

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

โดย



นางสาวขวัญตา พิลาแดง รหัส 38054107

นายชิตพล คำรงกุลรัตน์ รหัส 38054117



เลขหมึก.....
เลขทะเบียน... 33855
วัน, เดือน, ปี 17 ก.ย. 2542

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2541

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE NUMERICAL ANALYSIS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

MISS KWANTA PILADANG
MR.CHITPON DUMRONGKHUNRAT



A Special Project Submitted in Partial Fulfillment
of the Requirement of the Degree of Bachelor of Science

Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntham
Lardkrabang

1999

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาพิเศษเรื่อง การวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ชื่อนักศึกษา

1. นางสาวขวัญดา พิลาแดง รหัส 38054107

2. นายชิตพล ดำรงกุลรัตน์ รหัส 38054117

ภาควิชา

คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

อาจารย์ที่ปรึกษา

รองศาสตราจารย์กคคินี ชิตสกุล

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ กรรมการสอบปัญหาพิเศษได้ตรวจพิจารณาแล้วจึงอนุมัติให้เป็นส่วน
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา
2541



(รองศาสตราจารย์กคคินี ชิตสกุล)

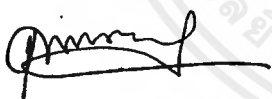
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการ โครงการงานพิเศษ



(รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์)

ประธานกรรมการ



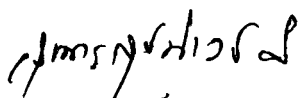
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กฤษฎา ไตรสุรัตน์)

กรรมการ



(รองศาสตราจารย์กคคินี ชิตสกุล)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา



(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

หัวข้อพิเศษ	โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวขวัญดา พิลาดง	รหัสประจำตัว 38054107
	นางจิตพล คำรงกุลรัตน์	รหัสประจำตัว 38054117
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์	
สาขา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2541	

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้จัดทำขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์คือ สร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยการนำเอาระบบมัลติมีเดียเข้ามาประยุกต์ใช้ ในรูปแบบของภาพ เพื่อให้การศึกษาวិชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ น่าสนใจและเกิดการเรียนรู้ได้ดียิ่งขึ้น

ในส่วนของบทเรียนประกอบด้วยทฤษฎี, ตัวอย่าง, แบบทดสอบ และโปรแกรมช่วยคำนวณสำหรับผู้เรียนได้ศึกษาด้วยตนเอง

Special Project Title Computer Assisted Instruction in Numerical Analysis
of Ordinary Differential Equations

Name Miss Kwanta Piladang Code 38054107
 Mr.Chitpon Dumrongkhunrat Code 38054117

Special Project Advisor Associate Professor Pakkinee Chitsagul
 Assistant Professor Sunthorn Suchatvejapoom

Department Mathematic and Computer Science

Branch Applied Mathematic

Year 1998

ABSTRACT

The purpose of this special project is to create Computer Aided Instruction(CAI) for Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations using Multimedia system computer such as animation system.

Each chapter includes theory, example, exercises and software that can be evaluate solution of differential equations for the learners to study by themselves.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดีก็เพราะหลายเหตุปัจจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ

ที่ได้ให้แนวทางในการวิจัย ตลอดจนคำปรึกษาอันก่อให้เกิดแนวความคิดที่สามารถแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นระหว่างการทำวิจัย นอกจากนี้ยังช่วยแนะนำแนวทางในการดำเนินงานและตรวจทานแก้ไขด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง

ขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่สนับสนุนในการใช้ห้องปฏิบัติการ

ขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งเพื่อนเกิดที่คอยช่วยและเอื้อเฟื้ออุปกรณ์ตลอดมา

ขอบคุณ คุณพ่อ คุณแม่ที่เป็นกำลังใจให้เสมอมา

ขอขอบพระคุณ

ผู้จัดทำ

สารบัญรูปภาพ

	หน้า
หน้าจอแรกของโปรแกรม	77
หน้าจอแสดงเมนูหลักในการใช้งานของโปรแกรม	78
หน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนสำหรับหัวข้อที่มีหัวข้อย่อยให้เลือกศึกษา	79
หน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนสำหรับหัวข้อหลัก	79
ปุ่มสำหรับพลิกไปหน้าต่อไป	80
ปุ่มพลิกไปยังเมนู	80
ปุ่มพลิกไปหน้าต่อไป	80
หน้าจอบทเรียน	80
ปุ่มรูปหนังสือเพื่อดูบัญชีศัพท์	81
ปุ่มเพื่อดูประวัติผู้คิดค้น	81
หน้าจอเมื่อผู้เรียนคลิกปุ่มเพื่อดูประวัติผู้คิดค้น	82
ปุ่มทดสอบโปรแกรมช่วยคำนวณ	82
หน้าจอโปรแกรมช่วยคำนวณ	82
หน้าจอทดสอบโปรแกรมช่วยคำนวณ	83
หน้าจอตัวอย่างโจทย์แบบที่ 1	84
หน้าจอแสดงผลเมื่อตอบคำถามไม่ถูกของ โจทย์แบบที่ 1	84
หน้าจอแสดงผลเมื่อตอบคำถามถูกของ โจทย์แบบที่ 1	85
หน้าจอตัวอย่าง โจทย์แบบที่ 2	86
หน้าจอแสดงผลเมื่อตอบคำถามถูกของ โจทย์แบบที่ 2	87
หน้าจอแสดงผลเมื่อตอบคำถามไม่ถูกของ โจทย์แบบที่ 2	87
ปุ่มรูปหนังสือในหน้าจอบัญชีศัพท์	88
หน้าจอบัญชีศัพท์	88

สารบัญ

หน้า

หน้าอวมติ

บทคัดย่อปัญหาพิเศษภาษาไทย

บทคัดย่อปัญหาพิเศษภาษาอังกฤษ

กิตติกรรมประกาศ

สารบัญรูป

บทที่ 1 บทนำ

1

- ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ
- วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ
- ขอบเขตของปัญหาพิเศษ
- ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ
- ขั้นตอนการดำเนินงาน
- อุปกรณ์ที่ใช้ในปัญหาพิเศษ

บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักเกณฑ์ที่เกี่ยวข้อง

3

- สมการเชิงอนุพันธ์ 3
- สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 3
- ปัญหาค่าเริ่มต้น 4
- ปัญหาค่าขอบเขตอันดับสอง 4
- การมีอยู่ของผลเฉลยและมีผลเฉลยเดียว 5
 - กลไกการทำซ้ำของปีการ์ด์ 6
 - ทฤษฎีบทการมีอยู่ของผลเฉลย 8
 - ทฤษฎีบทการมีผลเฉลยเดียว 9
- การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งโดยวิธีวิเคราะห์ 10
 - วิธีแยกตัวแปร 10
 - สมการเอกพันธ์ 10
 - สมการแม่นตรง 11
 - สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น 12
- การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง
โดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลข 14
 - ระเบียบวิธีของปีการ์ด์ 14

-	ระเบียบวิธีของออยเลอร์ปรับปรุง	19
-	ระเบียบวิธีสามพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์	22
-	ระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตา	25
-	ค่าคลาดเคลื่อน	30
-	ระเบียบวิธีหลายชั้น	33
-	การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง	41
-	การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง	44
-	การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูง	49
-	ปัญหาค่าขอบเขต	
-	ระเบียบวิธีผลต่างสี่บเนื้อง	51
-	ระเบียบวิธียิงเป้า	53
บทที่ 3	ความหมายของโปรแกรมสอนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI)	55
-	ประวัติความเป็นมาของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน	55
-	การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนบนไมโครคอมพิวเตอร์	56
-	บทเรียนแบบโปรแกรม	57
-	ความหมายของบทเรียนแบบโปรแกรม	57
-	ลักษณะของบทเรียนโปรแกรม	58
-	ชนิดของบทเรียนแบบโปรแกรม	58
-	บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรง	58
-	บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขา	59
-	บทเรียนแบบโปรแกรมชนิด Adjunctive	59
-	ข้อดีและข้อเสียของบทเรียนแบบโปรแกรม	59
-	หลักในการเขียนบทเรียนแบบโปรแกรม	61
-	วิธีการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม	61
-	ขั้นตอนในการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม	62
-	ความหมายและความสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน	64
-	ประโยชน์ของ CAI	65
-	การแบ่งลักษณะของ CAI	66
-	บทเรียนแบบโปรแกรมไมโครคอมพิวเตอร์	67
-	ขั้นตอนการสร้างบทเรียนทางไมโครคอมพิวเตอร์	69
-	ลักษณะของโปรแกรมช่วยสอนที่ดี	71

- ความสามารถของโปรแกรม Multimedia Toolbook 72
- แนวทางการทำงานเบื้องต้นของโปรแกรม Multimedia Toolbook 73
- ลำดับการทำงานของโปรแกรม Multimedia toolbook 73

บทที่ 4 ประเมินผล 76

- คุณสมบัติและความสามารถของโปรแกรม 76
- ข้อจำกัดของโปรแกรม 76
- การทำงานของโปรแกรม 77

บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ 89

- สรุป 89
- ข้อเสนอแนะ 90



บทที่ 1

บทนำ

1. ความสำคัญ / ที่มาของปัญหาพิเศษ

เนื่องจากวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) เป็นวิชาที่เปิดสอนในระดับอุดมศึกษาในหลายคณะ เพราะโดยส่วนใหญ่วิชาการวิทยาศาสตร์ประยุกต์จะใช้หลักการทางคณิตศาสตร์มาก ดังเช่นเมื่อทำการเก็บข้อมูลจากการทดลองหรือจากเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริงๆ แล้วต้องหารูปแบบของฟังก์ชันที่ง่ายและเหมาะสมต่อการนำไปแก้ปัญหามathematical เมื่อได้รูปแบบฟังก์ชันแล้วก็จะต้องหาผลเฉลยของปัญหา กรณีที่เป็นสมการอนุพันธ์ก็จะเกิดความไม่สะดวกของการหาผลเฉลยนั้นหรือไม่เช่นนั้นผลเฉลยที่ได้ก็ไม่อยู่ในรูปที่จะใช้ได้เลยก็เดียว เช่น อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง ดังนั้นจึงต้องนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการคำนวณ เพราะฉะนั้นเพื่อให้วิชาวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีประสิทธิภาพในการศึกษาเพิ่มมากขึ้น จึงมีความประสงค์ที่จะนำเสนอโปรแกรมช่วยสอน (CAI) ในวิชานี้ขึ้น โดยหัวข้อเรื่องที่จะนำเสนอจะเน้นเฉพาะในหัวข้อ “การวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ” โดยจะมีรายละเอียดเกี่ยวกับที่มาและขั้นตอนในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพื่อให้ผู้ใช้ได้เรียนรู้มากขึ้นนอกเหนือจากการใช้โปรแกรมเพื่อช่วยในการคำนวณเพียงอย่างเดียว

2. วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อทราบที่มาของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. เพื่อเข้าใจขั้นตอนของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและให้ผู้ใช้สามารถนำโปรแกรมไปใช้ได้ถูกต้องและมีประสิทธิภาพ
3. สามารถนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญตามที่ใช้ต้องการได้

3. ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

เป็นโปรแกรมช่วยสอน CAI ในหัวข้อเรื่อง “การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ” (The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations) ในวิชาวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) โดยครอบคลุมถึงการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบเขต โดยระเบียบวิธีขั้นตอนเดียวและหลายขั้นตอน รวมถึงผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและผลเฉลยของสมการอันดับสูง

4.ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เพื่อการเรียนรู้และเข้าใจที่มาและขั้นตอนของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ถูกต้อง
2. เพื่อพัฒนาระบบการเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษาในมหาวิทยาลัยให้ทันสมัยยิ่งขึ้น
3. ได้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญซึ่งนักศึกษาสามารถเรียนรู้ด้วยตนเองได้
4. ผู้ใช้สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้

5.ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. ทำการศึกษาที่มาและขั้นตอนของวิธีที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
3. ทำการศึกษาโปรแกรม CAI อื่นๆ ที่มีอยู่ในปัจจุบัน
4. ทำการศึกษาและเลือก Tool ที่เหมาะสมสำหรับการเขียนโปรแกรมนี้
5. เขียนโปรแกรม
6. ตรวจสอบและแก้ไขข้อผิดพลาดของโปรแกรมที่สร้างขึ้น ให้มีความถูกต้องตามความเป็นจริงและมีประสิทธิภาพ
7. จัดทำเอกสารประกอบการทำปัญหาพิเศษและคู่มือการใช้โปรแกรม

6.อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1. Pentium 166 MHz
2. RAM 32 MB
3. HDD 2.0 GB
4. Window 95

.....

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักเกณฑ์ที่เกี่ยวข้อง

สมการเชิงอนุพันธ์(Differential Equation)คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์(derivative) หรือ เชิงอนุพันธ์(differential)ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรต้นหนึ่งตัวหรือมากกว่า, แบ่งเป็น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(ordinary differential equation) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(Ordinary Differential Equation) คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรต้นเพียงหนึ่งตัว เช่น

$$\frac{dx}{dy} - 5y = 1, (x + y)dx - 4ydy = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x, \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n คือสมการในรูปแบบ

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

หรือ

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $y(x_0) = y_0$

หรือ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

โดยที่ $a_2(x) \neq 0$ ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$

เรียกว่า **ปัญหาค่าเริ่มต้น(initial value problem)** และเงื่อนไขที่กำหนดค่าที่ตัวแปรต้นค่าเดียวเท่านั้น

เรียกว่า **เงื่อนไขเริ่มต้น(initial condition)**

ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem)

ปัญหาค่าเริ่มต้นสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n คือปัญหาการหาผลเฉลยของ

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

โดยที่ $a_n(x) \neq 0$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

ปัญหาค่าขอบเขตอันดับสอง (Boundary value problem)

ปัญหาค่าขอบเขตอันดับสองคือ ปัญหาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y + f(x), \quad a < x < b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

การมีอยู่ของผลเฉลยและมีผลเฉลยเดียว

(Existence and Uniqueness solution)

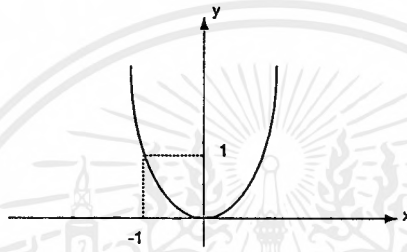
พิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง สมการเชิงอนุพันธ์ $xy' = 2y$

ผลเฉลยทั่วไป (general solution) คือ $y = cx^2$

ถ้ากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(-1) = 1$ จะได้ผลเฉลยคือ $y(x) = x^2$

ได้กราฟของผลเฉลยที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น แสดงดังรูป



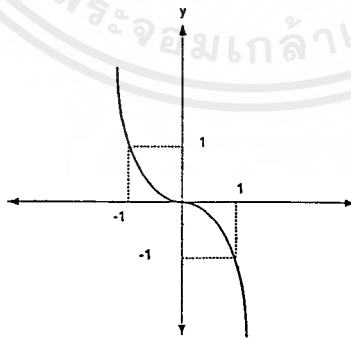
ถ้ากำหนดเงื่อนไขขอบเขต $y(-1) = 1, y(1) = -1$

ดังนั้น ปัญหาค่าขอบเขต $xy' = 2y$

$$y(-1) = 1, y(1) = -1$$

มีผลเฉลยคือ $y(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 0 \\ -x^2 & ; x > 0 \end{cases}$

กราฟของผลเฉลยที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต แสดงดังรูป

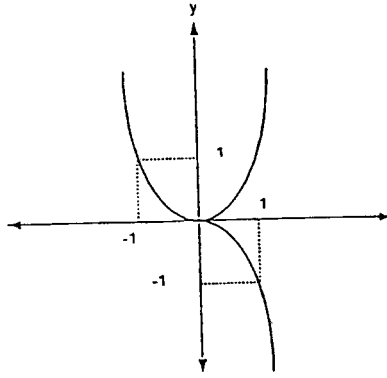


ถ้าพิจารณาเฉพาะปัญหาค่าเริ่มต้น

$$xy' = 2y \quad ; y(-1) = 1$$

มีผลเฉลยคือ $y(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 0 \\ cx^2 & ; x > 0 \end{cases}$

กราฟของผลเฉลยแสดงได้ดังรูป



เส้นกราฟผลเฉลยในบริเวณที่อยู่ใกล้ๆ $x = -1$ นั้นมีผลเฉลยเดียวแน่ๆ แต่เส้นกราฟอาจมีการแยกส่วนในช่วงอื่นๆ ได้

ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$|y'| + |y| = 0, y(0) = 1$$

ไม่มีผลเฉลยเพราะ $y = 0$ ซึ่งเป็นผลเฉลยเดียวของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น

ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = x, y(0) = 1$$

มีผลเฉลยเดียวคือ

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$xy' = y - 1, y(0) = 1$$

มีผลเฉลยจำนวนไม่จำกัด $y = 1 + cx$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

จากตัวอย่างข้างบนนี้พบว่าปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

อาจไม่มีผลเฉลย มีผลเฉลยเดียวหรือมีผลเฉลยไม่จำกัด ซึ่งมีวิธีพิจารณาการมีผลเฉลยและมีผลเฉลยเดียว ดังนี้

กลไกการทำซ้ำของปีการ์ด์

ก่อนที่จะกล่าวถึงการมีอยู่ของผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น เราจะศึกษาวิธีทำซ้ำสำหรับประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

เมื่อ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x และ y

ทฤษฎีบท ฟังก์ชัน $y(x)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นดังข้างต้น ก็ต่อเมื่อ $y(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการอินทิกรัล

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad \text{—————} (*)$$

พิสูจน์ (\rightarrow) โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง จาก x_0 ถึง x (เนื่องจาก f มีความต่อเนื่อง)

$$y(x) = K + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

แต่ $y(x_0) = K + 0 = y_0$ ดังนั้น $K = y_0$

$$\text{ดังนั้น } y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

(\rightarrow) โดยทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัสพบว่า

จาก (*) $y'(x) = f(x, y(x))$ และ $y(x_0) = y_0$

เราพิจารณาลำดับของการประมาณต่อไปนี้

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

.....#

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx$$

ถ้าลำดับชุดนี้ลู่เข้า กล่าวคือ $y_n \rightarrow y$ ขณะที่ $k \rightarrow \infty$

จะได้ว่า

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

ซึ่งทำให้ $y(x)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นตามต้องการ

วิธีการประมาณโดยสูตร (#) เรียกว่า ระเบียบวิธีของปีการ์ด์

ทฤษฎีบทการมีผลเฉลยเดียว(Uniqueness theorem)

ถ้า $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}$ ต่อเนื่องสำหรับทุกๆ (x, y) ในบริเวณ R และ $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}$

มีขอบเขตใน R โดย $|f| \leq K$ และ $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$ สำหรับทุกๆ (x, y) ในบริเวณ R แล้ว

ปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ มีผลเฉลยเดียวที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับ
ทุก x ในช่วง $|x - x_0| < a$ เงื่อนไขตามทฤษฎีบทนี้เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ

(sufficient condition) แต่ไม่ใช่เงื่อนไขจำเป็น(necessary condition)

เมื่อเงื่อนไข $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}$ ต่อเนื่องในบริเวณ R แล้วปัญหาค่าเริ่มต้น

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ มีผลเฉลยเดียว เมื่อ (x_0, y_0) อยู่ใน R แต่ถ้าเงื่อนไขไม่เป็นจริงแล้ว
ปัญหาค่าเริ่มต้นอาจไม่มีผลเฉลย มีผลเฉลยเดียว หรือมีผลเฉลยไม่จำกัด

ทฤษฎีบทนี้จะมีประโยชน์กับสมการที่ไม่สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีธรรมดา เพราะจะใช้ทฤษฎีช่วย
ตอบคำถามว่า ปัญหาค่าเริ่มต้นมีผลเฉลยหรือไม่ และถ้ามีผลเฉลยแล้วมีผลเฉลยเดียวหรือไม่

ตัวอย่าง สำหรับปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3, \quad y(1) = 6$$

ปัญหาเริ่มต้นนี้ผลเฉลยมีจริงและมีเพียงค่าเดียวหรือไม่

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x, y) = x^2 - xy^3$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = -3xy^2$ เนื่องจากฟังก์ชันทั้งสองต่อเนื่อง

ในบริเวณ R ซึ่งครอบคลุมจุด $(1, 6)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานของทฤษฎี จะได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้นนี้มีผลเฉลยและมีผลเฉลยเพียงค่าเดียวในช่วง $(1-h, 1+h)$ โดย h เป็นจำนวนบวก

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยวิธีวิเคราะห์
รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ

$$Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$$

เมื่อ $y' = \frac{dy}{dx}$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะพิจารณาจากแต่ละรูปแบบ
ของสมการที่แตกต่างกัน ซึ่งจำแนกได้ดังนี้

1. วิธีแยกตัวแปร (Variable separable) กระทำเมื่อเราสามารถแยกตัว
แปรอย่างเดียวกันไว้ด้วยกันกับผลต่างเชิงอนุพันธ์ของอนุพันธ์ของตัวแปรนั้นแล้วจึงอินทิเกรตแต่ละ
พจน์ ถ้าให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้วสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad \text{————— (1)}$$

จากนั้นอินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้ผลเฉลยของ (1) คือ

$$y = \int g(x) dx + c$$

ตัวอย่าง a) $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$ b) $\frac{dy}{dx} = \sin x$

ได้ผลเฉลย a) $y = \int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2} e^{2x} + c$

b) $y = \int \sin x dx = -\cos x + c$

2. สมการเอกพันธ์ (Homogeneous equation)

เมื่อสมการเชิงอนุพันธ์อยู่ในรูปแบบ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{————— (2)}$$

โดยที่ฟังก์ชัน M และ N มีคุณสมบัติ

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y)$$

$$N(tx, ty) = t^n N(x, y)$$

เรากล่าวว่าเป็นสมการเอกพันธ์ (ฟังก์ชัน M และ N เรียกว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n) เราสามารถ
เปลี่ยนตัวแปรเพื่อให้สมการอยู่ในรูปแบบที่ใช้วิธีแยกตัวแปรได้โดยการแทนค่า โดยให้ $y = ux$

หรือ $x = vy$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $(x^2 + y^2)dx + (x^2xy)dy = 0$

หาคผลเฉลย จะเห็นว่าฟังก์ชัน $M(x, y) = x^2 + y^2$ และ $N(x, y) = x^2 - xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีสอง และสมการเป็นสมการเอกพันธ์ ให้ $y = ux$ จะได้

$$(x^2 - u^2x^2)dx + (x^2 - xux)(xdu + udx) = 0$$

จัดสมการใหม่เป็น

$$x^2(1+u)dx + x^3(1-u)(xdu + udx) = 0$$

$$x dx + \frac{1-u}{1+u} du = 0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$-u + 2\log|1+u| + \log|x| = c$$

แทนค่ากลับจะได้

$$-\frac{y}{x} + 2\log\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \log|x| = C$$

โดยให้ $C = \log|c|$ เขียนผลเฉลยได้เป็น

$$(x+y)^2 = cxe^{y/x}$$

3. สมการแม่นตรง(Exact equation)

เมื่อสมการอยู่ในรูปแบบ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

จะเรียกว่าเป็นสมการแม่นตรงเราสามารถหาฟังก์ชัน $f(x, y)$ ซึ่ง

$$df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

จาก Total Differential ของ $f(x, y)$ คือ

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \quad \text{--- (2)}$$

ถ้าเป็นสมการแม่นตรงจะได้ว่า

$$df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$df(x, y) = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$f(x, y) = c$$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$

หาผลเฉลย เนื่องจากสมการสามารถแยกได้และเป็นสมการแม่นตรงเพราะ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

จะมีฟังก์ชัน $f(x, y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

อินทิเกรตสมการแรก จะได้

$$f(x, y) = x^2y + g(y)$$

เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับ y จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + g'(y) \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$g'(y) = -1 \quad \text{และ} \quad g(y) = -y$$

4. สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear differential equation)

เมื่อสมการอยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad \text{—————(3)}$$

จากสมการเราได้

$$dy + P(x)ydx = f(x)dx \quad \text{—————(4)}$$

จากนั้นนำตัวคูณเพื่อการอินทิเกรต $e^{\int P(x)dx}$ คูณทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\frac{d}{dx} [e^{\int P(x)dx} y] = e^{\int P(x)dx} f(x)$$

จะได้ผลเฉลย

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + ce^{-\int P(x)dx}$$

ตัวอย่าง

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ $xy' + 2y = x$

หาผลเฉลย

จัดสมการในรูปแบบ $y' + 2\frac{y}{x} = 1$ (ถ้า $x \neq 0$) เห็นได้ชัดว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น มี $P(x) = 2/x$ ดังนั้นตัวคูณเพื่อการอินทิเกรตคือ

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2/x} = e^{2\log x} = x^2$$

คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย x^2 จะได้

$$x^2 y' + 2xy = x^2$$

หรือ $x^2 dy + 2xy dx = x^2 dx$

นั่นคือ $d(x^2 y) = x^2 dx$

ได้ผลเฉลยคือ $x^2 y = \frac{x^3}{3} + C$ หรือ $y = \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$



การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง
โดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ระเบียบวิธีของปีการ์ด

พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ เมื่อ } y(x_0) = y_0$$

จะได้

$$dy = f(x, y)dx$$

โดยการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$$

หรือ

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$$

จัดสมการใหม่จะได้ว่า

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$$

แล้ว

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0)dx$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1)dx$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n)dx$$

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีของปีการ์ดคือ

$$y_{n+1}(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(x, y_n(x))dx$$

ตัวอย่างพิจารณาปัญหา

$$y' = y - 1$$

$$y(0) = 2$$

ใช้ระเบียบวิธีของปีการ์ดีในการประมาณค่า y_1, y_2, y_3, y_4

หาผลเฉลย จากที่กำหนดให้ $x_0 = 0, y_0(x) = 2$ และ $f(x, y_{n-1}(x))dx = y_{n-1}(x) - 1$

จาก (#) จะได้ $y_n(x) = 2 + \int_0^x (y_{n-1}(x) - 1)dx$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

จะได้

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x 1 \cdot dx = 2 + x$$

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x (1 + x)dx = 2 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x) = 2 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)dx = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$

$$y_4(x) = 2 + \int_0^x \left(2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\right)dx = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

ระเบียบวิธีของออยเลอร์(The Euler Method)

