 แบบรีเคอร์ซีฟ	10
2.7 การพิจารณาเสถียรภาพ	11
2.8 การแปลงทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรกรองความถี่อนาล็อกไปเป็นดิจิทัล	12
2.9 แนวทางการสร้างวงจรกรองความถี่ดิจิทัล	13
2.9.1 วิธีซาร์คแวร์	13
2.9.2 วิธีฮาร์ดแวร์	13

2.10	คณิตศาสตร์ที่ใช้ในการออกแบบของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้	14
2.10.1	การกระจายอนุกรมกำลัง	14
2.10.2	โพลีโนเมียลเงา	14
บทที่ 3	วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีความราบเรียบที่สุด ทั้งผลตอบสนองขนาด และกรุปดีเลย์ ณ ความถี่ใดๆ	16
3.1	บทนำ	16
3.2	การออกแบบ	16
3.3	ผลลัพธ์ตัวอย่าง	20
3.4	สรุป	20
บทที่ 4	วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด พร้อมทั้งปรับปรุงขนาดของผลตอบสนอง : วิธีที่ 1	24
4.1	บทนำ	24
4.2	การออกแบบ	24
4.3	ผลลัพธ์ตัวอย่าง	27
4.4	สรุป	27
บทที่ 5	วงจรรองความถี่ดิจิทัลที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น และสามารถควบคุมขนาดของผลตอบสนอง : วิธีที่ 2	30
5.1	บทนำ	30
5.2	การออกแบบ	30
5.2.1	คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i	31
5.2.2	คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ b_i	34
5.3	ผลลัพธ์ตัวอย่าง	35
5.4	สรุป	35
บทที่ 6	วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดชนิดผ่านความถี่สูงและไม่ผ่านความถี่สูง	38
6.1	บทนำ	38

6.2	การออกแบบ	38
6.2.1	การออกแบบวงจรผ่านความถี่สูง	38
6.2.2	การออกแบบวงจรไม่ผ่านความถี่กลาง	42
6.3	ผลลัพธ์ตัวอย่าง	45
6.4	สรุป	46
บทที่ 7	วงจรกรองความถี่คิจรคูลชนิดผ่านความถี่กลาง แบบไฮน์-โคไซน์ฟังก์ชันขนาดกำลังสองที่มีขนาดราบเรียบที่สุด สามารถปรับความคมปลายทั้งสอง	51
7.1	บทนำ	51
7.2	การออกแบบ	51
7.3	ผลลัพธ์ตัวอย่าง	52
7.4	สรุป	52
บทที่ 8	วงจรกรองความถี่คิจรคูล ขนาดบริเวณย่านความถี่กลางที่ผ่าน มีลักษณะเป็นลูกคลื่นเท่ากันหมด สามารถปรับความคมปลายทั้งสอง	55
8.1	บทนำ	55
8.2	การออกแบบ	55
8.3	ผลลัพธ์ตัวอย่าง	57
8.4	สรุป	57
บทที่ 9	สรุป	60
	บทความและหนังสืออ้างอิง	62
	ภาคผนวกที่ 1 โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 3	64
	ภาคผนวกที่ 2 โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 4	66
	ภาคผนวกที่ 3 โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 5	68
	ภาคผนวกที่ 4 โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 6	70
	ภาคผนวกที่ 5 โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 7	71
	ภาคผนวกที่ 6 โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ 8	73
	ผลงานวิจัยที่พิมพ์ในวารสารนานาชาติ	75

กิติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร.ไพรัช ธัชยพงษ์เป็นอย่างสูง ที่ได้ให้ความกรุณาประสูติ
 ประสาทวิชาแก่ผู้เขียน จนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ขอขอบพระคุณ
 อาจารย์ ดร.โกศล เพ็ชรสุวรรณ ที่ได้ชักนำให้ผู้เขียนได้เรียนต่อปริญญาโท ขอขอบพระคุณ
 อาจารย์ ดร.สิทธิชัย โภไคยอุดม ที่ได้ให้ความสนับสนุนผู้เขียนมาโดยตลอด ขอขอบคุณ
 คุณจรินทร์ บุญสิทธิ์ ที่ได้ช่วยพิมพ์ต้นฉบับ ตลอดจนผู้มีอุปการะคุณทุกท่านที่ได้กล่าวนามมา ณ
 ที่นี้

ฟศกคิ ชิวสววิทย

บทคัดย่อ

การออกแบบวงจรกรองความถี่ดีจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีรูปคลื่นเรียบที่สุด วมคณิศที่ผ่านมามี ออกแบบได้เพียงสำหรับย่านความถี่ต่ำเท่านั้น ถ้าต้องการให้ย่านความถี่อื่นผ่าน จะทำโดยการใช้สูตรแปลงความถี่(Spectral transform)ไม่ได้ เฟส(Phase)ที่ได้จะไม่เป็นเชิงเส้น เพราะสูตรการแปลงความถี่มีความไม่เป็นเชิงเส้นในตัว วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จึงได้แสดงเทคนิคในการออกแบบเฉพาะย่านความถี่ใดความถี่หนึ่ง และให้เฟสบริเวณความถี่นั้นเป็นเชิงเส้น นอกจากนี้ยังสามารถปรับความกว้าง (Bandwidth)ของผลตอบสนองได้ด้วย

การออกแบบวงจรกรองความถี่ดีจิตอลที่ไม่คำนึงถึงผลตอบสนองกรุปที่เลย วิชามาตรฐาน คือ การแปลงจากวงจกรองความถี่อนาลอก โดยใช้สูตรการแปลงไบลิเนียร์(Bilinear transform) แต่ไม่สามารถปรับความคม(Cut-off rate)ของวงจกรองความถี่นั้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็ได้แสดงเทคนิคในการปรับความคมที่ปลายทั้งสองของวงจกรองความถี่ดีจิตอล ชนิดผ่านความถี่กลางไว้

Abstract

This thesis presents two algorithms for the design of recursive digital filters. The first algorithm is the design of maximally flat group delay with improved passband magnitude or controllable bandwidth response. The design can be made at an arbitrarily specified frequency. The second one is the design of bandpass filter with adjustable skirts by using the squared magnitude ~~with~~ with maximally flat or equiripple *passband*.



บทที่ ๑

บทนำ

๑.๑ ปัญหาของวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ

การออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ชนิดผ่านความถี่ต่ำ ของ [7,8] จะมีรूप-
 ติเลย์ราบเรียบที่สุดเพียงอย่างเดียวและไม่สามารถควบคุมความกว้าง (Bandwidth) ของผลตอบสนองขนาด
 หรือรूपติเลย์ อีกทั้งในกรณีที่ต้องการแปลงให้เป็นวงจรรองความถี่ชนิดผ่านความถี่กลาง หรือผ่านความถี่สูง-
 เฟสที่ได้จะไม่เป็นเชิงเส้น ความเป็นเชิงเส้นของเฟสมีความสำคัญมาก สำหรับการโปรเซส (Process)
 สัญญาณภาพ ถ้าเฟสไม่เป็นเชิงเส้นแล้ว จะทำให้ได้ภาพที่ผิดเพี้ยนไปจากภาพจริง

ปัญหาดังกล่าว จึงเป็นจุดริเริ่มสำหรับการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ
 ชนิดย่านความถี่ใดผ่านก็ได้ โดยบางเทคนิคจะให้ทั้งขนาดและรूपติเลย์ราบเรียบที่สุด และบางเทคนิค
 จะสามารถควบคุมความกว้างของขนาดหรือรूपติเลย์

ในการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ชนิดผ่านความถี่กลางสำหรับใช้กับ
 งานบางชนิด อาจไม่จำเป็นต้องให้เฟสเป็นเชิงเส้นก็ได้ แต่ต้องการให้สามารถปรับขนาดความคมที่
 ปลายทั้งสอง และมีโอกาสเลือกใช้อัตราการลดทอนสัญญาณ (Attenuation rate) มากที่สุด นี้ก็เป็น
 ปัญหาอีกประเภทหนึ่งที่ทำให้เกิดเทคนิคในการออกแบบใหม่ ซึ่งสามารถปรับขนาดความคมที่ปลายทั้งสอง
 และให้บริเวณย่านความถี่ผ่านเป็นแบบราบเรียบที่สุด หรือจะเป็นแบบยอดคัสซีนเท่ากันหมด

๑.๒ เทคนิคริเริ่ม

เทคนิคใหม่ที่ใช้ในการขจัดปัญหาที่กล่าวไว้ในหัวข้อ ๑.๑ มีดังต่อไปนี้คือ

๑.๒.๑ วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีความราบเรียบที่สุด ทั้งผลตอบสนองขนาดและ
 รूपติเลย์ ณ ความถี่ใด ๆ (A Recursive Digital Filter with Simultaneous Maximally
 Flat Magnitude and group delay at an Arbitrary Specified Frequency)

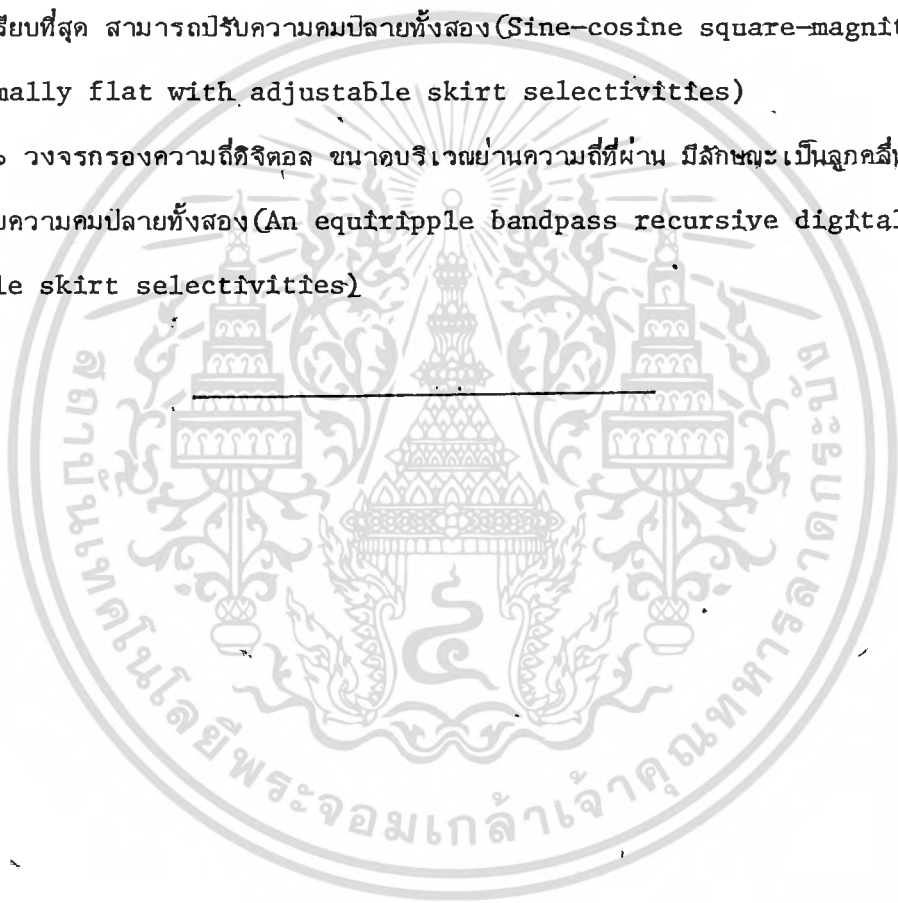
๑.๒.๒ วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีรूपติเลย์ราบเรียบที่สุด พร้อมกับปรับปรุงขนาด
 ผลตอบสนอง (A maximally flat group delay recursive digital filter with improved
 passband magnitude response)

๑.๒.๓ วงจรกรองความถี่ดิจิทัลที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น และสามารถควบคุมขนาดของผลตอบสนอง
(Linear phase bandpass recursive digital filter with controllable magnitude)

๑.๒.๔ วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีจ็ฟต์เลย์ราบเรียบที่สุด ชนิดผ่านความถี่สูงและ
ไม่ผ่านความถี่กลาง (Filter coefficients of a highpass and a band-elimination recursive
digital filter with maximally flat group delay)

๑.๒.๕ วงจรกรองความถี่ดิจิทัลชนิดผ่านความถี่กลาง แบบไซน์-โคไซน์ฟังก์ชันขนาดกำลังสอง ที่มี
ขนาดราบเรียบที่สุด สามารถปรับความคมปลายทั้งสอง (Sine-cosine square-magnitude function
for maximally flat with adjustable skirt selectivities)

๑.๒.๖ วงจรกรองความถี่ดิจิทัล ขนาดบริเวณย่านความถี่ที่ผ่าน มีลักษณะเป็นลูกคลื่นเข้าขั้นหมด,
สามารถปรับความคมปลายทั้งสอง (An equiripple bandpass recursive digital filter with
adjustable skirt selectivities)



บทที่ ๒

ภูมิหลังของวงจรกรองความถี่ดิจิทัล (Background of Digital Filter)

๒.๑ บทนำ (Introduction) [1;2,4,6]

สัญญาณที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน สามารถแบ่งตามอาร์โพรเซส (Process) ในแกนเวลาได้เป็น ๒ แบบคือ

๒.๑.๑ สัญญาณที่มีความต่อเนื่องทางแกนเวลา หรือเรียกว่าสัญญาณอนาล็อก (Analog signal) คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับสัญญาณประเภทนี้คือ สมการอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear differential equation) โดยใช้ลาปลาส์ทรานส์ฟอร์ม (Laplace Transform) เป็นตัวแก้ปัญหา

๒.๑.๒ สัญญาณที่ไม่มีความต่อเนื่องทางแกนเวลา หรือเรียกว่าสัญญาณดิจิทัล (Discrete or Digital signal) คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับสัญญาณประเภทนี้คือ สมการแตกต่างเชิงเส้น (Linear difference equation) มี Z-ทรานส์ฟอร์ม (Z-Transform) เป็นตัวแก้ปัญหา ซึ่งมีบทบาทคล้าย ๆ กับลาปลาส์ทรานส์ฟอร์ม

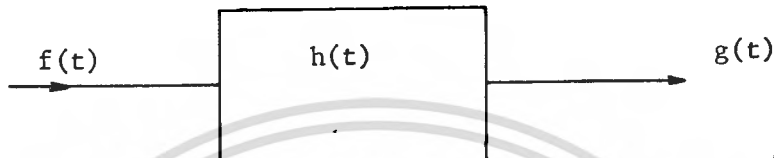
๒.๒ ระบบสัญญาณที่มีความต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่องทางแกนเวลา (Analog and Digital signal and system) [2]

สัญญาณที่มีความต่อเนื่องทางแกนเวลา เขียนอยู่ในรูปฟังก์ชัน (Function) ทางแกนเวลาเป็น $f(t)$ และฟังก์ชันในแกนความถี่เป็น $F(\omega)$ ฟังก์ชันทั้งสองมีความสัมพันธ์ ดังสมการ (๒-๑) และ (๒-๒)

$$F(\omega) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-2)$$

สมการ (๒-๑) คือฟูเรียทรานส์ฟอร์ม (Fourier Transform) ส่วนสมการ (๑-๒) คืออินเวิร์สฟูเรียทรานส์ฟอร์ม (Inverse Fourier Transform) ถ้าพิจารณาถึงผลตอบสนองของระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรกับเวลา (Linear time invariant system) ในรูปที่ ๑



รูปที่ ๑.๑ ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรกับเวลาและมีความต่อเนื่อง
สัญญาณเข้า (input) $f(t)$ และสัญญาณออก (output) $g(t)$ จะมีความสัมพันธ์กันในรูป

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (2-3)$$

$h(t)$ เป็นผลตอบสนองของยูนิตอิมพัลส์ (Unit impulse response) ข้างขวามือของสมการ (๒-๓) คือคอนโวลูชัน (Convolution) ของฟังก์ชัน $f(t)$ และ $h(t)$ เขียนย่อเป็น $f(t) * h(t)$ สมการ (๒-๓) เขียนอยู่ในรูปของแแกนความถี่ได้เป็น

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (2-4)$$

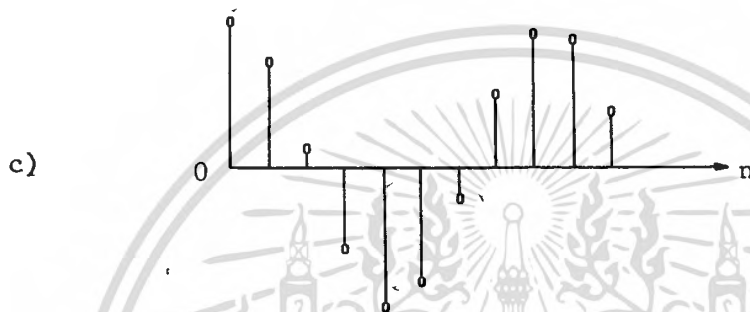
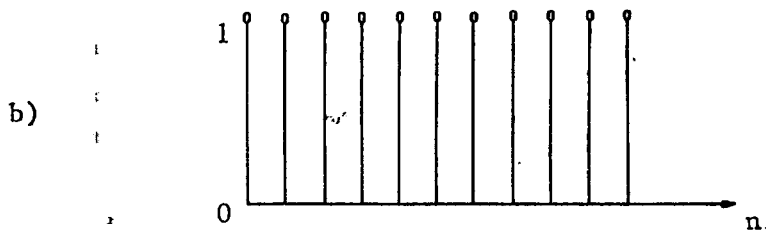
เมื่อ $G(\omega)$, $H(\omega)$ และ $F(\omega)$ เป็นฟูเรียทรานส์ฟอร์มของ $g(t)$, $h(t)$ และ $f(t)$ ตามลำดับ โดยที่ $H(\omega)$ คือทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน (Transfer function) ของระบบ ซึ่งเป็นตัวกรองสัญญาณนั่นเอง

ย้อนกลับมาดูสัญญาณที่ไม่มี ความต่อเนื่องในแกนเวลา สัญญาณประเภทนี้จะประกอบด้วยลำดับของสัญญาณ (Sequence) $\{x(nT)\}$, n เป็นครรชนที่แปรค่าในช่วงใด ๆ T เป็นคาบเวลาที่ใช้ในการแซมปลิง (Sampling) รูปข้างล่างเป็นตัวอย่างของสัญญาณที่ไม่มี ความต่อเนื่องทางแกนเวลา

a)



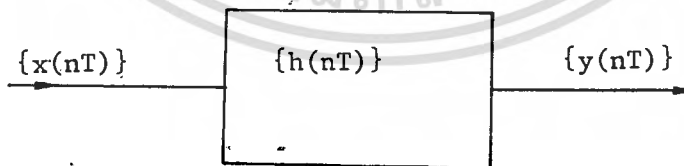
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่รวบรวมไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการรักษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ๒-๒ สัญญาณที่ไม่มีค่าต่อเนื่องทางแกนเวลา (a) ยูนิทอิมพัลส์ (Unit impulse).

(b) ยูนิทสเต็ป (Unit step) (c) สัญญาณลักษณะไซน์ (Sinusoidal signal)

ระบบของเวลาที่ไม่มีความต่อเนื่อง (Discrete time system) จะทำงานได้ต่อเมื่อสัญญาณเข้าเป็นสัญญาณดิจิทัล และให้สัญญาณออกเป็นสัญญาณดิจิทัล



รูปที่ ๒.๓ ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรกับเวลาและไม่มีความต่อเนื่อง

เมื่อ $\{x(nT)\}$ เป็นลำดับของสัญญาณเข้า $\{h(nT)\}$ เป็นผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ และ $\{y(nT)\}$ เป็นลำดับของสัญญาณออก ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับของสัญญาณเข้าและสัญญาณออก เขียนได้เป็น

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{nT} h(mT)x(nT-mT) \quad (2-5)$$

สำหรับระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรกับเวลา สามารถอธิบายได้ทางคณิตศาสตร์ (Linear constant coefficient difference equation) ด้วยสมการ

$$y(nT) = \sum_{k=0}^M a_k x(nT-kT) - \sum_{k=1}^L b_k y(nT-kT) \quad (2.6)$$

a_0, a_1, \dots, a_M กับ b_1, b_2, \dots, b_L เป็นค่าคงที่ที่ใช้ในการกำหนดคุณสมบัติ (Characteristic) ของระบบ สมการที่ (๒-๖) นี้เป็นความสัมพันธ์ในแกนเวลา แต่ก็สามารถหาความสัมพันธ์ในแกนความถี่ได้ด้วย Z-ทรานส์ฟอร์ม (Z-Transform)

๒.๓ Z-ทรานส์ฟอร์ม (Z-Transform) [1, 2, 4, 5, 6]

จากลำดับของสัญญาณ $x(0), x(T), x(2T), \dots, x(nT)$ เป็นสัญญาณที่มีความไม่ต่อเนื่องในแกนเวลาหรือเรียกกันว่าสัญญาณดิจิทัลนั้น สามารถแปลงสัญญาณนี้ให้ไปอยู่ในแกนความถี่เป็น $X(Z)$ Z เป็นตัวแปรคอมเพล็กซ์ (Complex variable) หรือแปลงสัญญาณจากแกนความถี่ไปอยู่ในแกนเวลา ด้วยการใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (๒-๗) หรือ (๒-๘)

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) Z^{-n} \quad (2-7)$$

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z) Z^{k-1} dz \quad (2-8)$$

สมการ (๒-๗) เรียกว่า Z-ทรานส์ฟอร์ม ส่วนสมการ (๒-๘) เรียกว่าอินเวอร์ส Z-ทรานส์ฟอร์ม (Inverse Z-Transform) โดย $Z = \exp(j\omega T)$

ตัวอย่างที่ ๑ หา Z-ทรานส์ฟอร์มของลำดับสัญญาณยูนิตอิมพัลส์ (Unit Impulse sequence)

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$X(Z) = 1$$

ตัวอย่างที่ ๒ หา Z-ทรานส์ฟอร์มของลำดับสัญญาณยูนิตสเตป (Unit step sequence)

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} = \frac{1}{1 - Z^{-1}}$$

๒.๔ คุณสมบัติที่สำคัญของ Z-ทรานส์ฟอร์ม (Elementary Properties of Z-Transform) [1, 2]

๒.๔.๑ ความเป็นเชิงเส้น (Linearity)

$$Z\text{-ทรานส์ฟอร์มของ}\{ax(nT)+by(nT)\} = aX(Z) + bY(Z)$$

๒.๔.๒ การเลื่อน (Shifts)

$$Z\text{-ทรานส์ฟอร์มของ}\{x(nT+kT)\} = Z^k X(Z)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} Z\{x(nT+kT)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT+kT)Z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT+kT)Z^{-(n+k)}Z^k \\ &= X(Z)Z^k \\ &= Z^k X(Z) \end{aligned}$$

๒.๔.๓ คอนโวลูชัน (Convolution)

ให้ $\{w(nT)\}$ เป็นคอนโวลูชันระหว่าง $\{x(nT)\}$ กับ $\{y(nT)\}$ กล่าวคือ

$$w(nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)y(nT-mT)$$

จะได้ว่า $W(Z) = X(Z)Y(Z)$

พิสูจน์

$$W(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nT)Z^{-n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\alpha}^{\alpha} \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} x(mT) y(nT - mT) Z^{-n} \\
&= \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} \sum_{n=-\alpha}^{\alpha} y(nT - mT) Z^{-(n-m)} x(mT) Z^{-m} \\
&= \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} Y(Z) x(mT) Z^{-m} \\
&= Y(Z) \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} x(mT) Z^{-m} \\
&= Y(Z) X(Z) = X(Z) Y(Z)
\end{aligned}$$

๒.๔ แนะนำวงจรกรองความถี่ดิจิทัล (Introduction to digital filter) [1,2]

วงจรกรองความถี่ดิจิทัล สามารถใช้กรองสัญญาณได้ทั้งสัญญาณอนาลอกและสัญญาณดิจิทัล สำหรับสัญญาณดิจิทัลจะผ่านเข้าวงจรกรองความถี่ได้เลย แต่ถ้าเป็นสัญญาณอนาลอก ต้องทำแฉับสิ่งสัญญาณนั้นก่อน รูปที่ ๒.๔ แสดงถึงการนำวงจรกรองความถี่ดิจิทัลกับสัญญาณอนาลอก



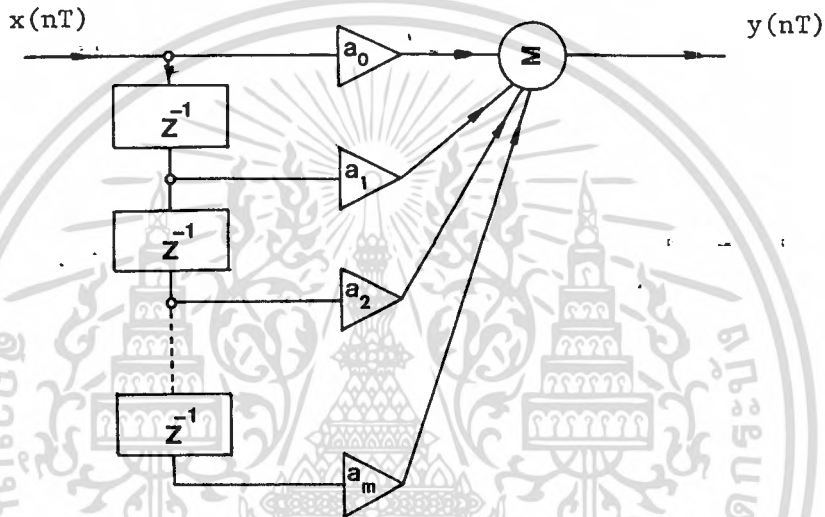
รูปที่ ๒.๔ การนำวงจรกรองความถี่ดิจิทัลกับสัญญาณอนาลอก

ข้อที่สำคัญของวงจรกรองความถี่ดิจิทัลคือ ข้อมูลของสัญญาณดิจิทัลสามารถนำไปเก็บไว้ในหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ และจะนำออกมาใช้เมื่อไรก็ได้ ผิดกับวงจรกรองความถี่อนาลอกเมื่อเวลาผ่านไปข้อมูลของสัญญาณอนาลอกนั้นก็หายไป

๒.๖ รูปแบบของวงจรกรองความถี่ดิจิทัล [1,2]

วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบ่งตามลักษณะการทำงานได้เป็น ๒ รูปแบบคือ

๒.๖.๑ แบบนอนรีเคอร์ซีฟ (Non-Recursive Digital filter) เป็นวงจรกรองความถี่ที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด (Impulse response finite duration) ลักษณะการไหลของสัญญาณในวงจรกรองความถี่ดิจิทัลชนิดนี้ เป็นไปตามรูปที่ ๒.๔



รูปที่ ๒.๔ วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟ

Z^{-1} คือชิฟท์รีจิสเตอร์ (Shift register) ใช้ในการหน่วงสัญญาณให้ช้าลงหนึ่งคาบเวลาของการแซมปลิง หากสัญญาณ $x(nT)$ ผ่านชิฟท์รีจิสเตอร์ไป m ตัว สัญญาณนั้นจะกลายเป็น $x(nT-mT)$ สมการของระบบนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$y(nT) = \sum_{i=0}^m a_i x(nT-iT) \tag{2-9}$$

ทำ Z-ทรานส์ฟอร์มของสมการ (๒-๙)

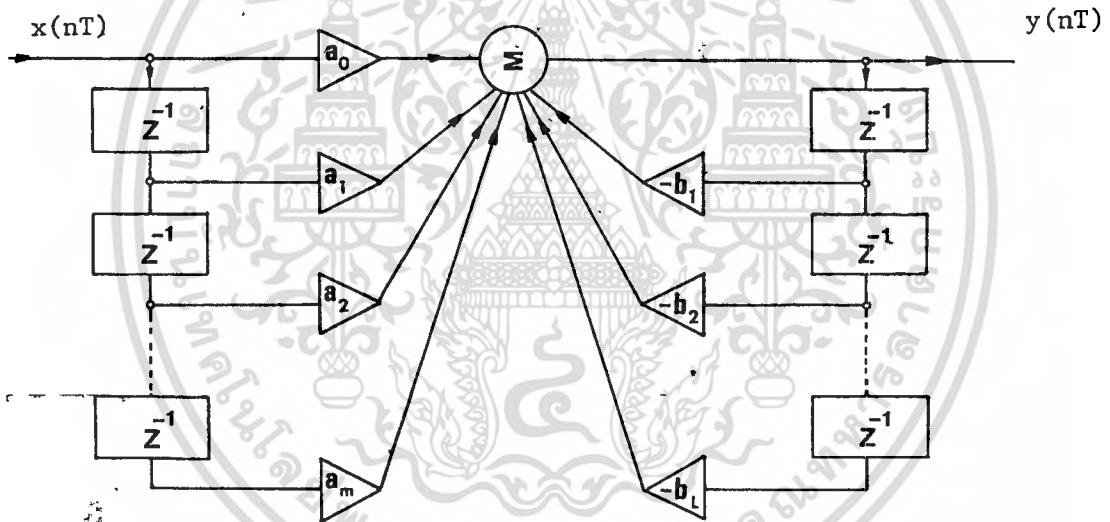
$$Y(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m a_i x(nT-iT) Z^{-n}$$

$$Y(Z) = X(Z) \sum_{i=0}^m a_i Z^{-i}$$

$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = \sum_{i=0}^m a_i Z^{-i} = H(Z) \tag{2-10}$$

