การจำลองระบบแถวคอย

Queue Modeling

นางสาวสุภารัตน์ พิรมเพรียว 38054168

นายสุวิทย์ มังกรศิลานนท์ 38054172

นางสาวอมรรัตน์ ชินศิริโชคชัย 38054173

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2541

Queue Modeling

Miss Suparat	Pirompriew	38054168
Mr Suwit	Manggornsilanon	38054172
Miss Amonrat	Chinsirichokchai	38054173

A Special Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Bachelor of Science

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang

1998

ปัญหาพิเศษเรื่อง	การจำลองระบบแถวคอย		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสุภารัตน์	พิรมเพรียว	รหัส 38054168
	นายสุวิทย์	มังกรศิลานนท์	รหัส 38054172
	นางสาวอมรรัตน์	ชินศิริโชคชัย	รหัส 38054173
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์อุบลวรรณา เงินวิจิตร		
	อาจารย์กฤษฎา บุศรา		

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2541

(รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการโครงงานพิเศษ

(รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล)
ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กฤษฎา ไตรสุรัตน์)
กรรมการ

(รองศาสตราจารย์อุบลวรรณา เงินวิจิตร)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์กฤษฎา บุศรา)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การจำลองระบบแถวคอย		
นักศึกษา	นางสาวสุภารัตน์	พิรมเพรียว	รหัส 38054168
	นายสุวิทย์	มังกรศิลานนท์	รหัส 38054172
	นางสาวอมรรัตน์	ชินศิริโชคชัย	รหัส 38054173
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์อุบลวรรณา เงินวิจิตร		
	อาจารย์กฤษฎา บุศรา		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์		
ปีการศึกษา	2541		

บทคัดย่อ

การศึกษาปัญหาพิเศษในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและสร้างโปรแกรมสำหรับการจำลองระบบแถวคอยในการพัฒนาต้นแบบโปรแกรม "การจำลองระบบแถวคอย" แบ่งเป็นสามขั้นตอน คือ ขั้นตอนแรก ทำการคำนวณตามทฤษฎีแถวคอย (Queueing Theory) ขั้นตอนที่สอง ทำการเขียนโปรแกรมด้วยเทคนิคการจำลองแบบระบบแถวคอย (Simulation Technique) และขั้นตอนที่สาม แสดงผลด้วยรูปภาพตามเทคนิคการจำลองแบบระบบแถวคอย

นอกจากนี้ยังสามารถเป็นแนวทางแก่นักศึกษาที่กำลังศึกษาในหัวข้อนี้และผู้สนใจในการศึกษาและพัฒนาโปรแกรมขึ้นใช้เองต่อไป

Special Topic Queue Modeling

Student Suparat Pirompriew 38054168

Suwit Manggornsilanon 38054172

Anomrat Chinsirichokchai 38054173

Advisor Asso.Professor. Ubonwanna Ngeunwijit

Mr. Kridsada Budsara

Department Mathematics and Computer Science

Year 1998

Abstract

The Purpose of this special project is to study and create software for Queue Modeling. In the developing prototype of program "Queue Modeling" has been divided into three steps which are

1. To calculate by Queueing Theory.
2. To write the program with simulation Technique.
3. To display graphic picture by simulation Technique.

Morever it is useful for students or users who are studying about these topics or want to develop this software themselves in the future.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความอนุเคราะห์จาก

รองศาสตราจารย์อุบลวรรณา เงินวิจิตร

อาจารย์กฤษฎา บุศรา

อาจารย์ชานินทร์ ศรีสุวรรณนภา

โดยช่วยให้คำปรึกษา แนะนำการค้นคว้า ให้แนวคิด ข้อคิดเห็น แนะนำแนวทางในการดำเนินงาน

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ

ท้ายสุดนี้คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสาทวิชาความรู้แก่ผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

สภาพการรอคอยเป็นเหตุการณ์ที่เราพบเห็นในชีวิตประจำวันในแทบทุกหน่วยงาน ไม่ว่าจะเป็นหน่วยงานของรัฐหรือเอกชน ตัวอย่างเช่น การรอสัญญาณไฟเขียวตรงสี่แยก การรอรับการรักษาจากแพทย์ในโรงพยาบาลหรือคลีนิค การเข้าแถวคอยใช้บริการของธนาคาร การเข้าแถวเพื่อตรวจสอบเอกสารที่สนามบินหรือการที่เครื่องจักรเสียรอการซ่อม เป็นต้น

จากตัวอย่างที่กล่าวนี้ ลูกค้าที่เข้ารับบริการจะมาถึงแหล่งที่ให้บริการเพื่อคอยรับบริการ ซึ่งการเข้ามารับบริการและการให้บริการไม่จำเป็นต้องเป็นไปอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นปัญหาการรอคอยจึงเกิดขึ้น สำหรับผู้เข้ารับบริการและผู้ให้บริการอาจเป็นบุคคลหรือสิ่งของก็ได้ และเมื่อมีการรอคอยก็ย่อมมีการสูญเสียเกิดขึ้น เช่น เสียเวลา เสียค่าใช้จ่าย หรือเสียโอกาสอื่นๆ ในการศึกษาตัวแบบแถวคอยนั้นจะศึกษาในลักษณะที่เป็นเจ้าของระบบแถวคอยมิใช่เป็นลูกค้า เจ้าของระบบย่อมต้องการที่จะให้บริการแก่ลูกค้าให้ดีที่สุดเท่าที่จะทำได้ โดยใช้ทรัพยากรให้เป็นประโยชน์อย่างเต็มที่

การศึกษาทฤษฎีแถวคอยสมัยใหม่ได้ประยุกต์เอาวิธีการทางคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ เพื่อทำการวิเคราะห์ลักษณะของแถวคอย ทำให้ทฤษฎีแถวคอยเป็นทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นด้วยรูปแบบทางคณิตศาสตร์ใช้แทนปัญหาของแถวคอย เพื่อใช้วิเคราะห์สภาวะของแถวคอย โดยการศึกษาลักษณะรูปแบบทางทฤษฎีความเป็นไปได้ของผู้ใช้บริการและหน่วยให้บริการแล้วหาผลลัพธ์เป็นค่าต่างๆ แสดงสภาวะของแถวคอย ผลลัพธ์ดังกล่าวจะใช้ช่วยในการตัดสินใจดำเนินการเกี่ยวกับบริการให้มีประสิทธิภาพดีขึ้น โดยมีผลเป็นการลดค่าใช้จ่ายหรือช่วยจัดระบบบริการให้เหมาะสมยิ่งขึ้นจึงเป็นเหตุผลเบื้องต้นที่คณะผู้จัดทำสนใจที่จะศึกษาระบบแถวคอย เพื่อเป็นแนวทางในการริเริ่มพัฒนาโปรแกรมตามทฤษฎีแถวคอย

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาระบบจำลองตามทฤษฎีแถวคอย
2. เพื่อสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับระบบแถวคอย
3. เพื่อช่วยองค์กรจัดระบบบริการให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1. ศึกษาระบบแถวคอยที่อยู่ในสถานภาพอยู่ตัว
2. การแจกแจงของการมาเป็นแบบปัวส์ซอง การแจกแจงของเวลาระหว่างการมาเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียลและการแจกแจงของเวลาที่ให้บริการเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียล
3. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน
4. ระบบแถวคอยมีความสามารถรับผู้ใช้บริการได้จำนวนจำกัดและเมื่อเข้ามาที่ระบบแถวคอยแล้วไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้
5. จำนวนของผู้ใช้บริการเป็นแบบไม่จำกัด

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับการจัดระบบบริการให้เหมาะสมสำหรับบริษัทหรือองค์กรขนาดเล็ก
2. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาและพัฒนาตามทฤษฎีแถวคอย
3. สามารถนำโปรแกรมมาใช้ในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยได้ทั้งในปัจจุบันและอนาคต
4. ใช้เป็นแนวทางในการศึกษาเพิ่มเติมของผู้ที่สนใจในระบบจำลองตามทฤษฎีแถวคอย

1.5 แผนการพัฒนาระบบงาน

ภาคเรียนที่ 1	
1 มิ.ย. – 15 มิ.ย.	ศึกษาปัญหาและที่มาของหัวข้อพิเศษ
16 มิ.ย. – 30 มิ.ย.	ศึกษาเครื่องมือ , Software , ขอบเขตและความเป็นไปได้ที่จะดำเนินงาน
1 ก.ค. - 7 ก.ค.	จัดทำแบบขออนุมัติทำปัญหาพิเศษ
8 ก.ค. – 14 ก.ค.	ศึกษา Software ที่ใช้
15 ก.ค. – 21 ก.ค.	ศึกษาทฤษฎีและหลักเกณฑ์ที่เกี่ยวข้อง
22 ก.ย. - 2 ต.ค.	สอบปลายภาค
ภาคเรียนที่ 2	
1 พ.ย. – 30 พ.ย.	ออกแบบ Interface
16 พ.ย. – 31 ธ.ค.	เขียนโปรแกรมโดยใช้ C++Builder 3
1 ม.ค. – 31 ม.ค.	ทดสอบและแก้ไขโปรแกรม
1 ก.พ. – 28 ก.พ.	ทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

บทที่ 2

ทฤษฎีของระบบแถวคอย

2.1 ความหมายของแถวคอย

การรอคอย (Waiting) เป็นเงื่อนไขที่เกิดขึ้นเมื่อผู้ใช้บริการต้องรอหน่วยให้บริการ เมื่อหน่วยให้บริการไม่สามารถให้บริการได้ทัน แถวคอย (Queue) เกิดขึ้นเมื่อความต้องการรับบริการมีมากกว่าความสามารถในการให้บริการ และเป็นสภาพที่เกิดขึ้นเนื่องจากมีการรอคอยเพื่อรับบริการ ซึ่งมีสาเหตุมาจากความไม่แน่นอนของอัตราการเข้ารับบริการและการให้บริการ ตัวอย่างแถวคอยที่พบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน เช่น การเข้าแถวคอยใช้บริการของธนาคาร การเข้าแถวลงทะเบียนของนักศึกษา การรอของรถที่จะจ่ายค่าผ่านทาง เป็นต้น

ระบบแถวคอยประกอบด้วย

1 ลูกค้าที่เข้ารับบริการ (Customer)

2 แถวคอย (Queue)

3 หน่วยให้บริการ (Service Chanel หรือ Server)

สำหรับกระบวนการเกิดแถวคอยแสดงได้ดังรูป 2.1

รูปที่ 2.1 กระบวนการเกิดระบบแถวคอย

2.2 ลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอย มีดังนี้

ลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอย จะศึกษาเกี่ยวกับผู้ใช้บริการ(Customer) หน่วยให้บริการ (Service Chanel หรือ Server) และการให้บริการในระบบแถวคอย ระบบแถวคอยจะประกอบด้วยลักษณะที่สำคัญ 6 ลักษณะดังนี้ คือ

2.2.1 รูปแบบการเข้ารับบริการของผู้ใช้บริการ (Arrival Pattern of Customers)

จำนวนผู้ใช้บริการหรือลูกค้า อาจจะมีจำนวนจำกัด เช่น จำนวนนักเรียนที่มารอสอบสัมภาษณ์ หรืออาจจะมีจำนวนไม่จำกัด เช่น จำนวนผู้โทรศัพท์เข้ามาใช้บริการฝากข้อความ

ถ้าผู้ใช้บริการเข้ารับบริการเป็นเวลาแน่นอนก็จะสามารถจัดให้มีหน่วยให้บริการเพียงพอตามเวลานั้นๆ เพื่อลดปัญหาแถวคอยลงได้ แต่เนื่องจากการมาของผู้ใช้บริการขึ้นอยู่กับปัจจัยภายนอกหลายๆอย่าง จึงทำให้ช่วงเวลาหนึ่งๆผู้ใช้บริการเข้ามารับบริการมากบ้าง น้อยบ้างตามปัจจัยภายนอกนั้นๆ

รูปแบบการเข้ารับบริการของผู้ใช้บริการ แบ่งเป็น 2 แบบ คือ

- การเข้ามารับบริการในอัตราคงที่

การเข้ามารับบริการในอัตราคงที่ กล่าวคือ ลูกค้าเข้ามาในลักษณะสม่ำเสมอ เช่น 10 คนทุกๆชั่วโมง หรือลูกค้าเข้ามาในระบบทุกๆ6 นาที ดังจะเห็นได้จากการผลิตในสายการผลิตของโรงงานอุตสาหกรรม เช่น ในโรงงานผลิตน้ำอัดลมขวดที่บรรจุน้ำอัดลมเต็มแล้วจะเคลื่อนเข้ามาที่จุดที่ทำการปิดฝาขวดโดยจะเคลื่อนเข้ามาในอัตราคงที่ เข้ารับบริการคือปิดฝาขวดโดยใช้เครื่องจักร

- การเข้ามารับบริการในแบบสุ่ม

การเข้ามารับบริการในแบบสุ่ม กล่าวคือ ลูกค้าเข้ามาในลักษณะที่ไม่แน่นอน ไม่สม่ำเสมอ ไม่สามารถทราบล่วงหน้า และการเข้ามาของลูกค้าแต่ละรายเป็นอิสระต่อกัน เช่น ลูกค้าที่มาเบิกเงินที่เครื่องรับจ่ายเงินอัตโนมัติ ลูกค้าที่มาจ่ายเงินที่แคชเชียร์ในซูเปอร์มาร์เกตหรือศูนย์หนังสือ รถยนต์ที่เข้ามาเติมน้ำมันที่ปั๊ม เป็นต้น

ในการเก็บข้อมูลการเข้ามารับบริการของลูกค้านั้นสามารถทำได้ใน 2 ลักษณะดังนี้

- ในลักษณะอัตราการเข้ารับบริการ (Arrival Rate) คือ ลูกค้าเข้ามารับบริการโดยเฉลี่ยกี่คนในหนึ่งหน่วยเวลา เช่น รถเข้ามาเพื่อเติมน้ำมัน 10 คันต่อชั่วโมง
- ในลักษณะ เวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ (Arrival Time Interval) คือ เวลาห่างโดยเฉลี่ยระหว่างลูกค้าแต่ละคน เช่น รถแต่ละคันมาห่างกัน 6 นาที

นอกจากข้อมูลในด้านจำนวนประชากรและอัตราการเข้ามารับบริการแล้ว ข้อมูลเกี่ยวกับพฤติกรรมของลูกค้าส่วนใหญ่ของระบบก็เป็นสิ่งสำคัญ บางระบบมีลูกค้าซึ่งมีความอดทนจะรอจนกว่าจะได้รับบริการ ในขณะที่ลูกค้าของบางระบบจะเปลี่ยนใจไม่รับบริการเมื่อเห็นว่าแถวคอยยาวเกินไป หรือเปลี่ยนไปใช้หน่วยบริการหน่วยอื่นเมื่อรอได้ระยะหนึ่ง เป็นต้น ตัวแบบแถวคอยส่วนใหญ่มีสมมติฐานว่าลูกค้าจะรอจนกว่าจะได้รับบริการ

โดยทั่วไป ปัญหาแถวคอยในส่วนที่เข้ารับบริการซึ่งอัตราการเข้ารับบริการ (Arrival Rate) หรือการเข้าสู่แถวคอยจะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซอง (Poisson Probability Distribution) เป็นส่วนใหญ่ นั่นคือ จำนวนลูกค้าที่เข้ามารอรับบริการในช่วงเวลาที่กำหนดจะมีการแจกแจงแบบปัวส์ซองโดยการเข้ามาสู่ระบบแถวคอยจะเกิดอย่างสุ่ม คือลูกค้าเข้ามาในลักษณะที่ไม่แน่นอน ไม่สม่ำเสมอ ไม่สามารถทราบล่วงหน้า ในบางเวลาอาจมีลูกค้าเข้ามามากราย บางเวลาอาจมีน้อยรายหรือไม่มีเลย ดังนั้นในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยจึงใช้ค่าเฉลี่ยของการเข้ามารับบริการ

ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะการแจกแจงของการมาแบบปัวส์ซอง (Poisson Arrival Distribution) และการแจกแจงของเวลาระหว่างการมาแบบเอ็กซโปเนนเชียล (Exponential Interarrival Time Distribution)

1) การแจกแจงแบบปัวส์ซอง (Poisson Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซอง ด้วยพารามิเตอร์ λ

$$P(X=n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \quad ; n = 0,1,2,\ldots$$

โดยที่ X เป็นจำนวนครั้งของการมาในช่วงเวลาที่กำหนด

λ = อัตราการมาโดยเฉลี่ย (จำนวนผู้ใช้บริการที่มาต่อ 1 หน่วยเวลา)

$e = 2.7182818$

ค่าเฉลี่ย : $E(X) = \lambda$

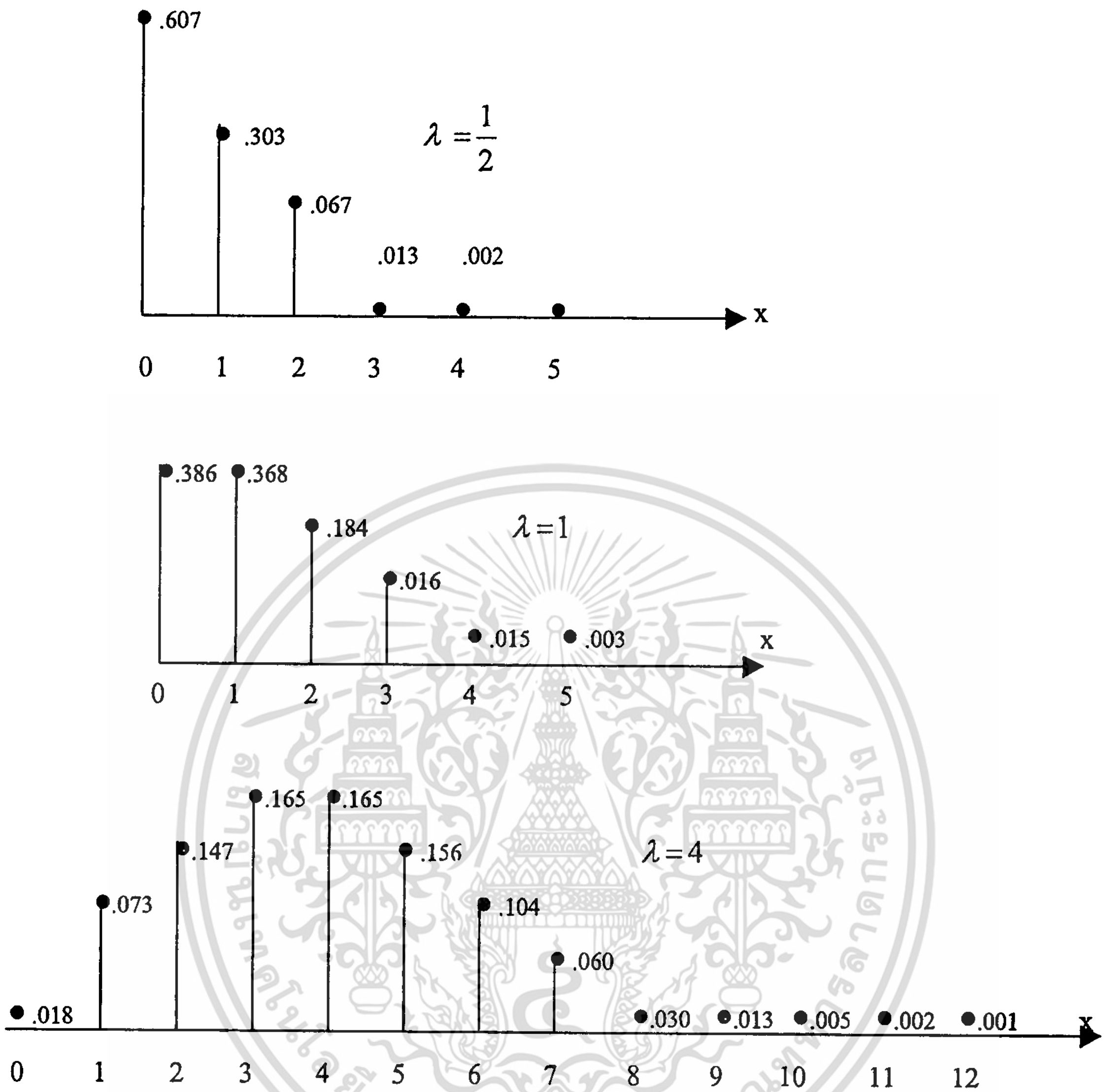
ความแปรปรวน : $Var(X) = \lambda$

2) ที่มาของการแจกแจงแบบปัวส์ซอง

__นิยามที่ 1__ เรากล่าวว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง ถ้าฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น X ถูกกำหนดโดย

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x:\lambda) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots && (1) \\ &= 0 \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{aligned}$$

เมื่อพารามิเตอร์ λ คล้องตาม $\lambda > 0$ และเรียกฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นซึ่งกำหนดในสมการ (1)ว่า "ฟังก์ชันการแจกแจงปัวส์ซอง" เรียกตัวแปรสุ่ม X ว่า "ตัวแปรสุ่มแบบปัวส์ซอง"



รูปที่ 2.2 กราฟของการแจกแจงแบบปัวส์ซอง

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง แล้ว $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$ และ $M_X(t) = e^{(e^t-1)}$

<u>พิสูจน์</u> จาก

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}
\end{aligned}
$$

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M'_X(t) = \lambda e^{-\lambda} e^t e^{\lambda e^t}$$

$$M'_X(0) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

และ $$M'_X(t) = \frac{d}{dt}E[e^{tx}]$$

$$= E\left[\frac{d}{dt}(e^{tx})\right]$$

$$= E[Xe^{tx}]$$

$$M'_X(0) = E[X]$$

ดังนั้น $$E(X) = \lambda$$

ในทำนองเดียวกัน $$E(X^2) = M''_x(0) = \lambda(\lambda+1)$$

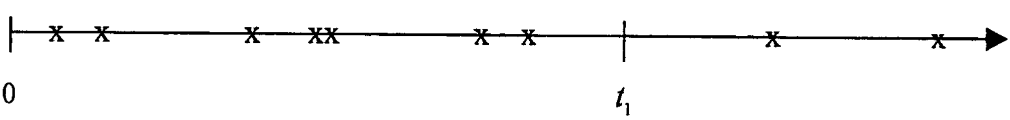
นั่นคือ $$Var(X) = E(X^2) - [E(x)]^2$$

$$= \lambda(\lambda+1) - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

การแจกแจงแบบปัวส์ซองใช้เป็นแบบจำลองสำหรับปรากฏการณ์ธรรมชาติแบบสุ่มหลายชนิด เนื่องจากค่าของตัวแปรสุ่มแบบปัวส์ซองเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นปรากฏการณ์ธรรมชาติแบบสุ่มใดๆ ซึ่งเราสนใจใช้นับจำนวนมักจะใช้แบบจำลองซึ่งสมมติว่ามีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง การนับอาจเป็นจำนวนอุบัติเหตุที่ร้ายแรงบนถนน ถึงมีคนตายในจังหวัดหนึ่งต่อสัปดาห์ จำนวนโทรศัพท์ที่เข้ามาในศูนย์รวมโทรศัพท์ของบริษัทแห่งหนึ่งต่อชั่วโมง จำนวนรอยตำหนิต่อ 1 หน่วยความยาวของลวดบางชนิด โดยธรรมชาติแล้วไม่ใช่ว่าจำนวนนับทั้งหมดสามารถใช้แบบจำลอง ซึ่งมีการแจกแจงแบบปัวส์ซองได้ จะใช้ได้ถ้าคล้องตามคุณสมบัติของแบบจำลองแบบปัวส์ซอง

สมมติว่าเรากำลังสังเกตการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ในช่วงเวลาหนึ่งหรือในอาณาบริเวณหนึ่ง หรือความยาวที่กำหนดให้ เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอาจเป็นอุบัติเหตุที่ร้ายแรงถึงมีคนตายบนถนนสายหนึ่ง รอยตำหนิบนผ้าที่กำหนดพื้นที่ให้ หรือรอยตำหนิบนลวดที่กำหนดความยาวให้ เราอาจจะกล่าวถึงการเกิดขึ้นในช่วงเวลา ในอาณาบริเวณ หรือความยาวซึ่งการเกิดขึ้นในช่วงเวลาที่กำหนดให้สามารถเขียนได้ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ในช่วงเวลาหนึ่งหรืออาณาบริเวณหนึ่ง

