การหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

นางสาวกนกอร ยอดสร้อย 38054101
นางสาวศศิกาญจน์ เสถียรรุจิกานนท์ 38054157

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2541

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

MISS KANOK- ORN	YODSOI	38054101
MISS SASIKAN	SATHEINRUJIKANON	38054157

A Special Project Submitted in Partial Fulfillment of the

Requirement for the Degree of Bachelor of Science

Department of Apply Mathematics and Computer Sciences

Faculty of Science

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

1998

ปัญหาพิเศษเรื่อง การหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

ชื่อนักศึกษา นางสาวกนกอร ยอดสร้อย 38054101

นางสาวศศิกาญจน์ เสถียรรุจิกานนท์ 38054157

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล

ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ประจำปีการศึกษา 2541

(รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการโครงงานพิเศษ

(รองศาสตราจารย์ไมตรี โพธิ์สุข)
ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุนทร สุชาติเวชภูมิ)
กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

ปัญหาพิเศษเรื่อง การหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

ชื่อนักศึกษา นางสาวกนกอร ยอดสร้อย 38054101
นางสาวศศิกาญจน์ เสถียรุจิกานนท์ 38054157

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล
ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2541

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและสร้างโปรแกรมในการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง โดยใช้วิธี Power, QR, Jacobi, Bisection, Lanczos และ Diagonalization ในการแก้ปัญหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง และแสดงผลการคำนวณที่ถูกต้อง โดยแต่ละวิธีจะใช้เทคนิคพิเศษที่แตกต่างกันในการคำนวณ การสร้างโปรแกรม "หาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง" แบ่งเป็นสองขั้นตอน คือ ขั้นตอนแรกทำการศึกษาทฤษฎีที่ใช้ในการคำนวณ ขั้นตอนที่สองคือการออกแบบและทำการเขียนโปรแกรม

นอกจากนี้ยังสามารถเป็นแนวทางในการแก้ไขของนักศึกษาที่กำลังศึกษาในหัวข้อนี้และผู้สนใจในการศึกษาและพัฒนาโปรแกรมขึ้นใช้เองต่อไป

Special Topic Eigenvalue and Eigenvector

Student Miss Kanokorn Yodsoi 38054101

Miss Sasikan Satheinrujikanon 38054157

Advisor Mrs. Pakkinee Chitsakul

Miss Patcharin Hemchot

Department Mathematics and Computer Science

Year 1998

Abstract

The special project of this issue has the objective in order to study and create software dealing with Eigenvalue and Eigenvector which uses Power Method, QR Method, Jacobi Method, Bisection Method, Lanczos Method and Diagonalization to solve eigenvalue problems and report the success of the project Each method has its distinct technique in calculation. The creating program has been divided into two steps these are

1. To study theorems that one used in writing program
2. To design and write the program

Besides this, it is useful for students or users who are studing about These topics or want to develop this software themselves in the future.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดีก็เพราะหลายเหตุปัจจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล

ผู้ช่วยศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ

ที่ได้ให้แนวทางในการดำเนินการ ตลอดจนคำปรึกษาอันก่อให้เกิดแนวความคิดที่สามารถแก้ไขปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นในระหว่างการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ นอกจากนี้ยังช่วยแนะนำแนวทางในการดำเนินงานและตรวจทานแก้ไขด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ผู้จัดทำ จนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณ

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

ปัจจุบันคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีความสำคัญต่อชีวิตประจำวันของมนุษย์และยังสำคัญต่อการพัฒนาวิทยาการใหม่ๆอีกด้วย

ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง (Eigenvalues and Eigenvectors) เป็นหัวข้อหนึ่งที่มีความสำคัญในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ซึ่งมีความสำคัญในการพัฒนาความคิดใหม่ๆ ซึ่งมีประโยชน์ต่อชีวิตมนุษย์ แต่เนื่องจากการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงมีความยุ่งยากและซับซ้อน เพื่อให้สามารถศึกษาและหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น จึงมีความประสงค์ที่จะนำเสนอโปรแกรมแก้ปัญหาการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาวิธีการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง
2. เพื่อสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง
3. เพื่อลดความยุ่งยากและเวลาในการแก้ปัญหาการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะสามารถหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน โดยวิธีดังนี้

1. วิธีกำลัง (Power Method)
2. วิธี QR
   2.1 QR factorization โดยใช้ Plane rotation
   2.2 QR factorization โดยใช้ Householder reflection
3. วิธี Bisection
4. วิธี Lanczos
5. วิธี Jacobi สำหรับเมทริกซ์สมมาตร
6. วิธี Diagonalization

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาหัวข้อที่น่าสนใจและน่านำเสนอ
2. ทำการศึกษาที่มาและขั้นตอนของแต่ละวิธีที่จะนำมาใช้
3. ทำการศึกษาและเลือก Tool ที่เหมาะสมสำหรับโปรแกรมนี้
4. เขียนโปรแกรม
5. ตรวจสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้น ให้มีความถูกต้องตามความเป็นจริง

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ

1. สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่ต้องการได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว
2. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาและพัฒนาการแก้ปัญหาในการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง อย่างมีประสิทธิภาพ
3. ได้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการแก้ปัญหาการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

1.6 การวางแผนงาน

....ภาคเรียนที่1...

2 มิ.ย. – 15 มิ.ย.	ศึกษาปัญหาและที่มาของหัวข้อปัญหาพิเศษ
16 มิ.ย. – 30 มิ.ย.	ศึกษา software, ขอบเขตและความเป็นไปได้ที่จะดำเนินงาน
1 ก.ค. – 7 ก.ค.	จัดทำแบบขออนุมัติทำปัญหาพิเศษ
8 ก.ค. – 11 ก.ค.	ศึกษา software ที่ใช้
12 ก.ค. – 28 ก.ย.	ศึกษาทฤษฎีและหลักเกณฑ์ที่เกี่ยวข้อง
29 ก.ย. – 8 ต.ค.	สอบปลายภาค

....ภาคเรียนที่2...

1 พ.ย. – 15 พ.ย.	ออกแบบ interface
16 พ.ย. – 31 ธ.ค.	เขียนโปรแกรมโดยใช้ Delphi 3.0
1 ม.ค. – 15 ก.พ.	ทดสอบและแก้ไขโปรแกรม
16 ก.พ. – 28 ก.พ.	ทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

บทที่ 2

ทฤษฎีและนิยามต่าง ๆ ที่นำมาใช้

2.1 ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

กำหนดเมทริกซ์จตุรัส อันดับที่ n : A และเวกเตอร์ในรูปเมทริกซ์ หลักอันดับที่ n : X โดย A และ X เป็นเวกเตอร์ที่สามารถคูณกันได้ -เป็นเวกเตอร์หลัก Y

$$AX = Y \tag{2.1}$$

โดยทั่วๆไปแล้ว เวกเตอร์ Y และ X จะมีขนาดและทิศทางที่ต่างกัน แต่ถ้า Y มีทิศทางเดียวกับ X แล้ว $Y = \lambda X$ เมื่อ λ เป็นสเกลาร์ใดๆ ดังนั้น

$$AX = \lambda X \tag{2.2}$$

สมการที่ (2.2) นี้เรียกว่า *สมการเวกเตอร์เจาะจง (eigen vector equation)* เมื่อ A และ X ไม่ใช่เมทริกซ์ศูนย์

พิจารณากรณีเมทริกซ์จตุรัสอันดับที่สอง

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

แทนใน (2.2)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$ax_1 + bx_2 = \lambda x_1$$

$$cx_1 + dx_2 = \lambda x_2$$

หรือ

$$(a - \lambda)x_1 + bx_2 = 0$$

$$cx_1 + (d - \lambda)x_2 = 0 \tag{2.3}$$

สามารถเขียนในรูปผลคูณของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x \neq 0$ ดังนั้น ตัวกำหนดทางสัมประสิทธิ์ $p(\lambda) = 0$ โดย

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \det(A-\lambda I) = 0 \qquad (2.4)$$

สมการ (2.4) เรียกว่า *สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)* ของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= ad - \lambda d - a\lambda + \lambda^2 - bc \\ &= \lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad-bc) = 0 \qquad (2.5) \end{aligned}$$

ราก λ_1 และ λ_2 ของสมการ (2.5) คือ *ค่าเจาะจง (eigen value)* ของเวกเตอร์ A

จากสมการ (2.3) $$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\lambda-a}{b}=\frac{c}{\lambda-d} \qquad (2.6)$$

โดยการแทน $\lambda=\lambda_1$ ใน (2.6) ได้อัตราส่วน

$$r_1 = \frac{\lambda_1-a}{b}=\frac{x_2}{x_1} \qquad (2.7)$$

ดังนั้น $x_2 = r_1x_1$ ในทำงานเดียวกันโดยการแทน $\lambda=\lambda_2$ ใน (2.7) ได้

$$r_2 = \frac{\lambda_2-a}{b}=\frac{x_2}{x_1} \qquad (2.8)$$

ดังนั้น $x_2 = r_2 x_1$

ดังนั้นจะได้ สองเวกเตอร์

$$X_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ r_1x_1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad X_2=\begin{bmatrix} x_1 \\ r_2x_1 \end{bmatrix}$$

โดยเวกเตอร์ X_1 สมนัยกับค่าเจาะจง λ_1 และเวกเตอร์ X_2 สมนัยกับค่าเจาะจง λ_2 เรียก *เวกเตอร์เจาะจง* สำหรับแต่ละค่าเจาะจง

โดยรูปทั่วไป $p(\lambda)$ จะอยู่ในรูปพหุนาม

$$p(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\ldots+c_{n-1}\lambda+c_n \qquad (2.9)$$

โดย $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ ที่เป็นรากของสมการ $p(\lambda)=0$ คือ ค่าเจาะจงของเวกเตอร์ A แต่ละ λ จะมี $X \neq 0$ ที่สมนัยกัน เรียกว่า *เวกเตอร์เจาะจง (eigen vector)*

จาก (2.9) ถ้า $\lambda = 0$ จะได้

$$p(0)=c_n \qquad (2.10)$$

เนื่องจาก $p(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ ดังนั้น

$$p(0)=\det(-A)=(-1)^n\det A \qquad (2.11)$$

แล้ว $c_n=(-1)^n\det(A)$

จาก (2.9) ถ้า A มีค่าเจาะจงที่แตกต่างกัน $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ แล้ว

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) + (\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) \qquad (2.12)$$

แทน λ = 0 ใน (2.12) แล้ว

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n \qquad (2.13)$$

เปรียบเทียบ (2.10), (2.11) และ (2.13) ได้ว่า

$$p(0) = c_n = (-1)^n \det A = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n$$

นั่นคือ $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n$ หรือตัวกำหนดของเมทริกซ์จตุรัส A มีค่าเท่ากับผลคูณของค่าเจาะจงของ A และถ้า det A = 0 แล้ว A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน นั่นคือต้องมีค่าเจาะจงอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นศูนย์

จาก (2.2) คู่ลำดับ (λ, X) เรียกว่า *คู่ลำดับเจาะจง* ประกอบด้วยค่าเจาะจง λ และเวกเตอร์ X และถ้า X เป็นเวกเตอร์เจาะจงหนึ่งของ A แล้ว ค่าใดๆ ที่คูณกับ X จะเป็นเวกเตอร์เจาะจงด้วย เช่น คูณ (2.2) ด้วย 2 ได้ว่า

$$2AX = 2\lambda X$$

หรือเขียนได้ว่า

$$A(2X) = \lambda(2X)$$

ดังนั้น (λ, 2X) เป็นคู่ลำดับเจาะจง ถ้า (λ, X) เป็นคู่ลำดับเจาะจง และถ้าจำกัดตัวที่นำมาคูณกับเวกเตอร์เจาะจงออกไป เรียกว่า การสู่รูปปกติ (normalized) ซึ่งขนาดของเวกเตอร์ คือ 1 ถ้า X เป็นการสู่รูปปกติ ปัญหาค่าเจาะจง คือ ต้องการหาค่าเจาะจง (λ) และเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัย (X) โดย

$$AX = \lambda X$$

และ

$$X^T X = 1$$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจงของ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$$

$$2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-4) = 0$$

$$\lambda = 4, -1$$

ค่าเจาะจงคือ 4 และ -1

สำหรับ $\lambda = 4$

สมมติเวกเตอร์ที่สมนัยกับ $\lambda = 4$ คือ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} (1-4)x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (2-4)x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

แล้ว $x_1 = x_2$

ให้ $x_1 = a$ แล้ว $x_2 = a$; $a \neq 0$

ดังนั้นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง 4 คือ $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$; $a \neq 0$

สำหรับ $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} (1-(-1))x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (2-(-1))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

หรือ $2x_1 + 3x_2 = 0$

แล้ว $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$

ให้ $x_1 = b$ แล้ว $x_2 = -\frac{2}{3}b$; $b \neq 0$

ดังนั้นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง -1 คือ $\begin{bmatrix} b \\ -\frac{2}{3}b \end{bmatrix}$; $b \neq 0$

2.1.1 การหาสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) และค่ากำหนด (Determinant) ของเมทริกซ์ โดยวิธีของแมกซิมโบเชอร์ (Maxim Bocher)