$H(Z)$ คือทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบนอนรีเคอร์ซีฟ

๒.๖.๖ แบบรีเคอร์ซีฟ(Recursive digital filter) เป็นวงจรกรองความถี่ที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์อนันต์(Impulse response infinite duration) ลักษณะการโปรเซสสัญญาณอินพุตไปตามรูปที่ ๒.๖



รูปที่ ๒.๖ วงจรกรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ

สมการทางคณิตศาสตร์ของระบบในรูปที่ ๒.๖ คือ

$$y(nT) = \sum_{i=0}^m a_i x(nT-iT) - \sum_{i=1}^L b_i y(nT-iT) \tag{2-11}$$

ทำZ ทรานส์ฟอร์มสมการ (๒-๑๑)

$$Y(Z) = X(Z) \sum_{i=0}^m a_i Z^{-i} - Y(Z) \sum_{i=1}^L b_i Z^{-i}$$

$$\left(1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}\right) Y(Z) = X(Z) \cdot \sum_{i=0}^m a_i z^{-i}$$

$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}} \quad (2-12)$$

$H(Z)$ คือทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟ

ข้อแตกต่างของวงจรรองความถี่ที่ดิจิทัล ดูได้จากลักษณะของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของรีเคอร์ซีฟในสมการ (2-12) เป็นสัดส่วนของโพลีโนเมียล (Rational function) หรือดูจากการไปเรซของสัญญาณ ถ้าเป็นรีเคอร์ซีฟแล้ว จะมีสัญญาณจากบงส่วนถูกป้อนกลับมาเป็นสัญญาณเข้าใหม่

วงจรรองความถี่ทั้งสองแบบต่างก็มีข้อดีข้อเสียอยู่ในตัว กล่าวคือเมื่อพูดถึงคุณสมบัติของผลตอบสนองทางแอมพลิจูดแล้ว ในกรณีอันดับที่ (Order) เดียวกัน วงจรรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟจะให้คัทออฟ (Cutoff) ต่ำกว่าแบบนอนรีเคอร์ซีฟ ดังนั้นถ้าหากต้องการให้คัทออฟคมเท่า ๆ กันแล้วแบบนอนรีเคอร์ซีฟจะ เปลืองชิ้นส่วนในการสร้างมากกว่า แต่ถ้าพูดถึงเสถียรภาพ (Stability) ของวงจรถแล้ว แบบนอนรีเคอร์ซีฟจะ เสถียร (Stable) เสมอ ส่วนแบบรีเคอร์ซีฟจะขึ้นอยู่กับโพล (Pole) ของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน

๒.๗ การพิจารณาเสถียรภาพ (Stability) [1, 2, 5, 6]

วงจรรองความถี่อนาล็อกจะเสถียร เมื่อโพลของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันอยู่ทางซ้ายมือของระนาบ S (S -plane) ส่วนวงจรรองความถี่ดิจิทัลจะเสถียรก็ต่อเมื่อโพลของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันอยู่ในวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับหนึ่ง (Unit circle) ของระนาบ Z (Z -plane) สามารถพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

$$\text{ถ้าสัญญาณเข้าเป็น } x(nT) = \begin{cases} C^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

ทำ Z -ทรานส์ฟอร์มของ $x(nT)$

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} C^n Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (CZ^{-1})^n$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$X(Z)$ จะลดลง (Converge) ามือ $|CZ^{-1}| < 1$

$$\text{ก็จะได้ } X(Z) = \frac{1}{1 - CZ^{-1}}, \quad |CZ^{-1}| < 1$$

$$\text{พิจารณาจาก } |CZ^{-1}| < 1$$

$$\therefore |C| < |Z|$$

แต่ $Z = e^{j\omega T}$ มีขนาดเป็นหนึ่งและเฟสแปรจาก 0 ถึง 2π เรเดียน ดังนั้นวงจรรองความถี่ดิจิตอลจะเสถียร เมื่อโพลของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันอยู่ในวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับหนึ่งในระนาบ Z หรืออีกนัยหนึ่งคือขนาดของโพลจะต้องไม่เกินหนึ่ง

๒.๘ การแปลงทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่อนาล็อก ไปเป็นดิจิตอล (Transformation of Analog filter to Digital filter) [1,2,6]

ในการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิตอลบางครั้ง ถ้าออกแบบทางอนาล็อกก่อนอาจจะง่าย หรือในกรณีที่วงจรรองความถี่อนาล็อก ในคู่มือการออกแบบ มีคุณสมบัติตรงตามวงจรรองความถี่ดิจิตอลที่ต้องการ ก็สามารถแปลงจากทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของอนาล็อกไปเป็นดิจิตอลได้ ด้วยการใช้ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear Transform) หลักการคือแทน S ด้วย $\frac{Z-1}{Z+1}$ ส่วนความสัมพันธ์ของความถี่ที่จุดใด ๆ ระหว่างอนาล็อกกับดิจิตอลก็ทำได้โดย

$$\text{ให้ } S = j\omega_A \quad (\text{หมายถึงอนาล็อก}) \quad (2-13)$$

$$Z = e^{j\omega_D T} \quad (\text{หมายถึงดิจิตอล}) \quad (2-14)$$

$$\text{แต่ } S = \frac{Z-1}{Z+1} \quad (2-15)$$

แทนค่าสมการที่ (๒-๑๔) ด้วย (๒-๑๓) และ (๒-๑๕)

$$j\omega_A = \frac{e^{j\omega_D T} - 1}{e^{j\omega_D T} + 1}$$

$$j\omega_A = \frac{e^{\frac{j\omega_D T}{2}} - e^{-\frac{j\omega_D T}{2}}}{e^{\frac{j\omega_D T}{2}} + e^{-\frac{j\omega_D T}{2}}}$$

$$j\omega_A = j \frac{\sin \frac{\omega_D}{2} T}{\cos \frac{\omega_D}{2} T}$$

$$j\omega_A = j \tan \frac{\omega_D}{2} T$$

$$\omega_A = \tan \frac{\omega_D}{2} T$$

ฉะนั้นถ้ารู้จุดคัทออฟของวงจรรองความถี่อนาลอก ก็คำนวณหาจุดคัทออฟของวงจรรองความถี่ดิจิทัลได้ เสถียรภาพของวงจรรองความถี่ดิจิทัลที่ได้ ขึ้นอยู่กับเสถียรภาพของวงจรรองความถี่อนาลอกเดิมโดยตรง

๒.๔ แนวทางการสร้างวงจรรองความถี่ดิจิทัล (Digital filter construction) [1,2,3]

วงจรรองความถี่ดิจิทัลสร้างได้ ๒ วิธีคือ

- ๒.๔.๑ วิธีฮาร์ดแวร์ (Hard ware) เป็นการนำเอาอุปกรณ์พวกซีพียูรีซิสเตอร์ ตัวบวกเลข (Adder) ตัวลบเลข (Subtractor) และตัวคูณเลข (Multiplier) มาต่อเป็นวงจร
- ๒.๔.๒ วิธีซอฟต์แวร์ (Soft ware) เป็นการนำเอาเครื่องคอมพิวเตอร์มาช่วย ด้วยการเขียนโปรแกรมทรานเฟอร์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่ดิจิทัลเก็บไว้ นำเอาสัญญาณดิจิทัลที่จะกรอง ป้อนเป็นโปรแกรม เข้าไปคำนวณกับโปรแกรมของทรานเฟอร์ฟังก์ชัน ผลลัพธ์ที่ได้ คือสัญญาณดิจิทัลที่ผ่านวงจรรองความถี่ดิจิทัลนั่นเอง

การสร้างทั้งสองวิธีต่างก็มีข้อดีข้อเสีย แล้วแต่นักออกแบบจะนิยมวิธีไหน ข้อดีของฮาร์ดแวร์คืออุปกรณ์ที่จะนำมาสร้างราคาต่ำกว่าเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ซอฟต์แวร์ ส่วนข้อดีของซอฟต์แวร์ คือ ความคล่องตัว (Flexibility) อย่างไรก็ตามราคาเครื่องคอมพิวเตอร์มีแนวโน้มลดต่ำลง ดังเห็นได้จากเครื่องไมโครโปรเซสเซอร์ (Micro processor) ปัจจุบันราคาไม่สูงนัก จึงมีผู้นิยมออกแบบทางด้านเอกสารเป็นหลักในวงจรรองความถี่ดิจิทัลมากขึ้น เมื่อผู้ผลิตเห็นประโยชน์เช่นนี้ ก็จะพยายามพัฒนาให้ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซอฟต์แวร์กันมาก

๒.๑๐ คณิตศาสตร์ที่ใช้ในการออกแบบของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

๒.๑๐.๑ การกระจายอนุกรมกำลัง (power series) ของ $\sin ix$ และ $\cos ix$

$$\sin ix = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos ix = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k}}{2k!}$$

๒.๑๐.๒ โพลีโนเมียลเงา (Mirror Image Polynomial) เป็นโพลีโนเมียลที่มีสมประสิทธิ์

คล้ายกระจกเงาที่สะท้อนซึ่งกันและกัน สำหรับวงจรกรองความถี่ดิจิทัลนิยมใช้โพลีโนเมียลเงาชนิดกำลังสูงสุดเป็นเลขคู่ เพราะจะทำให้ผลตอบสนองอยู่ในลักษณะสมมาตร (Symmetry)

ตัวอย่าง โพลีโนเมียลของวงจรดิจิทัลเป็น

$$H(Z) = a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + a_3 Z^{-3} + a_4 Z^{-4}$$

ถ้าโพลีโนเมียลนี้เป็นแบบเงาจะได้ว่า

$$H(Z) = a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + a_1 Z^{-3} + a_0 Z^{-4}$$

$$= Z^{-2} [a_0 Z^2 + a_1 Z^1 + a_2 + a_1 Z^{-1} + a_0 Z^{-2}]$$

$$= Z^{-2} [a_0 (Z^2 + Z^{-2}) + a_1 (Z^1 + Z^{-1}) + a_2]$$

แต่ $Z = e^{j\omega T}$

$$H(Z) = Z^{-2} [2a_0 \cos 2\omega T + 2a_1 \cos \omega T + a_2]$$

$$d_0 = a_2, \quad d_1 = 2a_1 \quad \text{และ} \quad d_2 = 2a_0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \therefore H(Z) &= Z^{-2} [d_0 + d_1 \cos \omega T + d_2 \cos 2\omega T] \\ &= Z^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} d_i \cos i\omega T \end{aligned}$$

ดังนั้นโพลโนเมียลเงาของวงจรกรองความถี่ที่จัตวาลที่มีกำลังสูงสุดเป็น m และถ้า m เป็นเลขคู่ แล้ว สามารถเขียนเป็นรูปทั่ว ๆ ไป (General form) ได้ดังนี้

$$H(Z) = Z^{\frac{-m}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos i\omega T$$



บทที่ ๓

วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีความราบเรียบที่สุด ทั้งผลตอบสนองขนาดและกรุปดีเลย์ ณ ความถี่ใด ๆ (A Recursive digital Filter with Simultaneous Maximally Flat Magnitude and Group Delay at an Arbitrary Specified frequency)

๓.๑ บทนำ

เทคนิคในการออกแบบวงจรรองความถี่ค่า ของวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่ให้ค่ากรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด [7,8] ไม่สามารถแปลงเป็นวงจรรองความถี่กลาง (Band pass) ที่มีเฟสเป็นเชิงเส้นโดยใช้สูตรการแปลงความถี่ (Frequency Transformation) จาก [9] และดังนั้นจำเป็นต้องมีการออกแบบวงจรรองความถี่กลางผ่านโดยตรง ทำให้เฟสมีลักษณะเป็นเชิงเส้นดังใน [10] แต่ผลตอบสนองขนาดที่ได้ มีความราบเรียบไม่เพียงพอ ในบทนี้จึงเป็นการออกแบบที่ให้ได้ทั้งกรุปดีเลย์และผลตอบสนองขนาดราบเรียบที่สุดพร้อม ๆ กัน

๓.๒ การออกแบบ

$$\text{ให้ } H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} \quad (3-1)$$

เป็นทรานส์เฟอ์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่เราต้องการให้มีค่าประมาณใกล้เคียงกับ $e^{-j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}}$ ที่สุด

$$\therefore H(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega T}} = e^{-j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}} \quad (3-2)$$

เมื่อ ω_0 : ความถี่ใด ๆ ที่เราต้องการจะทำการประมาณ มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที

- β_0 : ค่าเฟสที่ $\omega = \omega_0$ มีหน่วยเป็นเรเดียน
 τ : ค่ากรูทีลเย์ มีหน่วยเป็นวินาที
 T : ช่วงเวลาในการแซมปลิง (Sampling period) ซึ่งนอร์มอลไลซ์
 (Normalized) ให้เป็นหนึ่งวินาที

จาก (๓-๒) จะได้

$$\frac{\sum_{i=0}^m a_i \cos i\omega - j \sum_{i=0}^m a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^n b_i \cos i\omega - j \sum_{i=0}^n b_i \sin i\omega} = \frac{\cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) - j \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau)}{\cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) - j \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau)} \quad (3-3)$$

หรือ

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m a_i \cos i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos i\omega \cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) - \sin i\omega \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) \} \\ & - j \left[\sum_{i=0}^m a_i \sin i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \{ \sin i\omega \cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) + \cos i\omega \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) \} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

ให้ $x = \omega - \omega_0$ หรือ $\omega = x + \omega_0$ แทนลงในสมการ (๓-๔) แล้วทำการแยกส่วนที่เป็นค่าจริง (Real-part) กับส่วนที่เป็นค่าจินตยะ (Imaginary part) ออกจากกัน

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m a_i (\cos ix \cos i\omega_0 - \sin ix \sin i\omega_0) - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos(i+\tau)x \cos(i\omega_0 + \beta_0) \\ & - \sin(i+\tau)x \sin(i\omega_0 + \beta_0) \} = 0 \end{aligned} \quad (3-5a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m a_i (\sin ix \cos i\omega_0 + \cos ix \sin i\omega_0) - \sum_{i=0}^n b_i \{ \sin(i+\tau)x \cos(i\omega_0 + \beta_0) \\ & + \cos(i+\tau)x \sin(i\omega_0 + \beta_0) \} = 0 \end{aligned} \quad (3-5b)$$

จากสมการที่ (3-5a) และ (3-5b) กระจายให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง (Power series) ของ x เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m a_i \{ \cos(i\omega_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k}}{2k!} - \sin(i\omega_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \} \\ & - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k}}{2k!} - \sin(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-6a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m a_i \{ \cos(i\omega_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin(i\omega_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k}}{2k!} \} \\ & - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k}}{2k!} \} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-6b)$$

ในการทำการประมาณค่าให้รอบเรียงที่สุด หมายความว่าค่าสัมประสิทธิ์ของ x ที่กำลังต่าง ๆ จะต้องเป็นศูนย์ และเพื่อให้เกิดความสะดวกในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $\tau_0 = 1$ ก็จะได้

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k} \cos(i\omega_0) - \sum_{i=1}^n b_i (i+\tau)^{2k} \cos(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k} \cos(\beta_0) \quad (3-7a)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k} \sin(i\omega_0) - \sum_{i=1}^n b_i (i+\tau)^{2k} \sin(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k} \sin(\beta_0) \quad (3-7b)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k+1} \cos(i\omega_0) - \sum_{i=1}^n b_i (i+\tau)^{2k+1} \cos(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k+1} \cos(\beta_0) \quad (3-7c)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k+1} \sin(i\omega_0) - \sum_{i=1}^n b_i (i+\tau)^{2k+1} \sin(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k+1} \sin(\beta_0) \quad (3-7d)$$

k มีค่าเท่ากับ $0, 1, 2, \dots$ จนกว่าจะได้เมทริกซ์ (Matrix) ข้างซ้ายมือ เป็นสแควร์เมทริกซ์ (Square matrix) มีขนาด $(m+n+1) \times (m+n+1)$ เราอาจจะเขียนในรูปของสมการเชิงเส้น

มีสัมประสิทธิ์ของวงจรรองความถี่เป็นค่าไม่รู้ค่าคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมี $A \cdot x = c$ แปลงเป็น c หา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

m+n+1

m+n+1

m+n+1

$$\begin{matrix}
 \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \cos \omega_0 \\ \sin \omega_0 \\ \cos 2\omega_0 \\ \sin 2\omega_0 \\ 2\cos^2 \omega_0 \\ 2\sin 2\omega_0 \\ 2^2 \cos^2 \omega_0 \\ 2^2 \sin 2\omega_0 \\ 2^3 \cos^2 \omega_0 \\ 2^3 \sin 2\omega_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots m \cos m\omega_0 \\ \dots m \sin m\omega_0 \\ \dots m \cos m\omega_0 \\ \dots m \sin m\omega_0 \\ \dots m^2 \cos^2 \omega_0 \\ \dots m^2 \sin^2 \omega_0 \\ \dots m^3 \cos^3 \omega_0 \\ \dots m^3 \sin^3 \omega_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} -\cos(\omega_0 + \beta_0) \\ -\sin(\omega_0 + \beta_0) \\ -(1+r)\cos(\omega_0 + \beta_0) \\ -(1+r)\sin(\omega_0 + \beta_0) \\ -(1+r)^2 \cos(\omega_0 + \beta_0) \\ -(1+r)^2 \sin(\omega_0 + \beta_0) \\ -(1+r)^3 \cos(\omega_0 + \beta_0) \\ -(1+r)^3 \sin(\omega_0 + \beta_0) \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots -\cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ \dots -\sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ \dots -(n+r)\cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ \dots -(n+r)\sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ \dots -(n+r)^2 \cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ \dots -(n+r)^2 \sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ \dots -(n+r)^3 \cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ \dots -(n+r)^3 \sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\
 \mathbf{A} = & & & &
 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$

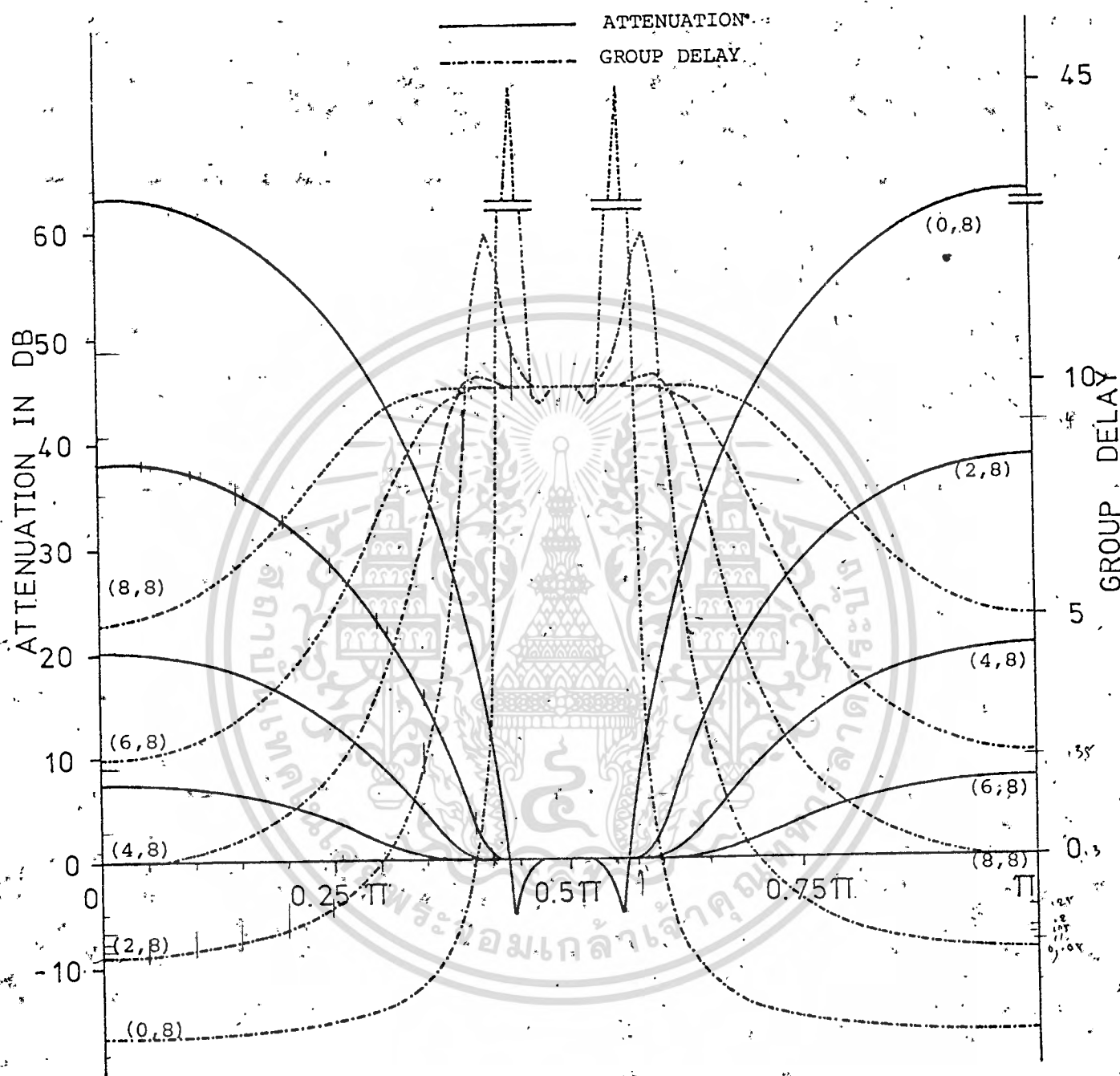
$$\mathbf{x} = \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} = \mathbf{c} = \begin{matrix} \cos \beta_0 \\ \sin \beta_0 \\ r \cos \beta_0 \\ r \sin \beta_0 \\ r^2 \cos \beta_0 \\ r^2 \sin \beta_0 \\ r^3 \cos \beta_0 \\ r^3 \sin \beta_0 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

๓.๓ ผลลัพธ์ตัวอย่าง

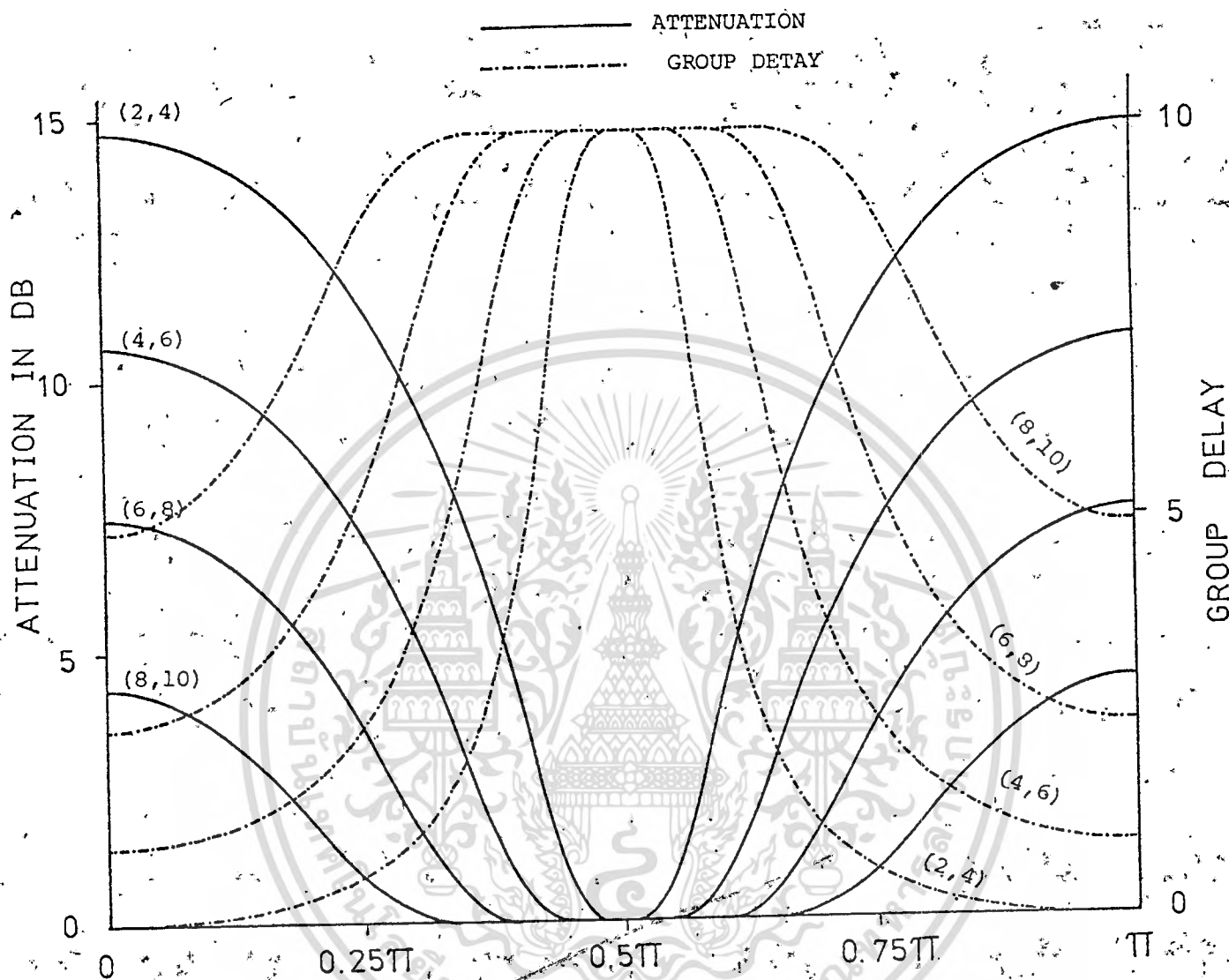
เทคนิคในการออกแบบวิธีนี้ ค่าการลดทอน (Attenuation) ของสัญญาณและกรูฟตีเลย์ ดังแสดงในรูปที่ ๓.๑, ๓.๒ และ ๓.๓ โดยกำหนดให้ $\omega_0 = 0.5\pi$ เรเดียนต่อวินาที $\beta_0 = 0$ เรเดียน ในรูปที่ ๓.๑ เป็นกรณีของ $n=8, \tau=10$ วินาที ส่วน m แปรค่าไป รูปที่ ๓.๒ เป็นกรณีของ $n-m=2$ มี $\tau=10$ วินาที รูปที่ ๓.๓ เป็นกรณีของ $m=4$ และ $n=6$ ค่ากรูฟตีเลย์แปรไป

