

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การแก้ไขลักษณะของลายเส้นโดยใช้เวฟเล็ตทรานส์ฟอร์ม

EDITING CHARACTER OF CURVE BY WAVELETS TRANSFORM



นายรัชชาญ มัคคุน

MR. CHAICHAN MAKKUN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาดุษฎีบัณฑิตกิตติมศักดิ์

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

บัณฑิตวิทยาลัย

เลขที่.....สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เลขที่..... 27260

พ.ศ. 2539

....., เดือน, ปี 18 ส.ค. 2540

ISBN 974-621-784-4

เอกสารนี้ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

EDITING CHARACTER OF CURVE BY WAVELETS TRANSFORM



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE
MASTER OF ENGINEERING IN ELECTRICAL ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

1996

ISBN 974-621-784-4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การแก้ไขลักษณะของลายเส้นโดยใช้เวฟเส้นทรานส์ฟอร์ม
นักศึกษา	นายรัชชาญ มัคคูน
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	ดร.กิตติพล ชิตสกุล
ระดับการศึกษา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชา	วิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.	2539

บทคัดย่อ

ภาพต่างๆที่นำมาวิเคราะห์โดยทั่วไปแล้วจะพิจารณาเป็นจุดภาพที่มีค่าระดับความเข้มต่าง ๆ กัน มาประกอบกันเป็นภาพ นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณาได้ว่าภาพเกิดจากลายเส้นที่นำมาเรียงต่อกันเป็นภาพ ถ้าสามารถทำการเปลี่ยนแปลงลักษณะของลายเส้นได้ก็จะสามารถเปลี่ยนแปลงลักษณะของภาพได้ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จึงนำเสนอวิธีการแก้ไขลักษณะของลายเส้น ซึ่งเป็นคุณสมบัติพื้นฐานของภาพ การแก้ไขลักษณะของลายเส้นจะสามารถแบ่งได้สองส่วน คือ การเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้น และ การเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของลายเส้น วิธีการโดยทั่วไปของการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้น ทำได้โดยการหาสมการของแนวของลายเส้นใหม่ จากนั้นทำการเคลื่อนย้ายจุดทุกจุดของลายเส้นเดิมไปตามสมการใหม่นี้ ส่วนในกรณีที่ต้องการจะเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของลายเส้น ก็จะต้องทำการหาสมการของลายเส้นใหม่ทั้งหมด ซึ่งทั้งสองวิธีจะเป็นการยุ่งยากมาก ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเสนอวิธีแก้ไขลักษณะลายเส้น โดยใช้ทฤษฎีเวฟเส้นทรานส์ฟอร์ม ซึ่งอาศัยหลักการของการวิเคราะห์ส่วนประกอบย่อยๆ ร่วมกับหลักการของ B-spline Curve ทำให้สามารถทำการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้นโดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูลจำนวนน้อยมาก และสามารถทำการเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของลายเส้นได้โดยไม่ต้องหาสมการของลายเส้นใหม่ จึงเป็นขบวนการที่ง่ายและสะดวกกว่ามาก

Thesis Title	Editing Character of curve by Wavelet Transform
Student	Mr. Chaichan Makkun
Thesis advisor	Dr.Kitipol Chitsakul
Level of study	Master of Engineering in Electrical Engineering
Department	Electronic King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Year	1996

Abstract

A digital image is presented as a two-dimensional array of number. Each number represents the intensity or gray level composing into the image. Because of the continuity of the image points, an image can be considered on the other hand, as the sequences of curve. If the characters of curves are changed, the characters of image will be also changed. Generally an editing character of a curve is performed by changing of coarse structure (or sweep) or by changing the curve's detail. By a conventional method for changing coarse structure of a curve, we have to move every points of the curve to new coarse structures by finding new equation of new structures. Moreover, in order to change the detail of curve, we have to fine all new equations of each detail curve. In this thesis, we present a method of multiresolution analysis by wavelets transform with principle of B-spline curve. The advantage of this method is that we use only small amount of transformed data points to change the coarse structure of curve and we do not need to find all new equations for changing of curve's detail.

Key words : wavelet transform, multiresolution analysis, B-spline curve, character of curve.

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.มนัส สัจวรศิลป์ และ ดร.กิตติพล จิตสกุล ที่ได้ให้ความดูแล เอาใจใส่ และให้คำแนะนำปรึกษาในด้านความรู้ ความสะดวกในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นอย่างยิ่ง ขอขอบพระคุณท่านคณะกรรมการสอบทุกท่านที่ได้สละเวลาอันมีค่า

ขอขอบคุณ นายธีรณัฐ เริ่มศึคการ เพื่อนๆกลุ่มเวฟเถิด และน้องๆทุกคนที่ได้ให้ความช่วยเหลือ และกำลังใจในด้านต่างๆ ทำให้ทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ชัยชาญ มัคคั่น



สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญภาพ.....	VI
ความหมายคำย่อและสัญลักษณ์.....	XI
บทที่	
1. บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	1
แนวทางในการแก้ปัญหา.....	2
2. ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ท.....	4
ลักษณะของเวฟเล็ท.....	4
ทฤษฎีพื้นฐานเวฟเล็ทในการสเกลและการเลื่อนตำแหน่ง.....	7
ความเป็นมาของการแปลงเวฟเล็ท.....	13
ความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงเวฟเล็ทและการแปลงฟูรีเยร์ในลักษณะของฟังก์ชัน หน้าต่าง.....	16
ลักษณะของเวฟเล็ทแม่แบบต่างๆ.....	17
3. การแปลงเวฟเล็ทแบบต่อเนื่อง.....	19
การพัฒนาการแปลงฟูรีเยร์สู่การแปลงเวฟเล็ท.....	19
Gabor Transform : GT.....	24
Short-Time Fourier Transform : STFT.....	29
การแปลงเวฟเล็ทแบบต่อเนื่อง.....	32
การแปลงกลับเวฟเล็ท.....	37
4. การแปลงเวฟเล็ทแบบแบ่งช่วง.....	40
การวิเคราะห์สัญญาณแบบหลายระดับความละเอียด.....	40

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
การหัดและการขยายของเวฟเล็ด.....	48
การแจกแจงสัมประสิทธิ์เวฟเล็ด.....	49
การแปลงเวฟเล็ดแบบแบ่งช่วง.....	50
การแปลงเวฟเล็ดโดยใช้หลักการของ Analysis Filter Banks.....	51
การแปลงกลับเวฟเล็ดโดยใช้หลักการของ Synthesis Filter Banks.....	57
ลักษณะสมบัติของฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเล็ด.....	59
ตัวอย่างฟังก์ชันเวฟเล็ด.....	69
5. ไลนแบบ B-spline และเวฟเล็ดแบบ B-spline.....	75
ไลนแบบ B-spline.....	76
ฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ดแบบ B-spline.....	90
การพิจารณามตริกซ์ A, B, P, Q ในการแตกกระจายและรวมกลับสัญญาณ.....	96
ตัวอย่างการใช้เมตริกซ์ P, Q ในการแตกกระจายและรวมกลับข้อมูล.....	103
6. การประยุกต์ใช้การแปลงเวฟเล็ดแก้ไขลักษณะของไลน.....	106
การแตกกระจายและรวมกลับข้อมูลไลน.....	106
การทดลองแก้ไขแนวของไลน.....	122
การทดลองแก้ไขรายละเอียดของไลน.....	130
การทดลองแก้ไขรายละเอียดของภาพถ่าย 2 มิติ.....	137
การทดลองการประมาณไลน.....	141
7. บทสรุป ปัญหาและข้อเสนอแนะ.....	144
สรุปทฤษฎีของการแปลงเวฟเล็ด.....	144
สรุปงานวิจัย.....	145
ปัญหาและข้อเสนอแนะ.....	146
บรรณานุกรม.....	148
ภาคผนวก ก. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์.....	150
ภาคผนวก ข. โครงสร้างของโปรแกรมการทดลอง.....	151
ประวัติผู้เขียน.....	159

สารบัญญภาพ

หน้า

1. แสดงตัวอย่างลักษณะของ Morlet Wavelet : $g(t) = e^{-(t^2/64)} \cos(t)$	5
2. ก) แสดงลักษณะของสัญญาณ Sinusoidals Signal = $\cos(t)$	5
ข) แสดงลักษณะของ Window function = $Exp(-t^2/64)$	5
3. แสดงลักษณะของเวฟเล็ตแม่ที่ถูกสเกลและเลื่อนตำแหน่งไปที่ค่า a, b ต่างๆกัน.....	6
4. แสดงลักษณะของการแตกกระจายสัญญาณและรวมกลับสัญญาณของเวฟเล็ต.....	8
5. แสดงลักษณะของสัญญาณที่มีหลายความถี่ที่ตำแหน่งเวลาต่างกัน	9
6. ก) แสดงการพิจาณาสัญญาณในลักษณะแบบ 2 มิติแบบแบ่งช่วง	10
ข.) แสดงการพิจาณาสัญญาณในลักษณะแบบ 2 มิติแบบต่อเนื่อง	10
ค.) แสดงลักษณะของสัญญาณเมื่อพิจารณาจากด้านบน	10
7. แสดงลักษณะของผลของการ Correlation ระหว่าง $f(t)$, $g((t-b)/a)$	12
8. แสดงลักษณะความแตกต่างของสัญญาณเอาร์ทูระหว่าง FT กับ WT	12
9. แสดงลักษณะของระนาบเวลาความถี่แบบคงที่ (Constant Time-Frequency plane).....	14
10. ก) แสดงลักษณะของ ระนาบเวลาและความถี่ สำหรับ WT.....	15
ข) แสดงลักษณะการแตกกระจายสัญญาณไปยังระดับความละเอียดต่างๆ.....	15
11. แสดงลักษณะขอบเขตที่จำกัดของเวฟเล็ตฟังก์ชัน.....	23
12. แสดงลักษณะ Gauassian window function : g_α , $\alpha = 1, 1/4, 1/16$	24
13. แสดงส่วนจริงของ $G_{b,\omega}^\alpha(t) = Re(G_{0,2\pi}^\alpha)$: $\alpha = 0.2925$	26
14. แสดงส่วนจินตภาพ $G_{b,\omega}^\alpha(t) = Im(G_{0,2\pi}^\alpha)$: $\alpha = 0.23$	26
15. แสดงลักษณะของ Time-frequency window ของ Gabar Transform	28
16. แสดงลักษณะความกว้างของ Time window.....	30
17. แสดงลักษณะความกว้างของ Frequency window.....	30
18. แสดงลักษณะพื้นที่ในการวิเคราะห์สัญญาณของ Time-frequency window ในระนาบเวลา และความถี่สำหรับ STFT.....	31
19. แสดงลักษณะของ Filter banks ในแบบของ STFT.....	32
20. แสดงการแปลงเวฟเล็ตในลักษณะของการ Inner product.....	34
21. แสดงลักษณะของ CWT ในลักษณะของ Band pass filter constant Q.....	36

สารบัญภาพ (ต่อ)

	หน้า
22. แสดงลักษณะของระนาบเวลาและความถี่ของการแปลงเวฟเล็ด.....	36
23. แสดงลักษณะของการแปลงกลับเวฟเล็ด.....	38
24. แสดงลักษณะการแตกกระจายของสเปกของเวกเตอร์.....	45
25. แสดงลักษณะการแตกกระจายสัญญาณ f_j ไปยังระดับความละเอียดต่างๆกัน.....	45
26. ก) แสดงลักษณะของสัญญาณ f_0 ซึ่งถูกแตกออกไปเป็น $g_j(t)$ 5 ระดับ.....	46
ข) แสดงลักษณะของการแตกกระจายสัญญาณที่ระดับ $j = -1, -2$	46
27. แสดงลักษณะของการแจกแจงสัมประสิทธิ์ด้วย WT.....	51
28. ก) แสดงสัญลักษณ์ของ Two-channel analysis filter banks หรือ Bands separator.....	52
ข) แสดงลักษณะของ Tree-structured octave analysis filter banks.....	52
29. แสดงลักษณะของการแยก Frequency bands ของ Octave filter bank.....	53
30. ก) แสดงสัญลักษณ์ของ two-channel synthesis filter banks หรือ Bands separator.....	54
ข) แสดง Octave synthesis filter banks.....	54
31. แสดง Two-channel analysis filter banks ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์เวฟเล็ด.....	56
32. แสดงลักษณะของ DWT โดยใช้ Dyadic tree structure (Octave filter bank).....	56
33. แสดงลักษณะของ Two-channel synthesis filter banks.....	58
34. แสดงลักษณะของ IWT โดยการใช้ Dyadic tree structure.....	58
35. แสดงลักษณะของ Ideal low-pass filter.....	59
36. แสดงลักษณะของ Ideal highpass filter.....	62
37. แสดงการรวมสัญญาณฟังก์ชันสเกลลิง $\phi(2t-n)$ 4 ตัวเป็นฟังก์ชันสเกลลิง $\phi(t)$ 1 ตัว.....	65
38. แสดงการรวมสัญญาณฟังก์ชันสเกลลิง $\phi(2t-n)$ 4 ตัวเป็นฟังก์ชันเวฟเล็ด $\psi(t)$ 1 ตัว.....	65
39. ก) แสดงลักษณะของการสร้างฟังก์ชันสเกลลิงโดยใช้ $i = 1$	68
ข) แสดงลักษณะของการสร้างฟังก์ชันสเกลลิงโดยใช้ $i = 2$	68
40. แสดงผลความแตกต่างของการใช้จำนวนการทำซ้ำที่ต่างกัน.....	69
41. ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Harr	70
ข) แสดงลักษณะสเปกตรัมขนาดของฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Harr.....	70

สารบัญญภาพ (ต่อ)

หน้า

42. ก) แสดงลักษณะของเวฟเล็ตแบบ Haar	71
ข) แสดงลักษณะสเปกตรัมขนาดของเวฟเล็ตแบบ Harr.....	71
43. ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันและสเปกตรัมของสเกลลิง แบบ Shannon	72
ข) แสดงลักษณะฟังก์ชันและสเปกตรัมของเวฟเล็ต แบบ Shannon	72
44. ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Daubechies-10	73
ข) แสดงลักษณะสเปกตรัมฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Daubechies-10.....	73
45. ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันเวฟเล็ตแบบ Daubechies-10.....	74
ข) แสดงลักษณะสเปกตรัมของฟังก์ชันเวฟเล็ต Daubechies-10.....	74
46. แสดงลักษณะของการเกิดลายเส้นแบบ B-spline.....	76
47. แสดงลักษณะของการเกิดเส้นโค้งย่อยๆที่ระดับ m ต่างๆกัน.....	77
48. แสดงลักษณะของการหา $N_{i,m}(t)$ แบบการทำซ้ำ.....	78
49. แสดงลักษณะของการเกิดลายเส้น B-spline จากฟังก์ชัน B-spline ลำดับที่ 4.....	78
50. แสดงลักษณะพื้นที่ค้ำใน (Convex hull) ของการเกิดส่วนโค้งที่ลำดับ m ต่างๆกัน.....	79
51. แสดงลักษณะของการเกิดเส้นโค้งในพื้นที่ค้ำในของ CP 4 จุด ที่ $m = 3$	80
52. แสดงลักษณะของ $N_{i,3}(t)$ แบบ Uniform Knot vector เมื่อ $0 \leq t \leq 6$	84
53. แสดงลักษณะของการเกิดลายเส้น B-spline ในตัวอย่างที่ 5.2.....	85
54. แสดงความสัมพันธ์ของรอยต่อของส่วนประกอบเส้นโค้งย่อยของ $N_{i,3}(t)$	86
55. แสดงลักษณะฟังก์ชัน B-spline ลำดับที่ $m = 1-4$; $i = 1-7$ แบบ Open Knot vector.....	87
56. แสดงลักษณะของลายเส้นในตัวอย่างที่ 5.3.....	89
57. แสดงลักษณะของผลการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ CP ในระนาบ xy.....	90
58. แสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงแบบ B-spline ลำดับที่ 4 ที่ระดับความละเอียด $j = 2$	91
59. แสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงแบบ B-spline ลำดับ 4 $j = 3$ ในตัวอย่างที่ 5.4.....	92
60. แสดงลักษณะการซ้อนทับกันของฟังก์ชันที่ตำแหน่งใกล้เคียงของ $N_{i,3}(t)$	93
61. แสดงลักษณะของ Dual B-spline scaling function ที่ลำดับ $m = 2$	95
62. แสดงแผนภูมิการใช้เมตริกซ์ P', Q' ในการรวมกลับสัมประสิทธิ์	98
63. แสดงแผนภูมิการใช้เมตริกซ์ A', B' ในการแตกกระจายสัมประสิทธิ์.....	100

สารบัญญภาพ (ต่อ)

หน้า

64. แสดงลักษณะฟังก์ชันเวฟเล็ตแบบ B-spline ลำดับ $m = 4, j = 2$ ที่ตำแหน่งต่างๆ.....	101
65. แสดงลักษณะของข้อมูลที่เกี่ยวข้องในเมตริกซ์ $N_{i,j}(t)$ ที่ระดับ $j = 2$	107
66. ก) แสดงของตำแหน่งของจุดควบคุม C' และลักษณะของฟังก์ชัน $N_{i,j}(t)$ แต่ละฟังก์ชัน.....	109
ข) แสดงลักษณะของลายเส้นที่เกิดจาก $[C']N_{i,j}(t)$	109
67. ผลการทดลองลักษณะของลายเส้นที่เกิดจากจุดควบคุมในการทดลองที่ 6.2.....	109
68. ผลการทดลองลักษณะการเกิดลายเส้นจากจุดควบคุม 2 มิติในการทดลองที่ 6.3.....	111
69. ผลการทดลองการสร้างภาพลายเส้นในการทดลองที่ 6.4.....	111
70. แสดงภาพบล็อกโคอะแกรมของการกระจายข้อมูล \mathbb{W}	112
71. ผลการทดลองการแตกกระจายลายเส้นในการทดลองที่ 6.5.....	113
72. แสดงภาพการขยายสเกลแกน y ที่ระดับความละเอียด $j = 0$ ในการทดลองที่ 6.5.....	115
73. แสดงลักษณะของภาพลายเส้นตามสมการที่ (6.4) และ (6.5).....	115
74. ผลการทดลองการแตกกระจายลายเส้นในการทดลองที่ 6.6 ที่ระดับ $j = 7, 6, 5, 4$	117
75. แสดงบล็อกโคอะแกรมของการรวมกลับข้อมูล.....	118
76. ผลการทดลองลักษณะการใช้ข้อมูลสุ่มจริงในการทดลองที่ 6.7.....	119
77. แสดงตัวอย่างแนวและรายละเอียดของลายเส้นแบบต่างๆ.....	121
78. แสดงบล็อกโคอะแกรมของการแก้ไขแนวของลายเส้น.....	122
79. ผลการทดลองการแก้ไขแนวของลายเส้นที่ระดับ $j = 0$ ในการทดลองที่ 6.8.....	123
80. ผลการทดลองการแก้ไขแนวของลายเส้นที่ระดับ $j = 3$ ในการทดลองที่ 6.9.....	125
81. ผลการทดลองการแตกกระจายเส้นรอบรูปในการทดลองที่ 6.10.....	126
82. ผลการทดลองการแก้ไขรูปทรงเรขาคณิตแบบแบ่งข้อมูลเป็นส่วนๆ ในการทดลองที่ 6.11.....	127
83. ผลการทดลองการแก้ไขแนวรูปห้าเหลี่ยมในการทดลองที่ 6.12.....	128
84. ผลการทดลองการแก้ไขแนวรูปห้าเหลี่ยมที่ระดับ $j = 5$ ในการทดลองที่ 6.13.....	129
85. ผลการทดลองการแก้ไขแนวของรูปแท่งสี่เหลี่ยมในการทดลองที่ 6.14.....	130
86. แสดงบล็อกโคอะแกรมของการแก้ไขรายละเอียดของลายเส้น.....	131
87. ผลการทดลองในการแก้ไขรายละเอียดในการทดลองที่ 6.15.....	132
88. ผลการทดลองตัวอย่างที่ 2 ของการทดลองที่ 6.15.....	133

สารบัญญภาพ (ต่อ)

	หน้า
89. ผลการทดลองการแก้ไขรายละเอียดของรูปห้าเหลี่ยมในการทดลองที่ 6.16.....	134
89. ผลการทดลองการแก้ไขรายละเอียดของรูปเลขแปดในการทดลองที่ 6.17.....	135
90. ผลการทดลองแก้ไขรายละเอียดในการทดลองที่ 6.18.....	136
91. ก) แสดงการทำ WT กับภาพ 2 มิติ 1 ครั้ง.....	137
ข) แสดงบล็อกโคอะแกรมการทำ WT กับภาพ 2 มิติถึงระดับสเกล j	137
92. แสดงบล็อกโคอะแกรมของการผสมภาพถ่ายโดยใช้ WT.....	138
93. ก) การผสมภาพระหว่างชั้นแบนด์โดยใช้อัตราส่วนต่างกัน.....	139
ข) การผสมภาพทั้งภาพโดยวิธีการบวกกันโดยตรง.....	139
94. ก) ภาพรูปทรงเรขาคณิต (Image 1).....	140
ข) ภาพการทำ WT ของ Image 1 สามครั้ง.....	140
ค) ภาพลายผ้า (Image 2).....	140
ง) ภาพการทำ WT ของ Image 2 สามครั้ง.....	140
จ) ภาพที่เกิดจากการผสมด้วย WT.....	140
ฉ) ภาพที่เกิดจากการผสมกันโดยตรง.....	140
95. แสดงบล็อกโคอะแกรมของการประมาณลายเส้น.....	141
96. แสดงลายเส้นรอบรูปของตัวอักษรที่ใช้เป็นอินพุทในการประมาณลายเส้น.....	142
97. แสดงลายเส้นรอบรูปของตัวอักษรหลังจากคัดกลุ่มรายละเอียดที่ระดับต่างๆทิ้งไป.....	142

คำย่อและสัญลักษณ์

<u>คำย่อ</u>	<u>คำเต็ม</u>	<u>คำภาษาไทยที่ใช้</u>
BSWT	B-spline Wavelet Transform	การแปลงเวฟเลตแบบ B-spline
CWT	Continuous Wavelet Transform	การแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่อง
DWT	Discrete Wavelets Transform	การแปลงเวฟเลตแบบแบ่งช่วง
FS	Fourier Series	อนุกรมฟูรีเยร์
FT	Fourier Transform	การแปลงฟูรีเยร์
GT	Gabor Transform	การแปลงแบบ Gabor
MRA	Multiresolution Analysis	การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด
IWT	Inverse Wavelets Transform	การแปลงกลับเวฟเลต
STFT	Short-Time Fourier Transform	การแปลงแบบ STFT
WT	Wavelets Transform	การแปลงเวฟเลต
b.f.	Basis function	ฟังก์ชันพื้นฐาน
w.f.	Window function	ฟังก์ชันหน้าต่าง
o.n.	Orthonormal	ลักษณะเชิงตั้งฉาก
o.n.b.f.	Orthonormal Basis function	ฟังก์ชันพื้นฐานเชิงตั้งฉาก

สัญลักษณ์

V^j	สเปซของเวกเตอร์
W^j	สเปซของเวฟเลต
IR	เซตของจำนวนจริงใดๆ $(-\infty, \infty)$
ZZ	เซตของจำนวนเต็มใดๆ
$L^2(IR)$	สเปซของฟังก์ชันใน L^2 ที่มีขอบเขตอยู่ในช่วง $(-\infty, \infty)$
$L^2(0, 2\pi)$	สเปซของฟังก์ชันใน L^2 ที่มีขอบเขตอยู่ในช่วง $(0, 2\pi)$
$\phi(t), \check{\phi}(t)$	Scaling function และ Dual Scaling function
$\psi(t), \check{\psi}(t)$	Wavelets function และ Dual Wavelets function
$W_{\psi} f(t)(b, a)$	สัมประสิทธิ์ของการแปลงเวฟเลตที่ตำแหน่ง b และ a ใดๆ

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ลายเส้นเป็นส่วนประกอบพื้นฐานของภาพต่างๆ ตัวอย่างเช่น ภาพวาดก็เป็นภาพที่เกิดจากลายเส้นมาประกอบกัน หรือในกรณีของภาพถ่ายซึ่งจะประกอบด้วยเส้นสแกนมาเรียงต่อกัน โดยที่เส้นสแกนแต่ละเส้นเหล่านี้ก็จะประกอบด้วยจุดภาพที่มีความเข้มต่างๆกันมาเรียงกัน ดังนั้นจะสามารถพิจารณาได้ว่าเส้นสแกนเหล่านี้ก็คือลายเส้นแต่ละเส้นที่ประกอบขึ้นเป็นภาพก็ได้ จากแนวคิดดังกล่าวลายเส้นจึงเป็นส่วนประกอบพื้นฐานที่สำคัญของภาพ ดังนั้นเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงลักษณะของลายเส้น ก็จะทำให้ลักษณะของภาพเปลี่ยนไป หากสามารถทำการเปลี่ยนแปลงลักษณะของลายเส้นได้อย่างง่ายและสะดวกแล้ว ก็จะสามารถนำไปเป็นหลักการพื้นฐานที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ ได้อีกมากมาย

โดยทั่วไปแล้วลักษณะของลายเส้นหรือเส้นโค้งใดๆก็ตาม จะสามารถแบ่งได้เป็น 2 ส่วนใหญ่ๆ คือ ส่วนที่แสดงแนวของลายเส้นซึ่งใช้แสดงทิศทางของลายเส้น และส่วนที่แสดงรายละเอียดซึ่งเป็นส่วนที่ลายเส้นเส้นเบี่ยงเบนไปจากแนวของลายเส้น โดยปรกติแล้วในกรณีที่ต้องการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้น จะต้องทำการหาสมการของแนวลายเส้นใหม่ แล้วทำการเคลื่อนย้ายจุดทุกจุดของลายเส้น ไปตามสมการแนวลายเส้นใหม่นี้ ส่วนในกรณีที่ต้องการเปลี่ยนรายละเอียดของลายเส้น จะต้องหาสมการของลายเส้นใหม่ทั้งหมดเท่านั้น ซึ่งวิธีการเหล่านี้จะเป็นการยุ่งยากและไม่สะดวกมากในการหาสมการเหล่านี้ โดยเฉพาะการเปลี่ยนแปลงแนวหรือรายละเอียดของลายเส้นที่มีความซับซ้อน และมีรูปร่างไม่แน่นอน

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) พัฒนารูปแบบการแก้ไขเปลี่ยนแปลงลักษณะของลายเส้นให้สามารถกระทำได้อย่างง่ายและสะดวกมากยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) เพื่อที่จะสามารถนำหลักการและวิธีการดังกล่าวนี้ ไปใช้เป็นทฤษฎีพื้นฐานสำหรับการประยุกต์ใช้งานกับภาพลายเส้นในรูปแบบอื่นๆ ได้ต่อไป

3) ศึกษาเพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงลักษณะและคุณสมบัติของการขบวนการแปลงเวฟเลต ซึ่งเป็นการแปลงสัญญาณที่ให้ข้อมูลที่มีรายละเอียดและเป็นประโยชน์ในการวิเคราะห์ข้อมูลต่างๆ ได้เป็นอย่างดี และสามารถที่จะนำไปประยุกต์ใช้งานในด้านอื่นๆ ต่อไป

4) เพื่อให้เป็นเอกสารแนะนำถึงวิธีการของการแปลงเวฟเลต สำหรับผู้ที่เริ่มสนใจในการที่จะนำการแปลงสัญญาณในรูปแบบนี้ไปประยุกต์ใช้งาน ซึ่งจะได้มีความสะดวกและประหยัดเวลาในการศึกษาและทำความเข้าใจกับลักษณะสมบัติพื้นฐานของการแปลงเวฟเลตมากยิ่งขึ้น .

แนวทางในการแก้ปัญหา

จากการที่ลักษณะของลายเส้นจะประกอบไปด้วยแนวของลายเส้นและรายละเอียดของลายเส้น ดังนั้นถ้าสามารถทำการแตกหรือแยกข้อมูลของลายเส้นออกเป็นกลุ่มข้อมูลที่แสดงถึงแนวของลายเส้นและกลุ่มข้อมูลที่เป็นตัวแทนแสดงรายละเอียดของลายเส้น ก็จะทำให้เกิดความสะดวกในการที่จะเปลี่ยนแปลงลักษณะของแนวหรือรายละเอียดของลายเส้น โดยทำการเปลี่ยนแปลงข้อมูลเฉพาะในกลุ่มข้อมูลที่สนใจเท่านั้น ซึ่งก็จะง่ายและสะดวกมากยิ่งขึ้น

จากหลักการที่นำเสนอนี้จะใช้วิธีการของการแปลงเวฟเลต (Wavelet Transform : WT) ซึ่งมีคุณสมบัติของการแตกกระจายสัญญาณออกเป็นส่วนๆ และสามารถทำการวิเคราะห์สัญญาณเฉพาะส่วนที่ต้องการได้ ดังนั้นจะนำ WT มาทำการแตกกระจายข้อมูลลายเส้นออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆ แล้วเปลี่ยนแปลงเฉพาะข้อมูลในส่วนประกอบที่ต้องการเท่านั้น ก็จะทำให้แนวของลายเส้นหรือรายละเอียดของลายเส้นเปลี่ยนไป ซึ่งจะทำให้สะดวกในการเปลี่ยนแปลงลายเส้นมาก และข้อมูลที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงก็น้อยกว่ามาก ตัวอย่างเช่นในการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้นเมื่อทำการทรานส์ฟอร์มข้อมูลแล้วข้อมูลที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงจะมีเพียง 5 คู่ลำดับเท่านั้น ทำให้สะดวกและมองเห็นแนวของลายเส้นที่เปลี่ยนแปลงได้ชัดและรวดเร็วกว่า นอกจากนี้ในการเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของลายเส้นก็สามารถทำได้ง่ายโดยการสลับกลุ่มข้อมูลที่แสดงรายละเอียดของลายเส้นกับรูปแบบรายละเอียดที่ต้องการเท่านั้น และสามารถเก็บรายละเอียดของลายเส้นเป็นฐานข้อมูลไว้ใช้ในภายหลังได้อีกด้วย

สำหรับเนื้อหาและรายละเอียดที่จะกล่าวต่อไป ผู้วิจัยได้พยายามเขียนข้อมูลทุกอย่างที่ได้ศึกษาเพื่อเป็นการบันทึกไว้ให้ตัวผู้เขียนเองด้วย ดังนั้นจึงมีเนื้อหาของทฤษฎีค่อนข้างมากเป็นพิเศษ ซึ่งถ้าผู้อ่านท่านใดต้องการทราบรายละเอียดเพียงคร่าวๆ สามารถเลือกอ่านเฉพาะบทที่ 2, 5, 6 และ 7 ก็เพียงพอ สำหรับเนื้อหาต่างๆในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะพิจารณาแยกเป็นบทๆดังนี้

บทที่ 1. บทนำ จะกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย วัตถุประสงค์ในการทำวิจัย และแนวทางที่นำเสนอในการแก้ปัญหา รวมทั้งชี้แจงรายละเอียดเนื้อหาในวิทยานิพนธ์

บทที่ 2. ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงเวฟเลต จะเป็นการกล่าวถึงคุณสมบัติและลักษณะของการแปลงเวฟเลตซึ่งจะไม่กล่าวถึงเหตุผลทางคณิตศาสตร์มากนัก เพื่อเป็นการปูพื้นฐานให้ผู้ที่ไม่เคยมีความรู้เกี่ยวกับการแปลงสัญญาณในรูปแบบนี้สามารถทำความเข้าใจในบทต่อไปได้

บทที่ 3. การแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่อง (Continuous Wavelet Transform : CWT) เป็นศึกษาถึงการทำการแปลงเวฟเลตกับสัญญาณที่มีความต่อเนื่อง ซึ่งกล่าวเปรียบเทียบกับเห็นถึงความแตกต่างกับการแปลงข้อมูลในรูปแบบอื่นๆ เช่น การแปลงฟูรีเยร์ (Fourier Transform : FT) เป็นต้น

บทที่ 4. การแปลงเวฟเลตแบบแบ่งช่วง (Discrete Wavelet Transform : DWT) เป็นการอธิบายถึงการทำการแปลงเวฟเลตกับข้อมูลกลุ่มของสัญญาณ ซึ่งเป็นรูปแบบของสัญญาณอินพุตที่ต้องการใช้ในการประมวลผลด้วยระบบคอมพิวเตอร์ ในบทนี้จะกล่าวถึงลักษณะของการทำการแปลงเวฟเลตที่ใช้ทางปฏิบัติด้วย

บทที่ 5. ลายเส้นแบบ B-spline และการแปลงเวฟเลตแบบ B-spline ในบทนี้จะอธิบายถึงลักษณะของการเกิดภาพลายเส้น ซึ่งจากแนวคิดของการเกิดลายเส้นนี้ นำไปสู่การพัฒนาเป็นแปลงเวฟเลตในรูปแบบที่เรียกว่า การแปลงเวฟเลตแบบ B-spline (B-spline wavelet transform : BSWT) ซึ่งจะเป็นลักษณะของการแปลงข้อมูลที่จะนำไปใช้ในการแตกกระจายข้อมูลลายเส้นต่อไป

บทที่ 6. การแก้ไขลักษณะของลายเส้น จะเป็นการนำเอาหลักการที่กล่าวมาทั้งหมดมาใช้ในการแก้ไขลักษณะของลายเส้น ซึ่งในบทนี้จะแยกออกเป็นสามส่วนหลักๆคือ การแก้ไขแนวของลายเส้น การแก้ไขรายละเอียดของลายเส้น และการประมาณลายเส้น ซึ่งในแต่ละส่วนก็จะกล่าวถึงตัวอย่างในการทดลองและผลการทดลองและสรุปผลการทดลองในแต่ละส่วน

บทที่ 7. สรุปผล ปัญหาและข้อเสนอแนะ ในบทนี้จะกล่าวถึงปัญหาที่เกิดขึ้นในการทดลองและแนวทางแก้ไข รวมถึงแนวทางในการพัฒนาหลักการที่นำเสนอนี้ไปใช้ประยุกต์กับงานอื่นๆต่อไปในอนาคต

ส่วนสุดท้ายจะเป็นภาคผนวก ซึ่งจะเป็นการกล่าวถึง ผลงานวิจัยที่ได้รับตีพิมพ์ ลักษณะของโปรแกรมการทดลอง และประวัติผู้เขียน

บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ต

บทนำ

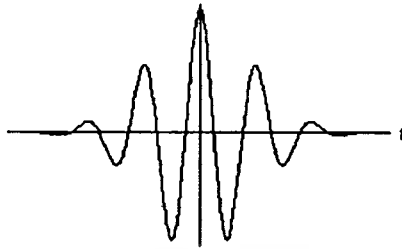
ในบทนี้จะเป็นการอธิบายหลักการของการแปลงเวฟเล็ต (Wavelet Transform : WT) อย่างง่าย ๆ โดยจะกล่าวถึง ความหมาย ลักษณะทั่วไป ลักษณะทางฟิสิกส์ ความแตกต่างระหว่าง WT กับการแปลงข้อมูลแบบอื่นๆ เหตุผลและความจำเป็นในการพัฒนาสู่ WT เป็นต้น โดยที่แนวทางการอธิบายในบทนี้จะไม่กล่าวเน้นการพิสูจน์ในทางคณิตศาสตร์ แต่จะเป็นเพียงการอธิบายให้เข้าใจถึงหลักการของ WT เท่านั้น ซึ่งรายละเอียดต่างๆเกี่ยวกับวิธีทางคณิตศาสตร์จะถูกพิจารณาอีกครั้งในบทที่ 3.