ก่อนอื่นขอนิยามคำว่า *ผลบวกเฉียง (Trace) ของเมทริกซ์*

นิยาม ถ้า $A = (a_{ij})$ เป็น nxn เมทริกซ์ เราจะนิยามผลบวกเฉียงของ A คือ

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

โดยปกติ ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด nxn ใดๆ เราสามารถหาสมการลักษณะเฉพาะของ A ได้จาก

$$|A - \lambda I| = 0$$

หรือ

$$|\lambda I - A| = 0 \qquad (2.14)$$

ในที่นี้ λ เป็นค่าเจาะจงของ A

ซึ่งเมื่อกระจายดีเทอร์มิแนนท์ทางซ้ายมือของ (2.14) แล้วจะได้สมการดังนี้

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \qquad (2.15)$$

สมการ (2.15) เราเรียกว่า *สมการลักษณะเฉพาะของ A* จากนั้นเราก็ทำการแยกแฟคเตอร์ หรือใช้วิธีทางการวิเคราะห์ตัวเลข (Numerical method) ซึ่งเลือกใช้วิธีการของแบร์สโตว์ เพื่อหารากของสมการ (2.15) ออกมาได้ n ค่า สมมติว่ารากทั้ง n ค่านั้น คือ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

ค่า λ เหล่านี้ เราเรียกว่า *ค่าเจาะจงของ A*

คุณสมบัติที่สำคัญของค่ารากเจาะจง คือ

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = Tr(A) \qquad (2.16)$$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_n = \det(A) \qquad (2.17)$$

แมกซิมโบเชอร์ (Maxim Bocher) ได้ให้ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกเฉียง (Trace) ของเมทริกซ์กับสัมประสิทธิ์ของสมการลักษณะเฉพาะ (2.15) ไว้ดังนี้

ถ้าเราให้

$$s_1 = Tr(A),\ s_2 = Tr(A^2),\ s_3 = Tr(A^3), \ldots,\ s_n = Tr(A^n)$$

แล้วจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ (Coefficients) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ของสมการลักษณะเฉพาะ (2.15) จะเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -s_1 \\
c_2 &= -\frac{1}{2}(c_1 s_1 + s_2) \\
c_3 &= -\frac{1}{3}(c_2 s_1 + c_1 s_2 + s_3)
\end{aligned}
$$

$$c_n = -\frac{1}{n}(c_{n-1}s_1 + c_{n-2}s_2 + \ldots + c_1 s_{n-1} + s_n)$$

และได้อีกว่า

$$\det(A) = (-1)^n c_n$$

ตัวอย่าง 2.2 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tr(A) = 2+(-1)+3 = 4

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$Tr(A^2)$ = 5+1+10 = 16

$$A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 20 \\ 0 & -1 & 0 \\ 20 & 20 & 35 \end{bmatrix}$$

$Tr(A^3)$ = 15+(-1)+35 = 49

จาก $s_1 = Tr(A)$, $s_2 = Tr(A^2)$, $s_3 = Tr(A^3)$, ..., $s_n = Tr(A^n)$
ดังนั้น $s_1 = 4$, $s_2 = 16$ และ $s_3 = 49$
จะได้

$$c_1 = -s_1 = -4$$
$$c_2 = -\frac{1}{2}(c_1 s_1 + s_2) = -\frac{1}{2}((-4)(4)+16) = 0$$
$$c_3 = -\frac{1}{3}(c_2 s_1 + c_1 s_2 + s_3) = -\frac{1}{3}((0)(4)+(-4)(16)+49) = 5$$

จากสมการ (2.15)

จะได้ $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 0\lambda + 5 = 0$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5 = 0$$

$\therefore$ สมการลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5 = 0$

2.1.2 วิธีการของแบร์สโตร์ (Bairstow's Method)

เป็นระเบียบวิธีการทำซ้ำที่ใช้การหารสังเคราะห์ด้วยตัวประกอบกำลังสอง (quadratic synthetic division)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

เป็นพหุนามที่ได้จากวิธี Maxim Bocher

$$P(x) = (x^2 - sx - t)\, q(x) + b_1(x-s) + b_0 = 0$$

เป็นตัวประกอบกำลังสอง

$$q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + b_{n-2}x^{n-4} + \ldots + b_3 x + b_2 = 0$$

เป็นพหุนามที่ได้จากการหารสังเคราะห์

จะได้

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^n b_n x^{n-2} - sx\, b_n x^{n-2} - t\, b_n x^{n-2} \\
&\quad + x^2 b_{n-1} x^{n-3} - sx\, b_{n-1} x^{n-3} - t\, b_{n-1} x^{n-3} \\
&\quad + x^2 b_{n-2} x^{n-4} - sx\, b_{n-2} x^{n-4} - t\, b_{n-2} x^{n-4} + \ldots \\
&= b_n x^n - s b_n x^{n-1} - t b_n x^{n-2} \\
&\qquad + b_{n-1} x^{n-1} - s b_{n-1} x^{n-2} - t b_{n-1} x^{n-3} \\
&\qquad\qquad + b_{n-2} x^{n-2} - s b_{n-2} x^{n-3} + \ldots \\
&= b_n x^n + (b_{n-1} - s b_n) x^{n-1} + (b_{n-2} - s b_{n-1} - t b_n) x^{n-2} + \ldots
\end{aligned}$$

$$a_n = b_n \qquad\qquad b_n = a_n$$
$$a_{n-1} = b_{n-1} - s b_n \qquad\qquad b_{n-1} = a_{n-1} + s b_n$$
$$a_{n-2} = b_{n-2} - s b_{n-1} - t b_n \qquad\qquad b_{n-2} = a_{n-2} + s b_{n-1} + t b_n$$

ในรูปทั่วไป $b_k = a_k + s b_{k+1} + t b_{k+2}$ $\qquad k = n-2, n-3, \ldots, 1, 0$

ในการหาสัมประสิทธิ์ $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ สร้างตารางได้ดังนี้

K	a_k	(s)	(t)	b_k
N	a_n	-	-	b_n
n-1	a_{n-1}	$s\, b_n$	-	b_{n-1}
n-2	a_{n-2}	$s\, b_{n-1}$	$t\, b_n$	b_{n-2}
n-3	a_{n-3}	$s\, b_{n-2}$	$t\, b_{n-1}$	b_{n-3}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
1	a_1	$s\, b_2$	$t\, b_3$	b_1
0	a_0	$s\, b_1$	$t\, b_2$	b_0

จากการหาร $P(x) = 0$ ด้วย $x^2 - sx - t$ ถ้า b_0 และ b_1 เป็นศูนย์ทั้งคู่แล้ว $x^2 - sx - t$ ก็จะเป็นตัวประกอบของ $P(x)$

b_0 และ b_1 เป็นฟังก์ชันพหุนามของ s และ t โดย

$$b_1(s,t) = 0$$

และ $$b_0(s,t) = 0$$

ใช้อนุกรมของเทย์เลอร์กระจาย b_0 และ b_1 รอบ (s_0, t_0)

$$b_1(s,t) = b_1(s_0,t_0) + (s-s_0)\frac{\partial b_1}{\partial s} + (t-t_0)\frac{\partial b_1}{\partial t} + \ldots$$

$$b_0(s,t) = b_0(s_0,t_0) + (s-s_0)\frac{\partial b_0}{\partial s} + (t-t_0)\frac{\partial b_0}{\partial t} + \ldots$$

ถ้า $(s_0, t_0) \rightarrow (s^*, t^*)$ เพียงพอและตัดพจน์กำลังสองทิ้งไป

$$0 = b_1(s^*,t^*) = b_1(s_0,t_0) + (s^*-s_0)\frac{\partial b_1}{\partial s} + (t^*-t_0)\frac{\partial b_1}{\partial t}$$

$$0 = b_0(s^*,t^*) = b_0(s_0,t_0) + (s^*-s_0)\frac{\partial b_0}{\partial s} + (t^*-t_0)\frac{\partial b_0}{\partial t}$$

$s_1 = s_0 + \delta$ และ $t_1 = t_0 + \tau$ เป็นค่าประมาณ s^*, t^*

$$s^* - s_0 = \delta = s_1 - s_0 \quad \text{และ} \quad t^* - t_0 = \tau = t_1 - t_0$$

$$\delta \frac{\partial b_1}{\partial s} + \tau \frac{\partial b_1}{\partial t} = -b_1$$

$$\delta \frac{\partial b_0}{\partial s} + \tau \frac{\partial b_0}{\partial t} = -b_0$$

2.2 วิธีกำลัง

วิธีกำลัง (The Power Method) เป็นวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

A เป็นเมทริกซ์จตุรัสอันดับที่ n และ λ_1 เป็นเวกเตอร์เจาะจงใดๆ ซึ่ง

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$$

ในการทำซ้ำเพื่อคำนวณ λ_1 นั้น เริ่มแรกเลือกเวกเตอร์ $X^{(0)}$ โดย

$$X^0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากนั้นหาผลคูณของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ $X^{(0)}$ ที่เลือกมานั้น

$$AX^{(0)} = Y^{(1)} = \lambda^{(1)} \frac{Y^{(1)}}{\lambda^{(1)}} = \lambda^{(1)} X^{(1)}$$

ในที่นี้ $\lambda^{(1)}$ คือส่วนประกอบสัมบูรณ์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดของ $Y^{(1)}$

ต่อไปหาผลคูณของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ $X^{(1)}$

$$AX^{(1)} = Y^{(2)} = \lambda^{(2)} \frac{Y^{(2)}}{\lambda^{(2)}} = \lambda^{(2)} X^{(2)}$$

ในที่นี้ $\lambda^{(2)}$ คือส่วนประกอบสัมบูรณ์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดของ $Y^{(2)}$

ต่อไปหาผลคูณของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ $X^{(3)}$

$$AX^{(2)} = Y^{(3)} = \lambda^{(3)} \frac{Y^{(3)}}{\lambda^{(3)}} = \lambda^{(3)} X^{(3)}$$

ในที่นี้ $\lambda^{(3)}$ คือส่วนประกอบสัมบูรณ์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดของ $Y^{(3)}$
ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ในรูปทั่วไปคือ

$$AX^{(k-1)} = Y^{(k)} = \lambda^{(k)} \frac{Y^{(k)}}{\lambda^{(k)}} = \lambda^{(k)} X^{(k)}$$

โดย $\lambda^{(k)}$ คือส่วนประกอบสัมบูรณ์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดของ $Y^{(k)}$
เมื่อ $k \to \infty$ แล้ว $\lambda^{(k)} \to \lambda_1$ และ $X^{(k)} \to X$

ตัวอย่าง 2.3 จงหาค่าเจาะจงที่มีค่าสัมบูรณ์ที่ใหญ่ที่สุด และเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจงดังกล่าวของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> จากการคำนวณโดยวิธีทางพีชคณิต ได้ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง ดังตารางข้างล่างนี้

λ	x_1	x_2	x_3
$2-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1
2	-1	0	1
$2+\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{2}$	1

สำหรับการคำนวณโดยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขนี้ เริ่มแรกสมมติ

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แล้วนำไปคูณกับ A แล้วเลือก $x^{(1)}$ ดังวิธีการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3/4 \\ -1 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -7/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 5/7 \\ -1 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/7 \\ -1 \\ 5/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/7 \\ -24/7 \\ 17/7 \end{bmatrix} = \frac{24}{7}\begin{bmatrix} 17/24 \\ -1 \\ 17/24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17/24 \\ -1 \\ 17/24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58/24 \\ -82/24 \\ 58/24 \end{bmatrix} = \frac{82}{24}\begin{bmatrix} 58/82 \\ -1 \\ 58/82 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58/82 \\ -1 \\ 58/82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 198/82 \\ -280/82 \\ 198/82 \end{bmatrix} = \frac{280}{82}\begin{bmatrix} 198/280 \\ -1 \\ 198/280 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 198/280 \\ -1 \\ 198/280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 676/280 \\ -956/280 \\ 676/280 \end{bmatrix} = \frac{956}{280}\begin{bmatrix} 676/956 \\ -1 \\ 676/956 \end{bmatrix}$$

ค่าเจาะจงคือ 3.4142857 และเวกเตอร์เจาะจงคือ $[\,0.7071129 \quad -1 \quad 0.7071129]^T$

โดยทำการซ้ำไปเรื่อยๆ จน k มีค่ามากๆ $(k \to \infty)$ แล้วจะพบว่าค่าเจาะจงเข้าใกล้ $2+\sqrt{2}$ และเวกเตอร์เจาะจงเข้าใกล้ $\left[1/\sqrt{2} \quad -1 \quad 1/\sqrt{2}\right]^T$ และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับผลเฉลยทางพีชคณิต ได้ว่า $\left[1/\sqrt{2} \quad -1 \quad 1/\sqrt{2}\right]^T = 1/\sqrt{2}\left[1 \quad -\sqrt{2} \quad 1\right]^T$

2.3 QR Factorization

2.3.1 QR Factorization โดยใช้ plane rotation

Plane rotation

ในเมทริกซ์ R^2 ซึ่งหมุนระนาบไปเป็นมุม θ จะได้เมทริกซ์

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ ซึ่งทำให้ } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

โดยที่ R เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก(Orthogonal matrix) และเมทริกซ์ rotation สามารถใช้กำจัดสมาชิกของเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างให้เป็นศูนย์ได้ โดยใช้