๓.๔ สรุป

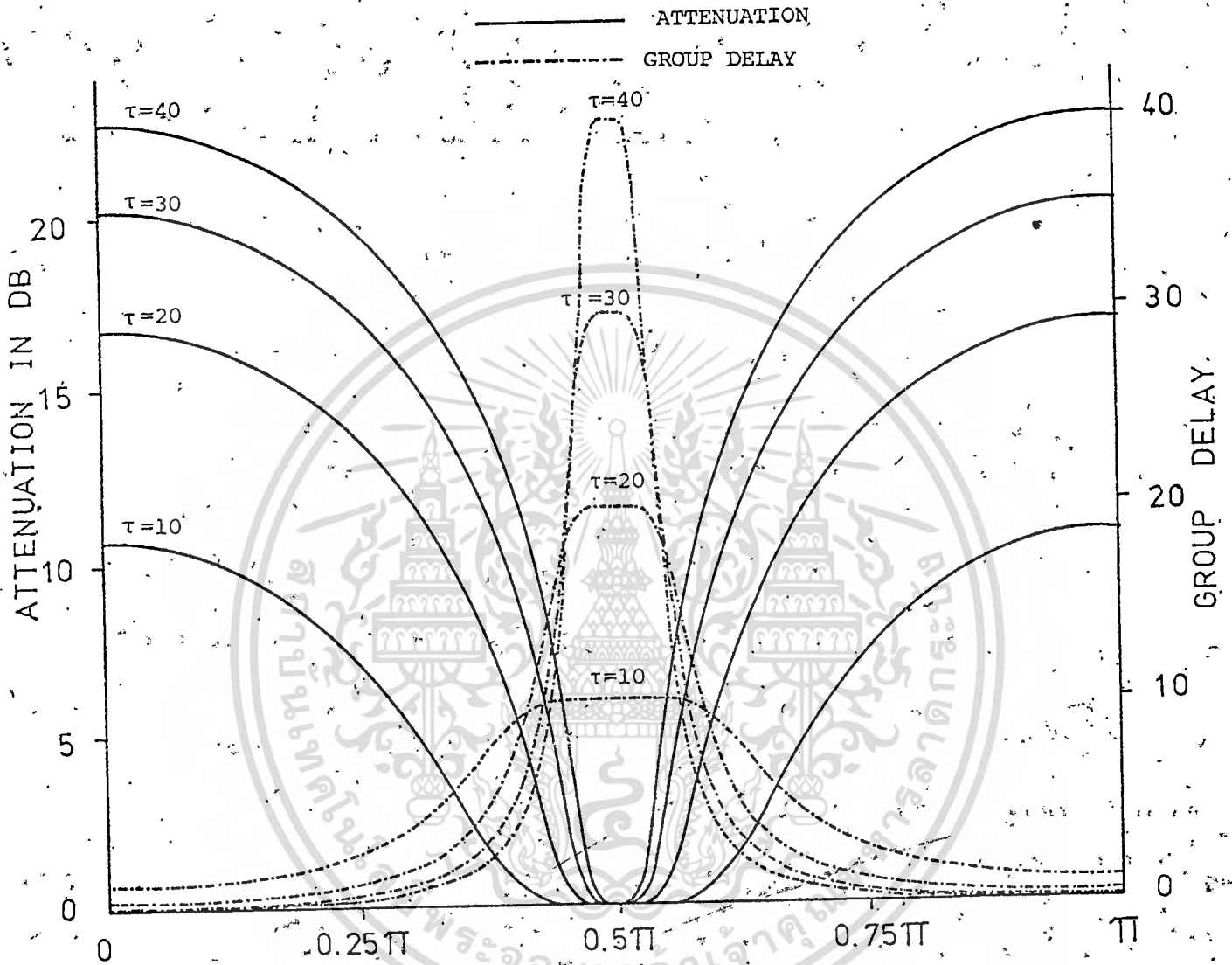
การออกแบบด้วยเทคนิคนี้จะให้ค่าขนาดและกรูฟตีเลย์ราบเรียบพร้อม ๆ กัน ความถี่ใดก็ได้ ซึ่งจะได้ผลดีเมื่ออันดับ (Order) ของเศษและอันดับของส่วนมีค่าใกล้เคียงกัน หากอันดับที่ว่ามีต่างกันมาก ๆ จะทำให้เกิดขดขึ้นหรือบริเวณใกล้กับความถี่ที่เราต้องการใช้ในการประมาณ ดังรูปที่ ๓.๑ จะขดขึ้นใกล้จุด 0.5π เรเดียน นี่เป็นจุดบกพร่องของเทคนิคนี้ แต่ก็สามารถแก้ไขได้ด้วยการใช้เทคนิคในบทที่ ๔ และบทที่ ๕



รูปที่ ๓.๑ แสดงการลดทอนและกรุปดีเลย์ เมื่อ $n=8$



รูปที่ ๓.๒ แสดงการลดทอนและกรุปดีเลย์ เมื่อ $n-m=2$ เสมอ



รูปที่ ๓.๓ แสดงการลดทอนและกรุปดีเลย์ เมื่อ $m=4$ และ $n=6$

บทที่ ๔

วงจรรองความถี่คัตออฟแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีกรูฟดีเลย์ราบเรียบที่สุด พร้อมทั้งปรับปรุงขนาดของผลตอบสนอง: วิธีที่ ๑
(A maximally flat group delay recursive digital filter with improved passband magnitude response)

๔.๑ บทนำ

จากเทคนิคในการออกแบบของบทที่ ๒ ยังมีข้อเสียอยู่คือ จะเกิดยอดของผลตอบสนองเมื่ออันดับของเศษน้อยกว่าส่วนมาก ๆ ในบทนี้จะเป็นแก้ไขข้อเสียนั้น การออกแบบจะเริ่มต้นด้วยการนำเอาทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันใน [7, 8, 10] อันใดอันหนึ่งมาเป็นจุดตั้งต้น. ซึ่งทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันทั้งสามแบบ ล้วนเป็นแบบมีโพลอย่างเดียว (All Pole) และมีกรูฟดีเลย์ราบเรียบที่สุดเพียงอย่างเดียว. ขั้นต่อไป เป็นการนำเอาโพลโนเมียลเงา มาสร้างเป็นเศษของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันนั้น จะทำให้ได้ขนาดของผลตอบสนองและกรูฟดีเลย์ราบเรียบพร้อม ๆ กัน ผลตอบสนองจะไม่เกิดยอดเลย

๔.๒ การออกแบบ

$H_1(Z)$ เป็นทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันแบบมีโพลอย่างเดียว มีกรูฟดีเลย์ราบเรียบที่สุด [10]

$$H_1(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} \quad (4-1)$$

นำโพลโนเมียลเงามารวมเข้ากับ $H_1(Z)$ เพื่อปรับปรุงผลตอบสนอง

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} \quad (4-2)$$

$$= \frac{Z^{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^m d_i \cos i\omega}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} \quad (4-3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $d_0 = \frac{a}{2}$, $d_i = 2a \frac{m}{2} - i = \frac{m}{2} + i$, i แปรจาก 1, 2, 3... m และ m เป็นเลขคู่

ต้องคำนวณหา d_i ออกมาจากการประมาณ $H(Z) = e^{-j[\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau]}$ ค่า β_0, ω_0 กับ τ มีความหมายเช่นเดียวกับที่กำหนดไว้ในบทที่ 1 จากสมการ (4.3) เทอม $Z^{\frac{m}{2}}$ มีขนาดเป็นหนึ่ง มีค่าที่เฉลี่ย $\frac{m}{2}$ วินาที จึงไม่ต้องนำเทอมนี้มาคิด สมการที่ใช้ในการประมาณจะเป็น

$$\frac{\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega)}{\sum_{i=0}^n b_i Z^{-i}} \Big|_{Z=e^{j\omega}} = e^{-j[\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau]} \quad (4-4)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega) = \sum_{i=0}^n b_i \cos[\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau + i\omega] - j \sum_{i=0}^n b_i \sin[\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau + i\omega] \quad (4-5)$$

จัดเทอมค่าจริงเข้าด้วยกัน

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \cos(i\omega) - \sum_{i=0}^n b_i \cos[\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau + i\omega] = 0 \quad (4-6a)$$

$$\sum_{i=0}^n b_i \sin[\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau + i\omega] = 0 \quad (4-6b)$$

สัมประสิทธิ์ b_i ได้มาจาก [10] สมการที่ (4.6b) จึงไม่จำเป็นต้องนำมาใช้ในการคำนวณ

ให้ $x = \omega - \omega_0$ ขณะเดียวกัน $\omega = x + \omega_0$ แทนลงในสมการ (4.6a)

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} d_i \{ \cos(ix) \cos(i\omega_0) - \sin(ix) \sin(i\omega_0) \} - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos(\beta_0 + i\omega_0) \cos(i + \tau)x - \sin(\beta_0 + i\omega_0) \sin(i + \tau)x \} = 0 \quad (4-7)$$

กระจายอนุกรมกำลังของ $\cos(ix)$, $\sin(ix)$, $\cos(i + \tau)x$ และ $\sin(i + \tau)x$

ในขณะเดียวกันในข้อความหมายของการประมาณให้เกิดความราบเรียบที่สุด คือสัมประสิทธิ์ของทุกตัว เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปเผยแพร่บนสื่อออนไลน์ ไม่ว่าการณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

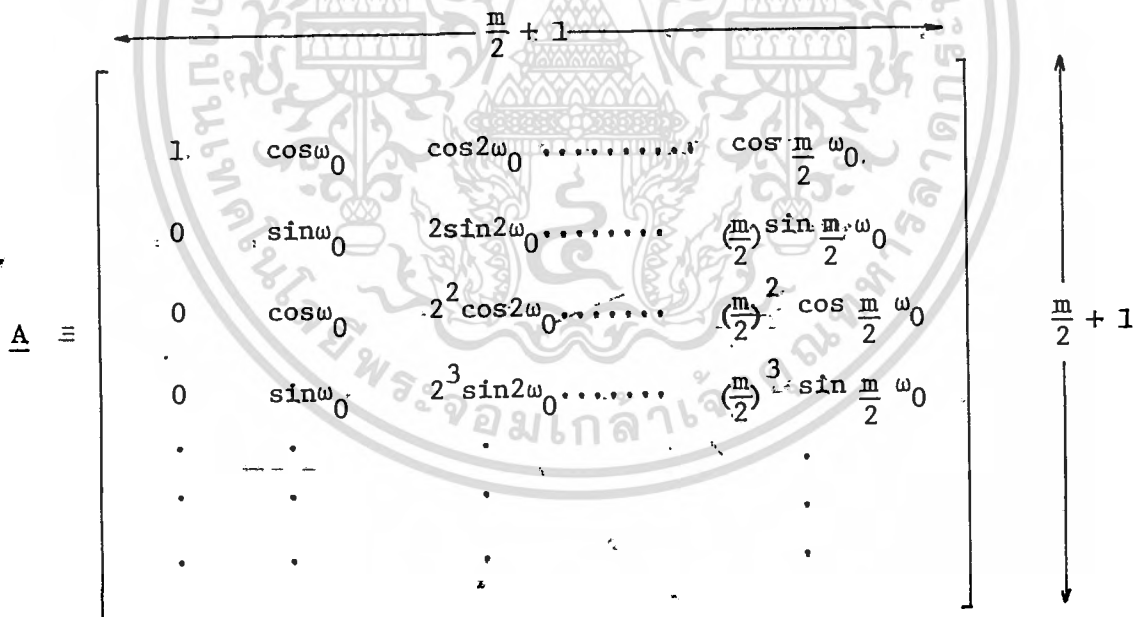
ที่กำลังต่าง ๆ จะต้องเป็นศูนย์ แล้วจัดเอาสัมประสิทธิ์ของกำลังเดียวกันรวมเข้าด้วยกัน ก็จะได้

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} \{(i)^{2k} \cos(i\omega_0)\} d_i = \sum_{i=0}^n \{(i+\tau)^{2k} \cos(\beta_0+i\omega_0)\} b_i \quad (4-8a)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} \{(i)^{2k+1} \sin(i\omega_0)\} d_i = \sum_{i=0}^n \{(i+\tau)^{2k+1} \sin(\beta_0+i\omega_0)\} b_i \quad (4-8b)$$

k จะแปรจาก 1, 2, ... ถึง $\frac{m}{2} + 1$ จากสมการที่ (4-8a) กับ (4-8b) เขียนเป็นรูปเมทริกซ์

$$\underline{A} \underline{d} = \underline{B} \underline{b}$$



←----- n+1 -----→

$$\underline{B} \equiv \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \cos(\beta_0 + \omega_0) & \cos(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & \cos(\beta_0 + n\omega_0) \\ \tau \sin \beta_0 & (1+\tau) \sin(\beta_0 + \omega_0) & (2+\tau) \sin(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & (n+\tau) \sin(\beta_0 + n\omega_0) \\ \tau^2 \cos \beta_0 & (1+\tau)^2 \cos(\beta_0 + \omega_0) & (2+\tau)^2 \cos(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & (n+\tau)^2 \cos(\beta_0 + n\omega_0) \\ \tau^3 \sin \beta_0 & (1+\tau)^3 \sin(\beta_0 + \omega_0) & (2+\tau)^3 \sin(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & (n+\tau)^3 \sin(\beta_0 + n\omega_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad \frac{m}{2}$$

$$\underline{d} \equiv [d_0, d_1, d_2, \dots, d_{\frac{m}{2}}]^T \quad \underline{b} \equiv [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n]^T$$

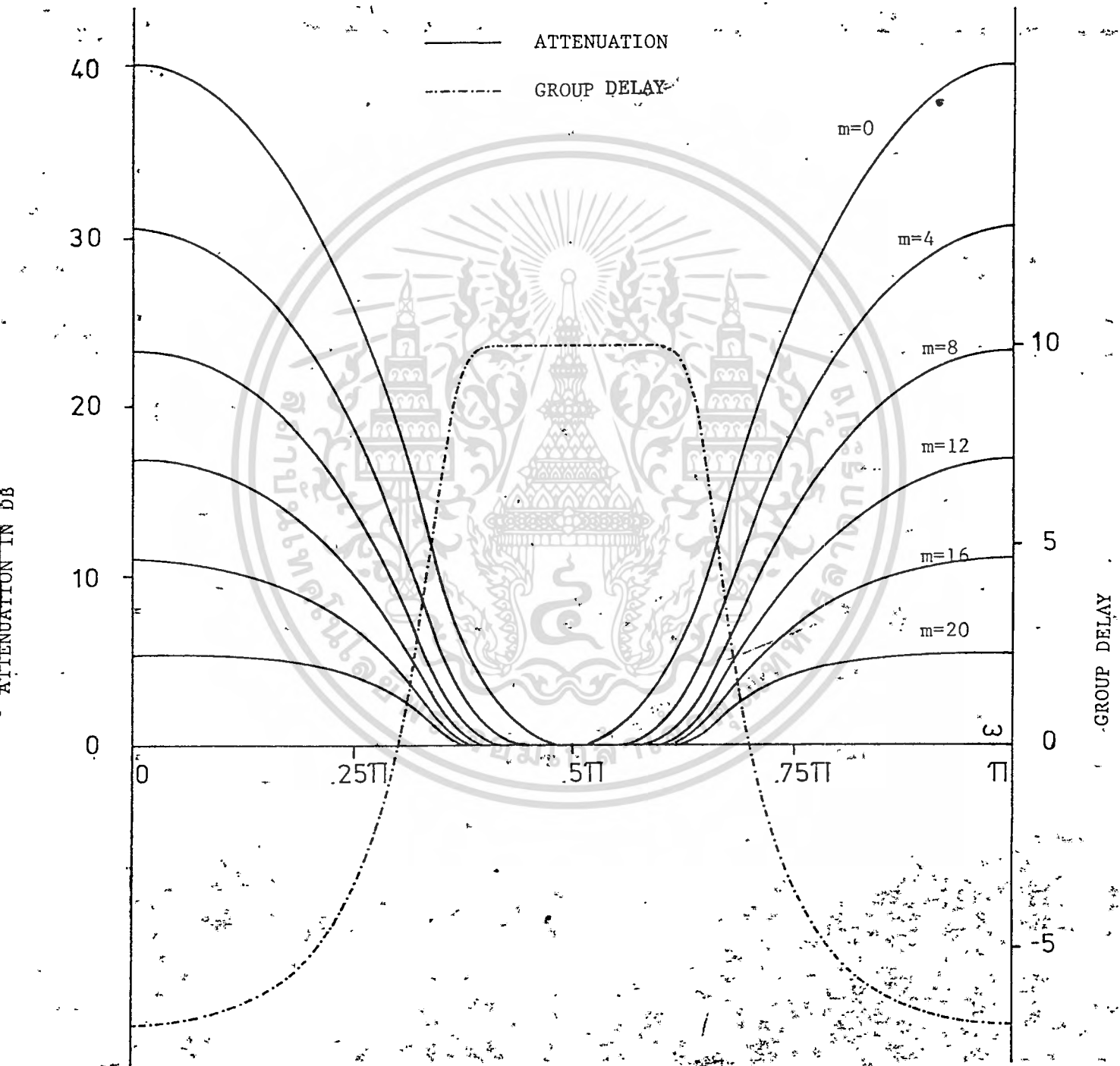
๔.๓ ผลลัพธ์ตัวอย่าง

การออกแบบวิธีนี้ ขนาดของการลดทอนกับกรุปดีเลย์ ดังแสดงในรูปที่ ๔.๑ เมื่อ $n=10$ วินาที $n=20$ m แปรค่าไป และรูปที่ ๔.๒ เมื่อ $n=6$ $m=4$ ค่าแปรไป ทั้งสองรูปกำหนดให้ $\beta_0=0$ เรเดียน และ $\omega_0=0.5\pi$ เรเดียนต่อวินาที

๔.๔ สรุป

เทคนิคนี้เป็นวิธีที่ ๑ สำหรับการแก้ไขจุดบกพร่องของเทคนิคในบทที่ ๓ โดยขนาดและกรุปดีเลย์ราบเรียบเสมอ ไม่ว่าอันดับของเศษและอันดับของส่วนจะต่างกันเท่าใด เทคนิคนี้สามารถควบคุมความกว้างของขนาดได้ ด้วยการเพิ่มหรือลดอันดับของเศษ ในขณะที่อันดับของส่วนยังคงเดิมอยู่ แต่ไม่สามารถควบคุมความกว้างของกรุปดีเลย์ เพราะโพลีโนเมียลเงาที่นำมาเป็นเศษของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันมีค่าดีเลย์คงที่ ค่ากรุปดีเลย์ที่ปรากฏนั้นเกิดจากโพลีโนเมียลของส่วนเพียงอย่างเดียว ดังนั้นเทคนิคที่ต้องการควบคุมความกว้างทั้งขนาดและกรุปดีเลย์จึงได้กล่าวไว้ในบทถัดไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่รูปที่ ๔.๑ แสดงการลดทอนและกรุปดีเลย์ ไม่เมื่อ $n=20$ มาไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ ๔

วงจรรองความถี่ดิจิทัลที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น และสามารถควบคุมขนาดของผลตอบสนอง: วิธีที่ ๒
(Linear phase bandpass recursive digital filter with controllable magnitude)

๔.๑ บทนำ

การออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลของบทที่ ๔ นั้น สามารถควบคุมความกว้างของขนาดเพียงอย่างเดียว โดยการเปลี่ยนแปลงอันดับของส่วน แต่ความกว้างของกรุปดีเลย์ควบคุมไม่ได้เลย จากการออกแบบวงจรรองความถี่อนาล็อกที่สามารถควบคุมขนาดและกรุปดีเลย์ของ [11, 12] จึงเป็นที่มาของการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่สามารถควบคุมความกว้างของขนาดและกรุปดีเลย์ใน [13] และไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนอันดับของเศษ แต่เทคนิคใน [13] เป็นวงจรมุ่งความถี่ต่ำ ในบทนี้จึงได้เสนอเทคนิคในการออกแบบให้สามารถควบคุมความกว้างของขนาดและกรุปดีเลย์สำหรับย่านความถี่ใด ๆ ซึ่งจะครอบคลุมไปถึงเทคนิคใน [13] ด้วย

๔.๒ การออกแบบ

ให้ $H_L(Z)$ เป็นทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน ที่จะใช้ประมาณให้เฟสมีค่าเป็น $-L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}$ ค่า β_0, ω_0 กับ τ มีความหมายเช่นเดียวกับที่กำหนดไว้ในบทที่ ๓

$$H_L(Z) = e^{-jL\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}} \quad (5-1)$$

$$\text{ให้ } H_L(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}} \quad (5-2)$$

$$\therefore \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}} = e^{-jL\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}} \quad (5-3)$$

และต้องการประมาณค่าเฟสของ $H_{L-1}(Z)$ ให้เป็น $(L-1)\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}$

$$H_{L-1}(Z) = e^{-j(L-1)\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{ให้ } H_{L-1}(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^m b_i Z^{-i}} \quad (5-4)$$

$$\therefore \frac{1}{\sum_{i=0}^m b_i Z^{-i}} = e^{-j(L-1)\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}} \quad (5-6)$$

แต่ทรานส์เฟอ์ฟังก์ชันของวงจรรองความถี่คือ $H(Z)$ ต้องการให้มีเฟสเป็นเชิงเส้นมีค่าเท่ากับ $-j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}$ นั่นก็หมายความว่า

$$H(Z) = \frac{H_L(Z)}{H_{L-1}(Z)} = e^{-j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}} \quad (5-7)$$

โดย $0 \leq L < 1$

เพื่อให้บรรลุผลของการประมาณ จึงต้องคำนวณหา a_i และ b_i จากสมการที่ (๕-๓) และ (๕-๖) ตามลำดับ

๕.๒.๑ คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i

$$\text{จาก } \frac{1}{\sum_{i=0}^m a_i Z^{-i}} = e^{-jL\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}}$$

ให้ $\delta_L(\omega)$ เป็นความแตกต่างของเฟสของเทอมซ้ายและขวามือของสมการข้างบน

$$\delta_L(\omega) = -L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\} - \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)} \right] \quad (5-8)$$

$$\text{หรือ } \epsilon_L(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)} \right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้มีการเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของลิขสิทธิ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\})}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\})} - \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}) \cos(i\omega) + \sum_{i=0}^n a_i \cos(L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}) \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}) \cos(i\omega)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin [L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\} + i\omega]}{\sum_{i=0}^n a_i \cos L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\} \cos(i\omega)} \quad (5-9)
\end{aligned}$$

ในการประมาณต้องการให้เกิดผลต่างน้อยที่สุด หรือมีค่าเป็นศูนย์

$$\therefore \sum_{i=0}^n a_i \sin [L\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\} + i\omega] = 0 \quad (5-10)$$

ให้ $x = \omega - \omega_0$ หรือ $\omega = x + \omega_0$ แทนลงในสมการที่ (๕-๑๐)

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^n a_i \sin [L\{\beta_0 + x\tau\} + i(x + \omega_0)] = 0 \\
&\sum_{i=0}^n a_i \sin [(L\beta_0 + i\omega_0) + (i + L\tau)x] = 0 \quad (5-11)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i [\sin(L\beta_0 + i\omega_0) \cos(i + L\tau)x + \cos(L\beta_0 + i\omega_0) \sin(i + L\tau)x] = 0 \quad (5-12)$$

กระจายอนุกรมกำลังของ x ในสมการที่ (๕-๑๒)

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^n a_i \sin(L\beta_0 + i\omega_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \{(i + L\tau)x\}^{2k}}{2k!} + \sum_{i=0}^n a_i \cos(L\beta_0 + i\omega_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \{(i + L\tau)x\}^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= 0 \quad (5-13)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทำการประมาณให้เกิดความราบเรียบที่สุด ค่าสัมประสิทธิ์ของขั้วกำลังต่าง ๆ ต้องเป็นศูนย์ จากสมการ(๔-๑๓)แยกเอาค่ากำลังที่ต่างกันออกจากกัน และเพื่อความสะดวกในการหาคณิตศาสตร์ กำหนดให้ a_0 เท่ากับ ๑ จะได้

$$\sum_{i=1}^n a_i (i+L\tau)^{2k} \sin(L\beta_0 + i\omega_0) = -(L\tau)^{2k} \sin(L\beta_0) \quad (5-14a)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i (i+L\tau)^{2k+1} \cos(L\beta_0 + i\omega_0) = -(L\tau)^{2k+1} \cos(L\beta_0) \quad (5-14b)$$

จะแปรจาก $0, 1, 2, \dots$, ถึง $\frac{n}{2} - 1$ สมการที่(5-14a)และ(5-14b)เขียนในรูปเมทริกซ์เป็น

$\underline{A} \underline{a} = \underline{c}$

$\underline{A} \equiv$

$\sin(L\beta_0 + \omega_0)$	$\sin(L\beta_0 + 2\omega_0)$	$\dots \sin(L\beta_0 + n\omega_0)$
$(1+L\tau) \cos(L\beta_0 + \omega_0)$	$(2+L\tau) \cos(L\beta_0 + 2\omega_0)$	$\dots (n+L\tau) \cos(L\beta_0 + n\omega_0)$
$(1+L\tau)^2 \sin(L\beta_0 + \omega_0)$	$(2+L\tau)^2 \sin(L\beta_0 + 2\omega_0)$	$\dots (n+L\tau)^2 \sin(L\beta_0 + n\omega_0)$
$(1+L\tau)^3 \cos(L\beta_0 + \omega_0)$	$(2+L\tau)^3 \sin(L\beta_0 + 2\omega_0)$	$\dots (n+L\tau)^3 \cos(L\beta_0 + n\omega_0)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

$\xrightarrow{\quad n \quad}$

$\uparrow n$

$$\underline{a} \equiv [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n]^T$$

$$\underline{c} \equiv \begin{matrix} \xleftarrow{\hspace{10em} n \hspace{10em} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ [-\sin L\beta_0, -(L\tau)\cos L\beta_0, -(L\tau)^2\sin L\beta_0, -(L\tau)^3\cos L\beta_0, \dots \end{matrix}$$

๔.๒.๒ คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ b_i

การคำนวณหาค่า b_i ทำได้ในทำนองเดียวกับการหาค่า a_i และกำหนดให้ $b'_0 = 1$ ใน

ที่สุดก็จะได้

$$\sum_{i=0}^m b_i \{i+(L-1)\tau\}^{2k} \sin\{(L-1)\beta_0+i\omega_0\} = -\{(L-1)\tau\}^{2k} \sin(L-1)\beta_0 \quad (5-15a)$$

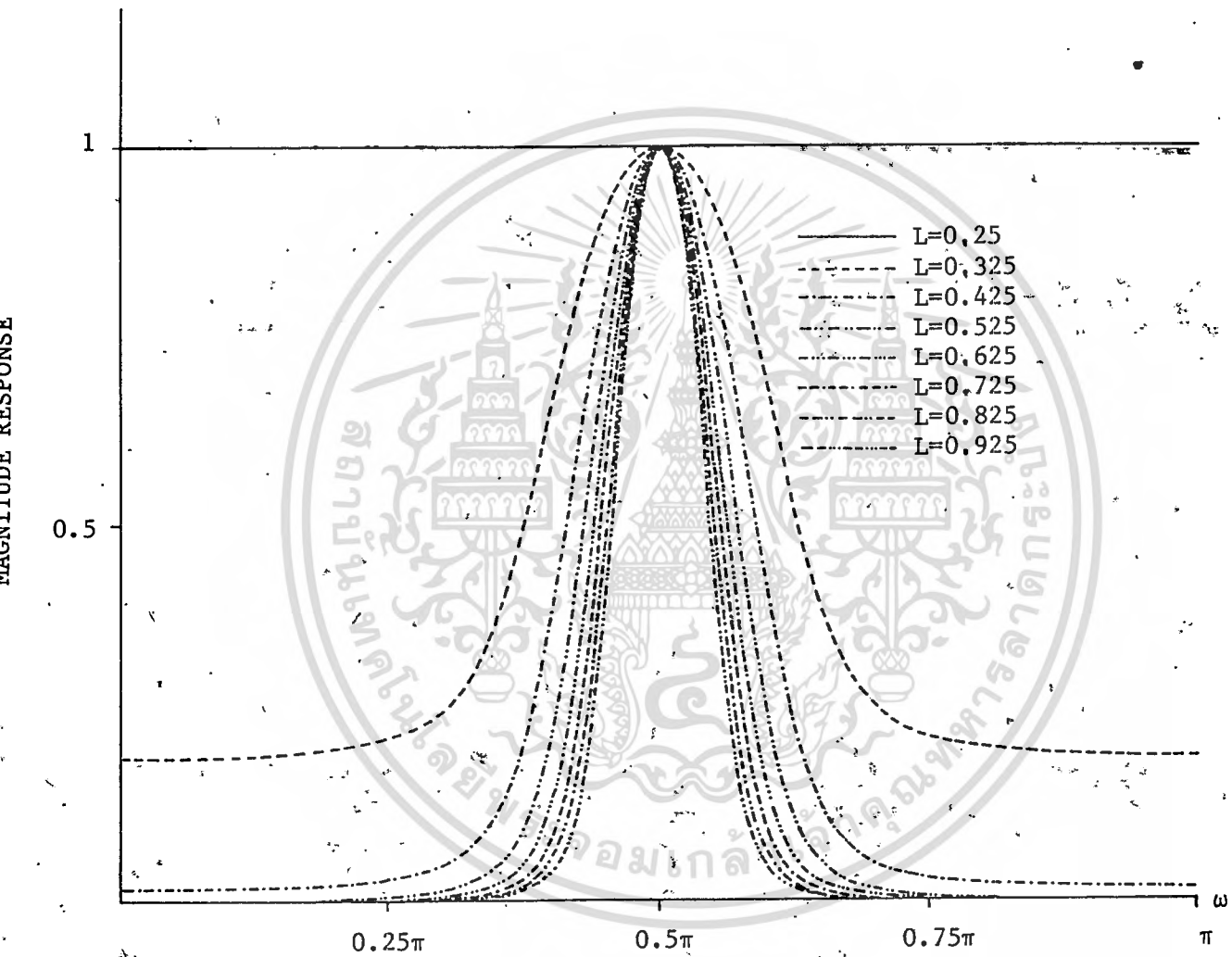
$$\sum_{i=0}^m b_i \{i+(L-1)\tau\}^{2k+1} \cos\{(L-1)\beta_0+i\omega_0\} = -\{(L-1)\tau\}^{2k+1} \cos(L-1)\beta_0 \quad (5-15b)$$