ให้เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแทนด้วย X จากรูปที่ 2.3 แสดงว่ามีเหตุการณ์เกิดขึ้น 7 ครั้งระหว่างเวลา 0 และ t_1 สมมติว่ามีจำนวนบวก γ ซึ่งคล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) ความน่าจะเป็นที่จะเกิด 1 เหตุการณ์ในช่วงเวลาสั้นๆ คือ h ประมาณเท่ากับ γh หรือ Pr [เกิด 1 เหตุการณ์ในช่วงเวลา h] = $\gamma h + O(h)$

(2) ความน่าจะเป็นที่จะเกิดมากกว่า1 เหตุการณ์ในช่วงเวลาสั้นๆ มีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับความน่าจะเป็นที่จะเกิด 1 เหตุการณ์ในช่วงเวลาเดียวกัน หรือ Pr [เกิด 2 เหตุการณ์หรือมากกว่านั้น ในช่วงเวลา h] = $O(h)$

(3) จำนวนเหตุการณ์ในช่วงเวลาที่ไม่ซ้อนกันเป็นอิสระต่อกัน

พจน์ $O(h)$ ซึ่งอ่านว่า "ฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่น้อยกว่า h" แทนฟังก์ชันซึ่งคล้องตาม $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h)}{h} = 0$

เราสามารถตีความหมายของ γ ว่าเป็น <u>อัตราเฉลี่ยของการเกิดขึ้นต่อ 1 หน่วยเวลา</u> ดังนั้นจึงใช้เป็น <u>อัตราเฉลี่ยของการเกิดขึ้น</u>

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> ถ้าข้อสมมติข้างต้นทั้ง 3 ข้อเป็นจริง จำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง โดยมีพารามิเตอร์ $\lambda = \gamma t$ หรือ ถ้าตัวแปรสุ่ม Z(t) แทนจำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t แล้ว

$$\Pr[z(t) = z] = \frac{e^{-\gamma t}(\gamma t)^z}{z!} \qquad \text{เมื่อ } z = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

<u>พิสูจน์</u> แบ่งช่วง (0 , t) เป็น n ส่วน แต่ละส่วนยาว $h = \dfrac{t}{n}$ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ k ครั้งในช่วง (0 , t) เท่ากับความน่าจะเป็นที่จะเกิด 1 เหตุการณ์ในแต่ละ k ช่วงย่อยของ n ช่วงย่อยที่เราแบ่งในช่วง (0 , t) ความน่าจะเป็นที่จะเกิด 1 เหตุการณ์ หรือความน่าจะเป็นของ "ความสำเร็จ" ในช่วงย่อยที่กำหนดให้ช่วงหนึ่งคือ γh แต่ละช่วงย่อยจะมีเหตุการณ์เกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นก็ได้ จากข้อสมมตินี้จะได้ว่าเป็นการทดลองเบอร์นูลลี่ซึ่งทำซ้ำๆกันและเป็นอิสระแก่กัน ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ ได้ความสำเร็จ k ครั้งในการทดลอง n ครั้ง คือ

$$\binom{n}{k}(\gamma h)^k(1-\gamma h)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\gamma t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\gamma t}{n}\right)^{n-k}$$

ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ k ครั้ง ในช่วงเวลา (0 , t)

ถ้าให้จำนวนช่วงย่อยเพิ่มขึ้นๆ ไม่จำกัดคือ ให้ $n \to \infty$

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\gamma t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\gamma t}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!}(\gamma t)^k\left(1-\frac{\gamma t}{n}\right)^{n-k}\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \to \frac{(\gamma t)^k e^{-\gamma t}}{k!}$$

เนื่องจาก เมื่อ $n \to \infty$

$$\left(1-\frac{\gamma t}{n}\right)^n \to e^{-\gamma t}$$

$$\left(1-\frac{\gamma t}{n}\right)^{-k} \to 1$$

และ $$\frac{n!}{(n-k)!n^k} \to 1$$

ทฤษฎีบทที่ 2 นี้ ให้เงื่อนไขของการทดลองที่เกี่ยวกับการนับจำนวนครั้งที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา (หรือความยาว หรืออาณาบริเวณ หรือปริมาตร ฯลฯ) ว่าสามารถใช้แบบจำลองซึ่งสมมติว่ามีการแจก-แจงแบบปัวส์ซอง โดยปกติเราไม่ทราบพารามิเตอร์ γ ของการแจกแจงแบบปัวส์ซอง

ในทางปฏิบัติ จะต้องระวังความผิดพลาดที่จะใช้การแจกแจงแบบปัวส์ซองกับการนับ เช่น การศึกษาการแจกแจงของไข่แมลงในพื้นที่เก็บเกี่ยวบางแห่ง จะใช้แบบจำลองแบบปัวส์ซองไม่ได้ เนื่องจากแมลงวางไข่เป็นกลุ่ม ซึ่งขัดกับข้อสมมติของการเป็นอิสระต่อกันของการนับ

3) การแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล (Exponential Distribution)

กำหนดให้ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X เป็นเวลาในการให้บริการหรือช่วงห่างระหว่างการมาของผู้ใช้บริการ เรากล่าวว่า X มีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของเวลาระหว่างการมา คือ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda.e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \le 0 \end{cases}$$

และ F(x) เป็นฟังก์ชันสะสมของ f(x) ดังนั้น

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} ; x \ge 0 \\ 0 \quad ; x < 0 \end{cases}$$

ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล $E(X)$ กำหนดด้วย

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

จาก
$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tX}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{สำหรับ} \quad t < \lambda$$

และ
$$E(X^2) = \left.\frac{d^2}{dt^2}M(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

ดังนั้น ความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล $Var(X)$ กำหนดด้วย

$$Var(X) = E(X^2) - [E(x)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

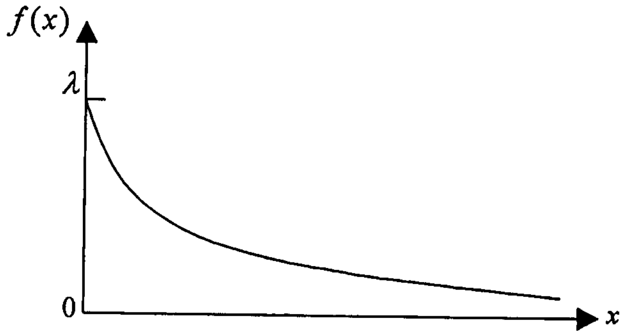
4) ที่มาของการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล

ลักษณะของระบบแถวคอยถูกกำหนดโดยคุณสมบัติทางสถิติ 2 ข้อ ก็คือการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาระหว่างการมา (Interarrival Time) และการแจกแจงของความน่าจะเป็นของเวลาในการให้บริการ (Service Time) สำหรับระบบแถวคอยจริง การแจกแจงเหล่านี้สามารถมีได้หลายรูปแบบ โดยมีข้อจำกัดที่สำคัญเพียงข้อเดียว ก็คือจะต้องมีค่าเป็นบวก อย่างไรก็ตามการสร้างรูปแบบทฤษฎีแถวคอยให้กับระบบแถวคอยจริง จำเป็นจะต้องกำหนดรูปแบบการแจกแจงสมมติให้กับแต่ละการแจกแจงเหล่านี้ โดยต้องมีความสมจริงอย่างเพียงพอเพื่อที่รูปแบบแถวคอยจะให้ค่าพยากรณ์ที่สมเหตุสมผล และขณะเดียวกันจะต้องง่ายต่อการใช้ด้วย จากการพิจารณาข้อกำหนดเหล่านี้ ทำให้ได้ว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นที่มีความสำคัญมากที่สุด ก็คือ การแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล

สมมติให้ตัวแปรสุ่ม X เป็นเวลาระหว่างการมาและเวลาในการให้บริการ X จะมีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \le 0 \end{cases}$$

โดยมีรูปดังนี้



รูปที่ 2.4 ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นสำหรับการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล

ความน่าจะเป็นสะสม คือ

$$P[X \le x] = 1 - e^{-\lambda x} \qquad ; x \ge 0$$

$$P[X > x] = e^{-\lambda x} \qquad ; x \ge 0$$

และมีค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวน คือ

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

การพิสูจน์ว่า X มีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลนั้นจะใช้คุณสมบัติ 6 ข้อดังต่อไปนี้พิสูจน์

<u>คุณสมบัติข้อ 1</u> ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดของ x $(x \ge 0)$

จากคุณสมบัติข้อ 1 จะทำให้ได้ว่า

$$P\{0 \le X \le \Delta x\} > P\{x \le X \le x + \Delta x\}$$

สำหรับทุกค่าบวกใดๆของ x และ Δx ผลที่ได้มานี้ได้มาจากความจริงที่ว่าความน่าจะเป็นเหล่านี้เป็นพื้นที่ใต้โค้ง $f(x)$ ที่กำหนดช่วงความยาว Δx และความสูงโดยเฉลี่ยของกราฟส่วนที่สองจะสูงน้อยกว่าส่วนแรก ดังนั้นไม่เพียงแต่ผลที่ได้มาจะเป็นไปได้เท่านั้น X ก็ยิ่งจะมีค่าใกล้ค่าศูนย์ด้วย พิจารณาค่า

$$P\{0 \le X \le \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda}\} = 0.393$$

เมื่อ
$$P\{\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda} \le X \le \frac{3}{2}\frac{1}{\lambda}\} = 0.383$$

เพื่อที่ว่า ค่า X จะมีค่าน้อยมากกว่าที่จะมีค่าใกล้ค่าคาดหวังของมันเอง ถึงแม้ว่าช่วงที่สองจะกว้างเป็น 2 เท่าของช่วงแรก

<u>คุณสมบัติข้อ 2</u> Lack of memory

คุณสมบัติข้อนี้สามารถแสดงด้วยสมการคณิตศาสตร์ คือ

$$P\{X > x + \Delta x / X > \Delta x\} = P\{X > x\}$$

เมื่อ x และ Δx ใดๆเป็นค่าบวก

การแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่เหลืออยู่จนกระทั่งเหตุการณ์(การมาหรือการให้บริการเสร็จสมบูรณ์แล้ว)เกิดขึ้นเหมือนๆกัน โดยไม่คำนึงถึงว่าเวลา(Δx)ผ่านไปแล้วเท่าไร ปรากฏการณ์นี้เกิดขึ้นกับการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล เนื่องจาก

$$P\{X > x + \Delta x / X > \Delta x\} = \frac{P\{X > \Delta x, X > x + \Delta x\}}{P\{X > \Delta x\}}$$

$$= \frac{P\{X > x + \Delta x\}}{P\{X > \Delta x\}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(x+\Delta x)}}{e^{-\lambda \Delta x}}$$

$$= e^{-\lambda x}$$

สำหรับเวลาระหว่างการมาคุณสมบัตินี้จะบรรยายสถานการณ์ทั่วๆไปเมื่อเวลาจนกระทั่งการมาครั้งถัดไปเสร็จสิ้นสมบูรณ์ไม่มีอิทธิพลจากการมาครั้งสุดท้ายที่เกิดขึ้น สำหรับเวลาในการให้บริการคุณสมบัตินี้ยากที่จะอธิบาย เราไม่อาจจะคาดว่าอยู่ในสถานการณ์ที่หน่วยให้บริการต้องให้บริการลูกค้าแต่ละคนเรียงตามลำดับเหมือนๆกัน เพราะเมื่อการให้บริการผ่านไปนานๆอาจจะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นเพียงเล็กน้อย ในทางกลับกัน สำหรับสถานการณ์ที่การให้บริการแตกต่างกันระหว่างลูกค้าแต่ละคน สมการคณิตศาสตร์ของคุณสมบัตินี้อาจจะเป็นจริงได้ ในกรณีนี้ถ้าพิจารณาการให้บริการที่ผ่านพ้นไปแล้วสำหรับลูกค้าแต่ละคนอาจจะมีเฉพาะความต้องการของลูกค้าที่ช่วยให้มีการให้บริการเพิ่มมากที่สุด ซึ่งเกี่ยวข้องเพียงอย่างเดียว

<u>คุณสมบัติข้อ 3</u> ค่าน้อยที่สุดของตัวแปรสุ่มเอ็กซโปเนนเชียลอิสระหลายๆตัวมีการแจกแจงแบบเอ็กซ-โปเนนเชียล

คุณสมบัตินี้กล่าวถึงในทางคณิตศาสตร์ ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มเอ็กซโป-เนนเชียลอิสระด้วยพารามิเตอร์ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ตามลำดับ ให้ U เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเท่ากับค่าน้อยที่สุดของค่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ คือ

$$U = \text{ค่าที่น้อยที่สุด ของ}\{X_1, \ X_2, \ . \ . \ . \ , \ X_n\}$$

ดังนั้น ถ้า X_i แทนเวลาจนกระทั่งจะมีเหตุการณ์เกิดขึ้น แล้ว U แทนเวลาจนกระทั่งจะมีเหตุการณ์แรกเกิดขึ้นจากเหตุการณ์ที่แตกต่างกัน เมื่อที่ x ใดๆ ≥ 0

$$\begin{aligned} P\{U > x\} &= P\{X_1 > x, \ X_2 > x, \ . \ . \ . \ , \ X_n > x\} \\ &= P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\} \ . \ . \ . \ P\{X_n > x\} \\ &= e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x} \cdots e^{-\lambda_n x} \\ &= \exp\ \{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x\} \end{aligned}$$

เพื่อว่า U มีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลโดยแท้จริง ด้วยพารามิเตอร์

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

คุณสมบัตินี้เกี่ยวข้องกับเวลาระหว่างการมาในการจำลองระบบแถวคอย โดยเฉพาะสมมติว่าการมาของลูกค้าแต่ละคนเป็น n รูปแบบที่แตกต่างกัน แต่เวลาระหว่างการมาของแต่ละแบบ (i) มีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ_i (i = 1, 2, . . . , n) จากคุณสมบัติที่ 2 เวลาที่เหลืออยู่จากช่วงเวลาหนึ่งโดยเฉพาะ จนกระทั่งการมาครั้งถัดไปของลูกค้าแบบที่ i มีการแจกแจงที่เหมือนกัน ดังนั้นให้ X_i เป็นเวลาที่เหลืออยู่ วัดจากช่วงเวลาหนึ่งที่มีลูกค้า 1 คนเข้ามา คุณสมบัติที่ 3 จะบอกเราว่า U (เวลาระหว่างการมาของระบบแถวคอยทั้งหมด) มีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล ด้วยพารามิเตอร์ λ ผลที่ได้ก็คือ ไม่ต้องสนใจความแตกต่างระหว่างลูกค้าแต่ละคนซึ่งยังคงมีเวลาระหว่างการมาเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียลสำหรับการจำลองระบบแถวคอย

อย่างไรก็ตามสิ่งที่เกี่ยวข้องที่สำคัญสำหรับเวลาในการให้บริการในการจำลองระบบแถวคอยที่มีมากกว่า1 หน่วยให้บริการคือ เวลาระหว่างการมา ตัวอย่างพิจารณาสถานการณ์เมื่อทุกหน่วยให้บริการมีการแจกแจงเวลาในการให้บริการเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียลเหมือนกัน ด้วยพารามิเตอร์ μ สำหรับในกรณีนี้ให้ n เป็นจำนวนของหน่วยให้บริการในปัจจุบันที่ยังมีการให้บริการอยู่ และให้ X_i เป็นเวลาที่ให้บริการเหลืออยู่ของหน่วยให้บริการที่ i (i = 1, 2, . . . , n) ซึ่งมีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $\lambda_i = \mu$ จะได้ U (เป็นเวลาจนกระทั่งการให้บริการครั้งถัดไปเสร็จสมบูรณ์ของหน่วยให้บริการใดๆ) มีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $\lambda = n\mu$ ผลก็คือทำให้ระบบแถวคอยเหมือนกับระบบหน่วยให้บริการเดียว (Single-Server) เมื่อเวลาที่ให้บริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $n\mu$

<u>คุณสมบัติข้อ 4</u> ความสัมพันธ์กับการแจกแจงแบบปัวส์ซอง

สมมติว่าเวลาระหว่างการเกิดเหตุการณ์มีความต่อเนื่องกันมีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ คุณสมบัติที่ 4 จะเกี่ยวข้องกับการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนเวลาที่จะเกิดเหตุการณ์ภายใต้ระยะเวลาที่กำหนด ให้ $X(x)$ แทนจำนวนของการเกิดในเวลา x $(x > 0)$ เมื่อเวลาเป็น 0 จะเป็นช่วงเวลาเริ่มต้นในการนับ สิ่งที่เกี่ยวข้อง คือ

$$P\{X(x) = n\} = \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$X(x)$ มีการแจกแจงแบบปัวส์ซองด้วยพารามิเตอร์ λx ตัวอย่างให้ $n = 0$

$$P\{X(x) = 0\} = e^{-\lambda x}$$

ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นจากการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลที่จะเกิดเหตุการณ์เป็นครั้งแรกหลังจากเวลา x ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบปัวส์ซอง คือ

$$E\{X(x)\} = \lambda x$$

เพื่อว่าจำนวนเหตุการณ์เฉลี่ยต่อหน่วยเวลาคือ λ ดังนั้น λ เป็นอัตราเฉลี่ยที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ถูกนับต่อเนื่องไปเรื่อยๆ กระบวนการนับ $\{X(x); x > 0\}$ จะเป็นกระบวนการปัวส์ซอง (Poisson Process) ด้วยพารามิเตอร์ λ (อัตราเฉลี่ย)

คุณสมบัตินี้ให้ข้อมูลที่มีประโยชน์เกี่ยวกับการให้บริการที่เสร็จสมบูรณ์ เมื่อเวลาในการให้บริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ μ เราจะได้คำนิยาม $X(x)$ ว่าเป็นจำนวนของความสำเร็จในการให้บริการซึ่งได้มาโดยหน่วยให้บริการที่ให้บริการต่อเนื่องในช่วงเวลา x เมื่อ $\lambda = \mu$ สำหรับระบบการจำลองแถวคอยที่มีหน่วยให้บริการหลายตัว (Multiple-Server) $X(x)$ เป็นจำนวนของความสำเร็จในการให้บริการซึ่งได้มาโดย n หน่วยให้บริการ ที่ให้บริการต่อเนื่องในช่วงเวลา x เมื่อ $\lambda = n\mu$

คุณสมบัตินี้มีประโยชน์โดยเฉพาะในการอธิบายพฤติกรรมความน่าจะเป็นของการมา เมื่อเวลาระหว่างการมามีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ ในกรณีนี้ $X(x)$ เป็นจำนวนของการมาในช่วงเวลา x

การเข้ามาบางครั้งอาจจะพูดได้ว่าเกิดขึ้นอย่างสุ่มหมายความว่า เกิดขึ้นในลักษณะของกระบวนการเข้ามาแบบปัวส์ซอง การอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาตินี้คือทุกๆช่วงเวลาที่กำหนดระยะเวลาไว้มีโอกาสการมาได้เหมือนกันโดยไม่คำนึงถึงการมาครั้งก่อน

<u>คุณสมบัติข้อ 5</u> สำหรับทุกๆค่าของ x ที่เป็นค่าบวก $(x \geq 0)$

$$P\{X \leq x+\Delta x / X > x\} \approx \lambda\Delta x \qquad \text{เมื่อ } \Delta x \text{ มีค่าเล็กๆ}$$

X เป็นเวลาที่ต่อเนื่องจากเหตุการณ์ครั้งสุดท้าย (การมาหรือการให้บริการเสร็จสมบูรณ์แล้ว) จนกระทั่งเกิดเหตุการณ์ครั้งถัดไป สมมติว่าเวลา x ผ่านพ้นไปแล้วโดยไม่มีเหตุการณ์เกิดขึ้น เรารู้จากคุณสมบัติที่ 2 ที่ว่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ภายในช่วงเวลาถัดไปของระยะเวลา Δx ที่กำหนดเป็นค่าคงที่โดยไม่คำนึงว่า x จะมีค่ามากหรือน้อย คุณสมบัติที่ 5 จะกล่าวมากกว่านี้ว่า เมื่อค่าของ Δx เล็กๆ ความน่าจะเป็นที่คงที่นี้สามารถประมาณเข้าใกล้ $\lambda\Delta x$ ยิ่งไปกว่านั้น เมื่อพิจารณาค่าของ Δx เล็กๆที่แตกต่างกัน ความน่าจะเป็นนี้จะหารด้วย Δx ความจริง λ คืออัตราเฉลี่ยที่เหตุการณ์เกิดขึ้น(ดูคุณสมบัติที่ 4)เพื่อว่าจำนวนเหตุการณ์ที่คาดว่าจะเกิดในช่วงระยะเวลา Δx มีค่าเท่ากับ $\lambda\Delta x$ เหตุผลหนึ่งที่ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำลังจะเกิดขึ้นแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยจากค่านี้ คือ ความน่าจะเป็นที่มากกว่า 1 เหตุการณ์จะเกิดขึ้นซึ่งมีความน่าจะเป็นเพียงเล็กน้อย เมื่อ Δx มีค่าเล็กๆ สังเกตว่าค่าคงที่ของความน่าจะเป็น(เมื่อค่าที่กำหนดของ $\Delta x > 0$) คือ

$$P\{X \leq x+\Delta x / X > x\} = P\{X \leq \Delta x\}$$
$$= 1 - e^{-\lambda\Delta x}$$

เนื่องจากการกระจายอนุกรมของ e^x ที่ทุกๆ $t \geq 0$ คือ

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

จะได้ว่า

$$P\{X \leq x+\Delta x / X > x\} = 1 - 1 + \lambda\Delta x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\lambda\Delta x)^n}{n!}$$
$$\approx \lambda\Delta x$$

เมื่อ Δx เล็กๆ เนื่องจากพจน์ผลรวมมีค่าค่อนข้างน้อย ดังนั้นจึงได้เพียงค่าของ $\lambda\Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{X \leq x+\Delta x / X > x\}}{\Delta x} = \lambda$$

เนื่องจาก X สามารถแทนได้ทั้งเวลาระหว่างการมาและเวลาในการให้บริการในระบบแถวคอย คุณสมบัตินี้จะช่วยให้ประมาณค่าของความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจในช่วงเวลาเล็กๆถัดไป (Δx) การวิเคราะห์ขึ้นอยู่กับการประมาณค่านี้ซึ่งสามารถทำให้ถูกต้องโดยใส่ลิมิตขณะที่ $\Delta x \to 0$

<u>คุณสมบัติข้อ 6</u> Unaffected by Aggregation or Disaggregation

คุณสมบัตินี้ส่วนมากเกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ว่ากระบวนการเข้ามาเป็นแบบปัวส์ซอง ถึงแม้ว่าจะนำไปประยุกต์ใช้โดยตรงกับการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล (เวลาระหว่างการมาเป็นแบบเอ็กซ-โปเนนเชียล) ซึ่งเป็นของคุณสมบัติที่ 4

สมมติว่ามีรูปแบบที่แตกต่างกันของลูกค้าที่แต่ละคนหลายๆรูปแบบ (n) เมื่อลูกค้ามีการมาแต่ละแบบ(i) กระบวนการเข้ามาเป็นแบบปัวส์ซองด้วยพารามิเตอร์ $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ สมมติว่ากระบวนการเข้ามาแบบปัวส์ซองเป็นอิสระต่อกันคุณสมบัติที่ว่าการรวมกันของกระบวนการเข้ามา (การเข้ามาของลูกค้าทุกคนไม่มีรูปแบบ)จำต้องเป็นแบบปัวส์ซองด้วยพารามิเตอร์(อัตราการมา) $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ อีกนัยหนึ่งมีกระบวนการแบบปัวส์ซองที่Unaffected by Aggregation

ในส่วนของคุณสมบัตินี้จะสืบเนื่องมาจากคุณสมบัติที่ 3 และ 4 คุณสมบัตินี้บอกเป็นนัยว่าเวลาระหว่างการมาสำหรับลูกค้าของรูปแบบที่ i มีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ_i ซึ่งสถานการณ์นี้เหมือนกับในคุณสมบัติที่ 3 ที่ว่าเวลาระหว่างการมาสำหรับลูกค้าทุกๆคนจะต้องมีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ ใช้คุณสมบัติที่4อีกครั้ง แล้วจะได้ว่าการรวมกันของกระบวนการเข้ามาเป็นแบบปัวส์ซอง