เทคนิคอย่างง่ายอย่างหนึ่งสำหรับการประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิง

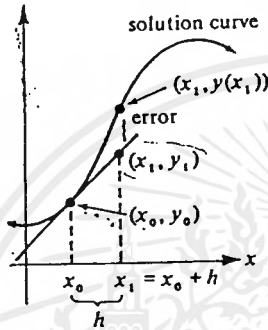
อนุพันธ์ที่เราทราบคือ ระเบียบวิธีของออยเลอร์

สมมติว่าต้องการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ

$$y' = f(x, y)$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0$$



ถ้า h คือขนาดของช่วงดังแสดงในรูป แสดงให้เห็นว่าเราสามารถหาจุด $(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_1)$ บนเส้นตรงที่เป็นเส้นสัมผัสของผลเฉลยที่จุด (x_0, y_0)

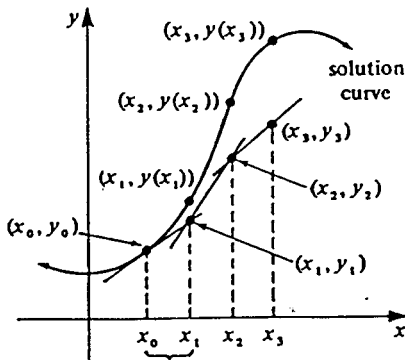
จากสมการความชันของเส้นตรงเราได้

$$\frac{y_1 - y_0}{(x_0 + h) - x_0} = y' \quad \text{หรือ} \quad y_1 = y_0 + h y_0'$$

โดย $y_0' = f(x_0, y_0)$ ถ้าเราให้ $x_1 = x_0 + h$ แล้วจุด (x_1, y_1) บนเส้นสัมผัสคือ ค่าประมาณของจุด $(x_1, y(x_1))$ บนเส้นโค้งผลเฉลย นั่นคือ $y_1 \approx y(x_1)$ โดยที่ความถูกต้องแม่นยำ (accuracy) ของการประมาณค่าจะขึ้นกับขนาดของ h ที่เพิ่มขึ้น ปรกติแล้วเรามักจะเลือกขนาดของช่วงเป็นค่าน้อยๆ

สมมติให้ลำดับของจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ เป็นค่าประมาณของจุด

$(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)), \dots, (x_n, y(x_n))$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในรูปพิจารณาจุด (x_1, y_1) เราสามารถใช้ค่า y_2 ซึ่งเป็นพิกัดของจุดบนเส้นสัมผัสใหม่เราได้

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = y_1' \quad \text{หรือ} \quad y_2 = y_1 + hy_1'$$

$$= y_1 + hf(x_n, y_n)$$

รูปแบบทั่วไปคือ

$$y_{n+1} = y_n + hy_n'$$

$$= y_n + hf(x_n, y_n) \quad \text{—————(1)}$$

โดย $x_n = x_0 + nh$

ตัวอย่าง พิจารณาปัญหาเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$y(1) = 1$$

ใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ประมาณค่า $y(1.5)$ โดยใช้ค่า $h = 0.1$ และ $h = 0.05$

หาผลเฉลย เนื่องจาก $f(x, y) = 2xy$ ดังนั้นจาก 1. จะได้

$$y_{n+1} = y_n + h(2x_n y_n)$$

เมื่อ $h = 0.1$ เราจะพบว่า

$$y_1 = y_0 + 0.1(2x_0 y_0)$$

$$= 1 + 0.1[2(1)(1)]$$

$$= 1.2$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าของ $y(1.1)$ อย่างไรก็ตามถ้าเราใช้ $h = 0.05$ จะต้องทำซ้ำ 2 ครั้งจึงจะได้ $x = 1.1$ จะได้

$$y_1 = 1 + (0.05)[2(1)(1)]$$

$$= 1.1$$

$$y_2 = 1.1 + (0.05)[2(1.05)(1.1)]$$

$$= 1.2155$$

ในที่นี้สังเกตว่า $y_1 \approx y(1.05)$ และ $y_2 \approx y(1.1)$ การคำนวณในส่วนที่เหลือสรุปดังตาราง 1 และ 2 โดยพิจารณาทศนิยม 4 ตำแหน่ง

ตาราง 1 ระเบียบวิธีของออยเลอร์ เมื่อ $h = 0.1$

x_n	y_n	ค่าจริง	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	% ความคลาดเคลื่อน
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2000	1.2337	0.0337	2.73
1.20	1.4640	1.5527	0.0887	5.71
1.30	1.8154	1.9937	0.1784	8.95
1.40	2.2874	2.6117	0.3244	12.42
1.50	2.9278	3.4904	0.5625	16.12

ตาราง 2 ระเบียบวิธีของออยเลอร์ เมื่อ $h = 0.05$

x_n	y_n	ค่าจริง	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	% ความคลาดเคลื่อน
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.15	1.1000	1.1079	0.0079	0.72
1.10	1.2155	1.2337	0.0182	1.47
1.15	1.3492	1.3806	0.0314	2.27
1.20	1.5044	1.5527	0.0483	3.11
1.25	1.6849	1.7551	0.0702	4.00
1.30	1.8955	1.9937	0.0982	4.93
1.35	2.1419	2.2762	0.1343	5.90
1.40	2.4311	2.6117	0.1806	6.92
1.45	2.7714	3.0117	0.2403	7.98
1.50	3.1733	3.4904	0.3171	9.08

ระเบียบวิธีออยเลอร์ปรับปรุง(The Improved Euler Method)

รูปแบบ

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \quad \text{—————(2)}$$

เมื่อ

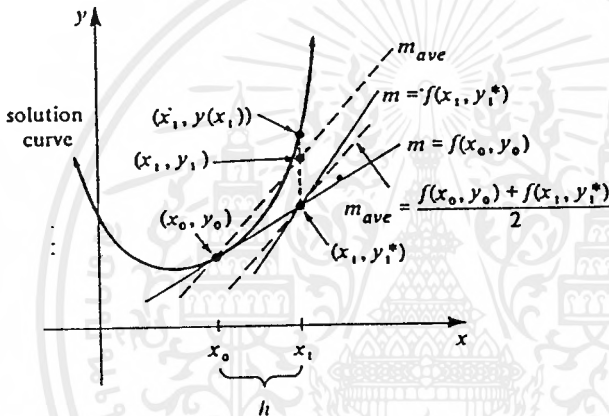
$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$$

ซึ่งก็คือรูปแบบของออยเลอร์ปรับปรุง ค่า $f(x_n, y_n)$ และ $f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)$ ประมาณค่าได้จากความชันของเส้นโค้งที่จุด $(x_n, y(x_n))$ และ $(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$

ดังนั้น

$$\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2}$$

เป็นความชันโดยเฉลี่ยบนช่วงระหว่าง x_n และ x_{n+1}



ในรูป จะพิจารณากรณี $n=0$ สังเกตว่า

$$f(x_0, y_0) \text{ และ } f(x_1, y_1^*)$$

คือความชันของเส้นตรงที่ลากจากจุด (x_0, y_0) และ (x_1, y_1^*) ตามลำดับเมื่อหาค่าเฉลี่ยของความชันทั้งสองซึ่งเป็นความชันของเส้นปะ เมื่อเลื่อนเส้นตรงที่มีความชัน

$m = f(x_0, y_0)$ ไปยังจุดที่มีพิกัด y_1^* ซึ่งเป็นค่าที่ได้จากระเบียบวิธีของออยเลอร์ และเมื่อเราเลื่อนเส้นตรงที่มีความชัน m_{ave} ผ่านจุด (x_0, y_0) จนถึงจุด x_1

เมื่อพิจารณาจากรูปจะเห็นได้ว่า y_1 ที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกว่า y_1^*

เรามักจะกล่าวค่าของ

$$y^* = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

จะเป็นตัวทำนายของ $y(x_1)$ โดยที่

$$y_1 = y_0 + h \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)}{2}$$

เป็นตัวแก้ไขของการประมาณค่า สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง ใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ปรับปรุงในการประมาณค่าของ $y(1.5)$ สำหรับ

สมการ

$$y' = 2xy$$

$$y(1) = 1$$

เปรียบเทียบผลลัพธ์เมื่อ $h = 0.1$ และ $h = 0.05$

หาผลเฉลย สำหรับ $n = 0$ และ $h = 0.1$ เริ่มคำนวณจะได้

$$y^* = y_0 + (0.1)2x_0y_0$$

$$= 1.2$$

$$\text{จาก (2) } y_1 = y_0 + \frac{(0.1)2x_0y_0 + 2x_1y_1^*}{2}$$

$$= 1 + (0.1) \frac{2(1)(1) + 2(1.1)(1.2)}{2}$$

$$= 1.232$$

การเปรียบเทียบค่าของการคำนวณเมื่อ $h = 0.1$ และ $h = 0.05$ แสดงดังตาราง 3 และ 4

ตามลำดับ

ตาราง 3 ใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ปรับปรุงโดย $h = 0.1$

x_n	y_n	ค่าจริง	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	% ความคลาดเคลื่อน
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2320	1.2337	0.0017	0.14
1.20	1.5479	1.5527	0.0048	0.31
1.30	1.9832	1.9937	0.0106	0.53
1.40	2.5908	2.6117	0.0209	0.80
1.50	3.4509	3.4904	0.0394	1.13

ตาราง 4 ใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ปรับปรุงโดย $h = 0.05$

x_n	y_n	ค่าจริง	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	% ความคลาดเคลื่อน
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.15	1.1077	1.1079	0.0002	0.02
1.10	1.2332	1.2337	0.0004	0.04
1.15	1.3798	1.3806	0.0008	0.06
1.20	1.5514	1.5527	0.0013	0.08
1.25	1.7531	1.7551	0.0020	0.11
1.30	1.9909	1.9937	0.0029	0.14
1.35	2.2721	2.2762	0.0041	0.18
1.40	2.6060	2.6117	0.0057	0.22
1.45	3.0038	3.0117	0.0079	0.26
1.50	3.4795	3.4904	0.0108	0.31

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระเบียบวิธีสามพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์(The Three – Term Taylor Method)

ในการศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ อัลกอริทึมที่ใช้ในการคำนวณจะได้มาจากการขยายอนุกรมเทย์เลอร์ เมื่อย้อนกลับไปพิจารณาแคลคูลัสซึ่งรูปแบบของการขยายอนุกรมเมื่อจุดศูนย์กลางที่จุด a คือ

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{(x-a)}{1!} + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (3)$$

เป็นที่เข้าใจว่าฟังก์ชัน $f(x)$ หาอนุพันธ์ได้(derivatives)ทุกๆอันดับและอนุกรม (3) อยู่ในช่วง $|x-a| < R$ สังเกตว่าเราให้ $a = x_n$ และ $x = x_n + h$ ดังนั้นจาก (1) จะได้

$$y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + y''(x_n)\frac{h^2}{2} + \dots \quad (4)$$

เมื่อย้อนกลับไปพิจารณาระเบียบวิธีของออยเลอร์

สมมติให้ฟังก์ชัน $y(x)$ คือผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

อันดับหนึ่ง

$$y' = f(x, y)$$

ถ้าเราตัดปลายอนุกรม (4) หลังจาก 2 เทอมแรก จะได้ค่าประมาณ

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + y'(x_n)h$$

หรือ

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + f(x_n, y(x_n))h \quad (5)$$

เมื่อแทนที่ $y(x_n + h)$ และ $y(x_n)$ ในสมการ (5) ด้วยค่าประมาณคือ y_{n+1} และ y_n ตามลำดับ แทนสัญลักษณ์ \approx ด้วยเครื่องหมายเท่ากับ

สังเกตว่าเราจะได้รูปแบบของออยเลอร์

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (6)$$

ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์

โดยนำ 3 เทอมแรกในอนุกรม (4) เราสามารถเขียน

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + y'(x_n)h + y''(x_n)\frac{h^2}{2}$$

เมื่อแทนที่ $y(x_n + h)$, $y(x_n)$, $y'(x_n)$, $y''(x_n)$ ด้วย y_{n+1} , y_n , y'_n , y''_n ตามลำดับในสมการข้างต้นเราได้

$$y_{n+1} = y_n + y'_n h + y''_n \frac{h^2}{2} \quad (7)$$

อนุพันธ์อันดับสอง y'' สามารถหาค่าได้จากการหาอนุพันธ์ของ $y' = f(x, y)$ ในจุดนี้จะต้องพิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น 2 ปัญหา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง ใช้รูปแบบสามพจน์แรกของอนุกรมเทย์เลอร์ในการประมาณค่าของ $y(1.5)$ ซึ่ง
เป็นผลเฉลยของ

$$y' = 2xy \quad , \quad y(1) = 1$$

เปรียบเทียบผลลัพธ์เมื่อ $h = 0.1$ และ $h = 0.05$

วิธีทำ เนื่องจาก $y' = 2xy$ จากกฎผลคูณ (product rule) จะได้ $y'' = 2xy' + 2y$
ดังนั้นเมื่อให้ $h = 0.1, n = 0$ เราคำนวณครั้งแรกจะได้

$$y'_0 = 2x_0y_0 = 2(1)(1) = 2$$

จากนั้นจะได้

$$y''_0 = 2x_0y'_0 + 2y_0$$

$$= 2(1)(2) + 2(1) = 6$$

จาก 5. จะได้

$$y_1 = y_0 + y'_0(0.1) + y''_0 \frac{(0.1)^2}{2}$$

$$= 1 + 2(0.1) + 6(0.005)$$

$$= 1.23$$

ผลลัพธ์ของการทำซ้ำพร้อมทั้งเปรียบเทียบกับค่าจริงสรุปดังตาราง 5 และตาราง 6
ตาราง 5 ใช้ระเบียบวิธีสามพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์ โดยให้ $h = 0.1$

x_n	y_n	ค่าจริง	ค่าคลาดเคลื่อน สัมพัทธ์	% ความคลาด เคลื่อน
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2300	1.2337	0.0037	0.30
1.20	1.5427	1.5527	0.0100	0.65
1.30	1.9728	1.9937	0.0210	1.05
1.40	2.5721	2.6117	0.0396	1.52
1.50	3.4188	3.4904	0.0715	2.05

ตาราง 6 ใช้ระเบียบวิธีของสามพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์ โดยที่ $h = 0.05$

x_n	y_n	ค่าจริง	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	% ความคลาดเคลื่อน
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.15	1.1075	1.1079	0.0004	0.04
1.10	1.2327	1.2337	0.0010	0.08
1.15	1.3788	1.3806	0.0018	0.13
1.20	1.5499	1.5527	0.0028	0.18
1.25	1.7509	1.7551	0.0041	0.23
1.30	1.9879	1.9937	0.0059	0.29
1.35	2.2681	2.2762	0.0081	0.36
1.40	2.6006	2.6117	0.0111	0.43
1.45	2.9967	3.0117	0.0150	0.50
1.50	3.4702	3.4904	0.0202	0.58

ผลลัพธ์ที่ได้จะพบว่าจากวิธีของออยเลอร์ปรับปรุงจะให้ค่าที่ไม่ต่างกันมากนักจริงๆแล้ว เมื่อฟังก์ชัน $f(x, y)$ เป็นเชิงเส้นทั้งตัวแปร x และ y ระเบียบวิธีสามพจน์ของเทย์เลอร์จะให้ค่าของ y_n เดียวกันกับที่ใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ปรับปรุงเมื่อกำหนดค่า h ให้เท่ากัน

ระเบียบวิธีของรุงเง-กุตตา(Runge-Kutta Method)

เป็นวิธีที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เชิงอนุพันธ์ วิธีของรุงเง-กุตตาต้องการให้ความคลาดเคลื่อนเป็นอันดับเดียวกับระเบียบวิธีของอนุกรมเทย์เลอร์แต่พยายามหลีกเลี่ยงการหาสูตรของอนุพันธ์ เพราะการหาอนุพันธ์ของ f ที่ปรากฏในอนุกรมของเทย์เลอร์จะหาอนุพันธ์อันดับสูงยุ่งยาก เราจะแสดงการได้มาของวิธีรุงเง-กุตตาดังนี้ให้ (โดยจะใช้อนุพันธ์เฉลี่ยที่สองจุด เป็นความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_n, y_n) เพื่อประมาณค่า $y(x_{n+1})$)

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 \quad \text{————— (8)}$$

โดย $k_1 = hf(x_n, y_n)$

$$k_2 = hf(x_n + ah, y_n + \beta k_1)$$

เมื่อเรากระจาย $f(x_n + ah, y_n + \beta k_1)$ โดยอนุกรมเทย์เลอร์ของอนุพันธ์สองตัวแปรจะได้

$$k_2 = f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + \beta hk_1 f_y(x_n, y_n) + \dots$$

ตัดมา 3 เทอมแรกแทนค่าใน (8) จะได้

$$y_{n+1} = y_n + haf(x_n, y_n) + hbf(x_n, y_n) + h^2 ahf_x(x_n, y_n) + h^2 \beta bf_y(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) \quad \text{————— (9)}$$

แต่ $y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y(x_n + h)$

$$= y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f_x(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f_y(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) \quad \text{————— (10)}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ในเทอมของ h แล้วให้ $\alpha = \beta = 1$ จะได้ $a = b = \frac{1}{2}$

จะได้รูปแบบของระเบียบวิธีของรุงเง-กุตตาอันดับสอง

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

โดย $k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + k_1) \quad \text{————— (11)}$

ซึ่งตรงกับรูปแบบของระเบียบวิธีของออยเลอร์ปรับปรุง

ถ้าให้ $a = 1$ และ $b = 0$ จะได้เป็นรูปแบบของออยเลอร์

ต่อไปจะศึกษาระเบียบวิธีของรุงเง-กุตตาอันดับสาม ซึ่งพิจารณาจากค่าอนุพันธ์

เฉลี่ยที่สามจุด จะได้

$$y_{n+1} = y_n + h(ak_1 + bk_2 + ck_3)$$

โดย $k_1 = f(x_n, y_n)$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2)$$

กระจาย k_2 และ k_3 โดยอนุกรมเทย์เลอร์ จากนั้นแทนค่าใน y_{n+1} แล้วเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ในเทอมของ h กับสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{n+1} \cong y(x_{n+1}) = y(x_n + h)$$

ทำเหมือนระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตาอันดับสอง โดยที่ $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ และ $\alpha_2 = 1$ ดังนั้น

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = -1, \beta_3 = 2, a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{3} \text{ และ } c = \frac{1}{6}$$

จะได้รูปแบบของระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตาอันดับสาม

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

โดย

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2)$$

เราอาจหาระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตาอันดับสูงขึ้นไปเรื่อยๆ ได้ แต่ในทางทฤษฎี และปฏิบัติวิธีของรุงเง-กูดตาอันดับที่สูงเกินกว่า 4 จะไม่ทำให้ผลเฉลยดีขึ้นโดยทั่วไปจึงใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตาอันดับสอง สาม และ สี่ และวิธีที่นิยมใช้คือระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตาอันดับที่สี่มีรูปแบบดังนี้

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

โดย

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3)$$

ตัวอย่าง

จงใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตา โดยให้ $h = 0.1$ เพื่อประมาณค่าผลเฉลย $y(1.5)$ ของสมการ

$$y' = 2xy, \quad y(1) = 1$$

หาผลเฉลย

เริ่มคำนวณให้ $n = 0$ จากรูปแบบของรุงเง-กูดตาอันดับสี่จะได้

$$k_1 = (0.1)f(x_0, y_0)$$

$$= (0.1)(2x_0y_0) = 0.2$$

$$k_2 = (0.1)f\left(x_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.2}{2}\right)$$

$$= (0.1)2\left(x_0 + \frac{0.1}{2}\right)\left(y_0 + \frac{0.2}{2}\right)$$

$$= 0.231$$

$$k_3 = (0.1)f\left(x_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.231}{2}\right)$$

$$= (0.1)2\left(x_0 + \frac{0.1}{2}\right)\left(y_0 + \frac{0.231}{2}\right)$$

$$= 0.234255$$

$$k_4 = (0.1)f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.234255)$$

$$= (0.1)(x_0 + 0.1)(y_0 + 0.234255)$$

$$= 0.2715361$$

ดังนั้น

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$= 1 + \frac{1}{6}[0.2 + 2(0.231) + 2(0.234255) + 0.2715361]$$

$$1.23367435$$

เมื่อพิจารณาทศนิยม 4 ตำแหน่งจะได้

$$y_1 = 1.2337$$

ผลลัพธ์ทั้งหมดแสดงในตาราง 7

ตาราง 7 ใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-กูดคา โดยที่ $h = 0.1$

x_n	y_n	ค่าจริง	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	% ความคลาดเคลื่อน
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2337	1.2337	0.0000	0.00
1.20	1.5527	1.5527	0.0000	0.00
1.30	1.9937	1.9937	0.0000	0.00
1.40	2.6116	2.6117	0.0001	0.00
1.50	3.4902	3.4904	0.0001	0.00

จากปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = 2xy, \quad y(1) = 1$$

เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้รูปแบบต่างๆ

ตาราง 8 เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้รูปแบบต่างๆ โดยที่ $h = 0.1$

เปรียบเทียบผลลัพธ์ของระเบียบวิธีต่างๆ โดยที่ $h = 0.1$					
x_n	ออยเลอร์	ออยเลอร์ปรับปรุง	สามพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์	รุงเง-กูดตา	ค่าจริง
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.2000	1.2320	1.2300	1.2337	1.2337
1.20	1.4640	1.5479	1.5427	1.5527	1.5527
1.30	1.8154	1.9832	1.9728	1.9937	1.9937
1.40	2.2874	2.5908	2.5721	2.6116	2.6117
1.50	2.9278	3.4509	3.4188	3.4902	3.4904

เปรียบเทียบผลลัพธ์ เมื่อ $h = 0.05$

1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.05	1.1000	1.1077	1.1075	1.1079	1.1079
1.10	1.2155	1.2332	1.2327	1.2337	1.2337
1.15	1.3492	1.3798	1.3788	1.3806	1.3806
1.20	1.5044	1.5514	1.5499	1.5527	1.5527
1.25	1.6849	1.7531	1.7509	1.7551	1.7551
1.30	1.8955	1.9909	1.9879	1.9937	1.9937
1.35	2.1419	2.2721	2.2681	2.2762	2.2762
1.40	2.4311	2.6060	2.6006	2.6117	2.6117
1.45	2.7714	3.0038	2.9967	3.0117	3.0117
1.50	3.1733	3.4795	3.4702	3.4903	3.4904

จากตารางที่ 8 จะเห็นว่า

- เมื่อใช้ระเบียบวิธีของรุงเงคตาอันดับ 4 ค่าประมาณที่ได้นั้นจะมีค่าใกล้เคียงหรือเท่ากับผลเฉลยจริงเมื่อพิจารณาทศนิยม 4 ตำแหน่ง

- เมื่อใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ปรับปรุงและระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ จะเห็นว่าค่าประมาณจะมีค่าใกล้เคียงกัน

- เมื่อใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ ค่าประมาณของผลเฉลยจะมีความคลาดเคลื่อนมากที่สุด แต่ระเบียบวิธีของออยเลอร์เป็นวิธีที่ง่ายในการนำไปใช้ แต่ค่าประมาณจะเข้าสู่ผลเฉลยจริงอย่างช้าๆ

- เมื่อกำหนดให้ขนาดของช่วงมีค่าเล็กลง จะเห็นว่าค่าประมาณจะมีค่าใกล้เคียงผลเฉลยจริงยิ่งขึ้น

ความคลาดเคลื่อน

ความคลาดเคลื่อนจากการใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขแก้ปัญหาต่างๆ เกิดขึ้นได้จากสาเหตุหลายชนิด ซึ่งจะได้กล่าวถึงสาเหตุของความคลาดเคลื่อนแต่ละชนิดที่ละชนิด รวมถึงบางชนิดที่เกิดก่อนที่จะใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเข้าแก้ปัญหาด้วย

ความผิดพลาดหรือผลอเรอ

ความผิดพลาดหรือผลอเรอเกิดจากตัวผู้แก้ปัญหาเอง เช่น ใส่เครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ผิด ลอกข้อมูลผิด เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ผิด วัดปริมาณต่างๆ ผิด(ความยาว ปริมาตร อุณหภูมิ ความดัน ฯลฯ)

ความผิดพลาดหรือผลอเรอนี้จะแก้ไขได้โดยการตรวจสอบอย่างละเอียดและรอบคอบหลายๆครั้ง จนแน่ใจว่าไม่มีความผิดพลาดหลงเหลืออยู่อีก

หลายครั้งเมื่อได้คำตอบที่ไม่เป็นไปตามที่คาดหมายไว้หรือไม่เป็นไปตามทฤษฎีหรือการทดลอง และไม่สามารถหาสาเหตุของความคลาดเคลื่อนชนิดอื่นได้ ความคลาดเคลื่อนนี้มักจะเป็นความคลาดเคลื่อนจากความผิดพลาดหรือผลอเรอ เมื่อตรวจสอบอย่างละเอียดและรอบคอบแล้วอีกคร้งมักจะพบที่ผิดพลาดเสมอ

ตัวอย่างความผิดพลาดหรือผลอเรอ เช่น

เขียนรูปแบบคณิตศาสตร์จาก $y' = e^x \cosh y$ เป็น $y' = e^x \cos y$

ลอกข้อมูลจากจำนวน 121.23 เป็น 12.123

เขียนประโยคคอมพิวเตอร์จาก $\text{SQRT}(B*B-4.0*A*C)$ เป็น

$\text{SQRT}(B*B-4.0*A)*C$

ความผิดพลาดหรือผลอเรอนี้จะรวมถึงความผิดพลาดของข้อมูล เช่น ค่าคงที่ต่างๆ ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการทดลอง

ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบทางคณิตศาสตร์

ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบทางคณิตศาสตร์เกิดจากการสร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เป็นไปตามความเป็นจริงของปัญหาที่เกิดขึ้น ทั้งนี้ไม่ได้หมายถึงการสร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ผิด แต่จะหมายถึงการที่ไม่สามารถสร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ให้เป็นไปตามความเป็นจริงได้ ทั้งนี้เนื่องจากในทางทฤษฎีของคณิตศาสตร์จะต้องมีการตั้งสมมติฐานต่างๆ ซึ่งอาจจะเป็นไปไม่ได้ในความเป็นจริง หรือในบางครั้งจะต้องตัดข้อแม้บางอย่างในความเป็นจริงออกเพื่อให้ได้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปแบบเชิงเส้น (linear model) เพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎี

หรือวิธีแก้ปัญหามีอยู่และเพื่อความสะดวกและง่ายต่อการแก้ปัญหา ทั้งนี้เนื่องจากรูปแบบที่ไม่เชิงเส้น (nonlinear model) มักจะยากต่อการแก้ปัญหา

ความคลาดเคลื่อนจากรูปแบบทางคณิตศาสตร์นี้ไม่สามารถจะทำให้หมดหรือเล็กลงได้เลย เว้นเสียแต่จะต้องเปลี่ยนรูปแบบทางคณิตศาสตร์ใหม่ ซึ่งเป็นสิ่งที่นอกเหนือจากที่จะศึกษาในที่นี้

ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย(truncation error)

ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายเกิดจากการเปลี่ยนรูปแบบทางคณิตศาสตร์ไปเป็นรูปแบบเชิงตัวเลขซึ่งเป็นการกระทำทางเลขคณิตที่เป็นจำนวนจำกัด เช่น เมื่อตัดสามพจน์แรกของการขยายอนุกรมเทย์เลอร์มาใช้ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน เมื่อพิจารณาจากเส้นโค้งผลเฉลยหรือจุดที่ใกล้เส้นโค้งผลเฉลยด้วยวิธีของออยเลอร์ ก็ก่อให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายได้เช่นกัน

เราสมมติว่าคอมพิวเตอร์ของเราทำการคำนวณให้ผลถูกต้องสมบูรณ์ นั่นคือ เราสามารถเก็บตำแหน่งทศนิยมได้เป็นจำนวนจำกัด ความแตกต่าง E_n ระหว่างผลเฉลย $y(x)$ ของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าประมาณเชิงตัวเลขของมัน y_n คือ

$$E_n = y(x_n) - y_n \quad \text{—————(1)}$$

เรียกว่า global truncation error ซึ่งเกิดจาก 2 สาเหตุคือ

- หนึ่ง เกิดจากรูปแบบที่ใช้ประมาณค่า
- สอง ข้อมูลที่นำเข้ามาใช้คำนวณในแต่ละขั้นตอนเป็นเพียงค่าประมาณโดยทั่วไปแล้ว $y(x_n)$ ไม่เท่ากับ y_n ถ้าเราสมมติให้ $y_n = y(x_n)$ แล้วจะมี

เพียงค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดในขั้นตอนนั้นๆ ซึ่งเกิดจากการใช้รูปแบบประมาณค่า ซึ่งเรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายเฉพาะที่(local truncation error)

ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ(round-off error)

ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเกิดจากการกระทำทางเลขคณิตแล้วเกิดจำนวนหลักของตัวเลขหรือจำนวนทศนิยมของตัวเลขมีมากเกินไปที่จะบันทึกลงในสิ่งที่จะบันทึกได้ เช่น เครื่องคิดเลขที่มีเลขได้ไม่เกิน 8 หลัก ดังนั้น ส่วนที่เกินจะต้องถูกตัดออกไป แต่การตัดส่วนที่เกินออกไป แต่การตัดส่วนที่เกินออกไปอาจมีวิธีการต่างๆ เช่น การปัดจำนวนทศนิยมแบบหนึ่งจะกระทำดังนี้ ถ้าทศนิยมตัวแรกที่จะปัดเป็นเลขที่มากกว่า 5 จะเพิ่มค่าเลขตัวก่อนตัวที่จะปัดอีกหนึ่ง ถ้าทศนิยมตัวแรกที่จะปัดเป็นเลข 5 จะเพิ่มตัวเลขตัวก่อนที่จะปัดอีกหนึ่งเมื่อตัวเลขตัวที่จะปัดตัวที่

สองเป็นเลขคู่ ดังนั้นจะปัด 3.1415317 เป็น 3.141532 และจะปัด 0.712453543 เป็น 0.712454 และจะปัด 4.050137574 เป็น 4.050137

ค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษ R_n กำหนดโดย

$$R_n = y_n - Y_n$$

โดยที่ Y_n คือค่าที่คำนวณได้อย่างแท้จริงจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่กำหนดให้

ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษนี้ไม่สามารถทำให้หมดไปได้ และอาจจะไม่สามารถทำให้เล็กลงได้เลย เว้นเสียแต่จะเปลี่ยนสิ่งที่จะบันทึกตัวเลขใหม่ เช่นในคอมพิวเตอร์อาจจะเปลี่ยนจากการใช้ความเที่ยงตรงชั้นเดียว(single precision) ไปเป็นความเที่ยงตรงสองชั้นหรือหลายชั้น (double or multiple precision)

ค่าสัมบูรณ์ของค่าคลาดเคลื่อนรวมในการคำนวณ $y(x_n)$ คือ

$$|y(x_n) - Y_n| = |y(x_n) - y_n + y_n - Y_n| \quad \text{---(0)}$$

เมื่อใช้สมการอริรูปสามเหลี่ยม(triangle inequality) $|a + b| \leq |a| + |b|$ จากสมการ(0) จะได้

$$\begin{aligned} |y(x_n) - Y_n| &\leq |y(x_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \\ &\leq |E_n| + |R_n| \end{aligned}$$

ดังนั้นค่าคลาดเคลื่อนรวมมีขอบเขตคือผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายและค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษ

ระเบียบวิธีหลายขั้น

ในหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x, y) \quad , y(x_0) = y_0 \quad \text{—————(1)}$$

โดยใช้ค่าที่จุด $x = x_n$ ในการคำนวณค่าประมาณของผลเฉลย $f(x_{n+1})$ ที่จุดต่อไป $x = x_{n+1}$

อีกนัยหนึ่ง การคำนวณค่า f ที่จุดใดๆจะใช้เฉพาะค่าของจุดที่อยู่ก่อนหน้า ดังนั้นระเบียบวิธีนี้จึงเรียกว่า ระเบียบวิธีขั้นเดียว ถ้าให้ y_1 เป็นค่าที่จุด x_1 , y_2 เป็นค่าที่จุด x_2 , y_n เป็นค่าที่จุด x_n เมื่อเราใช้ค่าเหล่านี้ในการพิจารณาค่า y_{n+1} ระเบียบวิธีนี้เรียกว่า ระเบียบวิธีหลายขั้น ซึ่งมีหลายวิธีโดยในแต่ละวิธีจะให้ความถูกต้องได้หลายระดับ ขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดที่อยู่ก่อนหน้าที่จะนำมาใช้ในการคำนวณ โดยให้ขนาดของช่วง h

ระเบียบวิธีของออดัมส์

อยู่ในรูปแบบ

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx \quad \text{—————(2)}$$

โดย $y(x)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (1) แนวคิดเบื้องต้นของระเบียบวิธีของออดัมส์คือ ประมาณค่า $y(x)$ โดยใช้พหุนามดีกรี $k-1$, $P_k(x)$ และใช้พหุนามในการหาค่าอินทิกรัลของสมการทางขวามือของสมการ (2) สัมประสิทธิ์ใน $P_k(x)$ พิจารณาโดยใช้ค่าที่คำนวณได้จากจุดก่อนหน้านี

ตัวอย่างเช่น สมมติว่าเราต้องการใช้เพียงจุด (x_n, y_n) และ (x_{n-1}, y_{n-1})

ดังนั้นพหุนาม $P_2(x)$ มีดีกรีหนึ่งและอยู่ในรูป $P_2(x) = Ax + B$ เนื่องจาก $P_2(x)$ จะใช้ในการ

ประมาณค่า $y'(x)$ เรากำหนดให้ $P_2(x_n) = f(x_n, y_n)$ ดังนั้น $P_2(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1})$

เราแทน $f(x_i, y_i)$ ด้วย f_i สำหรับจำนวนเต็ม i ดังนั้น A และ B สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{aligned} Ax_n + B &= f_n \\ Ax_{n-1} + B &= f_{n-1} \end{aligned} \quad \text{—————(3)}$$

หาค่า A, B โดยให้

$$A = \frac{f_n - f_{n-1}}{h} \quad , \quad B = \frac{f_{n-1}x_n - f_nx_{n-1}}{h} \quad \text{—————(4)}$$

เมื่อแทนที่ $y'(x)$ ด้วย $P_2(x)$ และหาค่าอินทิกรัลในสมการ (2) จะได้ว่า

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \frac{A}{2}(x_{n+1}^2 - x_n^2) + B(x_{n+1} - x_n)$$

สุดท้าย เราแทนที่ $y(x_{n+1})$ และ $y(x_n)$ ด้วย y_{n+1} และ y_n ตามลำดับ จัดให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่าย โดยให้ขนาดของช่วงเป็นค่าคงที่ h เราจะได้

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2}hf_n - \frac{1}{2}hf_{n-1} \quad \text{—————(5)}$$

สมการ (5) เรียกว่า รูปแบบของออดัมส์-แบสเฟอร์อันดับสอง ซึ่งเป็นรูปแบบชัดเจน (explicit formular) นั่นคือสมการอยู่ในเทอมของ y_n, y_{n-1} และมีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายเฉพาะที่ (Local truncation error) คือ h^3

สำหรับรูปแบบของออดัมส์-แบสเฟอร์อันดับหนึ่งจะใช้พหุนามกำลังศูนย์

$$P_1(x) = f_n \quad \text{ซึ่งก็คือรูปแบบของออยเลอร์}$$

รูปแบบของออดัมส์-แบสเฟอร์ซึ่งให้ความถูกต้องแม่นยำยิ่งขึ้นทำได้โดยวิธีการดังที่กระทำตามข้างต้นแต่ใช้พหุนามดีกรีสูงและสอดคล้องกับหลายๆจุด ตัวอย่างเช่น สมมติว่าใช้พหุนามดีกรี 3, $P_3(x)$ สัมประสิทธิ์พิจารณาจาก 4 จุดคือ (x_n, y_n) , (x_{n-1}, y_{n-1}) , (x_{n-2}, y_{n-2}) และ (x_{n-3}, y_{n-3}) เมื่อแทนที่พหุนามนี้ใน $y'(x)$ ในสมการ (2) หาตัวอินทิกรัลและจัดรูปผลลัพธ์ให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่าย ทำยที่สุดจะได้รูปแบบของออดัมส์-แบสเฟอร์อันดับสี่ดังนี้

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad \text{—————(6)}$$

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายเฉพาะที่ของรูปแบบของออดัมส์-แบสเฟอร์อันดับสี่เป็นสัดส่วนกับ h^5

การค้นแปรของอนุพันธ์ของรูปแบบของออดัมส์-แบสเฟอร์จะได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ รูปแบบของออดัมส์-มุลตัน เพื่อให้ความแตกต่างจะพิจารณาจากกรณีที่เป็นอันดับสอง โดยใช้พหุนามดีกรีหนึ่ง $Q_2(x) = \alpha x + \beta$ แล้วพิจารณาสัมประสิทธิ์โดยใช้จุด (x_n, y_n) และ (x_{n+1}, y_{n+1}) ดังนั้น α และ β จะสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} \alpha x_n + \beta &= f_n \\ \alpha x_{n+1} + \beta &= f_{n+1} \end{aligned} \quad \text{—————(7)}$$

จะได้ว่า

$$\alpha = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}, \quad \beta = \frac{f_n x_{n+1} - f_{n+1} x_n}{h} \quad \text{—————(8)}$$

แทนที่ $Q_2(x)$ ใน $y'(x)$ ในสมการ (2) และจัดให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายจะได้

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hf_n + \frac{1}{2}hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad \text{—————(9)}$$

ซึ่งเรียกว่า รูปแบบของออดัมส์-มุลตันอันดับสอง เราเขียนในเทอมของ $f(x_{n+1}, y_{n+1})$

ในทอมสุดท้ายนั้นเพื่อเน้นให้เห็นว่ารูปแบบของออดัมส์-มุลตันเป็นรูปแบบปริยาย (*implicit formular*) เนื่องจากมีตัวไม่ทราบค่า y_{n+1} ปรากฏอยู่ในทั้งสองข้างของสมการ ค่าตลาดเคลื่อนตัดปลายเฉพาะที่ของรูปแบบของออดัมส์-มุลตันอันดับสองเป็นสัดส่วนกับ h^3

เพื่อให้รูปแบบของออดัมส์ มีความถูกต้องแม่นยำยิ่งขึ้นสามารถทำได้โดยประมาณค่าพหุนามกำลังสูง โดยรูปแบบของออดัมส์-มุลตันอันดับสี่มีค่าตลาดเคลื่อนตัดปลายเฉพาะที่เป็นสัดส่วนกับ h^5 คือ

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (10)$$

สังเกตว่าเป็นรูปแบบปริยายเพราะค่า y_{n+1} ปรากฏเทอม f_{n+1}

เนื่องจากว่า การวิเคราะห์เชิงตัวเลขต้องการทั้งความเรียบง่ายและความถูกต้องแม่นยำ ดังนั้นจึงรวมทั้งสองรูปแบบเข้าไว้ด้วยกันเรียกว่า *ระเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้* เมื่อเราทราบค่า $y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}$ และ y_n เราสามารถทำนายค่า $f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}$ และ f_n จากนั้นใช้รูปแบบของออดัมส์-แบสฟอร์ชตามสมการ (6) เป็นตัวทำนายเพื่อหาค่า y_{n+1} จากนั้นคำนวณ f_{n+1} โดยใช้รูปแบบของออดัมส์-มุลตันตาม (10) เป็นตัวแก้ไข ซึ่งเป็นการปรับปรุงหรือแก้ไขค่า y_{n+1} และเราสามารถใช้รูปแบบตัวแก้ซ้ำอีก โดยนำค่าที่แก้ไขได้แล้วแทนที่กลับไปในสมการทางขวามือของตัวแก้ซ้ำอีก เพื่อให้ได้ค่าประมาณของ y_{n+1} ที่ดียิ่งขึ้น วิศวกรทำซ้ำเช่นนี้จะสามารถดำเนินไปได้เรื่อยๆ จนกว่าจะได้ค่าประมาณที่สอดคล้องกับสมการตัวแก้ไขภายในช่วงความผิดพลาดที่ยอมรับได้ อย่างไรก็ตาม ถ้าจำเป็นต้องใช้รูปแบบตัวแก้ไขมากกว่าหนึ่งครั้งหรือสองครั้ง นั้นหมายความว่าขนาดของช่วง h มีขนาดกว้างเกินไปควรลดขนาดลง

ในการใช้ระเบียบวิธีหลายขั้น ถ้าเป็นแบบ k ขั้นตอน นอกเหนือจากค่าเริ่มต้น y_0 แล้ว เรายังต้องการค่า y_1, \dots, y_{k-1} ในการคำนวณค่าประมาณครั้งแรก โดยจะคำนวณจากระเบียบวิธีอื่นๆ ที่ทราบมาแล้ว เช่น ระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตา ซึ่งการตั้งต้นแบบนี้เป็นข้อเสียของระเบียบวิธีหลายขั้น ส่วนข้อได้เปรียบคือ เราสามารถคำนวณโดยมีความถูกต้องในระดับเดียวกันกับระเบียบวิธีขั้นเดียว แต่มีจำนวนครั้งในการคำนวณค่า f น้อยกว่าในแต่ละขั้น เพราะโดยปกติแล้วการคำนวณค่า f มักจะกินเวลามากที่สุดในการประมาณค่าในแต่ละจุด ถ้าการลู่เข้า (convergence) ของการทำซ้ำของตัวแก้ไขช้ามาก เราอาจจะต้องเปลี่ยนวิธี เช่น ใช้ขนาดของช่วง h ลดลงครึ่งหนึ่ง และตั้งต้นใหม่ หรือเปลี่ยนไปใช้วิธีอื่นถ้าจำเป็น

โดยปกติจะเปรียบเทียบอะไรไม่ได้เมื่อใช้ระเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้ที่มีอันดับสอง เพราะว่าต้องคำนวณค่า f อย่างน้อย 2 ครั้งในแต่ละขั้นตอน ซึ่งระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตาที่ต้องคำนวณค่าของ f เพียง 2 ครั้งในแต่ละขั้นตอน โดยทั่วไประเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้จะต้องคำนวณค่า f น้อยกว่าระเบียบวิธีขั้นเดียว เมื่ออันดับเป็น 4 หรือมากกว่า

ระเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้ไขอันดับ 4 ที่รู้จักกันดีมีหลายวิธี วิธีที่ใช้มากที่สุดสรุปได้ดังนี้

1. ระเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้ไขอันดับ 4 ของอดัมส์-มุลตัน, อดัมส์-แบสฟอร์ธ มีรูปแบบ

$$\text{ตัวทำนายของอดัมส์-แบสฟอร์ธ} \quad py_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$\text{ตัวแก้ไขของอดัมส์-มุลตัน} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

$$\text{โดยที่ } f_{n+1} = f(x_{n+1}, py_{n+1})$$

2. ระเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้ไขอันดับสี่ของไมลน์ มีรูปแบบ

$$\text{ตัวทำนาย} \quad py_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2})$$

$$\text{ตัวแก้ไขพิจารณาจากกฎของซิมป์สัน} \quad y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$$

$$\text{โดยที่ } f_{n+1} = f(x_{n+1}, py_{n+1})$$

ตัวอย่าง จงใช้รูปแบบตัวทำนาย-ตัวแก้ไขของอดัมส์-แบสฟอร์ธ-มุลตันอันดับ

สี่แก้ปัญหาค่า $y' = y - x; y(0) = 2$ บนช่วง $[1, 0]$ เมื่อ $h = 0.1$

หาค่าเฉลย ในที่นี้ $f(x, y) = y - x, x_0 = 0$ และ $y_0 = 2$ ใช้ระเบียบวิธีของ

รุงเง-กูดคา เราจะได้ค่าเริ่มต้น 3 ค่าคือ $y_1 = 2.2051708, y_2 = 2.4214026$

และ $y_3 = 2.6498585$ ดังนั้น

$$y_0' = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2 \quad y_1' = y_1 - x_1 = 2.1051708$$

$$y_2' = y_2 - x_2 = 2.2214026 \quad y_3' = y_3 - x_3 = 2.3498585$$

หลังจากนั้น รูปแบบของอดัมส์-แบสฟอร์ธ, อดัมส์-มุลตัน อันดับสี่ เริ่มต้นที่ค่า $n = 3$

และจากสมการ $py'_{n+1} = f(x_{n+1}, py_{n+1})$ เราคำนวณ

$$n = 3: x_4 = 0.4$$

$$\begin{aligned} py_4 &= y_3 + (h/24)(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0') \\ &= 2.6492525 + (0.1/24)[55(2.349585) - 59(2.2214026) \\ &\quad + 37(2.1051708) - 9(2)] \end{aligned}$$

$$= 2.8918201$$

$$py_4' = py_4 - x_4 = 2.8918201 - 0.4 = 2.4918201$$

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + (h/24)(9py_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1') \\ &= 2.6498585 + (0.1/24)[9(2.4918201) + 19(2.3498585) \\ &\quad - 5(2.2214026) + 2.1051708] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= 2.8918245$$

$$y_4' = y_4 - x_4 = 2.8918245 - 0.4 = 2.4918245$$

$$n = 4 : x_5 = 0.5$$

$$\begin{aligned} py_5 &= y_4 + (h/24)55y_4' - 59y_3' + 37y_2' - 9y_1' \\ &= 2.8918245 + (0.1/24)[55(2.4918245) - 59(2.3498585) \\ &\quad + 37(2.2214026) - 9(2.1051708)] \end{aligned}$$

$$= 3.1487164$$

$$py_5' = py_5 - x_5 = 3.1487164 - 0.5 = 2.6487164$$

$$\begin{aligned} y_5 &= y_4 + (h/24)(9py_5' + 19y_4' - 5y_3' + y_2') \\ &= 2.8918245 + (0.1/24)[9(2.6487164) + 19(2.4918245) \\ &\quad - 5(2.3498585) + 2.2214026] \end{aligned}$$

$$= 3.1487213$$

$$y_5' = y_5 - x_5 = 3.1487213 - 0.5 = 2.6487213$$

$$n = 5 : x_6 = 0.6$$

$$\begin{aligned} py_6 &= y_5 + (h/24)55y_5' - 59y_4' + 37y_3' - 9y_2' \\ &= 3.1487213 + (0.1/24)[55(2.6487213) - 59(2.4948245) \\ &\quad + 37(2.3498585) - 9(2.2214026)] \end{aligned}$$

$$= 3.4221137$$

$$py_6' = py_6 - x_6 = 3.4221137 - 0.6 = 2.8221137$$

$$\begin{aligned} y_6 &= y_5 + (h/24)(9py_6' + 19y_5' - 5y_4' + y_3') \\ &= 3.1487213 + (0.1/24)[9(2.8221137) + 19(2.6487213) \\ &\quad - 5(2.4918245) + 2.3498585] \end{aligned}$$

$$= 3.4221191$$

$$y_6' = y_6 - x_6 = 3.4221191 - 0.6 = 2.8221191$$

เมื่อเราทำต่อไปเรื่อยๆ เราจะได้ค่าดังตาราง 9

ตาราง 9

ระเบียบวิธี : ระเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้ไขของอดัมส์-แบสฟอร์ดซ์-มุลตันอันดับสี่			
ปัญหา : $y' = y - x; y(0) = 2$			
x_n	$h = 0.1$		ผลเฉลยจริง $Y(x) = e^x + x + 1$
	py_n	y_n	
0.0	-	2.0000000	2.0000000
0.1	-	2.2051708	2.2051709
0.2	-	2.4214026	2.4214028
0.3	-	2.6498585	2.6498588
0.4	2.8918201	2.8918245	2.8918247
0.5	3.1487164	3.1487213	3.1487213
0.6	3.4221137	3.4221191	3.4221188
0.7	3.7137473	3.7137533	3.7137527
0.8	4.0255352	4.0255418	4.0255409
0.9	4.3595971	4.3596044	4.3596031
1.0	4.7182756	4.7182836	4.7182818

ตัวอย่าง จงใช้รูปแบบตัวทำนาย-ตัวแก้ไขของไมลน์ ในการหาผลเฉลยของ

$$y' = y - x; y(0) = 2 \text{ บนช่วง } [0,1] \text{ และ } h = 0.1$$

ในที่นี้ $f(x, y) = y - x, x_0 = 0$ และ $y_0 = 2$ เมื่อใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตา

ในการหาค่าเริ่มต้น เราจะได้

$$y_1 = 2.2051708, \quad y_2 = 2.4214026 \text{ และ } y_3 = 2.6498585$$

ดังนั้น

$$y_0' = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$$

$$y_1' = y_1 - x_1 = 2.1051708$$

$$y_2' = y_2 - x_2 = 2.2214026$$

$$y_3' = y_3 - x_3 = 2.3498585$$

หลังจากนั้น ใช้รูปแบบของอดัมส์-แบสฟอร์ดซ์, อดัมส์-มุลตันคำนวณค่าจะได้ว่า

โดยเริ่มต้นที่ $n = 3$

$$n = 3: py_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2y_3' - y_2' + 2y_1')$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับใช้ในแวดวงวิชาการเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= 2 + \frac{4(0.1)}{3} [2(2.3498585) + 2.2214026 + 2(2.1051708)]$$

$$= 2.8918208$$

$$py_4' = py_4 - x_4 = 2.4918208$$

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3} (py_4' + 4y_3' + y_2')$$

$$= 2.4214026 + \frac{0.1}{3} [2.4918208 + 4(2.3498585) + 2.2214026]$$

$$= 2.8918245$$

$$n = 4 : x_4 = 0.4, \quad y_4' = y_4 - x_4 = 2.4918245$$

$$py_5 = y_1 + \frac{4h}{3} (2y_4' - y_3' + 2y_2')$$

$$= 2.205178 + \frac{4(0.1)}{3} [2(2.4918245) - 2.3498585 + 2(2.2214026)]$$

$$= 3.14877169$$

$$py_5' = py_5 - x_5 = 2.6487169$$

$$y_5 = y_3 + \frac{h}{3} (py_5' + 4y_4' + y_3')$$

$$= 2.6498585 + \frac{0.1}{3} [2.6487169 + 4(2.4918245) + 2.3498585]$$

$$= 3.1487209$$

$$n = 5 : x_5 = 0.5, \quad y_5' = y_5 - x_5 = 2.6487209$$

$$py_6 = y_2 + \frac{4h}{3} (2y_5' - y_4' + 2y_3')$$

$$= 2.4214026 + \frac{4(0.1)}{3} [2(2.6487209) - 2.4918245 - 2(2.3498585)]$$

$$= 3.4221138$$

$$py_6' = py_6 - x_6 = 2.8221138$$

$$y_6 = y_4 + \frac{h}{3} (py_6' + 4y_5' + y_4')$$

$$= 2.8918245 + \frac{0.1}{3} [2.8221138 + 4(2.6487169) + 2.4918245]$$

$$= 3.422186$$

เมื่อเราทำต่อไปเรื่อยๆ เราจะได้ค่าดังตาราง 10

ตาราง 10

ระเบียบวิธี : ระเบียบวิธีของไมลน์			
ปัญหา : $y' = y - x; y(0) = 2$			
x_n	$h = 0.1$		ผลเฉลยจริง $Y(x) = e^x + x + 1$
	y^*	y_n	
0.0	-	2.0000000	2.0000000
0.1	-	2.2051708	2.2051709
0.2	-	2.4214026	2.4214028
0.3	-	2.6498585	2.6498588
0.4	2.8918208	2.8918245	2.8918247
0.5	3.1487169	3.1487209	3.1487213
0.6	3.4221138	3.4221186	3.4221188
0.7	3.7137472	3.7137524	3.7137527
0.8	4.0255349	4.0255407	4.0255409
0.9	4.3595964	4.3596027	4.3596031
1.0	4.7182745	4.7182815	4.7182818

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

จากที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เราจะประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเหล่านี้กับระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

ให้ $y_1(x), \dots, y_m(x)$ เป็นองค์ประกอบของผลเฉลยของระบบสมการที่มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง m สมการ จะได้รูปแบบทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง ดังนี้

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

.