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+c^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ถ้า $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{c}{a}\right)$ (2.18)

ใน R^3 ระนาบหมุนอยู่ในระนาบ (1,3) จะได้เมทริกซ์ transformation ดังนี้

$$R = R_{13}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

จากสมการ (2.18) จะได้

$$R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1{}^2 + x_3{}^2} \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ถ้า } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)$$

โดยทั่วไป ใน R^n ถ้าหมุนระนาบ (j,k) จะได้เมทริกซ์ transformation

$$R = R_{jk}(\theta) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & j & & k & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}$$

เมทริกซ์นี้ต่างจากเมทริกซ์เอกลักษณ์ตรงที่ตำแหน่ง (j,j), (j,k), (k,j) และ (k,k) เท่านั้น ก่อนที่จะคูณเมทริกซ์ A ด้วย R จะเปลี่ยนเฉพาะแถวที่ j และ k ในขณะที่หลังคูณเมทริกซ์ A ด้วย R จะเปลี่ยนเพียงคอลัมน์ j และ k ถ้า x คือ column vector และเราต้องการให้ตำแหน่ง k ของ Rx = 0 แล้วเราจะเลือก $\theta = \tan^{-1}(x_k / x_j)$ สำหรับทุกๆค่า n เมทริกซ์ rotation R เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก ดังนั้น $R^{-1} = R^T$ เมทริกซ์ R^TAR ต่างจาก A เพียงในแถวที่ j และ k และคอลัมน์ที่ j และ k ดังนั้น สมาชิกในเมทริกซ์เฉียงจะเปลี่ยนในตำแหน่ง (j,j) และ (k,k)

จากที่เราหาระนาบการหมุน $R_{ij}(\theta)$ ซึ่ง $R_{ij}(\theta)A$ จะเป็นศูนย์ในตำแหน่ง (i,j) ถ้า (i>j) สมาชิกที่เป็นศูนย์จะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง ผลลัพธ์ต้องการเพียง 4n multiplication เมื่อแถวที่ i และ j เปลี่ยน เราจะแสดงวิธีว่าเมทริกซ์สามารถลดรูปเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนได้โดยใช้ sequence ของการหมุนระนาบ

พิจารณา เมทริกซ์ 4×4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

และเลือก $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ ขณะที่เราได้ $R_{21}(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ซึ่ง $R_{21}(\theta_1)A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

ถ้าเราเลือก $\theta_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{a_{31}}{a_{11}^{(1)}}\right)$; $R_{31}(\theta_2)$ จะเป็นศูนย์ในตำแหน่ง (3, 1) ผลลัพธ์ของเมทริกซ์จะได้

$$R_{31}(\theta_2)(R_{21}(\theta_1)A)=\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

จะสังเกตว่า การหมุนในระนาบ (1 , 3) จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงในแถวที่ 2 และ 4 ไม่มีการเปลี่ยนเป็นศูนย์ในตำแหน่ง (2 , 1) เราจะใช้ superscript เพื่อแสดงจำนวนครั้งที่ตำแหน่งนั้นได้มีการเปลี่ยนแปลง การหมุน $R_{41}(\theta_3)$ ซึ่ง $\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{a_{41}}{a_{11}^{(2)}}\right)$ จะได้ตำแหน่ง (4, 1)เป็นศูนย์ โดยที่แถวที่ 2 และ 3 ไม่มีการเปลี่ยนแปลง เราจะพิจารณาการหมุน $R_{32}(\theta)$ และ $R_{42}(\theta)$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์ที่ตำแหน่ง (3, 2) และ (4, 2) ซึ่งจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงในแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 1 ของเมทริกซ์สุดท้าย จะได้ผลลัพธ์ในตำแหน่งที่ (4 , 3) เป็นศูนย์ เราจะได้เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน R ดังนี้

$$(R_{43}(\theta_6)\, R_{42}(\theta_5)\, R_{32}(\theta_4)\, R_{41}(\theta_3)\, R_{31}(\theta_2)\, R_{21}(\theta_1))A = R$$

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{bmatrix}$$

2.3.2 QR Factorization โดยใช้ Householder reflection

Householder reflection คือ เมทริกซ์ใดๆ ที่อยู่ในรูป

$$I - 2\,w\,w^T$$

โดยที่ w คือเวกเตอร์ที่มีความยาว 1 หน่วย ตัวอย่างเช่น เวกเตอร์

$$w=\frac{1}{5}.\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เมื่อ $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left[\frac{4}{5}\right]^2=1$ และเมทริกซ์ที่สมนัยกับ

$$I-2\,w\,w^T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\frac{2}{25}\begin{bmatrix}9&12\\12&16\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}7&-24\\-24&-7\end{bmatrix}$$

เมทริกซ์จะเป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก ก็ต่อเมื่อ $Q^TQ = Q\,Q^T = I$ เมทริกซ์ Householder $H = I - 2\,w\,w^T$ จะต้องเป็นทั้งเมทริกซ์สมมาตรและ เมทริกซ์ตั้งฉาก คือ $H^T = H$ และ $H^TH = I$ เมื่อรวมคุณสมบัติสมมาตรและการตั้งฉาก เราจะได้

$$I \;=\; H^TH \;=\; H\,H \;= H^2$$

เมื่อ $H\,H = I$ เมทริกซ์ Householder จะมีอินเวอร์ส คือ $H^{-1} = H$

พิจารณาผลคูณของ $H\,H$

$$H\,H = (I - 2\,w\,w^T)(I - 2\,w\,w^T) = I - 4\,w\,w^T + 4\,w\,w^T w\,w^T \qquad (2.19)$$

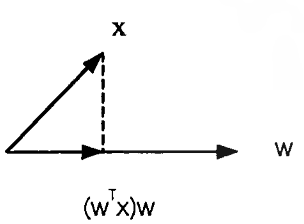
โดยกฎการรวมกลุ่มสำหรับเมทริกซ์ผลคูณ $w\,w^T w\,w^T = w\,(w^T w)\,w^T$ เมื่อ w เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย, $w\,w^T = 1$ และ $w\,(w^T w)\,w^T = w\,w^T$ ดังนั้น 2 พจน์สุดท้ายในสมการ (2.19) จะหายไป $(-4 + 4 = 0)$ และจะได้ $H\,H = I$

การคูณเมทริกซ์ Householder ด้วย vector x จะสมนัยกับการ reflect x ลงบนระนาบตั้งฉากกับ w จะพิสูจน์คุณสมบัติ reflection

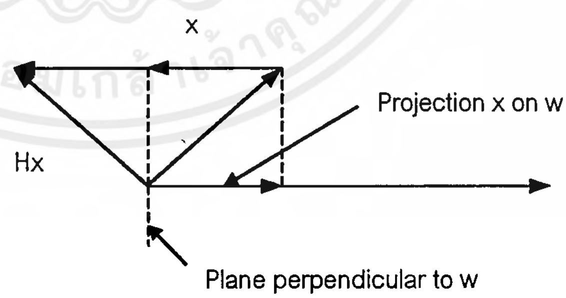
พิจารณารูปแบบผลคูณ Hx :

$$Hx \;=\; (I - 2\,w\,w^T)x \;=\; x - 2\,w\,w^Tx \;=\; x - 2\,w\,(w^T x) \;=\; x - 2\,(w^T x)w \qquad (2.20)$$

ซึ่งอธิบายด้วยรูปที่ 2-1 $(w^T x)\,w$ project x บน w ดังสมการ (2.20) Hx เท่ากับ x ลบด้วยการ project x บน w 2 ครั้ง ในรูปที่ 2-2 เราจะเห็นว่า x ลบด้วย 2 ครั้งของการ project บน w เหมือนกับการ reflection x ไปยังระนาบตั้งฉากกับ w เนื่องจากคุณสมบัติ reflection



รูปที่ 2-1 การ project x บน w



รูปที่ 2-2 Hx is reflection of x across the plane perpendicular to w

เมทริกซ์ Householder จึงเรียกว่า elementary reflectors

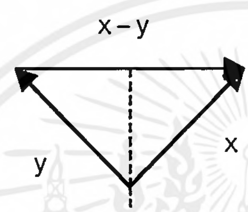
คุณสมบัติอื่นๆ เมทริกซ์ Householder คือ ถ้า x และ y เป็นเวกเตอร์ที่มีความยาวไม่เท่ากับศูนย์ และ w นิยามโดย

$$w = \frac{1}{\|x-y\|_2}(x-y) \tag{2.21}$$

แล้ว

$$(I - 2ww^T)x = y \tag{2.22}$$

ผลลัพธ์ข้างล่างได้มาจาก คุณสมบัติ reflection สมการ (2.21)จุด w ในทิศทางของเวกเตอร์ $x-y$ ในรูป 2-3 เราจะเห็น $x-y$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งเชื่อมระหว่าง y และ x เมื่อ y และ x มีความยาวเท่ากัน reflect ของ x ไปยังระนาบตั้งฉาก $x-y$ คือ y นั่นเอง หรือ $(I-2ww^T)x = y$



รูปที่ 2-3

ให้จำนวนเต็ม $k \ge 1$ พิจารณาการสร้างเมทริกซ์ Householder H ด้วยคุณสมบัติซึ่งสมาชิก $k-1$ ตัวแรกของ Hx จะเท่ากับสมาชิก $k-1$ ตัวแรกของ x ในขณะที่สมาชิก $n-k$ ตัวสุดท้ายของ Hx จะเป็นศูนย์

$$(Hx)_i = \begin{cases} x_i & ;i = 1,2,3,\ldots,k-1 \\ 0 & ;i = k+1, k+2,\ldots,n \end{cases}$$

จากสมการ (2.21) เราจะได้ค่า y

$$\begin{aligned} &y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_{k-1} = x_{k-1} \\ &y_k = \pm\sqrt{x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2} \\ &y_{k+1} = y_{k+2} = \ldots = y_n = 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

เมื่อ $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ ทั้ง x และ y มีขนาดความยาวเท่ากัน ถ้า w จากสมการ (2.21) และ (2.20) ทำให้ $Hx = (I-2ww^T)x = y$ ดังนั้นสมาชิก $k-1$ ตัวแรกของ y เท่ากับสมาชิกของ x ในขณะที่สมาชิก $n-k$ ตัวสุดท้ายของ y เป็นศูนย์

พิจารณาเมทริกซ์ Householder ที่สร้างขึ้น สังเกตได้ว่าจะมี 2 เครื่องหมายที่เป็นไปได้สำหรับสมาชิกตัวที่ k ของ y ในสมการ (2.23) เมื่อคำนวณ w ในสมการที่ (2.19) เกี่ยวข้องกับการลบ y จาก x ความผิดพลาดสัมพัทธ์ในการคำนวณความแตกต่างจะต้องน้อยกว่า สมาชิกตัวที่

k ของ x และ y ซึ่งมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน ถ้า x_k และ y_k มีเครื่องหมายตรงกันข้าม และ y จะนิยามโดยสมการ (2.23) เวกเตอร์ w ในสมการ (2.19) คือ

$$w = \frac{1}{\sqrt{2s\left(s+\left|x_k\right|\right)}}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_k + sign(x_k)s \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

เมื่อ $s = \sqrt{{x_k}^2 + {x_{k+1}}^2 + \ldots + {x_n}^2}$

QR factorization ของเมทริกซ์ A คำนวณโดยใช้ sequence ของ householder เพื่อลดรูป A ให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ผลลัพธ์ของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน R และผลคูณของเมทริกซ์ householder คือ Q พิจารณาเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 18 \\ 20 & -15 & -15 \\ 20 & -12 & 51 \end{bmatrix}$$

คอลัมน์แรก คือ $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$

ใช้สมการ (2.24) เมื่อ k = 1 เราได้เมทริกซ์ Householder H_1 ซึ่งเป็นการกำจัดสมาชิกตัวที่ 2 และ 3 ของคอลัมน์แรก

$$H_1 = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ผลคูณของ H_1A ให้เป็น A_1

$$A_1 = H_1A = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 9 & 18 \\ 20 & -15 & -15 \\ 20 & -12 & 51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 15 & -30 \\ 0 & -12 & -39 \\ 0 & -9 & 27 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่าแต่ละสัมประสิทธิ์ในคอลัมน์แรกของ A_1 ภายใต้แนวทแยงมุมเป็นศูนย์

คอลัมน์ที่สองของ A_1 คือ

$$x = \begin{bmatrix} 15 \\ -12 \\ -9 \end{bmatrix}$$

ใช้สมการ (2.24) เมื่อ k = 2 เราสร้างเมทริกซ์ householder H_2 ซึ่งเป็นการกำจัดสมาชิกตัวที่ 3 ของคอลัมน์ที่ 2

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -.8 & -.6 \\ 0 & -.6 & -.8 \end{bmatrix}$$

ให้ A_2 เป็นเมทริกซ์ H_2A_1

$$A_2 = H_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -.8 & -.6 \\ 0 & -.6 & -.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -30 & 15 & -30 \\ 0 & -12 & -39 \\ 0 & -9 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 15 & -30 \\ 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า A_2 เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน ซึ่ง A_2 เป็นเมทริกซ์ R ใน QR factorization โดยโครงสร้างของ H_2 คอลัมน์แรกของ A_1 และคอลัมน์แรกของ A_2 จะเหมือนกัน ดังนั้นเราจะได้เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$R = A_2 = H_2A_1 = H_2H_1A$$