รูปแบบของเมทริกซ์ ของสมการที่(5-15a)และ(5-15b)คือ

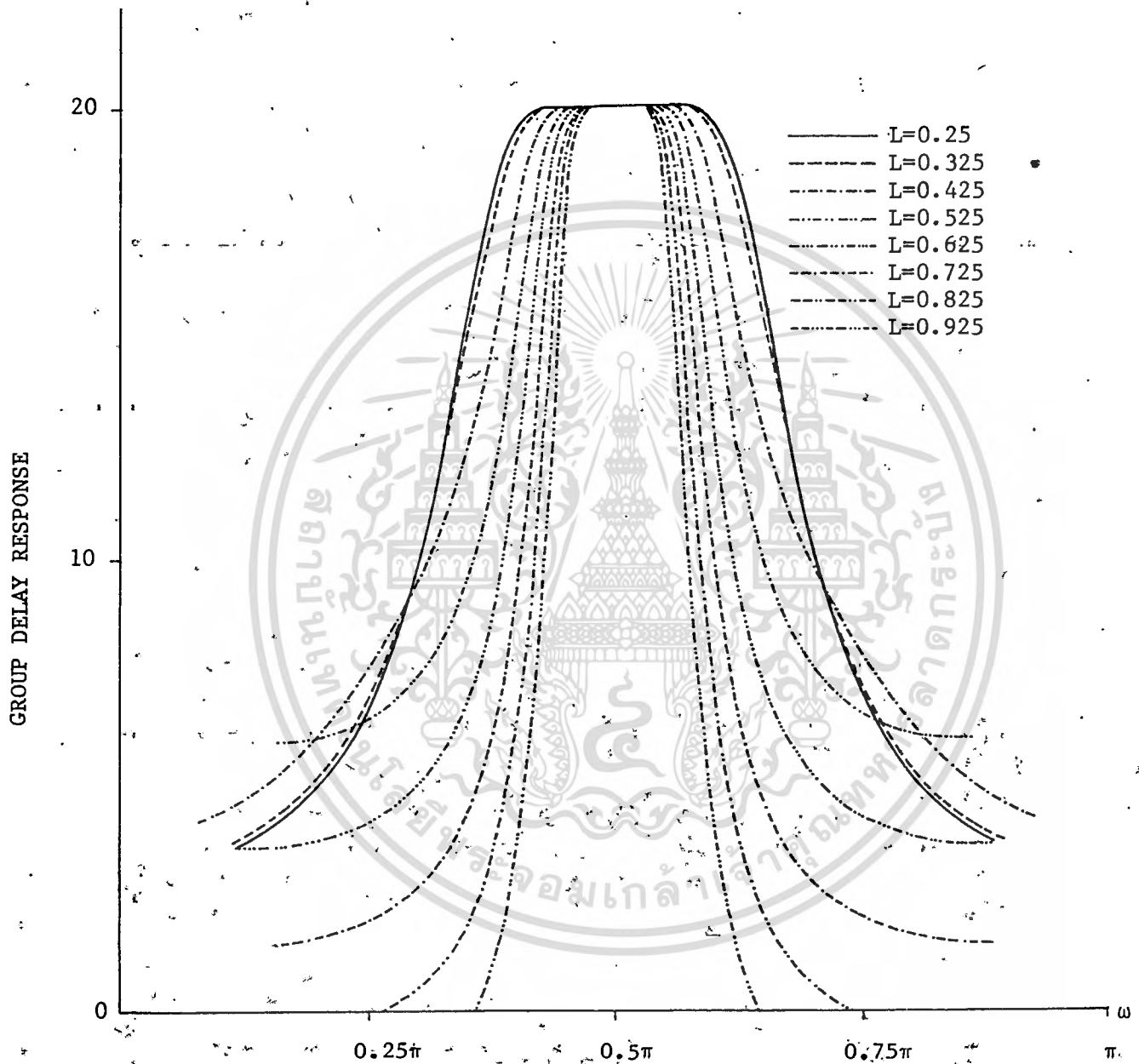
$$\underline{B} \underline{b} = \underline{d}$$

$$\underline{B} \equiv \begin{matrix} \xleftarrow{\hspace{10em} m \hspace{10em} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ \begin{matrix} \sin\{(L-1)\beta_0+\omega_0\} & \sin\{(L-1)\beta_0+2\omega_0\} & \dots \sin\{(L-1)\beta_0+m\omega_0\} \\ \{1 \cdot (L-1)\tau\} \cos\{(L-1)\beta_0+\omega_0\} & \{2+(L-1)\tau\} \cos\{(L-1)\beta_0+2\omega_0\} & \dots \{m+(L-1)\tau\} \cos\{(L-1)\beta_0+m\omega_0\} \\ \{1+(L-1)\tau\}^2 \sin\{(L-1)\beta_0+\omega_0\} & \{2+(L-1)\tau\}^2 \sin\{(L-1)\beta_0+2\omega_0\} & \dots \{m+(L-1)\tau\}^2 \sin\{(L-1)\beta_0+m\omega_0\} \\ \{1+(L-1)\tau\}^3 \cos\{(L-1)\beta_0+\omega_0\} & \{2+(L-1)\tau\}^3 \cos\{(L-1)\beta_0+2\omega_0\} & \dots \{m+(L-1)\tau\}^3 \cos\{(L-1)\beta_0+m\omega_0\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \end{matrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ๑ แสดงขนาดผลตอบสนอง เมื่อ $m=10$, $n=10$, $\tau=20$ จะแปรค่าไป



รูปที่ ๒ แสดงกรุปดีเลย์ เมื่อ $m=10$, $n=10$, $\tau=20$ L จะแปรค่าไป

บทที่ ๖

วงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด ชนิดผ่านความถี่สูงและไม่ผ่านความถี่กลาง

(Filter coefficients of a highpass and a band-elimination recursive digital filter with maximally flat group delay)

๖.๑ บทนำ

เทคนิคการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด ชนิดผ่านความถี่ต่ำของ [7,8] ไม่สามารถที่จะแปลงให้เป็นวงจรมุ่งความถี่อื่น ๆ ที่จะให้กรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดได้ เพราะสูตรที่ใช้ในการแปลงจะทำให้เกิดความไม่เป็นเชิงเส้นขึ้นที่เฟส เทคนิคในบทนี้จึงเป็นตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นว่าสามารถที่จะออกแบบให้ย่านความถี่ใดผ่านก็ได้ โดยที่กรุปดีเลย์ยังคงราบเรียบที่สุด ซึ่งเป็นการออกแบบเฉพาะเจาะจงให้ย่านความถี่ที่ต้องการผ่าน ตัวอย่างที่แสดงในบทนี้คือวงจรมุ่งความถี่สูง และไม่ผ่านความถี่กลาง

๖.๒ การออกแบบ

๖.๒.๑ การออกแบบวงจรมุ่งความถี่สูง

ให้ $H(Z)$ เป็นทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่มีเฟสประมาณ $-\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}$ โดย β_0, ω_0 กับ τ มีความหมายเช่นเดียวกับที่กล่าวไว้ในบทที่ ๓. ดังนั้น ω_0 สำหรับย่านความถี่สูงผ่านจะมีค่าเท่ากับ π เรเดียนต่อวินาที ให้ช่วงเวลาแซมปลิงมีค่าเป็น ๑ วินาที และ $\beta_0 = 0$ เรเดียน

$$\text{จาก } H(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i Z^{-i}} \quad (6-1)$$

$$\therefore \text{เฟสของ } H(Z) = \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)} \right] \quad (6-2)$$

$$\therefore \text{ผลต่างของเฟส } \epsilon(\omega) = -\{(\omega-\pi)\tau\} - \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)} \right] \quad (6-3)$$

$$\epsilon(\omega) = -\tan\{(\omega-\pi)\tau\} - \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)}$$

$$= -\frac{\sin(\omega-\pi)\tau}{\cos(\omega-\pi)\tau} - \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin(i\omega)}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(i\omega)}$$

$$\epsilon(\omega) = \frac{-\left[\sum_{i=0}^n a_i \sin(\omega-\pi)\tau \cos(i\omega) + \sum_{i=0}^n a_i \cos(\omega-\pi)\tau \cos(i\omega) \right]}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(\omega-\pi)\tau \cos(i\omega)}$$

$$\epsilon(\omega) = -\frac{\sum_{i=0}^n a_i \sin[(\omega-\pi)\tau + i\omega]}{\sum_{i=0}^n a_i \cos(\omega-\pi)\tau \cos(i\omega)} \quad (6-4)$$

ในการประมาณนี้ต้องการให้ผลต่างของเฟสน้อยที่สุดหรือมีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง

$$\therefore \sum_{i=0}^n a_i \sin[(\omega-\pi)\tau + i\omega] = 0 \quad (6-5)$$

ให้ $(\omega-\pi) = x$ หรือ $\omega = x+\pi$ แทนลงในสมการ(๕.๕)

$$\sum_{i=0}^n a_i \sin [x\tau + i(x+\pi)] = 0$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \sin [(i+\tau)x+i\pi] = 0 \quad (6-6)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \{ \sin(i+\tau)x \cos(i\pi) + \cos(i+\tau) \sin(i\pi) \} = 0 \quad (6-7)$$

เนื่องจาก i เป็นค่าจำนวนเต็มใด ๆ $\sin(i\pi)$ จะเป็นศูนย์เสมอ จะเหลือเพียง

$$\sum_{i=0}^n a_i \sin(i+\tau)x \cos(i\pi) = 0$$

ในการทำการประมาณให้เกิดความราบเรียบที่สุด ต้องกระจายอนุกรมกำลังของ x แล้วให้ค่าสัมประสิทธิ์ของ x ที่กำลังต่าง ๆ เป็นศูนย์

$$\sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-1)^k (i+\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos(i\pi) = 0$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{\alpha} (i+\tau)^{2k+1} \cos(i\pi) = 0 \quad (6-8)$$

เพื่อความสะดวกในการทาคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $a_0 = 1$

$$\therefore \sum_{i=1}^n a_i (i+\tau)^{2k+1} \cos(i\pi) = -\tau^{2k+1} \quad (6-9)$$

k จะแปรจาก $0, 1, \dots$ จนกว่าจะได้สมการข้างซ้ายของ (6-9) สามารถเขียนเป็นสแควร์เมทริกซ์ได้

$$\underline{A} \underline{a} = \underline{b} \quad (6-10)$$

$$A \equiv \begin{bmatrix} -(\tau+1) & (\tau+2) & -(\tau+3) \dots & (-1)^n (\tau+n) \\ -(\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 & -(\tau+3)^3 \dots & (-1)^n (\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\tau+1)^{2n-1} & (\tau+2)^{2n-1} & -(\tau+3)^{2n-1} \dots & (-1)^n (\tau+n)^{2n-1} \end{bmatrix}$$

← n →

↑ n ↓

$$b \equiv \begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau^3 \\ \vdots \\ -\tau^{2n-1} \end{bmatrix} \quad a \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

↑ n ↓ ↑ n ↓

ค่าสมาชิก a_k ได้โดย $a_k = \frac{\Delta k}{\Delta} \quad k=1,2,3,\dots,m$

$$\Delta = (-1)^p \begin{vmatrix} (\tau+1) & (\tau+2) & (\tau+3) \dots & (\tau+n) \\ (\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 & (\tau+3)^3 \dots & (\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tau+1)^{2n-1} & (\tau+2)^{2n-1} & (\tau+3)^{2n-1} \dots & (\tau+n)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

$p = \frac{n}{2}$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่ และ $p = \frac{n+1}{2}$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่

$$\Delta_k = (-1)^q (-1) \begin{vmatrix} (\tau+1) & (\tau+2) \dots & (\tau+k-1) & \tau & (\tau+k+1) \dots & (\tau+n) \\ (\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 \dots & (\tau+k-1)^3 & \tau^3 & (\tau+k+1)^3 \dots & (\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tau+1)^{2n-1} & (\tau+2)^{2n-1} & (\tau+k-1)^{2n-1} & \tau^{2n-1} & (\tau+k+1)^{2n-1} & (\tau+n)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในเท่านั้น ไม่ควรเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าของ q จะขึ้นอยู่กับ n และ k ดังแสดงในตารางข้างล่าง

n	k	q
คี่	คี่	$\frac{n}{2}$
คี่	คู่	$\frac{n-2}{2}$
คู่	คี่	$\frac{n+1}{2}$
คู่	คู่	$\frac{n-1}{2}$

$$\therefore a_k = (-1)^{q-p} \{ (-1)^k \binom{n}{k} \prod_{i=0}^n \frac{2\tau+i}{2\tau+k+i} \} \quad (6-11)$$

ในที่สุดจะได้ $a_k = \binom{n}{k} \prod_{i=0}^n \frac{2\tau+i}{2\tau+k+i} \quad (6-12)$

๖.๒.๒ การออกแบบวงจรมิผ่านความถี่กลาง

กำหนดให้ $\beta_0 = 0$ เรเดียน ในการออกแบบสำหรับย่านความถี่กลางไม่ผ่านของวงจรรอง-ความถี่จัตวาที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด ทำได้โดยกำหนดให้สมการ $\frac{n}{2}$ สมการแรกเป็นสมการที่มี $\omega_0 = 0$ เรเดียนต่อวินาที ซึ่งเป็นสมการจากวงจรมิผ่านความถี่ต่ำ [7] และส่วนที่เหลือเป็นสมการจากวงจรมิผ่านความถี่สูง [14] โดย $\omega_0 = \pi$ เรเดียนต่อวินาที ดังนั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้

$$\underline{A} \underline{a} = \underline{b}$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix}
 (\tau+1) & (\tau+2) & (\tau+3) \dots & (\tau+n) \\
 (\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 & (\tau+3)^3 \dots & (\tau+n)^3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (\tau+1)^{n-1} & (\tau+2)^{n-1} & (\tau+3)^{n-1} \dots & (\tau+n)^{n-1} \\
 \hline
 -(\tau+1) & (\tau+2) & -(\tau+3) \dots & (\tau+n) \\
 -(\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 & -(\tau+3)^3 \dots & (\tau+n)^3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -(\tau+1)^{n-1} & (\tau+2)^{n-1} & -(\tau+3)^{n-1} \dots & (\tau+n)^{n-1}
 \end{bmatrix}$$

(6-13)

$$\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix}
 -\tau \\
 -\tau^3 \\
 \vdots \\
 -\tau^{n-1} \\
 \hline
 -\tau \\
 -\tau^3 \\
 \vdots \\
 -\tau^{n-1}
 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a} \equiv$

$$\begin{bmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 \vdots \\
 a_n
 \end{bmatrix}$$

จัดคอลัมน์ของเมทริกซ์ \mathbf{A} เสียใหม่ ขณะเดียวกัน \mathbf{a} ก็เปลี่ยนไปด้วย แต่ \mathbf{b} ยังคงเดิม

$$\begin{matrix}
 \xleftarrow{\quad n \quad} & & \xrightarrow{\quad n \quad} \\
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 (\tau+1) & (\tau+3) & \dots & (\tau+n-1) & (\tau+2) & (\tau+4) & \dots & (\tau+n) \\
 (\tau+1)^3 & (\tau+3)^3 & \dots & (\tau+n-1)^3 & (\tau+2)^3 & (\tau+4)^3 & \dots & (\tau+n)^3 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 (\tau+1)^{n-1} & (\tau+3)^{n-1} & \dots & (\tau+n-1)^{n-1} & (\tau+2)^{n-1} & (\tau+4)^{n-1} & \dots & (\tau+n)^{n-1}
 \end{array} \right] & \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{n}{2} \\ \downarrow \end{matrix} \\
 \underline{A} \equiv & & & & & & & & \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{n}{2} \\ \downarrow \end{matrix} \\
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 -(\tau+1) & -(\tau+3) & \dots & -(\tau+n-1) & (\tau+2) & (\tau+4) & \dots & (\tau+n) \\
 -(\tau+1)^3 & -(\tau+3)^3 & \dots & -(\tau+n-1)^3 & (\tau+2)^3 & (\tau+4)^3 & \dots & (\tau+n)^3 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 -(\tau+1)^{n-1} & -(\tau+3)^{n-1} & \dots & -(\tau+n-1)^{n-1} & (\tau+2)^{n-1} & (\tau+4)^{n-1} & \dots & (\tau+n)^{n-1}
 \end{array} \right] & \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{n}{2} \\ \downarrow \end{matrix}
 \end{matrix} \tag{6-14}$$

$$\begin{matrix}
 \underline{b} \equiv \left[\begin{array}{c} -\tau \\ -\tau^3 \\ \vdots \\ -\tau^{n-1} \end{array} \right] & \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{n}{2} \\ \downarrow \end{matrix} \\
 \underline{a} \equiv \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right] & \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{n}{2} \\ \downarrow \end{matrix} \\
 \left[\begin{array}{c} -\tau \\ -\tau^3 \\ \vdots \\ -\tau^{n-1} \end{array} \right] & \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{n}{2} \\ \downarrow \end{matrix}
 \end{matrix}$$

$$\underline{A} \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 (\tau+1) & (\tau+3) & \dots & (\tau+n-1) & & & & & \\
 (\tau+1)^3 & (\tau+3)^3 & \dots & (\tau+n-1)^3 & & & & & \bigcirc \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 (\tau+1)^{n-1} & (\tau+3)^{n-1} & \dots & (\tau+n-1)^{n-1} & & & & & \\
 \hline
 & & & & (\tau+2) & (\tau+4) & \dots & (\tau+n) & \\
 & & & & (\tau+2)^3 & (\tau+4)^3 & \dots & (\tau+n)^3 & \\
 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & (\tau+2)^{n-1} & (\tau+4)^{n-1} & \dots & (\tau+n)^{n-1} & \\
 \hline
 & & & & & & & & \bigcirc
 \end{array} \right] \tag{6-15}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่ควรเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงแหล่งที่มาของเอกสารนี้

$$\underline{b} \equiv \begin{bmatrix} \text{○} \\ \vdots \\ -\tau \\ \vdots \\ -\tau^3 \\ \vdots \\ -\tau^{n-1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \frac{n}{2} \\ \downarrow \frac{n}{2} \end{matrix}$$

$$\underline{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ \hline a_2 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \frac{n}{2} \\ \downarrow \frac{n}{2} \end{matrix}$$

สมการชุด (๖-๑๕) จะเหลือเฉพาะ a_k เมื่อ k เป็นเลขคู่เท่านั้น คือ

$$\begin{bmatrix} (\tau+2) & (\tau+4) & \dots & (\tau+n) \\ (\tau+2)^3 & (\tau+4)^3 & \dots & (\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tau+2)^{n-1} & (\tau+4)^{n-1} & \dots & (\tau+n)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau^3 \\ \vdots \\ -\tau^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6-16)$$

จากคุณสมบัติของแวนเดอร์มอนท์แมทริกซ์ (Vandermonde matrix) จะได้

$$a_k = (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\tau+i}{\tau+i+\frac{k}{2}}$$

เมื่อ $k = 0, 2, 4, \dots, n$

๖.๓ ผลลัพธ์ตัวอย่าง

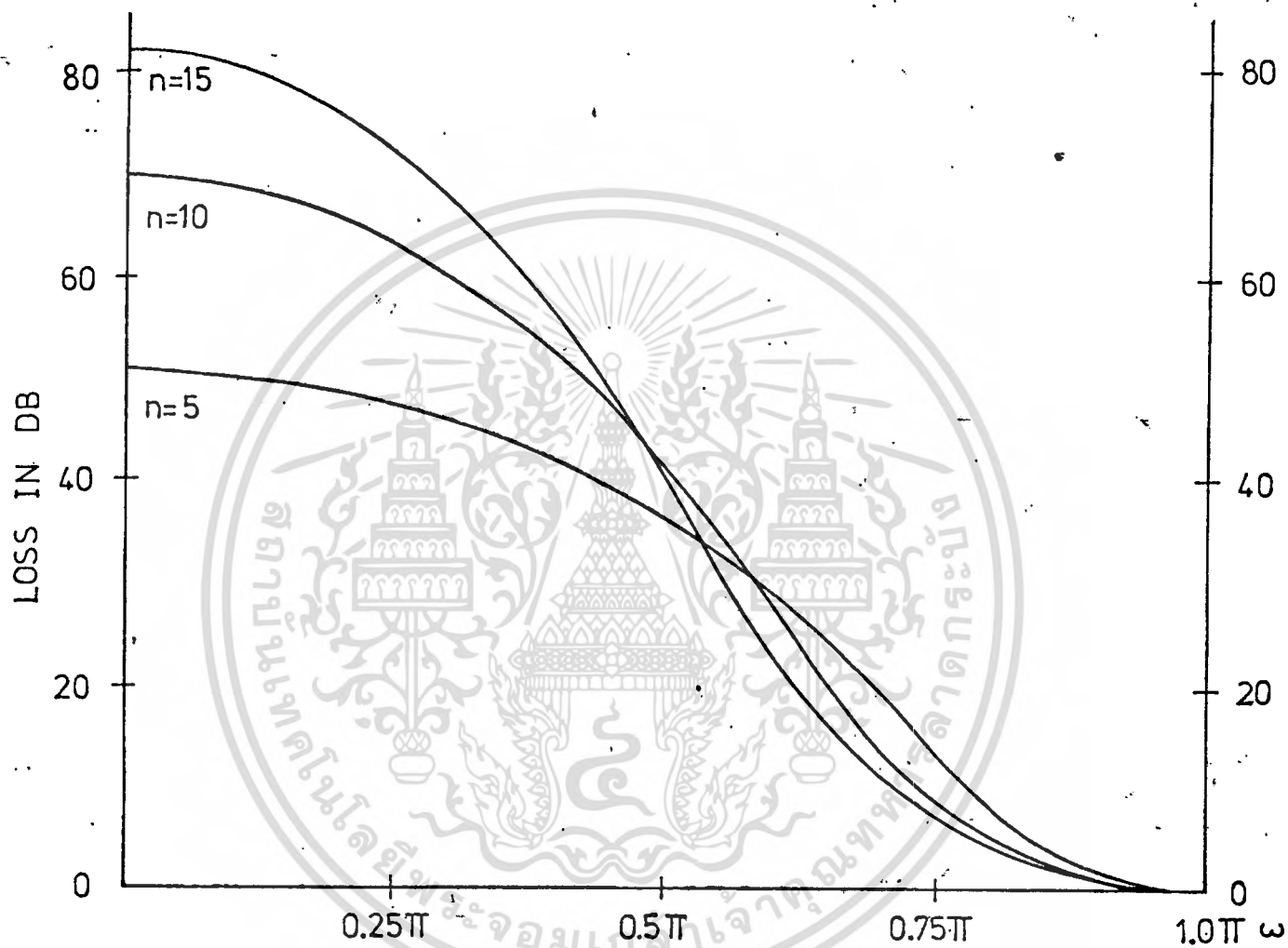
รูปที่ ๖.๑ และ ๖.๒ แสดงการลดทอนของสัญญาณและกรู๊ปดีเลย์ตามลำดับ ของวงจรรอง-ความถี่ดิจิทัลชนิดย่านความถี่สูงผ่าน เมื่อ $n=5, 10, 15$ และ $\tau=4$ วินาที. รูปที่ ๖.๓ และ ๖.๔ แสดงการลดทอนของสัญญาณและกรู๊ปดีเลย์ตามลำดับ ของวงจรรองความถี่ดิจิทัลชนิดย่านความถี่กลาง ไม่ผ่าน เมื่อ $n=12, 16, 20$ และ $\tau=4$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

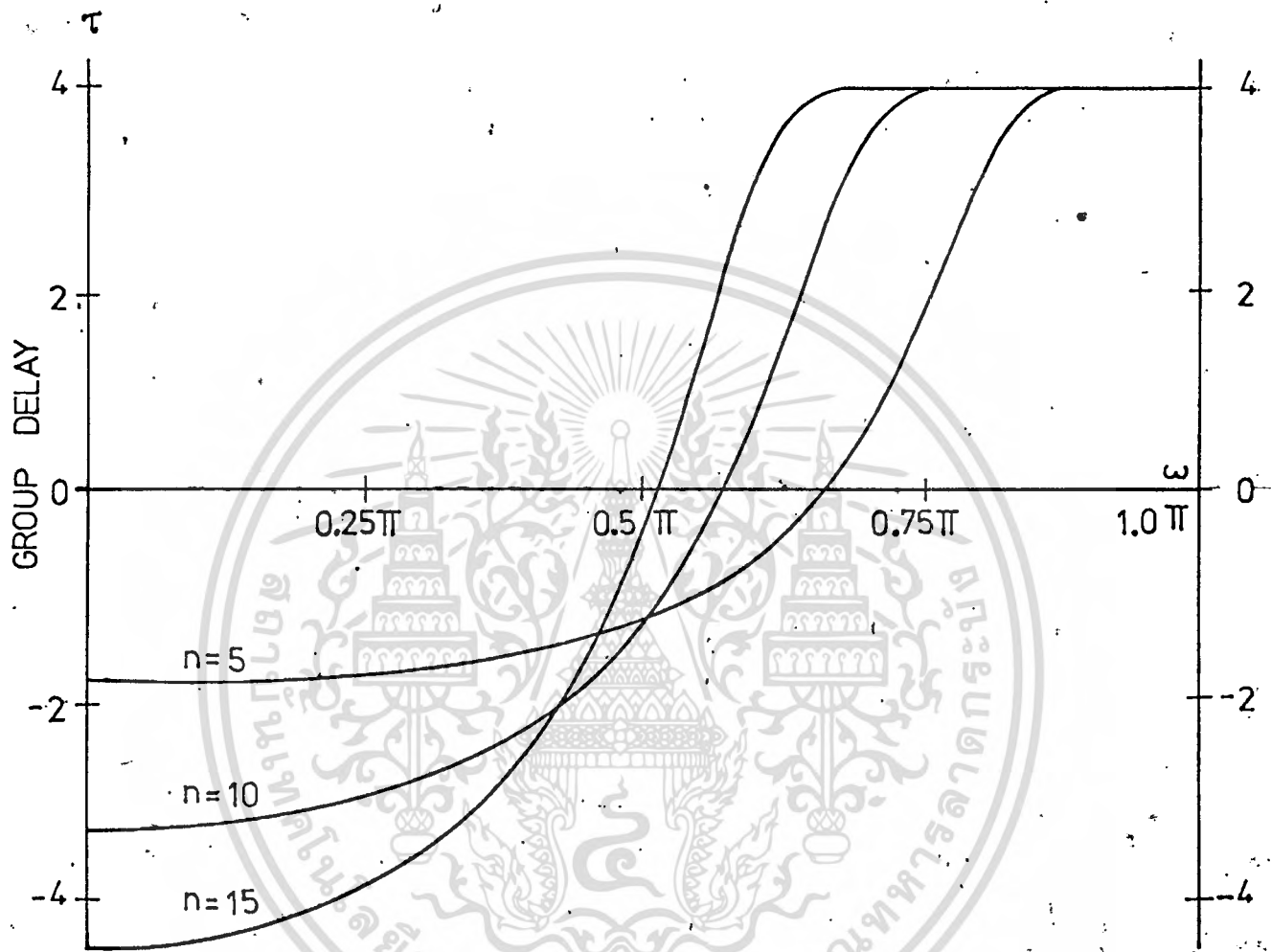
๖.๔ สรุป

เทคนิคในการออกแบบของบทนี้ ต้องการที่จะแสดงให้เห็นว่า การออกแบบที่บังเอิญให้ ย่นความถี่ไต่ผ่านนั้น ทำได้ไม่ยาก อีกทั้งยังคงให้รู้พรีเลย์ราบเรียบที่สุด ซึ่งการออกแบบโดยตรงอย่างนี้ จะมีคุณค่ากว่าการใช้สูตรแปลงความถี่ ดังนั้นถ้านำเอาเทคนิคในบทที่ ๔ และ ๕ มาประยุกต์เข้ากับเทคนิค ในบทที่ ๖ ก็จะได้เทคนิคในการออกแบบวงจรจิจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟที่สมบูรณ์ เพราะสามารถทำให้ขนาด กับรพรีเลย์มีความราบเรียบพร้อม ๆ กัน หรือสามารถควบคุมความกว้างของขนาดและรพรีเลย์ได้ สำหรับย่านความถี่ไอ ๑