ลักษณะของเวฟเล็ต

ทฤษฎีเวฟเล็ต (Wavelet Theory) เป็นคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายการสร้างโมเดลของสัญญาณระบบ หรือ ขบวนการทางฟิสิกส์ใดๆ ซึ่งประกอบขึ้นด้วยเซตของสัญญาณเฉพาะหรือระบบย่อยๆ มารวมกันเป็นสัญญาณหรือระบบนั้นๆ สัญญาณเฉพาะนี้จะเป็นคลื่นเล็กๆซึ่งถูกเรียกว่า "เวฟเล็ต" (Wavelets) ลักษณะของเวฟเล็ตจะเป็นคลื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง (Oscillatory) และขนาดของคลื่นจะลดลงสู่ศูนย์อย่างรวดเร็วทั้งสองด้าน ดังแสดงในภาพที่ 1

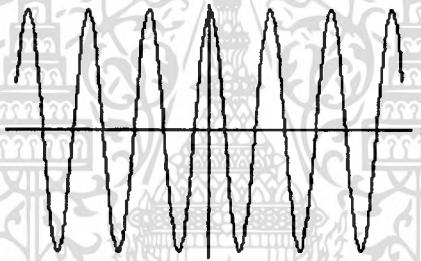
ในภาพที่ 1 เป็นตัวอย่างของเวฟเล็ตชนิดหนึ่งเรียกว่าเวฟเล็ตแบบ Morlet สังเกตว่า มีคุณสมบัติของเวฟเล็ตตามที่กล่าวมาทั้ง 2 เงื่อนไข คือ มีการออสซิลเลทในลักษณะของสัญญาณซายน์ซอซอดัล (Sinusoidals) ดังแสดงในภาพที่ 2 ก) รวมกับเงื่อนไขของการลดลงอย่างรวดเร็วตามลักษณะฟังก์ชันหน้าต่าง (Windows Function) ดังแสดงในภาพที่ 2 ข)

ภาพที่ 1

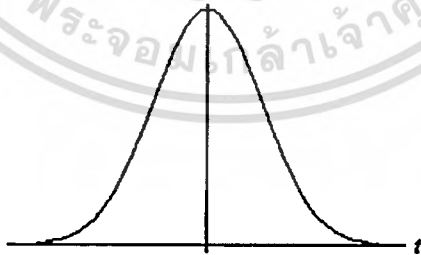


แสดงตัวอย่างลักษณะของ Morlet Wavelet : $g(t) = e^{\frac{-t^2}{64}} \cos(t)$

ภาพที่ 2



ก) แสดงลักษณะของสัญญาณ Sinusoidals Signal : $\cos(t)$



ข) แสดงลักษณะของ Window function = $e^{\frac{-t^2}{64}}$

แสดงลักษณะเงื่อนไขทั้งสองของฟังก์ชันเวฟเล็ต

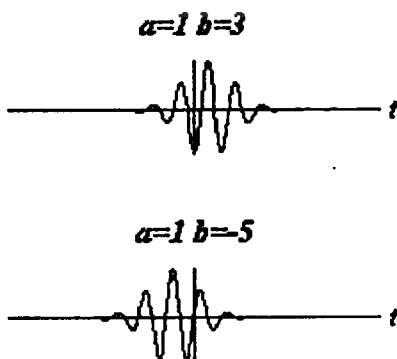
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อทั้งสองเงื่อนไขเกิดขึ้นพร้อมกัน ก็จะทำให้เกิดคลื่นเล็กๆที่เรียกว่า "เวฟเล็ต" ดังนั้นการคูณกันของฟังก์ชันออสซิลเลท (Oscillate function) และฟังก์ชันการลดลง (Decay function) จะให้ผลเป็นคลื่นเวฟเล็ต ดังแสดงในภาพที่ 1

การนำเวฟเล็ตหลายๆอันมารวมกันเป็นเซต เพื่อจะใช้ในการอธิบายสัญญาณใด ๆ โดยที่คลื่นเวฟเล็ตแต่ละตัวจะมีโครงสร้างมาจากฟังก์ชันเดียวกัน ซึ่งฟังก์ชันนี้จะเป็นเวฟเล็ตต้นกำเนิดที่เรียกว่า เวฟเล็ตแม่ (Mother Wavelets) คลื่นเวฟเล็ตแต่ละอันจะอยู่ภายในเซตของเวฟเล็ตนี้ โดยคลื่นแต่ละคลื่นจะเกิดจาก "การสเกล" (Scaling : " a ") และ "การเลื่อนตำแหน่ง" (Translation or Shifting : " b ") ของเวฟเล็ตแม่ตัวนี้ การสเกลจะหมายถึง การหดเข้า (Compressing) หรือ การขยายออก (Dilation) ในที่นี้จะใช้ " a " แทนพารามิเตอร์ของการหดหรือขยาย ซึ่งจะเป็นการเปลี่ยนความถี่ของเวฟเล็ตแม่นั้นเอง ส่วนการเลื่อนตำแหน่งกำหนดโดยพารามิเตอร์ " b " จะหมายถึงการเลื่อนตำแหน่งการเกิดของคลื่นเวฟเล็ตบนแกนเวลา ในภาพที่ 3 จะแสดงให้เห็นถึงเวฟเล็ตที่ถูกสเกลและเลื่อนตำแหน่งไปที่ค่า " a ", " b " ต่างๆกัน โดยที่ยังคงอยู่ในเซตของเวฟเล็ตที่สัมพันธ์กับเวฟเล็ตแม่ในภาพที่ 1 ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าคลื่นเวฟเล็ตแต่ละคลื่นจะมีรูปร่างเหมือนเดิม โดยยังคงมีจำนวนไซเคิลของการออสซิลเลทเท่าเดิม จะเปลี่ยนไปเฉพาะความถี่และตำแหน่งการเกิดเท่านั้น นอกจากนี้เวฟเล็ตที่ถูกสเกลจะต้องทำการ Normalize ด้วย $1/\sqrt{a}$ เสมอ เพื่อให้เวฟเล็ตที่ถูกสเกลไปแล้วยังคงมีพลังงานเช่นเดียวกับเวฟเล็ตแม่ ซึ่งจะอธิบายรายละเอียดอีกครั้งในในบทที่ 3 . ดังนั้นถ้าให้ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ จะสามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปของเวฟเล็ตที่ค่าตำแหน่ง " a ", " b " ใดๆซึ่งสัมพันธ์กับเวฟเล็ตแม่ได้ดังนี้

$$g_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.1)$$

ภาพที่ 3



$$a=1/2 \quad b=0$$



$$a=2 \quad b=0$$



$$a=1/3 \quad b=4$$



$$a=3 \quad b=4$$

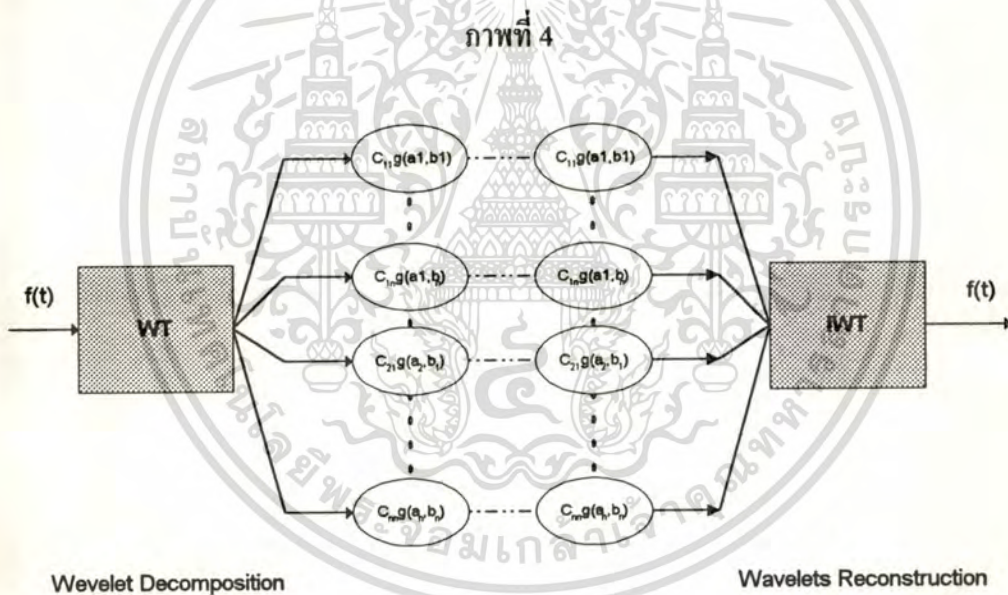


แสดงลักษณะของเวฟแพ็คเกจที่ถูกสเกลและเลื่อนตำแหน่งไปที่ค่า a, b ต่างๆกัน

ทฤษฎีพื้นฐานเวฟแพ็คเกจในการสเกล และการเลื่อนตำแหน่ง

หากสามารถอธิบายลักษณะของสิ่งใดสิ่งหนึ่งได้จากลักษณะของสมาชิกเล็กๆที่เป็นองค์ประกอบแล้ว ทฤษฎีเวฟแพ็คเกจก็เป็นอีกวิธีหนึ่งที่จะใช้ในการอธิบายลักษณะของสิ่งต่างๆหรือระบบใดๆได้เช่นเดียวกัน เช่น การนำเวฟแพ็คเกจไปใช้อธิบายการแก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่จำลองระบบใดระบบหนึ่ง การเต้นของหัวใจ และการไหลเวียนของเลือดผ่านร่างกาย เป็นต้น [2] ในการที่จะใช้สมาชิมาอธิบายสิ่งเหล่านี้ ก็จะมีวิธีการหาค่าสมาชิกเหล่านี้หลายวิธี การเลือกที่จะใช้วิธีใดก็ขึ้นอยู่กับว่าจะนำไปประยุกต์ใช้กับงานนั้นแล้วได้ประสิทธิภาพดีเพียงใด เช่น การใช้ระบบเลขฐานสิบจะใช้ในระบบบัญชีได้ เหมาะสมกว่าระบบเลขฐานสองหรือฐานสิบหก ในขณะที่ระบบเลขฐานสองจะใช้ในระบบคอมพิวเตอร์ได้ดีกว่า ดังนั้นการใช้ทฤษฎีเวฟแพ็คเกจให้ได้ก็ขึ้นอยู่กับงานที่จะนำไปประยุกต์ใช้ด้วย

ทฤษฎีเวฟเล็ตจะใช้ในการอธิบายสิ่งใดสิ่งหนึ่ง เหมือนการแตกสิ่งเหล่านั้นออกเป็น ส่วนประกอบเล็กๆที่สัมพันธ์กันคล้ายๆกับภาพจิ๊กซอว์ (Jig-saw) โดยที่ชิ้นส่วนเหล่านี้จะอยู่ในรูปของ เวฟเล็ตที่ถูกสเกลและเลื่อนตำแหน่งและมีค่าถ่วงน้ำหนักต่างกันคูณอยู่กับเวฟเล็ตแต่ละตัว ดังนั้น จึงเปรียบเสมือนว่าสัญญาณใดๆจะสามารถสร้างขึ้นมาได้ โดยมีคลื่นเวฟเล็ตเป็นฟังก์ชันพื้นฐาน (Basis function : b.f.) หรือองค์ประกอบพื้นฐาน ขบวนการแตกกระจายชิ้นส่วนนี้เรียกว่า "การแตก กระจายเวฟเล็ต (Wavelet Decomposition) ซึ่งก็คือ การทำ WT นั้นเอง ในทำนองเดียวกัน การรวม กลับเวฟเล็ต (Wavelet Reconstruction) ซึ่งเป็นการแปลงกลับเวฟเล็ต (Inverse Wavelets Transform : IWT) ก็จะเป็นการนำส่วนประกอบย่อยๆเหล่านี้มาเรียงต่อกันเพื่อประกอบเป็นสัญญาณเดิม ดัง แสดงในภาพที่ 4 เป็นการแตกกระจายสัญญาณ $f(t)$ ออกเป็นคลื่นเวฟเล็ตที่ความถี่และตำแหน่งต่าง กันจำนวน $N \times N$ ตัว



แสดงลักษณะของการแตกกระจายสัญญาณและรวมกลับสัญญาณของเวฟเล็ต

WT สามารถเทียบเคียงกับขบวนการทางฟิสิกส์เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น โดยเทียบเคียงกับระบบกล้องจุลทรรศน์ ถ้าให้ท้องฟ้าเป็นสัญญาณอินพุตและเลนส์เป็นเวฟเล็ตแม่ ในกรณีที่ต้องการดูภาพท้องฟ้าทั้งหมด โดยไม่ต้องมีการเลื่อนตำแหน่งของกล้อง จำเป็นจะต้องใช้โฟกัสที่หยาบมาก เพื่อให้ได้ภาพที่ครอบคลุมท้องฟ้าทั้งหมด ซึ่งภาพที่ได้จะไม่ให้รายละเอียดอะไรเลย แต่ถ้าทำการซูม (สเกล) เข้าไป จะทำให้เห็นรายละเอียดต่างๆของท้องฟ้ามากขึ้น เช่น กลุ่มดาว กาแล็กซี ฯลฯ แต่ก็เห็นรายละเอียดเป็นบางส่วนของท้องฟ้า ถ้าต้องการเห็นท้องฟ้าทั้งหมด ก็จะต้องทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเลื่อนกลิ้งไปยังตำแหน่งต่างๆ ยิ่งถ้าต้องการรายละเอียดของท้องฟ้ามากเท่าไร ก็จะต้องมีการซูมลึกเข้าไป และจะต้องเลื่อนตำแหน่งของกล้องละเอียดมากยิ่งขึ้น จึงจะได้ภาพท้องฟ้าทั้งหมด

ดังนั้นภาพแต่ละภาพก็จะเป็นสัมประสิทธิ์ของการทำ WT ที่พิจารณาผ่านเลนส์ หรือเวฟเล็ทเมทที่ค่าการสเกล (Scale : a) (โฟกัส หรือ ความละเอียด) และ ตำแหน่งการมองดู (Translation : b) ในขณะนั้น ถ้านำเซตของภาพทั้งหมดที่ตำแหน่งของ a, b ต่างๆกันมารวมกัน ก็จะเป็นภาพท้องฟ้าได้ (หมายถึง เมื่อนำสัญญาณเล็กๆที่ระดับความละเอียด a ซึ่งมี b หลายๆ ตำแหน่งมารวมกัน จะเกิดเป็นสัญญาณอินพุทที่ระดับความละเอียดนั้น เมื่อนำสัญญาณอินพุทที่ทุกความละเอียดมารวมกันก็จะได้เป็นสัญญาณอินพุทจริง : *Multiresolution Analysis*)

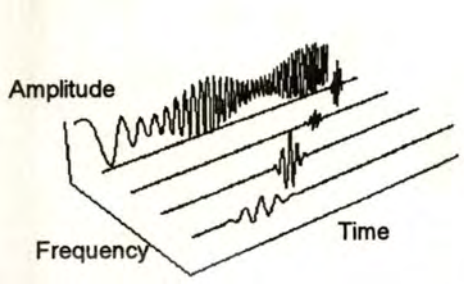
ถ้าให้ $f(t)$ เป็นสัญญาณที่ประกอบด้วยคลื่นหลายความถี่ที่เกิดขึ้นบนตำแหน่งต่างๆบนแกนเวลา ดังแสดงในภาพที่ 5 ภาพบน ส่วนในภาพด้านล่างจะแสดงถึงการดึงสัญญาณ $f(t)$ ที่ตำแหน่งเวลาใดๆออกมา



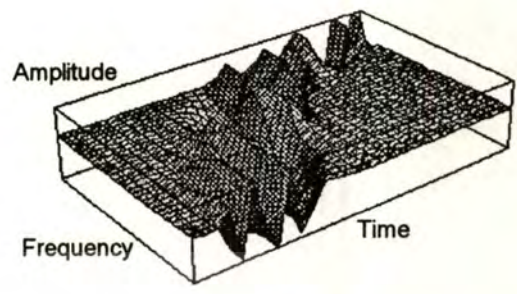
แสดงลักษณะของสัญญาณที่มีหลายความถี่ที่ตำแหน่งเวลาต่างกัน

ถ้าทำการพิจารณาในแกน 2 มิติ โดยที่ให้แกนหนึ่งเป็นแกนเวลา ในอีกแกนหนึ่งเป็นแกนความถี่ จะสามารถทำการแยกสัญญาณที่ตำแหน่งเวลาและมีความถี่ใดๆ ได้ดังแสดงในภาพที่ 6 ก.) และในภาพที่ 6 ข.) จะพิจารณาที่ค่าเวลาและค่าความถี่มีความต่อเนื่อง ซึ่งก็จะได้เป็นสัญญาณพื้นผิวที่ต่อเนื่องมากขึ้น ในภาพที่ 6 ค.) จะเป็นการพิจารณามองจากด้านบนของภาพที่ 6 ข.) ซึ่งจะเห็นว่าค่าความเข้มจะแทนขนาดของสัญญาณ

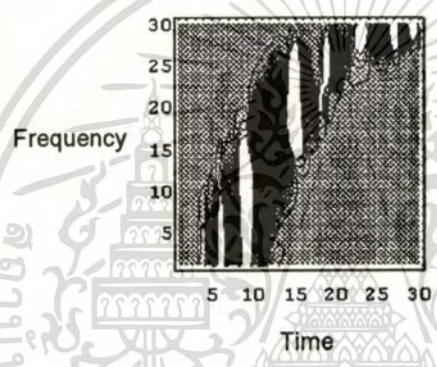
ภาพที่ 6



(ก)



(ข)



(ค)

- ก.) แสดงการพิจารณาสัญญาณในลักษณะแบบ 2 มิติแบบแบ่งช่วง
- ข.) แสดงการพิจารณาสัญญาณในลักษณะแบบ 2 มิติแบบต่อเนื่อง
- ค.) แสดงลักษณะของสัญญาณเมื่อพิจารณาจากด้านบน

การสเกลและการเลื่อนตำแหน่งจะถูกเรียกรวมกันว่า *Affine Operation* [2] ซึ่งจะสามารถเขียนเป็น สมการคณิตศาสตร์ในลักษณะการส่ง (Mapping) ตัวแปรอิสระ t ไปยังตัวแปรอิสระตัวใหม่ t' ดังแสดงในสมการที่ 2.2

$$t' = \frac{t - b}{a} \tag{2.2}$$

จากการที่สามารถทำการสร้างเซตของเวฟเลตได้จากการสเกลและการเลื่อนตำแหน่งของเวฟเลตแม่ ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการสำหรับการแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่อง (Continuous Wavelets Transform : CWT) ที่ใช้ในการกระจาย (Decomposition) สัญญาณของฟังก์ชันใด $f(t)$ ด้วยเวฟเลตแม่ $g(t)$ เป็นดังนี้

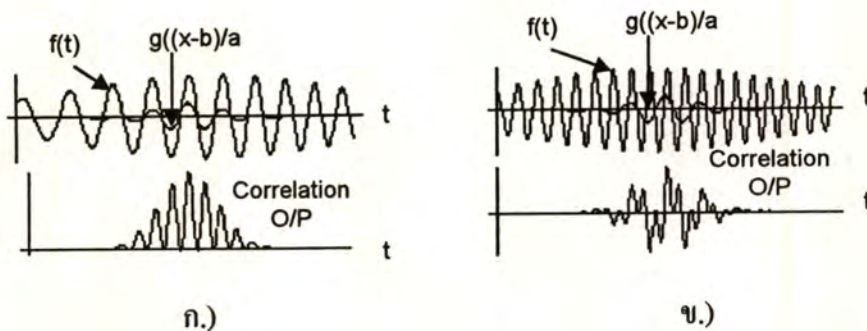
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

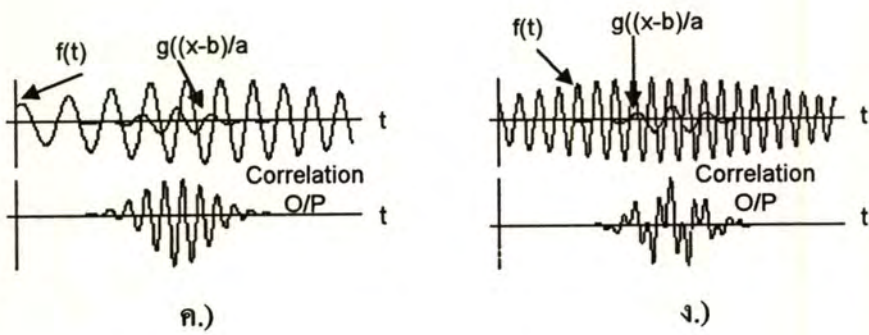
$$(W_g f)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g * \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (2.3)$$

โดยที่ "*" หมายถึง Complex Conjugate "a" เป็นพารามิเตอร์ของการสเกล และ "b" จะเป็นพารามิเตอร์ของการเลื่อนตำแหน่ง สัญลักษณ์ $Wgf(a,b)$ จะหมายถึง สัญญาณอินพุตที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ t จะถูกส่ง (Map) ไปเป็นฟังก์ชัน 2 มิติที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ a และ b โดยที่ $Wgf(a,b)$ จะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของเวฟเลต (Wavelet Coefficient) เวฟเลตแม่ที่ถูกสเกลและเลื่อนตำแหน่งจะใช้เป็นตัวแทนสัญญาณได้ สัมประสิทธิ์ของเวฟเลตที่ตำแหน่ง a, b จะเป็นค่าแสดงความเหมือนกัน (Degree of Correlation) ระหว่างเวฟเลตแม่ที่ถูกสเกล (a) กับสัญญาณอินพุตที่ตำแหน่งเวลานั้น (b) ดังแสดงในภาพที่ 7

พิจารณาภาพที่ 7 ก.) เปรียบเทียบกับภาพที่ 7 ข.) จะเห็นว่า ในภาพ ก.) คลื่นเวฟเลตจะมีความถี่และเฟสใกล้เคียงกับสัญญาณอินพุตมาก ทำให้ปรากฏคลื่นเอาท์พุทออกมามีค่าสูง แต่ในภาพ ข.) คลื่นอินพุตจะมีค่าความถี่สูงกว่าคลื่นเวฟเลตทำให้เอาท์พุทมีค่าต่ำกว่ามาก และในขณะเดียวกันเมื่อลองพิจารณาเปรียบเทียบภาพ ก.) กับ ค.) ซึ่งสัญญาณอินพุตมีความถี่เดียวกันแต่ทำการเปรียบเทียบที่ตำแหน่งต่างกัน โดยในภาพ ค.) จะทำที่ตำแหน่งที่เฟสตรงกัน ซึ่งก็จะให้ผลของการ Correlation ที่สูงกว่าในภาพ ค.) ซึ่งกระทำที่ตำแหน่งเฟสไม่ตรงกัน ส่วนในภาพ ง.) ก็คล้ายกับภาพ ข.) เพียงแต่เลื่อนตำแหน่งการเปรียบเทียบออกไป 180 องศา ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าจะให้ผลลัพธ์ที่ต่างกัน ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ถ้าคลื่นเวฟเลตมีความคล้ายกับสัญญาณอินพุตมากเท่าไรทั้งในด้านของความถี่ ลักษณะสัญญาณและตำแหน่งเวลาในการเปรียบเทียบ ก็จะทำให้ได้ค่าของสัมประสิทธิ์ของการทรานส์ฟอร์มที่มากนั่นเอง เพราะฉะนั้น การทำ WT จะเป็นการอธิบายสัญญาณ $f(t)$ ในรูปแบบของเวฟเลตโดเมนส์ (Wavelet Domain) เทียบกับคลื่นเวฟเลตที่ค่า a, b ใดๆ

ภาพที่ 7

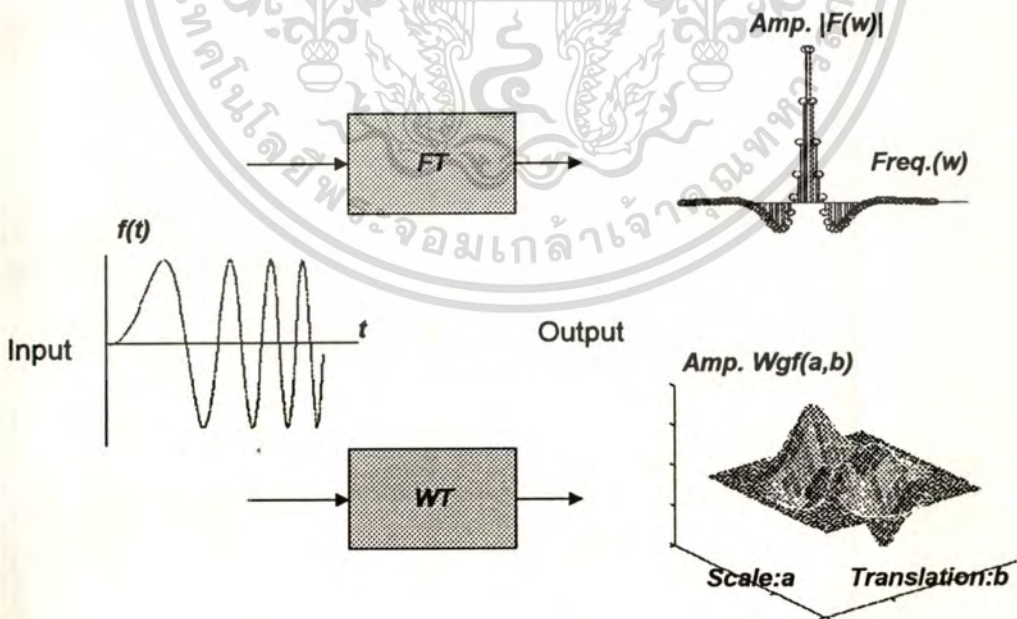




แสดงลักษณะของผลของการ Correlation ระหว่าง $f(t)$, $g((t-b)/a)$

ในภาพที่ 8 จะแสดงการเปรียบเทียบลักษณะผลลัพธ์เมื่อนำสัญญาณอินพุต 1 มิติ มาทำการแปลงฟูรีเยร์ (Fourier Transform : FT) กับการใช้ WT จะเห็นว่า FT เป็นการส่งสัญญาณจากโดเมนส์เวลา (1มิติ) ไปเป็นโดเมนส์ความถี่ (1มิติ) แต่ WT จะเป็นการส่งไปเป็น "ระนาบเวลาและความถี่" (Time-frequency plane) ซึ่งมี 2 มิติ

ภาพที่ 8



แสดงลักษณะความแตกต่างของสัญญาณเอาท์พุทระหว่าง FT กับ WT

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความเป็นมาของการแปลงเวฟเล็ท

FT เป็นการทรานส์ฟอร์มที่นิยมใช้กันมาก ซึ่งเป็นการแปลงสัญญาณ $f(t)$ จากโดเมนสเวลาไปเป็นสัญญาณ $f(\omega)$ ซึ่งอยู่ในโดเมนความถี่ หรือที่เรียกกันทั่วไปว่าเป็นการหาสเปกตรัม (Spectrum) ของสัญญาณ $f(t)$ นั้นเอง โดยมีสมการเป็น

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.4)$$

จะสังเกตจะพบว่าข้อมูลที่ได้จากการทรานส์ฟอร์มจะมีตลอดย่านความถี่ $(-\infty, \infty)$ ดังนั้นเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณอินพุตที่ขณะเวลาใดๆ ก็จะมีส่งผลกระทบต่อตลอดย่านของสเปกตรัม $f(\omega)$ ด้วย นอกจากนี้การใช้ FT ยังไม่สามารถเลือกทำการวิเคราะห์สัญญาณเฉพาะช่วงเวลา หรือ เฉพาะช่วงความถี่ใดๆ ซึ่งบางครั้งต้องการวิเคราะห์สัญญาณเพียงแค่ว่าเฉพาะช่วงเวลาหรือช่วงความถี่เท่านั้น ดังนั้น FT จึงให้ข้อมูลที่มากเกินไปจนเกินไป นอกจากนั้นในทางปฏิบัติสัญญาณอินพุตจะมีการเปลี่ยนแปลงที่ไม่คงที่ (Non-Stationary Signal) ซึ่งถ้าใช้ FT จะทำให้สิ้นเปลืองเวลาในการคำนวณ เนื่องจากมีข้อมูลมากเกินไปในการคำนวณใหม่แต่ละครั้ง ดังนั้น FT จึงเหมาะสำหรับสัญญาณที่มีการเปลี่ยนแปลงที่คงที่ (Stationary Signal)

Gabor Transform : GT เป็นทรานส์ฟอร์มที่ได้พัฒนาขึ้นเป็นแบบแรก เพื่อแก้ปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น โดยจะเป็นการทำ FT เฉพาะช่วงเวลาและช่วงความถี่ที่กำหนดผ่านฟังก์ชันหน้าต่าง (Window function : w.f.) ซึ่ง w.f. นี้จะใช้ Gaussian function เท่านั้น

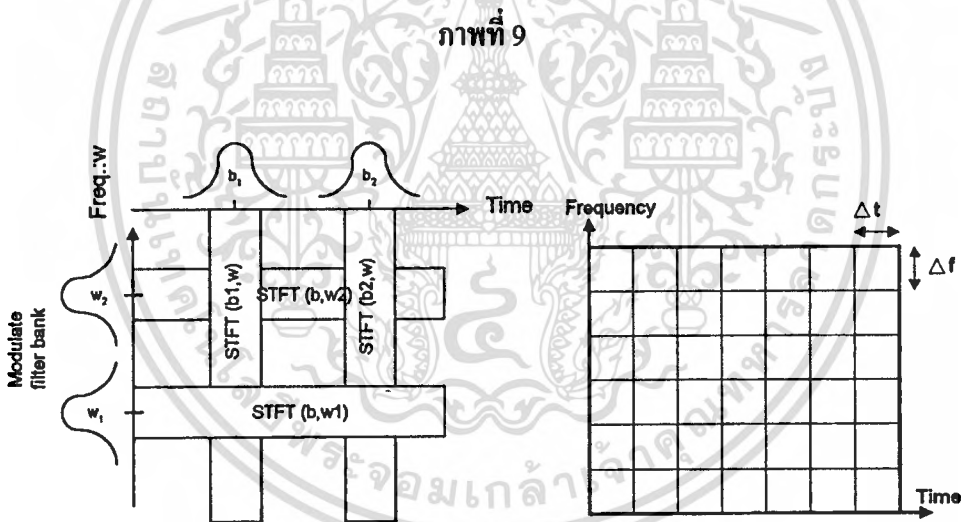
$$g_{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} \quad (2.5)$$

$$(G_b^{\alpha} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t))g_{\alpha}(t-b)dt \quad (2.6)$$

สมการที่ 2.5 เป็น Gaussian window function และสมการที่ 2.6 เป็นสมการของ GT จะเห็นว่าการทรานส์ฟอร์มแบบนี้จะสามารถเลือกตำแหน่งการวิเคราะห์สัญญาณ โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ b และเลือกช่วงความถี่ด้วยพารามิเตอร์ α แต่เนื่องจาก GT ใช้ w.f. แบบเคียว ซึ่งอาจจะไม่เหมาะสมกับการประยุกต์ใช้งานในด้านต่างๆ ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาต่อมาเป็น Short Time Fourier Transform : STFT ซึ่งจะสามารถทำการเลือก w.f. ($w(t)$) ที่จะใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณได้ ทำให้เกิดความยืดหยุ่นและสามารถเลือกใช้ให้เหมาะสมกับสัญญาณอินพุตที่จะวิเคราะห์ได้ดียิ่งขึ้น

$$(G_{\alpha} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t))\overline{w(t-b)} dt \quad (2.7)$$

สมการที่ 2.7 จะเป็นสมการ STFT โดยที่ตำแหน่งเวลาในการวิเคราะห์จะกำหนดโดยค่า "b" และช่วงความถี่ในการวิเคราะห์กำหนดด้วยความถี่ของ w.f. นั้นๆ แต่จะสังเกตเห็นว่า ทั้ง GT และ STFT จะมีลักษณะของช่วงการวิเคราะห์ที่คงที่ดังแสดงในภาพที่ 9 (ช่วงเวลาและช่วงความถี่คงที่ (Fixed resolution transform) ทั้งนี้เนื่องจาก w.f. ไม่มีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติขณะทำการทรานส์ฟอร์ม ซึ่งไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติ เนื่องจากสัญญาณในทางปฏิบัติ นั้น สัญญาณความถี่สูงจะมีช่วงเวลาที่แคบในขณะที่สัญญาณความถี่ต่ำจะมีช่วงเวลาที่กว้างกว่า ดังนั้น GT และ STFT อาจจะทำให้ข้อมูลที่ได้ออกมาจากรานส์ฟอร์มออกมา หรือ น้อยเกินไป (ต้องทำการทรานส์ฟอร์มหลายช่วงเวลามาประกอบกัน จึงจะได้ข้อมูลครบถ้วนในช่วงเวลาที่ต้องการ) ดังนั้นช่วงเวลาคงที่จำเป็นต้องมีการเปลี่ยนแปลงสัมพันธ์กับช่วงความถี่ที่จะทำการวิเคราะห์ โดยที่ช่วงความถี่ที่สูงขึ้นจะมีช่วงเวลาในการวิเคราะห์ที่น้อยลง และในขณะที่เป็นการวิเคราะห์ช่วงความถี่ต่ำจะต้องใช้ช่วงเวลาที่ยาวกว่าในการวิเคราะห์สัญญาณ [1][2][10]

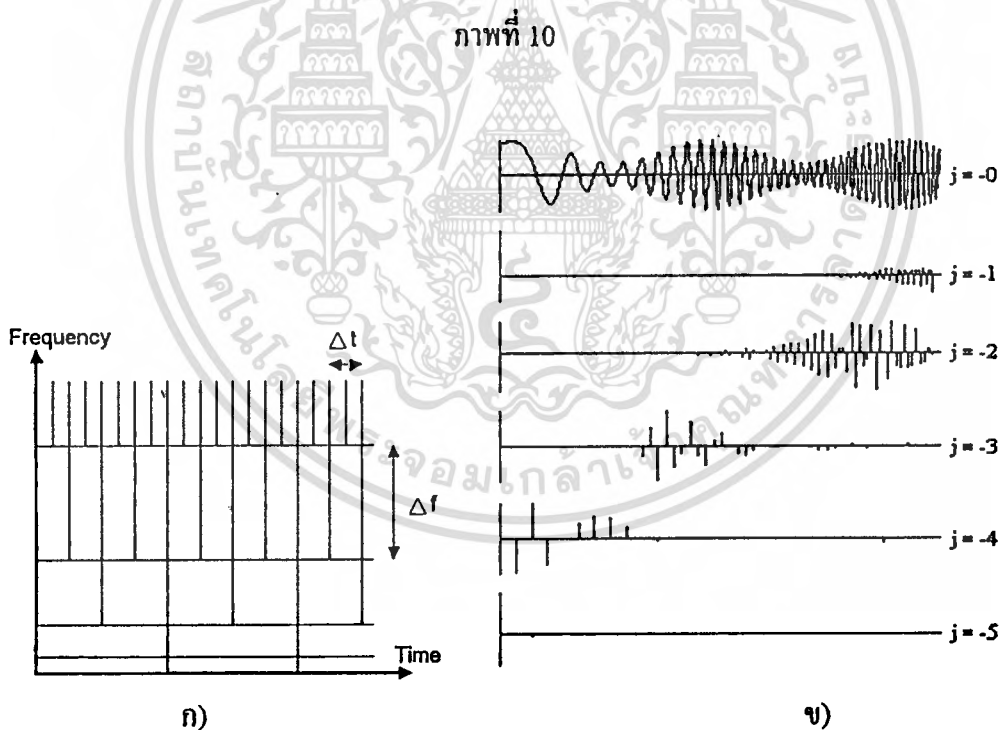


แสดงลักษณะของระนาบเวลาความถี่แบบคงที่ (Constant Time-Frequency plane)

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้นทำให้มีการพัฒนาเป็นการทรานส์ฟอร์มในรูปแบบใหม่ที่เรียก "การแปลงเวฟเล็ต" ซึ่งจะเป็นทรานส์ฟอร์มผ่าน w.f. แต่ w.f. จะสามารถเลื่อนตำแหน่งและปรับเปลี่ยนช่วงเวลาให้เหมาะกับช่วงความถี่ที่จะวิเคราะห์ได้ โดยเรียก w.f. แบบนี้ว่า "ฟังก์ชันเวฟเล็ต" (Wavelet function)

$$(W_g f)(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (2.8)$$

$g(t)$ จะเป็นฟังก์ชันเวฟเล็ดแม่ ซึ่งจะถูกลื่อนตำแหน่ง และ ถูกสเกล(เปลี่ยนความถี่) โดย พารามิเตอร์ "b" และ "a" ตามลำดับ โดยที่ช่วงเวลาและความถี่ในการทรานส์ฟอร์มจะสัมพันธ์กัน ในลักษณะที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ดังแสดงในภาพที่ 10 ก.) ซึ่งจะเห็นว่า ระยะเวลาและความถี่ จะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงช่วงเวลาและความถี่ที่สัมพันธ์กันคือ ในช่วงความถี่สูงจะใช้ช่วงเวลาในการวิเคราะห์เพียงสั้นๆ (Δf สูง Δt ต่ำ) แต่ในช่วงความถี่ต่ำจะมีช่วงเวลาในการวิเคราะห์ที่ยาวนานขึ้น (Δf ต่ำ Δt สูง) ซึ่งจะเหมาะสมกับลักษณะสัญญาณในทางปฏิบัติ ส่วนในภาพที่ 10 ข.) จะเป็นการแสดงลักษณะการแตกกระจายสัญญาณออกไปในระดับความละเอียด(ความถี่)ที่ต่างกันออกไป ขอให้พิจารณาเปรียบเทียบกับภาพที่ 7 จะพบว่ามีความสัมพันธ์กัน ในระดับ $j = -1$ จะมีเฉพาะส่วนความถี่สูง และที่ระดับที่ j ต่ำลงสัญญาณจะมีค่าความถี่ที่ต่ำลงด้วยสอดคล้องกับภาพของ ระยะเวลาและความถี่ นอกจากนี้ $g(t)$ ยังมีได้หลายภาพแบบ แต่ต้องเป็นไปตามคุณสมบัติของ WT ดังนั้น จึงทำให้ WT มีความยืดหยุ่นและสามารถเลือกใช้ให้เหมาะสมกับงานที่นำไปใช้ได้เป็นอย่างดี



ก.) แสดงลักษณะของ ระยะเวลาและความถี่ สำหรับ WT

ข.) แสดงลักษณะการแตกกระจายสัญญาณ ไปยังระดับความละเอียดต่างๆ

จากที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นการพัฒนาการทราบดีฟอร์มจาก FT มาสู่ WT ที่มีประสิทธิภาพที่สูงขึ้น ซึ่งในบทนี้จะไม่ได้อธิบายในแนวทางคณิตศาสตร์มากนัก สำหรับรายละเอียดในทางคณิตศาสตร์จะถูกกล่าวอีกครั้งใน บทที่ 3.

ความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงเวฟเล็ต และการแปลงฟูรีเยร์ในลักษณะของฟังก์ชัน

หน้าต่าง

จากที่ได้กล่าวมาบ้างแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา ในหัวข้อนี้จะกล่าวเปรียบเทียบ FT และ WT ในลักษณะ ของฟังก์ชันหน้าต่างให้ละเอียดขึ้น จากการศึกษา จะมีความสัมพันธ์กับ FT และอนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series : FS) โดยที่ FT จะเป็นการอธิบายสัญญาณในลักษณะของผลรวมของการถ่วงน้ำหนักของฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียลที่ความถี่ต่างกัน น้ำหนักของแต่ละความถี่จะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของการทำ FT แต่ในกรณีของ WT จะเป็นการนำเสนอฟังก์ชันในรูปแบบการประกอบกันของเวฟเล็ตแม่ที่ถูกสเกลและเลื่อนตำแหน่ง ดังนั้นเวฟเล็ตแม่จะเปรียบได้กับเอ็กโพเนนเชียลฟังก์ชัน ส่วนการสเกลและการเลื่อนตำแหน่งจะเทียบได้กับการเลื่อนความถี่ (Frequency shifting) ขณะที่พื้นผิว 2 มิติของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตจะใช้แทนสัมประสิทธิ์ของฟูรีเยร์ที่เป็น 1 มิติ ดังนั้นถ้าให้เวฟเล็ตแม่เท่ากับ $g(t) = e^{jt}$ และให้ค่าการสเกล $a = 1/\omega$ การเลื่อนตำแหน่ง $b = 0$ จะสามารถเขียนเป็นสมการ WT ได้เป็น

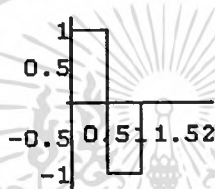
$$\begin{aligned}(W_g f)(a, b) &= W_{g/a} f\left(\frac{1}{\omega}, a\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega)\end{aligned}$$

ซึ่งจะเป็นสมการของ FT นั่นเอง ดังนั้นจะเทียบได้ว่า การสเกลเป็นเป็นส่วนกลับของการเปลี่ยนความถี่ที่จะพิจารณานั้นเอง จากสมการ FT จะเห็นว่า $b = 0$ เสมอ และเนื่องจากฟังก์ชันหน้าต่างแบบเอ็กโพเนนเชียลทำการเลื่อนตำแหน่งไม่ได้ เพราะเป็นสัญญาณที่ไม่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด $(-\infty, \infty)$ จึงทำการเลื่อนตำแหน่งไม่ได้ต่างจากฟังก์ชันหน้าต่างของ WT ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด หรือมีขอบเขตที่แน่นอน (Compact support) ดังนั้นจึงสามารถยกไปวางตำแหน่งใดก็ได้ ทำให้สามารถเลือกตำแหน่งที่จะทำการพิจารณาสัญญาณได้

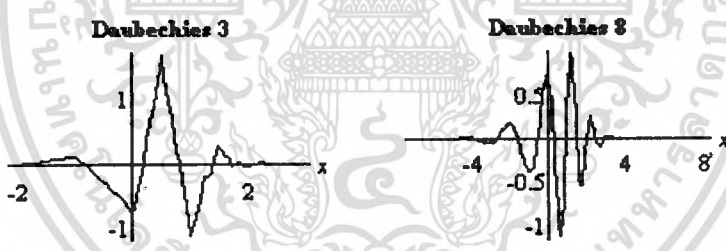
ลักษณะของเวฟเล็ตแม่แบบต่างๆ

เนื่องจาก w.f. ของ WT นั้นสามารถมีได้หลายรูปแบบ เพื่อให้สามารถเลือกใช้งานได้อย่างเหมาะสม แต่จะต้องมีเงื่อนไขตามคุณสมบัติของ WT ซึ่งจะอธิบายอีกครั้งในบทที่ 3 ในหัวข้อนี้จะแสดงลักษณะของฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ชนิดต่างๆ ที่นิยมใช้ในปัจจุบัน

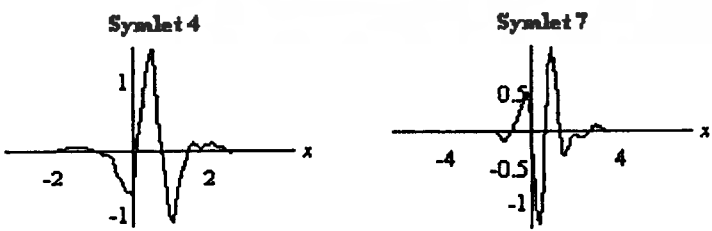
Harr wavelet



Daubechies wavelet

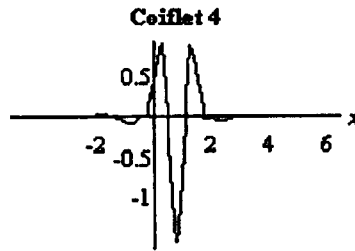


Symlet wavelet

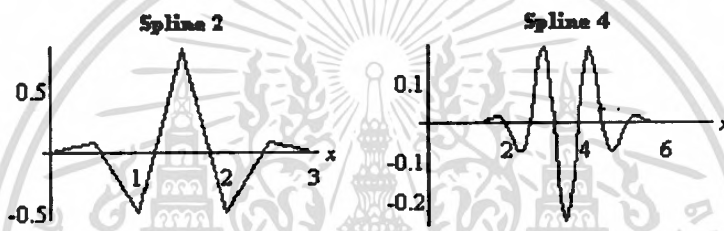


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Coiflet wavelet



Spline wavelet



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การแปลงเวฟเล็ตแบบต่อเนื่อง

บทนำ

เนื้อหาในบทนี้จะเป็นการอธิบายวิธีการ WT ในลักษณะการอ้างอิงเหตุผลทางคณิตศาสตร์มากขึ้น ซึ่งจะเป็นการขยายความจากบทที่ 2 ให้เห็นในส่วนรายละเอียดให้มากขึ้น โดยเนื้อหาในส่วนแรกจะเป็นอธิบายลักษณะของการพัฒนาสู่ WT ส่วนที่สองจะเป็นการกล่าวถึงคุณสมบัติของการแปลงเวฟเล็ตแบบต่อเนื่อง (Continuous Wavelet Transform : CWT) และในส่วนสุดท้ายจะเป็นการแปลงสัมประสิทธิ์ที่อยู่ในระนาบเวลาและความถี่ ซึ่งเกิดจากการทำ WT กลับไปเป็นสัญญาณในโดเมนสเวลา ซึ่งเรียกว่า "การแปลงกลับเวฟเล็ต" (Inverse Wavelet Transform : IWT)

การพัฒนาการแปลงฟูรีเยร์สู่การแปลงแบบเวฟเล็ต

ถ้ากำหนดให้ $L^2(0, 2\pi)$ เป็นเซตหรือสเปซของฟังก์ชันใดๆก็ตามที่สามารถวัดค่าหรือหาขนาดได้ในช่วง $(0, 2\pi)$ แสดงว่าฟังก์ชันนั้นจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$$

และถ้ากำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใดๆด้วย แสดงว่าฟังก์ชัน $f(t)$ ใน $L^2(0, 2\pi)$ นั้นเป็นฟังก์ชันมีคาบเวลาในช่วงของจำนวนจริงใดๆ $(-\infty, \infty)$ ซึ่งสัญลักษณ์ \mathbb{R} จะใช้แทนช่วงจำนวนจริงใดๆ จะเขียนนิยามได้ว่า

$$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$$

ดังนั้น $f(t) = f(t-2\pi)$ จะเป็นจริงทุกๆค่าของ t บางครั้งเซตของฟังก์ชันใน $L^2(0, 2\pi)$ จะหมายถึงสเปซของ 2π - periodic square integrable function เมื่อทำการพิจารณาหาอนุกรมฟูรีเยร์ของฟังก์ชันใดๆที่อยู่ใน $L^2(0, 2\pi)$ มีสมการดังนี้

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad (3.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ c_n เป็นค่าคงที่ ซึ่งเรียกว่าสัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์ของ $f(t)$ ซึ่งหาค่าได้จากสมการ

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (3.2)$$

สังเกตว่าในสมการที่ (3.2) ช่วงของการอินทิเกรตเป็นเพียง $(0, 2\pi)$ เนื่องจาก $f(t)$ อยู่ในสเปซของ $L^2(0, 2\pi)$ จากสมการที่ (3.1) และ (3.2) จะแสดงให้เห็นถึงลักษณะของ FS ที่สำคัญ 2 ประการ คือ

ประการที่หนึ่ง จากสมการที่ (3.1) จะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(t)$ จะประกอบไปด้วยผลรวมจนถึงอนันต์ของส่วนประกอบย่อยๆ รวมกัน ซึ่งส่วนประกอบเหล่านั้นจะมีลักษณะเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน (Orthogonal) หรือหมายถึงแยกอิสระจากกัน โดยมีสมการของฟังก์ชันส่วนประกอบดังนี้

$$g_n(t) = c_n e^{int}$$

ความหมายของเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันจะหมายถึง

$$\langle g_m(t), g_n(t) \rangle = 0 \quad ; m \neq n \quad (3.3)$$

ดังนั้นในสมการที่ (3.3) หมายถึง $g(t)$ ที่มีลำดับต่างกันจะมีค่าของการ Inner product เท่ากับศูนย์

เครื่องหมายของ $\langle f, g \rangle$ จะหมายถึงการ Inner product ของฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ซึ่งจะมีนิยามดังนี้

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

แต่เนื่องจากฟังก์ชัน $g_n(t)$ ขณะนี้อยู่ในสเปซของ $L^2(0, 2\pi)$ ก็จะเขียนเป็นสมการ Inner product ได้ว่า

$$\langle g_m, g_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_m(t) \overline{g_n(t)} dt \quad (3.4)$$

ถ้ากำหนดให้

$$W_n(t) = e^{int} \quad ; n = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

เป็นฟังก์ชันพื้นฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (Orthonormal basis function : o.n.b.f.) ในสเปซ $L^2(0, 2\pi)$ หมายถึง $W_n(t)$ เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบพื้นฐานย่อยๆ ในสเปซ $L^2(0, 2\pi)$ ที่มีคุณสมบัติความเป็นเชิงตั้งฉากตามสมการ (3.3) และจะมีผลลัพธ์ของการ Inner product ที่ตำแหน่ง n เดียวกันเท่ากับหนึ่ง นั่นคือ $\langle W_n(t), W_n(t) \rangle =$

การ Inner product ตัวมันเองที่ n เดียวกันจะเป็นการหาค่าขนาดของ $W_n(t)$ ด้วย ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่เป็นเชิงตั้งฉากปรกติ (Orthonormal : o.n.) คือฟังก์ชันที่มีขนาดเท่ากับ 1

และมีลักษณะเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน ซึ่งอาจจะพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันที่อยู่คนละมิติกันก็ได้คล้ายกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ประกอบขึ้นเป็นเวกเตอร์ใดๆ

ประการที่สอง FS จะเป็นการอธิบายสัญญาณในลักษณะของเซตของ $W_n(t)$ ที่มีลักษณะเป็น o.n.b.f. ซึ่งเกิดจากฟังก์ชันเดียวกัน แต่สามารถหดหรือขยายได้ (Dilated)

$$W(x) = e^{ix} \quad (3.6)$$

นั่นคือ $W_n(t) = W(nt)$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่ใช้ในการหดหรือขยาย เรียกว่า Integral dilation ดังนั้นจะสรุปได้ว่าทุกๆ 2π -periodic square integrable function จะสามารถถูกสร้างจากการบวกกันของ o.n.b.f. : $W(t) = e^{it}$ ที่มีการหดหรือขยายได้ นอกจากนี้อาศัยคุณสมบัติของ o.n. ของ $\{W_n\}$ จะสามารถเขียนสมการ FS ในสมการที่ (3.1) ให้มีความสัมพันธ์กับ Parseval identity [1][2] ได้ดังนี้

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.7)$$

สมการที่ (3.7) จะพิสูจน์มาจาก $\langle f(t), f(t) \rangle$ ร่วมกับคุณสมบัติความเป็น o.n.b.f. ของ $W(t) = e^{it}$ ดังนั้นในลักษณะคล้ายๆกับ $L^2(0, 2\pi)$ จะกำหนดให้ l^2 เป็นสเปซของผลรวมกำลังสองของ Bi-infinite sequence จะพบว่าถ้าเซต $\{c_n\} \in l^2$ ได้ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

ซึ่งก็จะหมายถึงว่า ลำดับ $\{c_n\}$ ใดๆจะอยู่สเปซของ l^2 ได้จะต้องหาขนาดของลำดับนั้นได้ทำนองเดียวกับ $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$ ในกรณีที่ใช้สมการด้านซ้ายของ (3.7) มาทำการหาค่าที่รากสองจะเรียกว่าเป็นการหาค่าสัมบูรณ์ (norm) ของสัญญาณใดๆที่วัดค่าได้ $f(t)$ ใน $L^2(0, 2\pi)$ ดังแสดงในสมการ

$$\|f(t)\|_2 = \langle f(t), f(t) \rangle^{1/2} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{f(t)} dx \right\}^{1/2}$$

ซึ่งถ้าฟังก์ชัน $f(t)$ ใดๆ ที่มีลักษณะเชิงตั้งฉากตามสมการที่ (3.3) และมีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ 1 แสดงว่า $f(t)$ นั้นมีคุณสมบัติเป็น o.n.

ทำนองเดียวกันรากที่สองของสมการด้านขวาในสมการ (3.7) ก็หมายถึงการหาค่าสัมบูรณ์สำหรับสเปซของ l^2 เช่นกัน จะเห็นว่า ฟังก์ชันในสเปซ $L^2(0, 2\pi)$ และลำดับในสเปซ $l^2(0, 2\pi)$ จะมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ถ้าพิจารณา FS จากสมการที่ (3.1) อีกครั้งจะพบว่า ทุกๆฟังก์ชัน 2π -periodic square integrable function จะเป็น l^2 -linear combination ของเซตของ b.f. $\{W_n(t)\}$

ในกรณีการแปลงฟูรีเยร์ b.f. จะเป็นสัญญาณรูปไซน์ (Sinusoidal) ดังแสดงในสมการข้างล่างนี้

$$W(t) = e^{it} \cos(t) + i \sin(t)$$

ซึ่งถ้าขนาดของ n มากขึ้นจะพบว่าคลื่น $W_n(t) = W(nt)$ จะมีความถี่สูงขึ้น ในขณะที่ความถี่ของ n ที่มีขนาดต่ำๆ คลื่น W_n จะมีความถี่ต่ำ ดังนั้นทุกๆ ฟังก์ชันที่อยู่ภายใน $L^2(0, 2\pi)$ จะประกอบด้วยคลื่นหลายความถี่มารวมกันเป็นฟังก์ชันนั้นๆ

ถ้าพิจารณาสัญญาณที่มีขอบเขตกว้างขึ้นในช่วง $IR := (+\infty, -\infty)$ ซึ่งเป็นลักษณะของสเปซ $L^2(IR)$ จะหมายถึง สัญญาณใดๆ $f(t)$ จะอยู่ในสเปซของ $L^2(IR)$ ได้จะต้องมีเงื่อนไขดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

ซึ่งจะหมายถึงฟังก์ชันดังกล่าวจะต้องหาขนาดได้เสมอ เพราะเป็นการพิจารณาในช่วงจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชันในสเปซของ $L^2(0, 2\pi)$ และ $L^2(IR)$ จะค่อนข้างแตกต่างกัน ในทางปฏิบัติ ฟังก์ชันทุกฟังก์ชันใน $L^2(IR)$ จะต้องมีการลดลงสู่ศูนย์ที่ $\pm\infty$ เพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าว ดังนั้นฟังก์ชันรูปไซน์ W_n จะไม่อยู่ในสเปซ $L^2(IR)$ เนื่องจากคลื่นฟังก์ชันพื้นฐานแต่ละอันมีความยาวเป็นอนันต์ นั่นแสดงว่าคลื่นที่จะนำมาใช้เป็นฟังก์ชันพื้นฐานที่จะนำมาประกอบเป็นฟังก์ชันใดๆ ใน $L^2(IR)$ จะต้องมีการลดลงสู่ศูนย์ที่ $\pm\infty$ และควรจะถูกปล่อยอย่างรวดเร็วทั้งสองด้าน แสดงว่าจำเป็นต้องเป็นคลื่นขนาดเล็ก คลื่นขนาดเล็กนี้จะถูกเรียกว่า "เวฟเล็ต"

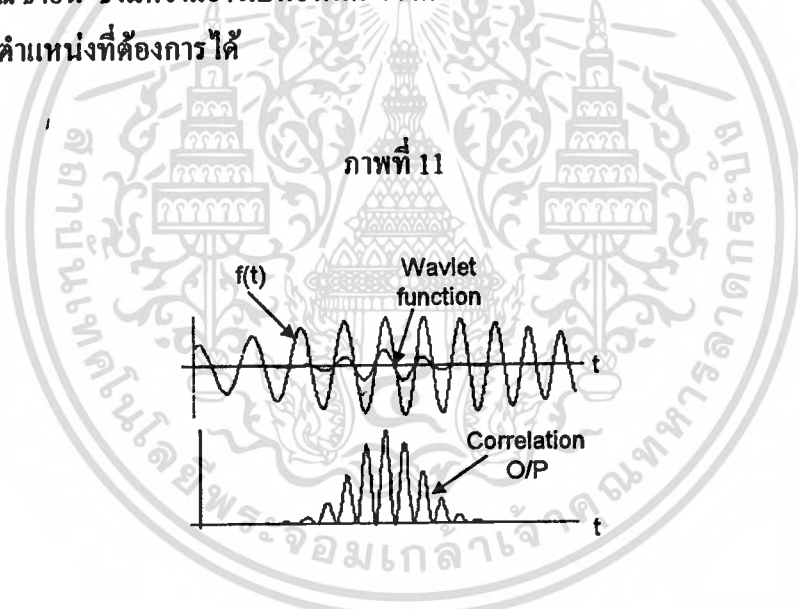
ดังนั้นฟังก์ชันใดๆ ใน $L^2(IR)$ จะประกอบขึ้นจากคลื่นเวฟเล็ตที่มีความถี่และตำแหน่งเวลา การเกิดต่างๆ กันมารวมกันดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2. ซึ่งก็จะคล้ายกับ FT ที่ใช้ฟังก์ชันเดียวแต่สามารถเปลี่ยนความถี่ได้ $W_n(t) = e^{int}$ สำหรับสเปซ $L^2(0, 2\pi)$ เพื่อนำมาผสมกันให้เกิดเป็นฟังก์ชันทุกฟังก์ชันในสเปซ $L^2(0, 2\pi)$ นั่นเอง

จากการที่ฟังก์ชันพื้นฐานที่เป็นส่วนประกอบย่อยของ FT จะสามารถใช้งานได้ในขอบเขตที่จำกัด $L^2(0, 2\pi)$ ก็จะส่งผลให้ FT ใช้งานได้ดีในขอบเขตที่จำกัดนั้นด้วย ดังนั้นในกรณีที่ต้องการวิเคราะห์สัญญาณที่มีขอบเขตกว้างขึ้น ดังในสเปซของ $L^2(IR)$ จึงจำเป็นต้องใช้การทรานส์ฟอร์มชนิดอื่นที่ให้ฟังก์ชันส่วนประกอบที่สามารถใช้ได้ ใน $L^2(IR)$ เช่นเดียวกัน นั่นคือการนำเวฟเล็ตฟังก์ชันมาใช้เป็นฟังก์ชันพื้นฐานของสัญญาณใดๆ ซึ่งก็คือ "การแปลงเวฟเล็ต" นั่นเอง

นอกจากนี้เนื่องจาก FT เป็นการแปลงสัญญาณจากโดเมนสเวลาไปเป็นโดเมนสความถี่ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการทรานส์ฟอร์มจะมีจำนวนข้อมูลเป็นอนันต์ ดังนั้นในกรณีที่เกิดการเปลี่ยนแปลงสัญญาณขึ้นทันทีทันใดกับสัญญาณอินพุท จะส่งผลทำให้สเปกตรัมของสัญญาณตลอดย่านความถี่เปลี่ยนไป หรือสัมประสิทธิ์ของการทรานส์ฟอร์มเปลี่ยนไปนั่นเอง ดังนั้นจึงต้องคำนวณค่าเหล่านี้ใหม่ทั้งหมด ซึ่งถ้าระบบต้องการวิเคราะห์สัญญาณเฉพาะบางช่วงความถี่และบางช่วงเวลา

เท่านั้น ก็จะทำให้เป็นการเสียเวลาในการคำนวณเพราะต้องคำนวณใหม่ตลอดทั้งย่าน ข้อมูลจะมีมากเกินไปจนเกินไป ดังนั้นถ้าสามารถทำการเลือกการทรานส์ฟอร์มได้เฉพาะช่วงเวลาและช่วงความถี่ที่สนใจ ก็จะทำให้การวิเคราะห์สัญญาณกระทำได้สะดวกขึ้น ข้อมูลน้อยลง และประหยัดเวลาการคำนวณ ทำให้พิจารณาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณในเฉพาะช่วงที่กำหนดได้อย่างรวดเร็วขึ้น

การที่จะสามารถทำการเลือกช่วงเวลาและช่วงความถี่ที่ต้องการพิจารณามาได้ นั้น แสดงว่าต้องทำการตัดสัญญาณอินพุตมาพิจารณาเฉพาะช่วงดังกล่าว ซึ่งก็จะเป็นการนำเอาฟังก์ชันหน้าต่าง (Window function : w.f.) ไปครอบสัญญาณอินพุตเพื่อตัดเอาเฉพาะสัญญาณในช่วงเวลาและช่วงความถี่ที่ต้องการนั้นออกมา โดยที่ w.f. ที่ใช้จะต้องมีขอบเขตของคลื่นที่แน่นอน (Compact support) เพื่อให้สามารถเลื่อนตำแหน่งที่จะวิเคราะห์ได้ดังแสดงในภาพที่ 11 สังเกตว่า w.f. ของ FT จะเป็นสัญญาณซายน์ ซึ่งมีความยาวเป็นอนันต์ จึงไม่สามารถนำไปทำ w.f. เพื่อทำการตัดสัญญาณอินพุตในช่วงตำแหน่งที่ต้องการได้



แสดงลักษณะขอบเขตที่จำกัดของเวฟเล็ตฟังก์ชัน

ดังนั้นสิ่งสำคัญในขณะนี้คือ ลักษณะของ w.f. ที่จะใช้ในการทรานส์ฟอร์ม ผู้ที่ริเริ่มพัฒนาการนำ w.f. มาใช้ในการทรานส์ฟอร์มคือ Dr.Gabor หรือที่เรียกกันว่า Gabor Transform : GT [1] โดยใช้เพียง Gaussian function มาทำเป็น w.f. ซึ่งต่อมาได้พัฒนาเป็น Short-time fourier transform : STFT ที่สามารถทำการเปลี่ยนชนิดของ w.f. ได้ ทำให้สามารถเลือกใช้ให้เหมาะสมกับงานที่นำไปใช้ได้ดียิ่งขึ้น แต่ทั้ง GT และ STFT ยังคงมีลักษณะของการทรานส์ฟอร์มแบบคงที่ นั่นคือ ช่วงเวลาและช่วงความถี่ที่จะวิเคราะห์จะคงที่เสมอตามลักษณะของ w.f. (Fixed Resolution) เนื่องจากขณะการทรานส์ฟอร์ม w.f. ไม่มีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติขณะทำการทรานส์ฟอร์ม ทำเอกซารันเป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ไม่เหมาะสมกับพฤติกรรมของสัญญาณในทางปฏิบัติตามที่ได้อธิบายมาแล้วในบทที่ 2. ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาต่อมาให้ w.f. สามารถเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของการทรานส์ฟอร์มได้ ทำให้ช่วงเวลาและช่วงความถี่มีการเปลี่ยนแปลงที่สัมพันธ์กันดียิ่งขึ้น (Multiresolution) และเรียกการทรานส์ฟอร์มแบบนี้ว่า "การแปลงเวฟเล็ต" (Wavelets Transform : WT) ในหัวข้อต่อไปจะเป็นอธิบายรายละเอียดของการทรานส์ฟอร์มแต่ละแบบเพื่อให้เห็นความแตกต่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น

Gabor Transform : GT

ฟังก์ชัน $f(t)$ ใน $L^2(\mathbb{R})$ จะเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าพลังงานได้เสมอ ดังนั้นจึงสามารถหาค่า FT ได้จากสมการ

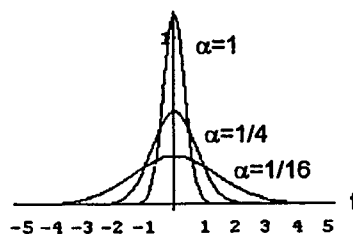
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.8)$$

จะเห็นว่า $\hat{f}(\omega)$ แทนสเปกตรัมทั้งหมดของย่านความถี่ $\omega = (-\infty, \infty)$ ซึ่งจะไม่สามารถใช้ได้ดีในกรณีที่ต้องการพิจารณาเฉพาะย่านความถี่ของสัญญาณ $f(t)$ ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังนั้นจึงต้องมีการใช้ Time-window เข้ามาเกี่ยวข้องกับ w.f. ที่เหมาะสมสำหรับการเลือกช่วงเวลาในการวิเคราะห์สัญญาณ (Time localization) คือ Gaussian function [1] ดังแสดงในสมการที่ (3.9) และลักษณะของ Gaussian function ที่ค่า α ต่างๆ จะแสดงในภาพที่ 12

$$g_{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}} \quad (3.9)$$

โดยที่ $\alpha > 0$ เสมอ

ภาพที่ 12



แสดงลักษณะ Gaussian window function : g_{α} , $\alpha = 1, 1/4, 1/16$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการการแปลงฟูรีเยร์ที่พิจารณาผ่าน Gaussian window function ของสัญญาณ $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ได้ดังนี้

$$(G_b^\alpha f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) g_\alpha(t-b) dt \quad (3.10)$$

สมการที่ (3.10) ก็คือสมการของ GT นั้นเอง โดยที่ $(G_b^\alpha f)(\omega)$ เป็น FT ของ $f(t)$ รอบๆ $t=b$ ความกว้างของ Time-window จะถูกกำหนดโดยค่าคงที่ α ดังแสดงในภาพที่ 12 ดังนั้นถ้าพิจารณาสมการ

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (G_b^\alpha f)(\omega) db$$

จะหมายถึง การนำสัมประสิทธิ์ $(G_b^\alpha f)(\omega)$ ที่ตำแหน่ง b ทั้งหมดมารวมกัน $(G_b^\alpha f: b \in \mathbb{R})$ จะได้เป็น FT ของฟังก์ชันนั้น แต่ว่า w.f. จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้ [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(t-b) db = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x) dx = 1 \quad (3.11)$$

ในการหาค่าความกว้างของ w.f. เพื่อดูขอบเขตของช่วงเวลา (Time-window) และขอบเขตช่วงความถี่ (Frequency-window) จะสามารถหาได้จากสมการการหาค่า Standard deviation หรือ Root mean square duration : RMS [1] ของฟังก์ชัน ได้ดังนี้

ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $W(x) \in L^2(\mathbb{R})$ และเป็น w.f. และในขณะเดียวกันถ้า $xW(x)$ อยู่ใน $L^2(\mathbb{R})$ ด้วย จะสามารถหาค่าตำแหน่งตรงกลางของ w.f. กำหนดด้วย t^* และรัศมีความกว้างของ w.f. (Radius) กำหนดโดย Δw ได้จากสมการ (3.12) และ (3.13) ตามลำดับ

$$t^* = \frac{1}{\|W\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |W(x)|^2 dx \quad (3.12)$$

$$\Delta w = \frac{1}{\|W\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x-t^*)^2 |W(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

เพราะฉะนั้นความกว้างของ w.f. $W(x) = 2\Delta w$ และเหตุผลที่ต้องให้ $xW(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ก็เพื่อทำให้สมการที่ (3.12) และ (3.13) หาค่าได้นั่นเอง

ถ้าพิจารณาในกรณี Gaussian window function ที่มีตำแหน่งจุดตรงกลาง $t^* = 0$ และเนื่องจาก $g_{\alpha(x)}$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้นจะมีความกว้างใน Time-domain เป็น

$$\Delta_{g_\alpha} = \frac{1}{\|g_\alpha\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_\alpha^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

เมื่อ $\alpha > 0$ จะทำให้

$$\Delta_{g_\alpha} = \sqrt{\alpha} \quad (3.15)$$

ซึ่งบทพิสูจน์จะอยู่ในเอกสารอ้างอิงที่ [1] จากสมการที่ (3.15) แสดงว่าความกว้างของช่วงเวลาสำหรับ w.f. : $g_\alpha(x)$ เท่ากับ $2\sqrt{\alpha}$ และจากสมการที่ (3.10) จะสามารถเขียนสมการ GT ให้อยู่ในรูปของ Inner product ได้เช่นกัน โดยกำหนดให้

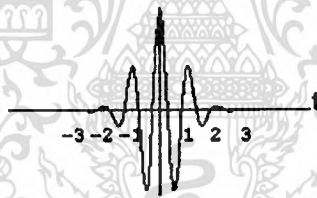
$$G_{b,\omega}^\alpha(t) = e^{i\omega t} g_\alpha(t-b) \quad (3.16)$$

ดังนั้น

$$(G_b^\alpha f)(\omega) = \langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{G_{b,\omega}^\alpha(t)} dt \quad (3.17)$$

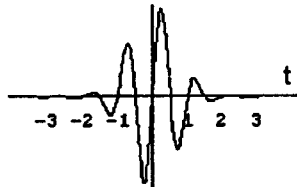
จากสมการที่ (3.17) จะสามารถอธิบายได้ว่าแทนที่จะพิจารณา $(G_b^\alpha f)(\omega)$ ซึ่งเป็นการหาค่า FT ของ $f(t)$ เฉพาะบางส่วน อาจจะกล่าวได้ว่าเป็นการพิจารณาฟังก์ชัน $f(t)$ ที่หน้าต่าง โดยการ ใช้ w.f. : $G_{b,\omega}^\alpha(t)$ หรืออีกนัยหนึ่งคือการโปรเจกต์สัญญาณ $f(t)$ ด้วย w.f. : $G_{b,\omega}^\alpha(t)$ ซึ่งเป็นการอธิบายในรูปแบบของการ Inner product ภาพที่ 13 และ 14 เป็นตัวอย่างของส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $G_{b,\omega}^\alpha(t)$ สำหรับ $b=0, \omega=2\pi$

ภาพที่ 13



แสดงส่วนจริงของ $G_{b,\omega}^\alpha(t) = \text{Re}(G_{0,2\pi}^\alpha) : \alpha = 0.2925$

ภาพที่ 14



แสดงส่วนจินตภาพ $G_{b,\omega}^\alpha(t) = \text{Im}(G_{0,2\pi}^\alpha) : \alpha = 0.23$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาสมการที่ (3.8) และใช้คุณสมบัติของ Parseval identity [1][2] จะสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่าง GT ของ f กับ GT ของ \hat{f} (Fourier transform ของ f) ได้ดังนี้

$$\text{คุณสมบัติ Parseval identity : } \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

พิจารณา FT ของ $G_{b,\omega}^\alpha(t)$

$$\hat{G}_{b,\omega}^\alpha(n) = e^{-ib(n-\omega)} e^{-\alpha(n-\omega)^2} \quad (3.18)$$

$$(G_b^\alpha f)(\omega) = \langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{G}_{b,\omega}^\alpha \rangle \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{-ib(n-\omega)} e^{-\alpha(n-\omega)^2} dn \\ &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ibn} \hat{f}(n)) g_{1/4\alpha}(n-\omega) dn \\ &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} (G_\omega^{1/4\alpha} \hat{f})(-b) \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3.19) จะสามารถพิจารณามุมมองได้ 2 ประเด็น

ประเด็นที่หนึ่ง

เป็นการพิจารณาสมการ

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\alpha t} f(t)) g_\alpha(t-b) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-ib\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ibn} \hat{f}(n)) g_{1/4\alpha}(n-\omega) dn \quad (3.20)$$

จากสมการที่ (3.20) ถ้าไม่พิจารณาเทอมค่าคงที่ $\sqrt{(\pi/\alpha)} e^{-ib\omega}$ จะพบว่าทางด้านซ้ายของสมการ (3.20) เป็นการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(x)$ ผ่านฟังก์ชันหน้าต่าง : g_α ที่ตำแหน่ง $t = b$ จะมีค่าเท่ากับ การพิจารณาผลรวมทั้งหมดของ $\hat{f}(\omega)$ ผ่าน w.f. : $g_{1/4\alpha}$ ดังนั้นค่ารัศมีความกว้างของ w.f. : $g_{1/4\alpha}$ จะเป็นตัวแสดงความกว้างของ Frequency window ที่ตำแหน่ง $n = \omega$ ในโดเมนสัจความถี่ ในขณะที่ความกว้างทางช่วงเวลา (Time-window) จะขึ้นอยู่กับ w.f. : g_α เพราะฉะนั้นผลคูณของความกว้างของ w.f. ทั้งสองซึ่งเป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมบนระนาบเวลาและความถี่ (Time-frequency plane) คือ

$$\begin{aligned} (2\Delta g_\alpha) \times (2\Delta g_{1/4\alpha}) &= 2 \\ (2\sqrt{\alpha}) \times (2\sqrt{1/4\alpha}) &= 2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

ประเด็นที่สอง

ถ้ากำหนดให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{b,\omega}^\alpha(n) = \frac{1}{2\pi} \hat{G}_{b,\omega}^\alpha(n) = \frac{e^{ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-ibn} g_{\sqrt{\alpha}}(n-\omega) \quad (3.22)$$

จะสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า

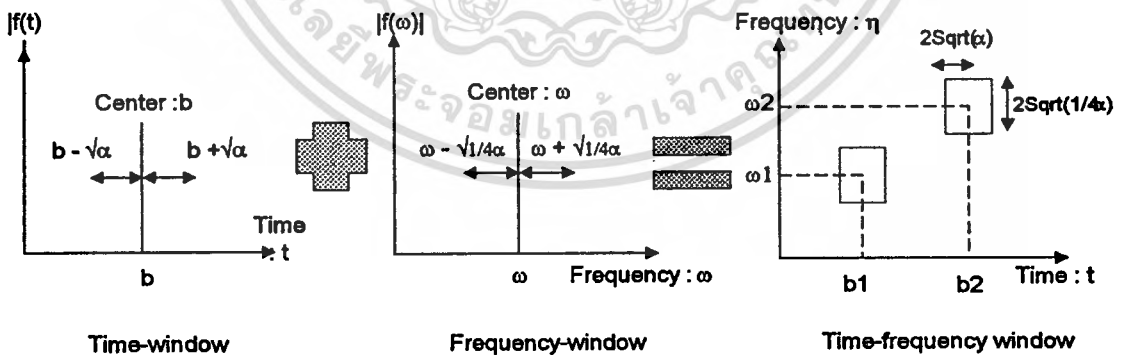
$$\langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \langle \hat{f}, H_{b,\omega}^\alpha \rangle \quad (3.23)$$

สมการที่ (3.23) จะไม่มีทอม $1/2\pi$ เพราะไปรวมอยู่ใน $H_{b,\omega}^\alpha$ ซึ่งจะหมายความว่า การพิจารณาข่าวสารของสัญญาณ $f(t)$ ที่ตำแหน่ง $t=b$ โดยการใช้ w.f. : $G_{b,\omega}^\alpha$ ที่ถูกกำหนดในสมการ (3.16) ซึ่งมีความกว้างในโดเมนสเวลาเท่ากับ $(2\Delta g_\alpha) = 2\sqrt{\alpha}$ ผลลัพธ์จากการทรานส์ฟอร์มดังกล่าว นี้จะมีค่าเท่ากับการพิจารณาข่าวสารของ $\hat{f}(n)$ ที่เกิดจากการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(t)$ ในบริเวณรอบความถี่ $n = \omega$ โดยใช้ w.f. : $H_{b,\omega}^\alpha$ ที่ได้กำหนดในสมการ (3.22) ซึ่งมีความกว้างในแถบความถี่ หรือแบนด์วิทเป็น $(2\Delta g_{\sqrt{\alpha}}) = 2\sqrt{1/4\alpha}$ ดังนั้นผลคูณระหว่างความกว้างของ Time-window : $G_{b,\omega}^\alpha$ และ Frequency-window : $H_{b,\omega}^\alpha$ คือ

$$(2\Delta G_{b,\omega}^\alpha) \times (2\Delta H_{b,\omega}^\alpha) = (2\Delta g_\alpha) \times (2\Delta g_{\sqrt{\alpha}}) = 2 \quad (3.24)$$

ดังนั้นถ้าพิจารณาในระนาบเวลาและความถี่ของ GT จะกล่าวได้ว่า ความกว้าง $2\sqrt{\alpha}$ ของ Time-window และ $1/\sqrt{\alpha}$ ของ Frequency-window จะถูกเรียกว่า ความกว้างและความสูงของ Time-frequency window ตามลำดับ ดังแสดงในภาพที่ 15

ภาพที่ 15



แสดงลักษณะของ Time-frequency window ของ Gabor Transform

จากสมการที่ (3.24) สังเกตว่าพื้นที่ของ Time-frequency window ซึ่งเป็นพื้นที่ในการวิเคราะห์สัญญาณจะมีค่าเท่ากับสองเสมอ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงไม่ว่าจะพิจารณาสัญญาณที่เวลา (t) และความถี่ (α) ใดๆ แต่กรอบความกว้างและความสูงจะมีการเปลี่ยนแปลงในลักษณะสัดส่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์กับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตจะถือว่าผิดกฎหมายและต้องรับผิดชอบต่อเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผูกพันกันโดยขึ้นอยู่กับค่า α และจะคงที่ตลอดตาม Gaussian window ที่นำมาใช้ ไม่สามารถปรับเปลี่ยนได้ในขณะทำการทรานส์ฟอร์ม และนอกจากนี้ w.f. ที่ใช้ก็เป็นชนิดเดียว ทำให้มีข้อจำกัดในการประยุกต์ใช้งาน สิ่งเหล่านี้จึงเป็นข้อจำกัดของ GT

Short-time Fourier Transform : STFT

จากข้อจำกัดของ GT ที่ใช้ g_α เป็น w.f. แบบเดียว จะทำให้เกิดความไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติ เพราะบางกรณีอาจจะจำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันอื่นในการนำมาทำเป็น w.f. เพื่อประสิทธิภาพในการคำนวณ ความเหมาะสมในการสร้างและการนำไปประยุกต์ใช้งาน ฟังก์ชันใดๆ $W(t)$ ซึ่งอยู่ในสเปซ $L^2(\mathbb{R})$ จะสามารถแสดงคุณลักษณะเป็น w.f. ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้ [1]

$$tW(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.25)$$

ถ้ากำหนดให้ $W(t)$ เป็นฟังก์ชันใดๆซึ่งเป็นสมาชิกของ $L^2(\mathbb{R})$ และเป็นไปตามเงื่อนไขในสมการที่ (3.25) จะสามารถนำมาใช้เป็น w.f. ได้ และจะกำหนดตำแหน่งของจุดกึ่งกลาง (Center : x^*) และ รัศมีความกว้าง (Radius : Δw) ของ w.f. ได้จากสมการ

$$x^* = \frac{1}{\|W\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|W(t)|^2 dt \quad (3.26)$$

$$\Delta w = \frac{1}{\|W\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t-x^*)^2 |W(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