คูณ H_1H_2 ด้วย R จะได้

$$H_1H_2R = H_1H_2H_2H_1A$$

เมื่อเมทริกซ์ householder มีอินเวอร์ส $H_2H_2 = I$ และ $H_1H_1 = I$ เมื่อ $A = H_1H_2R$ ให้ Q คือผลคูณของ H_1H_2 จะได้ $A = QR$ เพื่อตรวจสอบว่า Q เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก ดังนั้น

$$Q^TQ = H_2^T H_1^T H_1 H_2$$

เมื่อแต่ละเมทริกซ์ householder เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก ดังนั้น $Q^TQ = I$ นั่นคือ Q เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก สรุปว่า QR factorization เริ่มด้วยเมทริกซ์ A สามารถแสดงด้วย

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 18 \\ 20 & -15 & -15 \\ 20 & -12 & 51 \end{bmatrix} = \left(\frac{-1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -14 & 2 \\ 10 & 5 & 10 \\ 10 & 2 & -11 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -30 & 15 & -30 \\ 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง factor แรก คือ $Q = H_1H_2$ ในขณะที่ factor 2 เป็น R

2.4 QR Method

วิธี QR เป็นวิธีที่ใช้คำนวณค่าเจาะจงของเมทริกซ์แบบ origin แต่ละขั้นตอนของ QR algorithm factor ของเมตริกซ์จะมีการแลกเปลี่ยน factor กัน

$$A^{old} = QR \qquad \text{และ} \qquad A^{new} = RQ$$

ในการทำซ้ำให้เป็นเมตริกซ์ quasi - triangular ซึ่งแนวเส้นทะแยงจะบรรจุค่าเจาะจง

ตัวอย่าง 2.4

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

ครั้งที่ 1

QR factorization โดยใช้ทศนิยม 3 ตำแหน่ง คือ

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}} \approx \underset{Q}{\begin{bmatrix} -.780 & .624 \\ .624 & .780 \end{bmatrix}} \underset{R}{\begin{bmatrix} -6.40 & 6.86 \\ 0 & -4.21 \end{bmatrix}}$$

$$A^{new} = \underset{R}{\begin{bmatrix} -6.40 & 6.86 \\ 0 & -4.21 \end{bmatrix}} \underset{Q}{\begin{bmatrix} -.780 & .624 \\ .624 & .780 \end{bmatrix}} \approx \begin{bmatrix} 9.29 & 1.37 \\ -2.63 & -3.21 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

การทำซ้ำครั้งที่ 2 จาก QR factorization ใน (2.25) จะได้

$$\underset{A^{old}}{\begin{bmatrix} 9.29 & 1.37 \\ -2.63 & -3.29 \end{bmatrix}} = \underset{Q}{\begin{bmatrix} -.962 & .273 \\ .273 & .962 \end{bmatrix}} \underset{R}{\begin{bmatrix} -9.65 & -2.22 \\ 0 & -2.97 \end{bmatrix}}$$

$$A^{new} = \underset{R}{\begin{bmatrix} -9.65 & -2.22 \\ 0 & -2.97 \end{bmatrix}} \underset{Q}{\begin{bmatrix} -.962 & .273 \\ .273 & .962 \end{bmatrix}} \approx \begin{bmatrix} 8.69 & -4.76 \\ 0 & -2.69 \end{bmatrix}$$

ทำซ้ำอีก 2 ครั้ง จะได้

$$A^{new} = \begin{bmatrix} -8.72 & 4.51 \\ 0 & -3.09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.996 & .087 \\ .089 & .996 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 9.08 & 3.37 \\ -0.27 & -3.08 \end{bmatrix}$$

และ

$$A^{new} = \begin{bmatrix} -9.08 & -3.82 \\ 0 & -3.09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.9995 & .0298 \\ .0298 & .9995 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 8.97 & -4.04 \\ -0.09 & -2.97 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่าการกระทำซ้ำจนได้เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ คือ สมาชิกเส้นทแยงมุม 9 และ –3 ของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

2.5 Bisection Method

วิธี QR สามารถหาค่าเจาะจงได้ทุกค่า เราจะมาศึกษาวิธีที่ใช้คำนวณค่าเจาะจงเพียงบางค่าของเมทริกซ์สมมาตร แม้ว่าวิธีกำลังจะคำนวณค่าเจาะจงได้เพียงบางค่า แต่ก็มีเทคนิคพิเศษที่มีประสิทธิภาพสำหรับเมทริกซ์สมมาตร วิธี bisection เป็นพื้นฐานของคุณสมบัติ : ถ้า $A = LU$ เป็น factorization สำหรับเมทริกซ์สมมาตร ค่าเจาะจงของ A ที่เป็นจำนวนบวก ศูนย์ หรือจำนวนลบ จะเท่ากับจำนวนบวก ศูนย์ หรือจำนวนลบของสมาชิกเมทริกซ์เฉียง U คุณสมบัตินี้นำมาประยุกต์ shift matrix $A_\sigma = A - \sigma I$ เมื่อลบ σ ออกจากแต่ละสมาชิกในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ A ด้วยเหตุนี้ค่าเจาะจงของ A_σ คือ ค่าเจาะจงของ A ลบด้วย σ ค่าเจาะจงจำนวนบวก ศูนย์ และจำนวนลบ ของ A_σ จะเท่ากับจำนวนค่าเจาะจงของ A ซึ่งมากกว่า σ เท่ากับ σ หรือน้อยกว่า σ ตามลำดับ

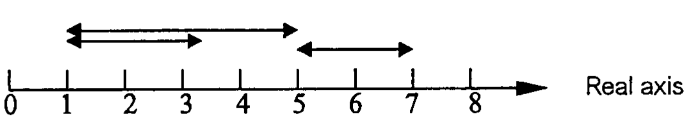
วิธี Bisection สำหรับคำนวณค่าเจาะจงลำดับที่ k ที่มีค่าใหญ่สุด สำหรับเมทริกซ์สมมาตร A โดยใช้ทฤษฎีของ Gerschgorin เราจะหาค่าช่วง [a , b] ซึ่งบรรจุค่าเจาะจงลำดับที่ k ซึ่งเป็นค่าใหญ่สุด ให้ σ เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง [a , b]

$$\sigma = \frac{a+b}{2}$$

factor A_σ, เราพิจารณาจำนวนของค่าเจาะจง A ที่มีค่ามากกว่า σ ถ้าค่า k เล็กกว่า σ ค่าเจาะจงที่ใหญ่ที่สุด จะอยู่ในช่วง $[a,\sigma]$ ถ้าค่า k ใหญ่กว่า σ ค่าเจาะจงที่ใหญ่ที่สุดจะอยู่ในช่วง $[\sigma,b]$ ทั้งสองกรณี เราจะต้องหาช่วงที่เล็กลงที่บรรจุค่าเจาะจงลำดับที่ k ที่ใหญ่ที่สุด และทำซ้ำไปเรื่อยๆ ก่อนที่เราจะเริ่มกระบวนการ bisection จะต้องลดรูปเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

ในรูปที่ 2-4 project three Gerschgorin disks ของ A บนแกนจำนวนจริง



รูปที่ 2-4 Project Gerschgorin disks for the matrix A

เมื่อ project disk จาก 1 ถึง 7 จะได้ค่าเจาะจงอยู่ในช่วง [1,7] ให้ $\sigma = \frac{1+7}{2} = 4$ ดังนั้น factor LUของ A_σ คือ

$$
A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}} \overset{U}{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}
$$

เมื่อสมาชิกแนวเฉียง –2, -1/2 และ 4 ของ factor U เมทริกซ์สามเหลี่ยมบนของ A_4 แสดงด้วย sign pattern [-, - ,+] A มีค่าเจาะจงหนึ่งค่าที่มากกว่า 4 และสองค่าน้อยกว่า 4 ค่าเจาะจงที่ใหญ่เป็นอันดับสองมีค่าน้อยกว่า 4 ดังนั้น ค่าเจาะจงที่ใหญ่เป็นอันดับสอง อยู่บนช่วง [1,7] แต่น้อยกว่า 4 เราสรุปได้ว่าค่าเจาะจงที่มากกว่าเป็นอันดับสองอยู่บนช่วง [1,4] ในการทำซ้ำครั้งต่อไป σ = (1+4) / 2 = 2.5 และ sign pattern ของ factor เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ของ A_σ คือ [- , + , +] ดังนั้น A มีค่าเจาะจงมากกว่า 2.5 สองค่า และค่าเจาะจงที่ใหญ่เป็นอันดับที่สองอยู่บนช่วง [2.5 , 4] เมื่อทำซ้ำไปเรื่อยๆ จะได้ดังตารางที่ 2-1 ค่าเจาะจงที่มากเป็นอันดับสอง มีค่าประมาณ 3.358

Sign pattern	a	b	σ
- - +	1.000	7.000	4.000
- + +	1.000	4.000	2.500
- + +	2.500	4.000	3.250
- - +	3.250	4.000	3.625
- + -	3.250	3.625	3.438
- + +	3.250	3.438	3.344
- + -	3.344	3.438	3.391
- + -	3.344	3.391	3.367
- + +	3.344	3.367	3.356
- + -	3.356	3.367	3.361
- + -	3.356	3.361	3.358
- + +	3.356	3.358	3.357
- + +	3.357	3.358	3.358

ตารางที่ 2.1

ทฤษฎี Gerschgorin Disk

ทฤษฎี 2.1 ค่าเจาะจงทุกค่าของเมทริกซ์ A จะอยู่ในช่วงของการยูเนียนของ disk

$$|z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \, , \, i = 1, \ldots, n$$

โดยที่ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ทฤษฎี 2.2 ถ้าการยูเนียนของ m disk gerschgorin เป็นเซตที่ต่อเนื่องกันซึ่งเป็นอิสระจาก disk ที่เหลือ ดังนั้นในส่วนของเขตที่ยูเนียนกันจะมีค่าเจาะจงเพียง m ค่าเท่านั้น

ตัวอย่าง 2.5

$$A=\begin{bmatrix}10 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -5 & 0\\ 2 & 0 & 0 & -10\end{bmatrix}.$$

เมทริกซ์นี้เป็นเมทริกซ์สมมาตรและมีค่าเจาะจงเป็นจำนวนจริง

ซึ่ง gerschgorin disk คือ

$$\begin{aligned}|z-10| &\le 4\\ |z-5| &\le 2\\ |z+5| &\le 2\\ |z+10| &\le 2\end{aligned}$$

จากทฤษฎี 2.2 อันหลัง ใน disk ที่มีจุดศูนย์กลาง -10 และ -5 แต่ละอันมีค่าเจาะจง 1 ค่า และค่าเจาะจงอีก 2 ค่าจะอยู่ในช่วง [3,14]

LU Factorization

เมทริกซ์จตุรัส C จะเรียกว่า สามเหลี่ยมล่าง ถ้า $c_{ij}=0$ สำหรับ $i<j$ และเรียก unit lower triangular ถ้าเป็นสามเหลี่ยมล่างและแต่ละสมาชิก $c_{ii}=1$ เมทริกซ์ U เป็นสามเหลี่ยมบน ถ้าเมทริกซ์ U ทรานส์โพส แล้วเป็นสามเหลี่ยมล่าง เช่น

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ เป็น unit lower triangular

$$U=\begin{bmatrix}2 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$ เป็นสามเหลี่ยมบน

ตัวอย่าง2.6

หา LU Factorization ของ A

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> ทำการลดเมทริกซ์ A ให้เป็นสามเหลี่ยมบนที่คอลัมน์แรก

$R_2 \leftarrow R_1 + R_2$ ที่ตำแหน่ง (2 , 1) ใส่ -1

$R_3 \leftarrow -2R_1 + R_3$ ที่ตำแหน่ง (3 , 1) ใส่ 2

จะได้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & -2 \end{bmatrix}$

ต่อไปทำตำแหน่ง (3 , 2) ให้เป็นศูนย์

$R_3 \leftarrow \frac{9}{2}R_2 + R_3$ ที่ตำแหน่ง (3 , 2) ใส่ $-\frac{9}{2}$

จะได้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -\frac{9}{2} & -2 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ L ที่ตำแหน่งเส้นทแยง จะเป็น 1 คือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ U = $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2.6 วิธี Lanczos

วิธี Lanczos [*L1*] เป็นการลดเมทริกซ์สมมาตรให้เป็นเมทริกซ์ Tridiagonal โดยใช้การแปลง orthogonal similarity ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรและ Q เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก ซึ่ง

$$Q^{-1} A Q = T \qquad (2.26)$$

เมื่อ T เป็นเมทริกซ์ Tridiagonal หลักการลดรูปของ Householder ก่อนคูณและหลังคูณ A กับเมทริกซ์ Householder จะเป็นการลดรูป A ให้เป็นเมทริกซ์ Tridiagonal ในวิธีการของ Lanczos เราเริ่มที่สมการ (2.26) คูณด้วย Q จะได้ AQ = QT ดังนั้น แต่ละคอลัมน์ของเมทริกซ์ AQ จะสมนัยกับคอลัมน์ของเมทริกซ์ QT ถ้า q_j แทนคอลัมน์ที่ j ของ Q คอลัมน์ที่ j ของ AQ คือ Aq_j ให้ d และ u แทน diagonal และ superdiagonal ของ T เราจะได้