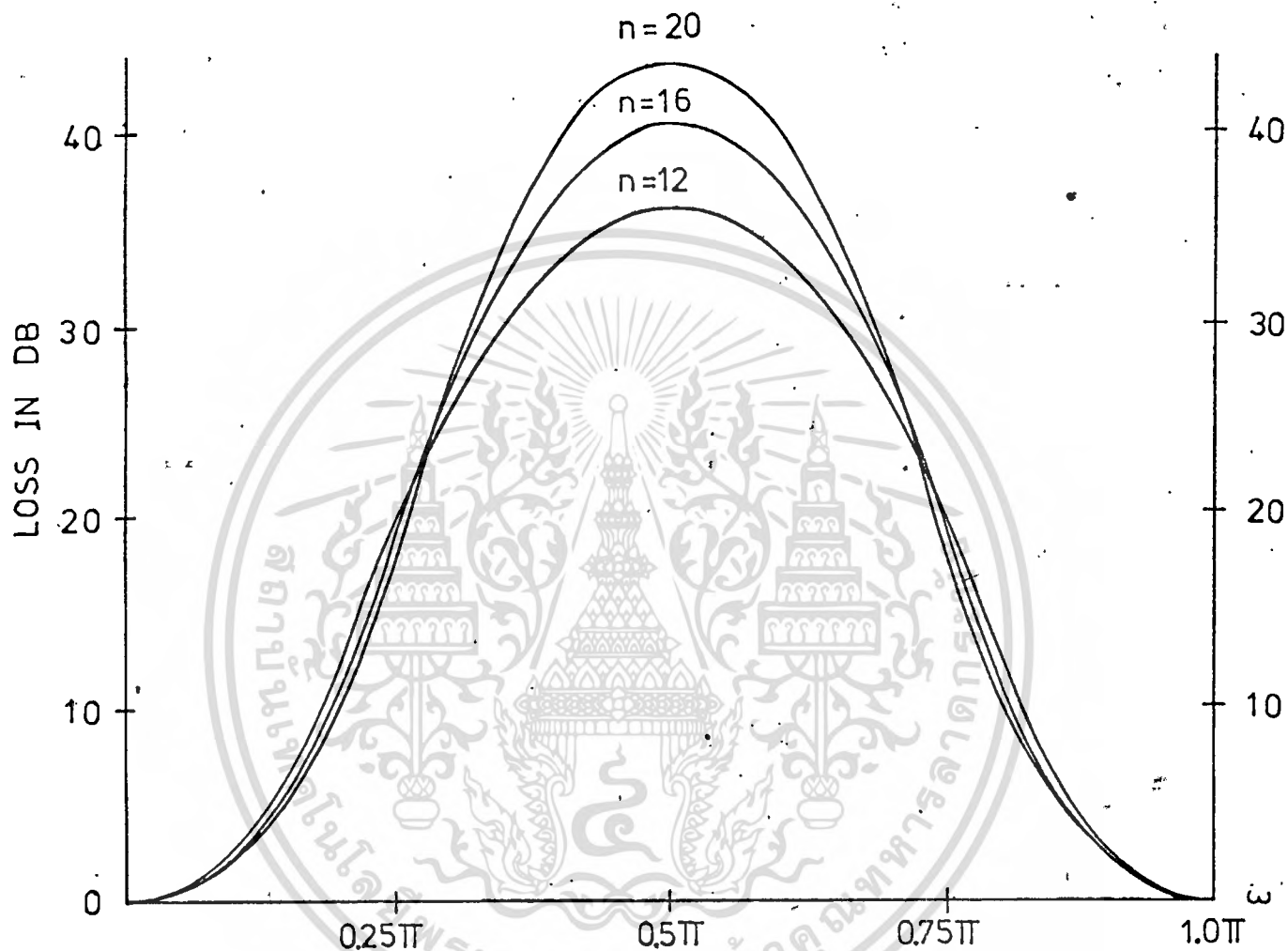


รูปที่ ๖.๑ การลดทอนของสัญญาณของวงจรกรองความถี่ดิจิทัล แบบรีเคอร์ซีฟ ชนิดย่านความถี่สูงผ่าน $n=5, 10, 15$ และ $\tau=4$ วินาที



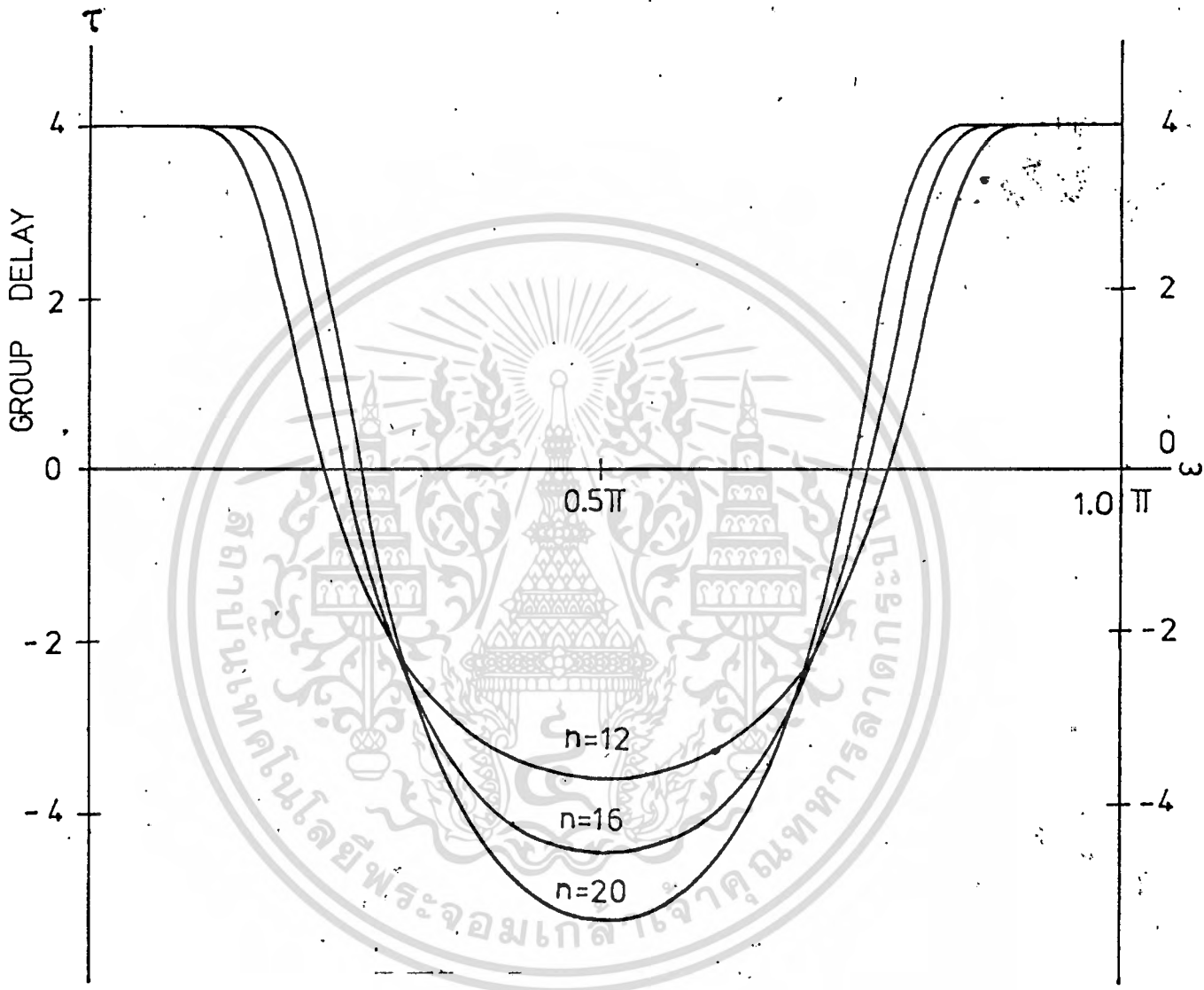
รูปที่ ๖.๒ กรู๊ปดีเลย์ของวงจรกรองความถี่ที่จัตตอล แบบรีเคอร์ซีฟ ชนิดย่านความถี่สูงผ่าน

$n=5, 10, 15$ และ $\tau=4$ วินาที



รูปที่ ๖.๓ การลดทอนของสัญญาณของวงจรกรองความถี่ดีจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟ ชนิดย่าน

ความถี่กลางไม่ผ่าน $n=12, 16, 20$ เมื่อ $\tau=4$ วินาที



รูปที่ ๖.๔ กราฟที่เฉลี่ยของวงจรรองความถี่ดิจิทัล แบบบิวทเชอร์ซีฟ ชนิดย่านความถี่กลางไม่ผ่าน $n=12, 16, 20$ เมื่อ $\tau=4$ วินาที

บทที่ ๗

วงจรรองความถี่ดิจิทัลชนิดผ่านความถี่กลาง แบบไซน์-โคไซน์ฟังก์ชันขนาดกำลังสอง ที่มีขนาดราบเรียบที่สุด สามารถปรับความคมปลายทั้งสอง

(A sine-cosine squared-magnitude function for maximally flat digital bandpass filters with adjustable skirt selectivities)

๗.๑ บทนำ

การออกแบบของบทที่ ๕ เป็นการควบคุมความกว้างของขนาด แต่บทนี้เป็นารควบคุมความคมของขนาด จากการใช้โบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มเมชัน แปลงวงจรรองความถี่นาลอกชนิดผ่านความถี่กลางให้เป็นวงจรรองความถี่ดิจิทัล จะเกิดซีโร (Zero) ที่ $\omega T=0$ และ $\omega T=\pi$ เรเดียน [9] ความคมของปลายทั้งสองจะสมมาตรกันก็ต่อเมื่อความถี่กลาง $=0.5\pi$ เรเดียนเท่านั้น ถ้าหากความถี่กลางเปลี่ยนไปอยู่ระหว่าง $0 < \omega T < 0.5\pi$ หรือ $0.5\pi < \omega T < \pi$ ความคมของปลายทั้งสองจะเปลี่ยนไป และสามารถควบคุมอัตราความคมได้ด้วยการเปลี่ยนแปลงจำนวนซีโรที่ $\omega T=0$ กับ $\omega T=\pi$ เรเดียน เทคนิคใน [15] ได้ทำการออกแบบไว้ แต่ขนาดจะเกิดขอบบริเวณย่านความถี่ที่ผ่าน เทคนิคในบทนี้จึงเป็นการออกแบบให้ขนาดตรงบริเวณย่านความถี่ที่ผ่าน ราบเรียบที่สุด

๗.๒ การออกแบบ

ให้ฟังก์ชันขนาดกำลังสองของวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบคอรีเวอสมอน (Butterworth-like) ชนิดย่านความถี่กลางผ่าน

$$[H(\omega)]^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 \left[\frac{\sin^2(\omega T/2) - \sin^2(\omega_0 T/2)}{\sin^2(\omega_1 T/2) - \sin^2(\omega_0 T/2)} \right]^{2N} \left[\frac{\cos^2(\omega_1 T/2)}{\cos^2(\omega T/2)} \right]^P \left[\frac{\sin^2(\omega_1 T/2)}{\sin^2(\omega T/2)} \right]^Q}$$

(7-1)

เมื่อ $2N$ เป็นอันดับของวงจรกรองความถี่... $p+q$ เป็นจำนวนชิโร้ทั้งหมด โดยที่ $0 \leq p+q \leq 2N$
 ω_1 คือความถี่คัทออฟต่ำ และ ω_2 คือความถี่คัทออฟสูง โดย ω_0 เป็นความถี่กลางที่มีความราบเรียบที่สุด
 ω_0 หาได้จาก

$$[H(\omega_1)]^2 = [H(\omega_2)]^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \quad (7-2)$$

นั่นคือ

$$\left[\frac{\sin^2(\omega_2 T/2) - \sin^2(\omega_0 T/2)}{\sin^2(\omega_1 T/2) - \sin^2(\omega_2 T/2)} \right]^{2N} \left[\frac{\cos^2(\omega_1 T/2)}{\cos^2(\omega_2 T/2)} \right]^P \left[\frac{\sin^2(\omega_1 T/2)}{\sin^2(\omega_2 T/2)} \right]^Q = 1$$

หรือ

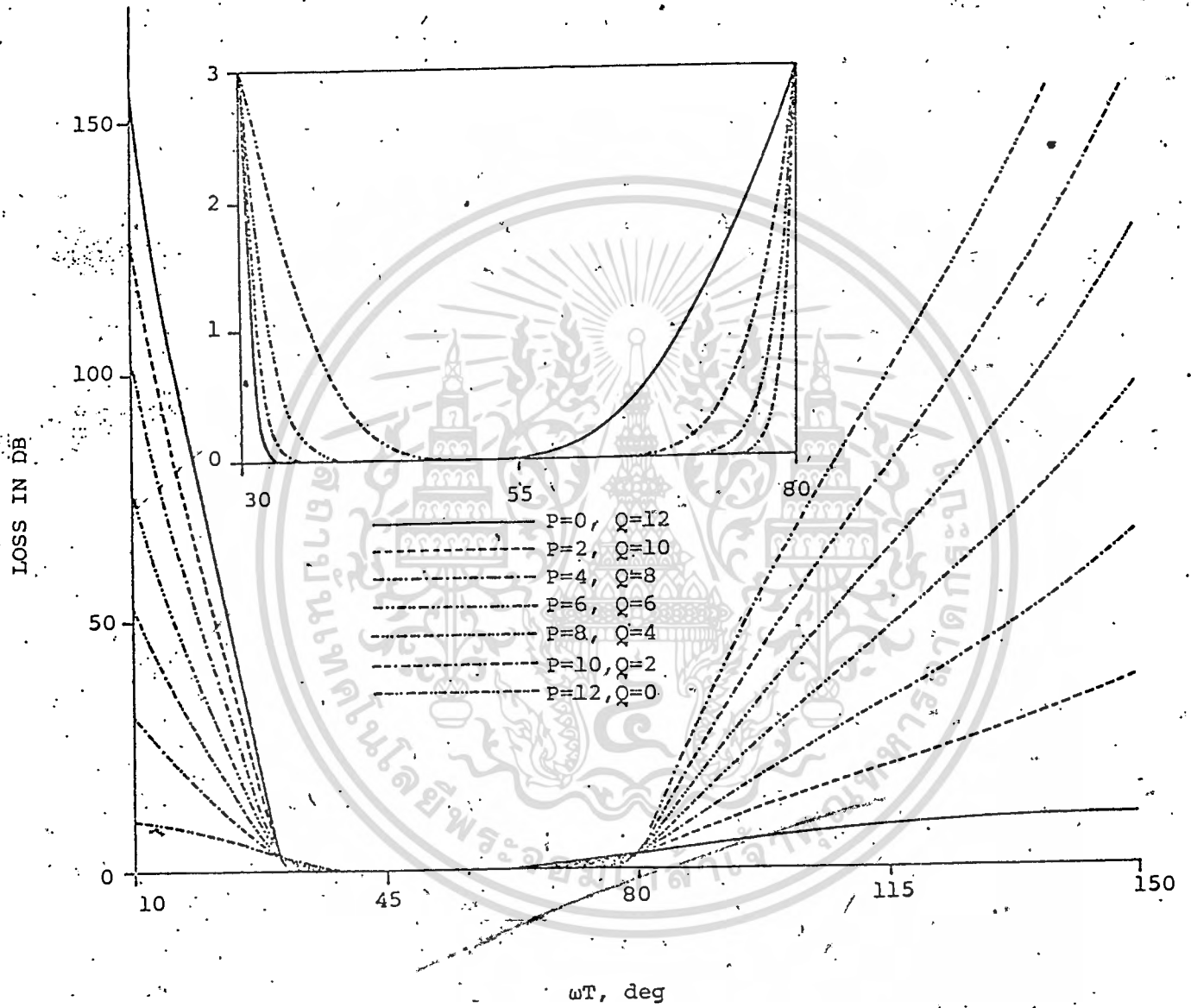
$$\omega_0 T = 2 \sin^{-1} \left[\frac{\sin^2(\omega_2 T/2) + \left\{ \cos^2(\omega_2 T/2) / \cos^2(\omega_1 T/2) \right\}^{\frac{P}{2N}} \left\{ \sin^2(\omega_2 T/2) / \sin^2(\omega_1 T/2) \right\}^{\frac{Q}{2N}} \sin^2(\omega_1 T/2)}{1 + \left\{ \cos^2(\omega_2 T/2) / \cos^2(\omega_1 T/2) \right\}^{\frac{P}{2N}} \left\{ \sin^2(\omega_2 T/2) / \sin^2(\omega_1 T/2) \right\}^{\frac{Q}{2N}}} \right] \quad (7-3)$$

๗.๓ ผลลัพธ์ตัวอย่าง

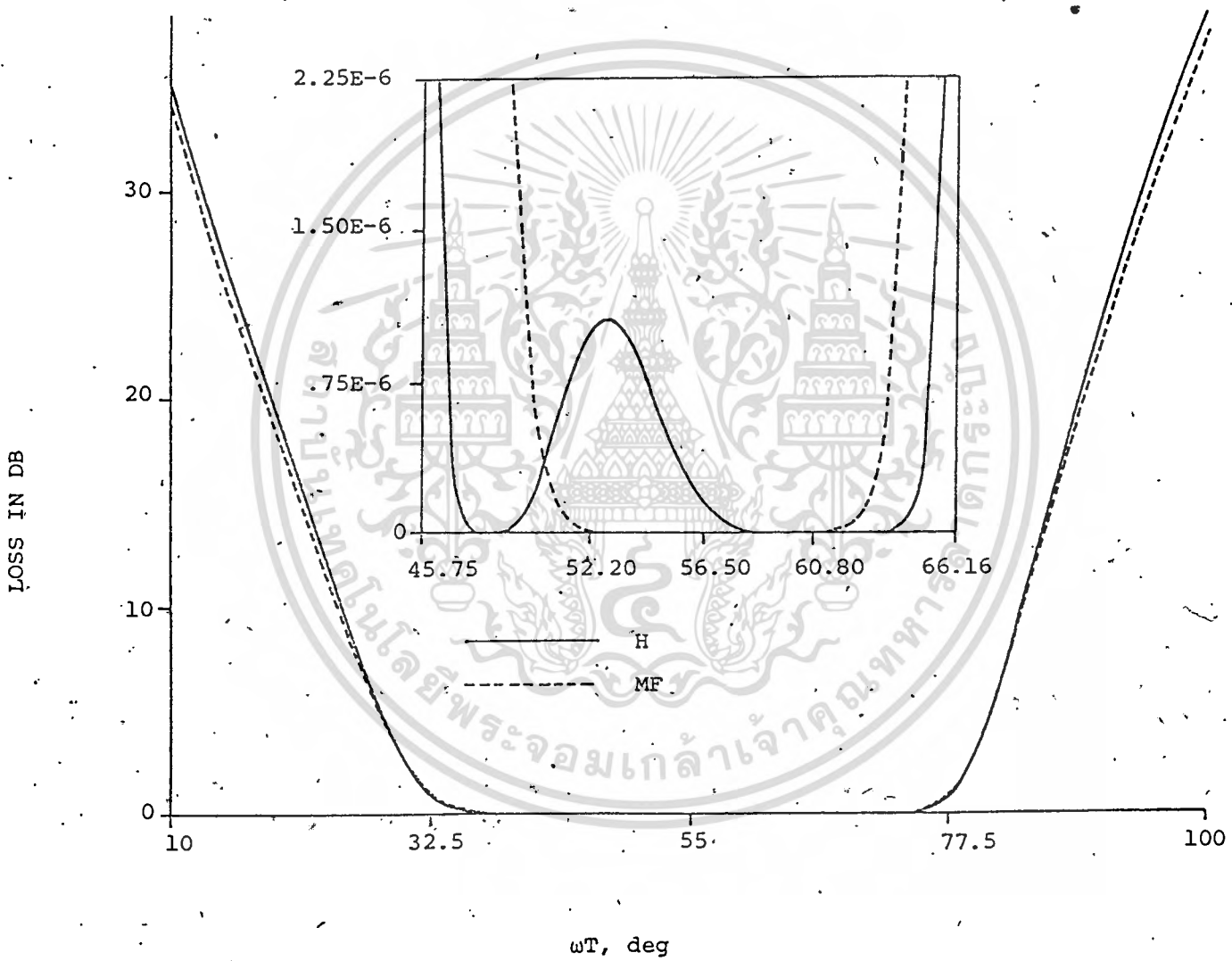
กรณีที่ $N=6, \omega_1 T=30^\circ, \omega_2 T=80^\circ$ และ $\epsilon=1$ รูปที่ ๖.๑ แสดงการสูญเสียสัญญาณ เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนชิโร้ที่ 0 กับ π เรเดียน รูปที่ ๖.๒ การเปรียบเทียบกรณีที่ $N=6, P=4$ และ $Q=2$
 H: หมายถึงผลที่ได้จากการออกแบบของ [15] และ MF หมายถึงผลที่ได้จากการออกแบบของบทนี้

๗.๔ สรุป

เทคนิคในการออกแบบบทนี้ P และ Q แปรได้จาก 0 ถึง $2N$ ทำให้วงจรกรองความถี่ดี-
 ตอลมีโอกาสเลือกใช้อัตราความคม (Cut-off rate) ถึง $(2N+1)/2$ ค่า ในขณะที่เทคนิคของ [15] มีโอกาส
 เลือกได้เพียง N ค่า ข้อดีอีกอย่างคือขั้นตอนการปรับย่านความถี่ที่ผ่านจะราบเรียบที่สุด ดังแสดงไว้ในรูปที่ ๗.๖
 เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ขึ้นต่อการค้า
 ไม่ว่ากรรมใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ๗.๑ แสดงถึงการสูญเสียสัญญาณ เมื่อ $N=6, P+Q=2N$



รูปที่ ๗.๒ การเปรียบเทียบผลที่ได้จาก [15] (H) กับผลที่ได้จากการออกแบบของบทที่ ๖ (MF) เมื่อ $N=6, P=4$ และ $Q=2$

บทที่ ๘

วงจรรองความถี่ดิจิทัล ขนาดบริเวณย่านความถี่กลางที่ผ่าน มีลักษณะเป็นลูกคลื่นเท่ากันหมด สามารถปรับความคมปลายทั้งสอง

(An equiripple bandpass recursive digital filter with adjustable skirt selectivities)

๘.๑ บทนำ

เทคนิคในการออกแบบบทนี้ จะออกแบบให้ขนาดบริเวณย่านความถี่กลางที่ผ่าน มีลักษณะเป็นคลื่นเท่ากันหมด ทำให้อัตราความคมสูงกว่า ของบทที่ ๗ ถึงแม้ว่าเทคนิค [15] ออกแบบให้เป็นผลคูณของฟังก์ชันเชบี เชฟสองฟังก์ชันได้ แต่ตรงบริเวณย่านความถี่ที่ผ่าน ขนาดจะเป็นลูกคลื่นที่ไม่เท่ากัน ทำให้ความคมของ [15] น้อยกว่าเทคนิคในบทนี้ เทคนิคนี้ทำได้ด้วยการใช้เทคนิคการแปลงตัวแปร (Frequency transform variable) ของ [16,17]

๘.๒ การออกแบบ

ให้

$$W = \sqrt{\frac{S^2 + \omega_2^2 A}{S^2 + \omega_1^2 A}}, \quad \text{Re } W \geq 0 \quad (8-1)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างระนาบ W กับระนาบ S วงจรรองความถี่ที่ได้จากการแปลงระนาบนี้ รับประกันได้ว่า ขนาดบริเวณย่านความถี่ที่ผ่านจะมีลักษณะเป็นลูกคลื่นเท่ากันหมด ω_{1A} และ ω_{2A} เป็นขอบความถี่ต่ำและสูงของวงจรรองความถี่นาลอก ใช้สูตรการแปลงโบลีเดียร์ แทน $S = \frac{Z-1}{Z+1}$ ลงในสมการที่ (๘-๑)

$$W = \sqrt{\frac{\left[\frac{Z-1}{Z+1}\right]^2 + \tan^2 \omega_{2D} T/2}{\left[\frac{Z-1}{Z+1}\right]^2 + \tan^2 \omega_{1D} T/2}}, \quad \text{Re } W \geq 0 \quad (8-2)$$

เมื่อ ω_{1D} และ ω_{2D} เป็นขอบความถี่ต่ำและสูงของวงจรรองความถี่ดิจิทัล T คือช่วงเวลาในการแซมปลิง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้อันดับของวงจรรองความถี่ $2N$ มี $P+Q+R=2N$. P, Q และ R คือจำนวนของซีโรที่ $Z=1, -1$ และ 0 ตามลำดับ แทนค่าซีโรของ Z ลงในสมการ (๘-๒) ก็จะได้

$$W = \tan \omega_{2D} T/2 / \tan \omega_{1D} T/2, \quad W=1 \text{ และ } W = \left[\frac{1 + \tan^2 \omega_{2D} T/2}{1 + \tan^2 \omega_{1D} T/2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ตามลำดับ ดังนั้น}$$

สามารถจัดให้อยู่ในรูปของโพลีโนเมียลได้ว่า

$$E(W) + WF(W) = \left[\frac{W + \tan \omega_{2D} T/2}{\tan \omega_{1D} T/2} \right]^P (W+1)^Q \left(W + \left[\frac{1 + \tan^2 \omega_{2D} T/2}{1 + \tan^2 \omega_{1D} T/2} \right]^{\frac{1}{2}} \right)^R \quad (8-3)$$

$E(W)$ กับ $WF(W)$ เป็นค่าจริงและจินตยะของโพลีโนเมียล ส่วนทรานส์ฟอร์ฟังก์ชันในระนาบ W ที่มีขนาดเป็นลูกคลื่นเท่ากันหมด เขียนได้เป็น

$$|H(W)|^2 = H(W)H(-W) = \frac{E^2(W) - W^2F(W)}{(1+K_p^2)E^2(W) - W^2F(W)} \quad (8-4a)$$

$$\therefore H(-W) = \frac{E(W) - WF(W)}{\sqrt{(1+K_p^2)E^2(W) - W^2F(W)}} \quad (8-4b)$$

α_p เป็นค่าการสูญเสีย (Loss) ในย่านความถี่ที่ผ่าน K_p จะมีความสัมพันธ์กับ α_p ดังสมการ

ข้างล่าง

$$K_p^2 = 10^{\alpha_p/10} - 1 \quad (8-5)$$

จากสมการ (8-4b) คำนวณหาโพล แล้วแปลงให้กลับไปอยู่ในระนาบ Z

น่าสังเกตว่า $Z=0$ จะไม่มีผลต่อขนาดของผลตอบสนอง กรณีที่ไม่มี $Z=0$ ก็หมายความว่า $R=0$

ดังนั้นถ้า $R>0$ แสดงว่า $2N>P+Q$ ซึ่งในที่สุดเราจะได้ความสัมพันธ์ที่ว่า $2N \geq P+Q \geq 0$

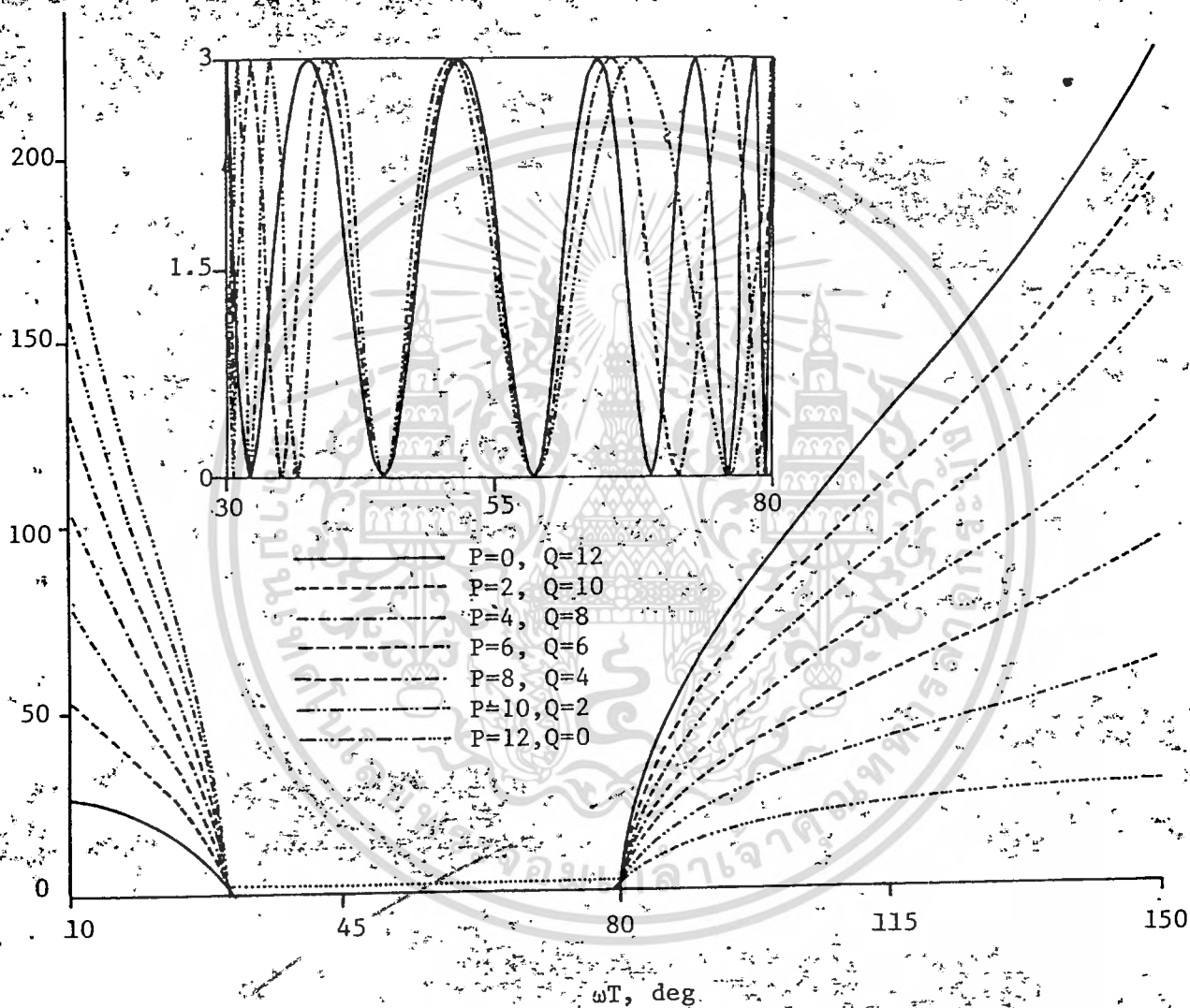
๘.๓ ผลลัพธ์ตัวอย่าง

กำหนดให้ $2N=12$, $\omega_{1T}=30^\circ$, $\omega_{2T}=80^\circ$ และ $\alpha_p=3\text{db}$. รูปที่ ๘.๑ แสดงค่าการสูญเสียเมื่อ $P+Q=12, R=0$ และได้ขยายเสถียรของบริเวณย่านความถี่ที่ผ่าน รูปที่ ๘.๒ แสดงการเปรียบเทียบระหว่างเทคนิคที่ใช้สัญญาณ ER กับของ [15] ใช้สัญญาณ R1 เมื่อ $P=2, Q=4$ และ $R=6$