ส่วนที่ 2 ของคุณสมบัติที่ 6 (Unaffected by Aggregation) อ้างถึงในกรณีที่กลับกัน เมื่อการรวมกันของกระบวนการเข้ามารู้ว่าเป็นแบบปัวส์ซองด้วยพารามิเตอร์ λ แต่ขณะนี้จะพิจารณา Disaggregation Input Processes สำหรับรูปแบบของลูกค้าแต่ละคน สมมติว่าการมาของลูกค้าแต่ละคนมีความน่าจะเป็นที่กำหนดไว้เป็น p_i ของรูปแบบที่ i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ด้วย

$$\lambda_i = p_i \lambda \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

คุณสมบัติที่ว่ากระบวนการมาสำหรับรูปแบบการมาของลูกค้าที่ i จะต้องเป็นแบบปัวส์ซองด้วยพารา-มิเตอร์ λ_i อีกนัยหนึ่งมีกระบวนการแบบปัวส์ซองที่ Unaffected by Aggregation

ตัวอย่างหนึ่งของการใช้ประโยชน์ของคุณสมบัติส่วนที่ 2 นี้คือพิจารณาสถานการณ์ข้างล่างนี้ การมาของลูกค้าแต่ละคนจำแนกไม่ได้ตามกระบวนการปัวส์ซองด้วยพารามิเตอร์ λ การมาของลูกค้าแต่ละคนมีความน่าจะเป็นของการไม่มากำหนดไว้เป็นp(การจากไปจะไม่มีการเข้ามาในระบบแถวคอย) ดังนั้นความน่าจะเป็นของการเข้ามาในระบบเป็น ($1 - p$)ดังนั้นมีลูกค้า 2 รูปแบบคือ ไม่เข้ามาในระบบและเข้ามาในระบบ คุณสมบัติที่ว่า การมาแต่ละรูปแบบเป็น กระบวนการแบบปัวส์ซองด้วยพารามิเตอร์ $p\lambda$ และ $(1 - p)\lambda$ ตามลำดับ ดังนั้นใช้กระบวนการแบบปัวส์ซองอันหลังนี้ การจำลองระบบแถว-

คอยที่ว่าสมมติกระบวนการเข้ามาเป็นแบบปัวส์ซอง ซึ่งยังคงใช้วิเคราะห์การกระทำของระบบแถวคอยสำหรับลูกค้าเหล่านั้นที่เข้ามาในระบบ

5) ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบปัวส์ซองและการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล

(Relation Between Poisson Distribution and Exponential Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซอง ด้วยพารามิเตอร์ λ

$$P(X=n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \quad ; n = 0,1,2,\ldots$$

โดยที่ X เป็นจำนวนครั้งของการมาในช่วงเวลาที่กำหนด

λ = อัตราการมาโดยเฉลี่ย (จำนวนผู้ใช้บริการที่มาต่อ 1 หน่วยเวลา)

e = 2.7182818

ค่าเฉลี่ย : $E(X) = \lambda$

ความแปรปรวน : $Var(X) = \lambda$

ถ้า $X(t)$ เป็นจำนวนครั้งของการมาในช่วงเวลา t ซึ่งในปัญหาแถวคอย $X(t)$ จะเป็นจำนวนผู้ใช้บริการที่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลา t และถ้ามีผู้ใช้บริการเข้าสู่ระบบ n คนในช่วงเวลา t หน่วยเวลาแล้ว $X(t)$ จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซองด้วยพารามิเตอร์ λt

$$P[X(t)=n]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda.t)^{n}}{n!} \quad ; n = 0,1,2,\ldots$$

ค่าเฉลี่ย : $E[X(t)] = \lambda t$

ความแปรปรวน : $Var[X(t)] = \lambda t$

เมื่อ $n = 0$

$$P[X(t)=0]=e^{-\lambda t}=P[T>t]$$

ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียลที่มีลูกค้าคนแรกเข้าสู่ระบบหลังจากเวลา t

2.2.2 รูปแบบการให้บริการของหน่วยให้บริการ (Service Pattern of Servers)

ข้อมูลสำคัญด้านหน่วยให้บริการที่จำเป็นต้องทราบได้แก่ประสิทธิภาพในการทำงานของหน่วยให้บริการ แสดงด้วย

อัตราการให้บริการ (Service Rate) คือ จำนวนลูกค้าที่สามารถให้บริการได้ในหนึ่งหน่วยเวลา เช่น ให้บริการลูกค้าได้ 12 คนต่อชั่วโมง อัตราการให้บริการแบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ

1) อัตราการให้บริการแบบคงที่

อัตราการให้บริการแบบคงที่ คือ ในการให้บริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาเท่าๆกัน ดังนั้นในทุกๆ หน่วยเวลาก็จะให้บริการลูกค้าได้ในจำนวนเท่าๆกันเสมอ เช่น ในการปิดฝาขวดน้ำอัดลมแต่ละขวดใช้เวลา1 วินาทีเท่าๆกัน ดังนั้นอัตราการให้บริการจะคงที่นาทีละ 60 ขวด

2) อัตราการให้บริการแบบสุ่ม

อัตราการให้บริการแบบสุ่ม คือ ในการให้บริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาไม่เท่ากัน มากบ้างน้อยบ้างตามความต้องการของลูกค้า เช่น ลูกค้าที่ซื้อของในซุปเปอร์มาร์เกตบางคนซื้อของเพียง 2-3 อย่าง แคชเชียร์ใช้เวลาเพียง 1 นาทีในการคิดเงิน ในขณะที่ลูกค้าบางรายซื้อของมากมาย แคชเชียร์ต้องใช้เวลาถึง 5 นาทีจึงคิดเงินเสร็จเรียบร้อย

เวลาที่ใช้ในการให้บริการ (Service Time) คือ เวลาที่ใช้ในการบริการตั้งแต่เริ่มต้นจนเสร็จสิ้น จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับปริมาณงานที่ต้องทำและความชำนาญของหน่วยให้บริการ เวลาที่ใช้ในการบริการอาจจะเท่ากันหรือไม่เท่ากันสำหรับแต่ละหน่วยที่ได้รับบริการ จำนวนหน่วยที่อยู่ในแถวคอยอาจจะมีอิทธิพลต่ออัตราการให้บริการได้ในการทำงานบางประเภท เช่น ถ้ามีลูกค้ารอรับบริการทำผมอยู่มากช่างทำผมจะพยายามทำงานให้เร็วขึ้น ซึ่งอาจมีผลทำให้การบริการเปลี่ยนแปลงไป นั่นคือ คุณภาพอาจไม่ดีพอ แต่มีการบริการบางอย่างที่มีอัตราการให้บริการไม่เปลี่ยนแปลงไปไม่ว่าจะมีลูกค้ารออยู่มากเท่าใดก็ตาม เช่น กรณีหน่วยให้บริการเป็นเครื่องจักรซึ่งจะให้บริการในอัตราที่แน่นอน

การเก็บข้อมูลในด้านการให้บริการมักจะอยู่ในรูปของ เวลาที่ใช้ในการบริการ(Service Time) มากกว่าอัตราการให้บริการ(Service Rate) กล่าวคือ จะบันทึกเวลาที่ใช้ในการให้บริการลูกค้าแต่ละรายแล้วนำมาหาค่าเฉลี่ย

โดยทั่วไป ปัญหาแถวคอยในส่วนที่ให้บริการซึ่งอัตราการให้บริการเป็นแบบสุ่ม คือการให้บริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาไม่เท่ากันมากบ้างน้อยบ้างตามความต้องการของลูกค้า ดังนั้นในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยจึงใช้ค่าเฉลี่ยของการให้บริการ รวมทั้งศึกษาถึงการแจกแจงของข้อมูลการให้บริการด้วย ส่วนใหญ่การแจกแจงของเวลาที่ให้บริการจะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียล (Exponential Probability Distribution)

ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะการแจกแจงของเวลาที่ให้บริการเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียล (Exponential Service Time Distribution)

1) การแจกแจงของเวลาที่ให้บริการเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียล

ให้ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้ในการให้บริการ

$$g(t) = \begin{cases} \mu . e^{-\mu t} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

โดยที่ μ = อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (จำนวนผู้ใช้บริการที่ได้รับบริการต่อ 1 หน่วยเวลา)

2) สรุปความสัมพันธ์ของการมาและการให้บริการ

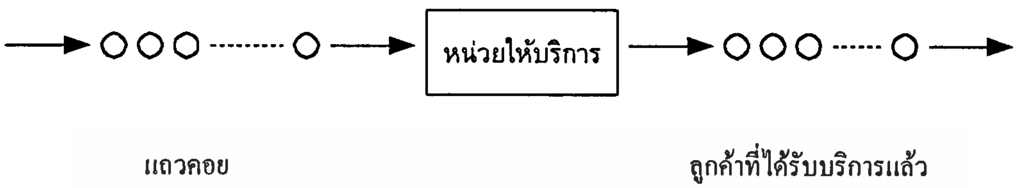
สูตรสำหรับการแจกแจงของการมาเป็นแบบปัวส์ซอง (Poisson Arrival Distribution) การแจกแจงของเวลาระหว่างการมาเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียล (Exponential Interarrival Time Distribution) และการแจกแจงของเวลาที่ให้บริการเป็นแบบเอ็กซโปเนนเชียล (Exponential Interarrival Time Distribution) (ให้หน่วยเวลาเป็นชั่วโมง)

ตารางที่ 2.1 สรุปความสัมพันธ์ของการมาและการให้บริการ

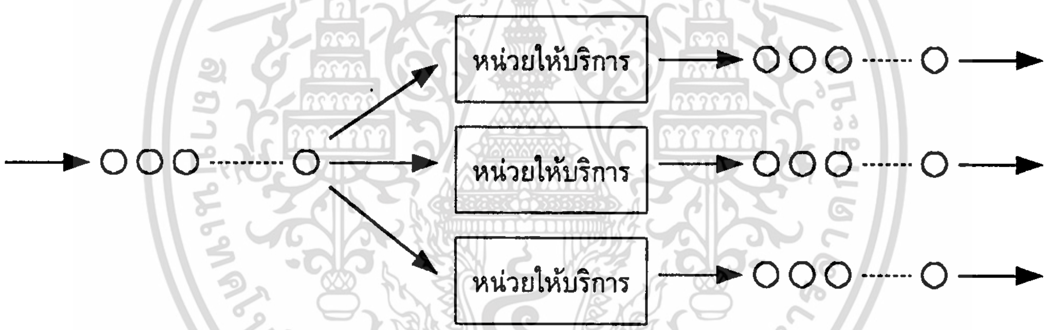
การมา		การให้บริการ	
อัตราการมาโดยเฉลี่ย (จำนวนผู้ใช้บริการที่มาต่อชั่วโมง)	λ คน/ชั่วโมง	อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (จำนวนผู้ใช้บริการที่ได้รับบริการต่อชั่วโมง)	μ คน/ชั่วโมง
ความน่าจะเป็นของผู้ใช้บริการ n คนในช่วงเวลา t ชั่วโมง	$\frac{e^{-\lambda t}(\lambda . t)^n}{n!}$	ความน่าจะเป็นของหน่วยให้บริการ n หน่วย ในช่วงเวลา t ชั่วโมง	$\frac{e^{-\mu t}(\mu . t)^n}{n!}$
ช่วงเวลาระหว่างการมาของลูกค้า 2 คนโดยเฉลี่ย	$\frac{1}{\lambda}$ ชั่วโมง	เวลาในการให้บริการโดยเฉลี่ย	$\frac{1}{\mu}$ ชั่วโมง
ความน่าจะเป็นของการมาที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t ชั่วโมง	$1-e^{-\lambda t}$	ความน่าจะเป็นของการให้บริการเสร็จ ในช่วงเวลา t ชั่วโมง	$1-e^{-\mu t}$
ความน่าจะเป็นที่ไม่มีการมาในช่วงเวลา t ชั่วโมง	$e^{-\lambda t}$	ความน่าจะเป็นที่ไม่มีการให้บริการเสร็จ ในช่วงเวลา t ชั่วโมง	$e^{-\mu t}$

2.2.3 จำนวนหน่วยให้บริการ (Number of Service Channels)

1. กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว และมีหน่วยให้บริการ 1 หน่วย จะเรียกว่า Single-Channel and Single-Phase System

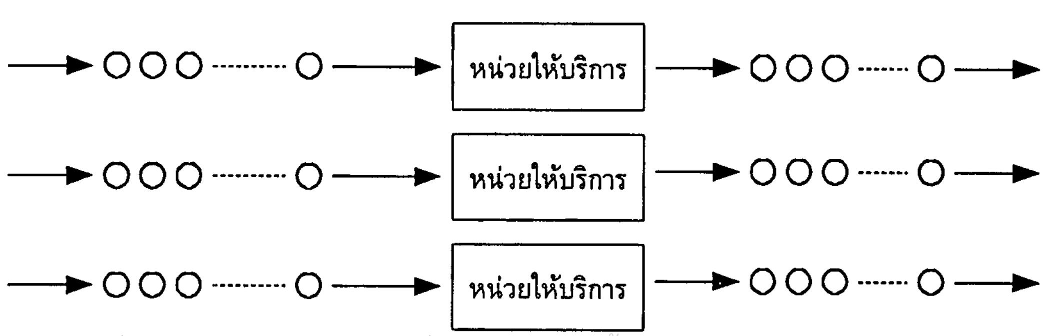


2. กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว แต่มีหน่วยให้บริการหลายหน่วย การให้บริการมีขั้นตอนเดียวจะเรียกว่า Multi-Channel and Single-Phase System



หรือเรียกว่า Parallel Service Channel เช่น ร้านตัดผมที่มีช่างตัดผมหลายคน ถ้าทุกคนทำหน้าที่เหมือนกันหมดคือ ทั้งสระผม ตัดผม และอื่นๆ

3. กรณีที่มีแถวคอยหลายแถว และมีหน่วยให้บริการหลายหน่วยแต่ละหน่วยทำหน้าที่เดียวกัน



2.2.4 ระเบียบการให้บริการ (Queue Discipline)

ระเบียบการให้บริการเป็นหลักเกณฑ์ในการเลือกให้บริการแก่ลูกค้า มีดังนี้

1. มาก่อนได้รับบริการก่อน (First Come First Served : FCFS)

เป็นหลักเกณฑ์ที่ลูกค้าเข้าสู่ระบบแถวคอยก่อนจะได้รับบริการก่อนซึ่งเป็นหลักเกณฑ์ที่ใช้กันโดยทั่วไป เช่น การเข้าคิวจองตั๋วรถไฟ การเข้าแถวเติมน้ำมันรถยนต์ตามปั๊ม เป็นต้น

2. มาหลังได้รับบริการก่อน (Last Come First Served : LCFS)

เป็นหลักเกณฑ์ที่ลูกค้าคนที่เข้าสู่ระบบแถวคอยหลังจะได้รับบริการก่อน เช่น ในคลังสินค้า สินค้าที่ถูกขนเข้าคลังก่อนจะถูกจัดเรียงซ้อนๆ กัน เวลานำออกมาใช้สินค้าที่ถูกขนเข้าที่หลังจะถูกนำมาใช้ก่อน เป็นต้น

3. ให้บริการอย่างสุ่ม (Service In Random Order : SIRO)

เป็นหลักเกณฑ์ที่ลูกค้าในระบบจะได้รับบริการอย่างสุ่ม เช่น การแจกใบปลิว การแจกสินค้าตัวอย่าง เป็นต้น

4. ให้บริการแบบอภิสิทธิ์ (Priority)

เป็นหลักเกณฑ์ในการให้บริการลูกค้าโดยให้ความสำคัญของลูกค้าไม่เท่ากัน เป็นการจัดลูกค้าตามลำดับความสำคัญ เช่น ลูกค้าประจำจะได้รับบริการก่อน ผู้ป่วยฉุกเฉินในโรงพยาบาลจะได้รับบริการก่อนผู้ป่วยสามัญ เป็นต้น

ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน (First Come First Served)

2.2.5 ขีดความสามารถของระบบแถวคอย (Queueing Capacity)

ขีดความสามารถของระบบหมายถึง จำนวนลูกค้าที่ระบบสามารถรับได้ แบ่งเป็น 2 กรณีคือ

1. แถวคอยที่สามารถรับลูกค้าได้จำกัด เช่น ในร้านตัดผมมีที่นั่งรอจำนวนจำกัด เป็นต้น
2. แถวคอยที่สามารถรับลูกค้าได้ไม่จำกัด เช่น แถวคอยของจดหมายที่รอการส่งของบุรุษไปรษณีย์ แถวคอยของรถที่รอจ่ายค่าผ่านทางด่วน เป็นต้น

2.2.6 ขีดจำกัดของจำนวนผู้ใช้บริการ (Customers Capacity)

ขีดจำกัดของจำนวนผู้ใช้บริการ หมายถึง จำนวนลูกค้าที่ต้องการเข้ารับบริการ แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

1. จำนวนลูกค้าที่ต้องการเข้ารับบริการมีจำนวนจำกัด เช่น เครื่องจักรชำรุดที่ต้องส่งซ่อมซึ่งจำนวนเครื่องจักรที่ชำรุดจะมีไม่เกินจำนวนเครื่องจักรที่มีอยู่ เป็นต้น

2. จำนวนลูกค้าที่ต้องการเข้ารับบริการมีจำนวนไม่จำกัด เช่น ลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าในห้าง-สรรพสินค้า จำนวนรถที่ผ่านด่านเก็บเงินค่าผ่านทาง เป็นต้น

2.3 สถานภาพของระบบแถวคอย

ระบบแถวคอยสามารถแบ่งตามสถานภาพได้ 2 สถานภาพ คือ

1. สถานภาพถ่ายทอด (Transient State) เป็นสถานภาพที่พฤติกรรมของระบบเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา สถานภาพนี้มักจะเกิดขึ้นในระยะแรกๆของการดำเนินงาน ซึ่งพฤติกรรมของระบบยังคงขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้น

2. สถานภาพอยู่ตัว (Steady State) เป็นสถานภาพที่พฤติกรรมของระบบไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา คือ เมื่อการดำเนินงานเป็นไปในระยะเวลานานมากพอ พฤติกรรมต่างๆก็จะเป็นอิสระจากเวลา สถานภาพนี้มักจะเกิดขึ้นเมื่อระบบได้ดำเนินงานมาจนกระทั่งอยู่ในสภาวะที่คงที่แล้ว

2.4 สัญลักษณ์ที่ใช้ในระบบแถวคอย

n = จำนวนผู้ใช้บริการในระบบ

$P_n(t)$ = ความน่าจะเป็นในสถานภาพถ่ายทอดที่มีผู้ใช้บริการ n คนในระบบ ณ เวลา t (โดยสมมติว่าระบบเริ่มต้นที่เวลา $t = 0$)

P_n = ความน่าจะเป็นในสถานภาพอยู่ตัวที่มีผู้ใช้บริการ n คนในระบบ

P_w = ความน่าจะเป็นที่ผู้ใช้บริการเข้ามารอใช้บริการ

S = จำนวนหน่วยให้บริการในระบบ

λ_n = อัตราการมาเมื่อระบบมีผู้ใช้บริการ n คน

λ = อัตราการมาโดยเฉลี่ย (จำนวนผู้ใช้บริการที่มาต่อ 1 หน่วยเวลา)

$\frac{1}{\lambda}$ = ช่วงเวลาระหว่างการเข้ามาสู่ระบบของลูกค้า 2 คนโดยเฉลี่ย (เวลาที่ห่างกันระหว่างผู้รับบริการคนหนึ่งกับผู้รับบริการคนถัดไป)

μ_n = อัตราการให้บริการ เมื่อระบบมีผู้ใช้บริการ n คน

μ = อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (จำนวนผู้ใช้บริการที่ได้รับบริการต่อ 1 หน่วยเวลา)

$\frac{1}{\mu}$ = เวลาในการให้บริการโดยเฉลี่ยของลูกค้า 1 คน

$\frac{\lambda}{s\mu}$ = ค่าคาดหมายของอัตราส่วนของเวลาที่หน่วยให้บริการไม่ว่าง (มีผู้บริการ s คน)

W = ค่าคาดหมายของเวลาในการรอคอยในระบบของลูกค้าแต่ละคน (เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนอยู่ในระบบ)

W_q = ค่าคาดหมายของเวลาในการรอคอยในแถวคอยของลูกค้าแต่ละคน (เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนต้องรอในแถวคอย)

L = ค่าคาดหมายของจำนวนลูกค้าในระบบ (จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ)

L_q = ค่าคาดหมายของจำนวนลูกค้าในแถวคอย (จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย)

ρ = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน

ในที่นี้จะศึกษาระบบแถวคอยในสถานภาพอยู่ตัว

สำหรับในสถานภาพอยู่ตัว λ_n คงที่ เท่ากับ λ ทุกๆ ค่าของ n หมายความว่า อัตราการมาจะเท่ากันตลอดไม่ว่าจะมีผู้ใช้บริการอยู่ในระบบแล้วกี่คนก็ตาม และ μ_n คงที่เท่ากับ μ ทุกๆ ค่าของ n หมายความว่า อัตราการให้บริการ โดยเฉลี่ยจะเท่ากันหมดไม่ว่าจะมีผู้ใช้บริการอยู่ในระบบแล้วกี่คนก็ตาม

2.4.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง W, W_q, L และ L_q

ในสถานภาพอยู่ตัว $\lambda_n = \lambda$ และ $\mu_n = \mu$ ทุกๆ ค่าของ n (อัตราการมาของลูกค้า λ_n และอัตราการให้บริการ μ_n คงที่ทุกๆ ค่าของ n) จะได้

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n \qquad \text{และ} \qquad L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)P_n \tag{1}$$

$$L = \lambda.W \qquad \text{และ} \qquad L_q = \lambda.W_q \tag{2}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{3}$$

จาก (3) คูณด้วย λ ทั้งสองข้างจะได้

$$\lambda W = \lambda W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + \rho \qquad \text{เมื่อ} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (4)$$

จะได้ความสัมพันธ์ของ

เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้าอยู่ในระบบ = เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องรอในแถวคอย + เวลาเฉลี่ยของการให้บริการ

$$\boxed{W = W_q + \frac{1}{\mu}}$$

จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย + จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่กำลังได้รับบริการ

$$\boxed{L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}}$$

2.4.2 สัญลักษณ์ของตัวแบบแถวคอย

สัญลักษณ์ของตัวแบบแถวคอยจะใช้สัญลักษณ์ของ Kendall-Lee

(a/b/c) : (d/e/f)

โดย **a** = การแจกแจงของการมา

b = การแจกแจงของการจากไป

c = จำนวนหน่วยให้บริการในระบบ

d = ระเบียบการให้บริการ

e = จำนวนผู้ใช้บริการมากสุดที่ยอมให้อยู่ในระบบ

f = ขีดจำกัดของจำนวนผู้ใช้บริการที่เข้ารับบริการ

สัญลักษณ์ a และ b เป็นตัวอักษรแสดงถึงลักษณะการแจกแจง โดย

M = การแจกแจงแบบปัวส์ซอง

สัญลักษณ์ d แสดงถึงระเบียบการให้บริการ ดังนี้

FCFS = มาก่อนได้รับบริการก่อน

LCFS = มาหลังได้รับบริการก่อน

SIRO = ให้บริการอย่างสุ่ม

2.5 สูตรที่ใช้ในระบบแถวคอย

ตารางที่ 2.2 สูตรที่ใช้ในระบบแถวคอยแบบ Single Server Infinite Customer

	1. (M/M/1) : (FCFS/∞/∞)
P_0	$1-(\frac{\lambda}{\mu})$
P_n	$(\frac{\lambda}{\mu})^n(1-\frac{\lambda}{\mu})$; n = 0,1,2 ,…,n
L	$\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
L_q	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda.)}$
W	$\frac{1}{\mu-\lambda}$
W_q	$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda.)}$
P_w	$\frac{\lambda}{\mu}$
ρ	$\frac{\lambda}{\mu}$