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & & & \\ u_1 & d_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & u_n \\ & & & u_{n-1} & d_n \end{bmatrix}$$

คอลัมน์ที่ j ของ T คือ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{j-1} \\ d_j \\ u_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อคอลัมน์ที่ j ของ QT เท่ากับ Q คูณด้วยคอลัมน์ที่ j ของ T คอลัมน์ที่ j ของ QT คือ

$$u_{j-1}\, q_{j-1} + d_i q_j + u_j q_{j+1}$$

ให้คอลัมน์ที่ j ของ AQ เท่ากับ คอลัมน์ที่ j ของ QT จะได้

$$Aq_j = u_{j-1}\, q_{j-1} + d_i q_j + u_j q_{j+1} \qquad (2.27)$$

โดยที่ $q_0 = 0$ เมื่อ $j = 1$ ดังนั้น Q เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก

$$q_j^T q_{j-1} = q_j^T q_{j+1} = 0 \qquad \text{และ} \qquad q_j^T q_j = 1$$

คูณสมการ (2.27) ด้วย q_j^T เราจะได้

$$d_j = q_j^T A q_j$$

นิยามเวกเตอร์ r_j ด้วย

$$r_j = Aq_j - d_j q_j - u_{j-1} q_{j-1}$$

จากสมการ (2.27) จะได้ $u_j q_{j+1} = r_j$, take Euclidean norm เราได้

$$|u_j| \, \|q_{j+1}\|_2 = \|r_j\|_2$$

เมื่อ q_{j+1} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน Euclidean norm , u_j เป็นค่าบวกหรือค่าลบของความยาว Euclidean ของ r_j สุดท้ายจะได้ $u_j q_{j+1} = r_j$ สำหรับ q_{j+1} ให้ $q_{j+1} = r_j / u_j$ สูตรเหล่านี้สำหรับ d_j, u_j และ q_{j+1} ใช้ในวิธี Lanczos สำหรับลดเมทริกซ์สมมาตรให้เป็นเมทริกซ์ Tridiagonal เราจะเริ่มจากเวกเตอร์ $q_1 \neq 0$

วิธี *Lanczos* มีขั้นตอนดังนี้

$$
\begin{aligned}
& q_0 = 0, r = q_1, u_0 = \|r\|_2 \\
& j = 1 \quad to \quad n \\
& \qquad q_j = r/u_{j-1}, d_i = q_j^T A q_j \\
& \qquad r = (A - d_j I) q_j - u_{j-1} q_{j-1} \\
& \qquad u_j = \|r\|_2 \\
& next \ j
\end{aligned}
\qquad \text{(algolithm 2.1)}
$$

จะสังเกตว่า เมื่อ q_j ถูกคำนวณ เราหาแต่ละส่วนประกอบของด้วยสมาชิก superdiagonal u_{j-1} จะเห็นว่าการหารเป็นไปไม่ได้ เมื่อ $u_{j-1} = 0$ ถ้าสมาชิก superdiagonal เป็นศูนย์แล้ว เราทำเมทริกซ์ Tridiagonalization แทนที่ q_j ด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉาก ตั้งแต่ q_1 ถึง q_{j-1} และทำตามขั้นตอนใน Algorithm (2.1) ต่อไป

2.7 วิธีของจาโคบีสำหรับเมทริกซ์สมมาตร (*Jacobi's Method for Symmetrices*)

*วิธีของจาโคบี*สำหรับเมทริกซ์สมมาตรนี้เป็นวิธีย้ำวิธีหนึ่ง เมื่อต้องการจะหาค่าไอเกนของเมทริกซ์สมมาตร A จะให้

$$A_0 = A$$

และหาเมทริกซ์ตั้งฉาก $U_{k'}, k \geq 1 \quad (U_k^T = U_k^{-1})$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} A_1 &= U_1^T A_0 U_1 \\ A_2 &= U_2^T A_1 U_2 \\ &\vdots \\ \text{ดังนั้น}\quad A_{k+1} &= U_{k+1}^T A_k U_{k+1} \\ &= U_1^T U_k^T U_{k-1}^T \ldots A_0 \ldots U_{k-1} U_k U_{k+1} \end{aligned}$$

เลือก $U_{k'}$ $k \geq 1$ ที่ทำให้

$$\lim_{k\to\infty} A_{k+1} = dig(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

และถ้า $\lim_{k\to\infty} U_1 U_2 U_3 \ldots U_k = U$

แล้ว $AU = U\,dig(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$

วิธีนี้เป็นวิธีที่ทำให้เมทริกซ์สมมาตร A เป็นเมทริกซ์เฉียง โดยค่าของสมาชิกในเส้นทแยงจะเป็นค่าไอเกนของ A

การเลือกเมทริกซ์ตั้งฉาก U_{k+1} จะกระทำดังนี้

ให้เมทริกซ์ $A_k = (a_{ij}^k)$, $i,j = 1, 2, 3, \ldots, n$

ถ้าสมาชิก a_{ij}^k เมื่อ $i \neq j$ ของเมทริกซ์ A_k มีค่าไม่เป็นศูนย์จะเลือก U_{k+1} โดย U_{k+1} เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ I จะเปลี่ยนแปลงไปบ้าง ดังนี้

1. สมาชิกแถวที่ i สดมภ์ที่ i เป็น $\cos\alpha$
2. สมาชิกแถวที่ i สดมภ์ที่ j เป็น $\sin\alpha$
3. สมาชิกแถวที่ j สดมภ์ที่ i เป็น $\sin\alpha$
4. สมาชิกแถวที่ j สดมภ์ที่ j เป็น $-\cos\alpha$

เช่นถ้า $n=4$, $i = 2$ และ $j = 4$ แล้ว

$$U_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะทำให้ $U_{k+1}{}^T = U_{k+1}{}^T = U_{k+1}$

การเลือกค่า α จะดูจากผลการคูณของ $U_{k+1}A_kU_{k+1}$ ซึ่งได้เป็นเมทริกซ์ A_{k+1} และ

$$a_{ii}{}^{k+1} = a_{ii}{}^{k}\cos^2\alpha + a_{jj}{}^{k}\sin^2\alpha + 2a_{ij}{}^{k}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$a_{jj}{}^{k+1} = a_{ii}{}^{k}\sin^2\alpha + a_{jj}{}^{k}\cos^2\alpha + 2a_{ij}{}^{k}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$a_{ij}{}^{k+1} = (a_{ii}{}^{k} - a_{jj}{}^{k})\sin\alpha\cos\alpha - a_{ij}{}^{k}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

ต้องการให้ $a_{ij}{}^{k+1} = 0$

$$\therefore \quad (a_{ii}{}^{k} - a_{jj}{}^{k})\sin\alpha\cos\alpha - a_{ij}{}^{k}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

ถ้า $a_{ii}{}^{k} \neq a_{jj}{}^{k}$ แล้ว

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{a_{ij}{}^{k}}{a_{ii}{}^{k} - a_{jj}{}^{k}}$$

$$\therefore \quad \tan 2\alpha = \frac{2a_{ij}{}^{k}}{a_{ii}{}^{k} - a_{jj}{}^{k}}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2a_{ij}{}^{k}}{a_{ii}{}^{k} - a_{jj}{}^{k}}$$

โดย $\frac{\pi}{4} < \alpha < -\frac{\pi}{4}$

ถ้า $a_{ii}{}^{k} = a_{jj}{}^{k}$ แล้ว

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

2.8 Diagonalization

ถ้า $x = Ix$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ สมการค่าเจาะจง คือ $Ax = \lambda x$ สามารถเขียนได้เป็น

$$(A - \lambda I)X = 0 \tag{2.28}$$

เมื่อกำหนด λ สำหรับสมการ (2.28) เป็นระบบเชิงเส้นเป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $A - \lambda I$ ระบบนี้จะเรียกว่า *ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์* เมื่อค่าคงที่ทางขวาเป็นศูนย์

เมื่อกำหนด λ พิจารณา LU factor เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของ $A - \lambda I$ จะสมมูลกับระบบ $(LU)x = 0$ ถ้านิยาม $y = Ux$ ระบบ factor จะประกอบด้วย 2 สมการ คือ $Ly = 0$ และ $Ux = y$ ผลเฉลยของ $Ly = 0$ คือ $y = 0$ และถ้าทุกๆ สมาชิกแนวทแยงของ U ไม่เป็นศูนย์แล้วผลเฉลยของ $Ux = 0$ คือ $x = 0$ แต่ถ้าสมาชิกแนวทแยงหนึ่งตัวเป็นศูนย์ แล้วสมการ (2.28) จะมีผลเฉลยหลายชุด ดังนั้นผลเฉลย X ของสมการ (2.28) จะไม่เป็นศูนย์ต่อเมื่อสมาชิกบางตัวในแนวทแยงของ U เป็นศูนย์และเนื่องจากสมาชิกแนวทแยงของ U เป็นศูนย์ ต่อเมื่อดีเทอร์มิแนนต์ $A - \lambda I = 0$ สมการที่ได้

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$$

เรียกว่าสมการลักษณะเฉพาะ และผลเฉลย คือ ค่าเจาะจงของ A

โดยทั่วไป ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ค่าเจาะจงคือสมาชิกแนวทแยง $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ เวกเตอร์เจาะจงจะคำนวณด้วยการแทนค่ากลับ และเวกเตอร์เจาะจง X จะสมนัยกับค่าเจาะจง a_{ii} จะมีสมาชิก

$$x = s\begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมาชิกตัวที่ i ทางขวามือเป็นหนึ่ง และสมาชิก $n-i$ ตัวสุดท้ายเป็นศูนย์

พิจารณาเมทริกซ์

ตัวอย่าง 2.3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

สมการค่าเจาะจง คือ

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 6 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์จะใช้สูตร

$$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

จะได้

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 6 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-5-\lambda) + 12 = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

เมื่อ $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ แยกตัวประกอบเป็น $(\lambda+1)+(\lambda+2)$ สมการลักษณะเฉพาะ คือ

$$(\lambda+1)+(\lambda+2) = 0$$

รากสมการของสมการลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda = -1$ และ $\lambda = -2$

เวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ คือ ผลเฉลยของ $(A - \lambda I)x = 0$ สำหรับเมทริกซ์ (2.29) สมการเวกเตอร์เจาะจง เขียนได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 6 \\ -2 & -5-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

พิจารณาค่าเจาะจง $\lambda = -1$ แทนค่า $\lambda = -1$ ในสมการ (2.30)

$$3x_1 + 6x_2 = 0$$

$$-2x_1 - 4x_2 = 0$$

สมการที่สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian elimination) จะได้ระบบสมการสามเหลี่ยมบน

$$3x_1 + 6x_2 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะสังเกตว่าสัมประสิทธิ์ของ x ในแถวที่ 2 มีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ สัมประสิทธิ์ของ x_1 เป็นศูนย์โดยที่สัมประสิทธิ์นี้เป็นสมาชิกตัวหนึ่งของระบบสามเหลี่ยมบน สัมประสิทธิ์ของ x_2 เป็นศูนย์ เมื่อ $\lambda = -1$ เป็นค่าเจาะจง และสมาชิกแนวทแยงของสามเหลี่ยมบน ของ $A - \lambda I$ จะต้องเป็นศูนย์

ดังนั้น X เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง $\lambda = -1$ ก็ต่อเมื่อ

$$3x_1 + 6x_2 = 0$$

$$x_1 = -2x_2$$

จะได้สมาชิกตัวแรกของ x คือ -2 คูณด้วยเวกเตอร์เจาะจง และเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง $\lambda = -1$

$$X = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง s เป็นสเกลาร์ ให้ $s = -1/2$ จะได้เวกเตอร์เจาะจงปกติ

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ถ้าค่าประจำมากสุดเท่ากับ 1 เวกเตอร์เจาะจงปกติที่สมนัยกับค่าเจาะจง $\lambda = -2$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ใช้เวกเตอร์เจาะจง 2 ค่านี้สร้างเป็นเมทริกซ์ X โดยแต่ละคอลัมน์คือเวกเตอร์เจาะจง

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ผลคูณของ AX คือ

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \qquad (2.31)$$

จากนิยามการคูณเมทริกซ์ คอลัมน์แรกของ AX เท่ากับ A คูณด้วยคอลัมน์แรกของ X ซึ่งคอลัมน์แรกของ X คือ เวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง -1 คอลัมน์แรกของ AX เท่ากับค่าเจาะจง -1 คูณด้วยเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัย ในทำนองเดียวกันคอลัมน์ 2 ของ AX เท่ากับ A คูณด้วยคอลัมน์ที่ 2 ของ X ซึ่งคอลัมน์ที่ 2 ของ X เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง -2 คอลัมน์ที่ 2 ของ AX เท่ากับค่าเจาะจง -2 คูณด้วยเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัย

ให้ A เป็นเมทริกซ์เฉียงโดยที่สมาชิกแนวทแยงเป็นค่าเจาะจง

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ XA ก็คือ การเอาแต่ละคอลัมน์ของ X คูณด้วยค่าเจาะจงที่สมนัย

$$XA=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3}\end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