.

$$y_m'(x) = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

มีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y_1(x_0) = a_1, y_2(x_0) = a_2, \dots, y_m(x_0) = a_m$$

ให้ $y_{n,i}$ แทนค่าประมาณของ $y_i(x_n)$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$

และ $x_n = x_0 + nh$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$ ในกรณีนี้ x_n, k_1, k_2, k_3, k_4 เป็นเวกเตอร์ดังนี้

$$x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$$

$$k_1 = (k_{1,1}, \dots, k_{1,m})$$

$$k_2 = (k_{2,1}, \dots, k_{2,m})$$

สำหรับ k_3, k_4 ก็เป็นเช่นเดียวกัน

จะได้รูปแบบของรุงเง-กุตตาอันดับสี่สำหรับระบบสมการ ดังนี้

$$x_{n+1} = x_n + h \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_{n+1,i} = y_{n,i} + \frac{1}{6}[k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}] \quad i = 1, 2, \dots, m$$

เมื่อ h คือขนาดช่วง และ

$$k_{1,i} = hf_i(x_n, y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,m})$$

$$k_{2,i} = hf_i\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n,1} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{n,2} + \frac{k_{1,2}}{2}, \dots, y_{n,m} + \frac{k_{1,m}}{2}\right)$$

$$k_{3,i} = hf_i\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n,1} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{n,2} + \frac{k_{2,2}}{2}, \dots, y_{n,m} + \frac{k_{2,m}}{2}\right)$$

$$k_{4,i} = hf_i(x_n + h, y_{n,1} + k_{3,1}, y_{n,2} + k_{3,2}, \dots, y_{n,m} + k_{3,m})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$

ตัวอย่าง พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y_1'(x) = 2y_1 + 4y_2$$

$$y_2'(x) = -y_1 + 6y_2$$

$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 6$$

จงใช้ระเบียบวิธีเชิงของรุงเกตตาอันดับสี่เพื่อประมาณค่า $y_1(0.6)$, $y_2(0.6)$

โดยเปรียบเทียบผลลัพธ์เมื่อ $h = 0.2$, $h = 0.1$

หาผลเฉลย

คำนวณค่า $y_1(x)$, $y_2(x)$ โดยให้ $h = 0.2$ จะได้

$$f_1(x, y_1, y_2) = 2y_1 + 4y_2$$

$$f_2(x, y_1, y_2) = -y_1 + 6y_2$$

$$x_0 = 0, \quad y_{0,1} = -1, \quad y_{0,2} = 6$$

จะได้

$$k_{1,1} = hf_1(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = 0.2f_1(0, -1, 6)$$

$$= 0.2[2(-1) + 4(6)] = 4.4000$$

$$k_{2,1} = hf_2(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = 0.2f_2(0, -1, 6)$$

$$= 0.2[-1(-1) + 6(6)] = 7.4000$$

$$k_{1,2} = hf_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{0,1} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{0,2} + \frac{k_{2,1}}{2}\right)$$

$$= 0.2f_1(0.1, 1.2, 9.7) = 8.2400$$

$$k_{2,2} = hf_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{0,1} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{0,2} + \frac{k_{2,1}}{2}\right)$$

$$= 0.2f_2(0.1, 1.2, 9.7) = 11.4000$$

$$k_{1,3} = hf_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{0,1} + \frac{k_{1,2}}{2}, y_{0,2} + \frac{k_{2,2}}{2}\right)$$

$$= 0.2f_1(0.1, 3.12, 11.7) = 10.6080$$

$$k_{2,3} = hf_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{0,1} + \frac{k_{1,2}}{2}, y_{0,2} + \frac{k_{2,2}}{2}\right)$$

$$= 0.2f_2(0.1, 3.12, 11.7) = 13.4160$$

$$k_{1,4} = hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_{0,1} + \frac{k_{1,3}}{2}, y_{0,2} + \frac{k_{2,3}}{2})$$

$$= 0.2f_1(0.2, 8, 20.216) = 19.3760$$

$$k_{2,4} = hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_{0,1} + \frac{k_{1,3}}{2}, y_{0,2} + \frac{k_{2,3}}{2})$$

$$= 0.2f_2(0.2, 8, 20.216) = 21.3776$$

ดังนั้นจะได้

$$y_{1,1} = y_{0,1} + \frac{1}{6}[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}]$$

$$= -1 + \frac{1}{6}[4.4 + 2(8.24) + 2(10.608) + 19.3760]$$

$$= 9.2453$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}]$$

$$= 6 + \frac{1}{6}[7.4 + (11.4) + 2(13.416) + 21.3776]$$

$$= 19.0683$$

การคำนวณค่าพิจารณาตามนัย 4 ตำแหน่ง โดย $y_{1,1} \approx y_1(0.2)$ และ $y_{2,1} \approx y_2(0.2)$ โดยผลลัพธ์ทั้งหมดแสดงดังตาราง 11 และตาราง 12

ตาราง 11

$k_{1,1}$	$k_{1,2}$	$k_{1,3}$	$k_{1,4}$	$k_{2,1}$	$k_{2,2}$	$k_{2,3}$	$k_{2,4}$	x_n	$y_{1,n}$	y_2
4.4000	8.2400	10.6080	19.3760	7.4000	11.4000	13.4160	21.3776	0.00	-1.0000	6.0000
18.9527	31.1564	37.8870	63.6848	21.0329	31.7573	36.9716	57.8214	0.20	9.2453	19.0683
52.5093	97.7863	116.0063	187.3669	56.9378	84.8495	98.0688	151.4191	0.40	46.0327	55.1111
								0.60	158.9430	150.8889

ตาราง 12

$k_{1,1}$	$k_{1,2}$	$k_{1,3}$	$k_{1,4}$	$k_{2,1}$	$k_{2,2}$	$k_{2,3}$	$k_{2,4}$	x_n	$y_{1,n}$	y_2
								0.00	-1.0000	6.0000
2.2000	3.1600	3.4560	4.8720	3.7000	4.7000	4.9520	6.3256	0.10	2.3840	10.8889
4.8321	6.5742	7.0778	9.5870	6.2946	7.9413	8.3482	10.5957	0.20	9.3379	19.1111
9.5208	12.5821	13.4258	17.7609	10.5461	13.2339	13.8872	17.5358	0.30	22.5541	32.8889
17.6524	22.9090	24.3055	31.6554	17.4569	21.8114	22.8549	28.7393	0.40	46.5103	55.4444
31.4788	40.3496	42.6387	54.9202	28.6141	35.6245	37.2840	46.7207	0.50	88.5729	92.3333
54.6348	69.4029	73.1247	93.4107	46.5231	57.7482	60.3774	75.4370	0.60	160.7563	152.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองอยู่ในรูปแบบ

$$y''(x) = F(x, y, y'); \quad y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (1)$$

ในการประมาณค่าของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง ขั้นแรกเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งซึ่งทำได้โดยขั้นตอนลดรูปดังนี้

ให้ $y' = z$ จาก (1) จะได้

$$y' = z$$

$$z' = f(x, y, z)$$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 = z_0$

ตัวอย่าง จงแปลงปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

วิธีทำ

ให้ $y' = z$ จะได้

$$y' = z$$

$$z' = -3z - 2y$$

มีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y_0 = 1, z_0 = 1$

จากนั้นใช้ระเบียบวิธีต่างๆที่ได้ศึกษามาแล้วนำมาหาผลเฉลย ตัวอย่างเช่น

- เมื่อใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ จะได้

$$y_{n+1} = y_n + hz_n$$

$$z_{n+1} = z_n + h[-3z_n - 2y_n]$$

- เมื่อใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-กุตตาอันดับสี่

ถ้าต้องการประมาณค่าผลเฉลย $y(x), z(x) = y'(x)$ ของ

ระบบสมการ

$$y'(x) = f(x, y, z)$$

$$z'(x) = g(x, y, z)$$

มีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$ จะได้รูปแบบของรุงเงกุตตาอันดับสี่ดังนี้

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$n = 0, 1, 2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4]$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

โดยที่

$$m_1 = hf(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_1 = hg(x_n, y_n, z_n)$$

$$m_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}, z_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_2 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}, z_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$m_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}, z_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_3 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}, z_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$m_4 = hf(x_n + h, y_n + m_3, z_n + k_3)$$

$$k_4 = hg(x_n + h, y_n + m_3, z_n + k_3)$$

ตัวอย่าง จงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิง

อนุพันธ์สามัญอันดับสอง $y'' - y = x; y(0) = 0, y'(0) = 1$ บนช่วง $[0, 1]$ ที่ $h = 0.1$

หาผลเฉลย แปลงปัญหาให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง ได้ดังนี้

$$y' = f(x, y, z) = z$$

$$z' = g(x, y, z) = x + y$$

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 1$$

เริ่มคำนวณจะได้

$$n=0: y_0' = f(x_0, y_0, z_0) = z_0 = 1$$

$$z_0' = g(x_0, y_0, z_0) = y_0 + x_0 = 0 + 0 = 0$$

$$y_1 = y_0 + hy_0' = 0 + (0.1)(1) = 0.1$$

$$z_1 = z_0 + hz_0' = 1 + (0.1)(0) = 1$$

$$n=1: y_1' = f(x_1, y_1, z_1) = z_1 = 1$$

$$z_1' = g(x_1, y_1, z_1) = y_1 + x_1 = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + hy_1' = 0.1 + (0.1)(1) = 0.2$$

$$z_2 = z_1 + hz_1' = 1 + (0.1)(0.2) = 1.02$$

$$n=2: y_2' = f(x_2, y_2, z_2) = z_2 = 1.02$$

$$z_2' = g(x_2, y_2, z_2) = y_2 + x_2 = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

$$y_3 = y_2 + hy_2' = 0.2 + (0.1)(1.02) = 0.302$$

$$z_3 = z_2 + hz_2' = 1.02 + (0.1)(0.4) = 1.06$$

เมื่อคำนวณต่อจะได้ผลตามตาราง 13

ตาราง 13

ระเบียบวิธี : ระเบียบวิธีของออยเลอร์			
ปัญหา : $y''-y = x; y(0) = 0, y'(0) = 1$			
x_n	$h = 0.1$		ผลเฉลยจริง $Y(x) = e^x - e^{-x} - x$
	y_n	z_n	
0.0	0.0000	1.0000	0.0000
0.1	0.1000	1.0000	0.1003
0.2	0.2000	1.0200	0.2027
0.3	0.3020	1.0600	0.3090
0.4	0.4080	1.1202	0.4215
0.5	0.5200	1.2010	0.5422
0.6	0.6401	1.3030	0.6733
0.7	0.7704	1.4270	0.8172
0.8	0.9131	1.5741	0.9762
0.9	1.0705	1.7454	1.1530
1.0	1.2451	1.9424	1.3504

ตัวอย่าง จงใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตา เพื่อหาผลเฉลยของปัญหา

$$y''-y = x; y(0) = 0, y'(0) = 1 \text{ บนช่วง } [0,1] \text{ โดยที่ } h = 0.1$$

หาคผลเฉลย แปลงปัญหาให้เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z) = z \\ z' &= g(x, y, z) = x + y \\ y(0) &= 0, \quad z(0) = 1 \end{aligned}$$

เริ่มคำนวณจะได้

$$n=0: k_1 = f(x_0, y_0, z_0) = hf(0,0,1) = (0.1)(1) = 0.1$$

$$l_0 = hg(x_0, y_0, z_0) = hg(0,0,1) = (0.1)(0+0) = 0$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1, z_0 + \frac{1}{2}l_1)$$

$$= hf[0 + \frac{1}{2}(0.1), 0 + \frac{1}{2}(0.1), 1 + \frac{1}{2}(0)]$$

$$= hf(0.05, 0.05, 1) = (0.1)(1) = 0.1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= hg(0.05, 0.05, 1) = (0.1)(0.05 + 0.05) = 0.01$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2, z_0 + \frac{1}{2}l_2)$$

$$= hf[0 + \frac{1}{2}(0.1), 0 + \frac{1}{2}(0.1), 1 + \frac{1}{2}(0.01)]$$

$$= hf(0.05, 0.05, 1.005) = (0.1)(1.005) = 0.101$$

$$l_3 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2, z_0 + \frac{1}{2}l_2)$$

$$= hg(0.05, 0.05, 1.005) = (0.1)(0.05 + 0.05) = 0.01$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)$$

$$= hf(0 + 0.1, 0 + 0.101, 1 + 0.01)$$

$$= hf(0.1, 0.101, 1.01) = (0.1)(1.01) = 0.101$$

$$l_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)$$

$$= hg(0.1, 0.101, 1.01) = (0.1)(0.101 + 0.1) = 0.02$$

$$y_1 = (y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4))$$

$$= 0 + \frac{1}{6}[0.1 + 2(0.1) + 2(0.101) + (0.101)] = 0.101$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}[0 + 2(0.01) + 2(0.01) + (0.02)] = 1.01$$

$$n=1: k_1 = f(x_1, y_1, z_1) = hf(0.1, 0.101, 1.01) = (0.1)(1.01) = 0.101$$

$$l_1 = hg(x_1, y_1, z_1) = hg(0.1, 0.101, 1.01)$$

$$= (0.1)(0.101 + 0.1) = 0.02$$

$$k_2 = hf(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1, z_1 + \frac{1}{2}l_1)$$

$$= hf[0.1 + \frac{1}{2}(0.1), 0.101 + \frac{1}{2}(0.101), 1.01 + \frac{1}{2}(0.02)]$$

$$= hf(0.15, 0.152, 1.02) = (0.1)(1.02) = 0.102$$

$$l_2 = hg(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1, z_1 + \frac{1}{2}l_1)$$

$$= hg(0.15, 0.152, 1.02) = (0.1)(0.152 + 0.15) = 0.03$$

$$k_3 = hf(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2, z_1 + \frac{1}{2}l_2)$$

$$= hf[0.1 + \frac{1}{2}(0.1), 0.101 + \frac{1}{2}(0.102), 1.01 + \frac{1}{2}(0.03)]$$

$$= hf(0.15, 0.152, 1.025) = (0.1)(1.025) = 0.103$$

$$l_3 = hg(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2, z_1 + \frac{1}{2}l_2)$$

$$= hg(0.15, 0.152, 1.025) = (0.1)(0.152 + 0.15) = 0.03$$

$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3, z_1 + l_3)$$

$$= hf(0.1 + 0.1, 0.101 + 0.103, 1.01 + 0.03)$$

$$= hf(0.2, 0.204, 1.04) = (0.1)(1.04) = 0.104$$

$$l_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3, z_1 + l_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 &= hg(0.2, 0.204, 1.04) = (0.1)(0.204 + 0.2) = 0.04 \\
 y_2 &= (y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)) \\
 &= 0.101 + \frac{1}{6}[0.101 + 2(0.102) + 2(0.103) + (0.104)] \\
 &= 0.204 \\
 z_2 &= z_1 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
 &= 1.01 + \frac{1}{6}[0.02 + 2(0.03) + 2(0.03) + (0.04)] = 1.04
 \end{aligned}$$

เมื่อคำนวณต่อจะได้ผลตามตาราง

ตาราง 14

ระเบียบวิธี : ระเบียบวิธีของรุงเง-กุตตา			
ปัญหา : $y'' - y = x; y(0) = 0, y'(0) = 1$			
x_n	$h = 0.1$		ผลเฉลยจริง $Y(x) = e^x - e^{-x} - x$
	y_n	z_n	
0.0	0.0000000	1.0000000	0.0000000
0.1	1.1003333	1.0100083	0.1003335
0.2	0.2026717	1.0401335	0.2026720
0.3	0.3090401	1.0906769	0.3090406
0.4	0.4215040	1.1621445	0.4215047
0.5	0.5421897	1.2552516	0.5421906
0.6	0.6733060	1.3709300	0.6733072
0.7	0.8171660	1.5103373	0.8171674
0.8	0.9762103	1.6748689	0.9762120
0.9	1.1530314	1.8661714	1.1530335
1.0	1.3504000	2.0861595	1.3504024

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูง

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูง กระทำได้โดยเปลี่ยนสมการนั้นให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในรูปแบบทั่วไป เราจะใช้เทคนิคเชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาที่มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพียงสมการเดียวประยุกต์ใช้กับระบบสมการในรูปแบบทั่วไป นั่นคือ เมื่อแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งแล้วหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งเหล่านั้นพร้อมกันทั้งระบบ โดยจะกระทำดังนี้

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) \quad , a \leq x \leq b$$

เมื่อ

$$y(a) = y_0$$

$$y'(a) = y'_0$$

$$y''(a) = y''_0$$

⋮

⋮

$$y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}$$

(1)

โดย $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ เป็นค่าคงที่

สมมติให้

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'_1$$

$$y_3 = y'_2$$

⋮

⋮

$$y_n = y'_{n-1}$$

ดังนั้น จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ

หนึ่ง ดังนี้

$$y'_1 = y_2 \quad , y_1(a) = y_0$$

$$y'_2 = y_3 \quad , y_2(a) = y'_0$$

⋮

$$y'_{n-1} = y_n \quad , y_{n-1}(a) = y_0^{(n-2)}$$

$$y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad , y_n(a) = y_0^{(n-1)}$$

(2)

นั่นคือการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ตามรูปแบบที่ (1) จะเปลี่ยนเป็นการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง n สมการของรูปแบบที่ (2) หรือรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งจะกลายเป็น

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) & , y_1(a) &= y_0 \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) & , y_2(a) &= y_0' \\ &\vdots & & \\ &\vdots & & \\ y_{n-1}' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) & , y_{n-1}(a) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad \text{--- (3)}$$

รูปแบบที่ (2) และ (3) เป็นสมการแบบเดียวกัน ต่าง

กันที่ว่ารูปแบบ (3) อยู่ในรูปในรูปแบบทั่วไป ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง จะมีฟังก์ชัน $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ เป็นฟังก์ชันของ $n+1$ ตัวแปร คือ x, y_1, y_2, \dots, y_n แต่รูปแบบ (2) เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งแบบเฉพาะโดยมี

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_2 \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_3 \\ &\dots \\ f_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_{n-1} \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ปัญหาค่าขอบเขต

ระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาระเบียบวิธีที่ใช้ในการประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขตอันดับสอง $y'' = f(x, y, y')$, $y(a) = A$, $y(b) = B$ โดยไม่ต้องลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองให้เป็นระบบสมการ

พิจารณาปัญหาค่าขอบเขตเชิงเส้น

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

สมมติให้ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ แทนจุดแบ่งบนช่วง $[a, b]$ นั่นคือ

$$x_i = a + ih \quad \text{โดยที่ } i = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{และ } h = \frac{(b-a)}{n}$$

ดังนั้น

$$x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \dots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)h$$

ถ้าเราให้

$$y_i = y(x_i), \quad P_i = P(x_i), \quad Q_i = Q(x_i) \quad \text{และ} \quad f_i = f(x_i)$$

และถ้าแทนที่ y'' , y' ในสมการ (1) ด้วยการประมาณค่าผลต่างกลาง (central difference approximation)

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}[y(x+h) - y(x-h)], \quad y''(x) \approx \frac{1}{h^2}[y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)]$$

จะได้ว่า

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + Q_i y_i = f_i$$

หรือ

$$\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right)y_{i+1} + (-2 + h^2Q_i)y_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right)y_{i-1} = h^2f_i$$

เรียกว่า สมการเชิงผลต่างจำกัด (finite difference equation) ซึ่งก็คือค่าประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งสามารถใช้ประมาณค่าผลเฉลย $y(x)$ ของสมการ (1) ที่จุดตัดภายใน x_1, x_2, \dots, x_{n-1} บนช่วง $[a, b]$ เมื่อ i มีค่า $1, 2, \dots, n-1$ เราจะได้ $n-1$ สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า $n-1$ ตัว คือ y_1, y_2, \dots, y_{n-1} เราทราบค่า y_0, y_n จากเงื่อนไขขอบเขต $y_0 = y(x_0) = y(a) = A$ และ $y_n = y(x_n) = y(b) = B$

ตัวอย่าง ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมในการประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขต

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

มีผลเฉลยจริงคือ

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x)$$

โดยที่

$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2)]$$

และ

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2$$

หาค่าเฉลย เมื่อใช้ระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมจะต้องประมาณค่าผลเฉลยของ

ปัญหาค่าขอบเขต

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad \text{สำหรับ } 1 \leq x \leq 2,$$

โดยที่ $y_1(1) = 1$ และ $y_1'(1) = 0$

และ

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad \text{สำหรับ } 1 \leq x \leq 2, \quad \text{ที่ } y_2(1) = 0 \text{ และ } y_2'(1) = 1$$

โดยผลลัพธ์แสดงผลตามตาราง 15

ตาราง 15

x_i	y_i	$y(x_i)$	$ y_i - y(x_i) $
1.0	1.00000000	1.00000000	
1.1	1.09260052	1.09262930	2.88×10^{-5}
1.2	1.18704313	1.18708484	4.17×10^{-5}
1.3	1.28333687	1.28338236	4.55×10^{-5}
1.4	1.38140205	1.38144595	4.39×10^{-5}
1.5	1.48112026	1.48115942	3.92×10^{-5}
1.6	1.58235990	1.58239246	3.26×10^{-5}
1.7	1.68498902	1.68501396	2.49×10^{-5}
1.8	1.78888175	1.78889853	1.68×10^{-5}
1.9	1.89392110	1.89392951	8.41×10^{-5}
2.0	2.00000000	2.00000000	

ระเบียบวิธีอิงเป้า

ระเบียบวิธีอิงเป้าเป็นวิธีที่ใช้วิธีการหาค่าตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบค่าเริ่มต้น พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b$$

และเงื่อนไขขอบเขต คือ $y(a) = A, \quad y(b) = B$

ในการหาผลเฉลยจะแปลงปัญหาค่าขอบเขตให้เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งสองสมการ จากนั้นหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นด้วยวิธีที่ได้ศึกษามาแล้ว เช่น ระเบียบวิธีของรุงเง-กูดตา เมื่อได้ผลเฉลย y ที่จุด $x = b$ ถ้าหาค่าของ y ที่คำนวณได้นี้ไม่เท่ากับ B ก็เปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y'(a)$ ใหม่และทำซ้ำอีก จนกระทั่งได้ค่าของ y ที่จุด b ใกล้เคียงกับ B มากตามต้องการ

การเปลี่ยนค่า $y'(a)$ คือ การเปลี่ยนค่าความชันของเส้นโค้งผลเฉลย $y(x)$ ที่จุดเริ่มต้น $x = a$ ซึ่งเปรียบเทียบเหมือนการปรับมุมยิงของปืนใหญ่เพื่อให้กระสุนตกที่เป้าคือ $y = B$ ที่ระยะ $x = b$ ดังนั้นระเบียบวิธีนี้จึงเรียกว่า **ระเบียบวิธีอิงเป้า**

ในการเปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y'(a)$ ใหม่ นั้นจะใช้สูตรของเซแคนต์

$$r_k = r_{k-1} - (r_{k-1} - r_{k-2}) \frac{B_{k-1} - B}{B_{k-1} - B_{k-2}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

โดย

$$r_0 = \frac{B - A}{b - a}$$

และ

$$r_1 = r_0 + \frac{B - B_0}{b - a}$$

ตัวอย่าง พิจารณาปัญหาค่าขอบเขต

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + y \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad \text{สำหรับ } 1 \leq x \leq 2, \text{ เมื่อ}$$

$$y(1) = 1 \quad \text{และ} \quad y(2) = 2$$

มีผลเฉลยจริงคือ

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x)$$

โดยที่

$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2)]$$

และ

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หาผลเฉลย เมื่อใช้ระเบียบวิธียิงเป้า จะต้องประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \text{ สำหรับ } 1 \leq x \leq 2, \text{ ที่ } y_1(1) = 1 \text{ และ}$$

$$y_1'(1) = 0 \text{ และ}$$

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \text{ สำหรับ } 1 \leq x \leq 2, \text{ ที่ } y_2(1) = 0 \text{ และ } y_2'(1) = 1$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณแสดงดังตาราง โดยที่ $u_{1,i}$ เป็นค่าประมาณของ

$y_1(x_i)$, $v_{1,i}$ เป็นค่าประมาณของ $y_2(x_i)$ และ $w_{1,i}$ ประมาณค่า $y(x_i)$

ตาราง 16

x_i	$u_{1,i}$	$v_{1,i}$	w_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - w_i$
1.0	1.00000000	0.00000000	1.00000000	1.00000000	
1.1	1.00896058	0.09117986	1.09262917	1.09262930	1.43×10^{-7}
1.2	1.03245472	0.16851175	1.18708471	1.18708484	1.34×10^{-7}
1.3	1.06674375	0.23608704	1.28338227	1.28338236	9.78×10^{-8}
1.4	1.10928795	0.29659067	1.38144589	1.38144595	6.02×10^{-8}
1.5	1.15830000	0.35184379	1.48115939	1.48115942	3.06×10^{-8}
1.6	1.21248372	0.40311695	1.58239245	1.58239246	1.08×10^{-8}
1.7	1.27087454	0.45131840	1.68501396	1.68501396	5.43×10^{-10}
1.8	1.33279851	0.49711137	1.78883854	1.78889853	5.05×10^{-9}
1.9	1.39750618	0.54098928	1.89392951	1.89392951	4.41×10^{-9}
2.0	1.46472815	0.58332538	2.00000000	2.00000000	

บทที่ 3

ความหมายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI : Computer Aided Instruction) คือการประยุกต์นำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการสอน โดยจะมีโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสำหรับเสนอเนื้อหาแบบต่าง ๆ เช่น การนำคอมพิวเตอร์แบบติวเตอร์ (Tutorial) แบบจำลองสถานการณ์ (Simulation) หรือแบบการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (Problem Solving) เป็นต้น การเสนอเนื้อหาดังกล่าวเป็นการเสนอแบบโดยตรงไปยังผู้เรียนผ่านทางจอภาพหรือเป็นพิมพ์ โดยการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมกับวัสดุทางการสอน ซึ่งก็คือ “โปรแกรม” โดยปกติจะถูกเก็บไว้ในแผ่นดิสก์ หรือหน่วยความจำของเครื่อง และพร้อมที่จะเรียกใช้ได้ตลอดเวลา การเรียนในลักษณะนี้บางครั้งผู้เรียนอาจจะต้องพิมพ์เพื่อโต้ตอบหรือตอบคำถามกับคอมพิวเตอร์ในขณะนั้น การตอบสนองแก่ผู้เรียนในบางแง่มุม เช่น การตอบคำถาม จะถูกประเมินโดยคอมพิวเตอร์ ซึ่งจากการประเมินนี้เองคอมพิวเตอร์จะเสนอแนะขั้นตอน หรือระดับในการเรียนต่อไป ซึ่งขบวนการต่าง ๆ เหล่านี้เป็นปฏิกริยาที่เกิดขึ้นร่วมกันระหว่างผู้เรียนกับคอมพิวเตอร์