ตารางที่ 2.3 สูตรที่ใช้ในระบบแถวคอยแบบ Single Server finite Customer

	2. (M/M/1) : (FCFS/N/∞)	
	$\lambda \neq \mu$	$\lambda = \mu$
P_0	$\dfrac{1-(\lambda/\mu)}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}$	$\dfrac{1}{N+1}$
P_n	$P_0(\dfrac{\lambda}{\mu})^n$; n = 0,1,2,…,N	$\dfrac{1}{N+1}$; n = 0,1,2,…,N
L	$\dfrac{(\lambda/\mu)}{1-(\lambda/\mu)} - \dfrac{(N+1)(\lambda/\mu)^{N+1}}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}$	$\dfrac{N}{2}$
L_q	$L-(1-P_0)$	$L-(1-P_0)$
W	$\dfrac{L}{\lambda.(1-P_N)}$	$\dfrac{L}{\lambda.(1-P_N)}$
W_q	$\dfrac{L_q}{\lambda.(1-P_N)}$	$\dfrac{L_q}{\lambda.(1-P_N)}$
P_w	$1-P_0$	$1-P_0$
ρ	$1-P_0$	$1-P_0$

ตารางที่ 2.4 สูตรที่ใช้ในระบบแถวคอยแบบ Multiple Server Infinite Customer

	3. (M/M/S) : (FCFS/∞/∞)
P_0	$\dfrac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=s-1}\frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n\right]+\left[\frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^s\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right]}$
P_n	$P_n=\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0$; n ≤ s $P_n=\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}}P_0$; n ≥ s
L	$L_q+\dfrac{\lambda}{\mu}$
L_q	$\dfrac{(\lambda/\mu)^s\lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda.)^2}p_0$
W	$W_q+\dfrac{1}{\mu}$
W_q	$\dfrac{L_q}{\lambda}$
P_w	$\dfrac{1}{s!}(\dfrac{\lambda}{\mu})^s(\dfrac{s\mu}{s\mu-\lambda})P_0$
ρ	$\dfrac{\lambda}{s\mu}$

ตารางที่ 2.5 สูตรที่ใช้ในระบบแถวคอยแบบ Multiple Server finite Customer

	4. (M/M/S) : (FCFS/N/∞) ; S<N
P_0	$\dfrac{1}{1+\sum_{n=1}^{s}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\sum_{n=s+1}^{N}(\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}}$
P_n	$P_n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$; 0<n<s $P_n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}}P_0$; s<n<N
L	$\dfrac{P_0(\lambda/\mu)^s(\lambda/s\mu[1-(\lambda/s\mu)^{N-s}-(N-s)(\lambda/s\mu)^{N-s}(1-(\lambda/s\mu))])}{s!(1-(\lambda/s\mu))^2}$ $+\sum_{n=0}^{s-1}nP_n+s(1-\sum_{n=0}^{s-1}P_n)$
L_q	$L-(\sum_{n=0}^{s-1}nP_n+s(1-\sum_{n=0}^{s-1}P_n))$
W	$\dfrac{L}{\lambda\sum_{n=0}^{N-1}P_n}$
W_q	$\dfrac{L_q}{\lambda\sum_{n=0}^{N-1}P_n}$
P_w	$1-\sum_{n=0}^{s-1}P_n$
ρ	$\dfrac{\lambda\sum_{n=0}^{N-1}P_n}{s\mu}$

2.6 ตัวอย่างของระบบแถวคอย

2.6.1 ตัวอย่างของระบบแถวคอยแบบ (M/M/1) : (FCFS/∞/∞)

ร้านขายรองเท้าแห่งหนึ่งมีพนักงานให้บริการลูกค้าเพียงคนเดียว การมาของลูกค้ามีการแจกแจงแบบปัวส์ซองโดยเฉลี่ย 12 นาที พนักงานให้บริการลูกค้าโดยเฉลี่ย 8 นาที และเวลาที่ใช้ในการให้บริการเป็นการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล จงหาค่าต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับระบบแถวคอย

<u>วิธีทำ</u> ปัญหานี้เป็นปัญหาแถวคอยแบบ (M/M/1) : (FCFS/∞/∞)

จากโจทย์จะได้ อัตราการมาโดยเฉลี่ย $= \lambda = \frac{1}{12}$ คน / นาที

$= \frac{60}{12}$ คน / ชั่วโมง

$= 5$ คน / ชั่วโมง

พนักงานให้บริการลูกค้าโดยเฉลี่ย 8 นาที

$\therefore$ อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย $= \mu = \frac{1}{8}$ คน / นาที

$= \frac{60}{8}$ คน / ชั่วโมง

$= 7.5$ คน / ชั่วโมง

แทนค่าสูตรที่ใช้ในระบบแถวคอย (M/M/1) : (FCFS/∞/∞)

จะได้ดังนี้

$$P_0 = 1-(\frac{\lambda}{\mu})$$
$$= 1-\frac{5}{7.5}$$
$$= 1-0.66667$$
$$= 0.33333$$

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n(1-\frac{\lambda}{\mu})$$
$$= (0.33333)(0.66667)^n$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$
$$= \frac{5}{7.5-5}$$
$$= \frac{5}{2.5}$$
$$= 2$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda.)}$$

$$= \frac{5^2}{7.5(7.5-5)}$$

$$= \frac{25}{7.5(2.5)}$$

$$= 1.33333$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{1}{7.5-5}$$

$$= \frac{1}{2.5}$$

$= 0.4$ ชั่วโมง

$= 24$ นาที

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda.)}$$

$$= \frac{5}{7.5(7.5-5)}$$

$$= \frac{5}{7.5(2.5)}$$

$= 0.26667$ ชั่วโมง

$$P_W = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{5}{7.5}$$

$$= 0.66667$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{5}{7.5}$$

$$= 0.66667$$

<u>ข้อสังเกต</u> ความแตกต่างระหว่าง เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้า 1 คนอยู่ในร้าน (W = 24 นาที) และเวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้า 1 คน ต้องรอก่อนได้รับบริการ (W_q = 16 นาที) ซึ่งก็คือเวลาเฉลี่ยของการให้บริการ ($W - W_q = 24 - 16 = 8$ นาที)

ความแตกต่างระหว่าง จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในร้าน ($L = 2$) และจำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่ต้องรอก่อนได้รับบริการ ($L_q = 1.3333$) เท่ากับ 0.66667 ซึ่งก็คือ จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่กำลังได้รับบริการ ($\rho = L - L_q = 2 - 1.3333 = 0.66667$)

โดยที่ จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่กำลังได้รับบริการ = P(พนักงานว่าง)(มีลูกค้า 0 คน) + P(พนักงานทำงาน)(มีลูกค้า 1 คน)

$$= (1-\rho)(0) + \rho(1)$$
$$= 0.33333(0) + 0.66667(1)$$
$$= 0.66667$$
$$= \rho$$

2.6.2 ตัวอย่างของระบบแถวคอยแบบ (M/M/1) : (FCFS/N/∞)

ถ้านายวิชัยวางแผนไว้ว่าจะเปิดปั๊ม โดยที่เขาตัดสินใจว่าควรมีที่ให้รถรอ ได้รับบริการกี่คันจึงจะเหมาะสม ถ้าการเข้ามารับบริการของลูกค้ามีการแจกแจงแบบปัวส์ซองด้วยอัตราเฉลี่ย 1 คัน ต่อ 5 นาที ในกรณีที่ที่จอดรอรับบริการเต็ม ลูกค้าจะออกไปใช้บริการของปั๊มน้ำมันอื่นๆ ถ้าปั๊มน้ำมันของนายวิชัยมีที่เติมน้ำมันเพียงแห่งเดียว และเวลาในการเติมน้ำมันรถคันหนึ่งๆ มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย 2 นาที จงหาความน่าจะเป็นของการสูญเสียลูกค้าเนื่องจากไม่มีที่รอเพียงพอ โดยที่

ก. ไม่มีที่ให้รถจอดรอเลย

ข. มีที่ให้รถจอดรอ 3 คัน

ค. มีที่ให้รถจอดรอ 5 คัน

<u>วิธีทำ</u> ปัญหานี้เป็นปัญหาแถวคอยที่มีการรับลูกค้าอย่างจำกัด (M/M/1) : (FCFS/N/∞)

จากโจทย์จะได้

อัตราการมาโดยเฉลี่ย = $\lambda = \frac{1}{5}$ คัน / นาที

อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย = $\mu = \frac{1}{2}$ คัน / นาที

ซึ่ง $\lambda \neq \mu$

ต้องการหา P_n

จากสูตร (M/M/1) : (FCFS/N/∞)

$$P_n = P_0(\frac{\lambda}{\mu})^n$$

$$P_0 = \frac{1-(\lambda/\mu)}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5} = 0.4$$

ก. กรณีที่ไม่มีที่ให้รถจอดรอรับบริการเลย นั่นหมายถึงจะมีลูกค้าหรือรถได้เพียง 1 คันเท่านั้นที่อยู่ในระบบ และกำลังได้รับบริการ ($n=1$)

$$P_1 = P_0(0.4)^1$$

$$P_1 = \left[\frac{1-0.4}{1-(0.4)^{1+1}}\right](0.4)$$

$$= \left[\frac{0.6}{1-(0.16)}\right](0.4)$$

$$= \frac{0.24}{0.84} = 0.286$$

∴ โอกาสที่ลูกค้าจะไปใช้บริการจากปั๊มอื่น เนื่องจากไม่มีที่ให้รอเป็น 0.286

ข. มีที่ให้จอดรถรอ 3 คัน หมายถึงมีลูกค้าหรือรถในระบบทั้งหมด 4 คัน ($n=4$)

$$P_4 = P_0(0.4)^4$$

$$P_4 = \left[\frac{1-0.4}{1-(0.4)^{4+1}}\right](0.4)^4 = 0.016$$

∴ โอกาสที่ลูกค้าจะไปใช้บริการจากปั๊มอื่นๆ ถ้ามีที่ให้รอเพียง 3 ที่ เป็น 0.016

ค. มีที่ให้จอดรถรอ 5 คัน หมายถึงมีลูกค้าหรือรถในระบบทั้งหมด 6 คัน ($n=6$)

$$P_6 = P_0(0.4)^6$$

$$P_6 = \left[\frac{1-0.4}{1-(0.4)^{6+1}}\right](0.4)^6 = 0.002$$

∴ โอกาสที่จะสูญเสียลูกค้า ถ้ามีที่ให้รอเพียง 5 ที่เป็น 0.002

2.6.3 ตัวอย่างของระบบแถวคอยแบบ (M/M/S) : (FCFS/∞/∞)

ที่ทำการไปรษณีย์เปิดทำการวันเสาร์เวลา 9.00 น. – 13.00 น. โดยเฉลี่ยมีลูกค้ามา 100 คนต่อชั่วโมงในระหว่างเวลานี้และมีพนักงานให้บริการ 3 คน เวลาเฉลี่ยในการให้บริการลูกค้าแต่ละคนเท่ากับ 1.5 นาที การเข้ารับบริการของลูกค้าเป็นแบบปัวส์ซองและเวลาในการให้บริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซโปเนนเชียล

จงหาค่าต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับระบบแถวคอย

ถ้าเจ้าหน้าที่ต้องการลดจำนวนพนักงานให้บริการในวันเสาร์เหลือ 2 คน จะเหมาะสมหรือไม่ สมมติว่าขณะนี้มีลูกค้า 10 คน อยู่ในระบบ

<u>**วิธีทำ**</u> ปัญหานี้เป็นปัญหาแถวคอยแบบ (M/M/S) : (FCFS/∞/∞)

จากโจทย์จะได้ อัตราการมาโดยเฉลี่ย $= \lambda = 100$ คน/ชั่วโมง

อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย $= \mu = \frac{60}{1.5}$ คน/ชั่วโมง

$= 40$ คน/ชั่วโมง

เนื่องจาก $\lambda < k\mu$

$100 < 3(40) = 120$

จากสูตร (M/M/S) : (FCFS/∞/∞)

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=s-1} \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n\right] + \left[\frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^s \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right]}$$

$$= \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}(\frac{100}{40})^n\right] + \left[\frac{1}{3!}(\frac{100}{40})^3 \frac{3(40)}{3(40) - 100}\right]}$$

$$= \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}(2.5)^n\right] + \left[\frac{1}{6}(15.625)\frac{120}{20}\right]}$$

$$= \frac{1}{\left[1 + 2.5 + \frac{6.25}{2} + 15.625\right]}$$

$$= \frac{1}{22.25}$$

$$= 0.045$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \quad ; \mathrm{n} \leq \mathrm{s}$$

$$= \frac{(100/40)^n}{n!}(0.045) \quad ; \mathrm{n} \leq 3$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} P_0 \quad ; \mathrm{n} \geq \mathrm{s}$$

$$= \frac{(100/40)^n}{3!3^{n-3}}(0.045) \quad ; \mathrm{n} \geq 3$$

$$P_1 = \frac{(100/40)^1}{1!}(0.045)$$

$$= 0.112$$

$$P_2 = \frac{(100/40)^2}{2!}(0.045)$$

$$= 0.140$$

$$P_3 = \frac{(100/40)^3}{3!}(0.045)$$

$$= 0.117$$

$$P_4 = \frac{(100/40)^4}{3!3^{4-3}}(0.045)$$

$$= 0.098$$

$$P_5 = \frac{(100/40)^5}{3!3^{5-3}}(0.045)$$

$$= 0.081$$

$$P_6 = \frac{(100/40)^6}{3!3^{6-3}}(0.045)$$

$$= 0.068$$

$$P_7 = \frac{(100/40)^7}{3!3^{7-3}}(0.045)$$

$$= 0056$$

$$P_8 = \frac{(100/40)^8}{3!3^{8-3}}(0.045)$$

$$= 0.047$$

$$P_9 = \frac{(100/40)^9}{3!3^{9-3}}(0.045)$$

$$= 0.039$$

$$P_{10} = \frac{(100/40)^{10}}{3!3^{10-3}}(0.045)$$

$$= 0.033$$

$\therefore$ **ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้าอยู่ในระบบจะมีดังนี้**

$P_0 = 0.045$ $P_1 = 0.112$ $P_2 = 0.140$ $P_3 = 0.117$ $P_4 = 0.098$

$P_5 = 0.081$ $P_6 = 0.068$ $P_7 = 0.056$ $P_8 = 0.047$ $P_9 = 0.039$

$P_{10} = 0.033$

ก. เจ้าหน้าที่ต้องการทราบความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า 2 คน รอใช้บริการอยู่ในแถวคอย ก็คือการหาความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า 5 คน อยู่ในระบบ (มีลูกค้า 3 คน กำลังได้รับบริการและมีลูกค้า 2 คน รอใช้บริการอยู่ในแถวคอย)

$$P_5 = 0.081$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า 2 คน รอใช้บริการอยู่ในแถวคอยเป็น 0.081

ข. เจ้าหน้าที่ต้องการทราบความน่าจะเป็นที่มีลูกค้าอย่างมาก 3 คน รออยู่ในแถวคอย ก็คือการหาความน่าจะเป็นที่มีลูกค้าอย่างมาก 6 คน อยู่ในระบบ

$$= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$$

$$= 0.045 + 0.112 + 0.140 + 0.117 + 0.098 + 0.081 + 0.068$$

$$= 0.661$$

ค. จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda.)^2} p_0$$

$$= \frac{(100/40)^3(100)(40)}{(3-1)!(3\cdot 40-100.)^2}(0.045)$$

$$= 3.51$$

$\therefore$ โดยเฉลี่ยแล้วจะมีลูกค้า 3.51 คน รออยู่ในแถวคอย

จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= 3.51 + \frac{100}{40}$$

$$= 6.01$$

$\therefore$ โดยเฉลี่ยแล้วจะมีลูกค้า 6.01 คน รออยู่ในระบบ

เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนอยู่ในแถวคอย

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \frac{3.51}{100}$$

$$= 0.0351 \text{ ชั่วโมง}$$

$$= 2.10 \text{ นาที}$$

$\therefore$ เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนอยู่ในแถวคอยเป็น 2.10 นาที

เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนอยู่ในระบบ

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad \text{โดยที่ } \mu = 40 \text{ คน/ชั่วโมง} = \frac{40}{60} \text{ คน/นาที}$$

$$W = 2.10 + \frac{60}{40} \quad = 2.10 + 1.5 \quad = 3.6 \text{ นาที}$$

$\therefore$ เวลารอคอยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนอยู่ในระบบเป็น 3.6 นาที

ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าที่กำลังมาจะต้องรอในการใช้บริการ

$$P_w = \frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^s(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda})P_0$$

$$= \frac{1}{3!}\left(\frac{100}{40}\right)^3\left(\frac{3 \cdot 40}{3 \cdot 40 - 100}\right)(0.045) \quad = 0.703$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าที่กำลังมาจะต้องรอในการใช้บริการเป็น 0.703

ค่าคาดหมายของอัตราส่วนของเวลาที่หน่วยให้บริการไม่ว่าง

(กรณีมีผู้ให้บริการ 3 คน)

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$= \frac{100}{3 \cdot 40}$$

$$= \frac{100}{120}$$

$$= 0.8333 \text{ ชั่วโมง}$$

$$= 50 \text{ นาที}$$

ง. ถ้าเจ้าหน้าที่ต้องการลดจำนวนพนักงานให้บริการในวันเสาร์เหลือ 2 คน ซึ่ง

อัตราการมาโดยเฉลี่ย $= \lambda = 100$ คน/ชั่วโมง

อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย $= \mu = 40$ คน/ชั่วโมง

ถ้ามีพนักงาน 2 คน $= 2(40) = 80$ คน/ชั่วโมง

จะเห็นว่า $\lambda > k\mu$

$$100 > 80$$

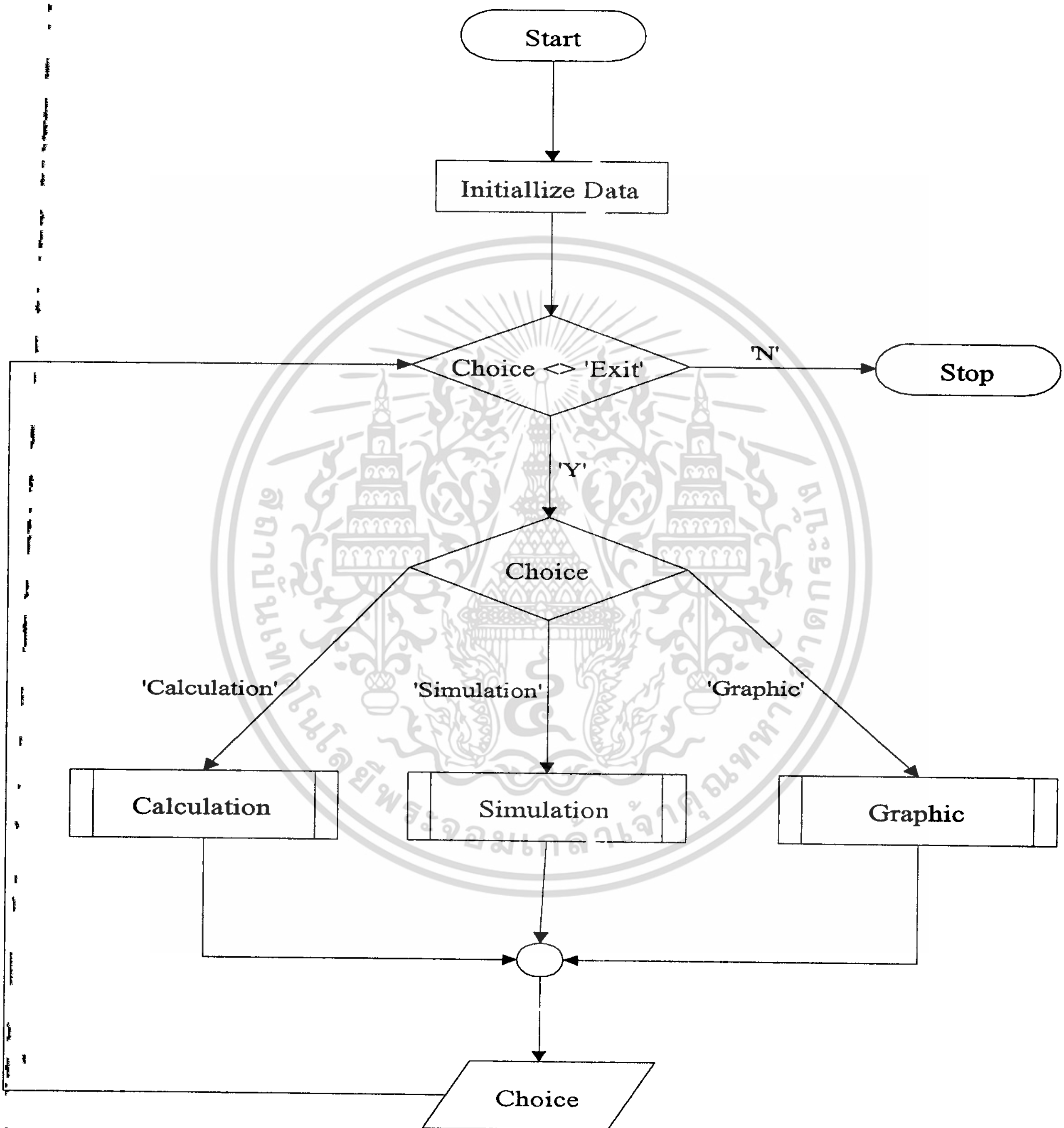
ดังนั้นเจ้าหน้าที่ไม่ควรจะลดพนักงานเหลือ 2 คน

บทที่ 3
การออกแบบโปรแกรม

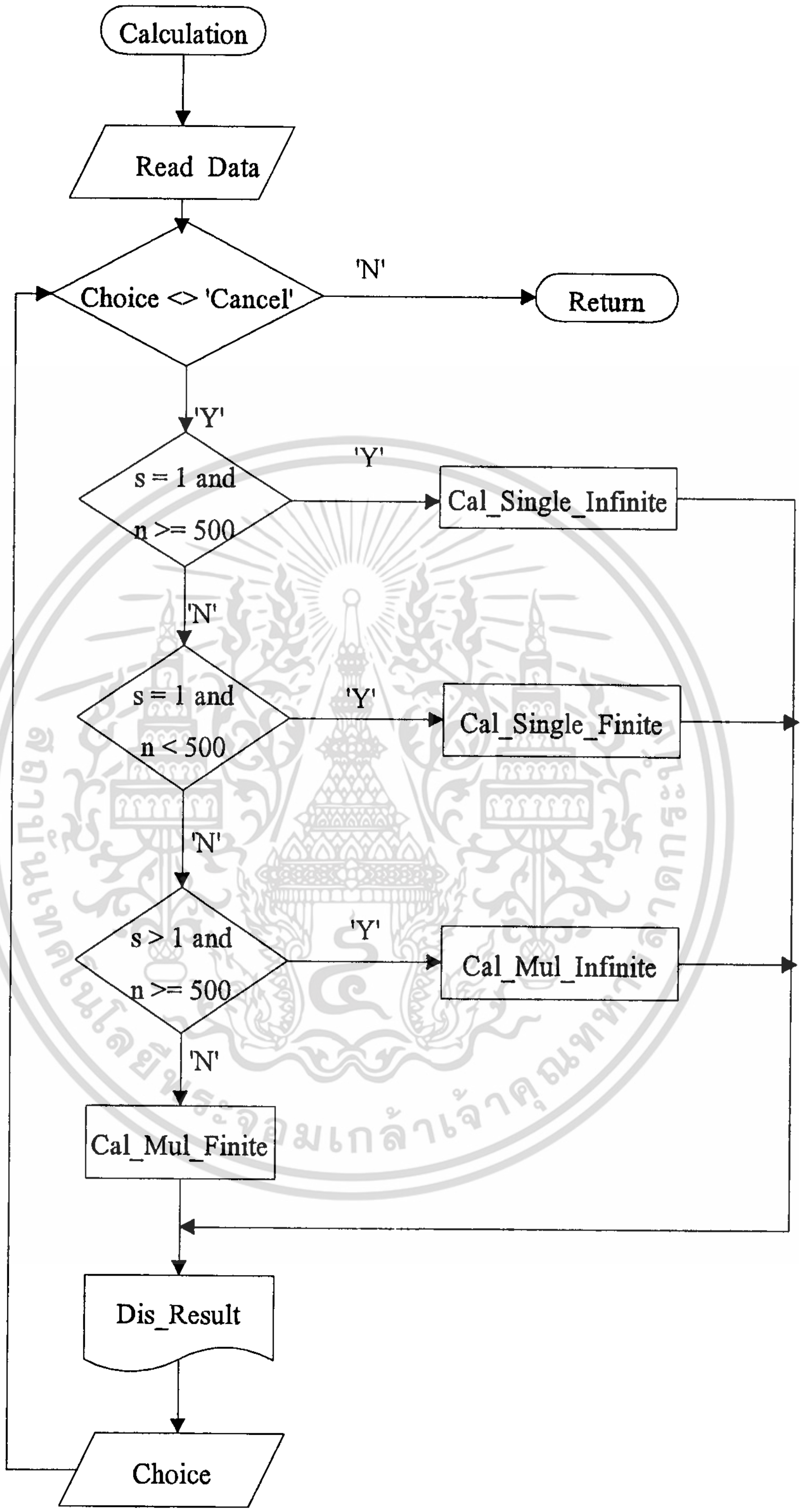
3.1 แนวคิดในการออกแบบโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรมการจำลองระบบแถวคอยที่สร้างขึ้นนี้ ประกอบด้วย 3 ส่วนหลัก ดังนี้ คือ ส่วนที่หนึ่งเป็นการคำนวณตามทฤษฎีแถวคอย (Queue Theory) ส่วนที่สองเป็นการเขียนโปรแกรมด้วยเทคนิคการจำลองแบบระบบแถวคอย (Simulation Technique) และส่วนที่สามเป็นการแสดงผลด้วยรูปภาพตามเทคนิคการจำลองระบบแถวคอย