เปรียบเทียบ (2.31) และ (2.32) จะเห็นได้ว่า Ax = XA เมื่อคูณด้วย x^{-1} จะได้ A = XA^{-1}X

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}2 & 6\\ -2 & -5\end{bmatrix}}=\underset{X}{\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}}\underset{X^{-1}}{\begin{bmatrix}4 & 6\\ -3 & -6\end{bmatrix}}$$

จะเห็นได้ว่า A เป็นผลคูณระหว่างเมทริกซ์ X ของเวกเตอร์เจาะจง, เมทริกซ์เฉียง A ซึ่งเป็นค่าเจาะจงและอินเวอร์สของ X เรียกว่า diagonalization ของ A

บทที่ 3
การออกแบบระบบและหลักการที่เกี่ยวข้อง

3.1 ระบบงาน ในส่วนระบบงานนี้ แบ่งออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

3.1.1 ส่วนนำข้อมูลเข้า

เป็นระบบการนำข้อมูลเข้าอย่างง่าย ข้อมูลที่นำเข้า คือ ขนาดของเมทริกซ์, ค่าเมทริกซ์แต่ละตัว และเลือกวิธีที่ต้องการจะใช้ในการคำนวณ

3.1.2 ส่วนวิเคราะห์และประมวลผล

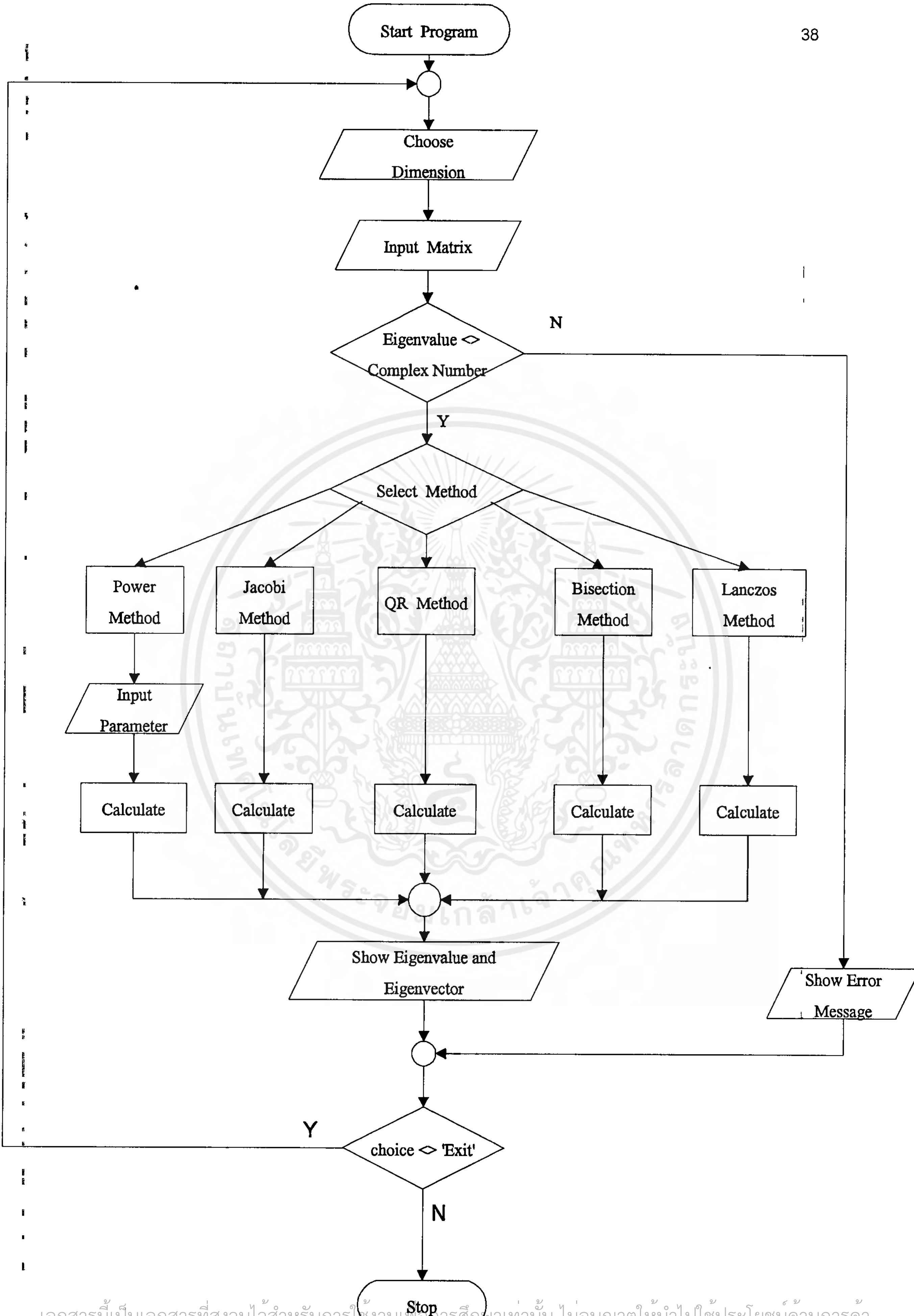
จากส่วนนำข้อมูลเข้า นำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์และนำไปคำนวณหาค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจงเพื่อนำมาแสดงผลต่อไป

3.1.3 ส่วนแสดงผล

นำข้อมูลที่ได้จากส่วนที่ 2 มาแสดงผลทางจอภาพ จะได้ผลลัพธ์ที่เกิดจากการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่สมบูรณ์

3.2 ขั้นตอนการดำเนินการ

ในการทำงานทุกๆ งานบนเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นต้องรับข้อมูลนำเข้าจากผู้ใช้ โปรแกรมนี้ก็เช่นกัน โดยข้อมูลนำเข้าจะเป็นขนาดของเมทริกซ์, ค่าเมทริกซ์ และเลือกวิธีที่ต้องการใช้ในการคำนวณ เมื่อทำการรับข้อมูลนำเข้าแล้วจะนำเข้าสู่ขั้นตอนวิธีการคำนวณค่าเจาะจง หลังจากนั้นจะได้ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง แล้วนำค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่ได้มาแสดงผลโดยแสดงด้วย System Flow Diagram ดังนี้


Start Program
Choose Dimension
Input Matrix
Eigenvalue <> Complex Number
N
Y
Select Method
Power Method
Jacobi Method
QR Method
Bisection Method
Lanczos Method
Input Parameter
Calculate
Calculate
Calculate
Calculate
Calculate
Show Eigenvalue and Eigenvector
Show Error Message
Y
choice <> 'Exit'
N
Stop

บทที่ 4
การประเมินผล

ผลลัพธ์ที่ได้จากการพัฒนาโปรแกรมต้นแบบ "การหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง" สามารถประเมินผลในแต่ละด้านได้ดังนี้

4.1 ส่งเสริมให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจในเรื่องค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงมากขึ้น

การเรียนการสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเรื่องค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง สำหรับนักศึกษานั้นเป็นเรื่องยาก เนื่องจากการคำนวณค่อนข้างจะยากและต้องเสียเวลามาก ด้วยสาเหตุนี้อาจทำให้นักศึกษาไม่เอาใจใส่ในการแก้ปัญหาการหาค่าเจาะจง ดังนั้นการนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเรียนการสอนทางพีชคณิตเชิงเส้นในเรื่องการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงจะทำให้นักศึกษาสามารถศึกษาและเข้าใจได้ง่ายและสะดวกขึ้น เนื่องจากการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์นั้นจะใช้เวลาน้อยกว่ามากและทำให้เกิดความเข้าใจได้ดีกว่า จากสาเหตุดังกล่าวทำให้นักศึกษาสามารถศึกษาหรือทำความเข้าใจเรื่องค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงได้มากขึ้น ทำให้นักศึกษาสนใจที่จะใฝ่หาความรู้มากขึ้น

4.2 ใช้งานง่ายและมีความเข้าใจง่าย

เนื่องจากโปรแกรมต้นแบบที่จัดทำขึ้นเป็นโปรแกรมที่ใช้งานบนระบบปฏิบัติการวินโดว์ ซึ่งแสดงส่วนการติดต่อกับผู้ใช้แบบกราฟฟิก (Graphic User Interface) จึงทำให้การใช้งานง่าย ผู้ใช้สามารถเลือกคำสั่งการทำงานต่างๆ ได้โดยใช้ตัวควบคุม (Mouse) นอกจากการใช้งานง่ายแล้วยังมีความเข้าใจง่าย กล่าวคือ มีขั้นตอนการคิดเป็น Step ทำให้เข้าใจได้ง่าย

4.3 นักศึกษาสามารถทำการศึกษาได้ด้วยตนเอง

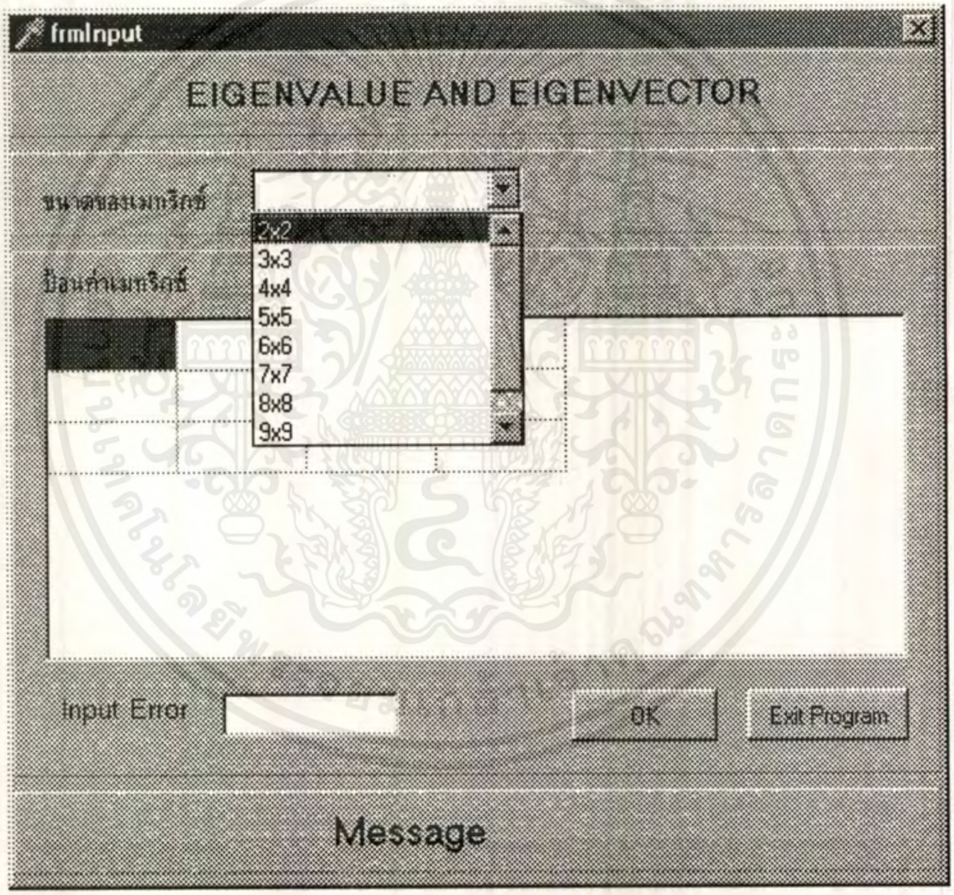
เนื่องจากโปรแกรมต้นแบบที่จัดทำขึ้นนี้แสดงขั้นตอนการคำนวณค่าเจาะจงในแต่ละวิธี ซึ่งนักศึกษาสามารถทำการศึกษาเพิ่มเติมได้นอกห้องเรียน เช่น การนำโปรแกรมที่จัดทำนี้ไปใช้งานที่บ้าน ทำให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเพิ่มขึ้น

4.4 การทำงานของโปรแกรม

การเขียนโปรแกรมสำหรับโปรแกรมต้นแบบนี้ จะเป็นการนำโปรแกรมภาษาที่ชื่อว่า "Delphi เวอร์ชัน 3.0" มาใช้งาน ซึ่งสำหรับต้นแบบนี้มีการออกแบบแยกเป็นส่วนๆ และนำมาประกอบกันในการใช้งานสามารถแบ่งเป็นส่วนการออกแบบดังนี้