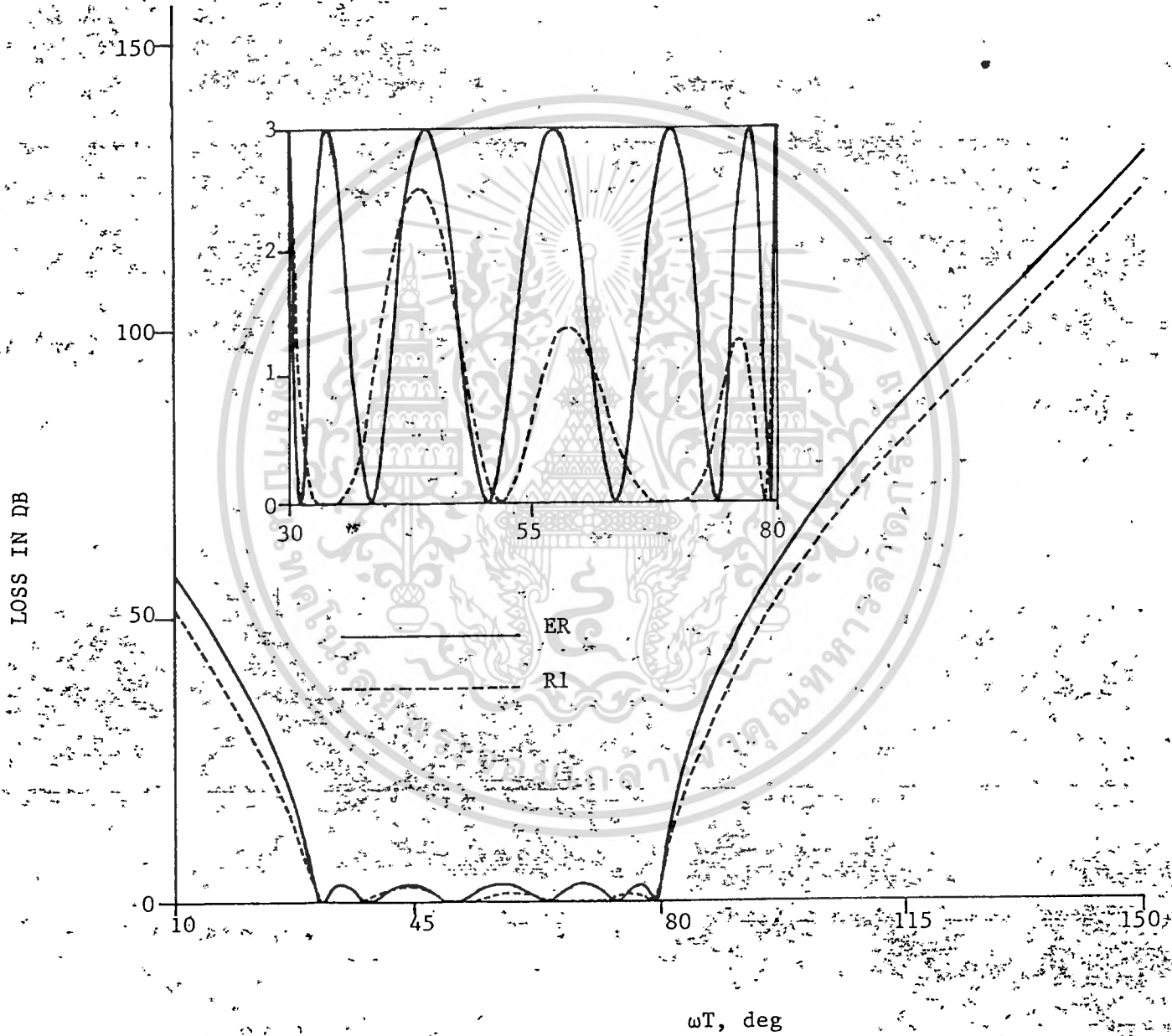
๘.๔ สรุป

เทคนิคในการออกแบบวิธีนี้ จะให้โอกาสได้เลือกใช้งานจรรยาบรรณความถี่ที่จืดจางที่มีอัตราความคมต่าง ๆ ถึง $(2N+1)!$ ค่า อีกทั้งอัตราความคมสูงกว่าที่ได้จาก [15] ถึงแม้ว่าเทคนิค [15] จะใช้ฟังก์ชันเชบีเชฟสองฟังก์ชันคูณกันก็ตาม ความคมก็ยังสู้ไม่ได้ยู่ดี ทั้งนี้เป็นเพราะฟังก์ชันคเชบีเชฟที่ไม่เหมือนกันมาคูณกัน ย่อมไม่มีโอกาสที่จะทำให้ยอดของลูกคลื่นบริเวณความถี่ที่ผ่านเท่ากันหมดได้





รูปที่ ๔.๑ ค่าการสูญเสีย เมื่อ $2N=12, \omega_1 T=30^\circ; \omega_2 T=80^\circ, \alpha_p=3\text{db}$ และ $R=0$



รูปที่ ๘.๖ เปรียบเทียบค่าการสูญเสีย เมื่อ $2N=12, P=2, Q=4, R=6$ และ $\alpha_p=3\text{db}$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ ๔

สรุป

บทที่ ๑ กล่าวถึงปัญหาซึ่งเป็นที่มาของวิทยานิพนธ์ และเทคนิคริเริ่ม บทที่ ๒ กล่าวถึงภูมิหลังของวงจรรองความถี่ดิจิทัล บทที่ ๓ เป็นการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่ย่านความถี่โคผ่านก็ได้ โดยให้ขนาดและกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด แต่จะมีปัญหาคือ เกิดยอดของผลตอบสนองในกรณีอันดับของเศษและส่วนต่างกันมาก ๆ และไม่สามารถจะควบคุมความกว้างของขนาดและกรุปดีเลย์ได้ บทที่ ๔ เป็นเทคนิคการออกแบบที่ให้ขนาดและกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุดพร้อม ๆ กัน ผลตอบสนองจะไม่เกิดยอดขึ้นมาเลย ไม่ว่าอันดับของเศษและส่วนจะต่างกันเท่าใด ที่เป็นเช่นนี้เพราะใช้โพลีโนเมียลเงาเป็นเศษของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน โดยส่วนของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน ได้จากวงจรรองความถี่ที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด เทคนิคของบทนี้สามารถควบคุมความกว้างของขนาดได้ โดยการเปลี่ยนอันดับของโพลีโนเมียลเงา แต่ไม่สามารถควบคุมความกว้างของกรุปดีเลย์ บทที่ ๕ จึงเป็นเทคนิคในการออกแบบให้กรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด และสามารถควบคุมความกว้างของขนาดและกรุปดีเลย์ได้ด้วย เทคนิคในการออกแบบที่กล่าวมาข้างต้น สามารถที่จะออกแบบให้ผ่านความถี่ใดก็ได้

เทคนิคการออกแบบของธีราน(Thiran)และเฟทไวส์(Fettwise) [7,8] เป็นการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด ชนิดผ่านความถี่ต่ำ แต่ถ้าต้องการวงจรรองสัญญาณสำหรับความถี่อื่นผ่าน ก็ควรที่จะออกแบบเฉพาะย่านความถี่นั้นผ่านโดยตรง ใช้สูตรการแปลงความถี่เข้ามาช่วยไม่ได้ เพราะจะทำให้เฟสไม่เป็นเชิงเส้น กรุปดีเลย์ที่ได้จะไม่ราบเรียบ บทที่ ๖ จึงเป็นตัวอย่างการออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีกรุปดีเลย์ราบเรียบที่สุด ชนิดผ่านความถี่สูงและไม่ผ่านความถี่กลาง

การออกแบบวงจรรองความถี่ดิจิทัล ที่ไม่คำนึงถึงกรุปดีเลย์ แต่ต้องการเลือกใช้อัตราการลดทอนสัญญาณที่ขอบทั้งสองของย่านความถี่ที่ผ่าน ฮาซรา(Hafzra) [15] ได้ทำการออกแบบไว้ แต่จะมีข้อเสียคือ บริเวณย่านความถี่กลางที่ผ่าน ขนาดจะไม่ราบเรียบที่สุดอย่างของบัตเตอร์เวิร์ธ(Butterworth) หรือเป็นยอดคลื่นเท่ากันหมดอย่างของเชบีเชฟ(Chebyshev) ในบทที่ ๗ จึงได้เสนอเทคนิคใหม่ให้ขนาดตรงบริเวณย่านความถี่กลางที่ผ่านราบเรียบที่สุด และ บทที่ ๘ เป็นเทคนิคสำหรับให้ขนาดตรงบริเวณย่านความถี่กลางที่ผ่านมีลักษณะเป็นยอดคลื่นเท่ากันหมด โดยเทคนิคในบทที่ ๗ และที่ ๘ จะให้โอกาสในการเลือกอัตราการลดทอนสัญญาณมากกว่าเทคนิคใน [15]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ไม่ได้ทำตารางสัมประสิทธิ์ของวงจรรองความถี่ที่จัดคอลที่ออกแบบไว้ในบทต่างๆ แต่ก็ได้บันทึก เป็นโปรแกรมไว้สำหรับผู้สนใจและจะนำไปใช้งาน โดยโปรแกรมที่ว่านั้นไม่ได้จำกัดอันดับของวงจรรองความถี่ที่จัดคอล

สำหรับผู้สนใจที่จะทำวิจัยต่อจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ พอลจะแนะนำได้ ๒ ทางคือ

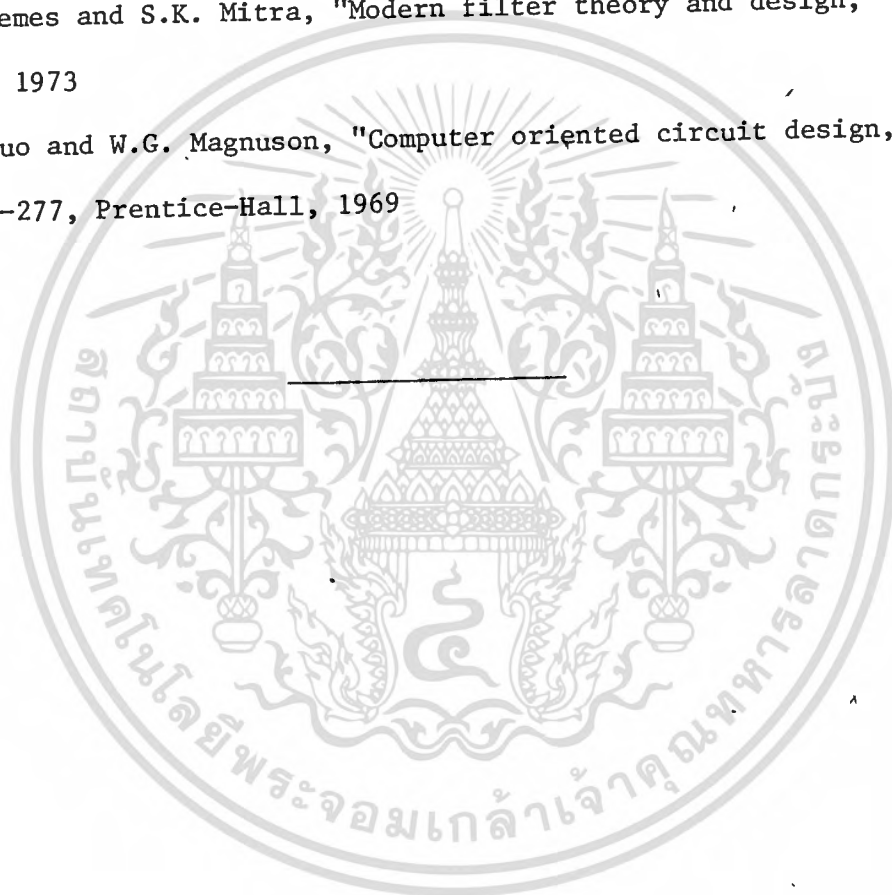
๑. หาสูตรสำเร็จรูป(Closed form formular) ของการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของวงจรรองความถี่ที่จัดคอลในบทที่ ๓,๔ และ ๕ ส่วนบทที่ ๖ ได้หาสูตรสำเร็จไว้แล้วและพอที่จะถือเป็นตัวอย่างได้ ถ้าหาสูตรสำเร็จได้ จะลดค่าความผิดพลาด(Error) จากการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ลง ทั้งนี้เพราะการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ในบทดังกล่าว ใช้เกาส์อีลิมีเนชัน(Guass elimination)

๒. ออกแบบวงจรรองความถี่ที่จัดคอลแบบรีเคอร์ซีฟใน ๒ มิติ(2-Dimesion) ซึ่งยังอยู่ในยุคบุกเบิก โดยเฉพาะอย่างยิ่งการออกแบบที่ให่วงจร เสถียร เสมอ จึงมีงานที่จะให้ค้นคว้าและวิจัยมากกว่าวงจรรองความถี่ที่จัดคอลในมิติเดียว(One-Dimesion)

บทความและหนังสืออ้างอิง

- [1] B. Gold and C.M. Rader, Digital Processing of signals, New York, McGraw-Hill, 1969
- [2] A. Peled and B. Liu, Digital Signal Processing Theory, Design, and Implementation John Wiley & Sons, 1979
- [3] L.R. Rabiner and C.M. Rader, Digital Signal Processing, IEEE Press, 1972
- [4] C.D. McGillém and G.R. Cooper, Continuous and Discrete Signal and system Analysis, Holt, Rinehart and Winston, 1974
- [5] R.W. Hamming, Digital Filter, Prentice-Hall, 1977
- [6] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall, 1975
- [7] J.P. Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, pp. 659-644, Nov. 1971
- [8] A. Fettwies, "A Simple design of maximally flat delay digital filters," IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-20, pp.112-114, June 1972
- [9] See for example R.E. Bogner and A.G. Constantinides, Introduction to digital filtering, New York, Wiley, 1975
- [10] P. Thajchayapong and P. Lomtong, "A recursive digital filter with maximally flat linear phase at an arbitrary specified frequency," Proc. IEEE, Vol.66, No.5, pp.594-596, May 1978
- [11] A. Budak, "A Maximally flat phase and controllable magnitude approximation," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-12, pp.279; June 1965
- [12] A.H. Marshak, D.E. Johnson, and J.R. Johnson, " A Bessel rational filter," IEEE Trans. Circuit Syst., Vol.CAS-21, pp. 797-799, Nov. 1974
- [13] P. Thajchayapong and P. Lomtong, "A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filter with Controllable Magnitude," IEEE Trans. Circuits Syst.,

- [14] P.Thajchayapong and P. Lomtong, " A Recursive digital filter with Maximally Flat Linear Phase at an Arbitrary Specified Frequency," Proc. IEEE, Vol.66 No.5, May 1978
- [15] S.N. Hazra, "New Squared-magnitude function for digital bandpass filters," Electron. Lett., Vol.11, No.15, 24th July 1975
- [16] G.C. Temes and S.K. Mitra, "Modern filter theory and design," Chap 2, pp.63-66, Wiley, 1973
- [17] F.F. Kuo and W.G. Magnuson, "Computer oriented circuit design," Chap.6, pp.264-277, Prentice-Hall, 1969



ภาคผนวกที่ ๑

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ ๓

```

10  REM : PROGRAM GENERATE MATRIX & SOLVED COEFFICIENT OF " A RECURSIVE
20  REM : DIGITAL FILTER WITH SIMULTANEOUS MAXIMALLY FLAT MAGNITUDE AND
25  REM : GROUP DELAY AT AN ARBITRARY SPECIFIED FREQUENCY"
30  REM : BY GAUSS ELIMINATION METHOD (SUBROUTINE.Simq)
40  REM : M=ORDER OF NUMERATOR
50  REM : N=ORDER OF DENOMINATOR
60  REM : Td=A PRESCRIBED GROUP DELAY IN SECONDS
70  REM : W0=A SPECIFIED FREQUENCY IN RADIAN PER SECOND
80  REM : B0=A PRESCRIBED PHASE IN RADIAN AT W=W0
100 REM : N(*)=COEFFICIENT OF NUMERATOR
110 REM : D(*)=COEFFICIENT OF DENOMINATOR
120 OPTION BASE 1
130 DIM A(20,20),C(20),F(400),G(20),H(20),X(20),R(0:20),Im(0:20),Real(20),Imag(20)
140 PRINTER IS 16
150 M=5
160 N=6
170 W0=.5*PI
180 Td=1
190 B0=0
191 PRINT "M=";M,"N=";N, "GROUP DELAY=";Td
200 N1=M+N+1
210 A(1,1)=1
220 FOR I=2 TO N1
230 A(I,1)=0
240 REDIM A(N1,N1)
250 NEXT I
260 K=5
270 J=1
280 FOR I=1 TO M
290 A(J,+1)=I^K*COS(I*W0)
300 REDIM A(N1,N1)
310 NEXT I
320 FOR I=M+1 TO N1-1
330 I1=I-M
340 A(J,I+1)=- (I1+Td)^K*COS(I1*W0+B0)
350 REDIM A(N1,N1)
360 NEXT I
370 C(J)=Td^K*COS(B0)
380 H(J)=C(J)
390 REDIM C(N1),H(N1)
400 IF J>N1 THEN 570
402 J=J+1
410 FOR I=1 TO M
420 A(J,I+1)=I^K*SIN(I*W0)
430 REDIM A(N1,N1)
440 NEXT I
450 FOR I=M+1 TO N1-1
460 I1=I-M
470 A(J,I+1)=- (I1+Td)^K*SIN(I1*W0+B0)

```

```

480 REDIM A(N1,N1)
490 NEXT I
500 C(J)=Td^K*SIN(B0)
510 H(J)=C(J)
520 REDIM C(N1),H(N1)
530 IF J>=N1 THEN 570
540 J=J+1
550 K=K+1
560 GOTO 280
570 FOR I=1 TO N1
580 FOR J=1 TO N1
590 L5=N1*(I-1)+J
600 F(L5)=A(J,I)
610 NEXT J
620 NEXT I
630 CALL Simq(F(*),C(*),N1,Ks) (สับรoutines (Subroutine) ของ IBM)
640 MAT G=A*C
650 MAT X=H-G
660 GOSUB Printn
670 R(N)=1
680 FOR J=1 TO N
690 R(N-J)=C(M+J+1)
700 NEXT J
710 FOR J=0 TO N
720 PRINT "R(";J;")=";R(J)
730 NEXT J
740 MAT Im=ZER
750 Itmax=100
760 Tolf=.0000001
770 Tola=.0000001
780 CALL Siljak(N,R(*),Im(*),Tola,Tolf,Itmax,Real(*),Imag(*)) (สับรoutines ของ HP-45)
790 PRINT " SOLVE ROOT OF DENOMINATOR OF TRANSFER FUNCTION"
800 PRINT " BY SET OF Z^(+) POLYNOMIAL"
810 PRINT " SYSTEM WILL STABLE WHEN Mag LESS THAN 1 "
820 FOR J=1 TO N
830 Mag=Real(J)*Real(J)+Imag(J)*Imag(J)
840 Mag=SQR(Mag)
850 PRINT "Real=";Real(J);TAB(25);"Imag=";Imag(J);TAB(50);"Mag=";Mag
860 NEXT J
870 STOP
880 END
890 Printn: !
900 PRINT "M=";M;"GROUP DELAY=";Td; "BETA=";B;"W0=";W0;"K=";TK
910 PRINT "HERE IS THE SOLUTION";TAB(40);"HERE IS THE ERROR"
920 FOR I=1 TO M+1
930 PRINT SPA(5);"N("&VAL$(I-1)&") = "&VAL$(C(I));TAB(45);VAL$(X(I))
940 NEXT I
950 FOR I=M+2 TO N1
960 PRINT SPA(5);"D("&VAL$(I-M-1)&") = "&VAL$(C(I));TAB(45);VAL$(X(I))
970 NEXT I
980 RETURN

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้คัดลอกเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวกที่ ๒

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ ๔

```

10 REM : PROGRAM GENERATE MATRIX & SOLVE COEFFICIENT OF " A MAXIMALLY FLAT
20 REM : GROUP DELAY RECURSIVE DIGITAL FILTER WITH IMPROVE PASSBAND
30 REM : MAGNITUDE RESPONSE "
40 REM : M1 = ORDER OF NUMERATOR
50 REM : N = ORDER OF DENOMINATOR
60 REM : B(*) = COEFFICIENT OF NUMERATOR
70 REM : B1(*) = COEFFICIENT OF DENOMINATOR
80 REM : T = GROUP DELAY
90 REM : W = A SPECIFIED FREQUENCY IN RADIAN PER SECOND
100 OPTION BASE 1
110 DIM C(15,15),B(15),F(200),G(15),H(15),X(15),A1(15,15),B1(15),F1(15),G1(15),
H1(15),X1(15)
120 M1=4
130 M=M1/2+1
140 N=6
150 Z1=M/2
160 Z2=Z1
170 INTEGER Z2
180 IF Z1-Z2=0 THEN 210
190 Mn=M+1
200 GOTO 220
210 Mn=M
220 T=10
230 W=PI/2
240 FOR K=1 TO N STEP 2
250 FOR I=1 TO N
260 C(K,I)=(I+T)^(K-1)*SIN(I*W)
270 REDIM C(N,N)
280 NEXT I
290 B(K)=0
300 H(K)=B(K)
310 REDIM B(N),H(N)
320 NEXT K
330 FOR K1=2 TO N STEP 2
340 FOR I1=1 TO N
350 C(K1,I1)=(I1+T)^(K1-1)*COS(I1*W)
360 REDIM C(N,N)
370 NEXT I1
380 B(K1)=-T^(K1-1)
390 H(K1)=B(K1)
400 REDIM B(N),H(N)
410 NEXT K1
420 PRINT "N=";N, "DELAY=";T,"M1=";M1
430 FOR I=1 TO N
440 FOR J=1 TO N
450 L5=N*(I-1)+J
460 F(L5)=C(J,I)
470 NEXT J
480 NEXT I
490 CALL Sfmq(F(*),B(*),N,Ks)

```

```

500 MAT G=C*B
510 MAT X=H-G
520 GOSUB Print
530 A1(1,1)=1
540 REDIM A1(M,M)
550 FOR I=2 TO M
560 A1(I,1)=0
570 REDIM A1(M,M)
580 NEXT I
590 FOR K4=1 TO Mn STEP 2
600 B4=0
610 FOR L4=1 TO N
620 B4=B4+(L4+T)^(K4-1)*COS(L4*W)*B(L4)
630 NEXT L4
640 FOR I4=2 TO M
650 A1(K4,I4)=(I4-1)^(K4-1)*COS((I4-1)*W)
660 REDIM A1(M,M)
670 NEXT I4
680 B1(K4)=T^(K4-1)+B4
690 H1(K4)=B1(K4)
700 REDIM B1(M),H1(M)
710 NEXT K4
720 FOR K5=2 TO M STEP 2
730 B5=0
740 FOR L5=1 TO N
750 B5=B5+(L5+T)^(K5-1)*SIN(L5*W)*B(L5)
760 NEXT L5
770 FOR I5=2 TO M
780 A1(K5,I5)=(I5-1)^(K5-1)*SIN*(I5-1)*W)
790 REDIM A1(M,M)
800 NEXT I5
810 B1(K5)=B5
820 H1(K5)=B5
830 REDIM B1(M),H1(M)
840 NEXT K5
850 FOR I6=1 TO M
860 FOR J6=1 TO M
870 L6=M*(I6-1)+J6
880 F1(L6)=A1(J6,I6)
890 NEXT J6
900 NEXT I6
910 CALL Simq(F1(*),B1(*),M,Ks)
920 MAT G1=A1*B1
930 MAT X1=H1-G1
940 GOSUB Print1
950 END

```

ภาคผนวกที่ ๓

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ ๕

```

10 REM : PROGRAM GENERATE MATRIX & SOLVED COEFFICIENT OF MAXIMALLY FLAT
20 REM : GROUP DELAY WITH ADJUSTABLE MAGNITUDE AND CHECK STABILITY
30 REM : BY GAUSS ELIMINATION METHOD (SUBROUTINE Simq)
40 REM : M=ORDER OF NUMERATOR
50 REM : N=ORDER OF DENOMINATOR
60 REM : Td=A PRESCRIBED GROUP DELAY IN SECONDS
70 REM : W0=A SPECIFIED FREQUENCY IN RADIAN PER SECOND
80 REM : B=A PRESCRIBED PHASE IN RADIAN AT W=W0
90 REM : Kk=ADJUST MAGNITUDE NUMBER
100 REM : D(*)=COEFFICIENT OF NUMERATOR
110 REM : N(*)=COEFFICIENT OF DENOMINATOR
120 OPTION BASE 1
130 DIM A(15,15),C(15),F(200),G(15),H(15),X(15),R(0:15),Im(0:15),Real(15),Imag(15)
140 PRINTER IS 16
150 M=10
160 N=10
170 Index=1
180 Td=10
190 Kk=.125
200 Tk=Kk
210 T=Tk*Td
220 B=0
230 P=0
240 K=1
250 W0=.5*PI
260 FOR I=1 TO M
270 A(K,I)=*I+T)^P*SIN(B+I*W0)
280 REDIM A(M,M)
290 NEXT I
300 C(K)=-T^P*SIN(B)
310 IF K=M THEN 430
320 K=K+1
330 P=P+1
340 FOR L=1 TO M
350 A(K,L)=(L+T)^P*COS(B+W0)
360 REDIM A(M,M)
370 NEXT L
380 C(K)=-T^P*COS(B)
390 IF K=M THEN 430
400 P=P+1
410 K=K+1
420 GOTO 260
430 FOR K=1 TO M
440 H(K)=C(K)
450 REDIM C(M),H(M)
460 NEXT K
470 FOR I=1 TO M
480 FOR J=1 TO M
490 L5=M*(I-1)+J
500 F(L5)=A(J,I)
510 NEXT J

```

```

520 NEXT I
530 CALL Simq(F(*),C(*),M,Ks)
540 MAT G=A*C
550 MAT X=H-G
560 IF Index=2 THEN 720
570 GOSUB Printn
580 R(N)=1
590 FOR J=1 TO N
600 R(N-J)=C(J)
610 NEXT J
620 MAT Im=ZER
630 Itmax=100
640 Tolf=.00000001
650 Tola=.00000001
660 CALL Siljak(N,R(*),Im(*),Tola,Tolf,Itmax,Real(*),Imag(*))
661 PRINT " SOLVE ROOT OF DENOMINATOR OF TRANSFER FUNCTION"
662 PRINT " BY SET OF Z^(+) POLYNOMIAL"
663 PRINT " SYSTEM WILL STABLE WHEN Mag LESS THAN 1"
670 FOR J=1 TO N
680 Mag=Real(J)+Imag(J)*Imag(J)
690 Mag=SQR(mag)
700 PRINT "Real=";Real(J);TAB(25);"Imag=";Imag(J);TAB(50);"Mag=";Mag
701 NEXT J
710 GOTO 730
720 GOSUB Printd
730 Index=Index+1
740 Kk=Kk-1
750 IF Index>2 THEN 780
760 M=N
770 GOTO 200
780 STOP
790 END

```

ภาคผนวกที่ ๔

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ ๖

กรณีของวงจรมีความถี่สูง

```

10 OPTION BASE 1
20 DIM A(20)
30 INPUT N,T
40 PRINTER IS 16
41 PRINT "N=";N,"DELAY=";T
50 FOR K=1 TO N
60 Q=1
70 F=1
80 P=1
90 L=N+1
100 FOR I=1 TO L
110 P=P*(2*T+I-1)/(2*T+K+I-1)
120 IF N-K>=I THEN 160
130 F=F
140 Q=Q
150 GOTO 180
160 F=F*(N-I+1)
170 Q=Q*(N-K-I+1)
180 NEXT I
190 A(K)=P*F/Q
200 PRINT "B(";K;")=";A(K)
210 NEXT K
220 END

```

กรณีของวงจรมีความถี่กลาง