ดังนั้น $2\Delta w$ จะเป็นความกว้างของ w.f. : $W(t)$ ที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนส์เวลา และ $2\Delta \omega$ ของ $\hat{W}(\omega)$ จะเป็นความกว้างช่วงความถี่หรือแบนด์วิธในโดเมนส์ความถี่ ดังนั้นจะสามารถเขียนเป็นสมการการแปลงฟูรีเยร์โดยพิจารณาผ่าน w.f. ที่ตำแหน่ง b ใดๆ ได้ดังสมการที่ (3.28) ซึ่งก็คือสมการของ STFT นั้นเอง

$$(\tilde{g}_b f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) \overline{W(t-b)} dt \quad (3.28)$$

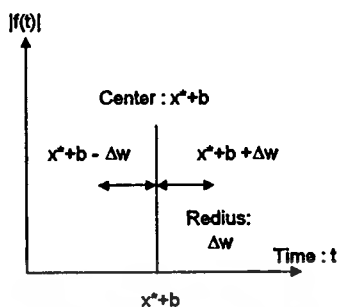
ถ้ากำหนดให้ $W_{b,\omega}(t) = e^{i\omega t} W(t-b)$ (3.29)

จะได้ว่า $(\tilde{g}_b f)(\omega) = \langle f, W_{b,\omega} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{W_{b,\omega}(t)} dt$ (3.30)

โดยที่ $(\tilde{g}_b f)(\omega)$ จะให้ข่าวสารของ $f(t)$ ที่เกิดจากการโปรเจกชันด้วย $W_{b,\omega}(t)$ ที่มีช่วงความกว้าง Time-window เป็นดังสมการที่ (3.31) และแสดงในภาพที่ 16

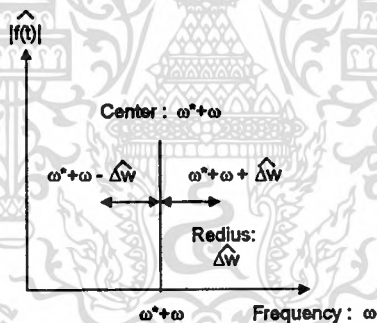
$$[x^* + b - \Delta w, x^* + b + \Delta w] \quad (3.31)$$

ภาพที่ 16



แสดงลักษณะความกว้างของ Time window

ภาพที่ 17



แสดงลักษณะความกว้างของ Frequency window

ในขณะที่เดียวกันถ้าให้ $\hat{W}(\omega)$ เป็น FT ของ $W(t)$ จะสามารถทำการหาความถี่ตรงกลาง ω^* และรัศมีความกว้าง $\Delta\omega$ ของ w.f. : $\hat{W}(\omega)$ ได้เช่นกัน โดยพิจารณาคล้ายกับสมการที่ (3.26) และ (3.27) โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned} V_{b,\omega}(n) &= \frac{1}{2\pi} \hat{W}_{b,\omega}(n) \\ &= \frac{e^{ib\omega}}{2\pi} e^{-ibn} \hat{W}(n-\omega) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ซึ่งจะเห็นว่า $V_{b,\omega}(n)$ ยังคงเป็น w.f. ด้วย โดยมีความถี่ศูนย์กลางที่ $\omega^*+\omega$ และมีรัศมีความกว้างเป็น $\Delta\omega$ ดังนั้นถ้าใช้ทฤษฎี Parseval identity จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(\tilde{g}_b f)(\omega) = \langle f, W_{b,\omega} \rangle = \langle \hat{f}, V_{b,\omega} \rangle \quad (3.33)$$

ดังนั้นแสดงว่า $(\tilde{g}_b f)(\omega)$ จะให้ข่าวสารของ $f(t)$ ในช่วง Frequency window เป็นดังสมการที่ (3.34) และแสดงในภาพที่ 17

$$[\omega^* + \omega - \Delta\hat{\omega}, \omega^* + \omega + \Delta\hat{\omega}] \quad (3.34)$$

เพราะฉะนั้นถ้า $W(t) \in L^2(\mathbb{R})$ และ $W(t), \hat{W}(\omega)$ เป็นไปตามเงื่อนไข (3.25) ดังนั้น STFT ในสมการที่ (3.28) จะมีความกว้างของ Time-frequency window ในระนาบเวลาและความถี่เป็น

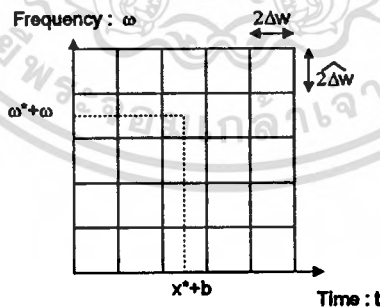
$$[x^* + b - \Delta w, x^* + b + \Delta w] * [\omega^* + \omega - \Delta\hat{\omega}, \omega^* + \omega + \Delta\hat{\omega}] \quad (3.35)$$

โดยมีความกว้าง $2\Delta w$ ใน Time-window และ $2\Delta\hat{\omega}$ ใน Frequency-window เพราะฉะนั้นพื้นที่ของ Time-frequency window จะเป็นดังสมการที่ (3.36) และในภาพที่ 18 จะแสดงให้เห็นถึงลักษณะของระนาบเวลาและความถี่

$$4\Delta w \Delta\hat{\omega} \quad (3.36)$$

ดังนั้นจะสามารถสรุปอีกครั้งได้ว่า การแปลงฟูรีเยร์ผ่านฟังก์ชันหน้าต่างในสมการที่ (3.28) ซึ่งใช้ $W(t)$ เป็น w.f. จะถูกเรียกว่า STFT ซึ่งจะมีความกว้างของ Time-frequency window เป็น $4\Delta w \Delta\hat{\omega}$ โดยจะขึ้นอยู่กับ w.f. ที่นำมาใช้ ซึ่งถ้า w.f. เป็น Gaussian function จะมีความกว้างคงที่เป็น $4\Delta w \Delta\hat{\omega} = 2$

ภาพที่ 18



แสดงลักษณะพื้นที่ในการวิเคราะห์สัญญาณของ Time-frequency window
ในระนาบเวลาและความถี่สำหรับ STFT

จากการพิสูจน์ [1] พบว่า Gaussian function เป็น w.f. ที่มีขนาดเล็กที่สุด ดังนั้น w.f. ชนิดอื่นจะให้พื้นที่ใหญ่กว่านี้ จึงสามารถสรุปได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $W(t) \in L^2(\mathbb{R})$ และ $W(t), \hat{W}(\omega)$ เป็นไปตามเงื่อนไข (3.25) จะได้ว่า

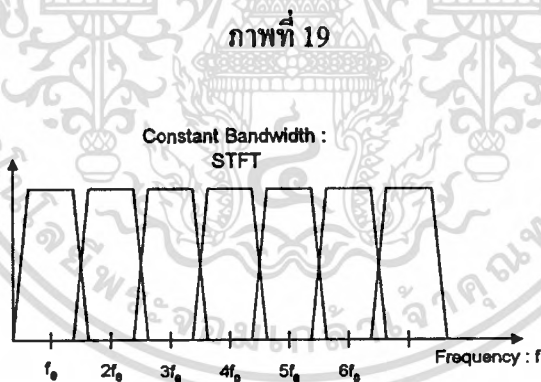
$$\Delta t \times \Delta \hat{\omega} \geq 1/2 \quad (3.37)$$

ถ้า $W(t)$ เป็นสัญญาณแอนะล็อก โดยมี t เป็นตัวแปรในโดเมนสเวลาและสเปกตรัม $\hat{W}(\omega)$ อยู่ในเทอมของความถี่ $f = \omega/2\pi$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta w \\ \Delta f &= \frac{1}{2\pi} \Delta \hat{\omega} \end{aligned} \quad (3.38)$$

ดังนั้น
$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.39)$$

จากที่กล่าวมาและแสดงให้เห็นในสมการที่ (3.37-3.39) จะสามารถสรุปได้ว่าการทำ STFT จะคล้ายกับลักษณะของการทำ Filter bank สัญญาณ โดยจะมีแถบความกว้างทางความถี่หรือแบนด์วิคที่ และจะสามารถทำการเลือกตำแหน่งเวลาและความถี่ที่จะทำการวิเคราะห์ได้ ดังแสดงในภาพที่ 19 ซึ่งถ้าจุดศูนย์กลางของ $W(t), \hat{W}(\omega)$ เป็น $t = b$ และ $\omega = a$ ตามลำดับ และกำหนดให้ $\Delta w \Delta \hat{\omega} = 1/2$ นั้นแสดงว่า $W(t)$ จะเป็น Gaussian function : $ce^{-\alpha t^2} g_\alpha(t-b)$ เท่านั้น โดยที่ $\alpha > 0, c \neq 0$ ซึ่งก็จะทำให้ STFT กลายเป็น GT นั้นเอง



แสดงลักษณะของ Filter banks ในแบบของ STFT

การแปลงเวฟเล็ตแบบต่อเนื่อง

จากการวิเคราะห์สัญญาณด้วย STFT จะสังเกตเห็นว่า Time-frequency window จะมีพื้นที่ในการวิเคราะห์ที่คงที่เสมอไม่ว่าจะเป็นการพิจารณาที่ความถี่และช่วงเวลาใดๆ ขนาดช่วงความกว้างของความถี่และช่วงเวลาจะขึ้นอยู่กับลักษณะของ w.f. ที่ใช้ ซึ่งจะไม่มีการเปลี่ยนคุณสมบัติใน

ขณะการทรานส์ฟอร์ม แต่ในทางปฏิบัติความถี่ของสัญญาณจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนไซเคิลต่อหนึ่งหน่วยเวลา ดังนั้นที่ความถี่สูงจะการเปลี่ยนแปลงสัญญาณในช่วงเวลาที่แคบต่างกับสัญญาณความถี่ต่ำที่ต้องใช้ช่วงเวลานานกว่า ดังนั้นถ้าใช้ STFT และเลือก w.f. ที่มีช่วงความถี่และช่วงเวลาไม่เหมาะสม เช่นช่วงเวลาแคบเกินไปก็จะทำให้ต้องมีการทำการทรานส์ฟอร์มหลายครั้งที่หลายตำแหน่งเพื่อให้ได้ข้อมูลครบในช่วงเวลาทั้งหมดที่ต้องการ หรือ ถ้าความกว้างของช่วงเวลาของ w.f. อาจจะมีมากเกินไปทำให้ได้รับข้อมูลมากเกินไปจนเกินไป ดังนั้น w.f. ที่ดีความกว้างของช่วงเวลาและช่วงความถี่จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงเป็นสัดส่วนผกผันที่สัมพันธ์กัน นั่นคือควรจะให้ Time-window ที่แคบแต่มี Frequency-window ที่กว้างเมื่อทำการวิเคราะห์สัญญาณที่ความถี่สูง และ Time-window ที่กว้างแต่มี Frequency-window ที่แคบเมื่อใช้วิเคราะห์สัญญาณที่ความถี่ต่ำ ซึ่งจะทำให้ได้รับข่าวสารที่ครบถ้วนและใช้เวลาในการทรานส์ฟอร์มได้น้อยลง จากที่กล่าวมาทั้งหมด STFT จึงไม่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์สัญญาณที่มีการเปลี่ยนความถี่สูงและต่ำในสัญญาณตัวเดียวกัน แต่ใน WT จะอาศัย w.f. ที่มีคุณสมบัติที่สามารถเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของช่วงเวลาและช่วงความถี่ให้เหมาะสมกันสำหรับการวิเคราะห์สัญญาณที่ช่วงความถี่และช่วงเวลาที่สนใจ ซึ่ง w.f. ที่มีคุณสมบัติดังกล่าว เรียกว่า "ฟังก์ชันเวฟเล็ต"

ถ้ากำหนดให้ $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ และเป็นไปตามเงื่อนไข Admissibility Condition [1][2] คือ

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3.40)$$

จะเรียก $\psi(t)$ ว่าเป็น Basis wavelets หรือเวฟเล็ตแม่ ซึ่งจะมีคุณสมบัติในการเลื่อนตำแหน่ง (พารามิเตอร์ : b) และเปลี่ยนความถี่ได้ (พารามิเตอร์ : a) ดังแสดงในสมการที่ (3.41)

$$\psi_{b,a}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.41)$$

และจะสามารถเขียนเป็นสมการการแปลงฟูรีเยร์ที่พิจารณาผ่าน w.f. ที่ตำแหน่งเวลาและความถี่ขณะนั้น ได้ดังสมการที่ (3.42) ซึ่งจะเป็นสมการการแปลงเวฟเล็ตแบบต่อเนื่อง (Continuous Wavelets Transform : CWT) นั่นเอง

$$(W_\psi f)(b,a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (3.42)$$

โดยที่ $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ และ $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$

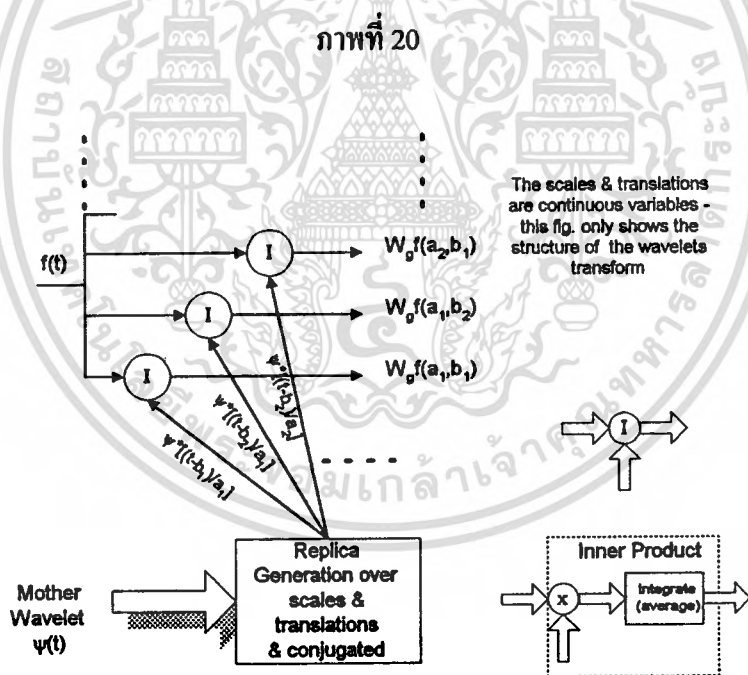
เทอม $|a|^{-\frac{1}{2}}$ จะเป็นการ Normalization ของ $\psi(t)$ เพื่อให้พลังงานของ $\psi(t)$ ที่ b, a ใดๆ ยังคงมีค่าเท่ากับหนึ่งเสมอ ทำให้การทำ WT ที่ตำแหน่ง b, a ใดๆ พลังงานของ $\psi(t)$ จะไม่มีผลกระทบต่อสัญญาณ $f(t)$ ในช่วงนั้นเลย และจะสามารถเขียนสมการ CWT ในลักษณะของการ Inner product ได้ดังนี้

$$(W_{\psi}f)(b,a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle$$

สังเกตว่าจากการกำหนดให้ $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ แสดงว่า $\psi(t)$ จะต้องมีขนาดและพลังงานได้เสมอ เพราะฉะนั้น $\psi(t)$ จะมีการลดลงสู่ศูนย์ทั้งสองด้าน จากการที่ $\psi(t), \hat{\psi}(\omega)$ เป็น w.f. ที่เป็นไปตามเงื่อนไขในสมการที่ (3.25) นั้นแสดงว่าความกว้างของ Time-frequency window จะเป็น $4\Delta\psi \Delta\hat{\psi}$ ในขณะที่เดียวกันถ้าให้ $\hat{\psi}(\omega)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ดังนั้นค่า C_{ψ} จะต้องมีค่าได้เสมอ แสดงว่าที่จุด $\omega = 0$ ต้องมีการกำหนดให้ $\hat{\psi}(0) = 0$ นั้นแสดงว่าจะต้องมีเงื่อนไขอีกอันหนึ่งเกิดขึ้นคือ

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \psi(t) dt \\ \hat{\psi}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0\end{aligned}\tag{3.43}$$

แสดงว่าพื้นที่ใต้กราฟของ $\psi(t) = 0$ นั่นก็คือ ฟังก์ชันดังกล่าวนี้ต้องมีการออกซิเลทเสมอ



แสดงการแปลงเวฟเลตในลักษณะของการ Inner product

ถ้าจะพิจารณา Time-frequency window ของ WT โดยที่ $\psi(t), \hat{\psi}(\omega)$ เป็นไปตามเงื่อนไขในสมการที่ (3.25) และกำหนดให้จุดศูนย์กลางและรัศมีความกว้างของ $\psi(t)$ เป็น t^* และ $\Delta\psi$ ตาม

ถ้าดับ ดังนั้น $\psi_{b,a}$ จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $b+at^*$ และมีรัศมีเป็น $a\Delta\psi$ และข่าวสารของสัญญาณ $f(t)$ จะถูกพิจารณาผ่าน Time-window ที่มีความกว้างของช่วงเวลาดังนี้ [1]

$$[b + at^* - a\Delta\psi, b + at^* + a\Delta\psi] \quad (3.44)$$

จากสมการที่ (3.44) สังเกตว่า Time-window จะแคบลงเมื่อความถี่สูงขึ้น (a มีค่าน้อยลง) และที่ความถี่ต่ำลง (a มากขึ้น) Time-window จะกว้างออก สิ่งนี้จะเป็นข้อแตกต่างที่สำคัญเมื่อเทียบกับ STFT ซึ่งจะไม่มีการมีตัวแปร a เข้ามาเกี่ยวข้อง ต่อไปลองพิจารณา Frequency-window โดยเริ่มจากการหา FT ของ $\psi(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \hat{\psi}_{b,a}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi} e^{-i\omega b} \hat{\psi}(a\omega) \end{aligned} \quad (3.45)$$

นำสมการที่ (3.42) และ (3.45) มาประยุกต์เข้ากับ Parseval Identity จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (W_{\psi} f)(b,a) &= \langle f, \psi_{b,a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{b,a} \rangle \\ &= \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} \hat{\psi}(a\omega) d\omega \end{aligned} \quad (3.46)$$

จากสมการที่ (3.46) จะเห็นว่า $W_{\psi} f(b,a)$ ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ WT ที่ตำแหน่ง b,a ใดๆ จะสามารถหาได้จากการพิจารณาการแปลงฟูรีเยร์ของ $f(t)$ ผ่าน w.f. : $\hat{\psi}(a\omega)$ ที่มีความถี่ศูนย์กลางอยู่ที่ ω^*/a และมีรัศมีความกว้างของแบนด์วิธเป็น $\Delta\hat{\psi}/a$ โดยที่ทอมของ $a|a|^{-1/2}/2\pi$ เป็นเพียงค่าคงที่ และทอม $e^{i\omega b}$ จะเป็นเพียงการขีฟของเฟสของสัญญาณเท่านั้น ซึ่งจะไม่มีผลกระทบต่อความถี่ศูนย์กลางและความกว้างของแบนด์วิธ

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta\hat{\psi}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta\hat{\psi} \right] \quad (3.47)$$

สมการที่ (3.47) เป็นการแสดงขอบเขตของแบนด์วิธและตำแหน่งความถี่ตรงกลางของสัญญาณที่จะถูกวิเคราะห์ ดังนั้นจะสามารถพิจารณาได้ว่า $W_{\psi} f(b,a)$ เป็นการทำให้ Band pass filter ที่มีความถี่ศูนย์กลางที่ ω^*/a และมีความกว้างของแบนด์วิธ $2\Delta\hat{\psi}/a$ ถ้าทดสอบพิจารณาอัตราส่วนระหว่างความถี่ศูนย์กลางและแบนด์วิธจะพบว่า

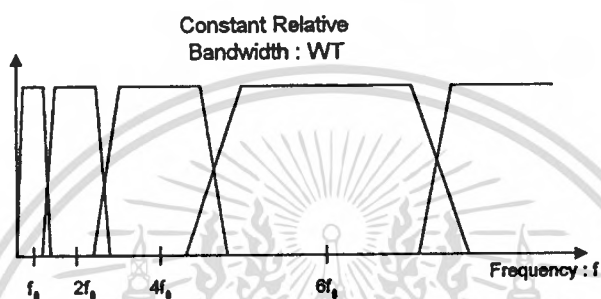
$$\frac{\text{Center fre.}}{\text{Bandwidth}} = \frac{\omega^*/a}{2\Delta\hat{\psi}/a} = \frac{\omega^*}{2\Delta\hat{\psi}} \quad (3.48)$$

อัตราส่วนนี้คือค่า Q ซึ่งจะเห็นว่า Q จะมีค่าคงที่เสมอไม่ขึ้นอยู่กับความถี่ (a) ที่เปลี่ยนไป ดังนั้นจะกล่าวได้ว่า CWT มีลักษณะเป็น Band pass filter - Constant Q นั่นเอง ดังในภาพที่ 21 ซึ่งจะเห็นว่าที่ความถี่สูงขึ้น (a น้อยลง) จะมีความกว้างของแบนด์วิธมากขึ้น

จากผลคูณระหว่างความกว้างของ Time-window และ Frequency-window จะกลายเป็น Time-frequency window ในระนาบเวลาและความถี่ ของ CWT ซึ่งเป็นดังสมการที่ (3.49)

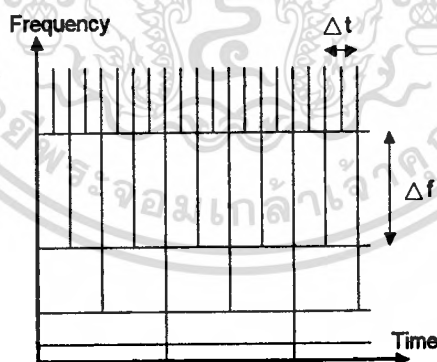
$$[b + at^* - a\Delta\psi, b + at^* + a\Delta\psi] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta\hat{\psi}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta\hat{\psi} \right] \quad (3.49)$$

ภาพที่ 21



แสดงลักษณะของ CWT ในลักษณะของ Band pass filter constant Q

ภาพที่ 22



แสดงลักษณะของระนาบเวลาและความถี่ของการแปลงเวฟเล็ค

จากภาพที่ 22 จะเห็นว่า $\psi(t)$ ที่มีค่าความถี่สูง (a มีค่าน้อยๆ) จะทำให้ช่วงความกว้างของ Time-window ต่ำลง แต่จะส่งผลให้ความกว้างทางความถี่ของ Frequency-window เพิ่มขึ้น และในขณะที่ a มีค่ามากขึ้น ก็จะมีผลการเปลี่ยนแปลงในทางตรงกันข้ามกัน ซึ่งการเปลี่ยนแปลงในลักษณะนี้จะเหมาะสมกับสัญญาณในทางปฏิบัติดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 2.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การแปลงกลับเวฟเล็ต

จากคุณสมบัติของ CWT จะพบว่า $W_\psi f(b,a)$ เป็นการทรานส์ฟอร์มที่เลือกตำแหน่งการวิเคราะห์ที่ได้จากเทอมของ b และความถี่ในเทอมของ a รวมทั้งยังสามารถทำการเลือกวิเคราะห์สัญญาณที่ระดับความละเอียดใดก็ได้ (ในแนวของ a ใดๆ) ทำให้สามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์แบบ Time-frequency analysis ได้เป็นอย่างดี ดังนั้นถ้ามีการเปลี่ยนแปลงข้อมูลใน $W_\psi f(b,a)$ แล้วทำการแปลงกลับไปสู่โดเมนสเวลา ก็จะทำให้ได้ $f(t)$ ที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนไป สูตรในการหา $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ จากความสัมพันธ์ระหว่าง $W_\psi f(b,a)$ กับฟังก์ชัน $\tilde{\psi}(t)$ ซึ่งเรียกว่า Dual basis wavelet ของ $\psi(t)$ จะสามารถพิจารณาได้หลายรูปแบบขึ้นอยู่กับขอบเขตของการเปลี่ยนของพารามิเตอร์ b และ a

แบบที่หนึ่ง $W_\psi f(b,a) : b,a \in \mathbb{R}$

จากสมการที่ (3.40) $\psi(t)$ จะเป็น Basis wavelets ได้เมื่อมีเงื่อนไขดังนี้

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

สามารถเขียนเป็นสมการการแปลงกลับ (Reconstruction) หรือ "การแปลงกลับเวฟเล็ต" (Inverse Wavelets Transform : IWT) ได้ดังนี้

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(b,a) |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2} ; f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.50)$$

จะสังเกตเห็นว่า w.f. ของ IWT จะเป็น Complex conjugate กับ w.f. ของการทำ CWT ดังแสดงในสมการที่(3.50) และภาพที่ 23 จะแสดงลักษณะของ IWT

แบบที่สอง $W_\psi f(b,a) : b \in \mathbb{R}, a > 0$

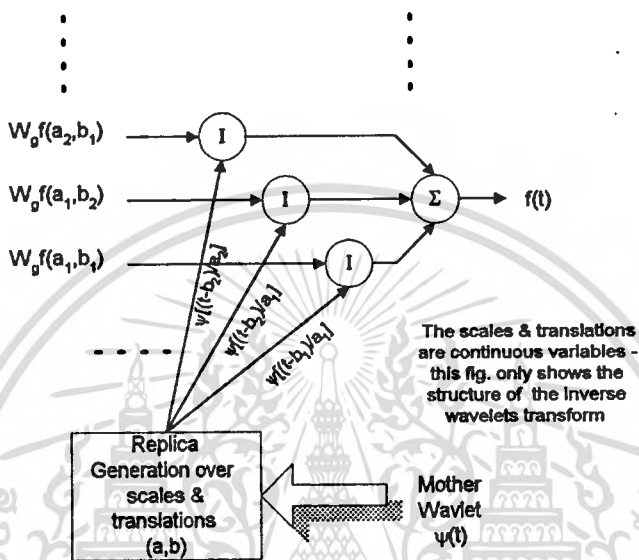
เนื่องจากโดยปรกติแล้วการพิจารณาสัญญาณใดๆ จะสนใจเฉพาะช่วงความถี่ที่เป็นบวก ดังนั้นจะพิจารณาเฉพาะในกรณีที่ $a > 0$ เท่านั้น ซึ่งก็จะได้ช่วงการพิจารณาที่แคบลง และ w.f. จะต้องมึลักษณะเป็นฟังก์ชันคู่ตามสมการที่ (3.51)

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \frac{1}{2} C_\psi < \infty \quad (3.51)$$

ดังนั้นถ้าใช้ $\psi(t)$ เป็น w.f. จะทำให้ได้สมการการแปลงกลับดังนี้

$$f(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (W_\psi f)(b,a) |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} \tag{3.52}$$

ภาพที่ 23



แสดงลักษณะของการแปลงกลับเวฟเล็ต

แบบที่สาม $W_\psi f(b,a): b \in \mathbb{R}, a = 1/2^j; j \in \mathbb{Z}$

ในกรณีนี้ a มีการเปลี่ยนแปลงในลักษณะของ Octave โดยมีค่าเท่ากับ $1/2^j$ และ j เป็นจำนวนเต็มซึ่งแสดงถึงระดับของความละเอียดในการวิเคราะห์สัญญาณ เมื่อทำการพิจารณาความกว้างของแถบความถี่ใน Frequency window จะเป็นดังนี้

$$B_j = [2^j \omega^* - 2^j \Delta \hat{\psi}, 2^j \omega^* + 2^j \Delta \hat{\psi}] \quad ; j \in \mathbb{Z}$$

โดยที่ B_j เป็นแบนด์วิทที่ระดับ j ใดๆ และความถี่ตรงกลางของ ω^* จะมาจากสมการ [1]

$$\omega^* = 3\Delta \hat{\psi}$$

B_j จะมีลักษณะที่เชื่อมต่อกันบริเวณปลายๆตลอดแบนด์ความถี่ $[0, \infty)$ และในทำนองเดียวกัน ช่วงตำแหน่งของ Time window จะมีค่าเป็น

$$[b + 2^{-j} t^* - 2^{-j} \Delta \psi, b + 2^{-j} t^* + 2^{-j} \Delta \psi]$$

ซึ่งจะให้สเปกตรัมของ $f(t)$ ในช่วงแบนด์วิท B_j นั้นเอง

ถ้าพิจารณาให้ $b = k/2^j, a = 1/2^j$ จะทำให้การแปลงเวฟเล็ตเป็นลักษณะแบบแบ่งช่วง

(Discrete Wavelet Transform : DWT) นั้นเอง

$$\begin{aligned} (W_{\psi} f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{j/2} \overline{\psi(2^j t - k)} dt \\ &= \langle f, \psi_{j,k} \rangle \end{aligned} \quad (3.53)$$

โดยที่

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

ซึ่งถ้ากำหนดให้ $C_{j,k} = (W_{\psi} f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right)$ จะได้ว่า $C_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ ดังนั้นสามารถกำหนดเป็นสมการแปลงกลับเวฟเลตแบบแบ่งช่วง ได้ดังสมการที่ (3.54)

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \psi_{j,k} \quad (3.54)$$

โดยที่ $C_{j,k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ของการทำ DWT ของ $f(t)$ ที่มีความสัมพันธ์กับ $\tilde{\psi}(t)$ ซึ่งเป็น Dual ของ Basis wavelet: $\psi(t)$ ที่ตำแหน่ง Time-scale $(b, a) = \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right)$.

ในรายละเอียดของการทำ DWT นั้นจะอธิบายอีกครั้งในบทที่ 4

จากทฤษฎีที่กล่าวมาทั้งหมด จะเป็นการพิจารณาคุณสมบัติของ WT ในลักษณะแบบต่อเนื่องทั้งหมด ซึ่งในทางปฏิบัติ นั้น สัญญาณที่นำมาวิเคราะห์ผ่านขบวนการทางคอมพิวเตอร์จะมีลักษณะเป็นแบบแบ่งช่วง (Discrete) นั่นคือสัญญาณจะถูกแซมปลิง (Sampling) เข้ามานั้นเอง ดังนั้นการพิจารณาลักษณะของ DWT จึงเป็นสิ่งจำเป็นอย่างมาก การที่จะอธิบายลักษณะของ DWT ให้เข้าใจอย่างง่าย ๆ นั้น ควรจะอธิบายในลักษณะของการวิเคราะห์สัญญาณแบบ Multiresolution Analysis ซึ่ง WT จะมีคุณสมบัติดังกล่าวนี้อยู่แล้ว ซึ่งการที่ WT มีคุณสมบัติดังกล่าวทำให้ WT มีลักษณะที่สัมพันธ์กับการทำ Filter Bank ในรูปแบบของ Quadrature Mirror Filter Bank : QMF ซึ่งรายละเอียดต่างๆ เหล่านี้จะกล่าวในบทที่ 4

บทที่ 4

การแปลงเวฟเลตแบบแบ่งช่วง

บทนำ

ในบทนี้จะเป็นการอธิบายการทำ WT กับสัญญาณแบบแบ่งช่วง (Discrete signal) ซึ่งเป็นสัญญาณในทางปฏิบัติที่จะถูกวิเคราะห์ด้วยระบบคอมพิวเตอร์ สัญญาณอินพุตจะมีลักษณะเป็นข้อมูลการสุ่ม (Sample data) จากบทที่ 3 ได้อธิบายถึงคุณสมบัติที่สำคัญของ WT คือการวิเคราะห์สัญญาณที่สามารถเลือกระดับความละเอียดได้ (Multiresolution analysis : MRA) ดังนั้นในส่วนแรกของบทนี้จะกล่าวถึง ลักษณะของการวิเคราะห์สัญญาณแบบ MRA สำหรับการแปลงเวฟเลตแบบแบ่งช่วง (Discrete Wavelets Transform : DWT) และในส่วนที่สองจะเป็นการพิจารณา DWT ในลักษณะของ Filter banks ซึ่งจะกล่าวถึงการกำหนด Impulse response ของฟิลเตอร์ที่จะนำมาใช้ในขบวนการ DWT โดย Impulse response ที่ได้ทำให้ทราบถึงลักษณะสมบัติของฟังก์ชันเวฟเลตที่จะนำมาใช้ ซึ่งจะกล่าวเป็นส่วนที่สามในบทนี้ ในส่วนที่สี่จะเป็นตัวอย่างของฟังก์ชันเวฟเลตแบบต่างๆที่นิยมใช้ เพื่อแสดงให้เห็นถึงผลความแตกต่างของลักษณะสมบัติของเวฟเลตแต่ละชนิด

การวิเคราะห์สัญญาณแบบหลายระดับความละเอียด

(Signal Analysis with Multi resolution)

ก่อนที่จะศึกษาถึงลักษณะสมบัติของการวิเคราะห์สัญญาณแบบ MRA จะอธิบายถึงทฤษฎีพื้นฐานของสเปซของเวกเตอร์ (Vector space) ก่อน เนื่องจากเป็นสิ่งสำคัญที่มีความเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์แบบ MRA

๖

สเปซของเวกเตอร์

ความหมายของ "สเปซของเวกเตอร์" ในสาขาวิเคราะห์สัญญาณ คือ สเปซหรือปริภูมิของสัญญาณใดๆที่เกิดจากการรวมกันของสัญญาณพื้นฐานย่อยๆ (Basis function : b.f.)