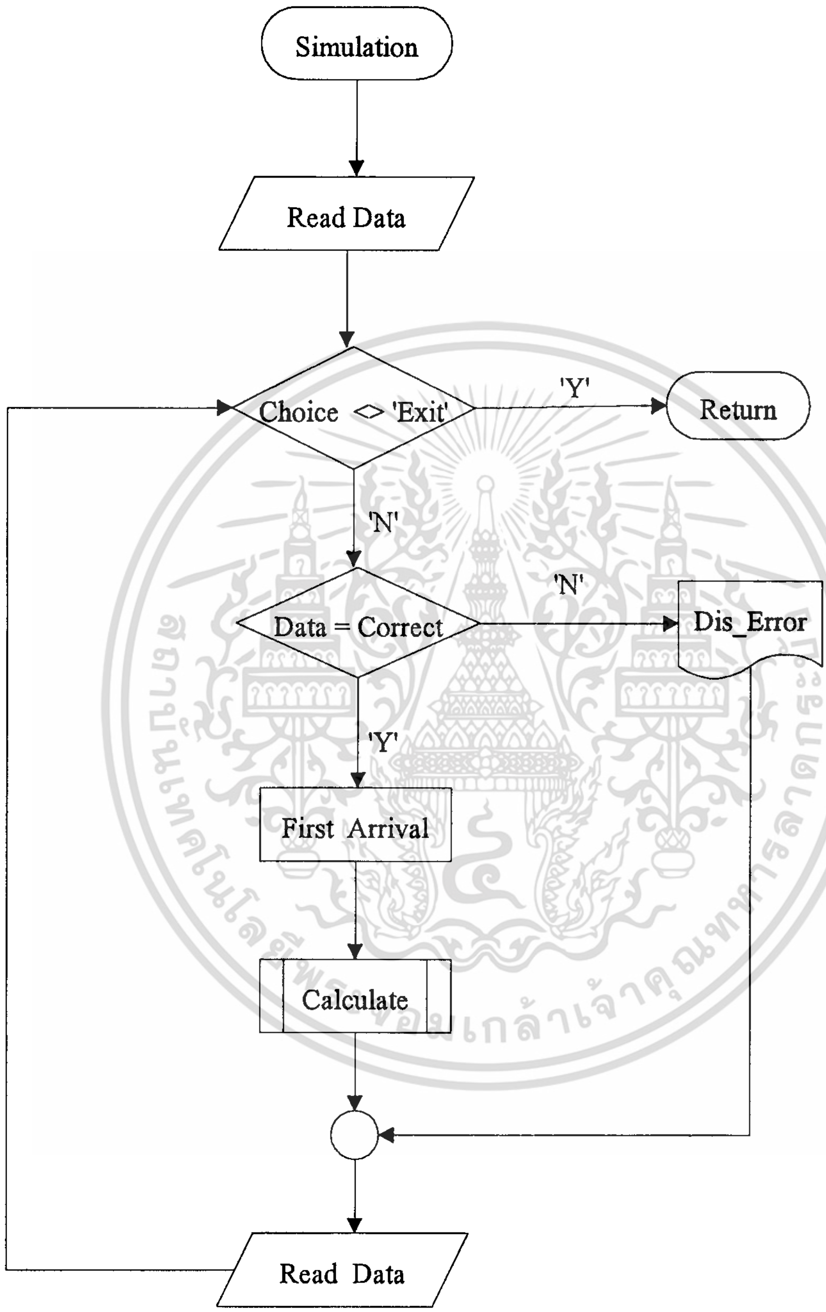
3.2 ผังงานของโปรแกรมการจำลองระบบแถวคอย



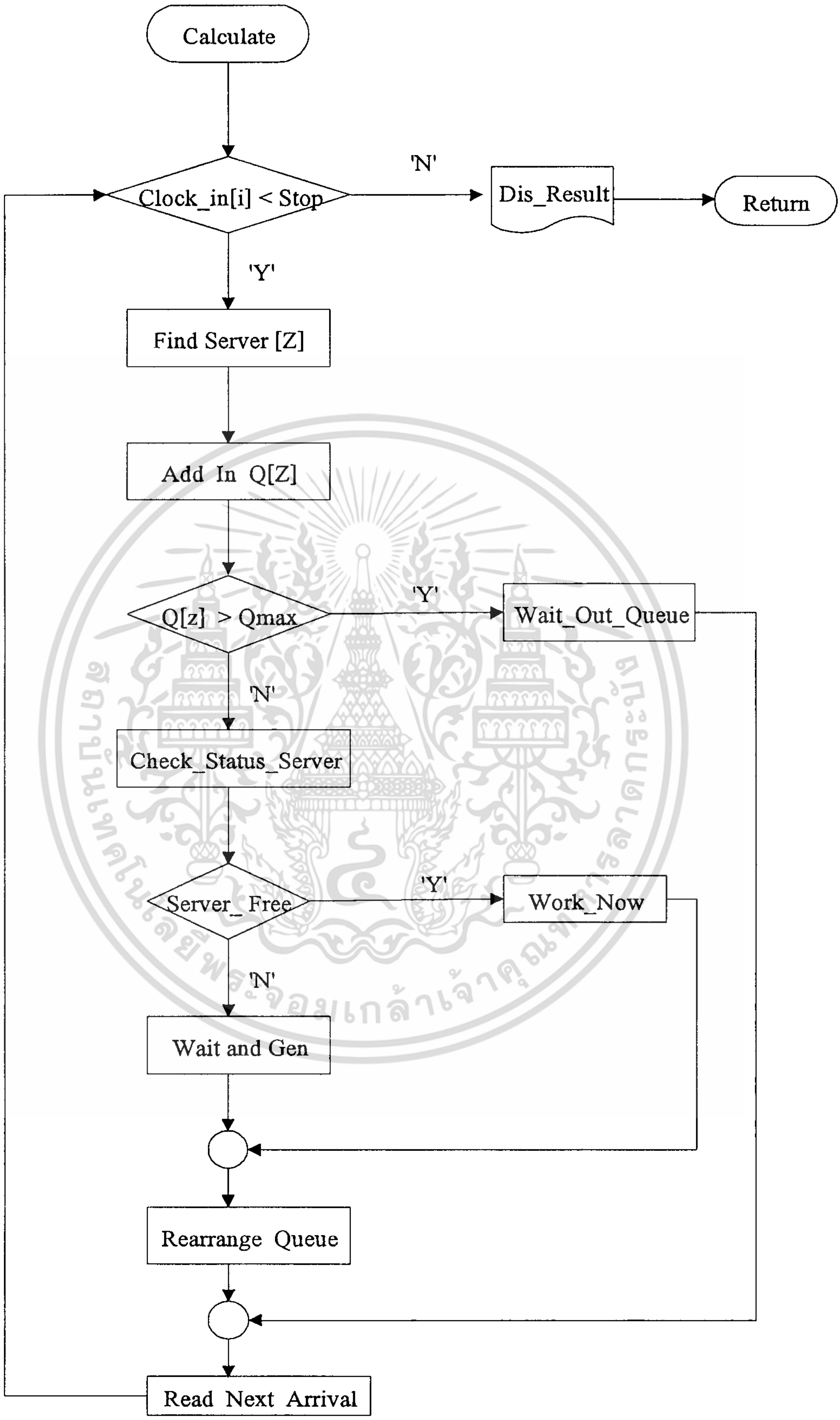
รูป 3.1 Flow Chart ของหน้าจอหลัก



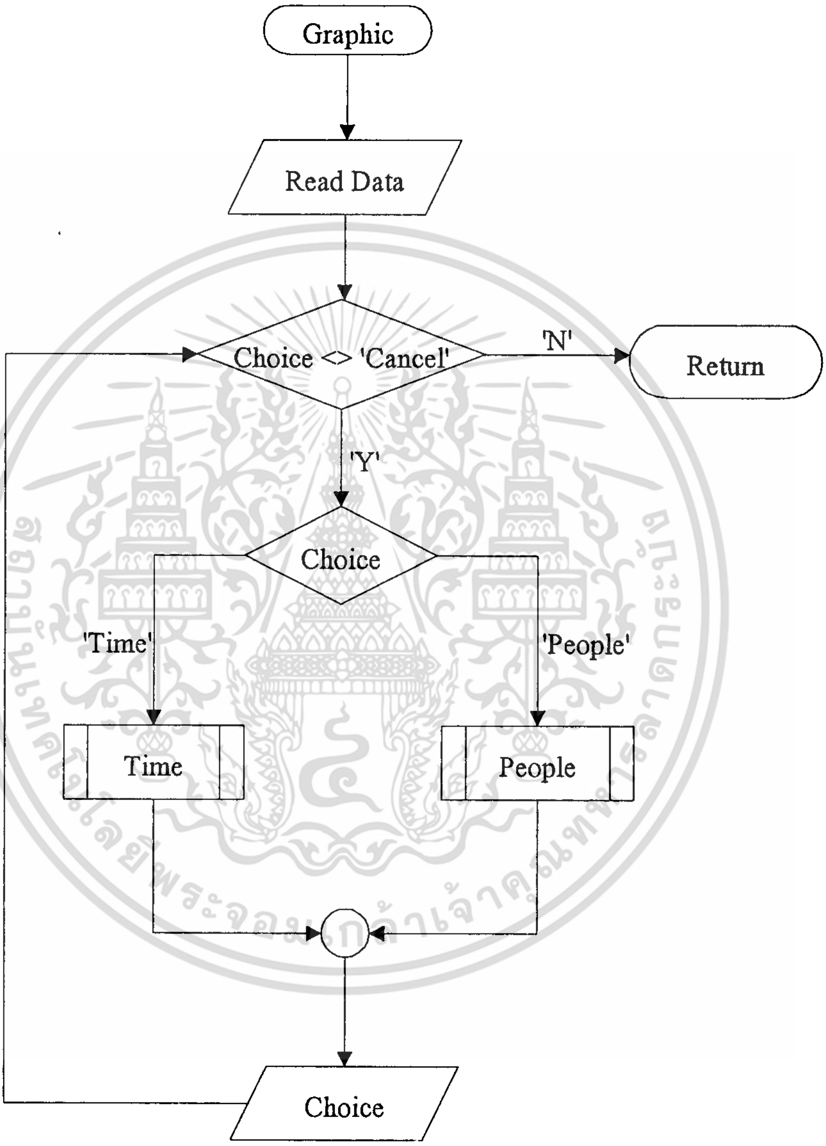
รูป 3.2 Flow Chart ของ Calculation



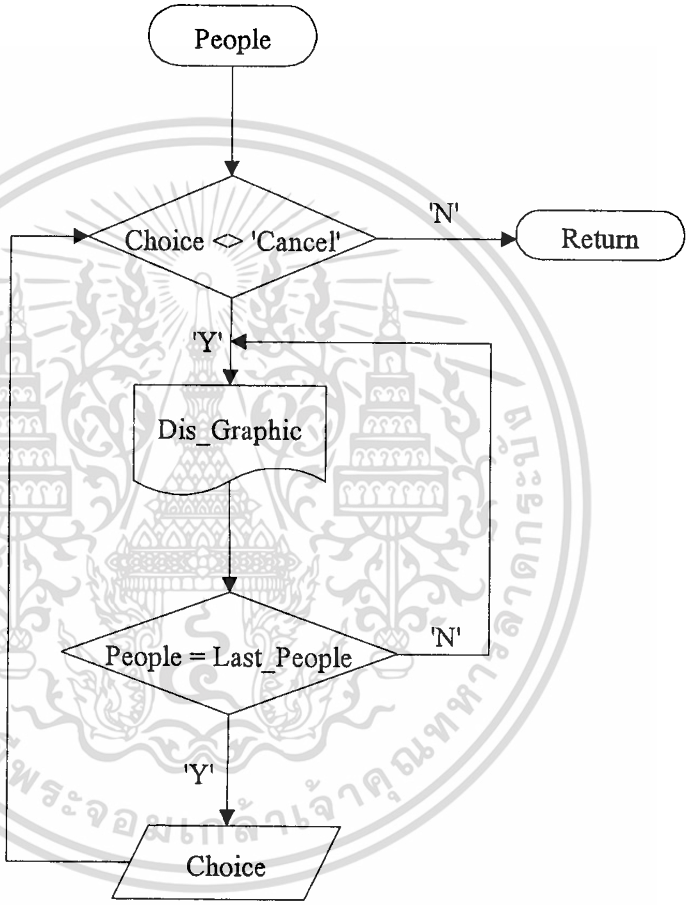
รูป 3.3 Flow Chart ของ Simulation



รูป 3.4 Flow Chart ของ Simulation



รูป 3.5 Flow Chart ของ Graphic



รูป 3.7 Flow Chart ของ Graphic

บทที่ 4

ผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ผลลัพธ์ที่ได้จากการพัฒนาโปรแกรมต้นแบบ"การจำลองระบบแถวคอย" สามารถประเมินผลในแต่ละด้านได้ดังนี้

4.1 ส่งเสริมให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจการจำลองระบบแถวคอยและการจัดการเรื่องการจำลองระบบแถวคอยให้มีประสิทธิภาพดีขึ้น

เนื่องจากสภาพการรอคอยเป็นเหตุการณ์ที่เกิดในชีวิตประจำวัน จึงเป็นเรื่องง่ายที่นักศึกษาจะเข้าใจในเรื่องการจำลองระบบแถวคอย แต่ถ้าการจัดระบบแถวคอยไม่มีประสิทธิภาพก็จะนำไปสู่การสูญเสีย เช่น เสียเวลา เสียค่าใช้จ่าย หรือเสียโอกาสอื่นๆ เพิ่มขึ้น ในโปรแกรมการจำลองระบบแถวคอยจะศึกษาลักษณะของผู้ให้บริการและหน่วยให้บริการ แล้วหาผลลัพธ์เป็นค่าต่างๆ และแสดงสภาวะของระบบแถวคอย ผลลัพธ์ดังกล่าวจะช่วยในการตัดสินใจดำเนินการเกี่ยวกับการบริการให้มีประสิทธิภาพดีขึ้น

4.2 ใช้งานง่ายและสามารถเข้าใจได้ง่าย

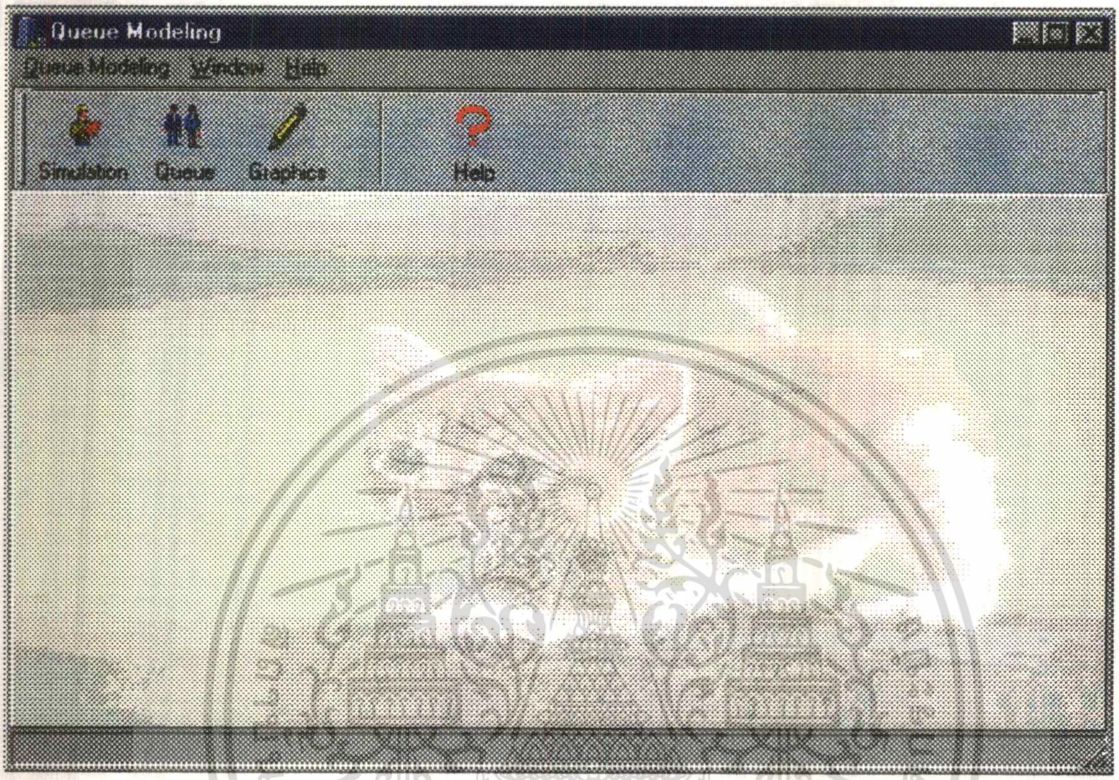
เนื่องจากโปรแกรมต้นแบบที่จัดทำขึ้นเป็นโปรแกรมที่ใช้งานบนระบบปฏิบัติการวินโดวส์ ซึ่งแสดงส่วนการติดต่อกับผู้ใช้แบบกราฟฟิก (Graphic User Interface) จึงทำให้การใช้งานง่าย ผู้ใช้สามารถเลือกคำสั่งการทำงานต่างๆ ได้ โดยใช้ตัวควบคุม (Mouse) นอกจากการใช้งานง่ายแล้วยังมีความเข้าใจง่าย กล่าวคือ มีการรับข้อมูลเข้าที่สะดวกต่อการใช้งาน ข้อมูลที่นำเข้าคือ ตัวแปรต่างๆ ที่นำมาใช้ในการทำงานของโปรแกรมและการแสดงผลที่ง่ายต่อการเข้าใจ

4.3 การทำงานของโปรแกรม

การเขียนโปรแกรมสำหรับโปรแกรมต้นแบบนี้ จะเป็นการนำโปรแกรมภาษา C++ Builder เวอร์ชัน 3.0 มาใช้งานสำหรับโปรแกรมต้นแบบ ซึ่งสำหรับโปรแกรมต้นแบบนี้จะมีการออกแบบแยกเป็นส่วนๆ และนำมาประกอบร่วมกัน ในการใช้งานสามารถแบ่งเป็นส่วนการออกแบบ ดังนี้

4.3.1 ขั้นตอนต่างๆ ในการทำงานของโปรแกรม

เมื่อทำการ Run โปรแกรมจะปรากฎหน้าจอดังรูป



รูปที่ 4.1 เมื่อทำการ Run โปรแกรม

ในหน้าจอนี้มีส่วนเมนูให้ผู้ใช้ทำการเลือก จะประกอบด้วยส่วนต่างๆ ดังนี้

1) **เมื่อเลือก Queue Modeling**

จะให้ผู้ใช้ทำการเลือก ดังนี้

(1) Simulation : เป็นการจำลองแบบระบบแถวคอย

(2) Queue : เป็นการคำนวณตามทฤษฎีแถวคอย

(3) Graphics : เป็นการแสดงผลด้วยรูปภาพตามเทคนิคการจำลองแบบระบบแถวคอย

(4) Exit : จบการทำงานและออกจากโปรแกรม

2) เมื่อเลือก Window

จะให้ผู้ใช้ทำการเลือก ดังนี้

(1) Cascade : จัดเรียงหน้าจอซ้อนเหลื่อมกัน

(2) Tile : จัดเรียงหน้าจอตามแนวนอน

(3) Arange Icon : จัดเรียงไอคอนให้เป็นระเบียบ

(4) Minimize All : ย่อหน้าจอทั้งหมด

3) เมื่อเลือก Help

จะให้ผู้ใช้ทำการเลือก ดังนี้

(1) Content : แสดงรายละเอียดดังนี้

(1.1) Introduction : บทนำซึ่งจะบอกลักษณะของระบบแถวคอย

(1.2) Variables : แสดงตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในระบบแถวคอย

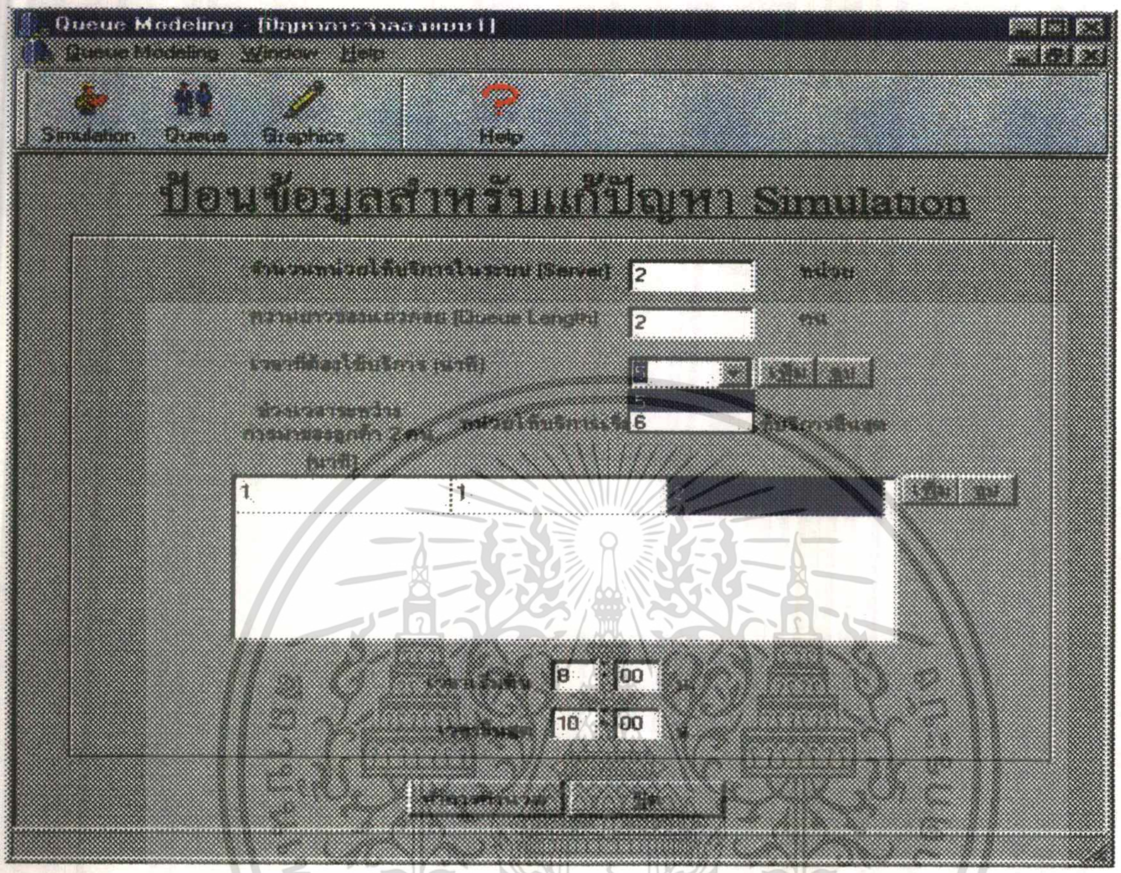
(1.3) User Program : อธิบายวิธีการใช้โปรแกรม

(2) About : แสดงรายละเอียดเกี่ยวกับโปรแกรม

หน้าจอที่เกี่ยวข้องกับ Help ได้แสดงไว้ที่ภาคผนวก

4.3.2 แสดงหน้าจอเกี่ยวกับ Simulation จะมีหน้าจอที่เกี่ยวข้องคือ

1) หน้าจอการรับข้อมูล



รูปที่ 4.2 หน้าจอรับข้อมูลของ Simulation

ในหน้าจอนี้ ให้ผู้ใช้ทำการใส่ค่าตัวแปรต่างๆ ในการคำนวณ ดังนี้

(1) จำนวนหน่วยให้บริการในระบบ (Server)