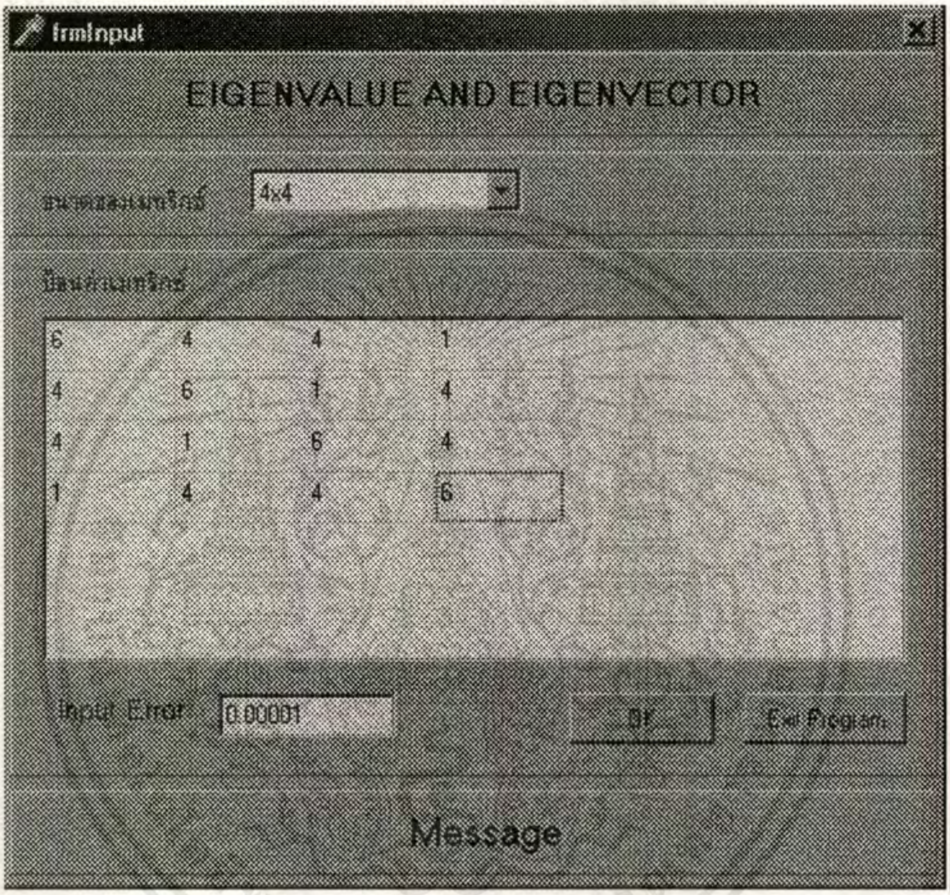
4.4.1 ขั้นตอนต่างๆ ในการทำงานของโปรแกรม

4.4.1.1 เมื่อทำการ Run โปรแกรมต้นแบบ จะปรากฏฟอร์มดังรูป



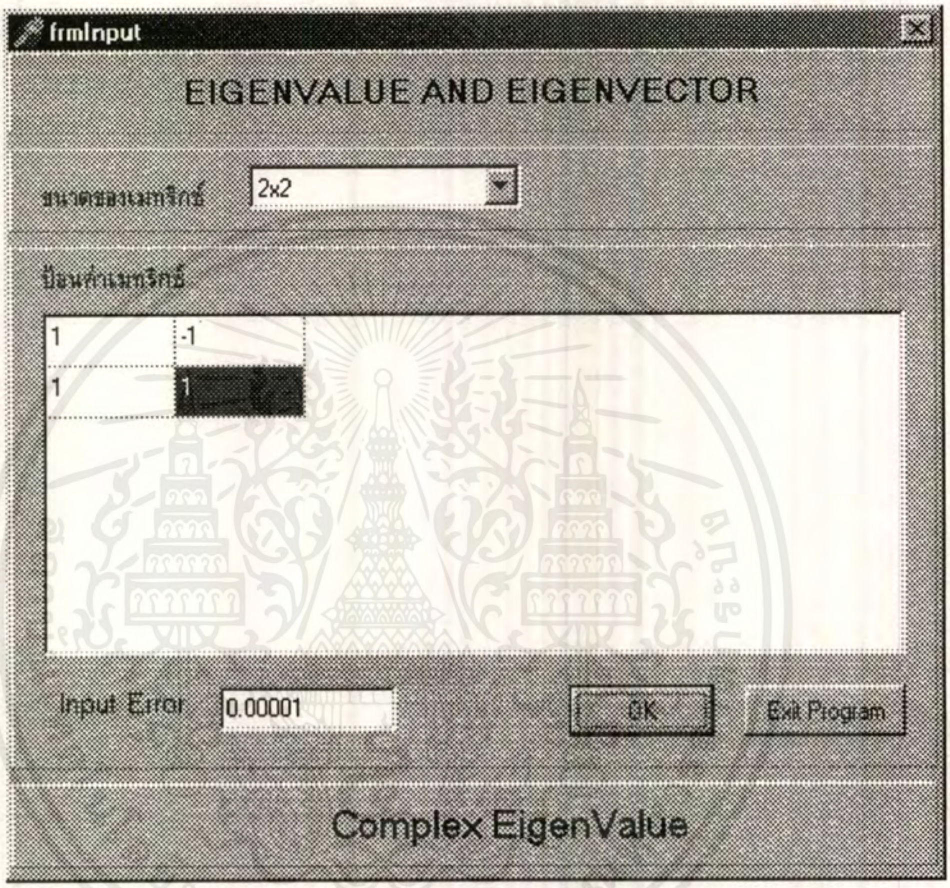
รูปที่ 4-1 ทำการ Click Combobox เลือกขนาดของเมทริกซ์

ในฟอร์มนี้ให้ผู้ใช้ทำการเลือกขนาดของเมทริกซ์ โดยการคลิกเลือกที่ Combobox ดังรูป 4-1 จากนั้นทำการป้อนค่าเมทริกซ์และค่า Input Error (ค่าคลาดเคลื่อนยอมรับ) ในส่วนที่สองของฟอร์มดังรูป4-2 แล้วคลิกปุ่ม OK จะเข้าสู่ฟอร์มต่อไป เมื่อเมทริกซ์ที่รับเข้าไปไม่มีค่าเจาะจงเป็นจำนวนเชิงซ้อน



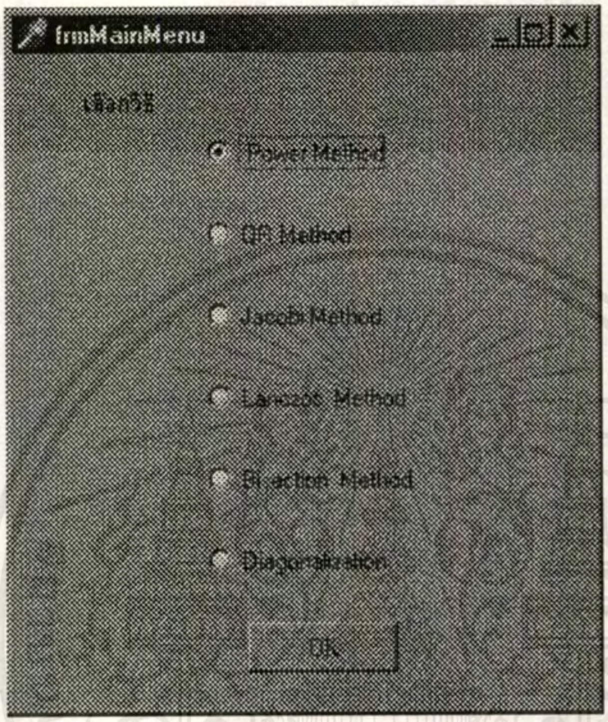
รูปที่ 4-2 ผู้ใช้ทำการป้อนค่าเมทริกซ์และค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

ตรงส่วนที่สามที่ปรากฏคำว่า “Message” จะปรากฏคำว่า “Complex Eigenvalue” เมื่อเมทริกซ์ที่รับเข้าไปมีค่าเจาะจงเป็นจำนวนเชิงซ้อน จากนั้นผู้ใช้จะต้อง input ค่าเมทริกซ์ขึ้นใหม่ ดังรูป 4-3



รูปที่ 4-3 ผู้ใช้ทำการป้อนค่าเมทริกซ์ที่มีค่าเจาะจงเป็น Complex Number

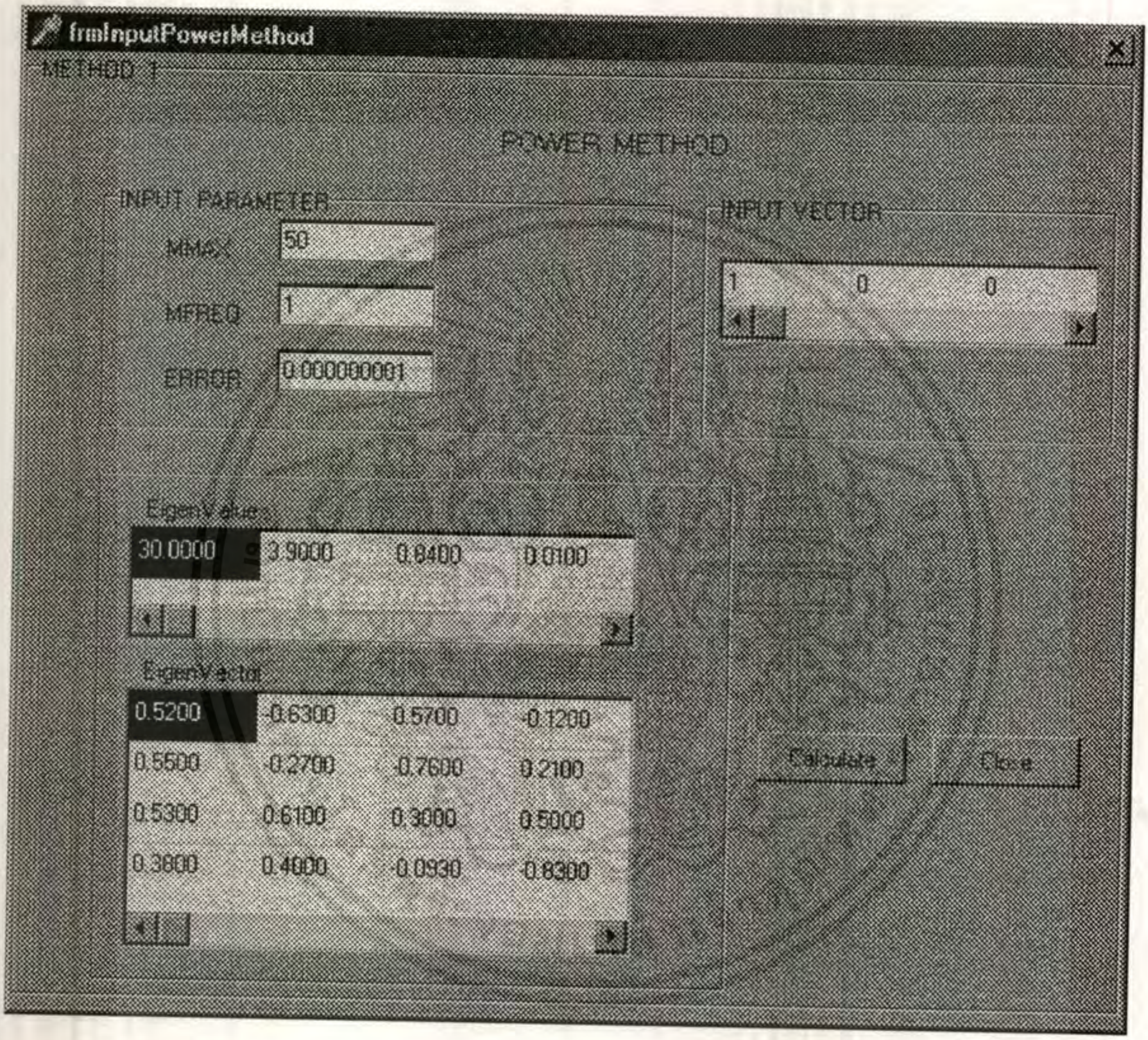
4.4.1.2 เมื่อผู้ใช้คลิกปุ่ม OK ในฟอร์มรับข้อมูล จะปรากฏฟอร์มดังรูป



รูปที่ 4-4 ผู้ใช้เลือกวิธีการคำนวณจากฟอร์มเมนูหลัก

ในฟอร์มนี้จะให้ผู้ใช้ทำการเลือกวิธีที่จะใช้ในการคำนวณ โดยคลิก Radio Button เพื่อทำการเลือกวิธีการคำนวณดังรูป 4-4 แล้วคลิกปุ่ม OK จะเข้าสู่ฟอร์มต่อไป

4.4.1.3 ถ้าผู้ใช้เลือก POWER METHOD จากฟอร์มเมนูหลัก จะปรากฏฟอร์มดังนี้



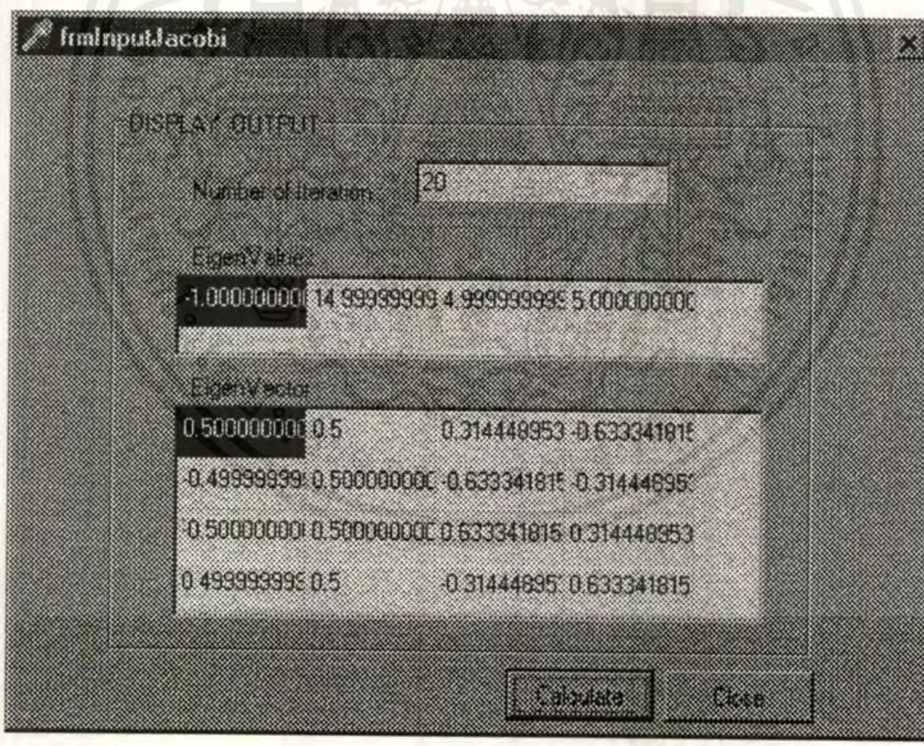
รูปที่ 4-5 แสดงการป้อนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ และการแสดงผลลัพธ์ในวิธี POWER