3.1 ประวัติความเป็นมาของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนเริ่มต้นในประเทศสหรัฐอเมริกา ตั้งแต่ปลาย ทศวรรษที่ 1950 ผู้บุกเบิกในเรื่องนี้คือ มหาวิทยาลัยฟลอริดาและมหาวิทยาลัยสแตนฟอร์ด ความคิดนี้ได้เริ่มมาก่อนหน้านี้นานแล้ว แต่การนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการสอนอันรวมถึงการทบทวนบทเรียน การแนะนำชุดบทเรียนในรูปแบบ ต่าง ๆ เพิ่งจะมาเริ่มภายหลัง ในระยะเริ่มแรกของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีการนำคอมพิวเตอร์เครื่องใหญ่ คือ IBM 1500 มาใช้ แต่จัดให้อยู่ในรูปแบบเทอร์มินัล ซึ่งโต้ตอบกับผู้เรียนได้ วิชาที่ทำในตอนเริ่มต้นคือ วิชาฟิสิกส์และสถิติ ต่อมามีการใช้ภาษาเบสิกแทน ทำให้นักศึกษาใช้ เครื่องคอมพิวเตอร์ได้ง่ายขึ้น มีการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในสาขาวิชาอื่นเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

มหาวิทยาลัยสแตนฟอร์ดได้นำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้ โดยมุ่งพัฒนาทักษะของเด็กมากกว่าหนุ่มสาวระดับมหาวิทยาลัย ได้จัดทำเป็นรายวิชาต่าง ๆ ซึ่งกำหนดให้นักเรียนได้ทำแบบฝึกหัดเป็นสำคัญ และเมื่อคอมพิวเตอร์ได้รับความนิยมมากขึ้น จึงได้มีการนำเอาอุปกรณ์คอมพิวเตอร์มาใช้ในการสอนแบบโปรแกรมซึ่งจะทำได้เป็นอย่างดี บริษัท ไอบีเอ็ม ได้เริ่มพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยการสอนระบบเลขฐานสอง จะสามารถรับผู้เรียนได้ครั้งละ 32 คน และต่อมาก็มีการทำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเพิ่มขึ้นอย่างมากมาย ในปี ค.ศ. 1967 ได้มีการจัดสัมมนาให้คนทั่วไปได้รับความรู้เกี่ยวกับการจัดทำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในด้านอื่น ๆ ซึ่งทำให้เป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางมากขึ้น

หน่วยงานอื่น ๆ ได้เพิ่มเติมความคิดที่ให้มีการรวมคะแนนของผู้เรียนในการทำแบบฝึกหัดแต่ละตอน เพื่อเป็นการตัดสินใจในการเลือกเนื้อหาที่จะเรียนต่อไปด้วย ซึ่งในระยะแรกคอมพิวเตอร์ที่ใช้เป็นเมนเฟรม ทำให้ค่าใช้จ่ายสูงมากและมีขีดความสามารถจำกัดอีกด้วย ต่อมาในปี ค.ศ. 1960 มหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ ประสบความสำเร็จในการทำเทอร์มินัลที่พูดจาได้ตอบกับผู้เรียนได้ และได้พัฒนาคอมพิวเตอร์ช่วยสอนขึ้นใหม่ให้ชื่อว่า พลาโต (PLATO) โดยได้รับการสนับสนุนจากรัฐบาล โดยใช้คอมพิวเตอร์ของบริษัท คอนโทรล ดาต้า ซึ่งเราจะต้องว่าในปัจจุบันนี้โปรแกรมนี้เป็นต้นแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ซึ่งใช้คอมพิวเตอร์ขนาดใหญ่ที่ประสบความสำเร็จเป็นอย่างดี

ตั้งแต่ทศวรรษที่ 1970 เป็นต้นมา นักวิจัยหลายคนได้เริ่มตระหนักถึงข้อจำกัดของเทคโนโลยี CAI ในขณะนั้น ได้เริ่มประยุกต์ใช้เทคโนโลยีหลายประการ เพื่อช่วยให้การใช้คอมพิวเตอร์เพื่อการเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากขึ้น ซึ่งการหาหนทางทำให้ระบบ CAI มีความสามารถหรือฉลาดขึ้นในด้านช่วยการเรียนการสอน โครงสร้างสถาปัตยกรรมของระบบซึ่งในขณะนั้นได้รับการขนานนามว่าเป็นระบบ “Intelligent CAI Systems.” (ICAI)

ในปี ค.ศ. 1971 มหาวิทยาลัยบริกค้ำยั้งและมหาวิทยาลัยเท็กซัส ได้คิดค้นพัฒนานำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้กับมินิคอมพิวเตอร์ โดยผสมคอมพิวเตอร์และโทรทัศน์เข้าด้วยกัน โปรแกรมมีชื่อว่า ทิกซิด (TICCIT) Time shared Interactive Computer Controlled Information Television

งานคอมพิวเตอร์ช่วยสอนยังไม่พัฒนาเท่าที่ควร จนกระทั่งไมโครคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทในโรงเรียนและมหาวิทยาลัย การใช้เป็นพิมพ์และจอภาพต่อกับคอมพิวเตอร์เมนเฟรมไม่มีความคล่องตัวเท่ากับการใช้ไมโครคอมพิวเตอร์ ฉะนั้นความคิดในเรื่องการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในระดับโรงเรียนมัธยม จึงเป็นการพัฒนาที่ดี

3.2 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนบนไมโครคอมพิวเตอร์

การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนบนไมโครคอมพิวเตอร์โดยทั่วไปแล้วสามารถทำได้ 2 วิธี

1. ใช้ตัวแปลภาษา เช่น ภาษาปาสคาล ภาษาเบสิก ภาษาซี เป็นต้น การเลือกใช้ตัวแปลภาษามีข้อดีคือ สามารถพัฒนาโปรแกรมให้มีขีดความสามารถ และภาพได้สูงไม่จำกัด ขึ้นอยู่กับความคิด และความสามารถของผู้พัฒนา เพราะว่าตัวแปลภาษาต่าง ๆ เหล่านี้มีคำสั่งให้ใช้มากมาย และมีความสามารถสูงในการติดต่อกับระบบคอมพิวเตอร์ภายใน วิธีนี้จึงเหมาะสำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ต้องการความสามารถและเทคนิคพิเศษ เช่น การแสดงผลภาษาไทย เป็นต้น แต่วิธีนี้มีข้อเสียคือ การพัฒนาโปรแกรมจะทำได้ช้า เพราะการสร้างบทเรียนขึ้นสักเรื่องหนึ่ง มีขั้นตอนหลายขั้นตอน เริ่มตั้งแต่การออกแบบโปรแกรม แล้วจึงเขียนโปรแกรมเพื่อแสดง
- แม้ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื้อหา รวมทั้งลำดับขั้นตอนต่าง ๆ ของบทเรียนซึ่งเกี่ยวข้องกับการสร้างรูป การแสดงคำอธิบาย เทคนิคการนำเสนอ เป็นต้น และยังต้องมีความรู้ทางด้านระบบไมโครคอมพิวเตอร์และเทคนิคการเขียนโปรแกรมเป็นอย่างดี

2. ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป สำหรับสร้างบทเรียนช่วยสอน ปัจจุบันในท้องตลาดมี โปรแกรมสำเร็จรูปซึ่งทำหน้าที่ในการสร้างบทเรียนช่วยสอนโดยเฉพาะออกมาจำหน่ายอยู่หลาย โปรแกรมเช่น PC Story Bord , Show partner , Authorware และ Multimedia Toolbook II version 5 ซึ่งเป็นโปรแกรมช่วยสอนที่นิยมใช้ในเวลานี้ แต่ละโปรแกรมมีลักษณะการทำงานและการใช้งานที่คล้าย ๆ กัน คือ โปรแกรมจะให้เรากำหนดสิ่งที่ต้องการจะให้คอมพิวเตอร์แสดงด้วยคำสั่งที่มีรูปแบบเฉพาะของโปรแกรมนั้น ๆ แล้วโปรแกรมจะนำสิ่งที่เรากำหนดไว้นี้ไปแปลเป็นชุดคำสั่งให้คอมพิวเตอร์ทำงานตามชุดคำสั่งเพื่อแสดงบทเรียนตามที่เรากำหนด ทำให้เราไม่ต้องยุ่งยากในการเขียนโปรแกรม และลดเวลาในการสร้างบทเรียนลงแต่โปรแกรมสำเร็จรูปเหล่านี้มีขีดจำกัดในการใช้งานต่าง ๆ กันไป เช่นต้องใช้เนื้อที่เป็นจำนวนมากในการสร้างบทเรียน และไม่สามารถแสดงผลบนจอสีเดียว เป็นต้น

3.3 บทเรียนแบบโปรแกรม (Programmed Instruction)

ความหมายของบทเรียนแบบโปรแกรม

บทเรียนแบบโปรแกรมเป็นนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษาอย่างหนึ่งที่ใช้แพร่หลายทางการศึกษาซึ่งนำมาใช้ในการเรียนการสอนในโรงเรียนต่าง ๆ คำว่า “ Programmed Instruction “ มีชื่อเรียกแตกต่างกันไปตามลักษณะของการนำไปใช้ ดังนี้คือ

ในภาษาไทย	เรียกว่า	โปรแกรมการสอน
	“	โปรแกรมการเรียนสำเร็จรูป
	“	เครื่องสอน หรือ บทเรียนแบบโปรแกรม
ในภาษาอังกฤษ	เรียกว่า	Programmed Learning
	“	Programmed Materials
	“	Individual Tutoring
	“	Success Guarantee

จากความหมายของบทเรียนแบบโปรแกรม พอสรุปความหมายได้ว่าบทเรียนแบบโปรแกรมคือบทเรียนที่แบ่งเป็นหน่วยย่อย ๆ และสั้น ๆ และถูกบรรจุไว้ในกรอบ (Frame) แต่ละกรอบจะบรรจุเนื้อหาและคำอธิบาย จากง่ายไปยากต่อเนื่องกันไป และแต่ละกรอบอาจให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดและตอบคำถาม และจะมีคำเฉลยกำกับไว้ด้วย เพื่อเป็นการ

ตอบสนองให้ผู้เรียนได้ทราบได้ทันทีว่าตอบผิดหรือถูก การสอนแบบนี้เป็นการสอนโดยการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนด้วยตนเอง

ลักษณะของบทเรียนโปรแกรม

1. การเขียนข้อความสรุปเป็นเรื่องราวได้อย่างแจ่มแจ้ง ชัดเจน
2. มีการวางวัตถุประสงค์ได้อย่างชัดเจน
3. เนื้อหาถูกแบ่งเป็นตอน ๆ โดยทำเป็นขั้นตอนย่อยๆ จัดทำเป็นหน่วยเล็กๆ เรียงลำดับจาก

ง่ายไปหายาก

4. การโต้ตอบกระทำได้ด้วยตนเอง โปรแกรมการสอนเน้นให้ผู้เรียนได้เรียนโปรแกรม

ด้วยตนเอง

5. การได้รับผลตอบรับทันที เมื่อผู้เรียนได้ตอบสนองสิ่งเร้าไปแล้วโปรแกรมจะบอกผลทันทีว่า ที่ผู้เรียนทำไปแล้วนั้นถูกหรือผิด

6. อัตราการเรียนของแต่ละบุคคล โปรแกรมการสอนจะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนเรียนมากเท่าใดก็ได้ ตามความสามารถของตนแล้วจะช่วยนักการศึกษาและครูให้ทราบถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้โดยการศึกษาจากอัตราเวลาเรียนของผู้เรียน และมีการวัดผลที่แน่นอน

3.4 ชนิดของบทเรียนแบบโปรแกรม

บทเรียนแบบโปรแกรมมี 2 ประเภท คือ

1. บทเรียนแบบโปรแกรมที่ใช้กับเครื่องช่วยสอน (Teaching Machine Program) เป็นบทเรียนที่ต้องใช้วัสดุอุปกรณ์เข้าช่วย ซึ่งรวมทั้งพวกคอมพิวเตอร์ช่วยสอนและชุดสื่อการสอนในด้านต่างๆ

2. บทเรียนแบบโปรแกรม รูปตำรา (Programmed Textbook) เป็นหนังสือที่เสนอข้อสนเทศ ให้ผู้อ่านหาคำตอบก่อนจะก้าวต่อไปยังกรอบอื่นๆ จากบทเรียนทั้ง 2 ประเภท ยังสามารถแบ่งออกตามลักษณะของการเขียนได้อีก 3 แบบ คือ

1. บทเรียนแบบประเภทโปรแกรมชนิดเส้นตรง
2. บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขา
3. บทเรียนโปรแกรมชนิด Adjunctive
1. บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรง

บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดนี้ มีวิธีการจัดเรียงลำดับขั้น และหน่วยของบท

เรียนจากง่ายไปหายาก โดยที่ผู้เรียนจะเริ่มจากหน่วยแรกเรียงลำดับก้าวหน้าไปจนถึงกรอบสุดท้ายของบทเรียนจะข้ามหน่วยใดหน่วยหนึ่งไม่ได้ สิ่งที่เรียนจากหน่วยย่อยๆ จะเป็นพื้นฐานของหน่วยถัดไป การตอบคำถามส่วนมากจะให้ตอบ ถูกหรือผิด เติมคำลงในช่องว่าง และให้โอกาสผู้เรียน

ได้ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบในหน่วยถัดไป แต่จะไม่อธิบายเหตุผลในกรณีที่คุณเรียนตอบผิด

บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดนี้ เป็นบทเรียนที่พยายามลดจำนวนการตอบผิดของผู้เรียน โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยย่อยๆ ซึ่งเรียกว่ากรอบและถ้าผู้เรียนตอบถูกต้องมากเท่าไร ก็จะทำให้เกิดการเรียนรู้ที่ได้ผล เพราะคำตอบถูกต้องเปรียบเสมือนเป็นการเสริมสร้าง ทำให้ผู้เรียนเกิดความพยายามที่จะเรียนบทเรียนต่อไป

อย่างไรก็ตาม โปรแกรมแบบเส้นตรงที่ดี ไม่ได้ขึ้นอยู่กับอัตราการตอบถูกผิดของผู้เรียน เพียงอย่างเดียว แต่ปัจจัยอื่นๆ ก็มีผลด้วย เช่น แบบของคำถามแต่ละข้อคำถามในแต่ละกรอบภาษาที่ใช้ กระบวนการถ่ายทอดความรู้ และเทคนิคในการทำบทเรียนแบบโปรแกรม ก็มีส่วนในการเรียนรู้อย่างมาก

2. บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดสาขา

บทเรียนแบบโปรแกรมชนิดนี้ เป็นวิธีการสับลำดับ ซึ่งตรงกันข้ามกับการเรียงลำดับกล่าวคือจัดให้มีการเรียงลำดับข้อความย่อยๆ ที่เป็นหลักของบทเรียนได้ถูกต้อง ผู้เรียนก็อาจจะสั่งให้ข้ามหน่วยย่อยได้จำนวนหนึ่ง แต่ถ้าผู้เรียนตอบคำถามไม่ถูก ก็อาจจะถูกสั่งให้เรียนข้อความย่อยต่างๆ เพิ่มเติมก่อนที่จะก้าวไปเรียนหน่วยย่อยต่อไปอีก บทเรียนโปรแกรมชนิดนี้ หากความรู้จากที่ผิดของเด็ก และใช้ความรู้นั้นให้เป็นประโยชน์และผู้เรียนจะต้องพยายามทำตามคำสั่งที่ปรากฏในแต่ละกรอบ การเรียนจะไม่ดำเนินไปตามลำดับตั้งแต่กรอบแรกจนถึงกรอบสุดท้าย เหมือนบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรง ผู้เรียนอาจจะย้อนไปมาในหน้าต่างๆ ทั้งนี้ขึ้นกับคำถามที่ใช้มักเป็นคำถามเลือกตอบ (Multiple Choice) คำถามแต่ละข้อจะนำไปสู่กระบวนการเรียนที่ต่างกัน คำถามที่ถูกต้อง จะนำไปสู่ข้อความรู้ใหม่ และคำตอบที่ผิดจะนำไปสู่กระบวนการเรียนที่แก้ความเข้าใจผิดนั้น แล้วจึงย้อนกลับมาสู่แนวทางการเรียนเดิม กรอบหนึ่งของบทเรียนชนิดนี้ จึงมีความยาวมากกว่าบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเส้นตรง

3. บทเรียนแบบโปรแกรมชนิด Adjunctive

เป็นบทเรียนแบบโปรแกรมที่มีลักษณะแบบชนิดสาขา แต่การเสนอเนื้อหาจะมากกว่าและการตอบคำถามจะกระทำในตอนท้ายบท แล้วอาจจะข้ามไปยังหน่วยอื่นๆ ถ้าผู้เรียนสามารถแสดงให้รู้ว่ามีความรู้ในส่วนที่ข้ามไปนั้นแล้วในปัจจุบันการทำบทเรียนแบบโปรแกรม นิยมใช้แบบผสมมากขึ้นทั้งนี้เพราะแต่ละแบบต่างมีจุดเด่นของตนเอง และเมื่อนำจุดเด่นของทุกแบบมารวมกันก็จะได้บทเรียนแบบโปรแกรมที่ดี

3.5 ข้อดีและข้อเสียของบทเรียนแบบโปรแกรม

ข้อดี

1. ช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครู

2. ผู้เรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเอง โดยปฏิบัติตามคำสั่งหรือคำแนะนำหรือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โปรแกรมที่เขียนไว้

3. ช่วยแบ่งเบาภาระของครู กล่าวคือ เมื่อผู้เรียนไม่เข้าใจเนื้อหาวิชาที่เรียนครู อาจจะแนะนำให้อ่านบทเรียนแบบโปรแกรมที่มีอยู่เป็นการบ้านหรือนอกเวลาเรียน เพื่อทำความเข้าใจให้ทันกับเพื่อนคนอื่นในชั้น โดยครูไม่ต้องเสียเวลาอธิบายใหม่
4. ช่วยในการคุมชั้นเรียนเมื่อนักเรียนคนใดทำงานที่ครูมอบหมายให้สำเร็จแล้ว ครูอาจจะแนะนำให้เด็กนักเรียนอ่านโปรแกรมเรื่องต่อไปโดยนักเรียนจะไม่มีเวลาไปรบกวนคนอื่น
5. เป็นการกระตุ้นให้นักเรียนอยากเรียน เพราะมีการเร้า เมื่อตอบถูกและไม่อายเพื่อนในชั้นเรียนเมื่อตอบผิด
6. ตอบสนองความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคล นักเรียนที่เรียนไม่ทันเพื่อนก็ต้องใช้เวลาศึกษามากขึ้น นักเรียนที่เรียนเร็วก็มีโอกาสที่ใช้เวลาที่เหลือไปทำอย่างอื่นได้โดยไม่ต้องคอยนักเรียนที่เรียนช้า

ข้อเสีย

1. บทเรียนแบบโปรแกรมเหมาะกับนักเรียนที่เรียนอ่อนหรือเรียนช้าไม่ทันเพื่อน เพราะโปรแกรมจะเป็นการสอนตั้งแต่พื้นฐานแบบง่าย และสามารถเรียนซ้ำได้หลายครั้งเพื่อให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหาวิชานั้นๆ ซึ่งนักเรียนที่เรียนเก่งจะไม่ชอบเพราะว่าดูง่ายไปและซ้ำไม่ทันใจ
2. ไม่ก่อให้เกิดความคิดสร้างสรรค์แก่ผู้เรียน นักเรียนไม่เกิดแนวปัญหา เพราะต้องเรียนไปตามโปรแกรมที่วางไว้ ไม่มีสิทธิ์ในการถามปัญหาใดๆ
3. บทเรียนแบบโปรแกรม เปรียบเสมือนผู้ช่วยครูหรือเป็นเพียงหนังสืออ่านเพิ่มเติม ไม่สามารถแทนครูได้ตลอด เพราะบางเนื้อหาจะต้องมีการชี้แจง แนะนำและอธิบาย การตอบปัญหาต่างๆ ได้หลายวิธีหลายแบบและลึกซึ้งกว่าที่เขียนในแบบเรียนแบบโปรแกรม
4. เนื้อหาวิชาบางวิชา ต้องใช้ทักษะในการพูด ฟัง คิด เขียน เมื่อเรียนบทเรียนแบบโปรแกรม ทักษะที่ใช้มีน้อยและไม่ให้ประโยชน์ต่อการเรียนมากนัก
5. นักเรียนไม่ค่อยสนใจ เบื่อและต้องทำซ้ำกันมากๆ แต่ก็เป็นเฉพาะนักเรียนที่เข้าใจในเนื้อหาแล้วเท่านั้น
6. นักเรียนขาดทักษะในการเขียนหนังสือ เพราะการเรียนแบบโปรแกรมช่วยสอนนักเรียนจะไม่มีจกเฉลยเซอร์เหมือนกับการเรียนในห้องเรียน อีกทั้งโจทย์ต่างๆ ของโปรแกรมจะต้องการเพียงแค่คำตอบสั้น ๆ ไม่มีให้นักเรียนแสดงคำตอบตามขั้นตอนที่สมบูรณ์ 7. นักเรียนขาดการสังคม ติดต้อซึ่งกันและกัน
8. นักเรียนเรียนได้รวดเร็วจริงแต่ลืง่าย
9. ส่งเสริมให้ครูที่เกียจคร้านอยู่แล้วเกียจคร้านในการสอนมากขึ้น
10. ครูบางคนไม่เต็มใจนำวิธีนี้มาช่วยในการสอนเพราะมีทัศนคติไม่ดีต่อการ

สอน โดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมจะทำให้บทบาทของครูในห้องเรียนมีน้อยลง ซึ่งจะทำให้ครูหมดความหมาย

3.6 หลักในการเขียนบทเรียนแบบโปรแกรม

หลักในการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมผู้เขียนควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

1. ตัวผู้เรียน จะต้องทราบว่าผู้เรียนนั้นอยู่ในระดับใดโดยให้คิดถึงสิ่งต่างๆ เกี่ยวกับตัวผู้เรียนอย่างกว้าง เช่น อายุ พื้นฐานทางสังคม ความสามารถในการเรียน และประสบการณ์เดิมของผู้เรียน

2. ผลที่ต้องการ จะต้องมีการตั้งวัตถุประสงค์ เพื่อต้องการให้ผู้เรียนได้เรียนรู้อะไร เพื่อให้บทเรียนนั้นเป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้และสามารถวัดผลได้ตรงว่าผู้เรียนได้ผลตามที่ต้องการหรือไม่

3. เนื้อหาวิชา การจัดเตรียมเนื้อหาวิชาควรจะเป็นหัวข้อใหญ่ๆ ก่อนแล้วจึงแบ่งเป็นหัวข้อย่อยๆ เพื่อจะได้นำมาทำเป็นหน่วยตามลำดับก่อนหลัง เนื้อหาที่จำเป็นต้องไม่ขาดตกบกพร่อง ไม่มีการกระโดดข้ามลำดับของเนื้อหา และต้องพิจารณาเวลาในการเรียนจากเนื้อหาด้วย

4. วิธีการสอน ก่อนจะเขียนบทเรียนเรื่องใดก็ตาม ควรพิจารณาเสียก่อนว่ามีวิธีการสอนอื่นที่ดีกว่าการสอนโดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมหรือไม่ นอกจากนี้ยังควรคำนึงถึงจุดมุ่งหมายของการใช้บทเรียนด้วยว่า จะใช้สอนผู้เรียนที่มีความแตกต่างระหว่างบุคคล หรือเพื่อช่วยสอนซ่อมเสริมผู้ที่ไม่ทัน หรือเพื่อจุดประสงค์อย่างอื่น สิ่งเหล่านี้ควรได้พิจารณาก่อนการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม

5. ความสิ้นเปลือง ควรพิจารณาว่า บทเรียนที่สร้างขึ้นมานั้น มีความสิ้นเปลืองมากน้อยเพียงใด เวลาที่เสียไปคุ้มค่าหรือไม่

6. ชนิดของบทเรียนแบบโปรแกรม การจะสร้างบทเรียนในรูปใดควรดูให้เหมาะสมกับเนื้อหาวิชา ผู้เรียน และวัตถุประสงค์ที่ต้องการ

3.7 วิธีการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม

ในการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม ผู้สร้างต้องดำเนินการดังนี้

1. พิจารณาเลือกหัวข้อ เนื้อหาตามความถนัด และควรจะเป็นเรื่องที่ไม่มีการทำเป็นบทเรียนแบบโปรแกรมมาก่อน

2. ศึกษาหลักสูตร พิจารณาอย่างละเอียดว่า บทเรียนนั้นอยู่ในระดับไหน ศึกษาจากแบบเรียนแล้วตำราจากต่างประเทศ เพื่อให้ได้เนื้อหาที่ถูกต้องและสมบูรณ์มากที่สุด

3. วางขอบเขตของบทเรียน ให้ครอบคลุมเนื้อหาที่ต้องการให้เหมาะสมกับ

ระดับชั้นและพื้นฐานของผู้เรียน

4. ตั้งวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมของบทเรียน

5. เขียนบทเรียนของโปรแกรมให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ โดยเขียนตามหัวข้อเนื้อหาที่ง่ายไปหายาก เรียงลำดับชั้นของเนื้อหาอย่างถูกต้องและมีเหตุผล ลักษณะของกรอบจะแตกต่างกันเพื่อป้องกันความเบื่อหน่าย

6. การเขียนบทเรียนแบบโปรแกรม ต้องมีบุคลากรซึ่งเป็นผู้ชำนาญหรือมีประสบการณ์สูง บุคลากรเหล่านั้นได้แก่

1. Content specialist หมายถึง บุคลากรที่มีความรู้ในเนื้อหาต่างๆ มากพอที่จะเขียนได้
2. Programmer หมายถึง บุคลากรที่มีความรู้ในการเขียนโปรแกรมอย่างดี
3. Editor หมายถึง บุคลากรที่มีความรู้ในการจัดลำดับจากง่ายไปหายากของกรอบต่างๆ ให้ถูกต้อง
4. Artist หมายถึง บุคลากรที่มีความรู้ในด้านศิลปะ หรือจิตรกรนั่นเอง เนื่องจากการเขียนโปรแกรมนั้น จำเป็นจะต้องเขียนออกมาเป็นตัวหนังสือ ผู้เรียนจำเป็นต้องมีนิสัยรักการอ่านหนังสือเป็นอย่างมาก มิฉะนั้นจะทำให้การเรียนจากบทเรียนมีอุปสรรคมาก ดังนั้น เราจึงจำเป็นต้องพยายามทำให้ผู้เรียนอ่านหนังสือน้อยที่สุด แต่ให้เข้าใจเร็วที่สุด ด้วยเหตุนี้ บทเรียนจึงอาจอยู่ในลักษณะของรูปภาพ แผนภูมิ แผนที่ ฯลฯ จิตรกรจึงเข้ามามีบทบาท เมื่อจิตรกรเขียนรูปภาพแล้วก็ส่งกลับไปให้ผู้เชี่ยวชาญทางด้านเนื้อหาวิชาตรวจดูอีกครั้ง ว่าสื่อความหมายตรงตามวัตถุประสงค์หรือไม่