(2) ความยาวของแถวคอย (Queue Length)

(3) เวลาที่ต้องใช้บริการ (นาที)

(4) ช่วงเวลาระหว่างการมาของลูกค้า 2 คน

(5) หน่วยให้บริการเริ่มต้น

(6) หน่วยให้บริการสิ้นสุด

(7) เวลาเริ่มต้น

(8) เวลาสิ้นสุด

ทำการกดปุ่มทำการคำนวณเพื่อแสดงผล หรือกดปุ่มปิดเพื่อออกจาก Simulation และกลับสู่หน้าจอหลัก

จากตัวอย่างเป็นกรณีของ Mutiple Server โดยมีค่าต่างๆ ดังนี้

จำนวนหน่วยให้บริการในระบบ 2 หน่วย

ความยาวของแถวคอยแต่ละแถวเป็นจำนวน 2 คน

เวลาที่ต้องใช้บริการของหน่วยให้บริการที่ 1 เป็น 5 นาที

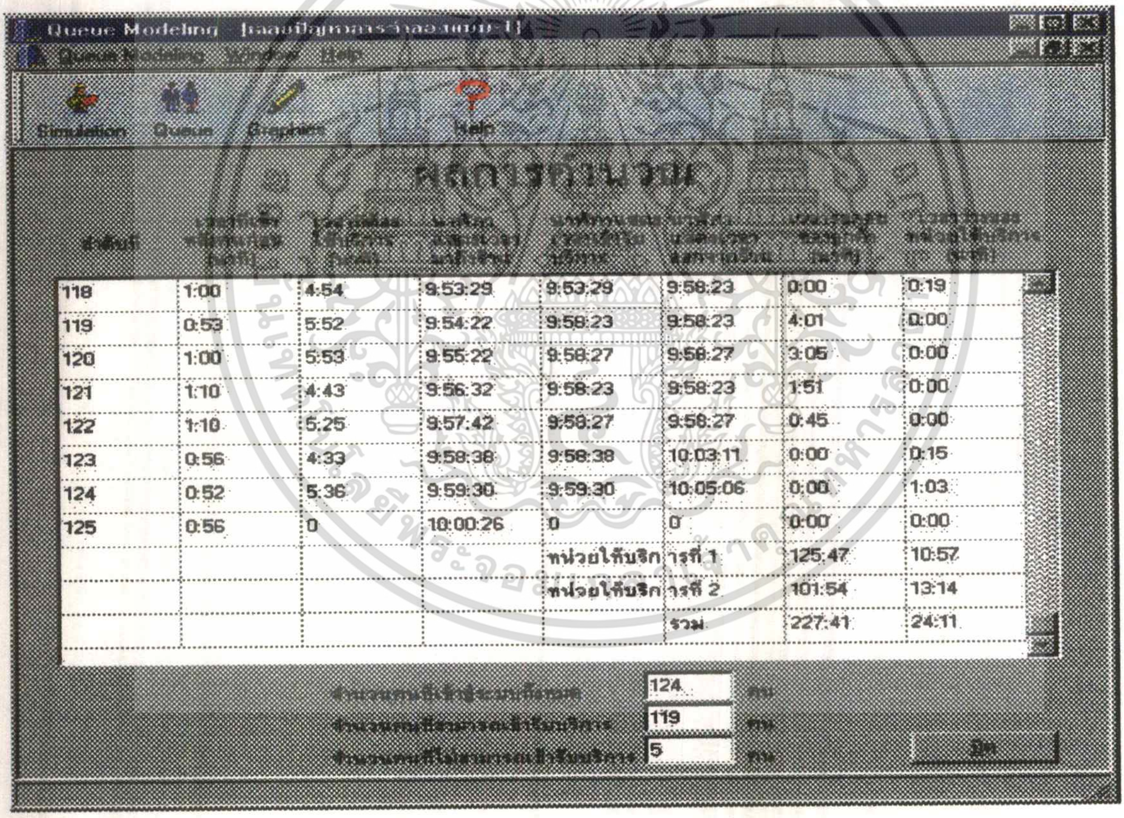
เวลาที่ต้องใช้บริการของหน่วยให้บริการที่ 2 เป็น 6 นาที

เวลาที่ห่างกันระหว่างลูกค้าคนหนึ่งกับลูกค้าคนถัดไปเป็น 1 นาที

หน่วยให้บริการเริ่มต้นที่ 1 และหน่วยให้บริการสิ้นสุดที่ 2

เวลาเริ่มต้น คือ 8.00 น. และเวลาสิ้นสุด 10.00 น.

2) หน้าจอการแสดงผลข้อมูล



118	1:00	4:54	9:53:29	9:53:29	9:58:23	0:00	0:19
119	0:53	5:52	9:54:22	9:58:23	9:58:23	4:01	0:00
120	1:00	5:53	9:55:22	9:58:27	9:58:27	3:05	0:00
121	1:10	4:43	9:56:32	9:58:23	9:58:23	1:51	0:00
122	1:10	5:25	9:57:42	9:58:27	9:58:27	0:45	0:00
123	0:56	4:33	9:58:38	9:58:38	10:03:11	0:00	0:15
124	0:52	5:36	9:59:30	9:59:30	10:05:06	0:00	1:03
125	0:56	0	10:00:26	0	0	0:00	0:00
				หน่วยให้บริก	ารที่ 1	125:47	10:57
				หน่วยให้บริก	ารที่ 2	101:54	13:14
					รวม	227:41	24:11

รูปที่ 4.3 หน้าจอแสดงผลของ Simulation

ในหน้าจอนี้จะแสดงผลการคำนวณค่าต่างๆ ดังนี้

(1) ลำดับที่

(2) เวลาที่เข้าหลังคนก่อน

(3) เวลาที่ต้องใช้บริการ

(4) นาฬิกาแสดงเวลามาถึงร้าน

(5) นาฬิกาแสดงเวลาเข้ารับบริการ

(6) นาฬิกาแสดงเวลาออกจากร้าน

(7) เวลารอคอยของลูกค้า

(8) เวลาว่างของหน่วยให้บริการ

(9) จำนวนคนที่เข้าสู่ระบบทั้งหมด

(10)จำนวนคนที่สามารถเข้ารับบริการ

(11) จำนวนคนที่ไม่สามารถเข้ารับบริการ

ทำการกดปุ่มปิดเพื่อกลับไปหน้าจอการรับข้อมูล

ผลการคำนวณจากตัวอย่างกรณีของ Multiple Server คือ จะแสดงผลค่าต่างๆดังที่กล่าวมาข้างต้น และยังแสดงผลรวมของค่าต่างๆ ดังนี้

- สำหรับหน่วยให้บริการที่ 1 มี

เวลารอคอยของลูกค้าทั้งหมดคือ 239 นาที

เวลาว่างของหน่วยให้บริการที่ 1ทั้งหมดคือ 1 นาที

- สำหรับหน่วยให้บริการที่ 2 มี

เวลารอคอยของลูกค้าทั้งหมดคือ 235 นาที

เวลาว่างของหน่วยให้บริการที่ 2ทั้งหมดคือ 2 นาที

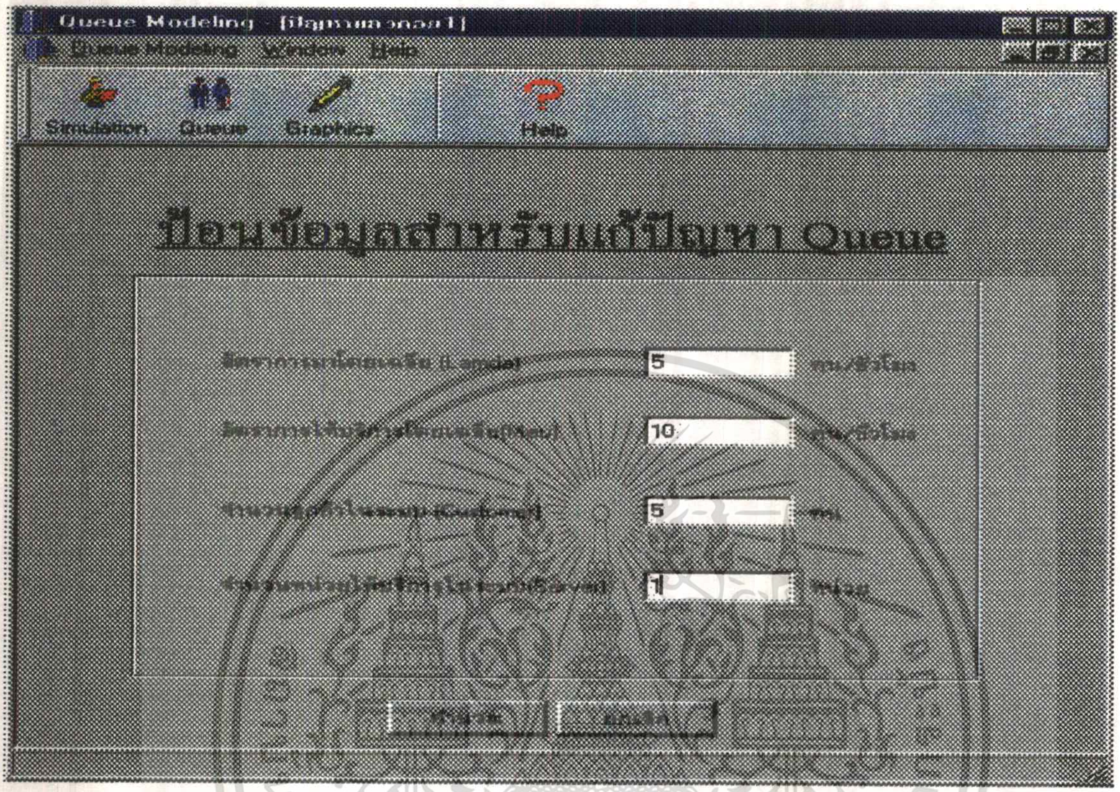
- สำหรับทั้งระบบ มี

เวลารอคอยของลูกค้าทั้งหมดคือ 474 นาที

เวลาว่างของหน่วยให้บริการทั้งหมดคือ 3 นาที

4.3.3 แสดงหน้าจอเกี่ยวกับ Queue จะมีหน้าจอที่เกี่ยวข้องคือ

1) หน้าจอการรับข้อมูล



รูปที่ 4.4 หน้าจอรับข้อมูลของ Queue

ในหน้าจอนี้ ให้ผู้ใช้ทำการใส่ค่าตัวแปรต่างๆ ในการคำนวณ ดังนี้

(1) อัตราการมาโดยเฉลี่ย (λ)

(2) อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (μ)

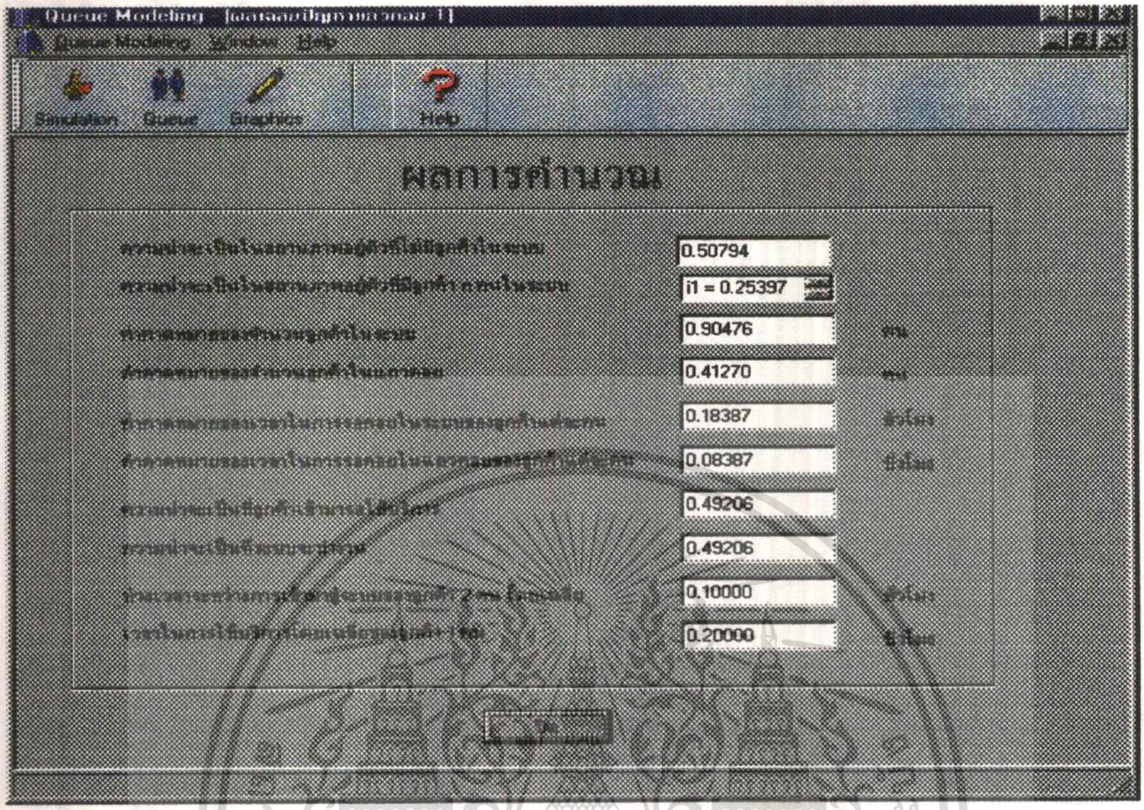
(3) จำนวนลูกค้าในระบบ (People)

(4) จำนวนหน่วยให้บริการ (Server)

ทำการกดปุ่มคำนวณเพื่อแสดงผล หรือกดปุ่มยกเลิกเพื่อออกจาก Queueและกลับสู่หน้าจอหลัก

จากตัวอย่างเป็นกรณีของ Single Server Finite Customer โดยมีการมาของลูกค้าโดยเฉลี่ย 5 คน ต่อชั่วโมง หน่วยให้บริการมีการให้บริการโดยเฉลี่ย 10 คนต่อชั่วโมง จำนวนลูกค้าทั้งหมดในระบบมี 5 คน และจำนวนหน่วยให้บริการในระบบมี 1 หน่วย

2) หน้าจอการแสดงผลข้อมูล



รูปที่ 4.5 หน้าจอแสดงผลของ Queue

ในหน้าจอนี้จะแสดงผลการคำนวณค่าต่างๆ ดังนี้

(1) ความน่าจะเป็นในสถานภาพอยู่ตัวที่ไม่มีลูกค้าในระบบ

(2) ความน่าจะเป็นในสถานภาพอยู่ตัวที่มีลูกค้า n คนในระบบ

(3) ค่าคาดหมายของจำนวนลูกค้าในระบบ

(4) ค่าคาดหมายของจำนวนลูกค้าในแถวคอย

(5) ค่าคาดหมายของเวลาในการรอคอยในระบบของลูกค้าแต่ละคน

(6) ค่าคาดหมายของเวลาในการรอคอยในแถวคอยของลูกค้าแต่ละคน

(7) ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าเข้ามารอใช้บริการ

(8) ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน

(9) ช่วงเวลาระหว่างการเข้ามาสู่ระบบของลูกค้า 2 คน โดยเฉลี่ย

(10) เวลาในการให้บริการโดยเฉลี่ยของลูกค้า 1 คน

ทำการกดปุ่มปิดเพื่อกลับไปหน้าจอการรับข้อมูล

ผลการคำนวณจากตัวอย่างกรณีของ Single Server Finite Customer คือ เมื่อระบบได้ดำเนินการไปได้ระยะเวลาหนึ่งจนอยู่ในสภาวะคงที่แล้ว

(1) ความน่าจะเป็นที่ไม่มีลูกค้าเข้ามาในระบบคือ 0.50794

(2) ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า 1 คนเข้ามาในระบบคือ 0.25397

ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า 2 คนเข้ามาในระบบคือ 0.12698

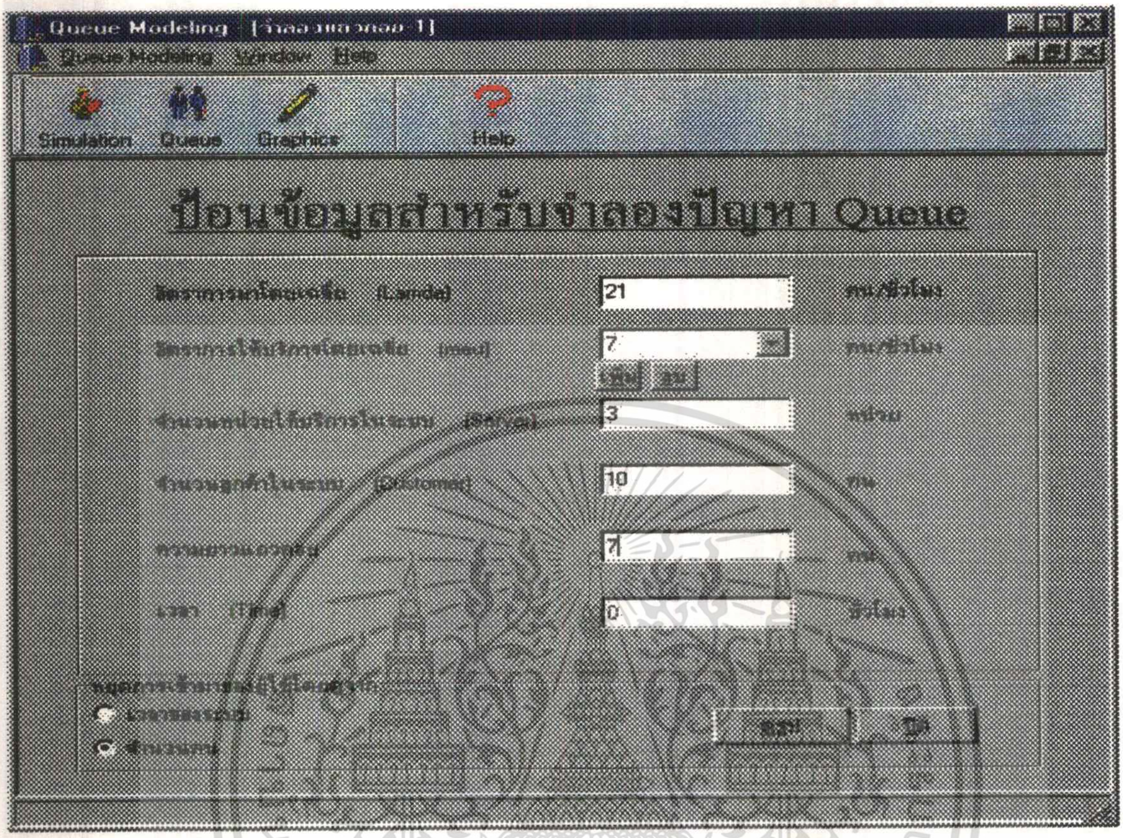
ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า 3 คนเข้ามาในระบบคือ 0.03649

ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า 4 คนเข้ามาในระบบคือ 0.03175

ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า 5 คนเข้ามาในระบบคือ 0.01587

4.3.3 แสดงหน้าจอเกี่ยวกับ Graphic จะมีหน้าจอที่เกี่ยวข้องคือ

1) หน้าจอการรับข้อมูล



รูปที่ 4.6 หน้าจอรับข้อมูลของ Graphic

ในหน้าจอนี้ ให้ผู้ใช้ทำการใส่ค่าตัวแปรต่างๆ ในการคำนวณ ดังนี้

(1) อัตราการมาโดยเฉลี่ย (λ)

(2) อัตราการให้บริการ โดยเฉลี่ย (μ)

(3) จำนวนลูกค้าในระบบ (People)

(4) จำนวนหน่วยให้บริการในระบบ (Server)

(5) ความยาวแถวคอย

(6) จำนวนแถวคอย

(7) เวลา (Time)

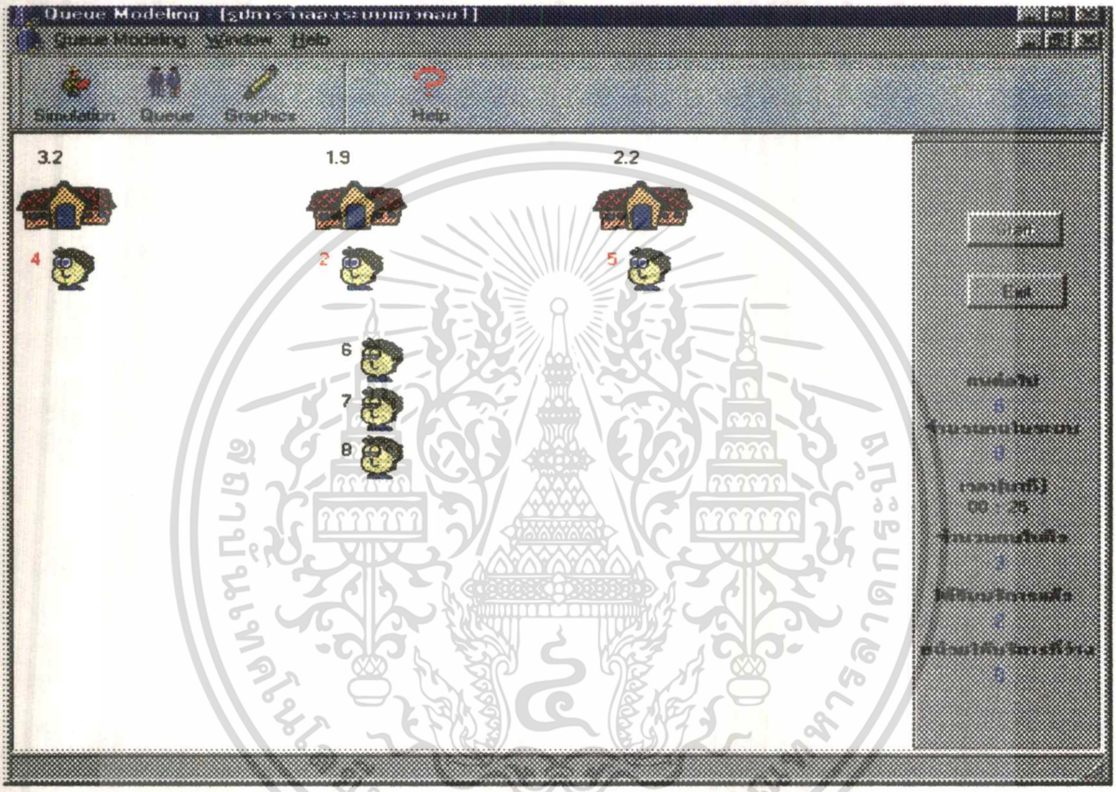
(9) ผู้ใช้ต้องทำการเลือก

- ตามเวลา หมายถึง โปรแกรมจะทำงานจนกระทั่งเวลาหมด (ถึงเวลาที่รับข้อมูลเข้ามา)
- ตามคน หมายถึง โปรแกรมจะทำงานจนถึงจำนวนคนสุดท้ายตามที่ได้รับข้อมูลเข้ามา

ทำการกดปุ่มดูรูปเพื่อแสดงผล หรือกดปุ่มปิดเพื่อออกจาก Graphics และกลับสู่หน้าจอหลัก

จากตัวอย่างเป็นกรณีของ Multiple Server โดยมีการมาของลูกค้าโดยเฉลี่ย 21 คน ต่อชั่วโมง หน่วยให้บริการมีการให้บริการโดยเฉลี่ย 5 คน 3 คน และ 7คนต่อชั่วโมง จำนวนหน่วยให้บริการ 3 หน่วย จำนวนลูกค้าทั้งหมดในระบบ 10 คน และความยาวแถวคอย 7 คน ในตัวอย่างนี้จะหยุดการเข้ามาของผู้ใช้โดยดูจากจำนวนคน

2) หน้าจอแสดงรูป Graphic



รูปที่ 4.7 หน้าจอแสดงรูปการทำงานของแถวคอย

ในหน้าจอนี้จะแสดงรูปการทำงานของแถวคอย

เมื่อทำการกดปุ่ม Start เพื่อให้โปรแกรมทำงานจะมีลูกค้าเข้ามาในระบบโดยเข้ามาตามค่าอัตราการมาโดยเฉลี่ย (λ) การมาของลูกค้าจะแสดงลำดับที่ของลูกค้า และหน่วยให้บริการจะให้บริการตามอัตราการให้บริการของแต่ละหน่วยให้บริการ (μ_i) จะแสดงค่าต่างๆดังนี้