ถ้ากำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ \hat{i}, \hat{j} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) ในสเปซของเวกเตอร์ V จะได้ว่า $a\hat{i} + b\hat{j} \in V$ ซึ่งหมายความว่าเวกเตอร์ใดๆก็ตามจะต้องอยู่ในสเปซของเวกเตอร์ V เสมอ ดังนั้นถ้าเวกเตอร์ใดประกอบขึ้นจากหลายเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะได้ว่าเวกเตอร์นั้นยังคงอยู่ในสเปซของเวกเตอร์นี้ นั่นคือ $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} + \dots \in V$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย \hat{i}, \hat{j} จะมีลักษณะเป็น o.b. ซึ่งกันและกัน หมายความว่า \hat{i}, \hat{j} จะอยู่กันต่างมิติ หรือ อาจจะกล่าวได้ว่าอยู่บนแกนต่างกัน ดังนั้นถ้าพิจารณาจากผลของ Inner product ระหว่าง \hat{i}, \hat{j} จะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ แต่ถ้าเป็นการ Inner product ระหว่างตัวมันซึ่งจะเป็นการหาขนาดของมันด้วยจะมีค่าเป็นหนึ่งเสมอ ในขณะที่ a, b เป็นสัมประสิทธิ์ที่จะแสดงขนาดในแต่ละทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ดังนั้นถ้าพิจารณาในลักษณะของสัญญาณ อาจจะมองว่า \hat{i}, \hat{j} คือ b.f. ที่เป็นสัญญาณเล็ก ๆ ซึ่งสามารถนำมาประกอบกันเป็นสัญญาณใดๆ ดังนั้นถ้าให้ U_i เป็น o.b.b.f. ใดๆ และ C_i เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของ U_i จะได้ว่า สัญญาณ v ใดๆจะประกอบขึ้นจาก o.b.b.f. ที่มีค่าขนาดต่างๆมารวมกัน แสดงในสมการที่ (4.1)

$$v = \sum_i C_i U_i \quad ; v \in V \quad (4.1)$$

ในการประมวลผลสัญญาณด้วยคอมพิวเตอร์นั้น สัญญาณดังกล่าวควรจะมีจำนวน b.f. ที่จำกัด (Finite basis function) เนื่องจากข้อจำกัดของทรัพยากรของระบบ ถ้าให้ k เท่ากับจำนวนของ b.f. ที่น้อยที่สุดที่ประกอบขึ้นมาเป็นสัญญาณชนิดนั้น ก็จะทำให้ได้สัญญาณ v ที่มีขนาดที่จำกัด (Finite Dimension = $C_1 U_1, C_2 U_2, \dots, C_k U_k$)

การวิเคราะห์สัญญาณแบบหลายระดับความละเอียด

สมมติให้ V^j เป็นสเปซของเวกเตอร์ที่มี j แสดงถึงระดับความละเอียดและจำนวนของ b.f. ที่ประกอบขึ้นเป็นฟังก์ชันนั้น ถ้า j มีค่าสูงขึ้นก็แสดงว่าที่ระดับความละเอียดสูงขึ้นไปจะมีจำนวนของ b.f. มากขึ้นด้วย ทำให้สัญญาณที่เกิดจากการประกอบกันจาก b.f. เหล่านี้มีความละเอียดมากยิ่งขึ้นด้วย (ลองพิจารณาถึงคลื่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดจากสัญญาณลักษณะรูปซายน์จำนวนอนันต์มารวมกัน) ดังนั้นจึงอาจจะกล่าวได้ว่า j เป็นค่าแสดงถึงระดับความละเอียดของสัญญาณนั่นเอง จากข้อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดเหล่านี้ทำให้สามารถสรุปเป็นลักษณะสมบัติของการวิเคราะห์สัญญาณที่ระดับความละเอียดต่างๆ ได้ดังนี้ [1][3][8]

- 1) $V^{-\infty} \dots \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \dots \subset V^{\infty}$
- 2) $Close_{L^2}(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V^j) = L^2(\mathbb{R})$; $\mathbb{R} :=$ เซตของจำนวนจริง
- 3) $(\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V^j) = \{0\}$
- 4) $V^j + W^j = V^{j+1}$; $j \in \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} :=$ เซตของจำนวนเต็ม
- 5) $f(x) \in V^j \Leftrightarrow f(2x) \in V^{j+1}$; $j \in \mathbb{Z}$

ความหมายของคุณสมบัติแต่ละข้อจะอธิบายได้ดังนี้

(1) หมายถึง สเปซของเวกเตอร์ที่มีระดับความละเอียดสูงกว่าจะสามารถพิจารณาให้มีระดับความละเอียดต่ำลงได้ โดยมีความสัมพันธ์กันเป็นโครงข่ายในลักษณะของเซตย่อย ซึ่งจะหมายถึงว่า สัญญาณใดๆก็ตามจะสามารถพิจารณาที่ระดับความละเอียดใดๆก็ได้ โดยที่ยังคงอยู่ภายใต้สัญญาณเดิมนั่นเอง

(2) ฟังก์ชันทุกฟังก์ชันใน $L^2(\mathbb{R})$ สามารถถูกประมาณให้อยู่ในสเปซของเวกเตอร์ที่ระดับความละเอียด j ใดๆก็ได้ ในลักษณะของการโปรเจกชันสัญญาณ $f(t)$ ลงใน V^j การประมาณฟังก์ชันไปที่ระดับ j ใดๆ จะทำให้ข่าวสารของ $f(t)$ สูญหายไปตามระดับความละเอียดนั้นๆ แต่ถึระดับความละเอียดเพิ่มขึ้นถึงอนันต์สัญญาณที่ประมาณนั้นยังคงเข้าสู่สัญญาณต้นกำเนิด $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$

(3) การโปรเจกต์แต่ละครั้งทีระดับ j น้อยลงเรื่อยๆ จะทำให้สัญญาณที่ประมาณมีข่าวสารที่สูญหายไปมากขึ้น ดังนั้นรายละเอียดของสัญญาณจะน้อยลงเรื่อยๆจนเข้าสู่ศูนย์

(4) การโปรเจกต์สัญญาณจากระดับหนึ่งไปยังระดับที่ต่ำกว่าหนึ่งระดับ จะทำให้ข่าวสารหรือพลังงานของสัญญาณส่วนหนึ่งหายไป หรือ อาจจะมองว่าแถบความถี่ของสัญญาณบางส่วนหายไป พลังงานหรือสัญญาณในแบนด์ความถี่ที่หายไปนี้ จะถูกรวมอยู่ใน Complementary subspace : W^j

(5) คุณสมบัตินี้ของ Two scale property [3] จะเป็นการลดระดับความละเอียดของสัญญาณลงมาหนึ่งระดับ ซึ่งหมายถึงว่า สัญญาณที่อยู่ใน V^{j+1} จะมีความถี่เป็นสองเท่าของสัญญาณใน V^j

จากลักษณะสมบัติทั้ง 5 ข้อ แสดงว่าถ้ากำหนดให้ $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ สัญญาณ $f(t)$ อันเดียวกัน แต่อยู่ที่สเปซต่างกันจะมีจำนวนของ b.f. ที่ต่างกัน โดยระดับสเปซที่สูง (j มาก) จะมีจำนวนของเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

b.f. มาก ซึ่งจะหมายถึงสัญญาณมีความละเอียดสูงนั่นเอง ถ้าให้ช่วงเวลาที่ทำการพิจารณาสัญญาณในแต่ละสเปซเท่ากัน ก็จะพบว่าเนื่องจากที่ระดับ j สูงๆ จะมีจำนวนของ b.f. มาก แต่ต้องบรรจุ b.f. ลงไปในสเปซที่มีช่วงเวลาที่จำกัด ดังนั้นแสดงว่า b.f. แต่ละตัวจะมีช่วงเวลาที่แคบ ซึ่งหมายถึง b.f. มีความถี่สูงนั่นเอง ในขณะที่ระดับสเปซ j ต่ำกว่าจะมี b.f. น้อยกว่า ทำให้ช่วงเวลาของ b.f. แต่ละตัวจะกว้างขึ้น ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า b.f. ที่ระดับความละเอียด $j+1$ จะมีความถี่เป็นสองเท่าของระดับความละเอียด j ตามลักษณะสมบัติข้อที่ 5 ของ MRA

จากการที่มี b.f. ประกอบกันเป็นสัญญาณการประมาณที่ระดับความละเอียด j ภายในสเปซ V^j จะเรียก b.f. เหล่านี้ว่า "ฟังก์ชันสเกลลิง" (Scaling function) : $\phi(t)$ สัญญาณเหล่านี้จะเกิดที่ตำแหน่งเวลาที่ต่างกันของสเปซ และมีความถี่เท่ากันภายในสเปซเดียวกัน และความถี่จะเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับระดับความละเอียดของสเปซนั้นๆ ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการฟังก์ชันสเกลลิงที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งใดๆภายในสเปซได้ ดังแสดงในสมการที่ (4.2)

$$\phi_k(t) = \phi(t - k) \quad ; k \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

โดยที่ k จะเป็นตำแหน่งการเกิดของ $\phi(t)$ แต่ละตัว $\phi(t)$ ที่มีลักษณะสมบัติเป็น o.n. ตามตำแหน่งต่างๆกันเหล่านี้จะอยู่ภายในสเปซเดียวกัน ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$V^0 = \text{space}_k \{ \phi_k(t) \} \quad (4.3)$$

$$\text{โดยที่} \quad \langle \phi_k, \phi_l \rangle = \delta_{k,l} \quad ; k, l \in \mathbb{Z} \quad (4.4)$$

สมการที่ (4.4) หมายถึง ϕ_k, ϕ_l ที่ตำแหน่งเดียวกันเท่านั้น ($k=l$) ที่จะทำให้ผลของ Inner product มีค่าเป็นหนึ่ง (δ) ถ้าต่างตำแหน่งกันเป็นศูนย์ ลักษณะนี้เรียกว่า b.f. มีลักษณะสมบัติ o.n.

จากการที่สัญญาณ $f(t)$ สามารถถูกประมาณลงในระดับสเปซใดๆก็ได้ โดยจะประกอบไปด้วยฟังก์ชันสเกลลิงชนิดเดียวกันแต่ต่างกันที่จำนวนและความถี่เท่านั้น ฟังก์ชันสเกลลิงที่ระดับสเปซสูง (ระดับความละเอียดมาก) จะมีความถี่สูง และที่ระดับที่ต่ำกว่าจะมีความถี่ต่ำกว่า ดังนั้นแสดงว่าจำเป็นต้องมีความสัมพันธ์กันระหว่างฟังก์ชันสเกลลิงของแต่ละสเปซ ความสัมพันธ์ดังกล่าวจะมีลักษณะเป็น Two scale property ตามลักษณะสมบัติข้อที่ 5 ของ MRA

$$f(x) \in V^j \Leftrightarrow f(2x) \in V^{j+1} \quad ; j \in \mathbb{Z} \quad (4.5)$$

ดังนั้นเมื่อนำลักษณะสมบัติในสมการที่ (4.5) มารวมกับลักษณะสมบัติความเป็น o.n. ของฟังก์ชันสเกลลิงภายใน V^0 จะทำให้สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสเกลลิงภายในสเปซ V^j ใดๆได้ดังสมการที่ (4.6) ซึ่งจะเห็นว่าที่ระดับความละเอียดต่ำลงมาหนึ่งระดับ b.f. จะมีความถี่ลดลงมาครึ่งละสองเท่า

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad ; j, k \in \mathbb{Z} \quad (4.6)$$

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle = \delta_{k,l} \quad ; j, k, l \in \mathbb{Z} \quad (4.7)$$

$$V^j = \text{Close}_{L^2(\mathbb{R})} \{ \phi_{j,k}(t) \}; k \in \mathbb{Z} \quad ; j \in \mathbb{Z}$$

ในสมการที่ (4.6) แฟกเตอร์ $2^{j/2}$ มีไว้เพื่อทำให้ค่าการ norm ของ สัญญาณ $\phi(t)$ มีค่าเท่ากับหนึ่งเสมอ ($\| \phi_{j,k}(t) \|_2 = \| \phi(t) \|_2 = 1$) เนื่องจากการเพิ่มหรือลดความถี่สัญญาณจะทำให้พลังงานหรือขนาดของสัญญาณเปลี่ยนไป ดังนั้นเพื่อให้พลังงานของฟังก์ชันสเกลลิงยังคงเท่ากับหนึ่งไม่มีผลกระทบต่อสัญญาณโดยรวม จึงต้องมีแฟกเตอร์นี้คูณอยู่เสมอ จะสังเกตว่าผลของการ Inner product ยังคงเป็นไปตามสมการที่ (4.4) ถึงแม้สัญญาณจะถูกสเกลความถี่ไปก็ตาม

อาศัยลักษณะสมบัติ MRA จะทำให้สามารถทำการประมาณสัญญาณ $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ไปอยู่ในสเปซที่ระดับความละเอียด j ใดๆก็ได้ ดังสมการที่ (4.8)

$$f_j(t) = \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t) \quad (4.8)$$

โดยที่ c_k^j เป็นสัมประสิทธิ์หรือน้ำหนักที่คูณกับฟังก์ชันสเกลลิงที่ตำแหน่ง k ใดๆ แล้วประกอบขึ้นเป็น $f(t)$ ที่ระดับความละเอียด j นั้นๆ

จากลักษณะสมบัติข้อ 4. ของ MRA การวิเคราะห์สัญญาณที่ระดับความละเอียดต่ำลงมาจะทำให้พลังงานหรือสัญญาณบางส่วนหายไปอยู่ในสเปซอีกอันหนึ่ง ซึ่งจะเรียกว่า "สเปซของเวกเตอร์เวฟเล็ต" (Wavelet vector space : W^j) สเปซชนิดนี้จะคล้ายกับสเปซของเวกเตอร์ นั่นคือสัญญาณภายใน W^j จะประกอบไปด้วย b.f. เช่นเดียวกัน แต่จะเรียกว่า "ฟังก์ชันเวฟเล็ต" (Wavelet function : $\psi(t)$) ดังนั้นจะสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ของสัญญาณองค์ประกอบในสเปซที่ระดับความละเอียดใดๆได้เป็น

$$W^j = \text{Close}_{L^2(\mathbb{R})} \{ \psi_{j,k}(t) \}; k \in \mathbb{Z} \quad (4.9)$$

คล้ายกับสมการที่ (4.6) จะสามารถเขียนสมการของฟังก์ชันเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดใดๆได้ ดังสมการที่ (4.10)

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad ; j, k \in \mathbb{Z} \quad (4.10)$$

ถ้ากำหนดให้ $g_j(t)$ เป็นสัญญาณที่เกิดจาก b.f. : $\psi_{j,k}(t)$ ภายในสเปซ W^j เคียวกันมารวมกันเป็นสัญญาณใดๆ จะได้ว่า

$$g_j(t) = \sum_k d_k^j \psi_{j,k}(t) \quad (4.11)$$

โดยที่ d_k^j เป็นสัมประสิทธิ์หรือน้ำหนักที่คูณอยู่กับฟังก์ชันเวฟเล็ตที่ตำแหน่งนั้นๆ เพื่อให้เกิดเป็นสัญญาณ $g_j(t)$

ดังนั้นจากความสัมพันธ์ $V^j + W^j = V^{j+1}$ และจากสมการที่ (4.8) และ (4.11) จะได้ว่า

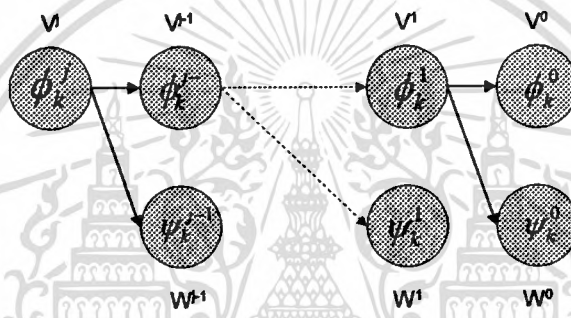
$$f_{j+1} = f_j + g_j \quad (4.12)$$

สมมติให้ $f(t) \in V^{j+1}$ จะสามารถแตกกระจายให้ $f(t)$ ให้มีความละเอียดน้อยลงได้จากสมการ $V^j + W^j = V^{j+1}$ ซึ่งในขณะที่เดียวกัน V^j สามารถแตกต่อไปได้เรื่อยๆจนกระทั่ง $j = 0$ ดังนั้นจะได้เป็นความสัมพันธ์ว่า

$$V^{j+1} = V^0 + W^0 + W^1 + \dots + W^j$$

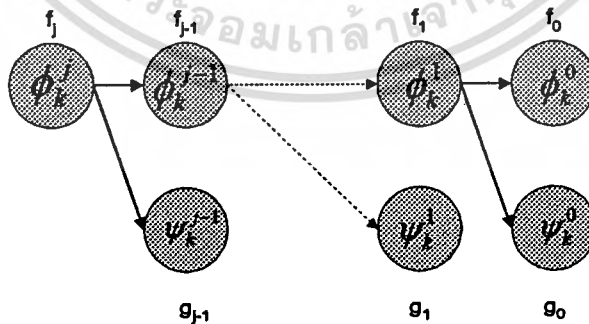
ในการทำงานเดียวกัน f_{j+1} ก็จะสามารถแตกกระจายเป็น f_j และ g_j ซึ่งก็จะสามารถเขียนเป็นแผนภูมิแสดงการแตกกระจายสเปซและสัญญาณ ได้ดังแสดงในภาพที่ 24 และภาพที่ 25 ตามลำดับ

ภาพที่ 24



แสดงลักษณะการแตกกระจายของสเปซของเวกเตอร์

ภาพที่ 25



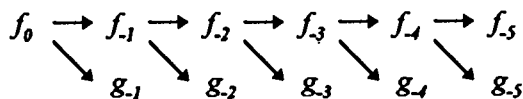
แสดงลักษณะการแตกกระจายสัญญาณ f_j ไปยังระดับความละเอียดต่างๆกัน

f และ g ที่ลดระดับความละเอียดลงมาจะมีความถี่ของ b.f. ลดลงครึ่งละสองเท่าเสมอตาม

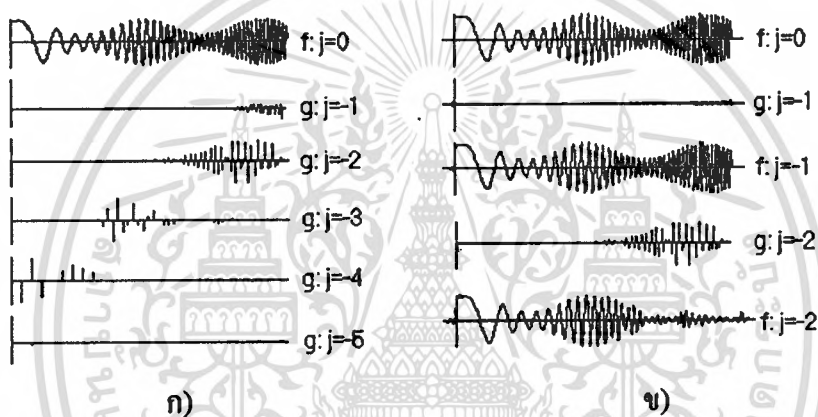
ลักษณะข้อที่ 5. ของ MRA

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง ถ้าสมมติให้ f_0 เป็นระดับความละเอียดสูงสุดของสัญญาณใดๆ ในสเปซ V^0 ถ้าต้องการทำการแตกกระจาย f_0 ออกไป 5 ระดับ ก็จะได้ลักษณะของสัญญาณดังแสดงในภาพที่ 26



ภาพที่ 26



- ก) แสดงลักษณะของสัญญาณ f_0 ซึ่งถูกแตกออกไปเป็น $g_j(t)$ 5 ระดับ
 ข) แสดงลักษณะของการแตกกระจายสัญญาณที่ระดับ $j = -1, -2$

W^j ที่ระดับความละเอียดใดๆ จะมีลักษณะเชิงตั้งฉาก (Orthogonal) ซึ่งกันและกันเสมอ เนื่องจากสัญญาณภายในสเปซของเวฟเล็ตที่ระดับ j ต่างกันจะไม่มีสัญญาณเกี่ยวข้องกันเลย ดังแสดงในภาพที่ 26 ดังนั้นจะสามารถเปลี่ยนการบวกกันแบบตรงๆ ของสเปซ (Direct sum) เป็นการบวกในลักษณะแบบการบวกเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Sum) ซึ่งเขียนเป็นความสัมพันธ์ใหม่ได้ดังนี้

$$V^{j+1} = V^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus \dots \oplus W^j$$

สัญญาณองค์ประกอบย่อยที่อยู่ภายในสเปซของเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดใดๆ ซึ่งเรียกว่า "ฟังก์ชันเวฟเล็ตพื้นฐาน" (Wavelets basis function) จะแบ่งออกเป็น 4 ประเภทใหญ่ [1] ตามลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉาก เพื่อเลือกใช้งานได้อย่างเหมาะสมและสะดวกในการสร้างฟังก์ชันเวฟเล็ต

(1) Orthogonal Wavelets : ψ

จะหมายถึง $\{\psi_{i,n}\}$ ที่มีเงื่อนไขดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad ; j, l, k, m \in \mathbb{Z}$$

ซึ่งหมายถึง ผลของการ Inner product ของเวฟเล็ตจะเป็นหนึ่งได้เมื่อเป็นเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้น

(2) Semi-orthogonal Wavelets : ψ

จะหมายถึง $\{\psi_{i,m}\}$ ที่มีเงื่อนไขดังนี้

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0 \quad j \neq l \quad ; j, l, k, m \in \mathbb{Z}$$

ซึ่งหมายถึง ผลของการ Inner product ของเวฟเล็ตจะเป็นศูนย์เสมอถ้าต่างระดับความละเอียดกัน แต่ถ้าเป็นระดับความละเอียดเดียวกันอาจจะเป็นศูนย์หรือหนึ่งก็ได้ ซึ่งจะสังเกตเห็นว่า ทุก Orthogonal wavelets จะเป็น Semi-orthogonal wavelets เสมอ

(3) Nonorthogonal Wavelets : ψ

หมายถึง เวฟเล็ตที่ไม่เป็น Semi-orthogonal wavelets

(4) Bi-orthogonal Wavelets : ψ

จะหมายถึง $\{\psi_{i,k}, \tilde{\psi}_{l,m}\}$ ที่มีเงื่อนไขดังนี้

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad ; j, l, k, m \in \mathbb{Z}$$

หมายถึงฟังก์ชันเวฟเล็ต $\psi(t)$ จะมีคุณสมบัติเป็น o.n. กับ Dual : $\tilde{\psi}(t)$ ของมันเท่านั้น ถ้าพิจารณาลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉาก $\psi_{i,k}(t)$ ด้วยกันจะไม่มีคุณสมบัตินี้

จากการที่ได้ทราบถึงองค์ประกอบต่างๆที่อยู่ในสเปซมาแล้ว ในส่วนต่อไปนี้จะอธิบายให้เห็นความสัมพันธ์ของส่วนประกอบเหล่านี้ระหว่างสเปซที่ต่างกัน

ถ้ากำหนดให้ $\phi(t) \in V^0$ และ $V^0 \subset V^1$ จากสมการที่ (4.6) จะได้ว่าฟังก์ชันสเกลลิงที่ระดับ $j = 1$ คือ $2^{1/2} \phi(2t-n)$ จะเขียนเป็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสเกลลิงใน V^0 ($\phi(t)$) และ V^1 ($\phi(2t-n)$) ได้ดังนี้

$$\phi(t) = \sum_n \overline{h_0(n)} \phi(2t-n) \quad (4.13)$$

เทอมสัมประสิทธิ์ $\overline{h_0(n)}$ จะใช้สำหรับลดจำนวนของฟังก์ชันสเกลลิงลงมาครึ่งหนึ่ง ซึ่งจะทำให้ความถี่ของฟังก์ชันสเกลลิงลดลงตามที่ได้กล่าวมาแล้ว สังเกตว่าเทอมของการ normalize $2^{1/2}$ หายไป เนื่องจากจะถูกรวมอยู่ใน $\overline{h_0(n)}$ ซึ่งจะอธิบายอย่างละเอียดอีกครั้งในหัวข้อต่อไป

จากลักษณะสมบัติของสเปซของเวกเตอร์จะสามารถกล่าวได้ว่า ถ้า $f(t) \in V^j$ จะทำให้สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง $f(t)$ กับ b.f. ที่ระดับความละเอียด j ใดๆ ได้ดังนี้

$$f_j(t) = \sum_n c_j(n) \phi_{j,n}(t) \quad (4.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า. ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งจะหมายความว่า $f(t)$ จะเกิดจากฟังก์ชัน $\phi_{j,n}(t)$ ที่ระดับความละเอียด j และมีจำนวน k เทอมคูณกับค่าน้ำหนัก $c_j(n)$ ที่ตำแหน่งนั้น ซึ่งค่าน้ำหนักนี้จะสามารถหาได้จากการโปรเจกชัน สัญญาณ $f(t)$ ด้วย $\phi_{j,n}(t)$ ดังแสดงในสมการที่ (4.15)

$$c_j(n) = \langle f(t), \phi_{j,n}(t) \rangle \quad (4.15)$$

ในขณะที่เดียวกันถ้าพิจารณาสัญญาณ $f(t)$ ในระดับความละเอียดสูงขึ้น $j+1$ ซึ่งแสดงว่า $f(t) \in V^{j+1}$ ด้วย ดังนั้นจึงสามารถเขียนได้ว่า

$$f_{j+1}(t) = \sum_n c_{j+1}(n) \phi_{j+1,n}(t) \quad (4.16)$$

จากการที่ $V^j \subset V^{j+1}$ นั้นแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $\phi(2^{j+1}t-n)$ จะถูกลดทอนด้วยเฟกเตอร์สองในแกนเวลา เมื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชัน $\phi(2^j t-m)$ ตามที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3. ดังนั้นสเปซ V^{j+1} จะมีความละเอียดของสัญญาณเป็นสองเท่าของสัญญาณในสเปซ V^j เพราะฉะนั้นความละเอียดของสเปซย่อยๆ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงในลักษณะสองยกกำลัง ซึ่งจะดูเหมือนเป็นการหดหรือการขยายความละเอียดนั่นเอง (Dyadic Multiresolution or Dyadic Scaling Function)

การหดและการขยายของเวฟเล็ต (Dyadic Wavelets)

จากการที่สามารถทำการลดระดับความละเอียดของสัญญาณ $f(t)$ ให้น้อยลงได้ โดยส่วนรายละเอียดที่หายไปจะอยู่ในสเปซที่เป็น Orthogonal Complement กับ V^j นั่นคือ

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j \quad (4.17)$$

สัญญาณใน W^j ก็จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันพื้นฐานเวฟเล็ต คือ

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (4.18)$$

โดยมี $\psi(t)$ จะเป็นเวฟเล็ตแม่ จากการที่รายละเอียดของสัญญาณ $f(t)$ ปรากฏอยู่ในสเปซทั้งสองส่วน ดังนั้นแสดงว่าจะเกิดเป็นสัญญาณใหม่ $g(t)$ ที่เป็นส่วนประกอบภายในของ $f(t)$ อยู่ใน W^j ซึ่ง $g(t)$ จะเป็นไปตามสมการที่ (4.19)

$$g_j(t) = \sum_n d_j(n) \psi_{j,n}(t) \quad (4.19)$$

โดยที่ $d_j(n)$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่เกิดจากการการโปรเจกชันเชิงตั้งฉาก (Orthogonal projection) สัญญาณ $f(t)$ ด้วย $\psi_{j,n}(t)$ ดังแสดงในสมการที่ (4.20)

$$d_j(n) = \langle f(t), \psi_{j,n}(t) \rangle \quad (4.20)$$

แต่เนื่องจาก $W^j \subset V^{j+1}$ และ $g_j(t) \in W^j$ แสดงว่า $g_j(x)$ จะต้องเกิดจากฟังก์ชันสเกลลิง $\phi_{j+1,n}(t)$ ที่ระดับ V^{j+1} ถ้าพิจารณาในระดับสัญญาณที่ V^0 เพื่อพิจารณาหาฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ จะทำให้เขียนเป็นความสัมพันธ์กับฟังก์ชันสเกลลิงที่ระดับความละเอียด $j = 1$ ใน V^1 ได้ดังนี้

$$\psi(t) = \sum_n \overline{h_1(n)} \phi(2t-n) \quad (4.21)$$

เทอมสัมประสิทธิ์ $\overline{h_1(n)}$ จะใช้สำหรับเปลี่ยนฟังก์ชันสเกลลิงเป็นฟังก์ชันเวฟเล็ต โดยมีจำนวนลดลงมาครึ่งหนึ่ง สังเกตว่าเทอม normalize $2^{1/2}$ หายไป เนื่องจากถูกรวมอยู่ใน $\overline{h_1(n)}$ ซึ่งจะอธิบายรายละเอียดอีกในหัวข้อต่อไป

จากความสัมพันธ์ $V^{j+1} = V^j \oplus W^j$ แสดงว่าในขณะที่เดียวกัน V^j ก็สามารถแตกได้เป็น $V^j = V^{j-1} \oplus W^{j-1}$ และจะยังคงใช้เทอมสัมประสิทธิ์ $\overline{h_0(n)}$ และ $\overline{h_1(n)}$ ในการแตกสเปซ ดังนั้นจะสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ของการแตกกระจายสเปซ (Decomposition vector space) ได้ดังนี้

$$L_2(\mathbb{R}) = V_j \oplus W_j \oplus W_{j-1} \oplus \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \quad (4.22)$$

โดยที่ j เป็นระดับความลึกของการแตกกระจาย จากสมการที่ (4.22) จะแสดงให้เห็นว่า สัญญาณใดๆ $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ จะสามารถถูกแตกกระจายออกในลักษณะของผลรวมของสัญญาณในสเปซย่อยที่ประกอบด้วยฟังก์ชันสเกลลิง กับ สัญญาณในสเปซย่อยหลายๆ ชุดที่แต่ละชุดประกอบด้วยฟังก์ชันเวฟเล็ตที่มีการหดหรือขยายความถี่ (Dyadic wavelet)

เปรียบเทียบกับสมการ (4.18) กับสมการ CWT จะพบว่า ฟังก์ชันเวฟเล็ต $|a|^{1/2} \psi(\frac{t-b}{a})$ ที่มีลักษณะเป็นของสัญญาณที่มีการเลื่อนตำแหน่งและเปลี่ยนความถี่อย่างต่อเนื่อง จะเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันเวฟเล็ต $\psi_{i,k}(t) = 2^{i/2} \psi(2^i t - k)$ ที่มีการเลื่อนตำแหน่งและเปลี่ยนความถี่แบบแบ่งช่วง โดยที่ $a=2^i, b=2^i k; i, k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้นรายละเอียดความต่อเนื่องของ CWT จะถูกตัดออกไป

การแจกแจงสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต (Wavelets Series Expansion)

ในหัวข้อนี้เป็นการพิจารณาวิธีการหาสัมประสิทธิ์หรือค่านำหนักที่คูณอยู่กับ b.f. ที่อยู่ในแต่ละสเปซ จากหัวข้อที่ผ่านมาแสดงให้เห็นว่าการโปรเจกชันสัญญาณ $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ไปในสเปซย่อยๆ ดังแสดงในสมการ (4.22) จะมีความสัมพันธ์กับขบวนการ WT ซึ่งเป็นการแจกแจงหาสัมประสิทธิ์ในแต่ละสเปซ ซึ่งแสดงว่าการโปรเจกชันสัญญาณจะเป็นการคำนวณการแจกแจงหา

สัมประสิทธิ์นั่นเอง (Wavelet series expansion) จากสมการที่ (4.22) , (4.18) , (4.19) จะสามารถ แยกแยะสัญญาณ $f(t)$ ไปอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันสเกลลิง และฟังก์ชันเวฟเล็ต ได้ดังนี้

$$f(t) = f_j + g_j + g_{j+1} + g_{j+2} + \dots + g_\infty$$

$$f(t) = \sum_m c_j(m) \phi_{j,m}(t) + \sum_{i=j}^{\infty} \sum_m d_i(m) \psi_{i,m}(t) \quad (4.23)$$

เนื่องจากการแยกแยะยังคงอาศัยหลักการของ Orthonormal projection ดังนั้นสัมประสิทธิ์ต่างๆจะสามารถหาได้จากสมการการโปรเจกชัน ดังแสดงในสมการที่ (4.24-4.25)

$$c_j(m) = \langle f(t), \phi_{j,m}(t) \rangle \quad (4.24)$$

$$d_j(m) = \langle f(t), \psi_{j,m}(t) \rangle \quad (4.25)$$

จากการที่สามารถทำการแยกแยะสัญญาณ $f(t)$ ได้ตามสมการที่ (4.23) พลังงานของ $f(t)$ หลังจากถูกแตกกระจายไปอยู่ในสเปซย่อยต่างๆยังคงเท่ากับสัญญาณต้นกำเนิดเสมอ เนื่องจากลักษณะสมบัติ o.n. ของ b.f. ซึ่งจะสามารถพิสูจน์ได้จากคุณสมบัติของ Parseval's theorem ดังนี้

จากคุณสมบัติพื้นฐานที่กำหนดให้สเปซย่อย V^j และ W^j มีลักษณะเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้นจะแสดงความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากระหว่าง b.f. ที่อยู่ภายในแต่ละสเปซได้ดังนี้ [4]

$$\langle \phi_{j,m}(t), \phi_{j,n}(t) \rangle = \delta_{m,n} \quad (4.26)$$

$$\langle \psi_{i,m}(t), \psi_{i,n}(t) \rangle = \delta_{i,i} \delta_{m,n} \quad (4.27)$$

$$\langle \phi_{j,m}(t), \psi_{i,n}(t) \rangle = 0 \quad (4.28)$$

จากสมการที่ (4.23) จะพบว่า $f(t)$ ถูกแยกแยะไปในเทอมของ b.f. ที่มีลักษณะ o.n. ซึ่งกันและกัน ดังนั้นถ้าใช้ Parseval's formula กับสมการที่ (4.23) จะได้เป็นดังสมการที่ (4.29)

$$\text{Parseval's formula} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_m |c_j(m)|^2 + \sum_{i=j}^{\infty} \sum_m |d_i(m)|^2 \quad (4.29)$$

สมการที่ (4.29) จะเป็นการหาค่าพลังงานของสัญญาณ $f(t)$ จาก Scalar product ระหว่าง $\langle f(t), f(t) \rangle$ และใช้ความสัมพันธ์จากสมการที่ (4.26-4.28) ช่วยในการพิสูจน์ [4]

การแปลงเวฟเล็ตแบบแบ่งช่วง

ในทางปฏิบัติสัญญาณที่วิเคราะห์ด้วยคอมพิวเตอร์จะเป็นการสุ่ม (Sampling) สัญญาณเข้ามาในจำนวนที่จำกัด ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $c_0(m)$ เป็นเซตของสัมประสิทธิ์ของสัญญาณอินพุต

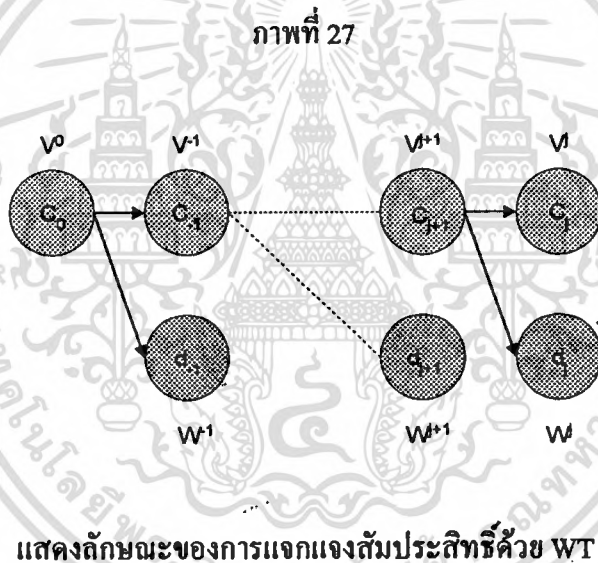
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จำนวน m ตัว และกำหนดให้ระดับความละเอียดของสัญญาณเริ่มต้นที่ศูนย์ จะสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$f(t) \in V_0; f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (4.30)$$

$$V_0 = W_{-1} \oplus \dots \oplus W_{j+2} \oplus W_{j+1} \oplus W_j \oplus V_j \quad (4.31)$$

สมการที่ (4.31) จะเป็นสมการการแตกกระจายสัญญาณ $f(t)$ ในสเปซ V^0 ไปจนถึงระดับความละเอียดที่ j ดังนั้นเทอมสัมประสิทธิ์ $c_0(m)$ จะถูกแตกเป็นสัมประสิทธิ์ในเซตของ $c_j(m)$ ในสเปซ V^j และกลุ่มของเซต $d_{-j}(m), d_{-j+1}(m), \dots, d_j(m)$ ซึ่งอยู่ในเวฟเล็ตสเปซที่ระดับความละเอียดต่างๆ กัน ขบวนการดังกล่าวนี้จะเป็นลักษณะของวิธีการ "การแปลงเวฟเล็ตแบบแบ่งช่วง" (Discrete Wavelets Transform : DWT) นั่นเอง ดังแสดงในภาพที่ 27



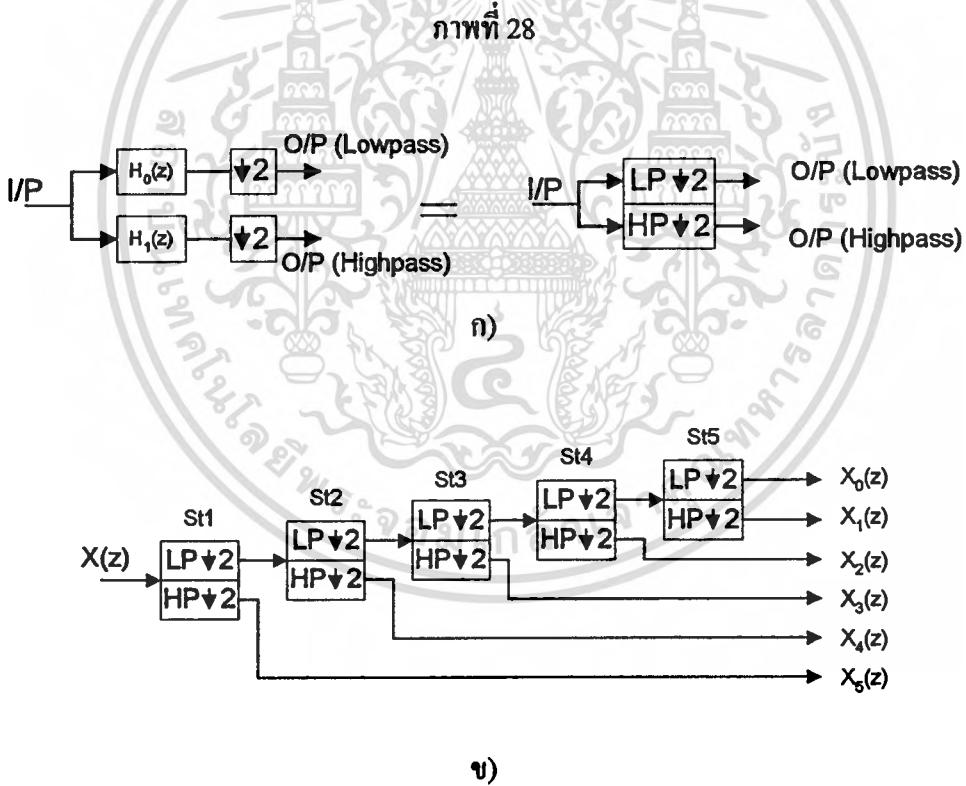
การแปลงเวฟเล็ตโดยใช้หลักการของ Analysis Filter Banks

ขบวนการ DWT จะมีลักษณะคล้ายกับขบวนการของ Octave filter banks เนื่องจากการพิจารณาสัญญาณผ่าน w.f. ที่สามารถเปลี่ยนแปลงความถี่ในอัตราครึ่งละสองเท่า ก็เปรียบเสมือนกับการนำสัญญาณอินพุตนั้นผ่านวงจรฟิลเตอร์ที่มีแบนด์วิทที่มีอัตราการลดลงสองเท่าเหมือนกับแบนด์วิทของ w.f. ในขณะนั้นนั่นเอง ดังนั้นจะสามารถนำเอาหลักการของ Filter banks มาใช้ในการสร้าง DWT ในทางปฏิบัติได้ ก่อนที่จะอธิบายการสร้าง DWT ในลักษณะของ Filter banks จะขออธิบายหลักการพื้นฐานของ Filter banks ก่อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Octave Analysis Filter Banks [4]

Two channel filter banks เป็นการแยกสัญญาณอินพุตออกเป็น 2 ส่วน โดยแบ่งเป็นส่วนความถี่ต่ำและส่วนความถี่สูง ดังนั้น Two channel filter banks จึงประกอบด้วยวงจรที่เป็น lowpass filter : $H_0(z)$ และ Complementary highpass filter : $H_1(z)$ ซึ่งในส่วนของ highpass จะใช้ในการแยกความถี่ในแบนด์ที่ต้องการออกมา (Band-separating filter) ดังแสดงในภาพที่ 28 และ ภาพที่ 29 ลักษณะของ Octave analysis filter banks จะเป็นแบบ Tree structure ซึ่งเป็นการนำเอา Two channel filter banks มาเรียงต่อกัน โดยใช้สัญญาณเอาท์พุทในส่วนความถี่ต่ำจากวงจร Lowpass filter มาทำการแยกแบนด์ความถี่ออกอีกครั้งหนึ่งดังแสดงในภาพที่ 29