7. นำไปทดลองใช้ และนำผลจากการทดลองใช้มาปรับปรุงบทเรียน เพื่อแก้ไขบทเรียนแบบโปรแกรมให้ดีที่สุด การเขียนกรอบเพื่อสอนเนื้อหาต่างๆ ของบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดเชิงเส้นตรงจะต้องประกอบด้วยกรอบ 3 ชนิดคือ

1. กรอบให้ความรู้ (Teaching Frames) คือกรอบที่เสนอเนื้อหาความรู้ใหม่ให้แก่ผู้เรียน
2. กรอบฝึกหัด (Practice Frames) คือกรอบที่ให้ผู้เรียนได้ฝึกหัดในสิ่งที่เรียนแล้วในกรอบให้ความรู้ ผู้เรียนควรจะตอบถูกมากที่สุด
3. กรอบทดสอบ (Test Frames) คือกรอบที่ใช้ทดสอบเพื่อวัดผล ตอนท้ายของแต่ละหน่วย เพื่อทดสอบว่าผู้เรียนได้รับมโนทัศน์ (Concept) ในการเรียนหรือไม่

3.8 ขั้นตอนในการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม

1. ตัดสินใจว่าจะทำหรือไม่ โดยพิจารณาองค์ประกอบต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น เมื่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 1.1 เนื้อหาวิชาคงตัวหรือไม่ กล่าวคือ เนื้อหาที่ควรสร้างเป็นบทเรียนแบบโปรแกรมนั้น ควรเป็นเนื้อหาส่วนสำคัญ และจำเป็นที่นักเรียนจะต้องเรียนรู้ และเป็นเนื้อหาที่สมบูรณ์ ไม่เปลี่ยนแปลงอีกแล้ว หรือเปลี่ยนแปลงไม่ยาก
- 1.2 บทเรียนที่จะสร้างขึ้น มีผู้สร้างไว้แล้วหรือไม่ ถ้ามีผู้สร้างไว้แล้ว และเป็นบทเรียนที่ผ่านการวิเคราะห์ทดสอบว่ามีคุณภาพดีแล้ว ก็ไม่ควรนำมาสร้างซ้ำอีก
- 1.3 จะสร้างให้เสร็จภายในเวลาที่กำหนดหรือไม่
- 1.4 บทเรียนที่สร้างขึ้น จะช่วยแก้ปัญหาได้ตามต้องการหรือไม่
- 1.5 บทเรียนที่สร้างขึ้น จะช่วยถ่วงภาระของครูหรือไม่
- 1.6 จะสามารถทำให้บทเรียนนั้นมีมาตรฐานทางเนื้อหาวิชา และมาตรฐานทางวิธีการสร้างได้หรือไม่
- 1.7 บทเรียนที่สร้างขึ้น จะทำให้ผลการเรียนดีกว่าการสอนตามปกติหรือไม่
- 1.8 จำนวนนักเรียนที่จะใช้บทเรียนที่สร้างขึ้นมีมาก คู่กับการลงทุนหรือไม่
- 1.9 บทเรียนที่สร้างขึ้น จะช่วยลดเวลาเรียนได้หรือไม่
- 1.10 บทเรียนที่สร้างขึ้น สามารถวัดผลตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมได้หรือไม่

2. ศึกษาผู้เรียน และผู้ใช้โปรแกรม เมื่อตัดสินใจว่าเนื้อหาวิชานั้น สมควรที่จะสร้างเป็นบทเรียนแบบโปรแกรมขึ้นแล้วก็ควรพิจารณาว่า ผู้ที่จะเรียนบทเรียนนี้มี อายุ ประสบการณ์ พื้นความรู้ และสภาพแวดล้อมเป็นอย่างไร เพื่อจะได้สร้างแบบเรียนให้เหมาะสม

3. ศึกษาหลักสูตร เพื่อวางหลักสูตรของเนื้อหาวิชา ที่จะนำมาสร้างเป็นบทเรียนการศึกษาหลัก ศึกษได้แก่ การศึกษาเอกสารต่างๆ ที่เกี่ยวกับการสอน คือ หลักสูตรประมวลการสอน คู่มือครู และประมวลการสอนต่างๆ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังรวมถึงการสังเกตกระบวนการสอน การสัมภาษณ์ผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาเฉพาะด้าน เพื่อจะได้ทราบว่าควรจะสอนเนื้อหาวิชาหลักซึ่งเพียงใดและการรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการสังเกตการสอน การสัมภาษณ์มาแยกแยะว่าส่วนใดควรตัดทิ้งและส่วนใดควรนำไปบรรจุในบทเรียน

4. ตั้งจุดมุ่งหมาย ก่อนการเขียนบทเรียน จะต้องตั้งจุดมุ่งหมายที่สามารถวัดหรือประเมินผลได้เสียก่อน ว่าต้องการให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อะไรบ้าง โดยที่เขียนออกมาในรูปจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

5. เลือกวิธีสร้างบทเรียน ขั้นนี้จะพิจารณาว่า เนื้อหาวิชาตามหัวข้อและ ขอบข่ายที่ศึกษาไว้แล้วนั้น ถ้าจะสร้างบทเรียนให้นักเรียนเกิดพฤติกรรมการเรียนรู้ตามที่ต้องการ ควรจะใช้เทคนิคการสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดใด จึงจะเหมาะสมที่สุด ซึ่งจะพิจารณาการลงทุนตลอดจนความพร้อมของเครื่องมือ วัสดุอุปกรณ์ และอื่นๆ ประกอบด้วยอย่างรอบคอบ

6. ลงมือเขียน ตามเทคนิคของบทเรียนแบบโปรแกรมชนิดนั้นๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7. แก้ไขปรับปรุงบทเรียนที่สร้างขึ้น เมื่อเขียนบทเรียนเสร็จแล้ว ควรทิ้งไว้สักระยะหนึ่งแล้วนำมาทบทวนเพื่อแก้ไขให้ดีขึ้นต่อไป

1. ความเรียง (Composition) ตรวจสอบและแก้ไขสำนวนภาษา การสะกด การันต์ และสมรรถภาพในการสื่อความหมาย
2. ความถูกต้องตามหลักวิชา (Technique Accuracy) โดยให้ผู้เชี่ยวชาญทางด้านเนื้อหาวิชาเป็นผู้ตรวจทานให้
3. เทคนิคการเขียน (Programming Technique) เช่น ขนาดของกรอบ กร เรียงลำดับกรอบ ความสัมพันธ์ระหว่างกรอบต่างๆ เหมาะสมหรือไม่ เป็นต้น

8. ทดสอบหาประสิทธิภาพของบทเรียนที่สร้างขึ้น ตามวิธีของบทเรียน โปรแกรมการทดสอบหาประสิทธิภาพนี้ ทำให้เพื่อยืนยัน หรือพิสูจน์ว่าบทเรียนที่สร้างขึ้นนี้ จะสามารถทำให้นักเรียน เกิดการเรียนรู้ตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้หรือไม่ เพียงใด ก่อนที่จะนำไปใช้จริงและเผยแพร่ต่อไป

3.9 ความหมายและความสำคัญของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การประยุกต์คอมพิวเตอร์ทางการศึกษาใน ส่วนที่มีผลกระทบโดยตรงต่อนักเรียน และนักศึกษานั้น คือ การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หรือ CAI (Computer Assisted Instruction) ด้รับการสนใจจากนักศึกษามาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2509 นับมาถึงปัจจุบันเป็นเวลากว่า 20 ปี ซึ่งนับว่าใหม่อยู่มากในวงการศึกษ โดยที่กลุ่มบุคคลและองค์กรต่างๆ ได้มีส่วนร่วมในการศึกษา ทั้งทางด้านหลักการและเทคนิคต่างๆ ที่มีส่วนสัมพันธ์กับการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยการสอน การศึกษาเกี่ยวกับพัฒนาการทางด้านคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ นอกเหนือจากปัญหาความแตกต่างของการออกแบบและวิธีการของแต่ละกลุ่มแต่ละองค์กรแล้ว ทั้งนี้เนื่องจาก วิวัฒนาการเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ก้าวรุดหน้าอย่างรวดเร็วจนทำให้การติดตามความเจริญของคอมพิวเตอร์เพียงอย่างเดียว ก็ใช้เวลาไปเกือบหมดแล้วเลยทำให้ไม่รู้ว่ ใครควรเป็นผู้รับผิดชอบเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์ช่วยการสอนแน่

นักโปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เป็นบุคคลที่ต้องกระทำสิ่งต่างๆ ดังนี้

1. เป็นผู้ทำการวิเคราะห์ระบบโครงการ
2. กำหนดและเขียนวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
3. สร้างแบบทดสอบตามเกณฑ์
4. เขียนขอบเขตบทเรียนตามระบบการศึกษา
5. เขียนลำดับการสอนในรูปแบบเตรียมการสอน แล้วเขียนโปรแกรมบทเรียนช่วยสอนซึ่งเขาสรุป

ได้ว่า นักโปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ เป็นเสมือนผู้วิเศษ ซึ่งเป็นผู้รู้รอบด้านเหมือนกับนิยายในฝันจริงๆ .ถ้าอย่างนั้น ความสามารถของนักโปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยการสอน น่าจะมีอะไรสามารถแจ่มแจ้งเป็นข้อๆ ไปได้อย่างไร

การเอาคอมพิวเตอร์มาช่วยการสอน มีการพัฒนาโปรแกรมสำเร็จรูปขึ้นมา ที่จะนำไปช่วยเสริมการเรียนการสอนในด้านต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งวิชาที่ค่อนข้างยุ่งยาก จำเป็นต้องใช้อุปกรณ์มากมาย เสียค่าใช้จ่ายสูง แล้วยังก็เด็กเกิด Concept ยาก เขานำเอาคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วย เช่น ทางด้านวิทยาศาสตร์ หากว่าเขาสร้างบทเรียนให้ตื่นเต้นสนุกสนาน มีอะไรมาสลับฉาก ก็คิดว่าเด็กจะสนใจการเรียนมากขึ้น การทำบทเรียนส่วนมากก็มักเป็นความสามารถของครู อาจารย์จะ ทำอย่างไร จะแทรกตรงไหน ให้บทเรียนสนุกขึ้น

1. ความหมายของคอมพิวเตอร์ช่วยการสอน (Computer Assisted Instruction)

ความหมายหลายแนวทางใกล้เคียงกันดังนี้

1.1 การนำเอาคอมพิวเตอร์มาช่วยการสอนวิชาต่างๆ ให้มนุษย์ โดยเครื่องกับผู้ใช้เรียนได้ตอบกันเอง ทั้งนี้จะรวมถึงการสอนให้คนรู้จักการเขียนโปรแกรมสั่งงานคอมพิวเตอร์แต่ไม่รวมถึงการสอนคนให้รู้จักวิธีใช้คอมพิวเตอร์ หรือรู้ว่าคอมพิวเตอร์เป็นอย่างไร คอมพิวเตอร์จึงเป็นเพียงเครื่องมืออย่างหนึ่ง ที่ครูจะนำไปใช้เป็นการสอน

1.2 การใช้คอมพิวเตอร์เป็นเพียงเครื่องมือเท่านั้น ไม่มีชีวิต ไม่มีความรู้สึก จึงไม่อาจเข้าใจผู้เรียนได้ อันทำให้ผู้เรียนไม่เข้าใจ ไม่สนใจต่อการศึกษา แต่คอมพิวเตอร์ก็มีประโยชน์อยู่ในระดับหนึ่งเช่น คอมพิวเตอร์สามารถเก็บข้อมูล ได้จำนวนมาก ไม่เกิดการลืม ทำงานได้ตลอดตามคำสั่งได้ซื่อสัตย์

2. บทบาทและความสำคัญในการนำคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องช่วยสอน

การใช้ไมโครคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องช่วยสอน (Computer Assisted Instruction)

หรือ CAI เป็นวิชาที่ได้รับความสนใจมาก เพราะสามารถช่วยให้คนเก่งขึ้น คนอ่อนสามารถพัฒนาความสามารถให้เก่งขึ้นได้ ถ้าครูผู้สอนยึดหลักกลุ่มเฉลี่ยให้สูงขึ้น

3.10 ประโยชน์ของ CAI

1. ใช้เป็นเครื่องช่วยสอนส่วนบุคคล

2. ใช้เครื่องมือช่วยสอนในการพัฒนาโปรแกรมที่จะใช้ในการสอน ตลอดจนการ

พัฒนาการสอนในการวางแผนหลักสูตร

3. นักเรียนสามารถจะเลือกใช้โปรแกรมเมื่อใดก็ได้ตามความต้องการ

4. CAI จะทำให้ครู สามารถที่จะปรับปรุงตัวเองให้มีประสิทธิภาพทันต่อเหตุการณ์

มากยิ่งขึ้น

5. CAI จะทำให้นักเรียนสนใจวิทยาการใหม่ๆ มากยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น เมื่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. CAI ทำให้ครูมีความใกล้ชิดกับนักเรียนมากยิ่งขึ้น

ชนิดของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในประเทศไทย นับเป็นเรื่องที่ใหม่มาแต่ในอเมริกาเป็นที่แพร่หลายมาก ดังจะเห็นได้จากผลการสำรวจของ Public School ในปี 1981 ปรากฏว่า 50 % มีคอมพิวเตอร์ไว้ใช้งานและมีอีก 25 % มีการสอนคอมพิวเตอร์ในโรงเรียน มีการบ่งชี้ว่าในอนาคตในปี 2000 อเมริกาจะใช้ CAI ในการเรียนการสอนถึง 50 %

ชนิดของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ใช้ในวงการศึกษามีหลายรูปแบบ ตามความเหมาะสมของผู้ออกแบบบทเรียน และผลลัพธ์ที่เกิดกับผู้เรียน

3.11 การแบ่งลักษณะของ CAI

ลักษณะของ CAI จึงแบ่งได้ดังนี้

1. การฝึกทักษะ (Drill and Practice) ในการนำคอมพิวเตอร์มาใช้

ในการสอนนั้นส่วนมากนำมาใช้ในการฝึกทักษะ ซึ่งอาจจะเป็นทักษะทางด้านต่างๆ ที่ต้องมีการทำซ้ำๆ กัน นักเรียนเป็นจำนวนมากยืนยันว่า การใช้ไมโครคอมพิวเตอร์เพื่อฝึกทักษะด้านต่างๆ จะเป็นโปรแกรมที่เขียนขึ้นด้วยความร่วมมือระหว่างนักศึกษาและผู้มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะการเรียนของเด็กเป็นอย่างดี กับการเขียนโปรแกรมที่ความชำนาญในด้านการป้อนคำสั่งให้คอมพิวเตอร์ทำงานโปรแกรมในด้านการฝึกทักษะนั้น ไม่ช่วยนักเรียนเฉพาะในด้านความจำเพียงด้านเดียว แต่ยังช่วยนักเรียนให้รู้จักคิดด้วย เพราะคอมพิวเตอร์มักจะเป็นฝ่ายตอบอยู่ตลอดเวลา

ข้อดีอีกประการหนึ่งในการใช้คอมพิวเตอร์ในการฝึกทักษะในด้านต่างๆ ก็คือ เด็กอาจมีบทบาทในการเลือกเนื้อหาวิชาเอง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเนื้อหาที่เด็กสนใจ ในอนาคตมีแนวโน้มว่าไมโครคอมพิวเตอร์จะมีราคาถูกลง และมีใช้ในการเรียนการสอนมากขึ้น นักเรียนจะมีโอกาสในการเรียนรู้ถึงวิธีการเขียนโปรแกรมด้วยตนเอง ด้วยวิธีนี้นักเรียนจะสามารถบรรลุเนื้อหาที่ตนต้องเรียนเข้าใจในโปรแกรมซึ่งทำให้นักเรียนเลือกเนื้อหาที่เขาต้องการเรียนได้

2. เกมการเรียนการสอน (Instruction Game) เกมการเรียนการสอนมีลักษณะที่แตกต่างไปจากเกมทั่วไป กล่าวคือ เกมการเรียนการสอนช่วยเสริมการเรียนรู้ ช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับหลักการทางวิชาการที่นักเรียนยังไม่เคยเรียนมาก่อน ทำให้นักเรียนได้ความรู้และความสนุกสนานไปพร้อมกัน เป้าหมายการเรียนการสอน ก็คือช่วยให้เด็กเรียนรู้เป็นสำคัญ ส่วนที่มีลักษณะเหมือนเกมทั่วไป ก็คือเป็นการแข่งขันเพื่อชัยชนะซึ่งเป็นการนำไปสู่การเรียนรู้นั่นเอง

3. การสอนเฉพาะราย (Tutorial) ในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการสอนด้วยคอมพิวเตอร์สอนนักเรียนแทนครู เฉพาะในเรื่องเนื้อหาวิชาบางตอน ซึ่งเด็กอาจจะเรียนไม่ทัน หรือขาดเรียนในวันที่นักเรียนส่วนใหญ่เรียนเรื่องนั้นๆ การเรียนในลักษณะนี้ ก็จะเป็นการเรียนรายบุคคลนักเรียน 1 คน ต่อคอมพิวเตอร์ 1 เครื่อง คอมพิวเตอร์จะถามนักเรียนทีละหนึ่งคำถาม แล้วให้นักเรียนตอบ หากนักเรียนตอบได้ คอมพิวเตอร์ก็จะถามคำถามต่อไปอีก การเรียนรู้จึงเกิดจากการที่

นักเรียนได้คิดเพื่อที่จะตอบคำถามที่ถามด้วยคอมพิวเตอร์ การสอนวิธีนี้เหมาะสำหรับการสอนแนวความคิดใหม่ๆ หรือความคิดรวบยอดบางประการแก่เด็ก ข้อเสียของวิธีนี้จะเป็นการจำกัดความคิด เนื่องจากคำตอบที่ถูกต้องจะมีเพียงคำตอบเดียว ส่วนข้อดีก็คือสามารถจะสรุปแนวความคิดรวบยอดในด้านต่างๆ ซึ่งอาจจะทำได้ดีกว่าครู นอกจากนี้การสอนแบบ 1 ต่อ 1 จะทำให้มีความสอดคล้องกับความสามารถของเด็กได้ดีกว่า

4. การสาธิต (Demonstration) เป็นการสอนที่วิธีหนึ่งที่ครูมักจะนำมาใช้เสมอโดยเฉพาะอย่างยิ่งกับการสอนวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ การสอนด้วยวิธีนี้ ครูจะเป็นผู้แสดงให้นักเรียนดูการสาธิตโดยใช้คอมพิวเตอร์ก็มีลักษณะคล้ายคลึงกันแต่นำเสนอใจกว่าเนื่องจากโปรแกรม CAI มีรูปภาพ สี สัน เสียงที่สวยงามการสาธิตคอมพิวเตอร์ที่มีคุณภาพมักเป็นการสาธิตโดยใช้ชุดโปรแกรมที่สลับซับซ้อนในบางครั้งจึงจำเป็นต้องหานักเขียนโปรแกรมอาชีพมาเขียนโปรแกรมให้ ซึ่งความเป็นจริงในการสาธิตที่ดีไม่จำเป็นจะต้องสวยงามมากนัก หากแต่เป็นโปรแกรมที่อธิบายหัวข้อที่ต้องการเป็นอย่างดีและไม่ควรเกินความสามารถของครูผู้สอนที่จะเขียนหรือจัดหามาได้

5. การจำลองแบบ (Simulation) การจำลองเป็นการเรียนแบบของจริง หรือสิ่งที่อยู่ในจินตนาการ ซึ่งบางครั้งอาจมีขนาดใหญ่เกินไป หรืออันตรายเกินไปในการที่เราจะเข้าไปใกล้จึงจำเป็นต้องมีการจำลองแบบ เป็นการย่อสภาวะแวดล้อมให้เล็กลงด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อที่จะศึกษาเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้อย่างลึกซึ้งมากขึ้นในปัจจุบันมีโปรแกรมชนิดนี้มากมายครูสามารถจัดหาใช้ได้ตามความต้องการ

6. การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการค้นคว้า (Inquiry) ผู้สอนรวบรวมเนื้อหาการเรียนโปรแกรมขึ้นโดยใช้คอมพิวเตอร์เป็นสื่อ ผู้เรียนจะตั้งปัญหา หรือวิธีการแก้ปัญหาโดยป้อนคำถามเข้าคอมพิวเตอร์และคอมพิวเตอร์ก็จะให้คำตอบและจะดำเนินไปเรื่อยๆจนกว่านักเรียนจะเข้าใจ

3.12 บทเรียนแบบโปรแกรมไมโครคอมพิวเตอร์

บทเรียนทางไมโครคอมพิวเตอร์ เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของบทเรียนแบบโปรแกรม โดยใช้ไมโครคอมพิวเตอร์เป็นตัวกลางแทนสิ่งพิมพ์หรือสื่อประเภทอื่นๆ แต่มีศักยภาพเหนือกว่าบทเรียนสำเร็จรูปในรูปแบบอื่นๆ ทั้งหมด โดยเฉพาะมีความสามารถที่เกือบจะแทนครูที่เป็นมนุษย์ได้ ถึงแม้ว่าศักยภาพของบทเรียนทางไมโครคอมพิวเตอร์จะเหนือกว่าบทเรียนสำเร็จรูปแบบอื่นๆ แต่โครงสร้างและบทเรียนนี้ ก็มีขั้นตอนเช่นเดียวกัน

1. พัฒนาการของบทเรียนแบบโปรแกรม

หลังจากโซคราติส และอลิสโตเติล ได้ให้ข้อคิดเกี่ยวกับกระบวนการสอนแบบขนมขั้นนักเรียนรู้จากประสบการณ์ของตนเอง จนกระทั่งในปี 1927 เพรสซี่

(Pressey) ก็ได้เสนอความคิดว่า น่าจะสามารถใช้เครื่องจักรกลทำหน้าที่สอนครูที่เป็นมนุษย์ได้ ต่อมาในปี 1954 สกินเนอร์ (B.E. Skinner) ก็เสนอแบบเรียนแบบเรียงลำดับ (Linear Programme) เพื่อใช้กับเครื่องจักรกลช่วยสอน และอีกต่อมาไม่นาน โครวเดอร์ (N.A. CROWDER) ก็เสนอบทเรียนแบบแตกแขนง (Intrinsic Programme) ซึ่งเป็นระบบการศึกษา เพื่อสนองความแตกต่างของบุคคล จากการศึกษาวิจัยที่ผ่านมา พบว่าการใช้บทเรียนแบบ โปรแกรมสามารถสอนได้ใกล้เคียงกับครูผู้สอนอย่างไรก็ตาม บทเรียนแบบโปรแกรมไม่สามารถทดแทนครูได้ เพียงแต่เป็นส่วนเสริมการสอนของครูได้ดี

2. ชนิดของบทเรียนแบบโปรแกรม

บทเรียนแบบโปรแกรมในปัจจุบัน สามารถพบได้ 3 รูปแบบ คือในรูปแบบของ หนังสือบทเรียนสำเร็จรูป (programmed text) ในรูปของเครื่องมือช่วยสอน (Teaching Machine) ซึ่งรวมทั้งพวกคอมพิวเตอร์ช่วยสอนด้วย และในรูปส่วนหนึ่งของสหสื่อ (Multimedia Package) บทเรียนแบบโปรแกรมเหล่านี้ จะเป็นบทเรียนแบบใดแบบหนึ่งในสาม แบบ ดังที่ได้กล่าวไว้แล้ว

3. ลักษณะโครงสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม

ลักษณะโครงสร้างของบทเรียนแบบโปรแกรม สามารถกำหนดหลักเกณฑ์ต่างๆ ที่สำคัญๆ เป็น 8 ประเด็น ดังนี้

1. เนื้อหาวิชาที่สอน จะแบ่งออกเป็นหลายนหน่วยย่อยๆ เรียกว่ากรอบ (Frame) โดยในแต่ละกรอบจะมีข้อความมากน้อย ขึ้นอยู่กับความจำเป็นของข้อความที่ต้องการสื่อความใดความหนึ่งได้สมบูรณ์ แต่จะต้องย่อและกระชับรัด และ สามารถสื่อความหมายได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุดด้วย
2. แต่ละกรอบ (Frame) จะต้องกำหนดให้มี การสนองตอบจากผู้เรียนในรูปแบบหนึ่ง อาจเป็นการถามหรือการให้เติมคำ หรือการตอบสนองด้วยการปฏิบัติอย่างหนึ่ง ก่อนจะต่อไปยังกรอบถัดไป
3. การย้อนกลับต่อบทเรียนหลังจากได้ทำแบบฝึกหัด หรือตอบคำถามใดๆ จะต้องกระทำทันทีที่จะทำได้ ซึ่งเป็นการเสริมแรง (Reinforcement) ที่สำคัญมากเป็นจุดเด่นบทเรียนแบบโปรแกรม โดยเฉพาะบทเรียนทางไมโคร คอมพิวเตอร์
4. การจัดเรียงกรอบต่างๆ จะเรียนอย่างถูกต้องตามตรรกศาสตร์ จากง่ายไปหายาก จากสิ่งที่รู้ไปสู่สิ่งที่ไม่รู้ จากของเก่าไปสู่ของใหม่ โดยยึดวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมเป็นหลักปรับการเรียนรู้อื่นๆ แต่ไม่ละเลยการเสริมแรง สามารถจำได้คงทนและแม่นยำด้วย

5. บทเรียนแบบโปรแกรม ควรมีการทดสอบปรับแต่งอยู่เสมอ โดยอาศัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์สงวนลิขสิทธิ์ของสำนักงานส่งเสริมการศึกษานานาชาติเพื่อพัฒนาประเทศไทย
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่อง และเสริมซึ่งกันและกัน โดยจัดเขียนหัวเรื่องเหล่านั้นในรูปแบบแผนภูมิทำงานที่สมบูรณ์ แสดงลำดับก่อนหลังของหัวเรื่องต่างๆ พร้อมทั้งลำดับทางตรรกของเนื้อหาที่สมบูรณ์ด้วย