```

10 OPTION BASE 1
20 DIM A(20)
30 PRINTER IS 16
40 INPUT Nn,T
50 PRINT "ORDER=";Nn,"GROUP DELAY=";T
60 N=Nn/2
70 FOR K=1 TO N
80 Q=1
90 P=1
100 F=1
110 L=N+1
120 FOR I=1 TO L
130 P=P*(T+I-1)/(T+I+K-1)
140 IF N-K>=I THEN 180
150 F=F
160 Q=Q
170 GOTO 200
180 F=F*(N-I+1)
190 Q=Q*(N-K-I+1)
200 NEXT I
210 A(K)=P*(-1)^K*F/Q
220 PRINT "A(";2*K;")=";A(K)
230 NEXT K
240 END

```

เอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ ๗

```

10 OPTION BASE !
20 PRINTER IS 16
30 PRINT "SOLVE FOR COS^(2P)*SIN^(2Q)"
40 P=10
50 N=6
51 Wp1=30*PI/180
52 Wp2=80*PI/180
60 Q=12-P
70 Alpha=3
80 A=Alpha/10
90 A1=10^A-1
91 P1=P/N
92 Q1=Q/N.
100 Ea=(COS(Wp2/2)/COS(Wp1/2))^P1
101 Eb=(SIN(Wp2/2)/SIN(Wp1/2))^Q1
102 E=Ea*Eb
110 E1=SQR((E*SIN(Wp1/2)*SIN(Wp1/2)+SIN(Wp2/2)*SIN(Wp2/2))/(1+E))
120 E2=ASN(E1)
130 W0=2*E2
140 A2=1
150 FOR I=1 TO N
160 A2=A2*(SIN(Wp1/2)*SIN(Wp1/2)-SIN(W0/2)*SIN(W0/2))^2
170 NEXT I
180 IF P>0 THEN 210
190 A3=1
200 GOTO 241
210 A3=1
220 FOR J=1 TO P
230 A3=A3*COS(Wp1/2)*COS(Wp1/2)
240 NEXT J
241 IF Q>0 THEN 244
242 A4=1
243 GOTO 250
244 A4=1
245 FOR K=1 TO Q
246 A4=A4*SIN(Wp1/2)*SIN(Wp1/2)
247 NEXT K
250 C=A1*A3*A4/A2
260 PRINT "Wp1=";Wp1;TAB(20);"Wp2=";Wp2;TAB(55);"P=";P;TAB(64);"Q=";Q
270 PRINT "W0=";W0;TAB(25);"C^2=";C;TAB(60);"N=";N
300 W=Wp1
310 B1=1
320 FOR I=1 TO N
330 B1=B1*(SIN(W/2)*SIN(W/2)-SIN(W0/2)*SIN(W0/2))^2
340 NEXT I
350 B2=1
360 IF P>0 THEN 390
380 GOTO 411
390 FOR J1=1 TO P
400 B2=B2*COS(W/2)*COS(W/2)
410 NEXT J1

```

ไม่ว่าใครก็ตามที่ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่าใครก็ตามที่หวังสั้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

411 B3=1
412 IF Q>0 THEN 414
413 GOTO 420
414 FOR L1=1 TO Q
415 B3=B3*SIN(W/2)*SIN(W/2)
416 NEXT L1
420 F=C*B1/(B2*B3)
430 H=1+F
440 G=C*((SIN(Wp1/2)*SIN(Wp1/2)-SIN(W0/2)*SIN(W0/2))^(2*N)/(COS(Wp1/2)^(2*P)*
SIN(Wp1/2)^(2*Q)))
450 Mag= 10*LGT(H)
460 Z=10*LGT(1+G)
470 PRINT "MAG Wp1=";Z;TAB(30);"MAG Wp2=";Mag,
480 END

```



ภาคผนวกที่ ๖

โปรแกรมสำหรับเทคนิคในบทที่ ๘

```

10  OPTION BASE 1
20  DIM A(20),A1(20),B(20),X(20),Y(20),Z(25),Rcoef(0:20),Icoef(0:20),Rroot(20)
Iroot(20),C(30),Z1(25),D1(0:20),D2(0:20)
30  DIM R1(20),R2(20),I1(20),I2(20),R4(0:2),R5(2),I4(0:2),I5(2)
40  DIM No(20),Ne(20),Do(20),De(20)
41  FOR L9=0 TO 12
50  P=L9
55  Q=12-L9
61  PRINTER IS 0
62  PRINT "P=";P,"Q=";Q
63  PRINTER IS 16
70  RAD
80  T1=TAN(15*PI/180)
90  T2=TAN(40*PI/180)
100 K5=T2/T1
110 PRINT "K5=";K5
120 K6=1
130 CALL Coef(K5,P,A(*),A1(*),B(*))
140 FOR I=1 TO P+1
150 PRINT "B(";I;")=";B(I)
160 NEXT I
170 PRINT "
190 CALL Coef(K6,Q,A(*),A1(*),C(*))
200 FOR I=1 TO Q+1
210 PRINT "C(";I;")=";C(I)
220 NEXT I
230 PRINT "
250 P4=P+1
260 Q4=Q+1
270 CALL Mul(P4,Q4,B(*),C(*),Z(*))
280 PRINT "
300 L=P+Q+1
310 FOR I=1 TO L STEP 2
330 D1(I-1)=Z(I)
350 NEXT I
360 FOR I=2 TO L STEP 2
380 D1(I-1)=-Z(I)
400 NEXT I
410 FOR I=1 TO L STEP 2
430 D2(I-1)=Z(I)*SQR(15^.3)
450 NEXT I
460 FOR I=2 TO L STEP 2
480 D2(I-1)=-Z(I)
500 NEXT I
510 L5=L-1
520 FOR I=0 TO L5
530 PRINT "D1(";I;")=";D1(I);TAB(30),"D2(";I;")=";D2(I)
540 NEXT I
550 PRINT "
560 FOR I5=0 TO L5

```

```

570 Icoef(I5)=0
580 NEXT I5
670 Itmax=700
680 Tola=.000001
690 Tolf=.000001
700 CALL Siljak(L5,D2(*),Icoef(*),Tola,Tolf,Itmax,R2(*),I2(*))
710 FOR I=1 TO L5
720 PRINT "R2('";I;"")=";R2(I);TAB(30);"I2('";I;"")=";I2(I)
730 NEXT I
740 PRINT "
750 FOR I=1 TO L5
760 Itmax=700
770 Tola=.000001
780 Tolf=.000001
781 PRINTER IS 0
790 T3=T1*T1
800 T4=T2*T2
810 R4(0)=-1-T4(1+T3)*(R2(I)-I2(I)*I2(I))
820 I4(0)=2*(1+T3)*R2(I)*T2(I)
830 R4(1)=2*(1-T4+(-1+T3)*(R2(I)*R2(I)-I2(I)*I2(I))
840 I4(1)=4*R2(I)*I2(I)*(-1+T3)
850 R4(2)=R4(0)
860 I4(2)=I4(0)
870 CALL Siljak(2,R4(*),I4(*),Tola,Tolf,Itmax,R5(*),I5(*))
880 FOR J=1 TO 2
881 A(J)=ATN(I5(J)/R5(J))
882 A1=SQR(R5(J)*R5(J)+I5(J)*I5(J))
883 IF A1>1 THEN 900
890 PRINT "R5('";J;"")=";R5(J);TAB(25);"I5('";J;"")=";I5(J);TAB(50);"AA('";J;"")=";A(J)
900 NEXT J
910 NEXT I
911 PRINTER IS 16
912 NEXT L9
920 END

```

ผลงานวิจัยที่พิมพ์ในวารสารนานาชาติ

- [1] P. Thajchayapong, P. Karnchanawadee and F. Cheevasuvit, " A Recursive Digital Filter with Simultaneous Maximally Flat Magnitude and Group Delay at an Arbitrary Specified Frequency," Proc. IEEE, Vol.67, No.5, pp.871-873, May 1979
- [2] P. Thajchayapong and F. Cheevasuvit, "A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filter with Improve Passband Magnitude Response," Proc.IEEE
- [3] P. Thajchayapong and F. Cheevasuvit, "Filter coefficients of highpass and a band-elimination recursive digital filter with maximaximally flat group dealy," Inter. Electronics.
- [4] P. Thajchayapong and F. Cheevasuvit, "Sine-Cosine squared-magnitude function for maximally flat digital bandpass filters with adjustable skirt selectivities, Electron. Lett., Vol.15, No.12, pp. 345-346, 7th June 1979
- [5] P. Thajchayapong, V. Suwatanapankul and F, Cheeyasuvit, "An equiripple Bandpass recursive digital filter with adjustable skirt selectivities," Proc.IEEE

scribed group delay in seconds. The sampling period is understood to be normalized to 1 s. Hence, from (2),

$$\frac{\sum_{i=0}^m a_i \cos i\omega - j \sum_{i=0}^m a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^n b_i \cos i\omega - j \sum_{i=0}^n b_i \sin i\omega} = \cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) - j \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) \quad (3)$$

or

$$\left[\sum_{i=0}^m a_i \cos i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos i\omega \cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) - \sin i\omega \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) \} \right] - j \left[\sum_{i=0}^m a_i \sin i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \{ \sin i\omega \cos(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) + \cos i\omega \sin(\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau) \} \right] = 0. \quad (4)$$

Let $x \equiv \omega - \omega_0$. Then, after some manipulations, we can write the real and imaginary parts of (4) separately in terms of the variable x as

A Recursive Digital Filter with Simultaneous Maximally Flat Magnitude and Group Delay at an Arbitrary Specified Frequency

P. THAJCHAYAPONG, P. KARNCHANAWADEE, AND P. CHEEVASUVIT

Abstract—A design technique for a recursive digital filter with simultaneously maximally flat magnitude and group delay at an arbitrary specified frequency is presented. It employs the power series expansion to formulate a set of simultaneous linear equations which can be solved with a standard computational algorithm.

I. INTRODUCTION

Design techniques for a low-pass recursive digital filter with maximally flat group delay are known [1], [2]; however, due to the nonlinearity in frequency transformations [3], a generalized design method [4] has to be developed to obtain, for example, a bandpass filter with maximally flat group delay. The passband magnitude responses of these bandpass filters, however, do not give a close approximation to the desired unity magnitude. A design technique which yields a simultaneous maximally flat approximation on both magnitude and group delay is described.

II. DESIGN THEORY

Let

$$H(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} / \sum_{i=0}^n b_i z^{-i} \quad (1)$$

be the transfer function of a recursive digital filter whose complex frequency response is required to approximate $\exp(-j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\})$, i.e., ideally

$$H(z)|_{z=\exp(j\omega)} = \exp(-j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}) \quad (2)$$

where $\omega_0 \equiv$ an arbitrary specified frequency in rad/s around which the approximation is made, $\beta_0 \equiv$ a prescribed phase at $\omega = \omega_0$, $\tau \equiv$ a pre-

$$\sum_{i=0}^m a_i (\cos ix \cos i\omega_0 - \sin ix \sin i\omega_0) - \sum_{i=0}^n b_i \{ \cos(i+\tau)x \cos(i\omega_0 + \beta_0) - \sin(i+\tau)x \sin(i\omega_0 + \beta_0) \} = 0 \quad (5a)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i (\sin ix \cos i\omega_0 + \cos ix \sin i\omega_0) - \sum_{i=0}^n b_i \sin(i+\tau)x \{ \cos(i\omega_0 + \beta_0) + \cos(i+\tau)x \sin(i\omega_0 + \beta_0) \} = 0. \quad (5b)$$

By expanding into the power series in x , (5a) and (5b) become

$$\sum_{i=0}^m a_i \left\{ \cos i\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k}}{2k!} - \sin i\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\} - \sum_{i=0}^n b_i \left\{ \cos(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k}}{2k!} - \sin(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\} = 0 \quad (6a)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i \left\{ \cos i\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin i\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{2k}}{2k!} \right\} - \sum_{i=0}^n b_i \left\{ \cos(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin(i\omega_0 + \beta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ((i+\tau)x)^{2k}}{2k!} \right\} = 0. \quad (6b)$$

For a maximally flat approximation, it is necessary that the coefficients of x^0, x^1, x^2, \dots must vanish. Also without loss of generality, we may assume $b_0 = 1$. These lead to

$$\sum_{i=0}^m a_i (i)^{2k} \cos i\omega_0 - \sum_{i=1}^n b_i (i+\tau)^{2k} \cos(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k} \cos \beta_0 \quad (7a)$$

Manuscript received November 8, 1978; revised December 21, 1978. The authors are with the Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology, Ladkrabang Campus, Ladkrabang, Bangkok, Thailand.

$$\sum_{i=0}^m a_i(i)^{2k} \sin i\omega_0 - \sum_{i=1}^n b_i(i+\tau)^{2k} \sin(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k} \sin \beta_0 \quad (7b)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i(i)^{2k+1} \cos i\omega_0 - \sum_{i=1}^n b_i(i+\tau)^{2k+1} \cos(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k+1} \cos \beta_0 \quad (7c)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i(i)^{2k+1} \sin i\omega_0 - \sum_{i=1}^n b_i(i+\tau)^{2k+1} \sin(i\omega_0 + \beta_0) = (\tau)^{2k+1} \sin \beta_0 \quad (7d)$$

Now by letting $k = 0, 1, 2, \dots$, we may write a set of simultaneous linear equations with the filter coefficients as the unknowns as

$$A x = c \quad (8)$$

where

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \dots & \cos m\omega_0 & | & -\cos(\omega_0 + \beta_0) & -\cos(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -\cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 \sin \omega_0 & \sin 2\omega_0 & \dots & \sin m\omega_0 & | & -\sin(\omega_0 + \beta_0) & -\sin(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -\sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 \cos \omega_0 & 2 \cos 2\omega_0 & \dots & m \cos m\omega_0 & | & -(1+\tau) \cos(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau) \cos(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau) \cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 \sin \omega_0 & 2 \sin 2\omega_0 & \dots & m \sin m\omega_0 & | & -(1+\tau) \sin(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau) \sin(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau) \sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 \cos \omega_0 & 2^2 \cos 2\omega_0 & \dots & m^2 \cos m\omega_0 & | & -(1+\tau)^2 \cos(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau)^2 \cos(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau)^2 \cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 \sin \omega_0 & 2^2 \sin 2\omega_0 & \dots & m^2 \sin m\omega_0 & | & -(1+\tau)^2 \sin(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau)^2 \sin(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau)^2 \sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 \cos \omega_0 & 2^3 \cos 2\omega_0 & \dots & m^3 \cos m\omega_0 & | & -(1+\tau)^3 \cos(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau)^3 \cos(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau)^3 \cos(n\omega_0 + \beta_0) \\ 0 \sin \omega_0 & 2^3 \sin 2\omega_0 & \dots & m^3 \sin m\omega_0 & | & -(1+\tau)^3 \sin(\omega_0 + \beta_0) & -(2+\tau)^3 \sin(2\omega_0 + \beta_0) & \dots & -(n+\tau)^3 \sin(n\omega_0 + \beta_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad m+n+1$$

$$x = [a_0 a_1 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n]^T \quad m+n+1$$

$$c = [\cos \beta_0 \sin \beta_0 \tau \cos \beta_0 \tau \sin \beta_0 \tau^2 \cos \beta_0 \tau^2 \sin \beta_0 \tau^3 \cos \beta_0 \tau^3 \sin \beta_0 \dots]^T \quad m+n+1$$

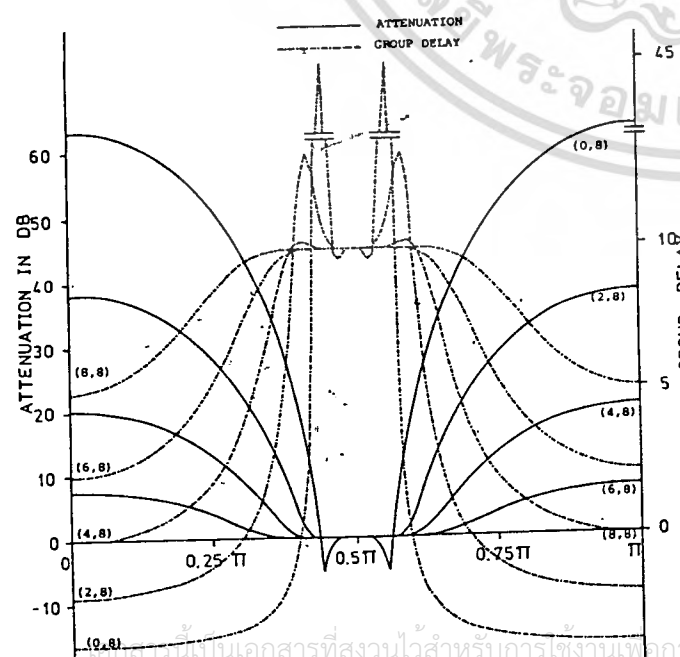


Fig. 1. Attenuation and group delay responses for $\tau = 10$, $n = 8$, and $m = 0, 1, \dots, 8$.

Although the elements in the last row of A are not expressed explicitly, they can always be generated, using (7a)–(7d) in accordance with value of m and n , to give a square matrix of dimension $(m+n+1) \times (m+n+1)$. The last element of c is also generated accordingly.

III. NUMERICAL RESULTS

To demonstrate the design technique, some results are presented. Fig. 1 illustrates the loss and group delay responses for the case of $\omega_0 = 0.5 \pi$ rad/s., $\beta_0 = 0$ rad and $\tau = 10$ s. It can be seen that for m closer to n , the responses become smoother. Fig. 2, therefore, illustrates the cases of $n - m = 2$. Also Fig. 3 shows the responses for various τ with $m = 4$ and $n = 6$.

IV. CONCLUDING REMARKS

A design technique which yields a recursive digital filter with a simultaneous maximally flat approximation on both magnitude and group delay at any prescribed frequency has been described. It employs the power series expansion to give a set of simultaneous linear equations, which can be solved by a computational algorithm such as Gauss-Jordan elimination. The responses show large deviation near the band-edges when the transfer function has the degree of numerator poly-

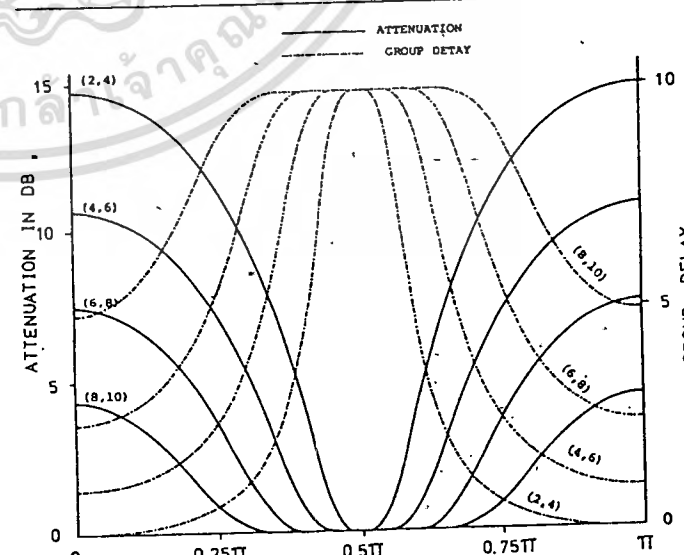


Fig. 2. Attenuation and group delay responses for $\tau = 10$, and $n - m = 2$.

nomial much lower than that of the denominator polynomial. However, they render the useful smooth responses when the degrees are closer. Finally, it should be mentioned that although the case of symmetrical

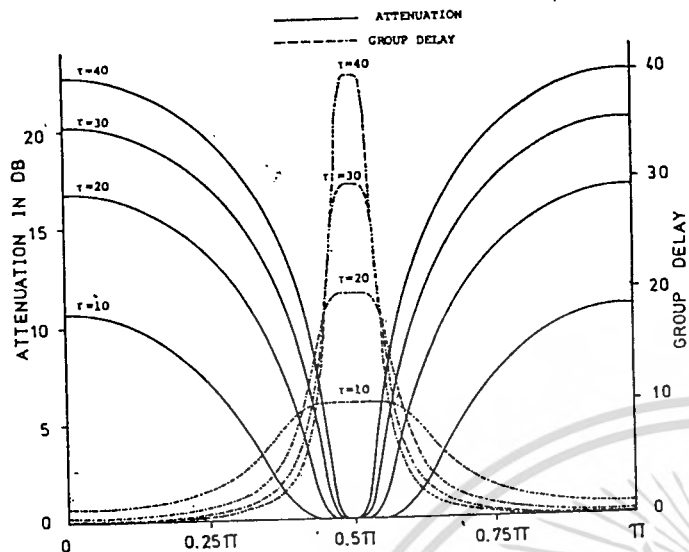


Fig. 3. Attenuation and group delay responses for $\tau = 10, 20, 30, 40$, $n = 6$, and $m = 4$.

bandpasses are illustrated, the technique is applicable for the approximation around any frequency including the low pass and high pass.

REFERENCES

- [1] J. P. Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-18, pp. 659-664, Nov. 1971.
- [2] A. Fettweis, "A simple design of maximally flat delay digital filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-20, pp. 112-114, June 1972.
- [3] See for example R. E. Bognor and A. G. Constantinides, *Introduction to Digital Filtering*. New York: Wiley, 1975.
- [4] P. Thajchayapong and P. Lomtong, "A recursive digital filter with maximally flat linear phase at an arbitrary specified frequency," *Proc. IEEE*, vol. 66, pp. 594-596, May 1978.

A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filter with Improved Passband Magnitude Response

P. THAJCHAYAPONG AND F. CHEEVASUVIT

Abstract—A technique is proposed for the design of a recursive digital filter with maximally flat responses in both magnitude and group delay. In comparison to the previous designs [1]–[3], the magnitude and group delay always show smooth responses no matter what the difference is in the polynomial degrees of the numerator and denominator.

INTRODUCTION

The simultaneous maximally flat approximation for a low-pass or bandpass recursive digital filter renders smooth magnitude and group delay responses only when the degrees of the numerator and denominator polynomials are close to each other [1]–[3]. Otherwise, the responses show deviations near the bandedges. A technique described in this correspondence is to avoid such difficulties. It starts with an all-pole transfer function with maximally flat group delay of Thiran [4], Fettweis [5], or one of authors [6]. The passband magnitude response is then improved in the maximally flat sense by including a proper mirror image polynomial. In this way, both magnitude and group delay responses show smooth characteristics for any degree of the numerator polynomial.

DESIGN PROCEDURE

Let an all-pole recursive digital filter approximating a group delay of τ s in a maximally flat sense [6] be

$$H_1(Z) = 1 / \sum_{i=0}^n b_i Z^{-i} \quad (1)$$

To improve the magnitude response, we add a mirror image polynomial to the numerator of $H_1(Z)$ as

$$H(Z) = \sum_{i=0}^m a_i Z^{-i} / \sum_{i=0}^n b_i Z^{-i} = Z^{-m/2} \left[\sum_{i=0}^{m/2} d_i \cos i\omega \right] / \sum_{i=0}^n b_i Z^{-i} \quad (2)$$

where

$$d_0 = a_{m/2}, d_i = 2a_{m/2-i} = 2a_{m/2+i}$$

and

$$i = 1, 2, \dots, m/2.$$

m is an even number.

The coefficients d_i 's are to be determined such that $H(Z)$ approximates $\exp -j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\}$ more closely. The parameters β_0 and ω_0 are the same as those defined in [3] and [6]. As $Z^{-m/2}$ implies a delay of $m/2$ s, it can be ignored from the approximation procedure. Hence, we can write the approximation requirement as

$$\left[\sum_{i=0}^{m/2} d_i \cos i\omega / \sum_{i=0}^n b_i Z^{-i} \right]_{Z=\exp j\omega} = \exp -j\{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau\} \quad (3)$$

or

$$\sum_{i=0}^{m/2} d_i \cos i\omega = \sum_{i=0}^n b_i \cos \{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau + i\omega\} - j \sum_{i=0}^n b_i \sin \{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau + i\omega\} \quad (4)$$

Do you wish the IEEE to return your art work?
 Yes No

It is therefore required that

$$\sum_{i=0}^{m/2} d_i \cos i\omega - \sum_{i=0}^n b_i \cos \{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau + i\omega\} = 0 \quad (5a)$$

and

$$\sum_{i=0}^n b_i \sin \{\beta_0 + (\omega - \omega_0)\tau + i\omega\} = 0 \quad (5b)$$

Equation (5b) has already been solved when b_i 's are determined [6]. Hence, we are left with (5a) to be solved for d_i 's.

Let $x = \omega - \omega_0$, we can write (5a) as

$$\sum_{i=0}^{m/2} d_i \{\cos ix \cos i\omega_0 - \sin ix \sin i\omega_0\} - \sum_{i=0}^n b_i \{\cos(\beta_0 + i\omega_0) \cos(i + \tau)x - \sin(\beta_0 + i\omega_0) \sin(i + \tau)x\} = 0 \quad (6)$$

Using a similar argument as in [6] that for a maximally flat approximation, it is necessary to expand $\cos ix$, $\sin ix$, $\cos(i + \tau)x$ and $\sin(i + \tau)x$ into the power series and equating the coefficients of x^0, x^1, x^2, \dots , to zero. We therefore have the following conditions

$$\sum_{i=0}^{m/2} \{(i)^{2k} \cos i\omega_0\} d_i = \sum_{i=0}^n \{(i + \tau)^{2k} \cos(\beta_0 + i\omega_0)\} b_i \quad (7a)$$

$$\sum_{i=0}^{m/2} \{(i)^{2k+1} \sin i\omega_0\} d_i = \sum_{i=0}^n \{(i + \tau)^{2k+1} \sin(\beta_0 + i\omega_0)\} b_i \quad (7b)$$

where $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$. By letting $k = 0, 1, 2, \dots, m/2 + 1$; we have a matrix equation

$$A d = B b \quad (8)$$

$$A \equiv \begin{matrix} \xrightarrow{m/2 + 1} \\ \begin{matrix} 1 & \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \dots & \cos m\omega_0/2 \\ 0 & \sin \omega_0 & 2 \sin 2\omega_0 & \dots & (m/2) \sin m\omega_0/2 \\ 0 & \cos \omega_0 & 2^2 \cos 2\omega_0 & \dots & (m/2)^2 \cos m\omega_0/2 \\ 0 & \sin \omega_0 & 2^3 \sin 2\omega_0 & \dots & (m/2)^3 \sin m\omega_0/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cos \omega_0 & 2^{m/2-1} \cos 2\omega_0 & \dots & (m/2)^{m/2-1} \cos m\omega_0/2 \\ 0 & \sin \omega_0 & 2^{m/2} \sin 2\omega_0 & \dots & (m/2)^{m/2} \sin m\omega_0/2 \end{matrix} \\ \uparrow \\ m/2 + 1 \end{matrix}$$

$$B \equiv \begin{matrix} \xrightarrow{n + 1} \\ \begin{matrix} \cos \beta_0 & \cos(\beta_0 + \omega_0) & \cos(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & \cos(\beta_0 + n\omega_0) \\ \tau \sin \beta_0 & (1 + \tau) \sin(\beta_0 + \omega_0) & (2 + \tau) \sin(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & (n + \tau) \sin(\beta_0 + n\omega_0) \\ \tau^2 \cos \beta_0 & (1 + \tau)^2 \cos(\beta_0 + \omega_0) & (2 + \tau)^2 \cos(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & (n + \tau)^2 \cos(\beta_0 + n\omega_0) \\ \tau^3 \sin \beta_0 & (1 + \tau)^3 \sin(\beta_0 + \omega_0) & (2 + \tau)^3 \sin(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & (n + \tau)^3 \sin(\beta_0 + n\omega_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau^{m/2-1} \cos \beta_0 & (1 + \tau)^{m/2-1} \cos(\beta_0 + \omega_0) & (2 + \tau)^{m/2-1} \cos(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & (n + \tau)^{m/2-1} \cos(\beta_0 + n\omega_0) \\ \tau^{m/2} \sin \beta_0 & (1 + \tau)^{m/2} \sin(\beta_0 + \omega_0) & (2 + \tau)^{m/2} \sin(\beta_0 + 2\omega_0) & \dots & (n + \tau)^{m/2} \sin(\beta_0 + n\omega_0) \end{matrix} \\ \uparrow \\ m/2 + 1 \end{matrix}$$

$$d \equiv [d_0, d_1, d_2, \dots, d_{m/2}]^T$$

and

$$b \equiv [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n]^T$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในการเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่วางกรรมใดทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Hence for a given b , d can always be determined. To illustrate the technique, the loss and group delay responses with $\tau = 10$ s, $n = 20$ for various m are shown in Fig. 1. Fig. 2 shows the loss and group delay responses with $n = 6$ $m = 4$ for various group delays. In all cases, $\beta_0 = 0$ and $\omega_0 = 0.5\tau$ rad/s.

CONCLUSION

A design technique has been described whereby a digital filter with maximally flat in both magnitude and group delay can be obtained. Although the approximation is not performed simultaneously as in the previous design [2], [3], the magnitude and group delay responses always give smooth characteristics; whatever the difference is in the degrees of the numerator and denominator polynomials. Finally, it should be mentioned that though the bandpass case has been explained throughout, the technique is also applicable for the low-pass case. This is done by setting $\beta_0 = 0$ and $\omega_0 = 0$.