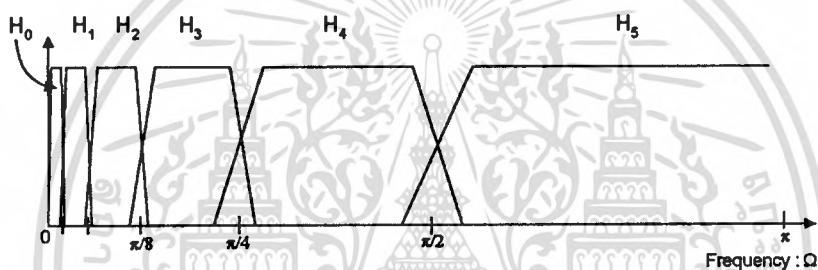


ก) แสดงสัญลักษณ์ของ Two-channel analysis filter banks หรือ Bands separator

ข) แสดงลักษณะของ Tree-structured octave analysis filter banks

ใน Two channel filter banks ชุดแรก จะทำการแยกสัญญาณความถี่สูงครึ่งด้านบน ($X_2(z)$) และสัญญาณความถี่ต่ำครึ่งด้านล่างออกจากกัน จากนั้นจะนำสัญญาณความถี่ต่ำครึ่งด้านล่างมาทำการแยกแบนด์ความถี่ออกครึ่งหนึ่งอีกครั้ง โดยให้ครึ่งบนทางความถี่สูงเป็นสัญญาณ $X_1(z)$ และจะนำส่วนความถี่ต่ำไปทำการแยกแบนด์ต่อไปเรื่อยๆตามระดับที่ต้องการ ในภาพที่ 29 จะแสดงให้เห็นถึงลักษณะของแบนด์ความถี่ที่ถูกแบ่งออกไปเรื่อยๆสัมพันธ์กับอัตราการสุ่มของสัญญาณอินพุต $X(z)$ อัตราการสุ่มจะลดลงครึ่งสอง ซึ่งจะหมายถึงจำนวนข้อมูลสุ่มจะลดลงสองเท่าในแต่ละสเตจนั่นเอง Transfer function ของ Filter banks ในแต่ละระดับจะหาได้จากสมการ $H_i(z) = X_i(z)/X(z)$, $i = 0...5$

ภาพที่ 29



แสดงลักษณะของการแยก Frequency bands ของ Octave filter bank

Cut off frequency มีค่าลดลงครึ่งละสองเท่า ดังนั้นจึงเรียกว่า Octave filter banks และจากภาพที่ 29 จะสังเกตเห็นว่า Absolute transition bandwidth (เอาท์พุท Lowpass) จะลดลงในอัตราสองเท่า โดยลดลงไปในทางความถี่ที่ต่ำลง และ Transfer function $H_0(z)$ จะเป็นส่วน Lowpass ครั้งสุดท้าย และ $H_5(z)$ จะเป็นส่วน Highpass ในขณะที่ Transfer function อื่นๆ จะมีลักษณะเป็น Band pass ดังนั้น Filter banks จึงสามารถในการแยกแบนด์ความถี่ต่างๆออกมา (Band-separating filter)

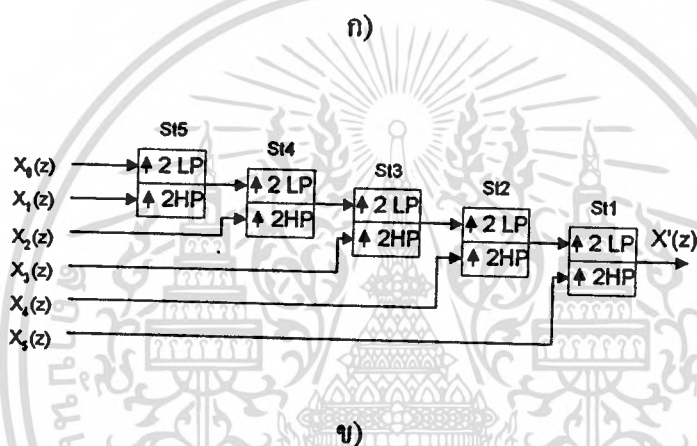
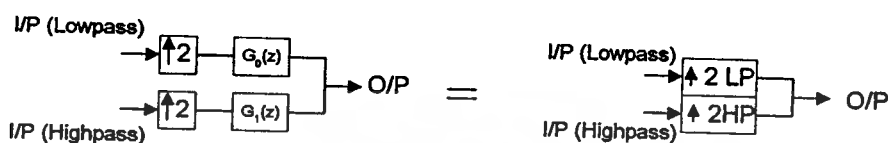
Octave Synthesis Filter Banks

ภาพที่ 30 จะแสดงลักษณะของ Octave synthesis filter banks ซึ่งจะเป็นโครงสร้างที่กลับกันของ Octave analysis filter banks ในภาพที่ 28 ถ้าทำการเชื่อมต่อ Filter banks ทั้งสองแบบเข้าด้วยกัน จะได้สัญญาณเอาท์พุท $X'(z)$ ออกมาซึ่งจะเป็นค่าประมาณของ $X(z)$ ถ้ารูปแบบของ Transfer function $H_0(z), H_1(z), G_0(z)$ และ $G_1(z)$ ทั้ง 4 ชุดเป็นแบบ Perfectly reconstructing two

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

channel filter banks [4] แล้ว Octave filter banks จะเป็น Perfectly reconstructing นั่นคือ $X'(z)$ เท่ากับ $X(z)$ [4]

ภาพที่ 30



ก) แสดงสัญลักษณ์ของ two-channel synthesis filter banks หรือ Bands séperator

ข) แสดง Octave synthesis filter banks

การสร้าง DWT โดยใช้ Analysis filter banks

ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีการพิจารณาการแจกแจงสัมประสิทธิ์ของการโปรเจกต์สัญญาณในสเปซ V^{j+1} ไปในสเปซย่อย V^j และ W^j ซึ่งเป็นการทำ DWT หนึ่งระดับในรูปแบบของการวิเคราะห์ด้วย Filter banks โดยอาศัยหลักการของ Two channel analysis filter banks

กำหนดให้สัญญาณอินพุต $f(t) \in V^{j+1}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$f_{j+1}(t) = \sum_n c_{j+1}(n) \phi_{j+1,n}(t) \in V^{j+1} \quad (4.32)$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ $c_{j+1}(n)$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ข้อมูลกลุ่มที่ทราบค่าของ $f(t)$ จากความสัมพันธ์ $V^{j+1} = V^j \oplus W^j$ จะสามารถเขียนเป็นการโปรเจกต์ $f(t)$ ลงในสเปซ V^j และ W^j ได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f_{j+1}(t) = \sum_m c_j(m) \phi_{j,m}(t) + \sum_m d_j(m) \psi_{j,m}(t) \quad (4.33)$$

ในทางปฏิบัติการโปรเจกชันจะเป็นการหาค่าของ $c_j(m)$ และ $d_j(m)$ จาก $c_{j+1}(n)$ และขณะเดียวกัน b.f. $\phi_{j+1,m}(t)$ ของสเปซ V^{j+1} สามารถถูกแบ่งออกเป็นเซตของ b.f. $\phi_{j,m}(t)$ ในสเปซ V^j ด้วยโดยใช้สมการที่ (4.34) ซึ่งพิสูจน์มาจากสมการที่(4.6) และ (4.13) [4]

$$\text{จะได้ว่า} \quad \phi_{j,m}(t) = 2^{j/2} \sum_v \overline{h_0(v)} \phi(2^{j+1}t - 2m - v) \quad (4.34)$$

ถ้าสมมติว่าให้ $2m + v \rightarrow n$ และ $h_0(n) = 2^{-1/2} \overline{h_0(k)}$, $k \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi_{j,m}(t) &= \sum_n h_0(n-2m) 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1}t - n) \\ &= \sum_n h_0(n-2m) \phi_{j+1,n}(t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

ในทำนองเดียวกัน b.f. $\phi_{j+1,m}(t)$ ของสเปซ V^{j+1} จะถูกแบ่งออกเป็นเซตของ b.f. $\psi_{j,m}(t)$ ในสเปซ W^j ด้วยเช่นกัน ดังนั้น $\psi_{j,m}(t)$ สามารถกำหนดค่าได้โดยวิธีเดียวกันเป็นดังสมการที่ (4.36)

$$\psi_{j,m}(t) = \sum_n h_1(n-2m) \phi_{j+1,n}(t) \quad (4.36)$$

ถ้าต้องการหาสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิง $c_j(m)$ จะสามารถหาได้จากสมการที่ (4.37) โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.15) และ (4.35) ช่วยในการพิสูจน์ดังนี้

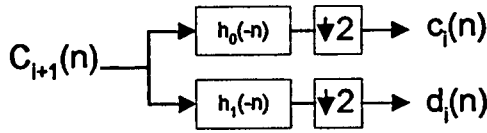
$$\begin{aligned} c_j(m) &= \langle f(t), \phi_{j,m}(t) \rangle \\ &= \left\langle f(t), \sum_n h_0(n-2m) \phi_{j+1,n}(t) \right\rangle \\ &= \sum_n h_0(n-2m) \langle f(t), \phi_{j+1,n}(t) \rangle \\ &= \sum_n h_0(n-2m) c_{j+1}(n) \\ &= h_0(-n) * c_{j+1}(n) \Big|_{n=2m} \end{aligned} \quad (4.37)$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ $c_j(m)$ จะหาได้จากการคอนโวลูชันของสัมประสิทธิ์ $c_{j+1}(n)$ กับลำดับ $h_0(-n)$ แล้วทำการลดอัตราการสุ่มลง (Down sampling) ด้วยสอง เพื่อให้เอาท์พุทมีจำนวนเท่ากับ m ในขณะเดียวกันสัมประสิทธิ์ของเวฟเล็ต $d_j(m)$ ก็จะสามารถหาได้จากวิธีเดียวกันคือ

$$d_j(m) = h_1(-n) * c_{j+1}(n) \Big|_{n=2m} \quad (4.38)$$

จากสมการที่ (4.37) และ (4.38) จะสามารถเขียนเป็นแผนภูมิในลักษณะของ Two channel analysis filter สำหรับกรรแกงแฉงสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตได้ดังภาพที่ 31 ซึ่งจะเป็นการโปรเจกชันสัญญาณไปยังสเปซย่อยนั่นเอง

ภาพที่ 31



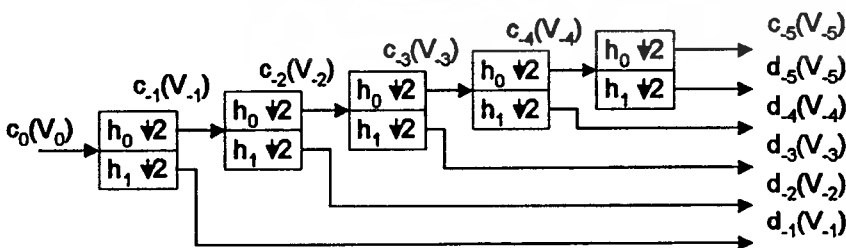
แสดง Two-channel analysis filter banks ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า การแตกกระจายสัญญาณจะถูกกระทำด้วย Analysis filter banks ที่มี Impulse response เป็น $h_0(-n)$ และ $h_1(-n)$ โดยที่สัญญาณ $f(t) \in V^{j+1}$ จะมีความละเอียดเป็นสองเท่าของสัญญาณในสเปซย่อย V^j, W^j และสัมประสิทธิ์ $c_j(m), d_j(m)$ จะมีอัตราการการสุ่มลดลงครึ่งหนึ่งของ $c_{j+1}(n)$ (หมายถึงจำนวนสัมประสิทธิ์ของ $c_{j+1}(n)$ จะถูกแบ่งให้ $c_j(m), d_j(m)$ อย่างละครึ่ง)

ถ้าพิจารณาคูณสมบัติ Two-scale property : $f(t) \rightarrow f(2t)$ และจากลักษณะสมบัติของการเป็นโครงข่ายของสเปซย่อยๆ V^j ตามที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ MRA จะพบว่า การโปรเจกชัน V^{j+1} เป็น V^j จะเป็นการลดความถี่ของสัญญาณลงครึ่งหนึ่ง จึงมีลักษณะเป็น Lowpass filter และการโปรเจกชันไปน W^j จะเป็นส่วนของ Highpass filter ดังนั้น $h_0(-n)$ และ $h_1(-n)$ จึงเป็น Impulse response ของ Lowpass และ Highpass filter ตามลำดับ

ในกรณีที่มีการทำ DWT ซ้ำในแนวของ Lowpass จะกลายเป็นลักษณะของ Dyadic Tree structure ซึ่งเหมือนกับขบวนการ Octave filter banks ดังแสดงในภาพที่ 32

ภาพที่ 32



แสดงลักษณะของ DWT โดยใช้ Dyadic tree structure (Octave filter bank)

สัมประสิทธิ์เวฟเลต d_j ถึง d_s จะเปรียบเสมือน Discrete-time bandpass signal หมายถึง สัญญาณในส่วนที่ผ่าน Basspass filter ที่แบนด์ความถี่ต่างๆ ในขณะที่ c_s ของฟังก์ชันสเกลลิ่งจะเป็น Discrete-time lowpass signal ซึ่งดูได้จากภาพที่ 29 โครงสร้างในภาพที่ 32 เรียกว่า "การแปลงเวฟเลตแบบแบ่งช่วง" (Discrete Wavelets Transform : DWT)

การแปลงกลับเวฟเลตโดยใช้หลักการของ Sythesis filter banks

DWT เป็นการแตกกระจายสัญญาณ หรือการโปรเจคสัญญาณลงไปในสเปซของ V^j และ W^j ซึ่งจะทำให้รายละเอียดของสัญญาณลดลง ดังนั้นการรวมสัญญาณในสเปซ V^j และ W^j กลับไปเป็นสเปซ V^{j+1} ก็จะเป็นเพิ่มรายละเอียดของสัญญาณ $f(t)$ จากระดับ j ไปเป็นระดับ $j+1$ วิธีดังกล่าวนี้จะเหมือนกับขบวนการ Two channel synthesis filter banks ซึ่งเป็นการหาค่าของ $c_{j+1}(n)$ จากค่า $c_j(m)$ และ $d_j(m)$ การพิสูจน์หาสมการของการรวมสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิ่ง และฟังก์ชันเวฟเลตที่ระดับ j ไปเป็นสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันสเกลลิ่งที่ระดับ $j+1$ จะอาศัยหลักการของการเกิดสัญญาณฟังก์ชันสเกลลิ่ง $\phi_{j+1}(t)$ ใน V^{j+1} จะมาจากการรวมกันของสัญญาณฟังก์ชันสเกลลิ่ง $\phi_j(t)$ ใน V^j กับฟังก์ชันเวฟเลต $\psi_j(t)$ ใน W^j และจะอาศัยความสัมพันธ์จาก $V^1 = V^0 \oplus W^0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\phi(2t-n) = \sum_k \overline{g_0(k)} \phi(t-k) + \sum_k \overline{g_1(k)} \psi(t-k) \quad (4.39)$$

ถ้าใช้สมการที่ (4.39) สำหรับการพิจารณาความสัมพันธ์ที่ระดับ j ใดๆจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi_{j+1,n}(t) &= 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1}t-n) \\ &= \sum_k 2^{1/2} \overline{g_0(k)} 2^{j/2} \phi(2^j t - \frac{n}{2} - k) + \\ &\quad \sum_k 2^{1/2} \overline{g_1(k)} 2^{j/2} \psi(2^j t - \frac{n}{2} - k) \end{aligned} \quad (4.40)$$

กำหนดให้ $2^{1/2} \overline{g_0(k)} = g_0(-2k)$, $2^{1/2} \overline{g_1(k)} = g_1(-2k)$ และให้ $n+2k = 2m$ ดังนั้นจากสมการที่ (4.40) จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

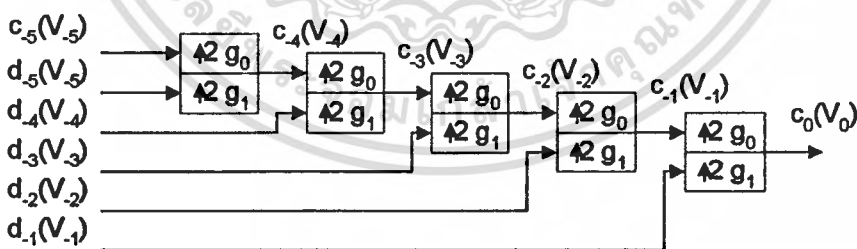
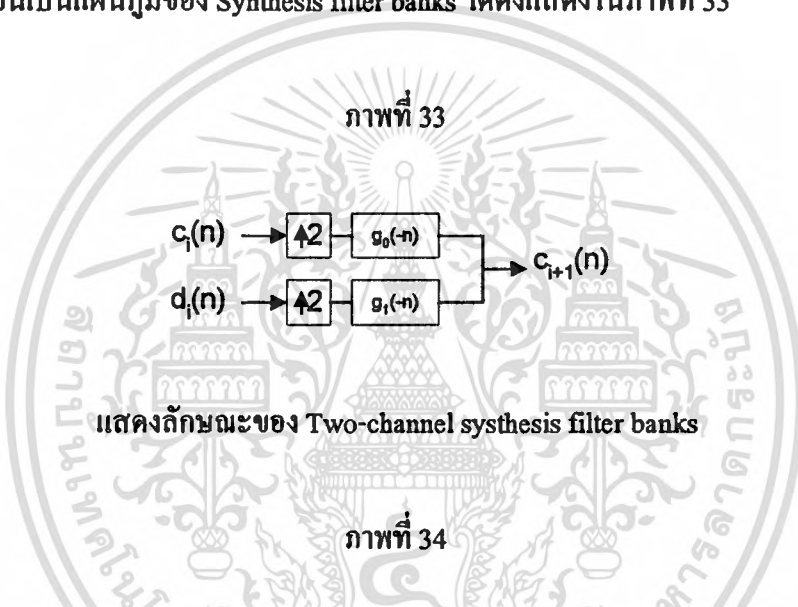
$$\begin{aligned} \phi_{j+1,n}(t) &= \sum_m g_0(n-2m) 2^{j/2} \phi(2^j t - m) + \\ &\quad \sum_m g_1(n-2m) 2^{j/2} \psi(2^j t - m) \\ &= \sum_m g_0(n-2m) \phi_{i,m}(t) + \sum_m g_1(n-2m) \psi_{i,m}(t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้ความสัมพันธ์ $c_{j+1}(n) = \langle f(t), \phi_{j+1,n}(t) \rangle$ ในสมการที่ (4.16) แต่แทนเทอม $\phi_{j+1,n}(t)$ ด้วยสมการที่ (4.41) จะเป็นดังสมการที่ (4.42)

$$\begin{aligned} c_{j+1}(n) &= \sum_m g_0(n-2m) \langle f(t), \phi_{j,m}(t) \rangle + \\ &\quad \sum_m g_1(n-2m) \langle f(t), \psi_{j,m}(t) \rangle \\ &= \sum_m g_0(n-2m) c_j(m) + \sum_m g_1(n-2m) d_j(m) \end{aligned} \quad (4.42)$$

จากสมการที่ (4.42) จะเห็นว่าเป็นการรวมกลุ่มสัมประสิทธิ์ของ c_j และ d_j กลับเป็น c_{j+1} ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิของ Synthesis filter banks ได้ดังแสดงในภาพที่ 33



แสดงลักษณะของ IWT โดยการใช้ Dyadic tree structure

ในภาพที่ 34 จะเป็น Tree-structure synthesis filter banks เพื่อทำการรวมรวมสัมประสิทธิ์ c_j และ d_j กลับมาเป็น c_{j+1} อีกครั้ง ขบวนการนี้จะเรียกว่า "การแปลงกลับเวฟเล็ต" (Inverse Wavelets Transform : IWT) และจะสังเกตเห็นว่า Upsampling digital filter $g_0(n)$ และ $g_1(n)$ จะกระ

ทำกับสัมประสิทธิ์ $c_j(m)$ และ $d_j(m)$ ในกรณีที่เป็นเลขคู่เท่านั้น เช่น สัมประสิทธิ์ $c_j(0)$ จะกระทำกับ $g_0(n)$ และ $c_j(1)$ จะกระทำกับ $g_0(n-2)$ เป็นต้น

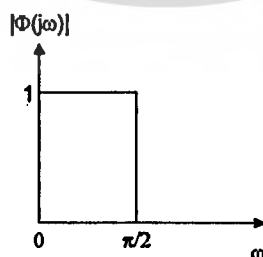
ลักษณะสมบัติของฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเล็ต

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาลักษณะสมบัติของฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเล็ต เพื่อนำไปสู่การพิสูจน์หาลักษณะสมบัติของ $h_0(-n)$ และ $h_1(-n)$ ที่เหมาะสมสำหรับการนำมาใช้ใน Analysis filter banks ดังนั้นแสดงว่า Transfer function ของ Perfect reconstruction filter banks จะไม่สามารถนำมาใช้ทำ DWT และ IDWT ได้เสมอไป ในหัวข้อนี้จะพิจารณาเฉพาะในกรณีของ Ortho-normal wavelets เท่านั้น ดังนั้นลักษณะสมบัติบางประการในหัวข้อนี้จะใช้ไม่ได้กับ Bi-ortho-normal filter banks

ลักษณะสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันสเกลลิง

จากการที่สัญญาณเอาต์พุตที่ผ่าน Lowpass filter ออกมาจะเป็นกลุ่มสัญญาณฟังก์ชันสเกลลิง $\phi_{j,n}(t)$ ที่มีระดับความละเอียดลดลงมาหนึ่งระดับ ดังนั้นแสดงว่า FT : $\Phi(j\omega)$ ของ $\phi(t)$ จะมีค่าเป็นหนึ่งเสมอที่ $\omega = 0$ ตามคุณสมบัติของ Lowpass filter [4] ดังแสดงในภาพที่ 35

ภาพที่ 35



แสดงลักษณะของ Ideal low-pass filter

และจะส่งผลให้การอินทิเกรตของ $\phi(t)$ มีค่าเท่ากับหนึ่งด้วย ดังแสดงในสมการที่ (4.43)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\hat{\Phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{j\omega t} dt \quad (4.43)$$

$$\hat{\Phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = 1$$

แสดงว่าพื้นที่ใต้กราฟ $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$ (4.44)

ลักษณะสมบัติข้อหนึ่งของ $\phi(t)$ คือการมีลักษณะสมบัติที่เป็น o.n. ซึ่งกันและกันใน V^j ที่ระดับเดียวกัน ซึ่งจะมีสัมพัทธ์ดังสมการ

$$\langle \phi_{i,l}(t), \phi_{i,k}(t) \rangle = \delta_{lk} \quad (4.45)$$

สมการที่ (4.45) หมายถึง ผลของการ Inner product ของฟังก์ชันสเกลลิ่งที่ระดับความละเอียดเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้นจึงจะให้ผลเท่ากับหนึ่ง ตำแหน่งอื่นจะเป็นศูนย์ ดังนั้นตำแหน่งเดียวกัน ($k=l$) ก็จะหมายถึงการหาค่า Euclidian norm [4] หรือขนาดของฟังก์ชันสเกลลิ่งนั้นคือ

$$\|\phi_{i,k}(t)\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{i,k}^2(t) dt \right\}^{1/2} = 1; i, k \in \mathbb{Z} \quad (4.46)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.13)

$$\phi(t) = \sum_n h_0(n) \phi(2t-n)$$

แทน $h_0(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{h_0(n)}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \phi(2t-n) dt \\ 1 &= \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-n) dt \\ 1 &= \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{dx}{2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$1 = \frac{\sum_n h_0(n)}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} = \sum_n h_0(n)$$

จากสมการที่ (4.47) สรุปได้ว่า Analysis filter $h_0(n)$ ที่เหมาะสมสำหรับ DWT แบบ o.n. จะต้องมีผลรวมของสัมประสิทธิ์ทั้งหมดเป็น $\sqrt{2}$ และถ้าพิจารณา FT ของ $h_0(n)$ ที่ $\Omega = 0$ หรือ $z = 1$ จะทำให้ได้ลักษณะสมบัติที่เพิ่มขึ้นของ Analysis filter : $h_0(n)$ ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_0(1) = \sum_n h_0(n) e^{jn\Omega} \Big|_{\Omega=0} = \sum_n h_0(n) = \sqrt{2} \quad (4.48)$$

จากลักษณะสมบัติของ Filter banks [4] $h_0(n)$ จะเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ได้ว่า

$$|H_0(e^{j\Omega})|^2 + |H_0(e^{j(\Omega-\pi)})|^2 = 2 \quad \forall \Omega \quad (4.49)$$

พิจารณาในกรณีที่ $\Omega=\pi$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |H_0(e^{j\pi})|^2 + |H_0(1)|^2 &= 2 \\ |H_0(e^{j\pi})|^2 + 2 &= 2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$|H_0(e^{j\pi})|^2 = 0$$

$$|H_0(-1)| = 0$$

สมการที่ (4.48) และ (4.50) จะแสดงให้เห็นว่า $h_0(n)$ นั้นมีคุณสมบัติเป็น Lowpass filter และจากลักษณะสมบัติ o.n. ของฟังก์ชันสเกลลิ่งจะทำให้ $h_0(n)$ มีคุณสมบัติเพิ่มขึ้นคือ

$$\|h_0(n)\|_2 = 1 \quad (4.51)$$

$$\sum_n h_0^2(n) = 1 \quad (4.52)$$

สมการที่ (4.51-4.52) จะสามารถพิสูจน์ได้จากการ Inner product ในสมการที่ (4.45) และ (4.35) [4] สมการที่ (4.52) หมายถึงค่าทั้งสองของสัมประสิทธิ์ของ $h_0(n)$ รวมกันเท่ากับ 1 เสมอ

ลักษณะสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันเวฟเล็ท

ลักษณะสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันเวฟเล็ท พิจารณาได้จาก FT ที่ $\omega = 0$ จากสมการ

$$\Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.53)$$

และ

$$H_1(e^{j\Omega}) = \sum_n h_1(n) e^{-j\Omega n} \quad (4.54)$$

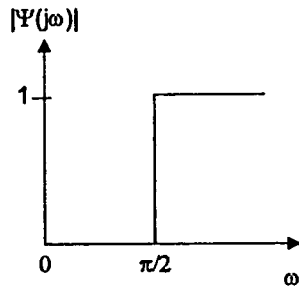
ถ้าพิจารณาหา FT ของสมการ $\psi(t) = \sum_n h_1(n) \psi(2t-n)$ จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \Psi(j\omega) &= \sum_n h_1(n) 2^{-1/2} \Phi(j\omega/2) e^{-j\omega n/2} \\ &= 2^{-1/2} \Phi(j\omega/2) H_1(e^{j\omega/2}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

เนื่องจากฟังก์ชันเวฟเล็ทมีลักษณะของสัญญาณได้ผ่าน Highpass filter ดังนั้นแสดงว่า $H_1(n)$ จะแสดงคุณสมบัติเป็น Highpass filter ดังแสดงในภาพที่ 36 ซึ่งก็จะสรุปได้ว่าที่ตำแหน่ง $\Omega=\omega=0$ จะทำให้ $H_1(e^{j\Omega})=0$ ด้วย ดังนั้นจากสมการที่ (4.55) จะได้ว่า

$$\Psi(j\omega) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (4.56)$$

ภาพที่ 36



แสดงลักษณะของ Ideal highpass filter

และจากสมการที่ (4.56) จะสามารถขยายผลต่อไปได้ว่า

$$\begin{aligned}\Psi(j\omega)\Big|_{\omega=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt\end{aligned}\quad (4.57)$$

สมการที่ (4.57) จะเป็นข้อกำหนดว่าฟังก์ชันเวฟเล็ดจะต้องมีลักษณะการออกสขิลทและมี การลดลงสู่ศูนย์ทั้งสองด้านอย่างรวดเร็วเพื่อให้พื้นที่ใต้กราฟเป็นศูนย์ ดังนั้นแสดงว่าจะมีช่วงเวลา ในการทำการทรานส์ฟอร์มที่แน่นอน หรือที่เรียกว่ามีคุณสมบัติของ Compact support นั้นเอง

สิ่งอีกประการหนึ่งของฟังก์ชันเวฟเล็ด คือการมีลักษณะสมบัติของ Orthonormality ใน สเปซที่แตกต่างกัน เนื่องจาก ψ_i และ ψ_j จะต้องเป็น o.n. sum ซึ่งกันและกันเสมอ (สังเกตว่า ฟังก์ชันสเกลลิ่งจะมีเพียงสเปซเดียวในขณะนั้น ดังนั้นจึงไม่ต้องมีลักษณะสมบัติ o.n. ข้ามสเปซ) และในขณะเดียวกันภายในสเปซเดียวกันฟังก์ชันเวฟเล็ดแต่ละตัวจะต้อง o.n. กันด้วย ดังนั้นจึง สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\langle \psi_{i,l}(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl} \quad ; i,j,k,l \in \mathbb{Z} \quad (4.58)$$

ซึ่งจะหมายถึงฟังก์ชันเวฟเล็ดที่ระดับเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้น จึงจะมีผลของ Inner product เท่ากับหนึ่ง นอกนั้นเป็นศูนย์ ในกรณีที่ $i=j$ และ $k=l$ จะได้ว่า

$$\|\psi_{i,k}(t)\|_2 = \quad (4.59)$$

จากสมการที่ (4.57) และ (4.21) จะสามารถขยายผลได้เป็น

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt &= \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-n) dt \\ 0 &= \sum_n h_1(n) / \sqrt{2} \\ \Theta &= \sum_n h_1(n)\end{aligned}\quad (4.60)$$

แสดงว่าสัมประสิทธิ์ของ Analysis filter : $h_1(n)$ จะมีค่ารวมกันเท่ากับศูนย์ และถ้าพิจารณา FT ของ $h_1(n)$ นั่นคือ $H_1(e^{j\Omega}) = H_1(z)$ และที่จุด $\Omega = 0$ หรือ $z = 1$ จะได้ว่า

$$H_1(1) = 0 \quad (4.61)$$

คล้ายกับสมการที่ (4.51) ถ้าอาศัยคุณสมบัติของการ o.n. ของฟังก์ชันเวฟเล็ตมาใช้ในการพิสูจน์ [4] จะสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} \|h_1(n)\|_2 &= 1 \\ \sum_n h_1^2(n) &= 1 \end{aligned} \quad (4.62)$$

แสดงว่ากำลังสองของสัมประสิทธิ์ $h_1(n)$ รวมกันจะต้องเท่ากับ 1

จากที่กล่าวมาทั้งสองหัวข้อ จะทำให้สามารถทำการสรุปถึงคุณสมบัติของฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ต รวมทั้ง Impulse response ของ Analysis filter : $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ ที่จะใช้ในการสร้าง DWT ได้ ในส่วนต่อไปจะอธิบายคุณสมบัติในเรื่องของ Compact Support เพื่อจะได้ยกตัวอย่างลักษณะของฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ต และแสดงถึงการกระจายแตกสัญญาณด้วย Transform function $h_0(n)$ และ $h_1(n)$

Compact support

$\phi(t)$ และ $\psi(t)$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีช่วงเวลาความกว้างจำกัด ซึ่งเรียกว่ามีลักษณะ Compact support โดยมีค่าเท่ากับศูนย์ในกรณีที่ไม่อยู่ในช่วง $0 \leq t \leq N-1$ ดังนั้น $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ จากสมการที่ (4.13) และ (4.21) จะต้องเป็น FIR filter ด้วย

คุณสมบัติของ Compact support จะยังคงอยู่เสมอ ถึงแม้จะมีการเปลี่ยนแปลงระดับความละเอียดของสัญญาณ ซึ่งจะขอยกตัวอย่างในกรณีระหว่าง $V' \leftrightarrow V'$ และ $\phi(t) \leftrightarrow \phi(2t-n)$ ถ้ากำหนดให้ $\phi(t)$ มีค่าอยู่ในช่วง $0 \leq t \leq N-1$ ซึ่งเป็นช่วงคาบเวลาที่คงที่เสมอไม่ว่าจะเป็นการพิจารณาที่ระดับความละเอียดใด แสดงว่า $\phi(2t)$ จะอยู่ในช่วงของ $0 \leq t \leq (N-1)/2$ เนื่องจากความถี่จะเพิ่มเป็นสองเท่า ดังนั้นจากสมการ (4.13) $\phi(2t-n)$ ที่ n แต่ละค่าจะถูกเลื่อนไปครึ่งละ 0.5

ถ้ามีฟังก์ชันทั้งหมด N ตัว ฟังก์ชันแต่ละตัวจะมีความกว้างเท่ากับ $0 \leq t \leq (N-1)/2$ โดยมีตำแหน่งการเกิดต่างกันครึ่งละ 0.5 และตำแหน่งของฟังก์ชันตัวแรก ($n=0$) จะเริ่มที่ $t=0$ และสิ้นสุดที่ $t = (N-1)/2$ ฟังก์ชันสุดท้าย ($n=N-1$) จะเริ่มที่ $t = (N-1)/2$ และจะจบที่ $t=N-1$ สังเกตว่าสุดท้ายก็ต้องมาสิ้นสุดที่ $N-1$ เสมอทุกระดับความละเอียด ดังนั้นสมการที่ (4.12) จะเกิดจากเทอม N เทอม

บวกกัน ในขณะที่เดียวกันสัมประสิทธิ์ของ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ ก็จะมี N เทอมเช่นกัน และเนื่องจากฟิลเตอร์ที่ใช้คือเป็น Perfect reconstructing filter banks [4] ดังนั้น N จะเป็นเลขคู่เสมอ

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างการแตกกระจายฟังก์ชันสเกลถึงจากระดับความละเอียดที่สูงกว่าไปเป็นฟังก์ชันสเกลถึงและเวฟเลตที่ระดับต่ำกว่าหนึ่งระดับ เพื่อให้เห็นการใช้งาน $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ ในทางปฏิบัติ และแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ยังคงเป็น Compact support อยู่เสมอ

ในที่นี้จะยกตัวอย่างของการรวมสัญญาณฟังก์ชันสเกลถึงที่ระดับ V^1 ไปเป็นฟังก์ชันสเกลถึงและเวฟเลตที่ระดับ V^0 และ W^0 ตามลำดับ โดยใช้ Orthonormal Daubechies-4 wavelet [1][4] ที่มี $N=4$ ($N=4$ หมายถึงต้องใช้ฟังก์ชันสเกลถึงจำนวน 4 ตัวเพื่อรวมเป็นฟังก์ชันสเกลถึง 1 ตัว) และใช้สัมประสิทธิ์ของ FIR filter $h_0(n)$ ดังนี้

$$h_0(n) = [0.4830 \ 0.8365 \ 0.2241 \ -0.1294]$$

จาก
$$\phi(x) = \sum_{n=0}^3 \overline{h_0(n)} \phi(2t-n)$$

$$\overline{h_0(n)} = \sqrt{2}h_0(n)$$

ในภาพที่ 37 เส้นทึบจะเป็น $\phi(t)$ ที่ระดับ V^0 เส้นอื่นๆ จะเป็น $\phi(2t-n)$ ที่ n ต่างๆกันของ V^1 ตามในสมการที่ (4.13)

$$\phi(t) = \sum_n \overline{h_0(n)} \phi(2t-n) ; n = 0,1,2,3$$

$$\overline{h_0(n)} = \sqrt{2}h_0(n)$$

เนื่องจาก $N=4$ ดังนั้นช่วงขอบเขตเวลาคือ $0 \leq t \leq 3$ ฟังก์ชัน $\phi(t)$ ที่เป็นเส้นทึบซึ่งมีช่วงคาบเวลาเท่ากับ $0 \leq t \leq 3$ จะเกิดจากการรวมกันของฟังก์ชัน $\phi(2t-n)$ ที่ตำแหน่งต่างๆคูณกับค่าสัมประสิทธิ์ของ $\overline{h_0(n)}$ ที่ตำแหน่ง n เดียวกัน สังเกตว่า $\phi(2t-n)$ แต่ละตำแหน่งจะเกิดห่างกันครึ่งละ 0.5 และช่วงความกว้างจะเท่ากับ $0 \leq t \leq (N-1)/2$ ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว

สัมประสิทธิ์ของ Highpass filter $h_1(n)$ จะหาได้จากสัมประสิทธิ์ $h_0(n)$ โดยใช้คุณสมบัติของ Perfect reconstruction [4]

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(N-n)$$

$$h_1(n) = [0.1294 \ 0.2246 \ -0.8365 \ 0.4839]$$

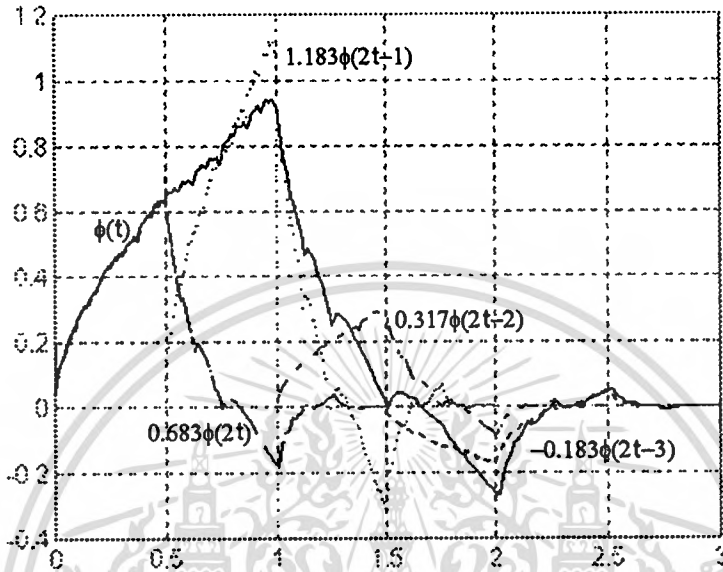
ดังนั้นจาก

$$\psi(t) = \sum_n \overline{h_1(n)} \phi(2t-n) ; n = 0,1,2,3$$

$$\overline{h_1(n)} = \sqrt{2}h_1(n)$$

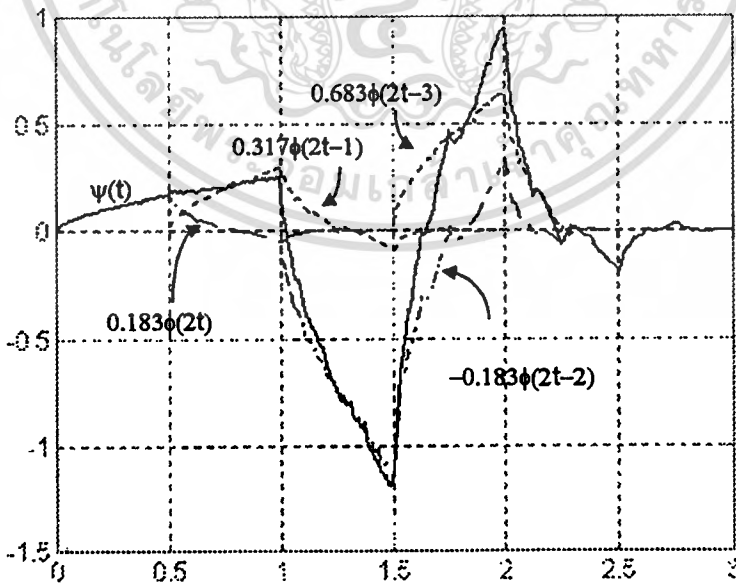
ในภาพที่ 38 จะแสดงผลของการรวมฟังก์ชันสเกลถึง 4 ตัวในสเปซ V^1 ไปเป็นฟังก์ชันเวฟเลต 1 ตัวในสเปซ W^0