5. จัดชอยเนื้อหาเป็นหน่วยย่อย เนื่องจากการสอนทางไมโครคอมพิวเตอร์จะเป็นการสอนที่ปราศจากครู – อาจารย์ การเสนอเนื้อหาครั้งละมากๆ อาจจะมีปัญหาในการเรียนได้ดังนี้ จึงจำเป็นต้องชอยเนื้อหาออกเป็นหน่วยย่อยที่มีความสมบูรณ์ ในแต่ละหน่วยพอสมควร และผู้เรียนสามารถจะติดตามเนื้อเรื่องต่อไปได้ไม่สับสน หรือ ขาดตอน

6. การสร้างข้อความในแต่ละกรอบตามเนื้อหาที่กำหนด ข้อความเหล่านี้จะต้องกระชับรัด เป็นประโยคที่ง่ายต่อความเข้าใจของผู้เรียนข้อความในกรอบต่างๆ ต้องสอดคล้องกับหน้าที่ของ

6.1 กรอบหลัก (Set Frame) เป็นกรอบที่ให้ข้อมูลโดยที่ผู้เรียนสามารถจะเรียนรู้ในเรื่องต่างๆที่ไม่เคยรู้มาก่อน

6.2 กรอบฝึกหัด (Practice Frame) เป็นกรอบที่จะให้ผู้เรียนฝึกหัดข้อมูลที่ได้จากกรอบหลัก

6.2 กรอบส่งท้าย (Terminal Frame) เป็นกรอบทดสอบ โดยผู้เรียนจะต้องนำความรู้ความเข้าใจจากกรอบหลักมาตอบ

6.4 กรอบรองส่งท้าย (Sub-terminal Frame) เป็นกรอบเขียนต่อจากกรอบส่งท้ายแต่เป็นข้อมูลที่แก้ไขความผิดหรือตอบผิดจากกรอบส่งท้าย เป้ากรอบที่จะเสริมความเข้าใจในกรอบส่งท้ายให้เข้าใจได้ถูกต้องยิ่งขึ้นที่อาจจะ เป็นกรอบที่ข้ามไปได้

7. เข้ารหัสตามโปรแกรมที่กำหนด การเข้ารหัสในที่นี้หมายความว่าโครงสร้างโปรแกรมที่สร้างขึ้นจำเป็นต้องแปลงข้อมูลเป็นรหัส เช่น แบบ Generative หรือแบบ Artificial Intelligence ก็จัดทำตามที่กำหนด แต่ถ้าโปรแกรมออเธอร์ริงแบบ Frame (Authoring System) ซึ่งเป็น โปรแกรมสร้างบทเรียนได้ง่ายๆการป้อนบทเรียนเข้าไปได้ง่าย ขั้นตอนนี้คงเป็นทั้งเตรียมป้อนเข้าเครื่องคอมพิวเตอร์ด้วย

8. ป้อนบทเรียนเข้าเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ ในการป้อนบทเรียนเข้าไป จะต้องปฏิบัติตามข้อกำหนดของโปรแกรมนั้นๆโดยไม่ต้องกังวลว่าเป็นไปตามที่ตนคิดเพราะการจัดลำดับการ แสดงบทเรียนจะถูกควบคุม โดยโปรแกรมในส่วนอื่นๆต่อไป

9. ทำการตรวจสอบความเรียบร้อยของบทเรียนจากไมโครคอมพิวเตอร์ เมื่อป้อนบทเรียนเข้าไปหมดแล้ว ทดลองเรียกบทเรียนตามลำดับที่ผู้เรียนจะต้องปฏิบัติ ทำการตรวจเช็คความเรียบร้อย แก้ไขปรับปรุงถ้าจำเป็น

10. ทดสอบบทเรียนกับผู้เรียนเป้าหมาย กล่าวคือ การสร้างบทเรียนไมโครคอมพิวเตอร์เท่าที่กระทำมาจนถึงขั้นนี้ ได้กระทำไปตามหลักทฤษฎีและความคาดหวังของผู้สร้างเท่านั้น เมื่อ

สร้างเสร็จแล้ว จำเป็นจะต้องทำการทดสอบ เพื่อตรวจสอบผลว่า จะได้ตามที่คาดหมายหรือไม่เพียงใด หากจำเป็นต้องแก้ไขปรับปรุง ก็ควรจะจัดการแก้ไขเสียก่อนนำไปใช้จริง

11. เมื่อผ่านการทดสอบแล้ว จึงนำไปใช้กับผู้เรียนเป้าหมายต่อไป

12. การติดตามผลการเรียนของผู้เรียน เป้าหมายนี้เป็นปัจจัยที่สำคัญมาก เมื่อการเรียนโดยบทเรียนทางโมโครคอมพิวเตอร์ให้ผลของการเรียนจากกลุ่มเป้าหมายต่าง ๆ เป็นไปตามที่ความหวังไว้อย่างไร มีจุดอ่อน มีข้อบกพร่อง หรือประเด็นที่ควรแก้ไขอย่างไร ควรจะติดตามรวบรวมไว้เป็นข้อมูลในการพัฒนาบทเรียนทางโมโครคอมพิวเตอร์ สำหรับวิชาอื่น ๆ ไปด้วย

2.14 ลักษณะของโปรแกรมช่วยสอนที่ดี

1. ใช้งานง่าย โดยที่ผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องมีพื้นฐานความรู้ด้านคอมพิวเตอร์มาก่อน
2. ใช้งานได้คล่องแคล่วและรวดเร็ว เช่น การเลือก และกดแป้นพิมพ์ต้องอยู่ในตำแหน่งที่ใช้งานง่าย
3. มีข้อผิดพลาดของการใช้น้อย กล่าวคือเมื่อผู้ใช้งานมีการกดแป้นพิมพ์ผิด ต้องไม่เกิดข้อผิดพลาดขึ้นจนแก้ไขไม่ได้
4. สร้างความพึงพอใจให้กับผู้ใช้ เช่น ความสวยงาม ความรวดเร็ว ความแปลกตาไม่จำเจ

3.15 ความเป็นมาของโปรแกรม Multimedia Toolbook

โปรแกรม Multimedia Toolbook เป็นโปรแกรมที่ผลิตโดยบริษัท Asymetrix ซึ่งปัจจุบันเป็นเวอร์ชัน 5 เป็นเวอร์ชันล่าสุด สามารถทำงานได้ทั้งใน Windows version 3.11 และ Windows 95

Toolbook คืออะไร

เป็นโปรแกรมรายวัตถุ (Object Oriented) ที่ใช้แนวคิดของการทำหนังสือมาออกแบบการควบคุมโปรแกรม โดยมีเครื่องมือสำเร็จสำหรับสร้าง “วัตถุ” (วัตถุ ในที่นี้ หมายถึง ทุกสิ่งทุกอย่างที่ผู้สร้างบทเรียนได้สร้างขึ้นบนจอภาพ เช่น ตัวอักษร ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว กรอบเส้น เสียง ดังนั้นคำว่า วัตถุ จึงเป็นคำที่ใช้ครอบคลุมสิ่งที่มองเห็นบนจอคอมพิวเตอร์และได้ยินจากอุปกรณ์ที่นำมาต่อพ่วงกับคอมพิวเตอร์ เช่น Sound card/ Video card) เมื่อผู้ที่ต้องการใช้สร้าง วัตถุ พร้อมกำหนดภาษาที่ใช้ในการควบคุมพฤติกรรมการทำงานของวัตถุด้วยภาษาเฉพาะที่เรียกว่า Openscript (เป็นภาษาสคริปต์ตระกูลหนึ่งที่บริษัท Asymetrix พัฒนาขึ้นใช้ในการควบคุมการทำงานของวัตถุต่าง ๆ ที่ผู้ใช้สร้างขึ้น) ซึ่งทำงานได้ในสภาพแวดล้อมวินโดว์ของไมโครซอฟต์

ปัจจุบันโปรแกรมส่วนใหญ่ที่ทำผ่านในสภาพแวดล้อมของโปรแกรม ไมโครซอฟต์วินโดว์ได้ใช้เทคโนโลยีรายวัตถุ (Object Oriented) ในการพัฒนาโดยอัตโนมัติแทบทั้งสิ้น ทำให้ผู้ใช้เกิดความสะดวกสบายในการสร้างโปรแกรมและประหยัดเวลามากขึ้น

ผู้ที่ทำงานกับโปรแกรมบน Windows มาแล้วอย่างคิจะสามารถที่จะเรียนรู้การทำงานของโปรแกรม Multimedia Toolbook ได้อย่างรวดเร็ว แม้กระทั่งภาษา Script ที่ใช้ในการควบคุม

การทำงานของโปรแกรมที่เป็นภาษาที่มีโครงสร้างไวยากรณ์ใกล้เคียงกับภาษาอังกฤษ

Multimedia Toolbook คืออะไร

Multimedia Toolbook คือ Toolbook ที่มีการเสริมประสิทธิภาพการทำงานทางด้านมัลติมีเดีย คือ การติดต่อกับระบบเสียงของ Windows ผ่านทาง Media Control Interface นอกเหนือจากการใช้ฟังก์ชัน playsound (แสดงเสียง) ทั่วไป นอกจากนั้นยังสามารถติดต่อฟังก์ชัน mmplay clip (แสดงไฟล์มัลติมีเดีย) ซึ่งเป็นส่วนเสริมประสิทธิภาพการสร้างงานมัลติมีเดียด้วย Toolbook ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

2.16 ความสามารถของโปรแกรม Multimedia Toolbook

โปรแกรม Multimedia Toolbook เป็นโปรแกรมประเภท Authoring System เช่นเดียวกับโปรแกรมอื่น ๆ เช่น Authorware Icon AUTHOR และ Director ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างสูงในกลุ่มผู้ใช้โปรแกรมประเภทนี้ในปัจจุบัน

เมื่อดูความสามารถโดยรวมของโปรแกรมประเภทนี้ จะเห็นว่าส่วนใหญ่จะมีความสามารถคล้ายกัน ความยากง่ายจะขึ้นอยู่กับวิธีการติดต่อควบคุมโปรแกรม ยกตัวอย่างเช่น โปรแกรม Authorware มีจุดเด่นที่ใช้แนวคิดของ Flow line ในการออกแบบและกำหนดให้การควบคุมวัตถุต่าง ๆ ที่จะทำให้ปรากฏบนจอภาพเป็นแบบ Visual Graphics เกือบทั้งหมด ทำให้ผู้ใช้ไม่ต้องคอยจดจำคำสั่งมากนัก แต่ก็มีจุดอ่อนตรงที่ขาดความยืดหยุ่นในการควบคุมโปรแกรมให้พัฒนาได้ดังใจของผู้ใช้ (ในที่นี้ก็คงจะหมายถึงผู้ใช้ที่มีความรู้ในการเขียนโปรแกรม) ส่วนโปรแกรม Director นั้นใช้แนวคิดของการสร้างภาพยนตร์มาเป็นแนวทางในการสร้างระบบการควบคุมโปรแกรม พร้อมกับเสริมความสามารถในการสร้างระบบการควบคุมโปรแกรม พร้อมกับเสริมความสามารถการควบคุมด้วยภาษา Script เฉพาะของตัวเองที่ชื่อว่า Lingo ทำให้เกิดความยืดหยุ่นมากกว่าโปรแกรม Authorware สำหรับโปรแกรม Toolbook หรือ Multimedia Toolbook นั้นจะเน้นที่การควบคุมด้วยภาษา Script เป็นหลักเหมือนกับโปรแกรม Director ทำให้ดูยากกว่าแต่หากใช้คำสั่งต่าง ๆ จนคุ้นเคยแล้วก็สามารถควบคุมการทำงานของโปรแกรมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

สิ่งที่โปรแกรม Multimedia Toolbook ได้เปรียบกว่าโปรแกรมอื่น ๆ อยู่บ้างก็คือโปรแกรม Multimedia Toolbook นั้นสามารถนำไปใช้พัฒนาโปรแกรมประยุกต์ หรือ โปรแกรมสำเร็จนั้นได้ในตัวเอง ทำให้ผู้ใช้สามารถสร้างโปรแกรมย่อย ๆ สำหรับผู้ใช้ทั่วไปสร้างเนื้อหาจากโปรแกรมได้ทันที

งานที่ใช้โปรแกรม Multimedia Toolbook สร้างขึ้นนั้นมีหลากหลาย ครอบคลุมงานทั้งหมดที่มีการพัฒนาใช้กันอยู่ในปัจจุบัน เช่น

- สร้างบทเรียนที่มีทั้งภาพและเสียงที่มีการเชื่อมต่อ คีย์เวิร์ด (Keyword) ซึ่งโปรแกรม

Multimedia Toolbook ใช้ศัพท์เรียกขึ้นมาเองว่า Hotwords ที่ต้องการเข้าด้วยกันคล้าย ๆ ข่ายใยแมงมุมซึ่งเรียกเป็นศัพท์เฉพาะว่า ไฮเปอร์มีเดีย (Hypermedia)

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- สร้างแบบทดสอบที่มีการโต้ตอบ เช่น บทเรียนตัวอย่างของโปรแกรมต่าง ๆ หรือที่ใช้ตามห้างสรรพสินค้า หรือในการจองตั๋วรถไฟจากตู้สาธารณะ
- ใช้สร้างฐานข้อมูลและติดต่อโปรแกรมฐานข้อมูลอื่น ๆ เช่น Dbase และ PARADOX ในที่นี้จะหมายถึง Multimedia Toolbook สามารถอ่านไฟล์คำค้นหาเบสและส่งข้อมูลที่เก็บในวัตถุประเภท Record Field ไปเป็นฐานข้อมูลได้ทันที
- สร้างเกมที่ใช้ภาพกราฟฟิกหรือภาพเคลื่อนไหว

2.17 แนวทางการทำงานเบื้องต้นของโปรแกรม Multimedia Toolbook

หลักการดำเนินงานเบื้องต้นของโปรแกรม Toolbook นั้นใช้หลักการจัดหน้าหนังสือมาเป็นแนวทางในการออกแบบของโปรแกรมโดย Toolbook จะกำหนดในหน้าจอหนึ่งหน้าเสมือนหน้าหนังสือพิมพ์หนึ่งหน้า เมื่อมีการเรียกใช้ทุกครั้งโปรแกรมจะสร้างหน้าหนังสือหน้าแรกให้โดยอัตโนมัติ โดยผู้ใช้สามารถบันทึกเป็นแฟ้มข้อมูล 1 แฟ้มเมื่อสร้างหน้าหนังสือได้อย่างน้อย 1 หน้าขึ้นไปแล้วเท่านั้น

แฟ้มข้อมูลที่ผ่านการบันทึกลงดิสก์ Toolbook จะมองเสมือนหนังสือ 1 เล่ม โดยจะทำการจัดเก็บแฟ้มข้อมูลที่ทำกรการจัดเก็บไว้ในนามสกุล *.tbk ดังนั้น การอ้างอิงถึงไฟล์ที่สร้างไว้ด้วย Toolbook จึงต้องใช้คำว่า Book แทนคำว่า File ซึ่งต่างจากโปรแกรมอื่น ๆ

ดังนั้น การอ้างอิงชื่อต่าง ๆ ด้วยภาษา Script ที่ใช้ในการควบคุมโปรแกรมจึงเป็นคำที่เกี่ยวข้องกับหนังสือเป็นหลักเช่น Page, Foreground, Background, Book, EnterPage, EnterBook, LeavePage

2.18 ลำดับการทำงานของโปรแกรม Multimedia Toolbook

จากการใช้แนวคิดของการสร้างหนังสือมาเป็นหลักในการออกแบบโปรแกรม Toolbook จึงกำหนดให้มองจอภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นเสมือนหนึ่งหนังสือ 1 หน้า โดยผู้ที่พัฒนาโปรแกรมประยุกต์สามารถที่จะสร้างวัตถุ (Object) ใด ๆ ที่ต้องการให้ผู้ชมมองเห็น หรือกระทำการอย่างใดอย่างหนึ่งกับวัตถุแต่ละชิ้น พร้อมทั้งสามารถกำหนดคุณสมบัติ (Properties) ให้กับวัตถุแต่ละชิ้นที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้ชมมองเห็นหรือได้ยินตามต้องการ โดยที่วัตถุต่าง ๆ ที่อยู่ในแฟ้มของ Toolbook จะมีลำดับความสำคัญดังนี้

- System เป็นขั้นสูงสุดที่ใช้ในควบคุมการทำงานของบทเรียน หรือโปรแกรมประยุกต์ที่สร้างขึ้น
- Dynamic Link Libraries หรือย่อเป็นนามสกุล .dll คือส่วนที่จะได้รับการติดต่อในลำดับถัดมา และผู้ใช้เป็นผู้สร้างขึ้นเองโดยใช้ภาษาโปรแกรมต่าง ๆ บนระบบปฏิบัติการวินโดวส์ เช่น เดลไฟล์ (Visual Pascal for Windows) ภาษาซี ภาษาวิซวลเบสิก เป็นต้น

● **System Books** คือส่วนที่สร้างขึ้นเพื่อควบคุมระบบของ Book จากผู้ใช้โดยตรงคือสามารถใช้ Multimedia Toolbook เพื่อกำหนดคสภาพแวดล้อมโดยรวมให้ผลงานที่สร้างขึ้นและใช้คำสั่งจากไฟล์ Book สามารถเรียกใช้ข้อมูลหรือข้อกำหนดร่วมกันได้ตลอดจนมีความสามารถในการควบคุมการทำงานของ Book ทั้งไฟล์ได้ตามเงื่อนไข โดยที่ไฟล์ที่เป็น system สำหรับประจำ Book ดังกล่าวนี้อาจจัดเก็บเป็นนามสกุล *.SBK ซึ่งอันที่จริงแล้วไฟล์นามสกุล *.SBK นี้ก็คือไฟล์ Book เพียงแต่ได้รับการกำหนดให้อยู่สูงกว่า Book เพื่อคอยควบคุม Book อีกลำดับหนึ่งนั่นเอง ใช้ประโยชน์ได้มาก ในกรณีที่ต้องการให้เพิ่ม Book หลายเพิ่มมีคำสั่ง หรือข้อกำหนดเบื้องต้นบางประการเหมือนกัน เพื่อช่วยให้การควบคุมเพิ่ม Book ต่างๆ เป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ช่วยประหยัดเวลาและขั้นตอนในการสร้างชุดคำสั่งภาษา Script ในการควบคุมได้อย่างมาก

● **Book** คือเพิ่มข้อมูลที่สร้างขึ้นและจัดเก็บเป็นไฟล์นามสกุล *.TBK ปกติจะคอยควบคุมการเปิด-ปิดหนังสือในแต่ละเล่มหรือเพิ่มหนังสือในแต่ละไฟล์ การเขียนชุดคำสั่งควบคุมวัตถุต่างๆ ด้วยภาษา Script ในแต่ละหน้าจะสามารถที่จะนำมาไว้ในระดับ Book เพื่อให้เกิดการควบคุมได้อย่างทั่วถึง ไม่ต้องคอยเขียนชุดคำสั่งกำกับไว้ทุกหน้า

● **Background** คือฉากหลังของหน้าหนังสือแต่ละหน้า โดยบางหน้าอาจจะกำหนดให้ใช้ฉากหน้า (Foreground) โปรแกรม Toolbook มองการอ้างอิงถึงหน้าหนังสือแต่ละหน้าในระดับ Foreground เท่านั้น ไม่ครอบคลุมถึงฉากหลัง ดังนั้นการออกคำสั่งควบคุมการทำงานของวัตถุที่อยู่ใน Background จึงต้องมีการระบุว่าเป็น Background ปัจจุบันหรือเป็น Background ที่อยู่ในอีกชุดหนึ่งต่างหาก การสร้างหน้า Background ไว้มากเกินไปจะทำให้ไฟล์มีขนาดใหญ่และสิ้นเปลืองหน่วยความจำโดยใช่เหตุ ดังนั้น จึงต้องมีการออกแบบให้หน้าแต่ละหน้าใช้ Background ร่วมกันให้มากที่สุดเพื่อเป็นการประหยัดทรัพยากรของระบบ

● **Page** คือระดับ Foreground ของหน้าหนังสือแต่ละหน้า เพิ่มหนังสือหนึ่งเล่ม จะประกอบด้วยจำนวนหน้าก็หน้าก็ได้วัตถุต่างๆ ที่สร้างขึ้นแต่ละหน้าจะอยู่ภายใต้การควบคุมของหน้าหนังสือเป็นอันดับแรก หากหาตัวดำเนินการ (handle) ซึ่งเป็นชุดคำสั่งควบคุมพฤติกรรมของวัตถุต่างๆ ที่สร้างขึ้นในระดับ Page ไม่พบ Toolbook ก็จะส่งเมสเสจ (message) ไปให้วัตถุลำดับชั้นถัดไปที่สูงกว่าเป็นผู้รับคำสั่งไปปฏิบัติกรอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไป

● **Group** คือวัตถุประเภทหนึ่งที่เกิดจากการรวมกลุ่มวัตถุย่อยๆ ให้เป็นกลุ่มเดียวกัน โดยที่วัตถุย่อยๆ ทุกชิ้นยังคงมีอยู่เช่นเดิม การรวมกลุ่มวัตถุย่อยๆ เข้าด้วยกันช่วยในการเขียนคำสั่ง Script กำกับเป็นไปได้อย่างรวดเร็ว เนื่องจากไม่ต้องทวนคำสั่งซ้ำๆ ซากๆ กรณีของเมสเสจที่ส่งไปที่ Page และ Page ไม่มีคำสั่งดำเนินการใด ๆ โปรแกรมก็จะวิ่งไปยังระดับบน ซึ่งในที่นี้คือ Page วัตถุอื่น ๆ ที่อยู่สูงกว่า

● **Button/Field/Graphic** เป็นวัตถุระดับต่ำสุดที่สร้างอยู่ใน Page ต่างๆของหนังสือแต่ละเล่ม หรือแต่ละเล่มโดยมีวัตถุประเภท Hotword เป็นวัตถุระดับต่ำสุดของระบบหนังสือ โดยที่การสร้างวัตถุประเภท Hotword นี้จะใช้ได้กับวัตถุที่เป็น Field เท่านั้น

วัตถุที่ใช้ในโปรแกรม Toolbook มีดังนี้

● ระดับที่ 1 ประกอบด้วย

Button	Combo Box	Field
Hotword	Record Field	Paint object
Picture	Stage	OLE
Arc	Curve	Ellipse
Angled line	Irregular polygon	Pie
Polygon	Rectangle	Round Rectangle

● ระดับที่ 2 Group คือการรวมวัตถุในระดับที่ 1 ไว้เป็นกลุ่มๆ ซึ่งจะมีจำนวนกลุ่มเท่าไรก็ได้ วัตถุที่ถูกรวมกลุ่มยังมีสถานภาพเดิมทุกอย่างไม่มีการเปลี่ยนแปลงใดๆทั้งสิ้น

● ระดับหน้าหนังสือ หรือ Page คือจำนวนหน้าหนังสือทั้งหมดที่มีอยู่ในแฟ้มหนังสือหรือไฟล์ที่สร้างขึ้น

● ระดับที่ 4 ฉากหลัง (Background) ซึ่งในหน้าหนังสือหลายหน้าสามารถใช้ฉากหลังเดียวกันด้วยกันได้ ในขณะที่เดียวกันก็สามารถใช้ฉากหลังของหนังสืออีกเล่มหนึ่งมาใช้รวมกันได้ โดยจะต้องอ้างอิงเส้นทางของไฟล์ให้ถูกต้อง

● ระดับที่ 5 ระดับหนังสือ Book คือแฟ้มหนังสือหนึ่งเล่ม หรือไฟล์ 1 ไฟล์ Toolbook เปิดโอกาสให้มีการแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างหนังสือแต่ละเล่มด้วยกันได้

● ระดับสุดท้าย คือ ระดับระบบของหนังสือหรือ System Book ซึ่งในแฟ้มหนังสือปัจจุบันจะมีวัตถุที่ Toolbook กำหนดไว้แล้วโดยอัตโนมัติ คือ Command Windows/menu bar/ scroll bar/ toolbar/ Toolbook palettes ซึ่งเป็นคำสั่งเกี่ยวกับการกำหนดสีและการกำหนดเส้น

บทที่ 4

การประเมินผล

ผลที่ได้จากการศึกษาและพัฒนาโปรแกรมประเภท Authoring System นั้นคือโปรแกรม ToolBook และใช้ Visual Basic เป็นเครื่องมือพัฒนา ภายใต้หัวข้อที่ว่า “การวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ” จากการศึกษาและพัฒนาโปรแกรมดังกล่าว สามารถประเมินผลได้ดังนี้

คุณสมบัติและความสามารถของโปรแกรม

1. เนื่องจากระบบมีลคมีเดีย ในรูปแบบรูปภาพ และเสียงที่ Toolbook จัดเตรียมไว้ให้ ทำให้บทเรียนในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนน่าสนใจ ดึงดูดใจผู้เรียน
2. มีการตอบโต้กับผู้เรียน โดยผู้เรียนสามารถใช้โปรแกรมช่วยคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่าง ๆ นั่นคือ ผู้เรียนสามารถใส่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญภายในขอบเขตที่กำหนดเพื่อให้โปรแกรมหาผลเฉลยของสมการนั้น
3. มีแบบทดสอบอย่างง่าย ๆ ในบางหัวข้อเพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน
4. เมื่อผู้ใช้ต้องการดูการพิสูจน์ที่มาของสูตร, ประวัติผู้แต่งและบัญชีศัพท์ สามารถคลิกที่ปุ่ม 1 ครั้ง หน้าจอก็จะพลิกไปยังหน้าที่ต้องการ นั่นคือ มีการเชื่อมโยงระหว่างหน้า ซึ่งเป็นลักษณะของไฮเปอร์เท็กซ์ คือ มีการเชื่อมโยงวัตถุที่อยู่ต่างหน้า เพื่อช่วยให้เกิดความน่าสนใจยิ่งขึ้น
5. เมื่อผู้ใช้ลากเมาท์ผ่านข้อความที่มีตัวอักษรสีม่วง ผู้เรียนสามารถคลิกที่ข้อความนั้น 1 ครั้ง เมื่อผู้เรียนต้องการคำอธิบายที่ชัดเจนและเข้าใจยิ่งขึ้น โดยคำอธิบายเพิ่มเติมจะซ่อนอยู่ในวัตถุประเภทฟิลด์ ซึ่งเรียกวัดถุนี้ว่า ฮอตเวิร์ด