REFERENCES

- [1] C. J. Wellekens and A. N. Godard, "Simultaneous flat approximations of the ideal low-pass attenuation and delay for recursive digital distributed, and lumped filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-24, pp. 221-230, May 1977.
- [2] P. Thajchayapong, F. Cheevasvit, and P. Karnchanawadee, "An alternative simultaneous maximally flat approximation for a low-pass recursive digital filter," *Proc. IEEE*, vol. 67, pp. 429-430, Mar. 1979.
- [3] P. Thajchayapong, P. Karnchanawadee, and F. Cheevasvit, "A recursive digital filter with simultaneous maximally flat magnitude and group delay at an arbitrary specified frequency," *Proc. IEEE*, vol. 67, pp. 871-873, May 1979.
- [4] J. P. Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-18, pp. 659-664, Nov. 1971.
- [5] A. Fettweis, "A simple design of maximally flat delay digital filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-20, pp. 112-114, June 1972.
- [6] P. Thajchayapong and P. Lomtong, "A recursive digital filter with maximally flat linear phase at an arbitrary specified frequency," *Proc. IEEE*, vol. 66, pp. 594-596, May 1978.
- [7] B. Gold and C. M. Rader, *Digital Processing of Signals*. New York: McGraw-Hill, 1969, ch. 3, pp. 93-97.

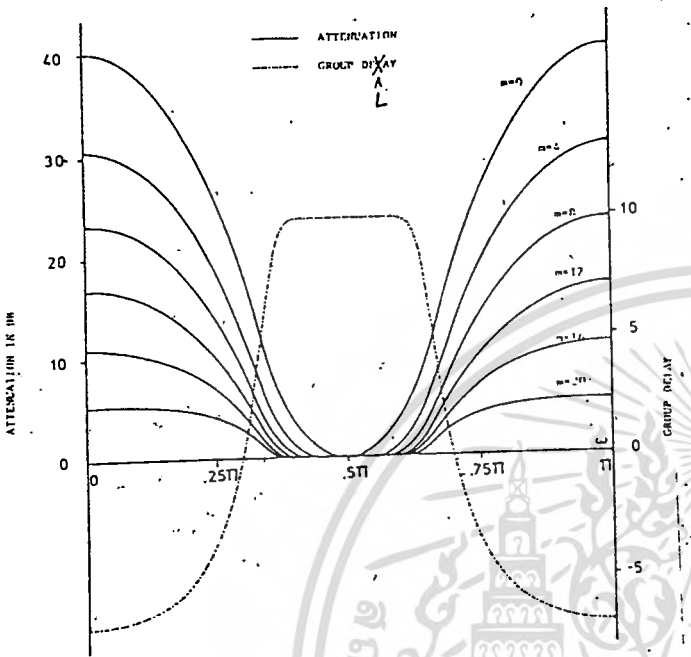


Fig. 1. P. Thajchavaporn et al

Fig. 1. Loss and group delay responses with $\tau = 10$ s, $n = 20$ for various m .

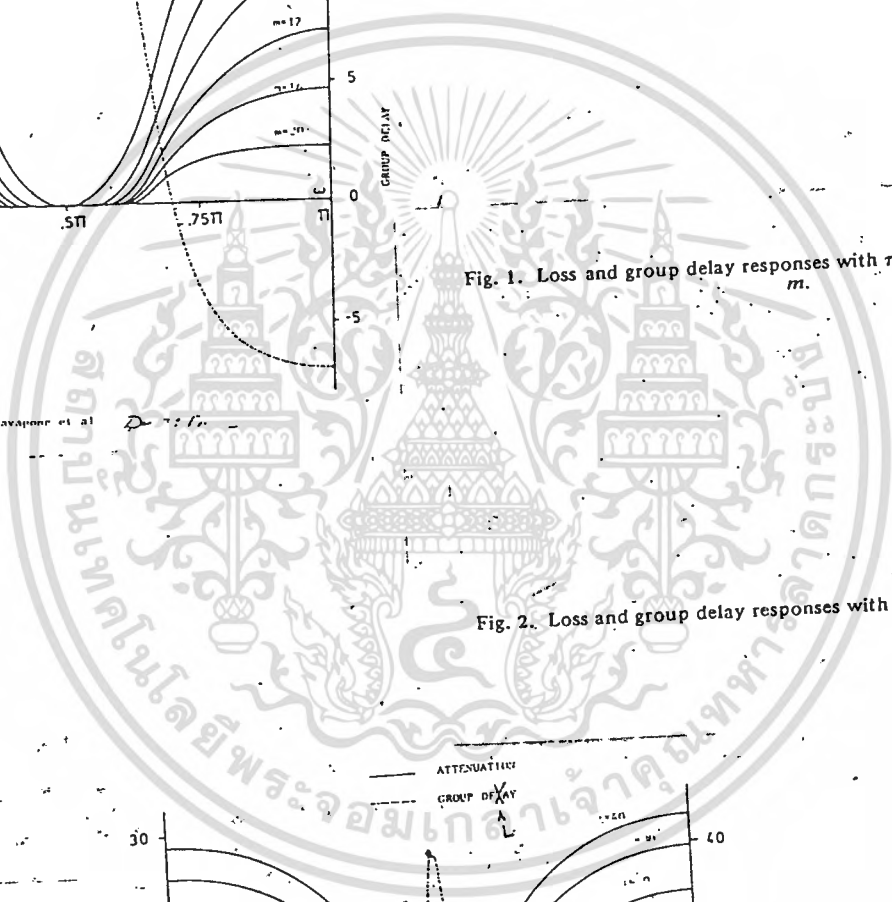


Fig. 2. Loss and group delay responses with $n = 6$, $m = 4$ for various τ .

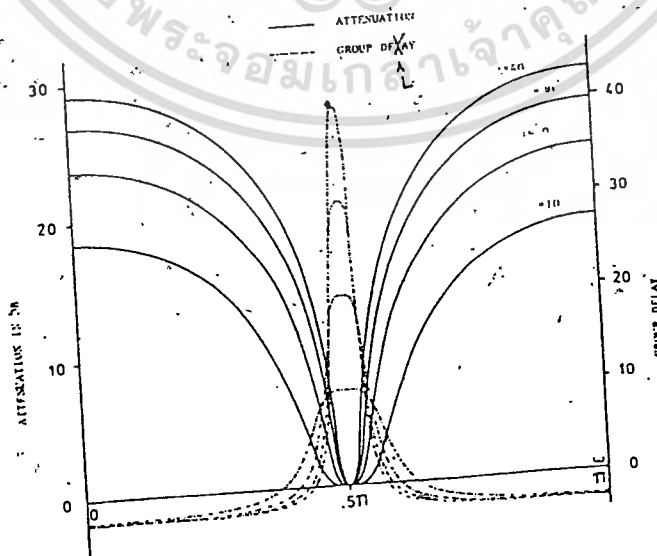


Fig. 2. P. Thajchavaporn et al

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับครูอาจารย์เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Filter coefficients of high-pass and band-elimination recursive digital filters with a maximally flat group delay

P. THAJCHAYAPONG and P. CHEEVASUVIT

Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology,
Ladkrabang Campus, Ladkrabang, Bangkok, Thailand

The design technique for a recursive digital filter with a maximally flat group delay at an arbitrary specified frequency is known. It is shown here that, for certain cases, the filter coefficients for high-pass and band-elimination recursive digital filters with a maximally flat group delay can be expressed in closed forms.

1. Introduction

It has already been known that a low-pass recursive digital filter can be designed with a maximally flat (Thiran 1971, Fettweis 1972) or equiripple (Deezky 1974) group delay. Such filters however cannot be spectral transformed (Constantinides 1970) to give a band-pass, a high-pass or a band-elimination with a maximally flat group delay. This has led to the development of a design technique to give a recursive digital filter with a maximally flat group delay at an arbitrary specified frequency (Thajchayapong and Lomtong 1978). The band-pass filters have been given as the examples. It is obvious that the design technique can be used to obtain a high-pass or a band-elimination with maximally flat group delay. It is, however, shown mathematically in this paper that for certain cases the coefficients of the high-pass and the band-elimination can be obtained in closed forms. The results agree with the intuitive notions that the transfer functions can be obtained from those of the low-pass (Thiran 1971, Fettweis 1972) by replacing (i) z^{-1} by $-z^{-1}$ for the high-pass and (ii) z^{-1} by z^{-2} for the band-elimination.

2. Derivation of the high-pass filter coefficients

If $\omega_0 = \pi$ rad/s and $0 \leq \beta_0 \leq \pi$, solving eqn (11) in Thajchayapong and Lomtong (1978) by Gauss-Jordan elimination algorithm gives a high-pass with a maximally flat group delay of any prescribed value. A specific case however arises if it is specified that $\beta_0 = 0$. \mathbf{A} , \mathbf{b} and \mathbf{a} now become

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} -(\tau+1) & (\tau+2) & -(\tau+3) & \dots & (-1)^n(\tau+n) \\ -(\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 & -(\tau+3)^3 & \dots & (-1)^n(\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\tau+1)^{2n-1} & (\tau+2)^{2n-1} & -(\tau+3)^{2n-1} & \dots & (-1)^n(\tau+n)^{2n-1} \end{bmatrix}$$

Received 20 November 1978; accepted 15 January 1979.

$$\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau \\ \vdots \\ -\tau^{2n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Hence $a_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, $k=1, 2, \dots, n$

where

$$\Delta = (-1)^p \begin{vmatrix} (\tau+1) & (\tau+2) & (\tau+3) & \dots & (\tau+n) \\ (\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 & (\tau+3)^3 & \dots & (\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tau+1)^{2n-1} & (\tau+2)^{2n-1} & (\tau+3)^{2n-1} & \dots & (\tau+n)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

in which $p = \frac{n}{2}$ for even n and $p = \frac{n+1}{2}$ for odd n , and

$$\Delta_k = (-1)^q (-1) \begin{vmatrix} (\tau+1) & (\tau+2) & \dots & (\tau+k-1) & \tau & (\tau+k+1) & \dots & (\tau+n) \\ (\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 & \dots & (\tau+k-1)^3 & \tau^3 & (\tau+k+1)^3 & \dots & (\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tau+1)^{2n-1} & (\tau+2)^{2n-1} & \dots & (\tau+k-1)^{2n-1} & \tau^{2n-1} & (\tau+k+1)^{2n-1} & \dots & (\tau+n)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

in which q takes the values according to n and k as follows:

n	k	q
even	even	$\frac{n}{2}$
even	odd	$\frac{n-2}{2}$
odd	even	$\frac{n+1}{2}$
odd	odd	$\frac{n-1}{2}$

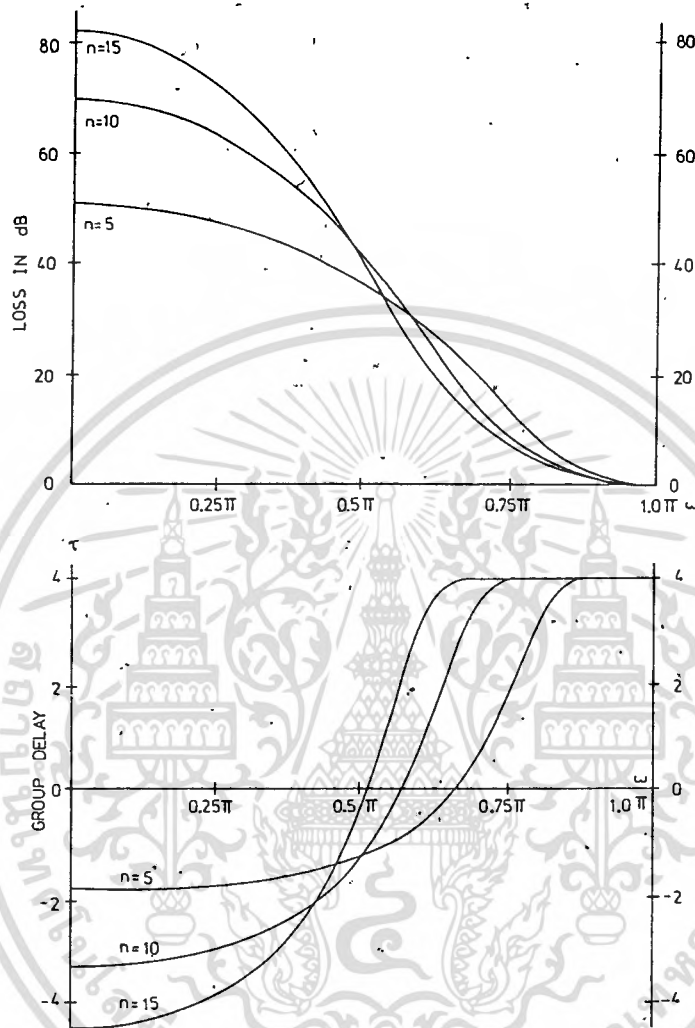


Figure 1. (a) Loss responses and (b) group delay responses of a high-pass with $\tau=4$, $n=5, 10, 15$.

It is seen that when $p=q=0$, Δ and Δ_k reduce to those of the low-pass case (Thiran 1971). Hence a high-pass filter coefficient a_k is given by

$$a_k = (-1)^{q-p} \left\{ (-1)^k \binom{n}{k} \prod_{i=0}^n \frac{2\tau + i}{2\tau + k + i} \right\} \quad (2)$$

where the term in $\{ \dots \}$ is the low-pass filter coefficient taken from Thiran (1971). By examining all the possible values of p and q , (2) reduces to

$$a_k = \binom{n}{k} \prod_{i=0}^n \frac{2\tau + i}{2\tau + k + i} \quad (3)$$

Figure 1 illustrates the loss and group delay responses for $\tau=4$ s and $n=5, 10, 15$. It should also be noted here that if $\beta_0 = \pi$, each element in \mathbf{A} and \mathbf{b} changes its sign to

the opposite without altering their relationship in eqn (11) of Thajchayapong and Lomtong (1978). Hence, (3) is the solution for $\beta_0 = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$. The filter coefficients in (3) also indicate that this high-pass filter can be obtained by substituting z^{-1} in the low-pass transfer function (Thiran 1971) by z^{-1} . This is equivalent to rotating the angle of each low-pass pole by 180° while retaining its magnitude. Hence the stability considerations (Thiran 1971, Fettweis 1972) of the low-pass are carried into the high-pass, i.e. the filter is always stable for positive delay and also for some negative delays larger than $-\frac{1}{2}$. (N.B. The sampling period is normalized to unity.)

3. Derivation of the band-elimination filter coefficients

For simplicity, let the filter order be an even number n and $\beta_0 = 0$ rad. If the maximally flat conditions are equally satisfied at both $\omega_0 = 0$ rad/s and $\omega_0 = \pi$ rad/s, we can formulate eqn (11) of Thajchayapong and Lomtong (1978) with the first $\frac{n}{2}$ equations satisfying the low-pass case and the remaining $\frac{n}{2}$ equations satisfying the high-pass case. We therefore have

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \equiv & \begin{bmatrix}
 \begin{matrix} (\tau+1) & (\tau+2) & \dots & (\tau+3) & \dots & (\tau+n) \\
 (\tau+1)^3 & (\tau+2)^3 & & (\tau+3)^3 & & (\tau+n)^3 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\
 \hline
 \begin{matrix} (\tau+1)^{n-1} & (\tau+2)^{n-1} & \dots & (\tau+3)^{n-1} & \dots & (\tau+n)^{n-1} \\
 -(\tau+1)^3 & -(\tau+2)^3 & & -(\tau+3)^3 & & -(\tau+n)^3 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\
 \hline
 \begin{matrix} -(\tau+1)^{n-1} & -(\tau+2)^{n-1} & \dots & -(\tau+3)^{n-1} & \dots & -(\tau+n)^{n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{n} \\ \xrightarrow{\frac{n}{2}} \\ \xrightarrow{\frac{n}{2}} \end{matrix}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \equiv & \begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau^3 \\ \vdots \\ -\tau^{n-1} \\ -\tau \\ -\tau^3 \\ \vdots \\ -\tau^{n-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{\frac{n}{2}} \\ \xrightarrow{n} \\ \xrightarrow{\frac{n}{2}} \end{matrix}$

$$\mathbf{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

(4)

6

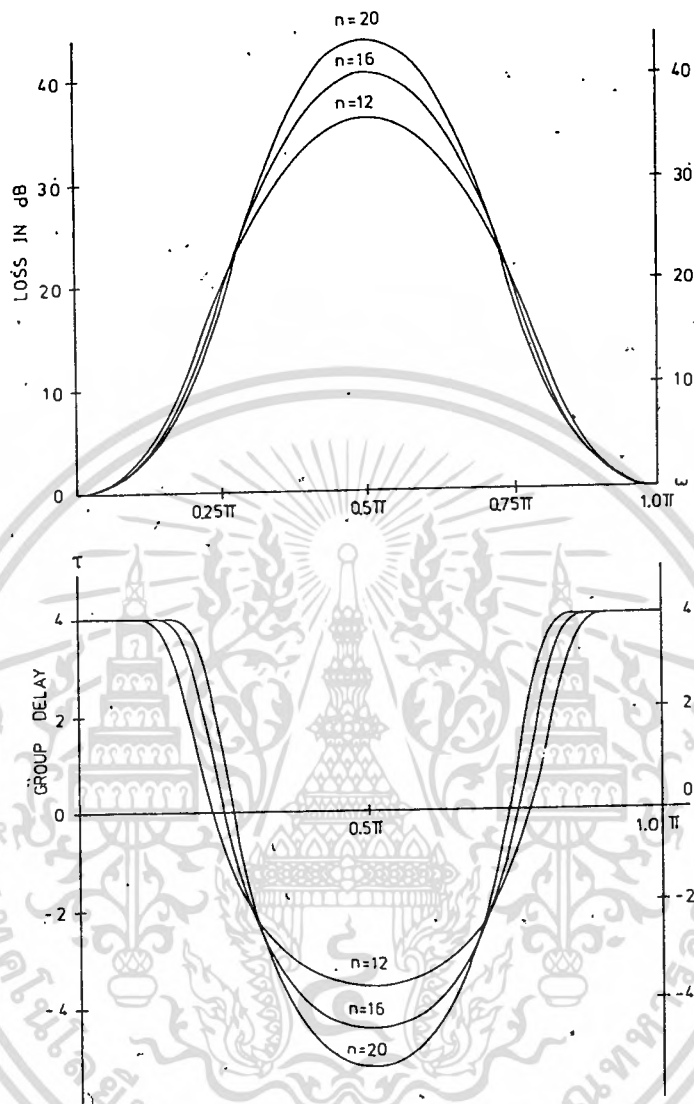


Figure 2. (a) Loss responses and (b) group delay responses of a band-elimination, with $\tau=4$, $n=12, 16, 20$.

The relation in (6) indicates that the odd subscripted filter coefficients all vanish while the even subscripted ones are given by

$$\begin{bmatrix} (\tau+2) & (\tau+4) & \dots & (\tau+n) \\ (\tau+2)^3 & (\tau+4)^3 & \dots & (\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tau+2)^{n-1} & (\tau+4)^{n-1} & \dots & (\tau+n)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau^3 \\ \vdots \\ -\tau^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

which, after using the properties of the Vandermonde matrix, leads to

$$a_k = (-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}} \frac{\tau+i}{\tau+i+\frac{k}{2}} \quad (8)$$

where $k=0, 2, 4, 6, \dots, n$

7

For odd n , the even subscripted filter coefficients still take the form of (8) but the odd subscripted ones are no longer zero. The values of the latter have to be solved by a computational method. Hence the band-elimination of an even order n can be obtained from the low-pass transfer function of order $\frac{n}{2}$ by replacing z^{-1} by z^{-2} . This is equivalent to doubling the sampling rate. The stability of the low-pass therefore implies the stability of the derived band-elimination. Figure 2 illustrates the loss and group delay responses of the band-elimination derived from low-pass with $T=4$ s and $n=12, 16, 20$.

4. Concluding remark

It has been shown that for certain cases the filter coefficients for the high-pass and band elimination with maximally flat group delay can be obtained in closed forms. The derivation agrees with the intuitive notions that both the high-pass and band-elimination can be transformed from the low-pass by replacing z^{-1} by $-z^{-1}$ and z^{-2} respectively. Although we have dealt with the cases of maximally flat group delay, the transform technique also applicable to the case of equiripple group delay (Deczky 1974).

References

- CONSTANTINIDES, A. G., 1970, *Proc. Instn. elect. Engrs.* **117**, 1585.
DECZKY, A. G., 1974, *I.E.E.E. Trans. Circuits Syst.*, **21**, 131.
FETTWEIS, A., 1972, *I.E.E.E. Trans. Audio Electroacoust.*, **20**, 112.
THAJCHAYAPONG, P., and LOMTONG, P., 1978, *Proc. Inst. elect. electron. Engrs.* **66**, 594.

SINE-COSINE SQUARED-MAGNITUDE FUNCTION FOR MAXIMALLY FLAT DIGITAL BANDPASS FILTERS WITH ADJUSTABLE SKIRT SELECTIVITIES

Indexing terms: Bandpass filters, Digital filters

A sine-cosine squared-magnitude function for a digital bandpass filter is proposed. It offers a maximally flat passband magnitude response and more flexibility on the number of exchangeable zeros at $\omega T = 0$ and $\omega T = \pi$ rad.

Introduction: The digital bandpass filter obtained from its all-pole analogue prototype via the bilinear transformation always results in an equal number of zeros at $\omega T = 0$ and $\omega T = \pi$ rad.¹ For a symmetrical filter with its centre frequency at $\omega T = \pi/2$ rad, the stopbands therefore exhibit the same attenuation rate. However, for a filter with the passband lying in either $0 \leq \omega T \leq \pi/2$ or $\pi/2 \leq \omega T \leq \pi$, the skirt selectivities at both ends of the passband edges become widely different. This has led Harza² to define a sine-cosine squared-magnitude function which allows exchangeable zeros at $\omega T = 0$ and $\omega T = \pi$. For a given filter order of $2N$, this function, however, restricts the total number of zeros to N only. A passband dip, although small, is always present which makes a Butterworth-like filter not flat maximally. An alternative squared-magnitude function is defined here such that, for a Butterworth-like filter of order $2N$, the number of adjustable zeros may be of any value up to $2N$. Hence, it provides more choices of stopband cutoff rates than those of the previous function.² Furthermore, the passband also shows the maximum flatness property.

Design theory: Let the squared-magnitude function of the Butterworth-like digital bandpass filter be defined as

$$|H(\omega)|^2 = 1 / \left\{ (1 + \epsilon^2) \left[\frac{\sin^2(\omega T/2) - \sin^2(\omega_0 T/2)}{\sin^2(\omega_1 T/2) - \sin^2(\omega_0 T/2)} \right]^{2N} \times \left[\frac{\cos^2(\omega_1 T/2)}{\cos^2(\omega T/2)} \right]^P \left[\frac{\sin^2(\omega_1 T/2)}{\sin^2(\omega T/2)} \right]^Q \right\} \quad (1)$$

where $2N$ is the filter order, $P + Q$ is the total number of zeros and $0 \leq P + Q \leq 2N$. For a specified lower cutoff frequency ω_1 and upper cutoff frequency ω_2 , the frequency of maximum flatness ω_0 is determined by imposing the requirement that

$$|H(\omega_1)|^2 = |H(\omega_2)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \quad (2)$$

which in turn requires that

$$\left[\frac{\sin^2(\omega_2 T/2) - \sin^2(\omega_0 T/2)}{\sin^2(\omega_1 T/2) - \sin^2(\omega_0 T/2)} \right]^{2N} \times \left[\frac{\cos^2(\omega_1 T/2)}{\cos^2(\omega_2 T/2)} \right]^P \left[\frac{\sin^2(\omega_1 T/2)}{\sin^2(\omega_2 T/2)} \right]^Q = 1$$

or

$$\omega_0^2 = 2 \sin^{-1} \left\{ \left[\sin^2(\omega_2 T/2) + \left\{ \cos^2(\omega_2 T/2) / \cos^2(\omega_1 T/2) \right\}^{P/2N} \times \left\{ \sin^2(\omega_2 T/2) / \sin^2(\omega_1 T/2) \right\}^{Q/2N} \sin^2(\omega_1 T/2) \right] / \left[1 + \left\{ \cos^2(\omega_2 T/2) / \cos^2(\omega_1 T/2) \right\}^{P/2N} \times \left\{ \sin^2(\omega_2 T/2) / \sin^2(\omega_1 T/2) \right\}^{Q/2N} \right]^{1/2} \right\} \quad (3)$$

Design example: For the sake of comparison with the previous results,² a 12th-order filter, i.e. $N = 6$, is chosen as an example with $\omega_1 T = 30^\circ$, $\omega_2 T = 80^\circ$ and $\epsilon = 1$. Only even P and Q , also $P + Q = 2N$, are chosen for the sake of clarity in illustration. The loss responses for various combinations of P and Q are shown in Fig. 1. The passband loss is also shown with expanded scale in the inset. Fig. 2 compares the results with those in Reference 2 for the same number of assigned zeros at $\omega T = 0$ and $\omega T = \pi$, i.e. $P + Q = N$ and $P = 4$, $Q = 2$. The

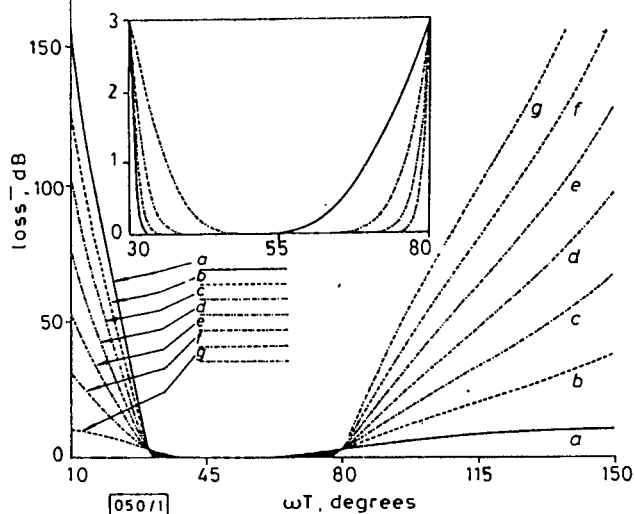


Fig. 1 Loss responses for $N = 6$, $P + Q = 2N$

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a $P = 0, Q = 12$ | e $P = 8, Q = 4$ |
| b $P = 2, Q = 10$ | f $P = 10, Q = 2$ |
| c $P = 4, Q = 8$ | g $P = 12, Q = 0$ |
| d $P = 6, Q = 6$ | |

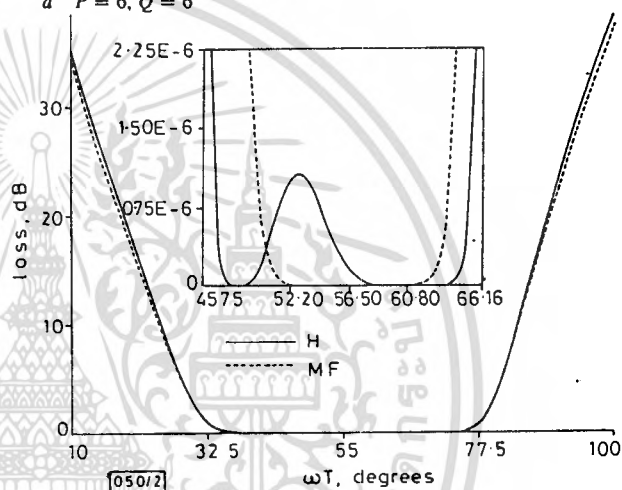


Fig. 2 Comparison of loss responses with those of Harza

- H: Harza
MF: maximally flat
 $P = 4, Q = 2, N = 6$

stopbands show slightly lower attenuation than those obtained by Harza;² this is slight as the cost paid for maximum flatness in the passband:

Conclusion: A squared-magnitude function has been proposed for a bandpass digital filter with exchangeable number of zeros at $\omega T = 0$ and $\omega T = \pi$ rad. It offers two advantageous features over the previous function,² i.e. (i) the total number of exchangeable zeros, $P + Q$, is not restricted to N but can be any value in $0 \leq P + Q \leq 2N$, where $2N$ is the filter order, and (ii) the passband exhibits the maximum flatness property at the expense of slightly lower stopband losses.

P. THAJCHAYAPONG
F. CHEEVASUVIT

27th April 1979

Faculty of Engineering
King Mongkut's Institute of Technology
Ladkrabang Campus, Ladkrabang
Bangkok, Thailand

References

- BOGNOR, R. E., and CONSTANTINIDES, A. G.: 'Introduction to digital filtering' (Wiley, 1975), chap. 4, pp. 47-60
- HARZA, S. N.: 'New squared-magnitude function for digital bandpass filters', *Electron. Lett.*, 1975, 11, pp. 315-316