- ลำดับที่ของลูกค้าคนต่อไปที่คอยอยู่ในแถวคอย
- จำนวนลูกค้าทั้งหมดในระบบในขณะนั้น
- เวลาของระบบ
- จำนวนลูกค้าในแถวคอย

- จำนวนลูกค้าที่ได้รับบริการแล้ว
- จำนวนหน่วยให้บริการที่ว่าง

โปรแกรมจะทำงานตามที่ผู้ใช้ทำการเลือกไว้แล้ว คือ

- เลือกตามเวลา โปรแกรมก็จะทำงานจนกระทั่งเวลาหมด (ถึงเวลาที่รับข้อมูลเข้ามา)
- เลือกตามคน โปรแกรมก็จะทำงานจนถึงจำนวนคนสุดท้ายตามที่ได้รับข้อมูลเข้ามา

แล้วกดปุ่ม Exit เมื่อจบการทำงาน หรือหยุดการทำงานของโปรแกรมแล้วกลับไปหน้าจอการรับข้อมูล

ผลการคำนวณจากตัวอย่างกรณีของ Multiple Server จะเห็นว่ามีหน่วยให้บริการ 3 หน่วย และแต่ละหน่วยให้บริการจะแสดงอัตราการให้บริการ ลูกค้าที่กำลังได้รับบริการก็จะอยู่ตามหน่วยให้บริการ ลูกค้าที่ยังไม่ได้รับบริการก็จะรออยู่ในแถวคอย และจะแสดงค่าต่างๆดังที่กล่าวมาข้างต้น

บทที่ 5
สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลปัญหาพิเศษ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เน้นในแง่ที่จะเป็นแนวทางแก่ผู้บริหารในการตัดสินใจที่จะให้บริการแก่ผู้ใช้บริการ เพื่อให้ระบบมีขีดความสามารถในการให้บริการที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพดีขึ้น

ผลการวิจัยโปรแกรมต้นแบบการจำลองระบบแถวคอย สรุปความสามารถโดยสังเขปได้ดังนี้

1) สามารถใช้งานส่วนการควบคุมต่างๆได้โดยการใช้เมาส์ (Mouse)ซึ่งเป็นการทำงานในส่วนการติดต่อแบบกราฟฟิก (Graphic User Interface : GUI)
2) โปรแกรมต้นแบบสามารถใช้งานได้โดยสะดวกและมีการประมวลผลข้อมูลออกมาได้อย่างรวดเร็ว ซึ่งทำให้สามารถใช้เป็นแนวทางในการตัดสินใจของการให้บริการได้
3) โปรแกรมต้นแบบที่จัดทำขึ้นในส่วนที่แสดงผลด้วยรูปภาพ จะมีรายละเอียดต่างๆเกี่ยวกับเวลาที่ใช้ในระบบแถวคอย และผู้ใช้บริการ

5.2 ข้อเสนอแนะ

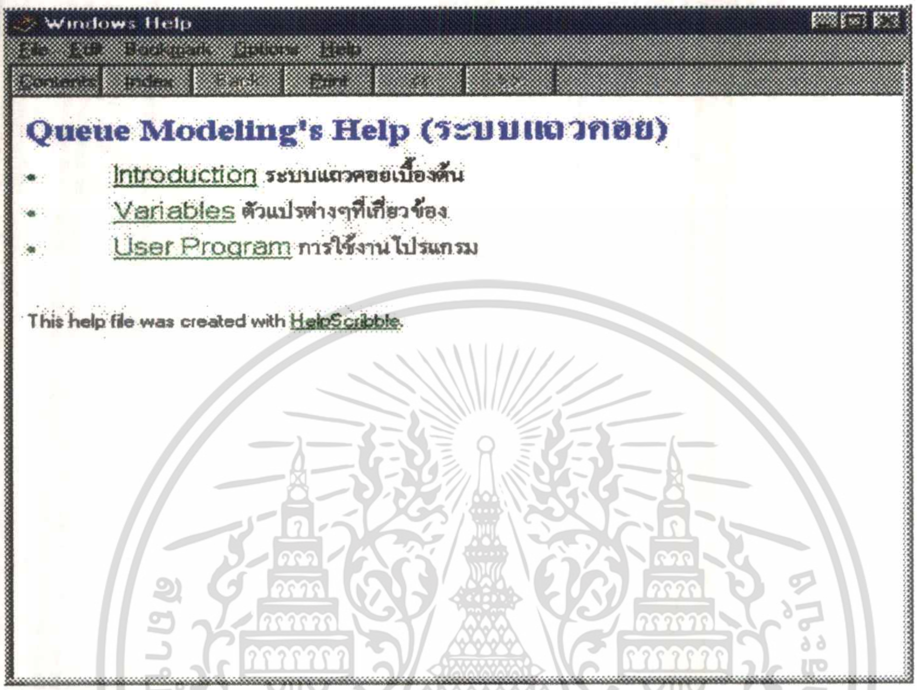
1) โปรแกรมต้นแบบการจำลองระบบแถวคอยที่จัดทำขึ้นนี้สามารถช่วยในการตัดสินใจที่จะให้บริการอย่างมีประสิทธิภาพ จึงเป็นประโยชน์ในการใช้ทรัพยากรได้อย่างเต็มที่
2) สามารถนำโปรแกรมต้นแบบมาใช้เป็นแนวทางในการศึกษาและพัฒนาตามทฤษฎีแถวคอย

5.3 ข้อจำกัด

1) โปรแกรมต้นแบบการจำลองระบบแถวคอยที่จัดทำขึ้นนี้เป็นการให้บริการแบบขั้นตอนเดียวแต่ในความเป็นจริงแล้วการเข้ารับบริการของลูกค้าอาจจะมีการให้บริการแบบหลายขั้นตอน ซึ่งสามารถนำโปรแกรมต้นแบบนี้ไปพัฒนาต่อได้
2) โปรแกรมต้นแบบการจำลองระบบแถวคอยที่จัดทำขึ้นนี้ การรับข้อมูลจะยึดหลักตามความเป็นจริงเท่านั้น

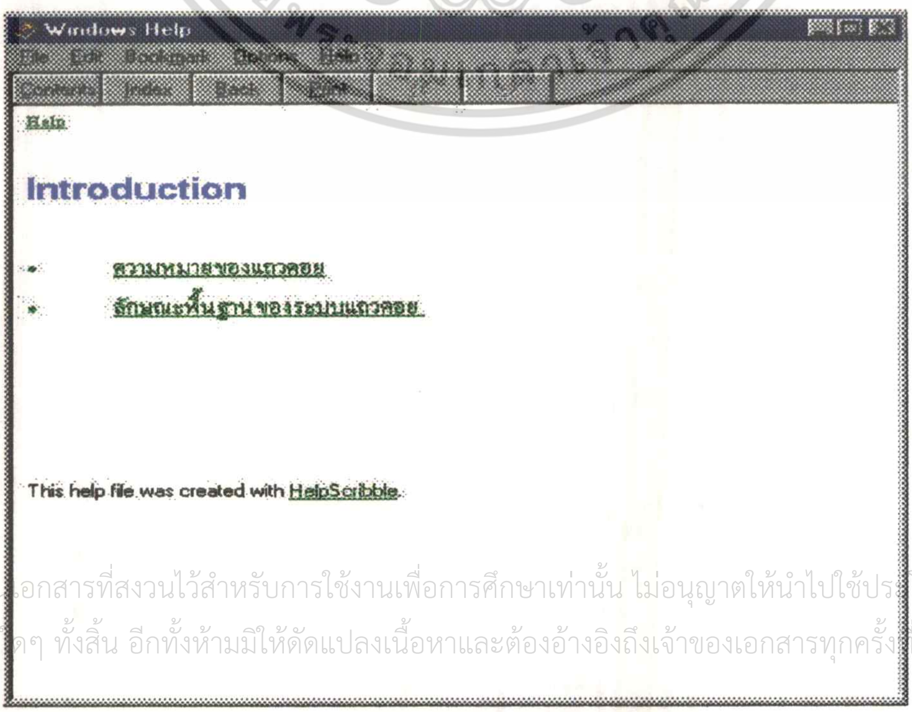
ภาคผนวก ก
หน้าจอส่วนที่เกี่ยวกับ Help

เมื่อทำการเลือก Help จะปรากฏหน้าจอดังรูป

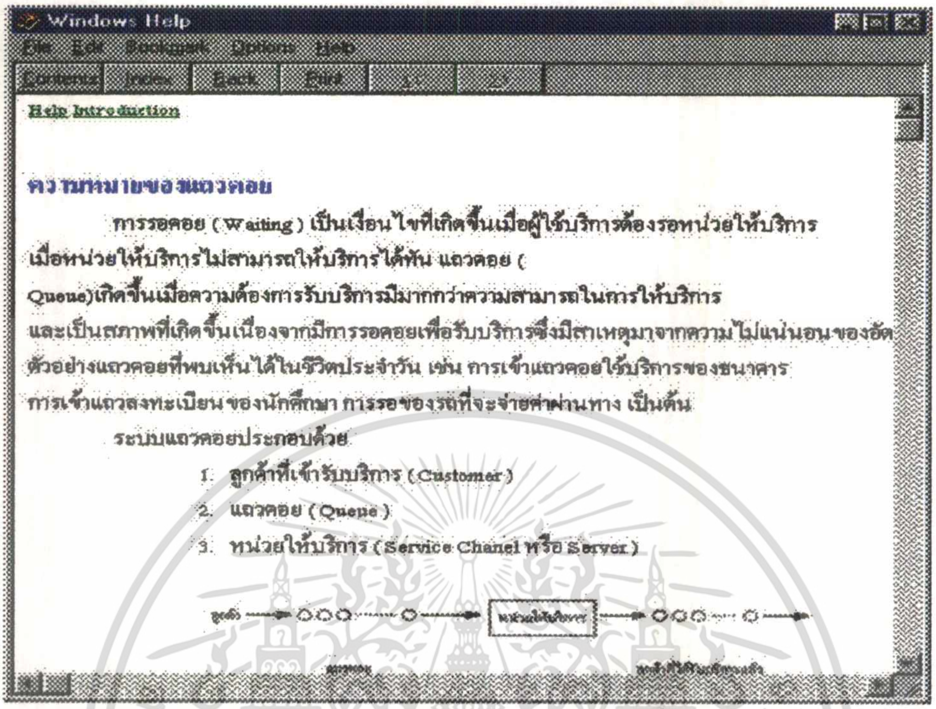


หน้าจอต่างๆที่เกี่ยวข้องกับ Help มีดังนี้

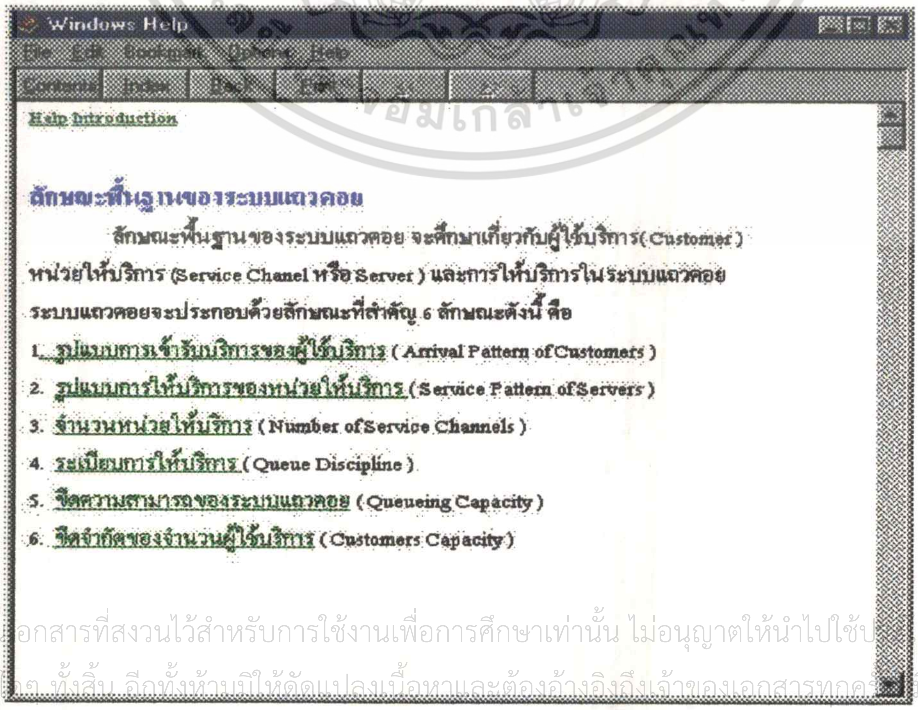
1) เมื่อเลือก Introduction จะปรากฏหน้าจอดังรูป



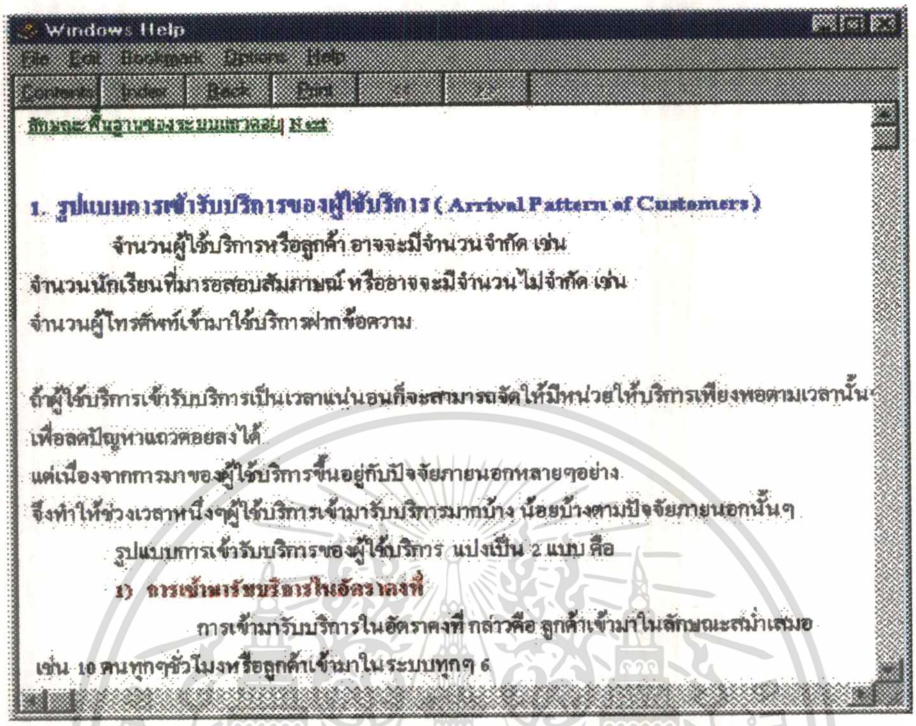
- เมื่อเลือกความหมายของแถวคอย จะปรากฏหน้าจอดังรูป



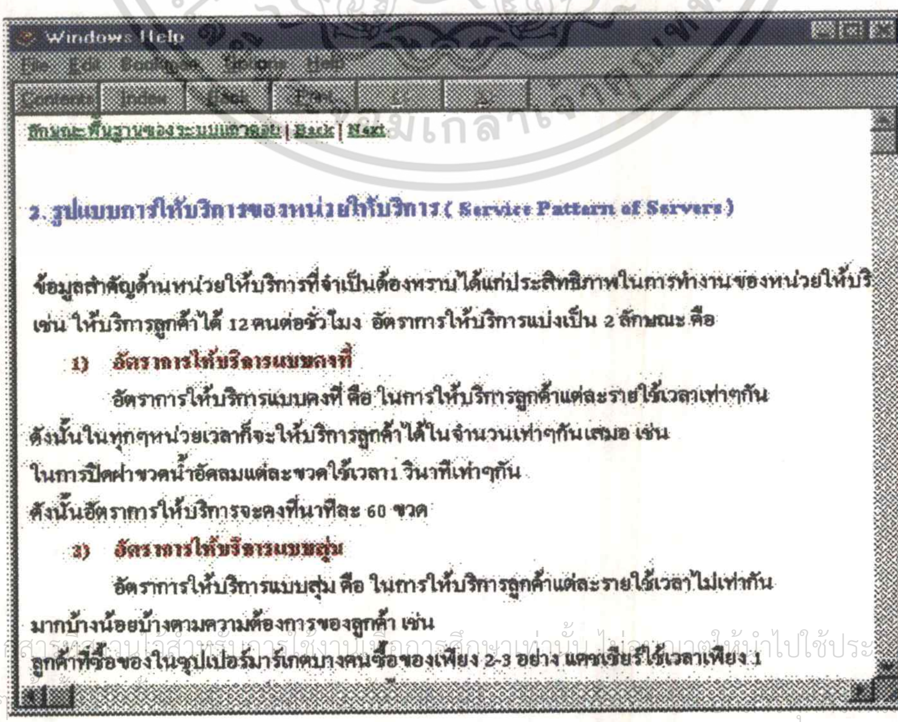
- เมื่อเลือกลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอย จะปรากฏหน้าจอดังรูป



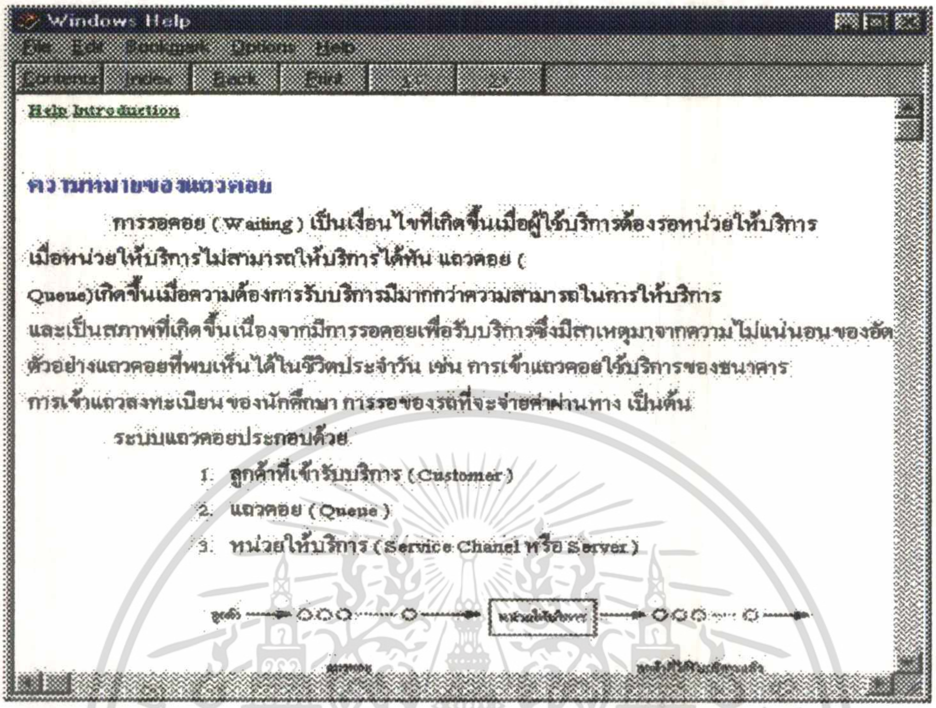
- เมื่อเลือกรูปแบบการเข้ารับบริการของผู้ใช้บริการ จะปรากฏหน้าจอดังรูป



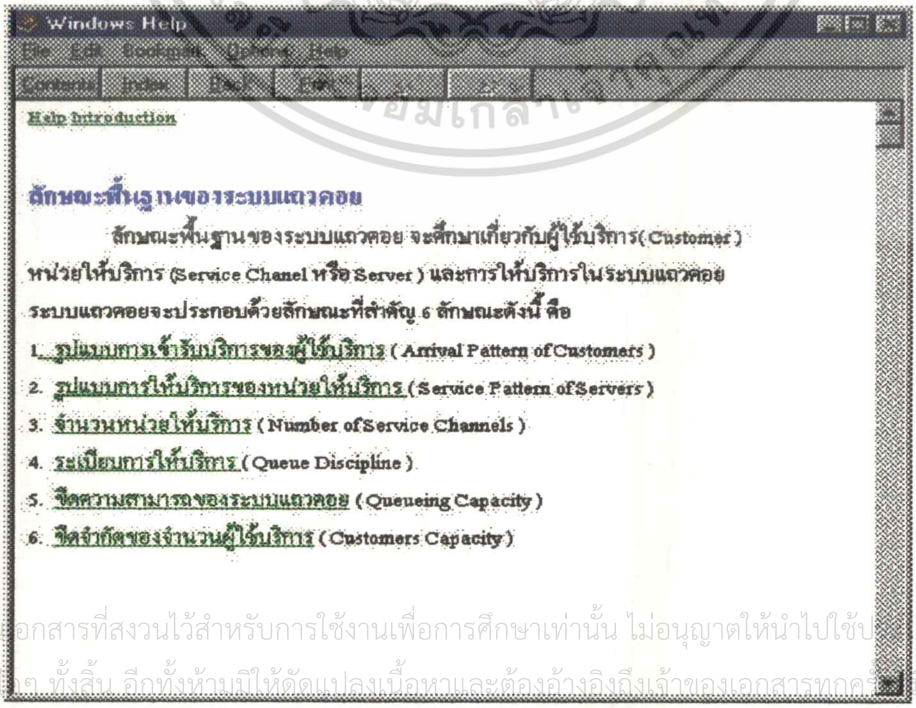
- เมื่อเลือกรูปแบบการให้บริการของหน่วยให้บริการ จะปรากฏหน้าจอดังรูป



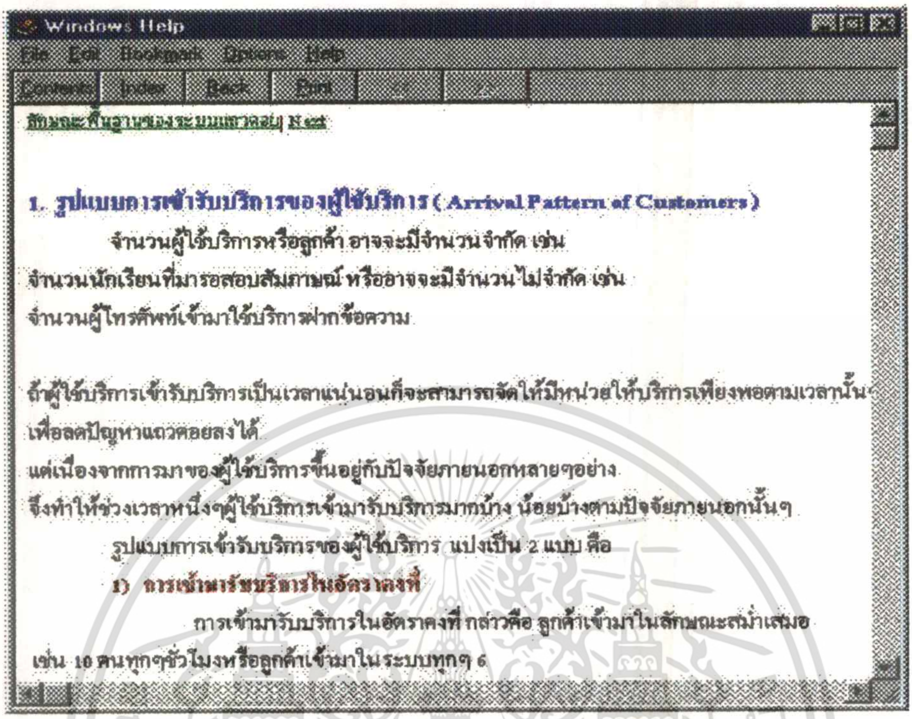
- เมื่อเลือกความหมายของแถวคอย จะปรากฏหน้าจอดังรูป