ในฟอร์มนี้ผู้ใช้ต้องทำการป้อนค่าต่างๆ ดังนี้

1) MMAX : เป็นการป้อนค่าจำนวนครั้งของการทำซ้ำมากที่สุด
2) MFREQ : เป็นการป้อนค่าจำนวนครั้งของการทำซ้ำ
3) ERROR : เป็นการป้อนค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้
4) VECTOR : เป็นการป้อนค่าเวกเตอร์เริ่มต้น

หลังจากนั้นคลิกปุ่ม OK ส่วนการแสดงผลก็จะแสดงค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี POWER

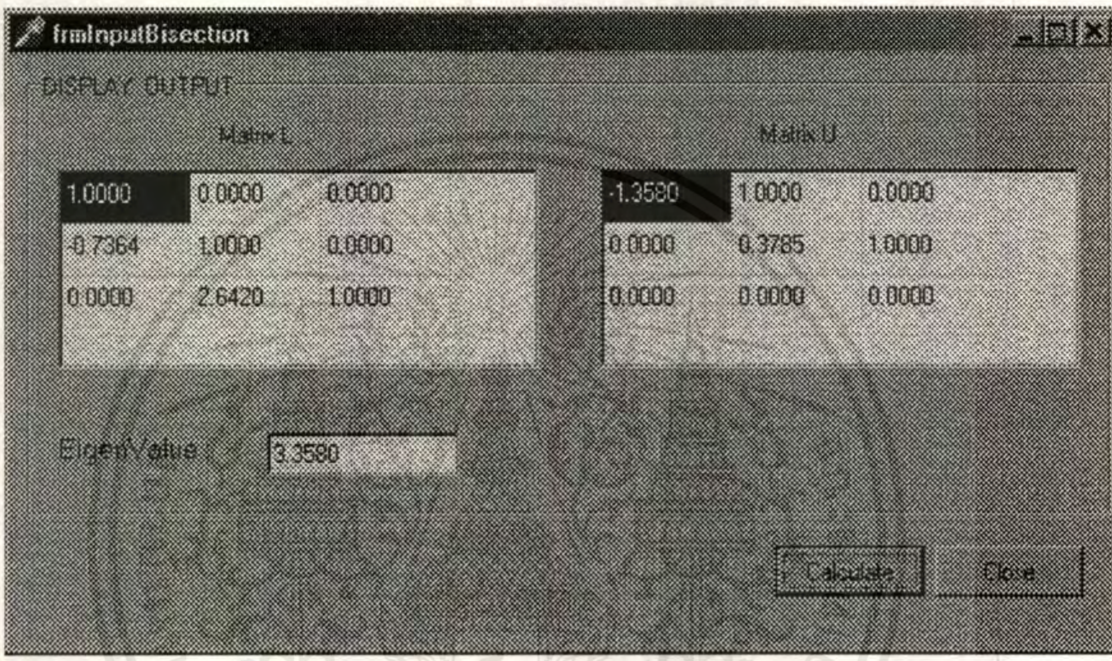
4.4.1.4 ถ้าผู้ใช้เลือก JACOBI METHOD จากฟอร์มเมนูหลัก จะปรากฏฟอร์มดังนี้



รูปที่ 4-6 แสดงผลลัพธ์ในการคำนวณด้วยวิธี JACOBI

ในฟอร์มนี้เมื่อผู้ใช้คลิกปุ่ม OK แล้วส่วนการแสดงผลก็จะแสดงค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี JACOBI

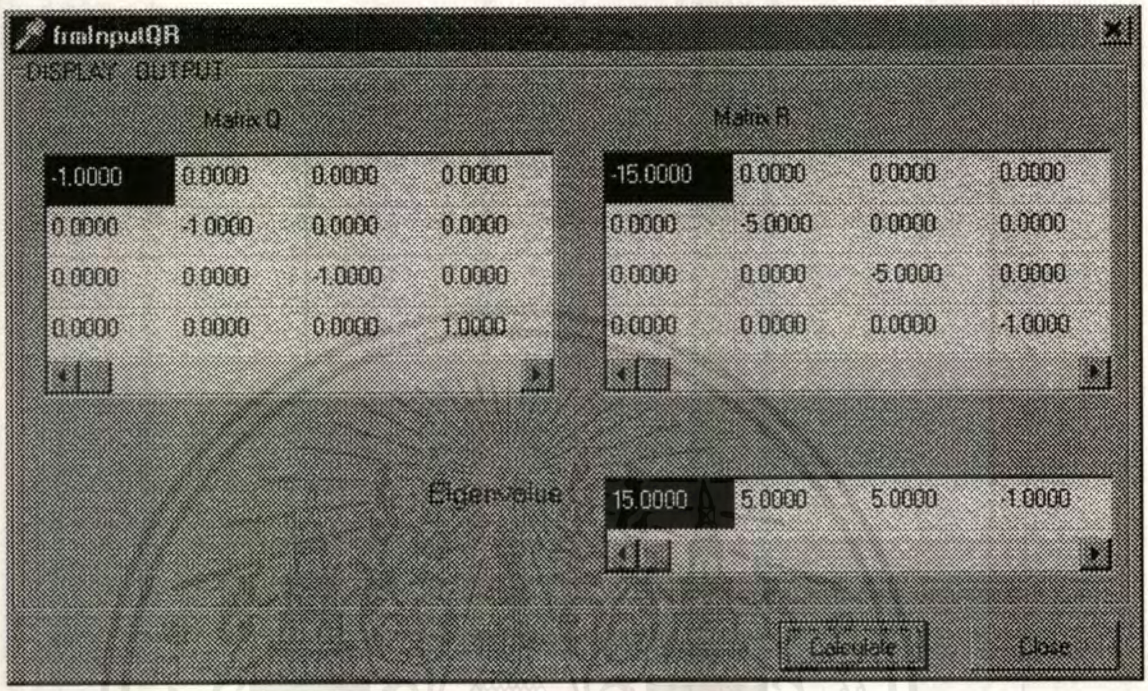
4.4.1.5 ถ้าผู้ใช้เลือก BISECTION METHOD จากฟอร์มเมนูหลัก จะปรากฏฟอร์มดังรูป



รูปที่ 4-7 แสดงผลลัพธ์ในการคำนวณด้วยวิธี BISECTION

ในฟอร์มนี้เมื่อผู้ใช้คลิกปุ่ม OK แล้วส่วนการแสดงผลก็จะแสดงค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี BISECTION

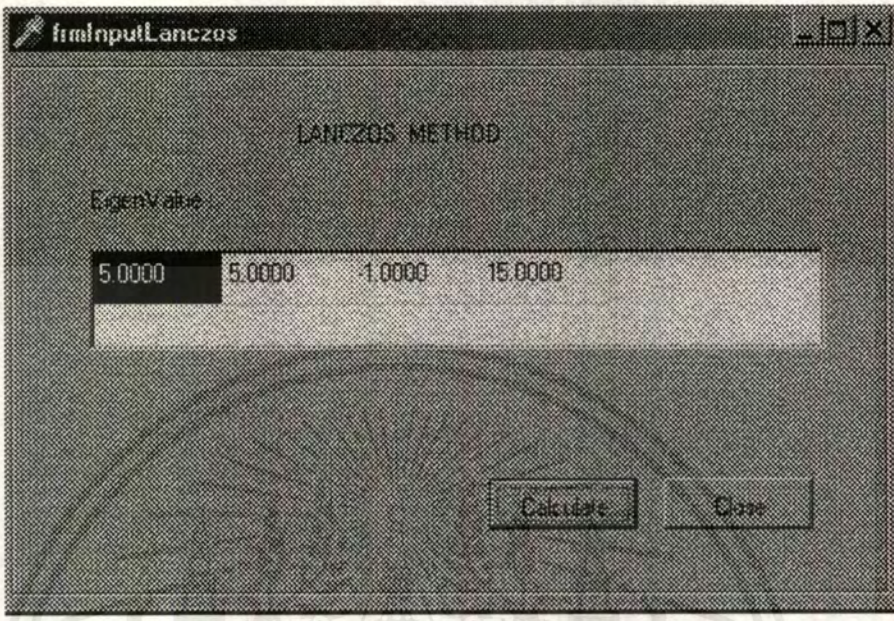
4.4.1.6 ถ้าผู้ใช้เลือก QR METHOD จากฟอร์มเมนูหลัก จะปรากฏฟอร์มดังรูป



รูปที่ 4-8 แสดงผลลัพธ์ในการคำนวณด้วยวิธี QR

ในฟอร์มนี้เมื่อผู้ใช้คลิกปุ่ม OK แล้วส่วนการแสดงผลก็จะแสดงค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี QR

4.4.1.7 ถ้าผู้ใช้เลือก LANCZOS METHOD จากฟอร์มเมนูหลัก จะปรากฏฟอร์มดังรูป



รูปที่ 4-9 แสดงผลลัพธ์ในการคำนวณด้วยวิธี LANCZOS

ในฟอร์มนี้เมื่อผู้ใช้คลิกปุ่ม OK แล้วส่วนการแสดงผลก็จะแสดงค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี LANCZOS

บทที่ 5
สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

โปรแกรมต้นแบบค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง เป็นโปรแกรมที่สร้างขึ้นเพื่ออำนวยความสะดวกในการเรียนการสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเรื่องค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง เป็นการสอนขั้นตอนการคำนวณค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงเพื่อให้สามารถทำความเข้าใจและจดจำได้ดียิ่งขึ้น

5.2 สรุปผลปัญหาพิเศษ

ผลการวิจัยโปรแกรมต้นแบบค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง สามารถสรุปความสามารถโดยสังเขปได้ดังนี้

5.2.1 สามารถใช้การควบคุมต่างๆ ได้ด้วยการใช้เม้าท์ (Mouse) ซึ่งเป็นการทำงานด้วยส่วนการติดต่อแบบกราฟฟิก (Graphic User Interface:GUI)

5.2.2 โปรแกรมต้นแบบสามารถทำการศึกษาด้วยตนเอง ซึ่งสามารถทำการศึกษาเพิ่มเติมได้ภายนอกห้องเรียน เป็นการเพิ่มทักษะให้กับนักศึกษาอีกทางหนึ่ง

5.2.3 โปรแกรมต้นแบบที่จัดทำขึ้นในส่วนการแสดงผล จะแสดงค่าผลลัพธ์ที่เกิดจากการคำนวณค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง

5.3 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากปัญหาพิเศษในหัวข้อค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง เป็นการเริ่มต้นการพัฒนาการเขียนโปรแกรมในแนวนี้ และยังถูกจำกัดด้วยขอบเขตของเวลา ดังนั้นทางผู้จัดทำใคร่ขอเสนอแนะแนวทางสำหรับผู้ที่สนใจที่จะนำโปรแกรมต้นแบบนี้ไปทำการพัฒนาต่อดังนี้

5.3.1 ด้านการใช้ทฤษฎี

เนื่องจากโปรแกรมต้นแบบที่พัฒนาขึ้นนี้เป็นโปรแกรมที่เกี่ยวกับวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ดังนั้นทฤษฎีที่ใช้ในโปรแกรมต้นแบบนี้จะเป็นการใช้งานวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเรื่องค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงโดยเป็นการนำวิชาทางพีชคณิตเชิงเส้นมาใช้งานร่วมกับคอมพิวเตอร์

5.3.2 ด้านการใช้ซอฟต์แวร์

เนื่องจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้ จัดทำโดยซอฟต์แวร์ คือ Delphi เวอร์ชัน 3.0 ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์ที่มีความยืดหยุ่นทางภาษาสูง จึงต้องใช้ความรู้ความเข้าใจในภาษา Pascal และการเขียนโปรแกรมแบบ Object-Oriented เป็นอย่างมาก

สารบัญรูปภาพ

บรรณานุกรม

1. Charles G. Cullen, **An Introduction to Numerical Linear Algebra**, University of Pittsburgh, PWS Publishing Co.,Boston

2. Kahaner David, **Numerical methods and software**, London : Prentice-Hall International, c1989

3. รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข, **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**, โครงการตำรา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2529

4. ผศ.ภัคคินี ยิมเรวัต, **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข**, คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2535

5. รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข, **พีชคณิตเชิงเส้น**, โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2531