ภาพที่ 37



แสดงการรวมสัญญาณฟังก์ชันสเกลถึง $\phi(2t-n)$ 4 ตัวเป็นฟังก์ชันสเกลถึง $\phi(t)$ 1 ตัว

ภาพที่ 38



แสดงการรวมสัญญาณฟังก์ชันสเกลถึง $\phi(2t-n)$ 4 ตัวเป็นฟังก์ชันเวฟเลต $\psi(t)$ 1 ตัว

ซึ่งจะเห็นว่าไม่ว่าที่ระดับความละเอียดใดๆก็ตามฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ต จะยังคงมีขอบเขตที่แน่นอนอยู่เสมอ และจะสังเกตได้ว่า ฟังก์ชันเวฟเล็ต และ Impulse response จะเป็นไปตามลักษณะสมบัติที่กำหนดดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

การสร้างฟังก์ชันเวฟเล็ต

จากที่กล่าวมาทั้งหมด จะเห็นว่า สิ่งสำคัญในการทำ DWT นั้นคือการเลือกฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ตให้เหมาะสมตามคุณสมบัติที่กล่าวมาแล้วนำมาสร้าง $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ ซึ่งเป็นวิธีต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแนววิธีการสร้าง $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ แบบง่ายอย่างคร่าวๆเท่านั้น

ในทางปฏิบัติจะเห็นว่า DWT จะเป็นการแจกแจงสัมประสิทธิ์ของสัญญาณ เพื่อทำการหาสัมประสิทธิ์ชุดใหม่เท่านั้น ดังนั้นการพิจารณาลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ตอาจจะไม่จำเป็น แต่จะเป็นการกำหนดสัมประสิทธิ์ของ Impulse response ของ Filter $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ ที่เหมาะสมแทน ซึ่งเมื่อได้ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ ที่เหมาะสมแล้วสามารถใช้วิธีการ Successive approximation เพื่อนำไปพล็อตหารูปร่างของฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ตที่สัมพันธ์กับ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ ได้ ซึ่งจะกล่าวเป็นหัวข้อต่อไป

กฎเกณฑ์ในการสร้าง $h_0(n)$

สัมประสิทธิ์ของ $h_0(n)$ จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข 3 ข้อ เพื่อให้การแจกแจงสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ตเป็นไปตามสมการที่ (4.13) และ (4.21) นั่นคือ

$$\phi(t) = \sum_n \overline{h_0(n)} \phi(2t - n)$$

$$\psi(t) = \sum_n \overline{h_1(n)} \phi(2t - n)$$

1) Filter $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ จะต้องมีลักษณะของ Perfect reconstruction filter bank [4] และเป็นการโปรเจกโดยสมบูรณ์ นั่นคือ $h_1(n) = (-1)^n h_0(N-n)$

2) สัมประสิทธิ์ของ $h_0(n)$ จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข $\sum_n h_0(n) = \sqrt{2}$

3) Transfer function $H_0(z) \Leftrightarrow h_0(n)$ จะต้องเป็นไปตามกฎที่กล่าวมาแล้วให้หัวข้อของลักษณะสมบัติของฟังก์ชันสเกลลิง

การสร้างสัญญาณฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ต โดยวิธี Successive Approximation

ในหัวข้อนี้จะเป็นการยกตัวอย่างการสร้างฟังก์ชันสเกลลิงจากการสัมประสิทธิ์ของ $h_0(n)$ ในขณะที่เดียวกันเมื่อสามารถสร้างฟังก์ชันสเกลลิงได้ ก็จะสามารถสร้างฟังก์ชันเวฟเล็ตได้จากความสัมพันธ์ที่ (4.21)

วิธีการประมาณลักษณะของฟังก์ชันสเกลลิงจะใช้หลักการของการทำซ้ำ (Recursive) ในสมการที่ (4.13) และ (4.54)

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_n \overline{h_0(n)} \phi(2t-n) \\ \Phi(j\omega) &= 2^{-1/2} \Phi(j\omega/2) H_0(e^{j\omega/2})\end{aligned}\quad (4.65)$$

จากสมการที่ (4.13) จะเห็นว่า $\phi(t)$ จะเกิดจาก $\phi(2t)$ และ $\phi(2t)$ จะเกิดจาก $\phi(2^2 t)$ และสามารถเขียนต่อกันไปเรื่อยๆ ดังนั้นสมการที่ (4.13) จะสามารถเขียนในรูปแบบของการทำซ้ำได้ในทำนองเดียวกัน FT ของ $\phi(t)$ ในสมการที่ (4.65) ก็จะสามารถเขียนเป็นสมการการทำซ้ำได้เช่นกัน ดังแสดงในสมการที่ (4.66)

$$\Phi(j\omega) = \Phi\left(\frac{j\omega}{2^{i+1}}\right) \prod_{k=0}^i 2^{-1/2} H_0\left(e^{\frac{j\omega}{2^{k+1}}}\right) \quad (4.66)$$

โดยที่ $i \rightarrow \infty$ จะทำให้ $\phi(j\omega/2^{i+1}) = \phi(0) = 1$ ตามสมการที่ (4.44) ดังนั้นจะได้ว่า

$$\Phi(j\omega) = \prod_{k=0}^{\infty} 2^{-1/2} H_0\left(e^{\frac{j\omega}{2^{k+1}}}\right) \quad (4.67)$$

จากสมการที่ (4.67) หมายความว่า FT ของ $\phi(t)$ สามารถสร้างจาก $H_0(z)$ ในลักษณะของการทำซ้ำที่ $i \rightarrow \infty$ ดังนั้นในทำนองเดียวกันฟังก์ชันสเกลลิงในโดเมนสเวลา ก็สามารถหาได้จากการทำซ้ำจาก $i \rightarrow \infty$ ครั้งของ $h_0(n)$ ซึ่งจะสามารถเขียนได้ว่า

$$\phi(t) \approx h_i(n) = \prod_{k=0}^i * h_{0k}(n) \quad (4.68)$$

i^{th} เป็นจำนวนการทำซ้ำของการคอนโวลูชันของ Dyadic upsampling impulse response

$$h_{0k}(n) = \begin{cases} h_0(m) = 2^{-1/2} h_0(m) & ; n = 2^k m \\ 0 & ; \text{Otherwise} \end{cases} \quad (4.69)$$

ดังนั้นจากสมการ (4.67) และ (4.68) จะทำให้สรุปได้ว่า

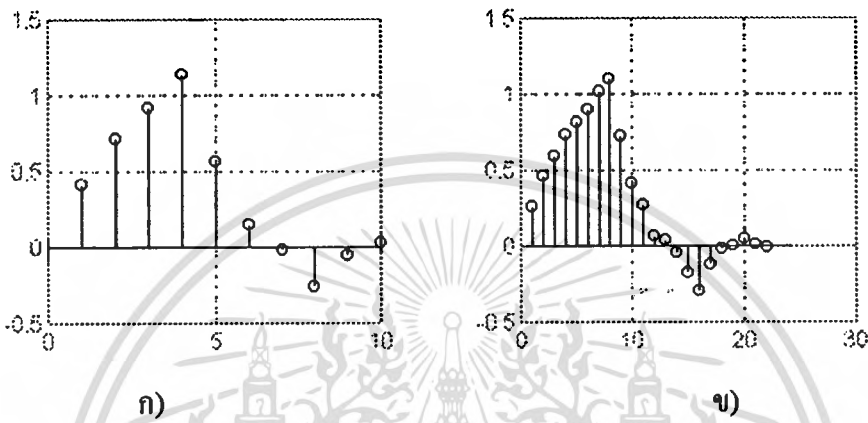
$$f^{(i)}(t) = h^i(n) \quad ; n/2^i \leq t \leq (n+1)/2^i \quad (4.70)$$

สมการที่ (4.70) หมายความว่าฟังก์ชันสเกลลิง $\phi(t)$ จะหาได้จาก $h^i(n)$ โดยที่ $i \rightarrow \infty$ แต่เนื่องจากการคำนวณต้องการจำนวนรอบที่จำกัด ดังนั้นจึงจะเป็นการประมาณ $\phi(t)$ เท่านั้น

ตัวอย่างในการสร้างฟังก์ชันสเกลลิ่งจาก $h'_0(n)$

ในที่นี้จะเป็นการสร้างฟังก์ชันสเกลลิ่ง แบบ Daubechies-4 ซึ่งมี $N=4$

ภาพที่ 39



- ก) แสดงลักษณะของการสร้างฟังก์ชันสเกลลิ่งโดยใช้ $i = 1$
 ข) แสดงลักษณะของการสร้างฟังก์ชันสเกลลิ่งโดยใช้ $i = 2$

ซึ่งจะใช้สัมประสิทธิ์ของ Daubechies-4 : $h_0(n) = [0.4830 \ 0.8365 \ 0.2241 \ -0.1294]$

สมมติให้ $i = 1$ ดังนั้นจากสมการที่ (4.68) จะได้ว่า $h'_0(n) = h_{00}(m) \times h_{01}(2m)$ และจากสมการที่ (4.69) จะได้ว่า

$$h_{00}(n) = [0.683 \ 1.1183 \ 0.317 \ -0.183] \quad ; n = m$$

$$h_{01}(n) = [0.683 \ 0 \ 1.183 \ 0 \ 0.317 \ 0 \ -0.183] \quad ; n = 2m$$

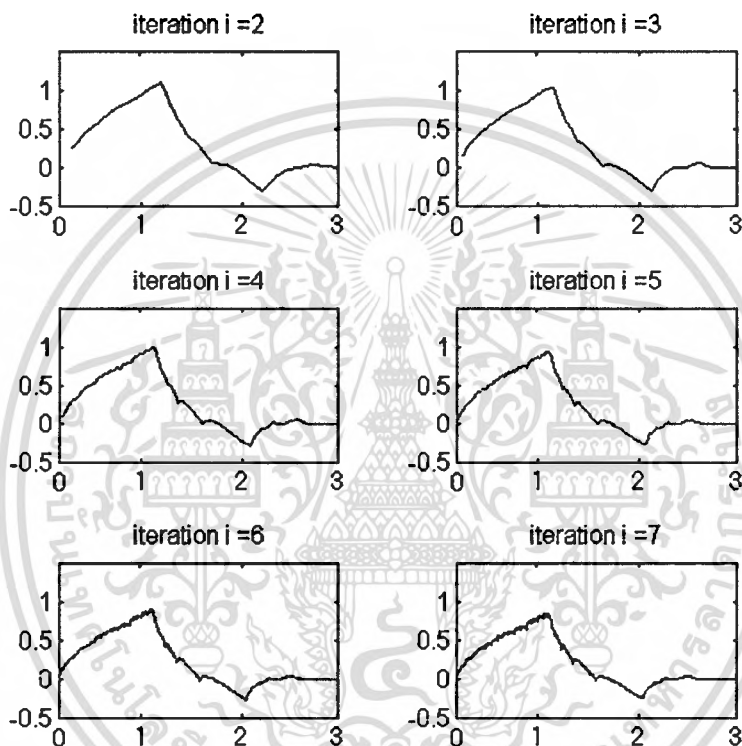
ถ้าทำการคอนโวลูชันสัมประสิทธิ์ทั้งสองตัว จะทำให้ได้รูปของฟังก์ชันสเกลลิ่งดังแสดงในภาพที่ 39 ก) ขณะเดียวกัน $h_{02}(n)$ จะคล้ายกับ $h_{01}(n)$ แต่มีศูนย์สามตัวใส่ไประหว่างสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น $h^2(n)$ จะแสดงในภาพที่ 39 ข) ซึ่งจะเห็นว่ามีความละเอียดมากกว่า

ดังนั้นจะเห็นว่า Step function $f^i(t)$ จะสร้างโดยวิธีการ Linear interpolation ระหว่างค่าของ Impulse response : $h^i(n)$ และจะมีจำนวนสัมประสิทธิ์ของ $h^i(n)$ เท่ากับ $(N-1)(2^{i+1}-1)+1$ ตัว ขณะที่ N เป็นจำนวนสัมประสิทธิ์ของ $h_0(n)$ เพราะฉะนั้นจำนวนรอบการทำซ้ำจะเป็น

$$t = n/2^{i+1} \quad (4.71)$$

ในภาพที่ 40 จะแสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงที่ถูก Linear interpolation ที่ $i = 0-7$ ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าที่ $i = 6$ และ 7 ลักษณะของสัญญาณจะใกล้เคียงกันมาก และสัญญาณยังคงอยู่ในขอบเขต $0 \leq t \leq N-1$ เช่นเดิมเสมอ

ภาพที่ 40



แสดงผลความแตกต่างของการใช้จำนวนการทำซ้ำที่ต่างกัน

ตัวอย่างของฟังก์ชันเวฟเล็ต

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างลักษณะของเวฟเล็ตชนิดต่างๆที่นิยมใช้ในปัจจุบัน ซึ่งเป็นที่ทราบกันแล้วว่าการนำฟังก์ชันเวฟเล็ตต่างชนิดกันมาใช้ในการทำ DWT จะให้ผลลัพธ์ที่ต่างกัน ดังนั้นจึงจะต้องเลือกให้เหมาะสมกับงานที่จะนำไปใช้ ในที่นี้จะไม่กล่าวถึงรายละเอียดที่มาของเวฟเล็ตแต่ละตัว แต่จะอธิบายให้เห็นถึงความแตกต่างของฟังก์ชันเวฟเล็ตในด้านโดเมนสเวลาและความถี่ เพื่อให้เห็นว่ามีผลกระทบต่อลักษณะของ DWT อย่างไร

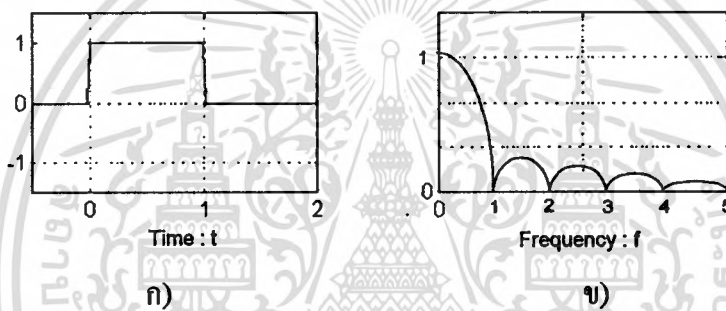
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Harr Wavelets [4]

Harr Wavelets จะเป็นเวฟเลตแม่ที่ง่ายที่สุด ซึ่งจะมีฟังก์ชันสเกลลิง $\phi(t)$ ดังแสดงในภาพที่ 41 ก) ซึ่งจะมีค่าเท่ากับหนึ่งในช่วงเวลา $0 \leq t \leq 1$ เท่านั้น ดังสมการ

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (4.72)$$

ภาพที่ 41



ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Harr

ข) แสดงลักษณะสเปกตรัมขนาดของฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Harr

ฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Haar จะมีลักษณะสมบัติ o.n. นั่นคือ $\langle \phi(t-k), \phi(t-l) \rangle = \delta_{kl}$ ในขณะเดียวกันพื้นที่ใต้กราฟของ $\phi(t)$ จะเท่ากับหนึ่งตามสมการที่ (4.43)

จากทฤษฎี Two scale property แสดงว่าที่ระดับ V^1 ฟังก์ชันสเกลลิงจะมีความถี่สูงขึ้นสองเท่า นั่นคือ $\phi_{1,n}(t) = 2^{1/2} \phi(2t-n)$ โดยที่ $n = 0, 1$ ซึ่งจะสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\phi_{1,n}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{for } n \leq t < (1+n)/2 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} ; n = 0, 1 \quad (4.73)$$

จะเห็นว่าฟังก์ชันสเกลลิงที่ระดับที่ 1 จะมีด้วยกัน 2 ฟังก์ชันที่ตำแหน่ง $0 \leq t \leq 0.5$ เมื่อ $(n=0)$ และ $0.5 \leq t \leq 1$ เมื่อ $(n=1)$ ซึ่งจะมีลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน ในขณะเดียวกันฟังก์ชันเวฟเลตของ Haar จะเป็นดังสมการ (4.74) และแสดงในภาพที่ 42

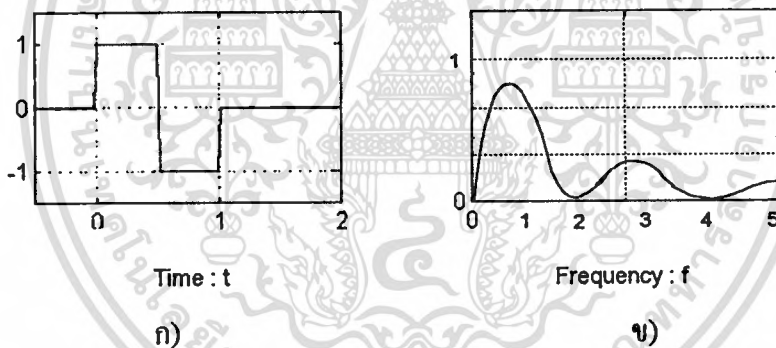
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t < 0.5 \\ -1 & \text{for } 0.5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (4.74)$$

โดยพิจารณา FT ของ $\phi(t)$ ในลักษณะของสเปกตรัมขนาด จะพบว่าเป็นลักษณะของ Lowpass filter โดยที่ตำแหน่ง $\omega=0$ จะมีขนาดเท่ากับหนึ่ง ในขณะที่เดียวกัน FT ของ $\psi(t)$ จะมีสมการเป็น

$$\Psi(j\omega) = \text{sinc}(\omega/4) \sin(\omega/4) \quad (4.75)$$

สมการที่ (4.75) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $\omega=0$ ตามที่กำหนดในสมการที่ (4.55) จะสังเกตเห็นว่าสเปกตรัมของเวฟเลตจะลดลงอย่างช้าๆไปทางความถี่สูง ซึ่งแสดงว่าความคมในการตัดสัญญาณและความละเอียดในการตัดสัญญาณทางความถี่ไม่ดีพอ

ภาพที่ 42



ก) แสดงลักษณะของเวฟเลตแบบ Haar

ข) แสดงลักษณะสเปกตรัมขนาดของเวฟเลตแบบ Harr

Shannon wavelet [4]

Shannon wavelet จะเป็น Dual ของเวฟเลตแบบ Haar ซึ่งกำหนดมาจากลักษณะสมบัติ Duality ของ FT ซึ่งมีฟังก์ชันสเกลลิงเป็นดังสมการ

$$\phi(t) = \text{sinc}(\pi t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (4.76)$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\phi(t)$ ในโดเมนสเวลา เป็นฟังก์ชันแบบ Non-causal ($\sin(x)/x$) ที่ช่วงขอบเขต

ไม่สิ้นสุด แต่ถ้าพิจารณา FT ของ $\phi(t)$ พบว่ามีลักษณะเป็น Ideal lowpass filter นั่นคือ

แม้ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Phi(j2\pi f) = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| < 1/2 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (4.77)$$

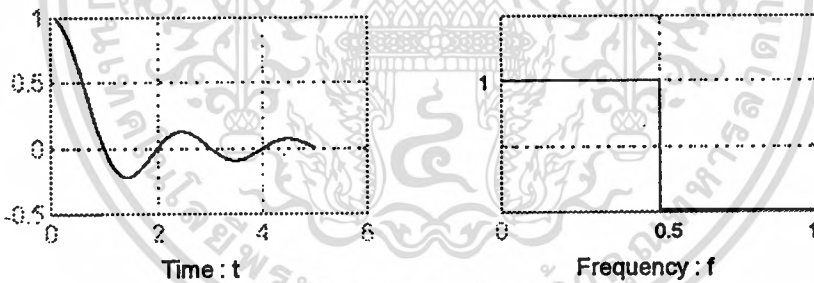
ดังนั้นจากลักษณะสมบัติของ Perfect reconstruction [4] จะได้ว่า FT ของสเปกตรัมของ $\psi(t)$ จะต้องกลายเป็น Ideal highpass filter ด้วย ดังนั้น FT ของฟังก์ชันเวฟเลตจะเป็นไปดังสมการ

$$\Psi(j2\pi f) = \begin{cases} 1 & \text{for } 1/2 \leq |f| < 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (4.78)$$

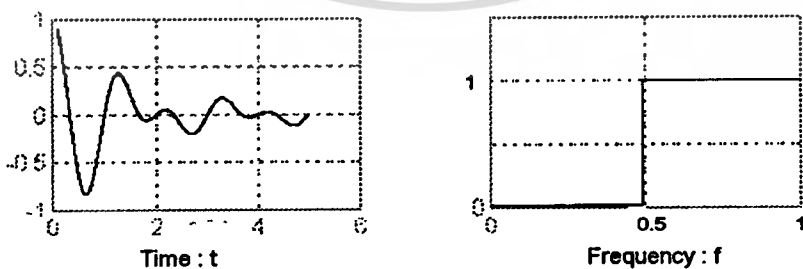
จึงสรุปได้ว่าสเปกตรัมของฟังก์ชันสเกลลิ่งและเวฟเลต จะสามารถแยกจากกันในลักษณะเชิงตั้งฉากได้อย่างเด็ดขาด ไม่มีการซ้อนทับกันเลยในมุมมองของโดเมนส์ความถี่ ซึ่งในกรณีของเวฟเลตชนิดอื่นจะไม่มีคุณสมบัติที่เป็นขอบเขตที่แน่นอนแบบนี้ ดังนั้น Shannon wavelet จะให้การวิเคราะห์สัญญาณที่มีขอบเขตความถี่จำกัดได้ดี และจาก FT ของฟังก์ชันเวฟเลตจะสามารถพิจารณากลับไปในโดเมนส์เวลาได้เป็น

$$\psi(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) \quad (4.79)$$

ภาพที่ 43



ก)



ข)

ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันและสเปกตรัมของสเกลลิ่ง แบบ Shannon

ข) แสดงลักษณะฟังก์ชันและสเปกตรัมของเวฟเลต แบบ Shannon

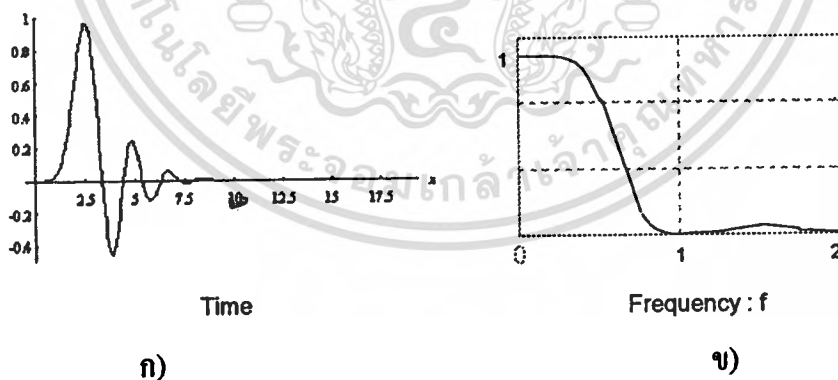
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นทั้งฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ตในโดเมนส์เวลา จะเป็นฟังก์ชันแบบ Non-causal ซึ่งมีความยาวเป็นอนันต์ แต่ในขณะที่เดียวกันที่โดเมนส์ความถี่จะให้สเปกตรัมที่แยกกันอย่างเด็ดขาดในลักษณะของ Ideal filter ดังนั้นจะสรุปได้ว่าเวฟเล็ตแบบ Shannon จะให้ Frequency resolution ที่ดีมาก แต่ Time resolution จะไม่ดี ซึ่งต่างกับเวฟเล็ตแบบ Haar ที่ให้ Time resolution ดีมาก (สัญญาณแต่ละตัวจะแยกกันอย่างเด็ดขาดในโดเมนส์เวลา) แต่ในขณะที่ Frequency resolution เป็นแบบ non-causal

Daubechies Wavelets (Langrange Wavelets) [4]

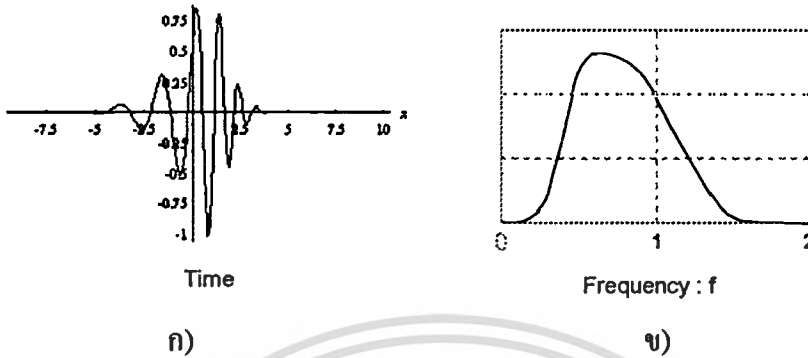
เวฟเล็ตชนิดนี้จะให้ Time-frequency resolution ที่ดีๆกันทั้งในกรณีของโดเมนส์เวลาและความถี่ เวฟเล็ตแบบ Daubechies จะให้ขอบเขตจำกัดในแกนเวลา (Compact support) และให้สเปกตรัมที่ไม่เป็นขอบเขตที่จำกัดที่แท้จริงเหมือน Shannon แต่จะมีการลดลงอย่างรวดเร็วที่ความถี่สูงและความถี่ต่ำ ซึ่งจะมีผลดีในเรื่องของเบนคัตวิหคังแสดงในภาพที่ 44 และ 45

ภาพที่ 44



- ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Daubechies-10
 ข) แสดงลักษณะสเปกตรัมฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Daubechies-10

ภาพที่ 45



- ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันเวฟเลตแบบ Daubechies-10
ข) แสดงลักษณะสเปกตรัมของฟังก์ชันเวฟเลต Daubechies-10

เวฟเลตแบบ Daubechies ที่มี $N=4$ จะเป็นเวฟเลตแบบ Daubechies ที่มีสัมประสิทธิ์น้อยที่สุด ถ้าทำการเพิ่มค่า N จะทำให้ได้ลักษณะของฟังก์ชันสเกลลิ่งและเวฟเลตที่มีความละเอียดเพิ่มขึ้น ในขณะที่เดียวกันจะทำให้ Band-pass spectrum มีขอบเขตที่แน่นอนมากยิ่งขึ้น

จากเนื้อหาที่กล่าวมาทั้งหมดทำให้ทราบถึงคุณสมบัติของ WT ที่ใช้ฟังก์ชันเวฟเลตเป็นสัญญาณหน้าตาต่างสำหรับการส่ง (Mapping) ในลักษณะของ MRA ซึ่งในทางปฏิบัติก็จะเป็นการสร้างเป็น Lowpass impulse response $h_0(n)$ แล้วทำการใช้คุณสมบัติของ Perfect reconstruction filter bank เพื่อกำหนด Impulse response $h_1(n)$ ซึ่งเป็นส่วนของ Highpass filter โดยที่ Impulse เหล่านี้จะต้องมีคุณสมบัติตามที่กำหนด เพื่อสามารถที่จะใช้ในการแจกแจงสัมประสิทธิ์ต่างๆที่จะเกิดจากการทำ WT ให้ถูกต้อง และจากการที่ฟังก์ชันเวฟเลตมีได้หลายรูปแบบก็จะทำให้มี $h_0(n), h_1(n)$ ตามลักษณะของฟังก์ชันเวฟเลตนั้นๆไปด้วย ดังนั้นจะต้องเลือกฟังก์ชันเวฟเลตให้เหมาะสมกับงานที่จะนำ WT ไปประยุกต์ใช้งานด้วย

บทที่ 5

ลายเส้นแบบ B-spline และเวฟเล็ดแบบ B-spline

บทนำ

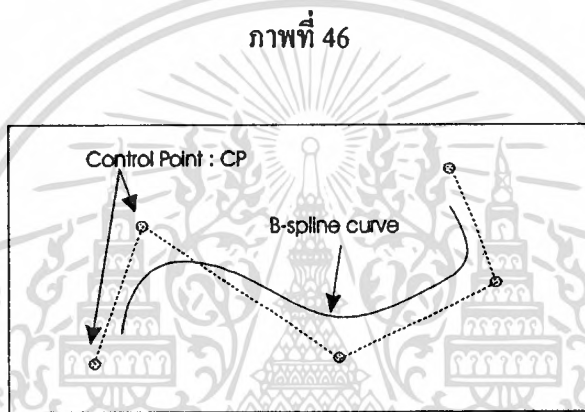
จากบทที่ 4 ได้กล่าวถึง ฟังก์ชันเวฟเล็ดที่มีได้หลายรูปแบบ ซึ่งแต่ละแบบจะให้ผลของการทำ WT ที่แตกต่างกันออกไป การจะเลือกใช้ฟังก์ชันเวฟเล็ดชนิดใด จะต้องทำการพิจารณาเลือกฟังก์ชันสเกลลิ่งที่จะนำมาใช้เป็นฟังก์ชันองค์ประกอบพื้นฐานของสัญญาณที่จะวิเคราะห์เสียก่อน สัญญาณที่จะนำมาวิเคราะห์สามารถพิจารณาให้มีฟังก์ชันสเกลลิ่งแบบใดนั้น จะขึ้นอยู่กับความจำเป็นสำหรับการประยุกต์ใช้งานนั้นๆ ด้วย ตัวอย่างเช่น ถ้าเป็นสัญญาณที่ไม่จำเป็นต้องพิจารณาถึงความต่อเนื่องของข้อมูลก็สามารถใช้เวฟเล็ดแบบ Haar เป็นฟังก์ชันพื้นฐานในการทำ WT ซึ่งก็จะทำให้ง่ายต่อการคำนวณ แต่ถ้าต้องการความต่อเนื่องของข้อมูลหลังจากการทรานส์ฟอร์ม ก็อาจจะใช้ฟังก์ชันเวฟเล็ดที่ให้ความต่อเนื่องมากขึ้น เช่น เวฟเล็ดแบบ Daubechies เป็นต้น ในขณะที่เดียวกัน ถ้าทำการเลือกฟังก์ชันเวฟเล็ดที่มีลักษณะคล้ายกับส่วนประกอบย่อยๆ ของสัญญาณอินพุต ก็จะทำให้การแตกกระจายข้อมูลหรือการโปรเจกต์สัญญาณสามารถกระทำได้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น

จากจุดประสงค์ของงานวิจัยนี้ ได้นำเสนอการแก้ไขลักษณะของลายเส้น โดยใช้ขบวนการ WT ในการแตกกระจายลายเส้นออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆ ตามระดับความละเอียดที่ต้องการ จากความรู้ทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟฟิค ลายเส้นต่างๆ จะเกิดจากเส้นตรงย่อยๆ มาประกอบกัน ซึ่งเส้นโค้งย่อยๆ เหล่านี้จะเกิดจากฟังก์ชันย่อยพื้นฐานที่เรียกว่า ฟังก์ชันแบบ B-spline คู่กับค่าถ่วงน้ำหนัก [5][6] ดังนั้นจึงใช้ฟังก์ชัน B-spline เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน (Scaling function) ประกอบขึ้นมาเป็นลายเส้น และใช้ ฟังก์ชันสเกลลิ่งแบบ B-spline นี้ในการหาฟังก์ชันเวฟเล็ดแบบ B-spline เพื่อใช้ในการแตกกระจายสัญญาณต่อไป

ส่วนแรกของบทนี้จะอธิบายทฤษฎีพื้นฐานของการสร้างลายเส้นแบบ B-spline (B-spline curves) เพื่อชี้ให้เห็นถึงลักษณะของของฟังก์ชันแบบ B-spline ในส่วนที่สองจะเป็นการพิจารณาฟังก์ชันแบบ B-spline ในลักษณะของฟังก์ชันสเกลลิ่งที่มีการเลื่อนตำแหน่งและการสเกลในรูปแบบของ WT ซึ่งในส่วนนี้ก็จะรวมไปถึงการพิจารณาหาฟังก์ชันเวฟเล็ดแบบ B-spline และ Impulse response ที่จะใช้ในการแตกกระจายสัมประสิทธิ์ ในส่วนสุดท้ายจะเป็นตัวอย่างของการแตกกระจายข้อมูลโดยใช้ฟังก์ชันเวฟเล็ดแบบ B-spline

ลายเส้นแบบ B-spline

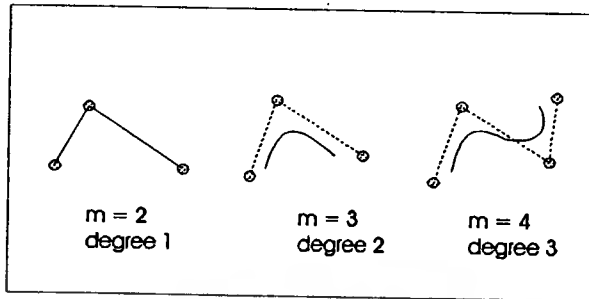
ลายเส้นแบบ B-spline เป็นลายเส้นที่เกิดจากเส้นโค้งย่อยๆมาประกอบกัน โดยลักษณะการโค้งของลายเส้นเหล่านี้จะถูกควบคุมโดยจุดควบคุม (Control Point : CP) หรือ จุดตำแหน่งยอด (Position vertices) [5][6] ดังแสดงในภาพที่ 46



แสดงลักษณะของการเกิดลายเส้นแบบ B-spline

เส้นโค้งย่อยๆเหล่านี้จะถูกควบคุมให้เกิดขึ้นภายในจุด CP ซึ่งจะใช้จำนวน CP เท่าไรนั้นจะขึ้นอยู่กับความต้องการให้ลายเส้นนั้นมีความต่อเนื่องหรือมีความราบเรียบของลายเส้นมากเท่าไร สมการของเส้นโค้งย่อยในแต่ละส่วนจะเป็นสมการพหุนามดีกรี n ซึ่งค่าของ n นี้จะเป็นค่าแสดงถึงระดับความต่อเนื่องของเส้นโค้งย่อยเหล่านี้ และจะใช้แสดงค่าลำดับของฟังก์ชันแบบ B-spline ที่จะใช้เป็นฟังก์ชันพื้นฐานในการกำเนิดส่วนโค้งย่อยโดยการคูณกับค่าถ่วงน้ำหนักของจุด CP เช่น ที่ดีกรี $n = 3$ ลำดับของฟังก์ชันแบบ B-spline จะเท่ากับ $m = n + 1 = 4$ ซึ่งจะให้ส่วนโค้งย่อยที่มีความต่อเนื่องถึงระดับที่สอง ($C^{m-2} = C^2$) หมายความว่าถ้าทำการหาค่าอนุพันธ์สมการเส้นโค้งเพื่อตรวจสอบความต่อเนื่องของลายเส้นจะทำการหาค่าอนุพันธ์ได้เพียงสองครั้งเท่านั้น และพารามิเตอร์ m จะเป็นค่าแสดงถึงจำนวนของ CP ที่จะเป็นตัวควบคุมในการสร้างส่วนโค้งย่อย สิ่งต่างๆที่กล่าวมาเหล่านี้จะแสดงให้เห็นในภาพที่ 47

ภาพที่ 47



แสดงลักษณะของการเกิดเส้นโค้งย่อยๆที่ระดับ m ต่างๆกัน

จากหลักการพื้นฐานที่กล่าวมา สามารถเขียนเป็นสมการของหลายเส้นแบบ B-spline ได้ดังสมการที่ (5.1)

$$P(t) = \sum_{i=1}^{k+1} B_i N_{i,m}(t) \quad ; \quad t_{\min} \leq t < t_{\max}, \quad 2 \leq m \leq k+1 \quad (5.1)$$

โดยที่ $P(t)$ เป็นสมการหลายเส้นใดๆ ที่เกิดขึ้นบนแกนอ้างอิง t

B_i เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดยอด หรือจุด CP จำนวน $k+1$ จุด สังเกตว่าถ้าใช้ฟังก์ชัน B-spline ลำดับที่ m จะต้องมีจุด CP อย่างน้อย m จุดเสมอในการสร้างหลายเส้น

$N_{i,m}$ เป็นฟังก์ชันแบบ B-spline ลำดับที่ m ซึ่งเป็นสมการโพลิโนเมียลดีกรี $m-1$

ฟังก์ชัน $N_{i,m}(t)$ ถูกกำหนดจากสูตร Cox-deBoor recursive [5][6] แสดงดังสมการที่ (5.2)

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (5.2 \text{ ก})$$

$$N_{i,m}(t) = \frac{(t-x_i)N_{i,m-1}(t)}{x_{i+m-1}-x_i} + \frac{(x_{i+m}-t)N_{i+1,m-1}(t)}{x_{i+m}-x_{i+1}} \quad (5.2 \text{ ข})$$

พารามิเตอร์ในสมการที่ (5.2) จะมีข้อกำหนดดังนี้

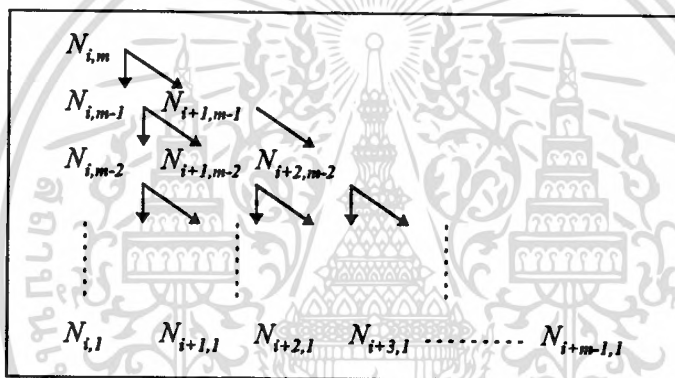
- x_i จะเป็นสมาชิกในเซตของจุดควบคุมตำแหน่ง (Knot vector) ของการเกิดฟังก์ชัน B-spline ซึ่ง $x_i \leq x_{i+1}$ เสมอ เรียกจุด x_i ว่าเป็น Knot ลำดับที่ i