ข้อจำกัดของโปรแกรม

1. โปรแกรมช่วยคำนวณมีข้อจำกัดในการใช้งาน นั่นคือผู้เรียนสามารถใส่สมการที่ผู้เรียนต้องการทดสอบได้เพียงฟังก์ชันเท่าที่กำหนดไว้เท่านั้น
2. ในบางหน้าจอที่มีขนาดใหญ่กว่าหน้าจอคอมพิวเตอร์การแสดงผลบนหน้าจอจะใช้แถบเลื่อนในการเลื่อนอ่านข้อมูล เมื่อผู้ใช้ต้องการพลิกหน้าต้องเลื่อนหน้าจอไปจนถึงสิ้นสุดหน้าจึงจะคลิกที่ปุ่มเพื่อพลิกหน้าได้ ทำให้ไม่สะดวกในการใช้งานเท่าที่ควร
3. เนื่องจากการสร้างบทเรียนต้องทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจ จึงมีการใส่รูปภาพเป็นจำนวนมาก ซึ่งทำให้ใช้เนื้อที่มาก ทำให้ทำการเคลื่อนย้ายโปรแกรมไม่สะดวกนัก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. เมื่อผู้ใช้เคลื่อนเมาท์ไปยังส่วนที่กำหนด โปรแกรมจะตอบสนองต่อเมาท์เท่านั้น เนื่องจากไม่ได้เขียนคำสั่งกำหนดให้ตอบสนองต่อคีย์บอร์ด
5. มีโปรแกรมช่วยคำนวณและแบบทดสอบเพียงบางหัวข้อเท่านั้น

การทำงานของโปรแกรม

1. เมื่อเข้าสู่โปรแกรมจะปรากฏหน้าจอแรก เมื่อผู้ใช้ต้องการคลิกไปที่หน้าต่อไปให้คลิก 1 ครั้ง ที่ปุ่ม “โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน” ก็เข้าสู่หน้าจอที่สองแนะนำหัวข้อที่นำมาทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน สักครู่หน้าจอก็จะเปลี่ยนเป็นหน้าจอเมนูหลัก



รูป หน้าจอแรกของโปรแกรม

2. ในหน้าจอเมนูหลัก ผู้ใช้สามารถเลือกศึกษาหัวข้อที่ต้องการศึกษาได้ตามต้องการ และถ้าต้องการเปลี่ยนหรือเลือกศึกษาหัวข้อแบบใด ผู้ใช้จะต้องกลับมาหน้าจอนี้เช่นกัน รวมทั้งถ้าผู้ใช้ต้องการออกจากโปรแกรมก็ต้องกลับมาหน้าจอนี้เช่นกัน โดยคลิกที่ปุ่ม exit เมื่อผู้ใช้ลาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อกำหนดปุ่มหน้าหัวข้อแล้วก็จะเปลี่ยนเป็นรูปมือ เมื่อต้องการศึกษาหัวข้อใดก็ให้คลิกเมื่อกำหนดในบริเวณปุ่มหน้าหัวข้อนั้น ๆ



รูป แสดงหน้าจอเมนูหลักในการใช้งานของโปรแกรม

- เมื่อผู้ใช้เลือกหัวข้อที่ต้องการศึกษาแล้วจะปรากฏหน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนสำหรับบางหัวข้อที่มีหัวข้อย่อยอีก หน้าจอแรกของบทเรียนก็จะเป็นเมนูย่อย ซึ่งจะมีบทเรียนให้เลือกศึกษาเป็นหัวข้อย่อยอีก โดยคลิกที่ปุ่มหน้าหัวข้อเพื่อเลือกบทเรียนได้อีก สำหรับหัวข้อที่เป็นหัวข้อหลักก็จะแสดงหน้าจอแรก เมื่อต้องการเข้าสู่บทเรียนสามารถคลิกที่รูปภาพหรืออปเจ็กที่กำหนดไว้ เมื่อต้องการกลับสู่เมนูหลักก็สามารถคลิกที่ปุ่มกลับสู่เมนู

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับหนึ่งโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข



ระเบียบวิธีของปีการ์ด

ระเบียบวิธีของออยเลอร์

ระเบียบวิธีของออยเลอร์ปรับปรุง

ระเบียบวิธีสามพจน์ของเทย์เลอร์

ระเบียบวิธีของรุงเง-กุตตา

ระเบียบวิธีหลายขั้น



รูป ตัวอย่างหน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนสำหรับหัวข้อที่มีหัวข้อย่อยให้เลือกศึกษา

การหาผลเฉลยของสมการ

เชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง



รูป ตัวอย่างหน้าจอแรกในการเข้าสู่บทเรียนสำหรับหัวข้อหลัก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. เมื่อเข้าสู่บทเรียน ในแต่ละหน้าจะมีขนาดแตกต่างกัน ถ้าหน้าใดมีขนาดใหญ่กว่าหน้าจอผู้เรียนสามารถเลื่อนแถบเลื่อนเพื่ออ่านได้ และในแต่ละหน้ามีปุ่มให้เลือกใช้งานดังนี้



ปุ่มคลิกไปยังหน้าก่อนนี้



ปุ่มคลิกไปยังเมนู



ปุ่มคลิกไปหน้าต่อไป



ระเบียบวิธีของออยเลอร์



พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น
 $y' = f(x, y)$
 ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น
 $y(x_0) = y_0$
 ตามที่ให้ออกมา f, f_y ต่อเนื่องที่
 ทุกจุด (x, y) ในบางสี่เหลี่ยมในระนาบ xy
 ที่บรรจุดจุด (x_0, y_0) ในที่นี้เราตามมติให้ปัญหา
 ค่าเริ่มต้นทุก ปัญหาที่เราพิจารณามีผลเฉลย
 เพียงค่าเดียวบนช่วงที่เราสนใจ เราให้ $y(x)$
 แทนผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นดังให้ค่า
 ของผล เฉลยที่จุด $x = x_n$ คือ $y(x_n)$

และให้ y_n แทนค่าประมาณของ
 ผลเฉลย $y(x_n)$ และ f_n แทน $f(x_n, y_n)$
 จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเรากลับว่า
 $y(x_0) = y_0$
 แต่โดยทั่วไปแล้ว
 $y(x_n) \neq y_n$ เมื่อ $n \geq 1$
 ในทำนองเดียวกัน
 $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ ไม่เท่ากับ $f_n = f(x_n, y_n)$
 เมื่อ $n \geq 1$

รูป หน้าจอบทเรียน



รูปหนังสือ คลิกที่นี่เมื่อต้องการดูบัญชีศัพท์
คลิกที่นี่เมื่อต้องการทราบประวัติของผู้คิดค้น โดยจะปรากฏประวัติผู้คิดค้นดังรูป

ประวัติของออยเลอร์

รูปหน้าจอเมื่อผู้เรียนต้องการทราบประวัติผู้คิดค้น

Euler, Leonhard (ออยเลอร์, เลออนฮาร์ด)
ค.ศ.1707-1783 เป็นชาวสวิสเซอร์แลนด์
Euler's constant ค่าคงตัวของออยเลอร์

ประวัติของออยเลอร์

สมมติให้ขนาดของช่วงมีค่าเท่ากับ h บนแกน x ดังนี้

$$x_n = x_0 + nh$$
 เนื่องจากเรารู้ค่า y_0 และ x_0 ความชันของเส้นสัมผัสของ
 เส้นโค้งตลอดจุด x_0 คือ

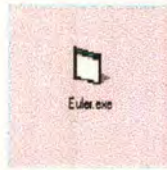
$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$
 ดังนั้นเราสามารถสร้างเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งตลอด
 จุด x_0 แล้วจะได้ค่าประมาณ y_1 ของ $y(x_1)$ โดยลากเส้นสัมผัส
 จาก x_0 ไป x_1 ดังรูป

ในบทเรียนเมื่อผู้ลากเมาท์ผ่านตัวอักษรใดแล้วเมาท์เปลี่ยนเป็นรูปมือ นั้นหมายความว่า
สามารถคลิกที่ค่านั้นเพื่อต้องการคำอธิบายเพิ่มเติม, คำอธิบายเพื่อความชัดเจนหรือเข้าใจยิ่งขึ้น,
การพิสูจน์หรือที่มาของสูตร เป็นต้น

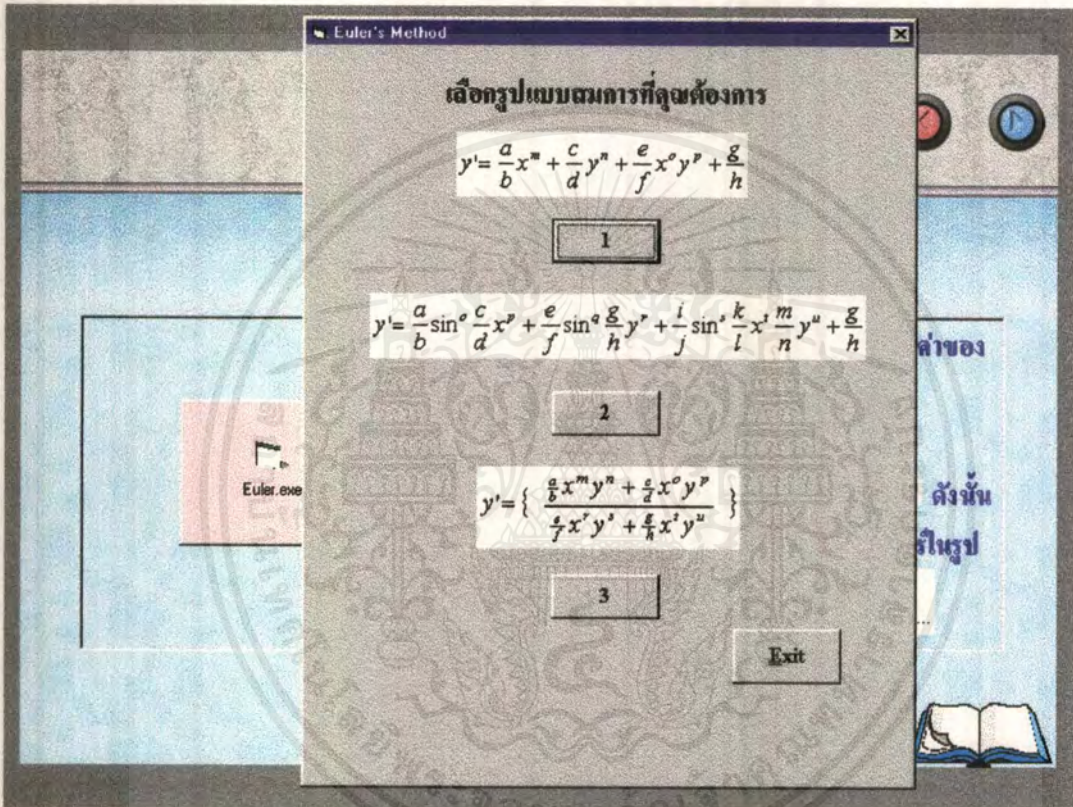
ในหัวข้อการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลข เมื่อ
ผู้ใช้ต้องการทดสอบ โปรแกรมช่วยคำนวณสามารถคลิกที่ปุ่มที่กำหนดไว้ก็จะปรากฏหน้าจอ

โปรแกรมช่วยคำนวณดังรูป

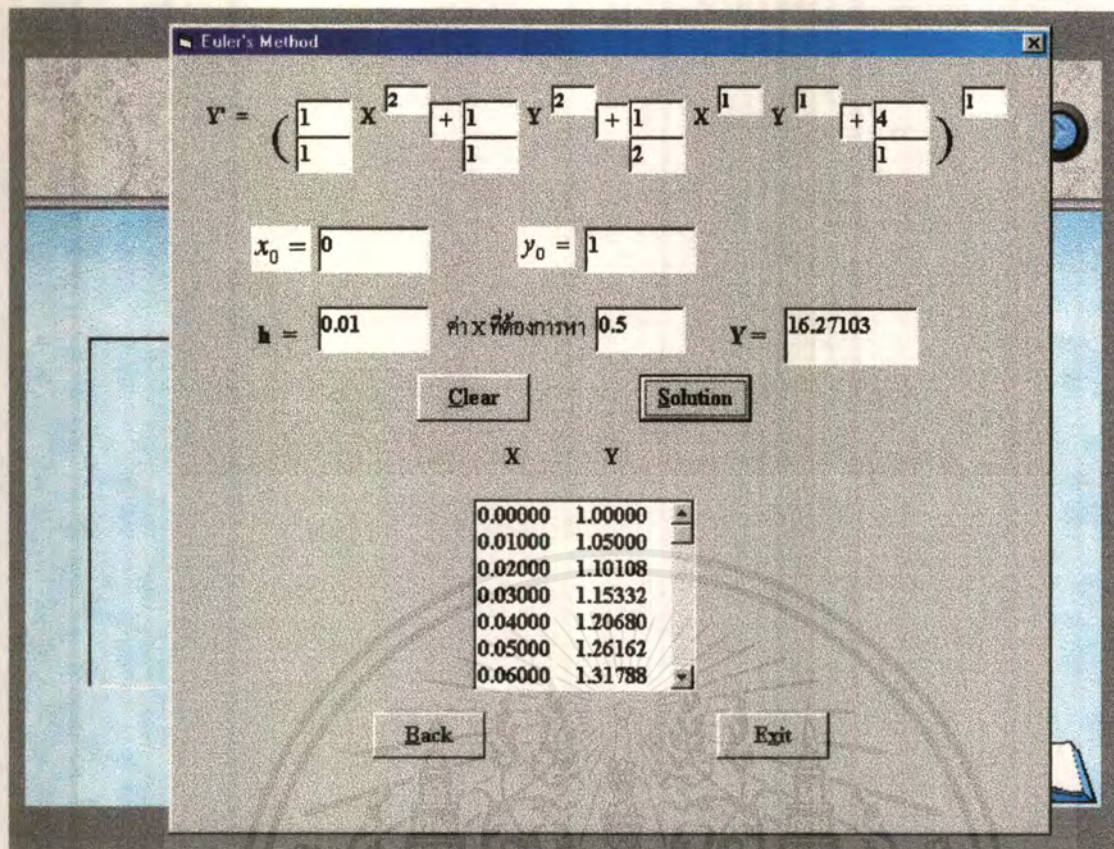
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ตัวอย่างปุ่มทดสอบโปรแกรมช่วยคำนวณ
เมื่อคลิกที่ปุ่มก็จะปรากฏหน้าจอ โปรแกรมช่วยคำนวณ ดังรูป



เมื่อผู้เรียนเลือกรูปแบบที่ต้องการก็จะปรากฏหน้าจอให้ผู้เลือกใช้เลือกใส่สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรเพื่อ
กำหนดสมการที่ต้องการที่ต้องการคำนวณ เมื่อได้สมการที่ต้องการหาค่าแล้วก็คลิกที่ปุ่มที่กำหนด
ไว้เพื่อหาผลเฉลย จากนั้นก็จะแสดงผลตามโจทย์ที่ผู้เรียนกำหนดไว้ดังรูป



รูปหน้าจอทดสอบโปรแกรม

ในบางหัวข้อเมื่อจบเนื้อหาแล้วจะมีแบบทดสอบความเข้าใจอย่างง่าย ๆ แบ่งเป็น 2 ชุดคือ ชุดที่ 1 จะมีโจทย์ตัวอย่างให้แล้วให้ผู้เรียนคลิกคำตอบดังรูป

จงหาค่าประมาณวิธีของรูมง-กูดกาอันดั้มที่สามเฉลย $y^{(0.5)}$ ของปัญหา

$$y' = y^2 + 1, y(0) = 0$$

โดยที่ $h = 0.1$



Back



Next

ให้ที่ $f(x, y) = y^2 + 1$

เมื่อให้รูปแบบของวิธีของรูมง-กูดกาอันดั้มที่

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

โดยที่ $k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3)$$

รูป ตัวอย่างโจทย์แบบที่ 1

ถ้าตอบถูกต้องก็จะแสดงข้อความว่า “คำตอบถูกต้อง” ถ้าตอบผิดก็จะแสดงข้อความว่า “คำตอบไม่ถูกต้อง” พร้อมเสียงประกอบด้วย

โจทย์

$$y' = y^2 + 1, y(0) = 0 \quad \text{โดยที่ } h = 0.1$$

เริ่มต้นที่ $n = 0 : x_0 = 0, y_0 = 0$

หาค่า y_1

จะได้ว่า $k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0, 0) =$

0.1

0.01

1.1

คำตอบไม่ถูก



คิดถูกก็มิ

โจทย์

$$y' = y^2 + 1; y(0) = 0 \quad \text{โดยที่ } h = 0.1$$



เริ่มต้นที่ $n = 0 : x_0 = 0, y_0 = 0$

หาค่า y_1

จะได้ว่า $k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0, 0) =$

- 0.1
- 0.01
- 1.1



รูป หน้าจอแสดงผลเมื่อตอบคำถามถูก

ชุดที่ 2 จะมีโจทย์ตัวอย่างให้แล้วให้ผู้ใช้คลิกคำตอบ เมื่อผู้เรียนไม่ต้องการเปลี่ยนคำตอบแล้วให้คลิกที่ปุ่มก็จะแสดงคะแนนให้ทราบ ถ้าตอบถูกทุกข้อก็จะแสดงหน้าจอแสดงความยินดี ถ้าตอบไม่ถูกทุกข้อก็จะแสดงหน้าจอแจ้งคะแนนให้ทราบว่าตอบถูกทั้งหมดกี่ข้อ โดยผู้เรียนสามารถกลับไปแก้ไขคำตอบหรือกลับไปทบทวนเนื้อหาได้ ตัวอย่างโจทย์แสดง ดังรูป

จงใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ โดยให้ $h = 0.1$

เพื่อประมาณค่าผลเฉลย $y(1.5)$ ของสมการ

$$y' = 2xy, \quad y(1) = 1$$

เริ่มคำนวณที่ $x = 0$ จากรูปแบบของรุงเง-คุตตาอันดับสี่จะได้

หน้าก่อนนี้

ไปหน้าต่อไป

$$k_1 = (0.1)f(x_0, y_0)$$

$$= (0.1)(2x_0 y_0) = \sqrt{a}$$

$$k_2 = (0.1)f\left(x_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.2}{2}\right)$$

$$= (0.1)2\left(x_0 + \frac{0.1}{2}\right)\left(y_0 + \frac{0.2}{2}\right)$$

$$= 0.231$$

$$k_3 = (0.1)f\left(x_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \sqrt{\frac{b}{2}}\right)$$

$$= \sqrt{c}$$

$$k_4 = (0.1)f\left(x_0 + 0.1, y_0 + \sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$= (0.1)(x_0 + 0.1)(y_0 + \sqrt{\frac{c}{2}})$$

$$= 0.2715361$$

ดังนั้น

$$y_1 = \sqrt{a} + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$= \sqrt{a} + \frac{1}{6}[0.2 + 2(0.231) + 2(0.234255) + 0.2715361]$$

$$= 1.23367435$$

เมื่อคำนวณต่อไปเรื่อย ๆ จะได้ผลเฉลย

$$y(1.5) = 3.4902$$

รูปตัวอย่าง โจทย์แบบที่ 2



จากโจทย์ จะได้ว่า

a มีค่าเท่ากับ 0.02 0.2 2.00

b มีค่าเท่ากับ 0.1155 0.2 0.231

c มีค่าเท่ากับ 0.231 0.2433 0.2343

d มีค่าเท่ากับ 0.1 0.231 0.2343

เมื่อคุณมั่นใจในคำตอบแล้ว คลิกที่นี่เพื่อตรวจสอบคำตอบได้เลย

รูป ตัวอย่าง โจทย์แบบที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป หน้าจอแสดงผลเมื่อตอบคำถามถูกทุกข้อ



รูป หน้าจอแสดงผลเมื่อตอบคำถามถูกไม่ทุกข้อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในบทเรียนเมื่อผู้ใช้ต้องการทราบคำอธิบายศัพท์ภาษาอังกฤษ สามารถคลิกที่รูปหนังสือ 1 ครั้ง ก็จะพลิกหน้าจอไปหน้าจอบัญญัติศัพท์ เมื่อต้องการกลับไปหน้าจอเดิมก็คลิกที่รูป 1 ครั้ง



ปุ่มรูปหนังสือ เพื่อพลิกกลับไปหน้าจอเดิมก่อนจะพลิกมาหน้าจอบัญญัติศัพท์



รูป หน้าจอบัญญัติศัพท์

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

เนื่องจากวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจะเกี่ยวข้องกับการคำนวณ ดังนั้นจึงต้องนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการคำนวณ และเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพทางการศึกษามากขึ้น ดังนั้น การนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการเรียนการสอนจึงเป็นทางเลือกที่ดีทางหนึ่ง โดยการสร้างโปรแกรมช่วยการเรียนการสอนสำหรับวิชานี้ และมีโปรแกรมช่วยคำนวณให้ผู้ใช้ได้ทดสอบภายในขอบเขตที่กำหนดไว้ และมีการนำระบบมัลติมีเดียมาช่วยเสริม ซึ่งจะเป็นการเพิ่มความรวดเร็ว ประสิทธิภาพ และทักษะในการเรียนการสอน เพราะว่าจะทำให้เกิดความสนใจ ไม่เบื่อหน่าย และมีความตื่นตัวที่จะเรียน

สำหรับการสร้างโปรแกรมช่วยการเรียนการสอนเรื่อง “การวิเคราะห์เชิงตัวเลข สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ” โดยนำระบบมัลติมีเดียมาช่วยในครั้งนี้ ได้เกิดปัญหาระหว่างการสร้างดังนี้

1. เนื่องจากเนื้อหาของวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีค่อนข้างมาก และมีข้อจำกัดเรื่องเวลาในการศึกษาของผู้เรียนเพื่อป้องกันการความเบื่อหน่าย ดังนั้นจึงได้ตัดเนื้อหาบางส่วนให้เหมาะสมกับเวลา

2. เนื่องจากระยะเวลาในการพัฒนาโปรแกรมมีอยู่อย่างจำกัด ทำให้ไม่สามารถหาข้อมูลและเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาได้ครบทุกประเภทของมัลติมีเดีย อีกทั้งโปรแกรมช่วยคำนวณก็สามารถทำการทดสอบได้ในขอบเขตที่จำกัด

หลังจากที่ได้ดำเนินงานมาตั้งแต่ต้นจนบรรลุวัตถุประสงค์ได้พบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้นยังขาดความสมบูรณ์บางประการ เช่น เนื้อหาของบทเรียนบางหัวข้อยังขาดแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัดอาจจะมีไม่ครบทุกหัวข้อตามเนื้อหา เพราะว่าการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้น เป็นการถ่ายทอดความคิดและจินตนาการของผู้ออกแบบมาเป็นตัวโปรแกรม ต้องอาศัยพื้นฐานความรู้และความคิดของผู้ออกเป็นหลัก แต่เนื่องจากปัญหาพิเศษนี้จำกัดด้วยระยะเวลา ถ้าหากทุ่มเทให้การออกแบบบทเรียนหัวข้อใดหัวข้อหนึ่ง ก็จะไม่มีความเวลาไปออกแบบบทเรียนหัวข้ออื่น นอกจากนี้การถ่ายทอดเนื้อหาอาจจะไม่ชัดเจนพอ ในบางหัวข้ออาจจะมีรายละเอียด, ตัวอย่างมาก บางหัวข้อมีน้อย เนื่องจากว่าในหนังสือที่ค้นคว้ามาให้มีความสำคัญในแต่ละหัวข้อแตกต่างกัน หรือในบางเล่มจะกล่าวถึงระเบียบวิธีที่สำคัญและนิยมเท่านั้น และมีโปรแกรมช่วยคำนวณในบางหัวข้อที่สำคัญเท่านั้นและยังมีขอบเขตในการรับข้อมูลอีกด้วย

อย่างไรก็ดี โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่พัฒนาขึ้นนี้ สามารถเป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนขึ้นมาใหม่ สำหรับการปรับปรุงและพัฒนางานด้านโปรแกรมช่วยการเรียนการสอนที่ดีต่อไป

ข้อเสนอแนะ

1. การสร้างบทเรียนของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนี้ค่อนข้างยุ่งยาก ดังนั้นควรใช้เวลาในการเตรียมการผลิตให้มากพอสมควร
2. ควรเลือกเนื้อหาที่จะนำมาสร้างเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้น ควรพิจารณาให้รอบคอบว่าจะใช้ประโยชน์จากจุดเด่นของโปรแกรม และระบบมัลติมีเดียได้เต็มประสิทธิภาพอย่างไร จึงจะทำให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้นมีคุณค่าต่อการเรียนการสอนอย่างแท้จริง
3. การออกแบบบทเรียนควรใช้บทเรียนที่มีแนวการสอนหลายแบบ เพื่อให้เหมาะสมกับคนที่มีความรู้ หรือมีความสามารถต่างกัน
4. ควรทำการศึกษา ทักษะคิด ความคิดเห็นของผู้เรียนและผู้สอน เพื่อเป็นแนวทางในการปรับปรุงแก้ไข เพื่อให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น
5. ควรทำการปรับปรุงโปรแกรมช่วยคำนวณให้สามารถใช้ได้กับฟังก์ชันทุกฟังก์ชัน

บรรณานุกรม

1. กัดคินี ชิตสกุล, การวิเคราะห์เชิงตัวเลข, โครงการตำรา : คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2535
2. รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข, การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเบื้องต้น, โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
3. Boyce, William E. , Elementary differential equations and boundary value problem, 6 th ed. ,1997
4. Celia, Michael A. , Numerical methods for differential Equations : Prentice-Hall, Inc. Simon & Schuster Company, 1995
5. Denniz G.Zill, Michael R. Cullen, Advanced Engineering Mathematics : PWS Publishing Company
6. Polking,, John C. , Ordinary Equations : Prentice-Hall, Inc. A. Simon & Schuster Company, 1995
7. Robert L Borrelli, Courtney S. Coleman, Differential Equations : A Modeling Perspective, 1996
8. Ross, Shepley L. , Introduction to Ordinary Differential Equations : John Wiley & Sons, Inc. ,1980
9. Schaum's Outline of Theory and Problem of Differential Equations, McGraw_Hill, 1994
10. Stephen L. Campbell, Richard Haberman, Introduction to Differential Equations with Boundary Value Problem, Houghton Mifflin Company, 1996