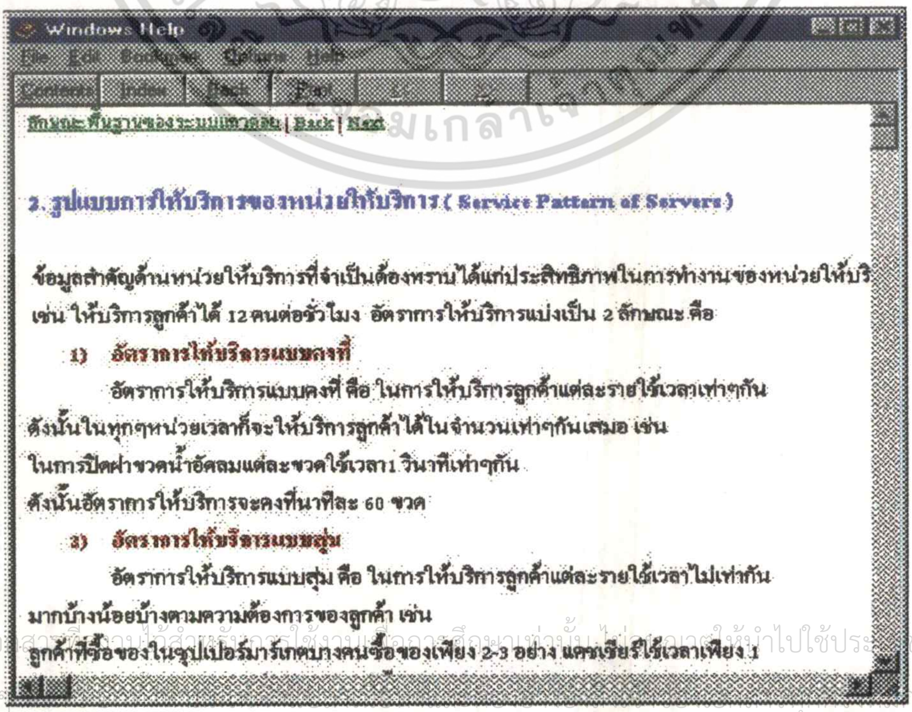
- เมื่อเลือกลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอย จะปรากฏหน้าจอดังรูป



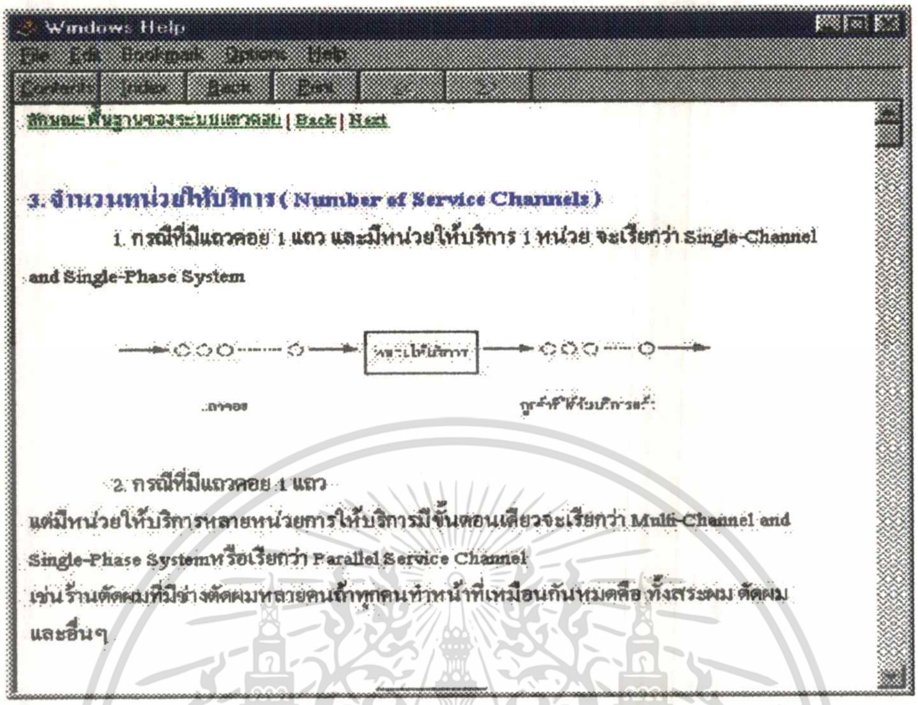
- เมื่อเลือกรูปแบบการเข้ารับบริการของผู้ใช้บริการ จะปรากฏหน้าจอดังรูป



- เมื่อเลือกรูปแบบการให้บริการของหน่วยให้บริการ จะปรากฏหน้าจอดังรูป



- **เมื่อเลือกจำนวนหน่วยให้บริการ จะปรากฏหน้าจอดังรูป**



Windows Help

File Edit Bookmark Options Help

Contents Index Back Print

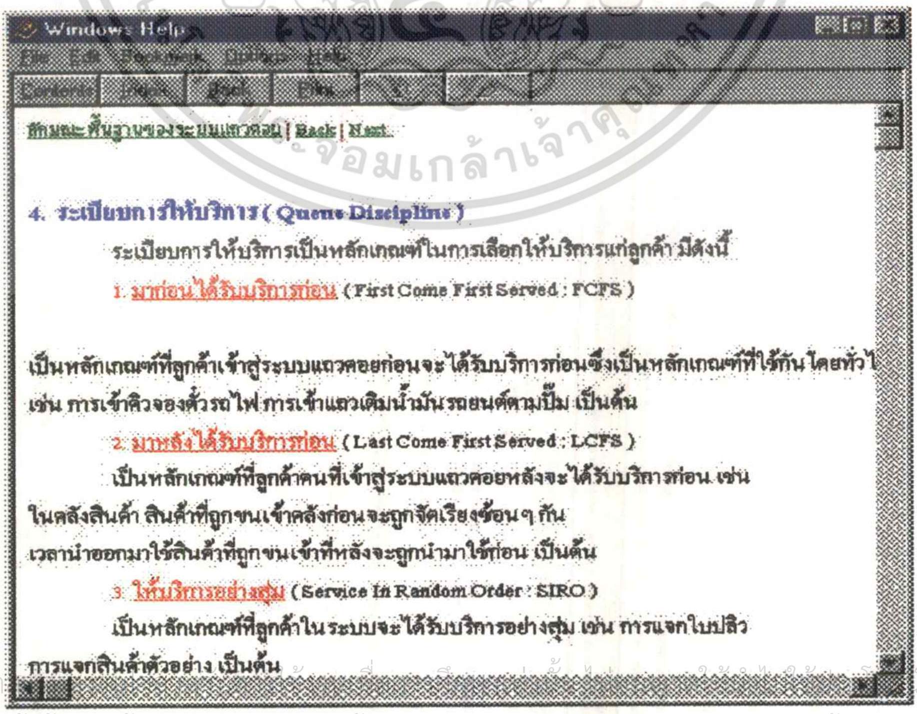
ลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอย | Back | Next

3. จำนวนหน่วยให้บริการ (Number of Service Channels)

1. กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว และมีหน่วยให้บริการ 1 หน่วย จะเรียกว่า Single-Channel and Single-Phase System

2. กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว แต่มีหน่วยให้บริการหลายหน่วยการให้บริการมีขั้นตอนเดียวจะเรียกว่า Multi-Channel and Single-Phase Systemหรือเรียกว่า Parallel Service Channel เช่น ร้านตัดผมที่มีช่างตัดผมหลายคนถ้าทุกคนทำหน้าที่เหมือนกันหมดคือ ทั้งสระผม ตัดผม และอื่นๆ

- **เมื่อเลือกระเบียบการให้บริการ จะปรากฏหน้าจอดังรูป**



Windows Help

File Edit Bookmark Options Help

Contents Index Back Print

ลักษณะพื้นฐานของระบบแถวคอย | Back | Next

4. ระเบียบการให้บริการ (Queue Discipline)

ระเบียบการให้บริการเป็นหลักเกณฑ์ในการเลือกให้บริการแก่ลูกค้า มีดังนี้

1. มาก่อนได้รับบริการก่อน (First Come First Served : FCFS)

เป็นหลักเกณฑ์ที่ลูกค้าเข้าสู่ระบบแถวคอยก่อนจะได้รับบริการก่อนซึ่งเป็นหลักเกณฑ์ที่ใช้กัน โดยทั่วไ เช่น การเข้าคิวจองตั๋วรถไฟ การเข้าแถวเติมน้ำมันรถยนต์ตามปั๊ม เป็นต้น

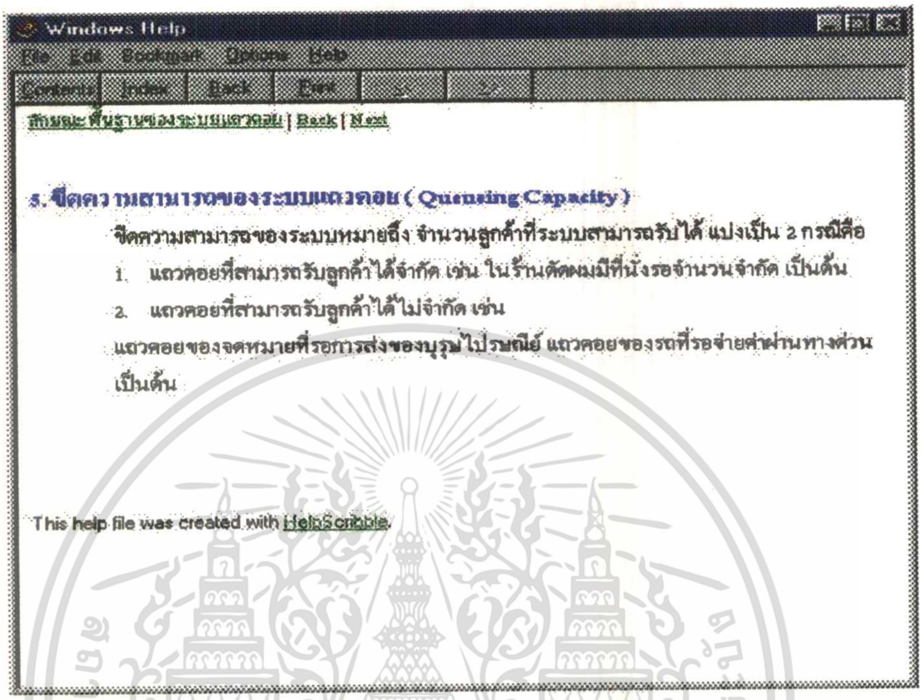
2. มาหลังได้รับบริการก่อน (Last Come First Served : LCFS)

เป็นหลักเกณฑ์ที่ลูกค้าคนที่เข้าสู่ระบบแถวคอยหลังจะได้รับบริการก่อน เช่น ในคลังสินค้า สินค้าที่ถูกขนเข้าคลังก่อนจะถูกจัดเรียงซ้อนๆ กัน เวลานำออกมาใช้สินค้าที่ถูกขนเข้าที่หลังจะถูกนำมาใช้ก่อน เป็นต้น

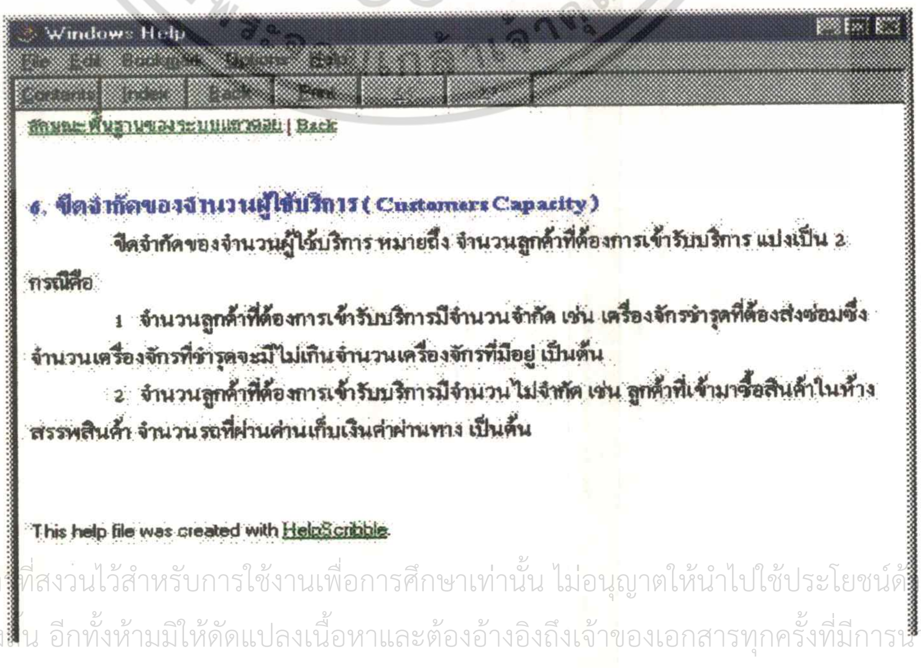
3. ให้บริการอย่างสุ่ม (Service In Random Order : SIRO)

เป็นหลักเกณฑ์ที่ลูกค้าในระบบจะได้รับบริการอย่างสุ่ม เช่น การแจกใบปลิว การแจกสินค้าตัวอย่าง เป็นต้น

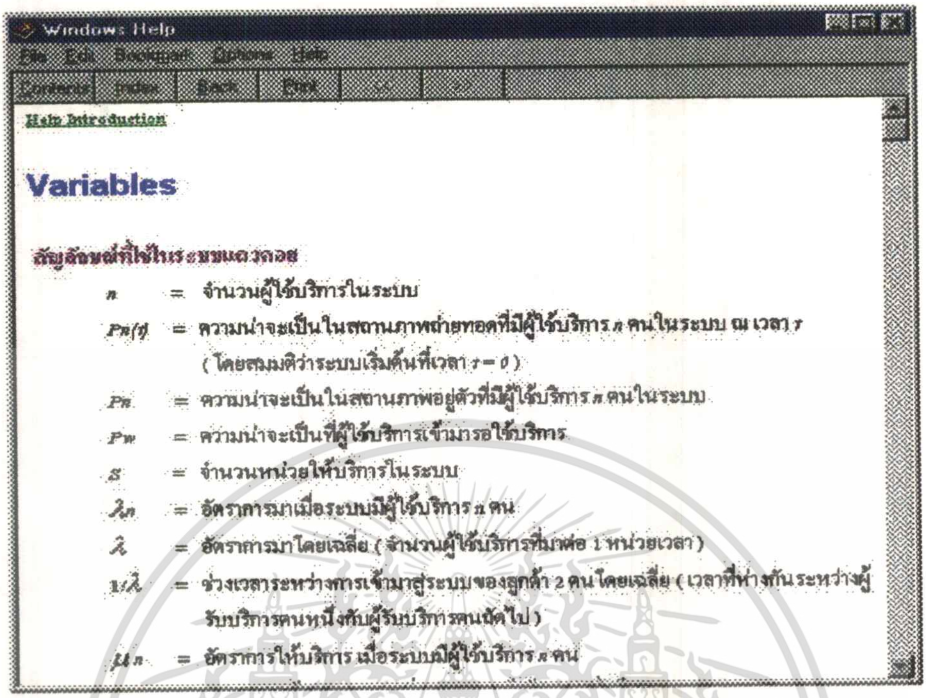
- เมื่อเลือกขีดความสามารถของระบบแถวคอย จะปรากฏหน้าจอดังรูป



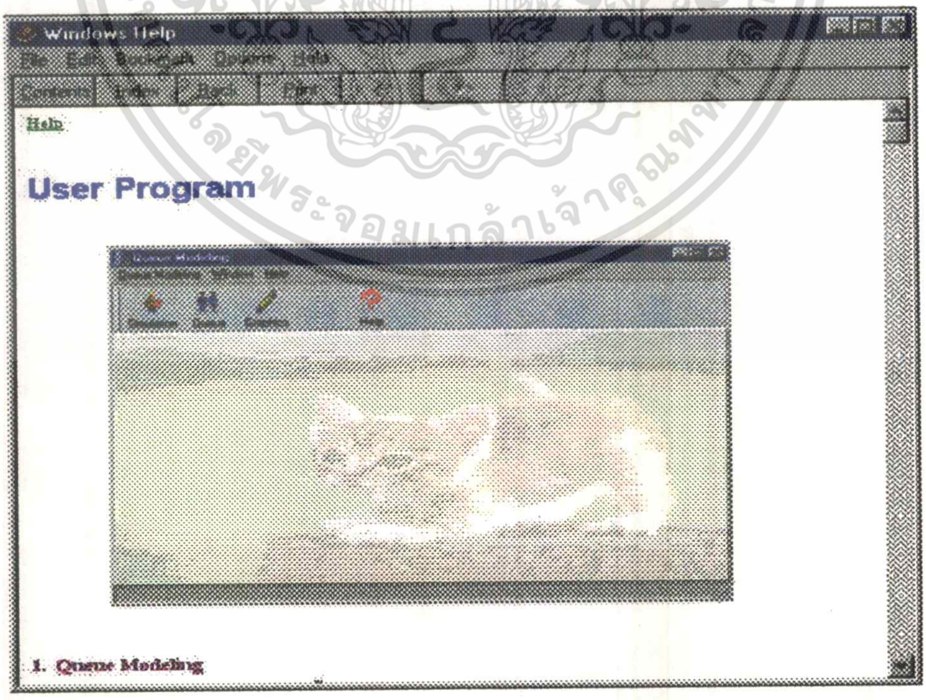
- เมื่อเลือกขีดจำกัดของจำนวนผู้ใช้บริการ จะปรากฏหน้าจอดังรูป



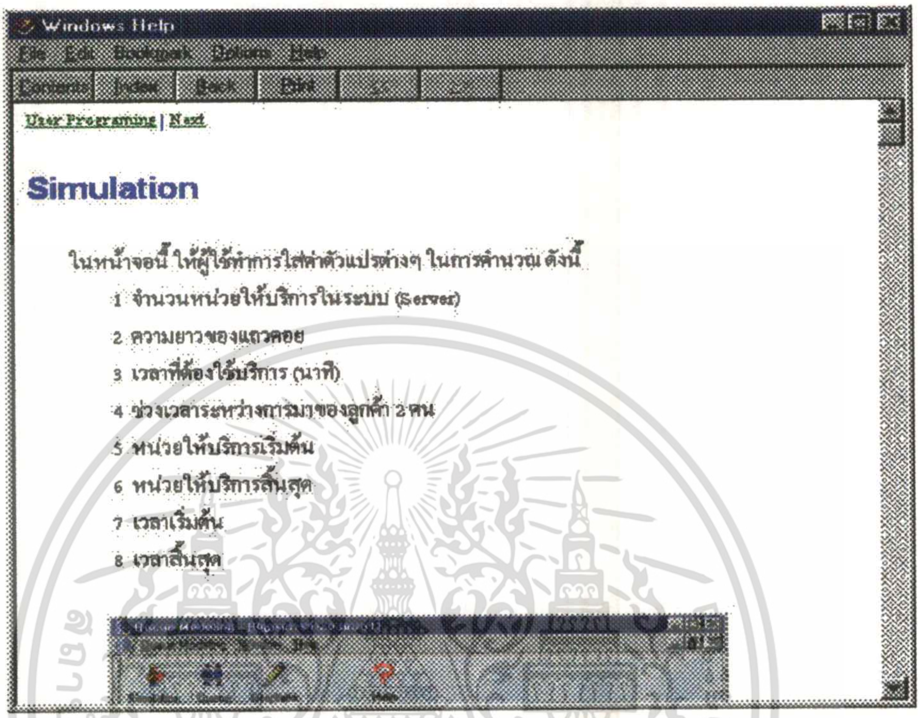
2) เมื่อเลือก Variables จะปรากฏหน้าจอดังรูป



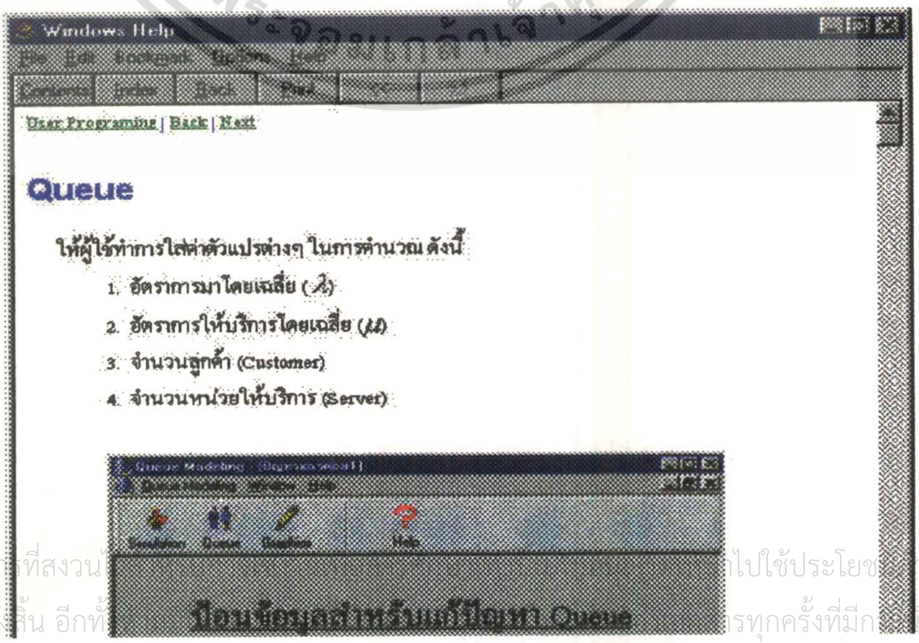
3) เมื่อเลือก User Program จะปรากฏหน้าจอดังรูป



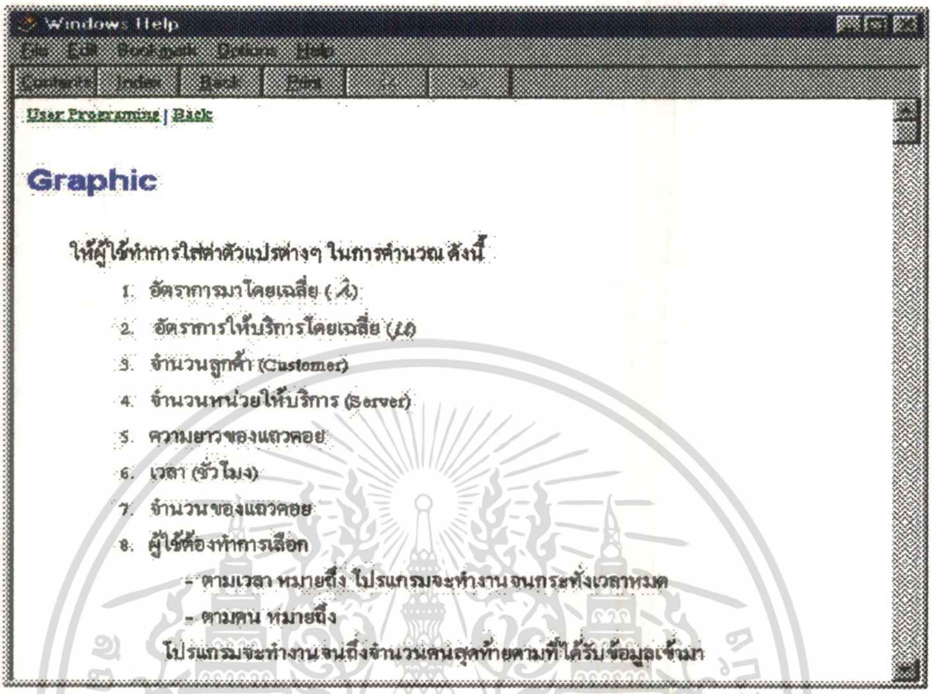
- **เมื่อเลือกSimulation จะปรากฏหน้าจอดังรูป**



- **เมื่อเลือกQueue จะปรากฏหน้าจอดังรูป**



- **เมื่อเลือกGraphic จะปรากฏหน้าจอดังรูป**



บรรณานุกรม

1. กัลยา วานิชย์บัญชา. การวิจัยและดำเนินงาน : การวิเคราะห์เชิงปริมาณทางธุรกิจ , โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2538
2. Alexander M. Mood , Franklin A. Graybill , Duane C. Boes. **Introduction to The Theory of Statistics** , McGraw-Hill Kogakusha , LTD, 1974
3. Frederick S. Hillier , Gerald J. Liberman. **Introduction to Operations Research** , 5th Edition , McGraw-Hill Publishing Company ,1990.
4. John A. Lawrence , JR. Barry Alan Pasternack. **Applied Management Science A Computer – Integrated Approach for Decision Making** , John Wiley & Sons , Inc , New York , 1998.
5. Kent Reisdorph . **Borland C++ Builder 3 in 21 Days** , SAMS Publishing , 1998
6. Wayne L. Winston. **Operations Research Application and Algorithms** , 3rd Edition , Duxbury Press , Belmont , California , 1993.