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- ι เป็นแกนวัดเชิงการเกิดลายเส้น ที่มีการเปลี่ยนแปลงจาก $\iota_{min} \leq \iota \leq \iota_{max}$ โดย ι_{min} เป็นค่าที่น้อยที่สุดใน Knot vector และ ι_{max} จะเป็นค่าที่มากที่สุด ใน Knot vector
- กำหนดให้ 0/0 เท่ากับ "0" เสมอ

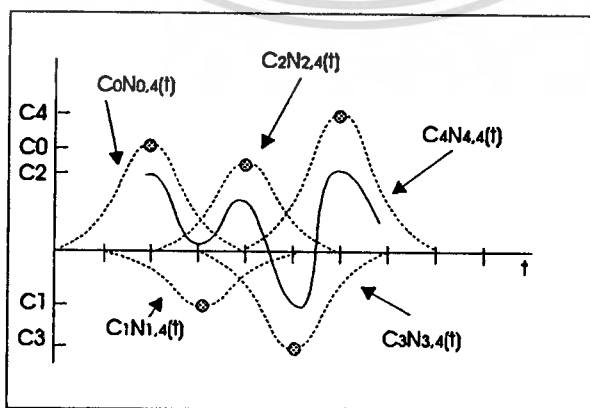
จากสมการที่ (5.2) จะเห็นว่าลักษณะของการเกิด ฟังก์ชัน B-spline ที่ลำดับ m ใดๆ จะพิจารณาจาก $N_{i,m-1}(\iota)$ ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบการทำซ้ำ (Recursive) ต่อกันไปเรื่อยๆ และสามารถเขียนเป็นภาพแผนภูมิได้ดังภาพที่ 48

ภาพที่ 48



แสดงลักษณะของการหา $N_{i,m}(\iota)$ แบบการทำซ้ำ

ภาพที่ 49

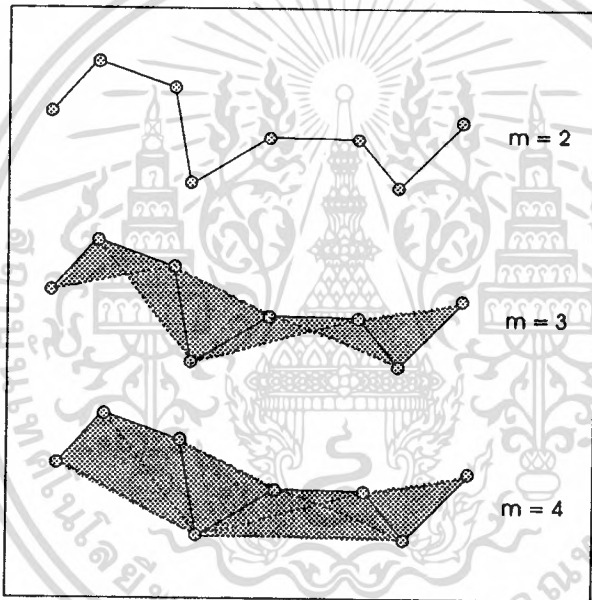


แสดงลักษณะของการเกิดลายเส้น B-spline จากฟังก์ชัน B-spline ลำดับที่ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในภาพที่ 49 แสดงให้เห็นถึงลักษณะการเกิดลายเส้น B-spline ซึ่งเกิดจากค่าน้ำหนักของจุดควบคุม CP ใน B , คูณกับฟังก์ชัน B-spline ที่ตำแหน่งต่างๆบนแกนอ้างอิง t ตามสมการที่ 5.1 ซึ่งจากภาพที่ 49 นี้ จะเห็นว่าลายเส้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้โดยการเปลี่ยนค่าของ CP หรือทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการเกิดของฟังก์ชัน B-spline ซึ่งเป็นการเปลี่ยนรูปแบบภายในของ Knot vector โดยจะกล่าวรายละเอียดในหัวข้อต่อไป

ภาพที่ 50



แสดงลักษณะพื้นที่ด้านใน (Convex hull) ของการเกิดส่วนโค้งที่ลำดับ m ต่างๆกัน

เนื่องจากสิ่งสำคัญในการสร้างลายเส้นคือ ฟังก์ชัน B-spline ดังนั้นจะต้องทราบคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

- 1) ผลรวมทางด้านเรขาคณิตของฟังก์ชัน B-spline ลำดับ m ใดๆทุกฟังก์ชัน จะมีค่าเท่ากับหนึ่งเสมอ

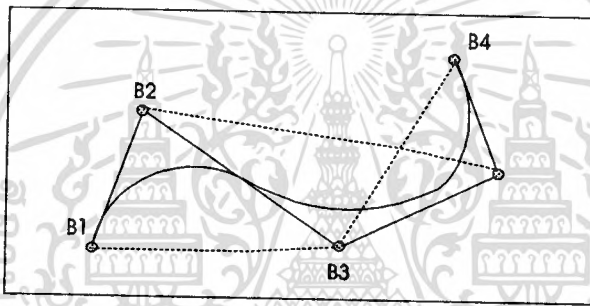
$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,m}(t) = 1 \quad (5.3)$$

- 2) ฟังก์ชัน B-spline จะไม่มีค่าเป็นลบ นั่นคือ $N_{i,m}(t) \geq 0$ เสมอ
- 3) ฟังก์ชัน B-spline ที่ $m = 1$ แต่ละตำแหน่งจะมีค่ามากที่สุดเท่ากับหนึ่งเสมอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 4) ลำดับของ m จะเป็นตัวกำหนดจำนวนของจุดควบคุม CP และจำนวนของ Knot ที่จะในการสร้างเป็นส่วนประกอบโค้งย่อยๆ
- 5) แนวของลายเส้นจะถูกควบคุมด้วยแนวการเปลี่ยนแปลงของจุด CP ในเมตริกซ์ B_i
- 6) การทรานส์ฟอร์มต่างๆ เช่นการหมุนภาพ การเพิ่มลดขนาดภาพ สามารถกระทำกับลายเส้นแบบ B-spline ได้ โดยทำการทรานส์ฟอร์มเซตของจุดควบคุม CP เหล่านี้
- 7) ส่วนประกอบโค้งย่อยๆจะเกิดขึ้นพื้นที่ด้านใน (Convex hull) ระหว่างจุด CP ที่ใช้พิจารณาส่วนประกอบโค้งย่อยๆ ดังแสดงในภาพที่ 50

ภาพที่ 51



แสดงลักษณะของการเกิดเส้นโค้งในพื้นที่ด้านในของ CP 4 จุด ที่ $m = 3$

ภาพที่ 51 แสดงลักษณะของลายเส้นโค้งที่เกิดขึ้นภายในพื้นที่ด้านในของจุดยอด CP จำนวน 4 จุด จากสมการที่ (5.2) จะเห็นว่าฟังก์ชันพื้นฐาน B-spline จะมีตำแหน่งอ้างอิงการเกิดตามแกน r ซึ่งค่าต่างๆในแกน r จะเป็นค่าของ Knot vector ที่มีค่าน้อยที่สุดถึงค่ามากที่สุด ซึ่งการจัดเรียงของค่า Knot ภายใน Knot vector จะเป็นตัวบอกตำแหน่งการเกิดของฟังก์ชัน B-spline บนแกน r ดังนั้นลักษณะการจัดเรียงหรือการเปลี่ยนแปลงค่าภายใน Knot vector จะมีผลต่อลักษณะของลายเส้น ซึ่งรูปแบบของ Knot vector จะมีอยู่ด้วยกัน 3 แบบ คือ

1) Uniform Knot Vector

จะมี Knot vector ที่มีการเพิ่มของค่า Knot ในรูปแบบที่แน่นอน เช่น

$$[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4], [-0.2 \ -0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0.2]$$

โดยปกติแล้วค่า Knot เริ่มต้นจะเท่ากับศูนย์และจะเพิ่มค่าขึ้นครั้งละหนึ่ง ในบางครั้งอาจพิจารณาถึงค่า Knot เป็นแบบ Normalize ซึ่งจะมีค่าสูงสุดต่ำสุดอยู่ระหว่าง "0" กับ "1" เช่น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$[0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1]$$

ลักษณะของ Uniform Knot vector จะให้ฟังก์ชัน B-spline ที่มีลักษณะแบบ Periodic uniform ซึ่งจะเป็นดังสมการที่ (5.4)

$$N_{i,m}(t) = N_{i-1,m}(t-1) = N_{i+1,m}(t+1) \quad (5.4)$$

สมการที่ (5.4) จะหมายถึงฟังก์ชัน B-spline ที่ตำแหน่ง i ใดๆ ก็มีลักษณะเหมือนกับการเลื่อนตำแหน่งของ $N_{i,m}(t)$ ไปที่ตำแหน่งต่าง ๆ นั้นเองดังแสดงในตัวอย่างที่ 5.1 และในภาพที่ 52

ตัวอย่างที่ 5.1

ทำการคำนวณหาฟังก์ชัน B-spline ลำดับที่ 3 ($N_{i,3}(t) : m=3$) โดยให้มีจำนวนของ $N_{i,3}(t)$ ทั้งหมด 4 ฟังก์ชัน แสดงว่า $k+1 = 4$ และ $i = 1, 2, 3, 4$ ดังนั้นสามารถเขียนแผนภูมิการทำซ้ำได้ดังนี้



พิจารณาค่าภายใน Knot vector

สังเกตว่าฟังก์ชัน B-spline ที่ลำดับ $m = 1$ มีจำนวนฟังก์ชันทั้งหมด 6 ตัว ซึ่งแสดงว่า $N_{1,1}$ อยู่ระหว่าง $x_1 \leq t < x_2$ และ $N_{6,1}$ อยู่ระหว่าง $x_6 \leq t < x_7$ ดังนั้น Knot vector จะเริ่มจาก "0" ถึง "6"

$$\text{Knot vector} = [\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}]$$

$$t_{\min} = \text{Min}(\text{Knot vector}) = 0 ; t_{\max} = \text{Max}(\text{Knot vector}) = 6$$

$$\text{พารามิเตอร์ } t : t_{\min} \leq t \leq t_{\max} : 0 \leq t \leq 6$$

พิจารณาจากสมการที่ (5.2 ก) จะสามารถเขียนลักษณะฟังก์ชัน $N_{i,1}(t)$ ที่ $i = 1$ ถึง 6 ได้ดังแสดงในภาพที่ (52 ก)

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

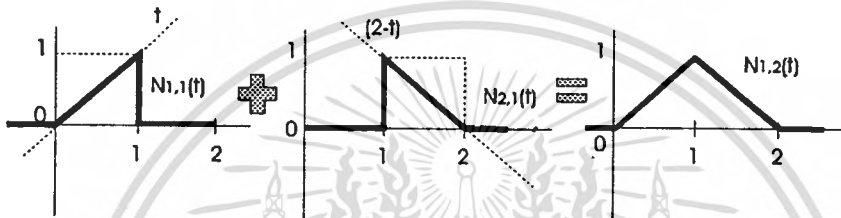
สังเกตว่า ขอบเขตของฟังก์ชัน B-spline $m = 1$ จะเท่ากับ $(0,1]$ และฟังก์ชันจะทำการเลื่อนตำแหน่งครึ่งละช่วงของค่า Knot

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณี $m = 2$

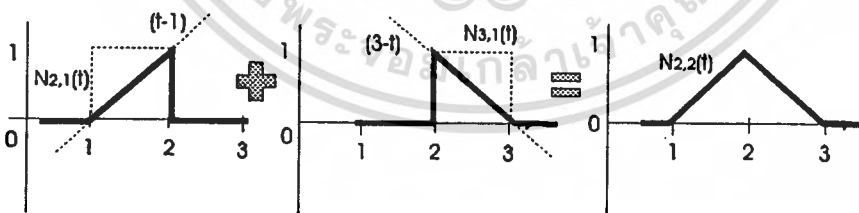
$i = 1$

$$\begin{aligned} N_{1,2}(t) &= \frac{(t-x_1)N_{1,1}(t)}{x_2-x_1} + \frac{(x_3-t)N_{2,1}(t)}{x_3-x_2} \\ &= \frac{(t)N_{1,1}(t)}{1} + \frac{(2-t)N_{2,1}(t)}{1} \\ &= \begin{cases} t & ; 0 \leq t < 1 \\ 2-t & ; 1 \leq t < 2 \end{cases} \end{aligned}$$



$i = 2$

$$\begin{aligned} N_{2,2}(t) &= \frac{(t-x_2)N_{2,1}(t)}{x_3-x_2} + \frac{(x_4-t)N_{3,1}(t)}{x_4-x_3} \\ &= \frac{(t-1)N_{2,1}(t)}{1} + \frac{(3-t)N_{3,1}(t)}{1} \\ &= \begin{cases} (t-1) & ; 1 \leq t < 2 \\ (3-t) & ; 2 \leq t < 3 \end{cases} \end{aligned}$$



ในกรณี $N_{i,2}(t)$ ตัวอื่นๆ ก็พิจารณาเช่นเดียวกัน ซึ่งก็จะเป็นลักษณะดังภาพที่ 52 ข)

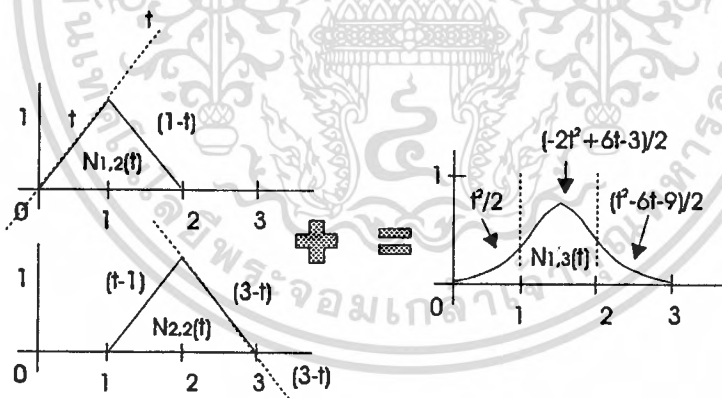
สังเกตว่า ขอบเขตของ B-spline basis function $m = 2$ จะเปลี่ยนไปมีค่าเท่ากับ $(0,2]$ และฟังก์ชันยังคงเลื่อนตำแหน่งไปครึ่งละหนึ่งของค่า Knot

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณี $m = 3$

$i=1$

$$\begin{aligned}
 N_{1,3}(t) &= \frac{(t-x_1)N_{1,2}(t)}{x_3-x_1} + \frac{(x_4-t)N_{2,2}(t)}{x_4-x_2} \\
 &= \frac{(t-0)N_{1,2}(t)}{2} + \frac{(3-t)N_{2,2}(t)}{2} \\
 &= \begin{cases} \frac{t \cdot t}{2} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{t \cdot (2-t)}{2} + \frac{(3-t) \cdot (t-1)}{2} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{(3-t) \cdot (3-t)}{2} & 2 \leq t < 3 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3) & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(t^2 - 6t + 9) & 2 \leq t < 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$



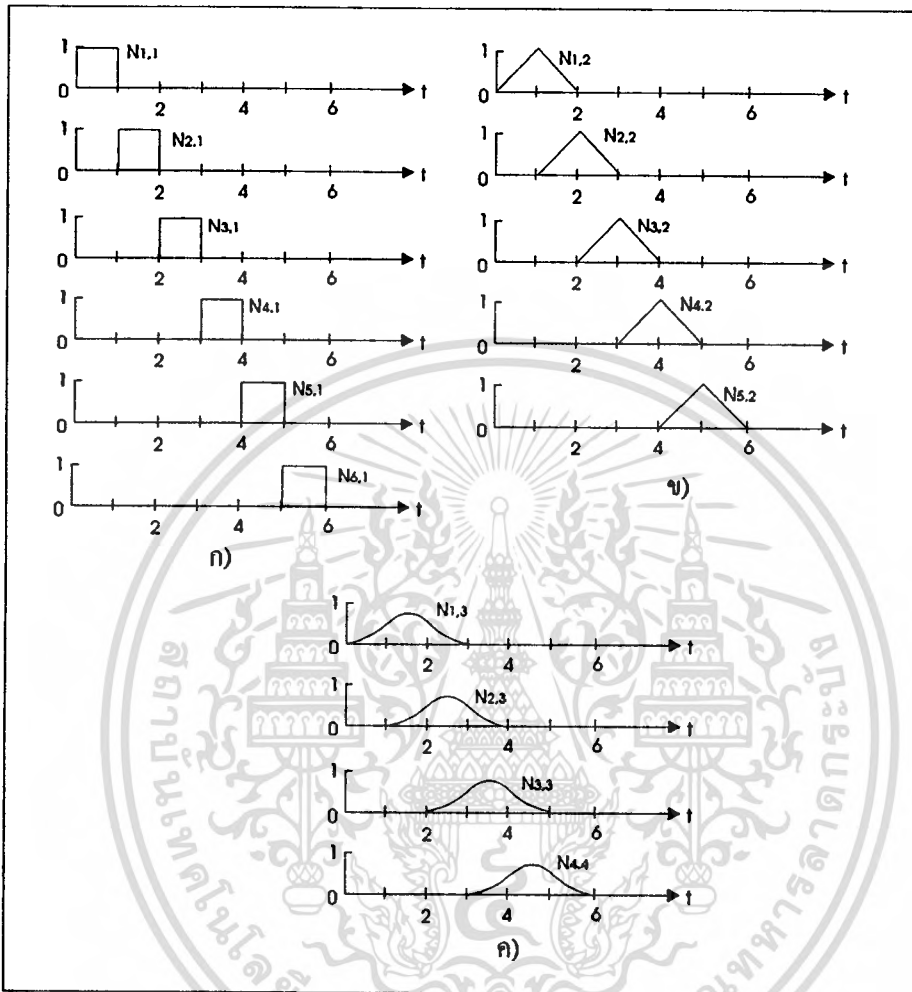
ในกรณี $N_{i,3}(t)$ ตัวอื่นๆ ก็พิจารณาเช่นเดียวกัน ซึ่งก็จะเป็นลักษณะดังภาพที่ 5.7 ค)

สังเกตว่า ขอบเขตของฟังก์ชัน B-spline ที่ลำดับ $m = 3$ จะเปลี่ยนไปมีค่าเท่ากับ $(0,3]$ และฟังก์ชันยังคงเลื่อนตำแหน่งไปครั้งละหนึ่งช่วงของค่า Knot เช่นเดิม ดังนั้นจะสามารถกำหนดขอบเขตความกว้างของฟังก์ชัน B-spline ที่ลำดับ m ใดๆ ได้เป็น

$$\text{Compact support of } N_{i,m}(t) = (0,m] \quad (5.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพที่ 52



แสดงลักษณะของ $N_{i,j}(t)$ แบบ Uniform Knot vector เมื่อ $0 \leq t \leq 6$

ตัวอย่างที่ 5.2

ต้องการสร้างสายเส้นโค้งมีจุดควบคุมแนวของสายเส้น 5 จุด คือ $B_i = [1 \ 5 \ -2 \ 3 \ -1]$ โดยใช้ฟังก์ชัน B-spline ลำดับที่ $m = 3$ ในตัวอย่างที่ 5.1

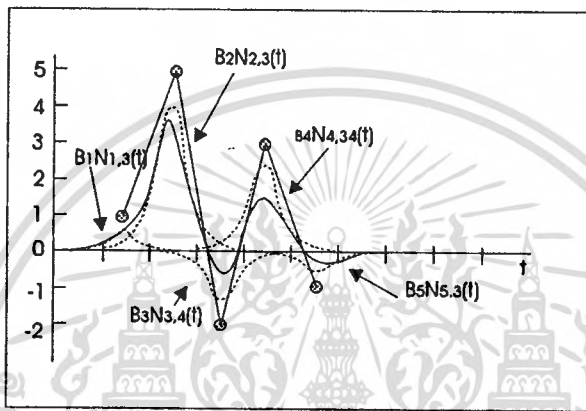
จากสมการ
$$P(t) = \sum_{i=1}^{k+1} B_i N_{i,m}(t)$$

- B_i เป็นเวกเตอร์ของจุดยอด หรือเวกเตอร์ของ CP เท่ากับ $[1 \ 5 \ -2 \ 3 \ -1]$
- ช่วงความกว้างของ $N_{i,3}(t)$ แต่ละฟังก์ชันเท่ากับ $(0,3]$ และมีฟังก์ชัน 5 ฟังก์ชันตามจำนวนจุดควบคุม นั่นคือ $i = 1, 2, 3, 4$ แต่ละฟังก์ชันจะห่างกันหนึ่งช่วงของ Knot
- Knot vector = $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$; $0 \leq t < 7$

ดังนั้นจะได้สมการลายเส้นบนแกนอ้างอิง t ดังสมการข้างล่างนี้

$$\begin{aligned}
 P(t) &= B_1 N_{1,3}(t) + B_2 N_{2,3}(t) + B_3 N_{3,3}(t) + B_4 N_{4,3}(t) + B_5 N_{5,3}(t) \\
 &= 1 \times N_{1,3}(t) + 5 \times N_{2,3}(t) + -2 \times N_{3,3}(t) + 3 \times N_{4,3}(t) + 1 \times N_{5,3}(t)
 \end{aligned}$$

ภาพที่ 53



แสดงลักษณะของการเกิดลายเส้น B-spline ในตัวอย่างที่ 5.2

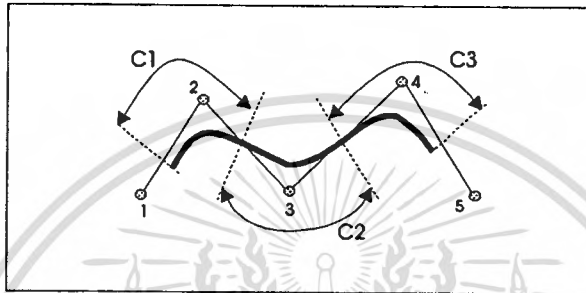
สังเกตว่าเนื่องจาก $N_{i,3}(t)$ แต่ละเทอมเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นเมื่อนำค่าน้ำหนัก CP ไปคูณแต่ละฟังก์ชัน ก็จะได้เป็นค่าต่อเนื่องด้วย จึงเกิดเป็นลายเส้นที่ต่อเนื่องบนแกนอ้างอิง t นั้นเอง ในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์จำเป็นต้องกำหนดค่าแอมพลิจูดค่าของ $N_{i,3}(t)$ ดังนั้นค่าน้ำหนัก CP จะต้องคูณกับค่าทุกค่าในแอมพลิจูดค่าของ $N_{i,3}(t)$ ซึ่งก็จะให้ผลคล้ายกับการคูณฟังก์ชันต่อเนื่อง $N_{i,3}(t)$ โดยที่ความละเอียดของการคำนวณก็จะขึ้นอยู่กับจำนวนแอมพลิจูดค่าในแต่ละ $N_{i,3}(t)$ นั้นเอง ซึ่งการกำหนดแอมพลิจูดค่านี้นี้จะนำไปใช้ในการสร้างลายเส้นในงานวิจัยนี้

จากภาพที่ 53 จะเห็นว่า ที่จุดปลายของลายเส้นจะไม่บรรจบกับจุดปลายของตำแหน่ง CP สุดท้าย เนื่องจากที่บริเวณจุดปลายทั้งสองจะไม่สามารถพิจารณาความสัมพันธ์กับจุดข้างเคียงได้ ให้พิจารณาในภาพที่ 54 จะสังเกตเห็นว่า $N_{i,3}(t)$ จะทำให้เกิดโค้งอยู่ด้านในของจุด 3 จุด

- โค้ง C_1 จะเกิดจากจุดน้ำหนัก จุดที่ 1,2,3
- โค้ง C_2 จะเกิดจากจุดน้ำหนัก จุดที่ 2,3,4
- โค้ง C_3 จะเกิดจากจุดน้ำหนัก จุดที่ 3,4,5

สังเกตว่ารอยต่อระหว่างโค้ง C_1, C_2 จะอาศัยความสัมพันธ์ของจุดที่ใกล้กัน (2,3) ในขณะที่โค้ง C_2 จะไม่สามารถหาความสัมพันธ์กับโค้งก่อนหน้านี้ได้ จึงทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่องบริเวณจุดปลายนั่นเอง

ภาพที่ 54



แสดงความสัมพันธ์ของรอยต่อของส่วนประกอบเส้นโค้งย่อยของ $N_{i,3}(t)$

2) Open Knot Vector

รูปแบบ Knot vector แบบนี้จะเป็นที่นิยมกันมาก เพราะสามารถแก้ปัญหาความไม่ต่อเนื่องที่จุดปลายของลายเส้นได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้รูปแบบของ Knot vector แบบนี้ในการพิจารณาลักษณะของฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ต

วิธีการแก้ปัญหาความไม่ต่อเนื่องบริเวณจุดปลาย กระทำได้โดยการเติมจุด Knot ค่าเดิมซ้ำลงไปทั้งจุดปลายทั้งสองด้านตามลำดับของฟังก์ชัน B-spline ที่ใช้ในการสร้างลายเส้น ดังเช่น

$$m = 2 \quad [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$$

$$m = 3 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$m = 4 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$$

หรือพิจารณาในกรณี Normalize ให้มีค่าอยู่ระหว่าง "0" กับ "1" จะได้ว่า

$$m = 2 \quad [0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1]$$

$$m = 3 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$m = 4 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

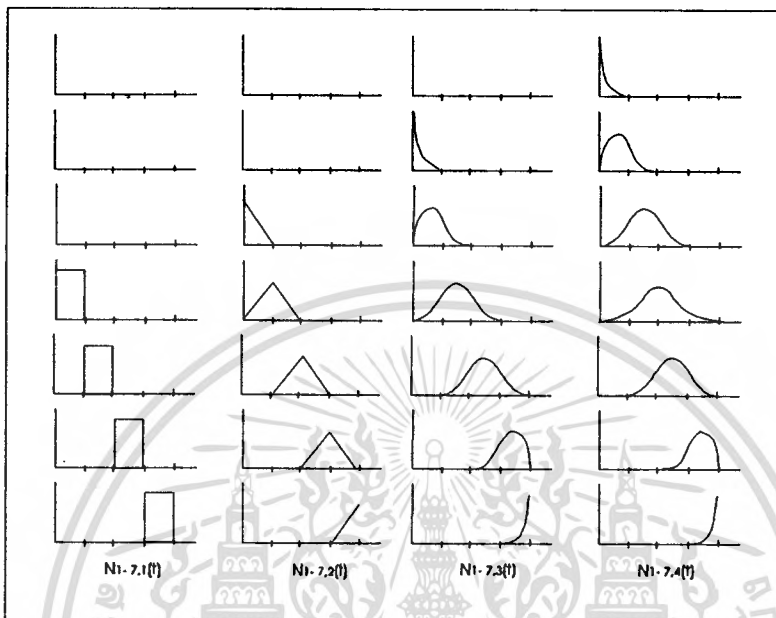
$$x_i = 0 \quad ; 1 \leq i \leq m$$

$$x_i = i-m \quad ; m+1 \leq i \leq k+1$$

$$x_i = k-m+2 \quad ; k+2 \leq i \leq k+m+1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพที่ 55



แสดงลักษณะฟังก์ชัน B-spline ลำดับที่ $m = 4$; $i = 1-7$ แบบ Open Knot vector

ลักษณะของฟังก์ชัน B-spline ในภาพที่ 55 จะหาได้โดยใช้วิธีการเดียวกับตัวอย่างที่ 5.1 ความแตกต่างระหว่าง $N_{i,m}(t)$ แบบ Open กับแบบ Uniform Knot vector นั้นคือ เมื่อมีจำนวนจุดควบคุมใน B , เท่ากัน แบบ Open จะใช้จำนวนของฟังก์ชัน $N_{i,m}(t)$ มากกว่าแบบ Uniform และลักษณะของฟังก์ชันจะไม่เป็นแบบ Periodic uniform เนื่องจากที่จุดปลายของ Knot ฟังก์ชันจะมีลักษณะเปลี่ยนไปจากปกติ แต่การเลื่อนตำแหน่งยังคงเลื่อนไปครั้งละหนึ่ง Knot เหมือนเดิม ซึ่งที่จุดปลายก็เสมือนมีการเลื่อนตำแหน่งแต่เป็นค่าที่ซ้ำกันนั่นเอง

3) Non-uniform Knot Vector

เป็นการกำหนด Knot vector ที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าภายในของ Knot ที่มีรูปแบบไม่แน่นอน ลักษณะของการเพิ่มค่า Knot เป็นแบบอิสระ ดังเช่น

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$$

$$[0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4]$$

$$[0 \ 0.28 \ 0.5 \ 0.72 \ 1]$$

ซึ่งในที่นี้จะ ไม่กล่าวในรายละเอียด เนื่องจากไม่มีส่วนเกี่ยวข้องกับหัวข้อวิทยานิพนธ์นี้ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์หรือการเขียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น มิใช่ผู้จัดทำเพื่อเผยแพร่เชิงพาณิชย์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การสร้างภาพลายเส้นด้วยข้อมูล 2 มิติของพิกัด xy

จากตัวอย่างที่ 5.2 และสมการที่ (5.1) จะเห็นว่าลายเส้นใดๆ จะเกิดจากค่าน้ำหนัก Control Point ซึ่งเป็นค่าในเวกเตอร์ตำแหน่ง B_i คูณกับ $N_{i,m}(t)$ ในภาพที่ 49 จะแสดงให้เห็นว่าลักษณะของลายเส้นจะถูกสร้างจากข้อมูลในพิกัดเดียวที่สัมพันธ์กับแกนอ้างอิง t ซึ่งแกน t นี้จะใช้เป็นเพียงการแสดงตำแหน่งการเกิดของ $N_{i,m}(t)$ เท่านั้น จากสมการที่ (5.1) จะสามารถเขียนให้อยู่ในลักษณะของเมตริกซ์ได้เป็น

$$P(t) = [P] = [B_i][N_{i,m}(t)] \quad (5.6)$$

$[B_i]$ = คอลัมน์เมตริกซ์ ขนาด $k+1$ คอลัมน์ โดย $k+1$ เป็นจำนวนของจุด CP

$[N_{i,m}(t)]$ = เมตริกซ์ $k+1$ แถว c คอลัมน์ ที่เก็บข้อมูลส่วนของฟังก์ชัน B-spline ที่ i ต่างๆ

- $k+1$ = จำนวนฟังก์ชัน B-spline ซึ่งจะเท่ากับจำนวนของจุด CP

- c = จำนวนช่วงบนแกน t จาก t_{min} ถึง t_{max} คูณด้วยจำนวนข้อมูลส่วนในแต่ละช่วง

$[P]$ = คอลัมน์เมตริกซ์ขนาด c คอลัมน์ ซึ่งจะเก็บค่าคู่ลำดับของลายเส้นตามแนวแกน t

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (5.1),(5.6) สามารถนำไปสร้างเป็นลายเส้นที่อยู่บนระนาบ xy ได้โดยกำหนดให้จุด CP ในเวกเตอร์ตำแหน่ง B_i ระบุเป็นพิกัด xy จำนวน n คู่ลำดับ

$$B_i = \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} ; P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,m}(t)$$

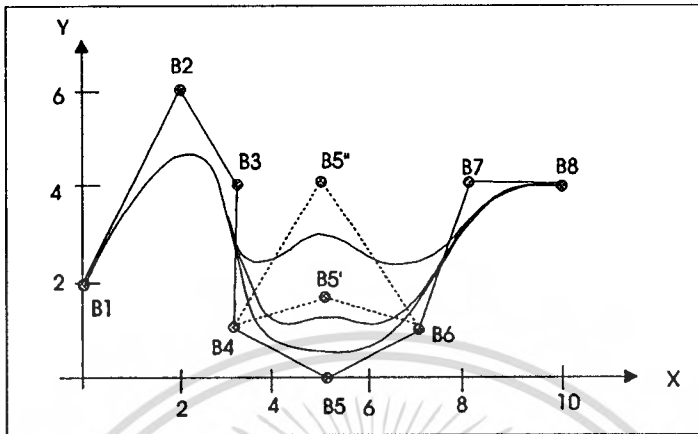
$$[P(t)] = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} * [N_{i,m}] \quad (5.7)$$

$x(n), y(n)$ เป็นคู่ลำดับของจุด CP ที่พิกัด xy ในขณะที่ $x(t), y(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ลำดับในพิกัด xy ที่มีความต่อเนื่องตามแกน t ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างจุด $x(t), y(t)$ ที่ตำแหน่ง t ใดๆจะทำให้เกิดเป็นลายเส้นขึ้นในระนาบ xy ดังแสดงในตัวอย่างที่ 5.3 และในภาพที่ 56 จะแสดงภาพลักษณะลายเส้นในระนาบ xy

ตัวอย่างที่ 5.3

คำนวณ Open B-spline curves ที่มีตำแหน่งจุดยอดดังนี้ $B_1[1 \ 1], B_2[2 \ 3], B_3[4 \ 3], B_4[3 \ 1]$ โดยใช้ B-spline ลำดับที่ 4

ภาพที่ 57



แสดงลักษณะของผลการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ CP ในระนาบ xy

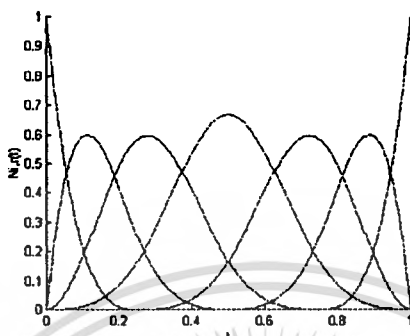
ฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ต แบบ B-spline

จากที่อธิบายมาแล้วในบทที่ 2 3 และ 4 ว่า สัญญาณใดๆจะประกอบขึ้นด้วยสัญญาณพื้นฐานย่อยๆที่เรียกว่า ฟังก์ชันสเกลลิง มารวมกัน ลักษณะที่สำคัญของฟังก์ชันสเกลลิงก็คือ การเลื่อนตำแหน่ง และเปลี่ยนความถี่หรือเปลี่ยนสเกล (การลดหรือการขยายขอบเขตของสัญญาณได้) ซึ่งในกรณีของ WT จะกำหนดให้การเลื่อนตำแหน่งและการสเกลถูกกระทำในลักษณะที่ละ Octave : 2^j โดยที่ j เป็นค่าแสดงระดับความละเอียดของสัญญาณ ซึ่งบอกถึงจำนวนของฟังก์ชันสเกลลิง ที่ใช้ประมาณสัญญาณนั้นๆด้วย

จากลักษณะสมบัติพื้นฐานข้างต้น ฟังก์ชันแบบ B-spline สามารถทำการเลื่อนตำแหน่งหรือเปลี่ยนสเกลในลักษณะของ Octave ได้เช่นกัน โดยทำการพิจารณาให้ Knot vector มีค่าอยู่ระหว่าง "0" กับ "1" และให้ช่วงของการเพิ่มค่าของ Knot มีการเพิ่มในลักษณะของ $1/2^j$ ดังนั้นถ้าค่า j มากขึ้นทำให้จำนวนช่วงของ Knot มากขึ้น ทำให้เกิดฟังก์ชันแบบ B-spline ในช่วงของ $0 \leq t \leq 1$ มากขึ้นด้วย ในขณะที่เดียวกันเนื่องจากค่าช่วงของ Knot แคบลง แต่ฟังก์ชัน B-spline จะมีขอบเขตครอบคลุมจำนวนช่วง Knot เท่าเดิม นั้นแสดงว่า ฟังก์ชัน B-spline จะถูกสเกลให้มีขอบเขตเล็กลงด้วย เช่น ที่ $m = 3$ ฟังก์ชันแบบ B-spline จะครอบคลุม 3 ช่วงของจุด Knot เป็นต้น และมีการเลื่อนตำแหน่งไปครั้งละ $1/2^j$ ให้พิจารณาความแตกต่างในภาพที่ 58 และ 59

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพที่ 58



แสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงแบบ B-spline ลำดับที่ 4 ที่ระดับความละเอียด $j = 2$

ในงานวิจัยนี้ จะใช้ฟังก์ชันแบบ Cubic B-spline ซึ่งเป็น ฟังก์ชันแบบ B-spline ลำดับที่ 4 ($m=4$) เท่านั้น เนื่องจากผลของลายเส้นที่ได้จาก ฟังก์ชันแบบ B-spline ลำดับที่ 4 นี้จะมีความต่อเนื่องและความราบเรียบของลายเส้นที่ดีพอสมควรไม่หยามเกินไป และช่วงเวลาในการคำนวณก็เหมาะสม ซึ่งถ้าใช้ลำดับที่สูงขึ้นจะทำให้การคำนวณต้องใช้เวลามากขึ้น แต่จะให้ผลลัพธ์ที่ไม่ต่างกันมากนัก และลักษณะของ Knot vector ที่ใช้จะเป็นแบบ Open Knot vector เท่านั้น เพื่อให้เกิดความต่อเนื่องบริเวณจุดปลายของลายเส้นด้วย

จากข้อกำหนดที่กล่าวมาทำให้สามารถสรุปสูตรและสัญลักษณ์ต่างๆที่จะใช้ในการหา ลักษณะของ Knot vector และ จำนวนของ $N_{i,j}(t)$ ต่างๆได้ดังนี้

- j = ค่าแสดงระดับความละเอียดของลายเส้น (สัญลักษณ์ที่จะนำมาวิเคราะห์)
- $2^j + 4 - 1$ = จำนวนของฟังก์ชัน $N_{i,j}(t)$ และจำนวนจุด CP ที่ระดับความละเอียด j ใดๆ
- $1/2^j$ = ช่วงความกว้างระหว่าง Interior Knot
- Interior Knot = Knot ที่มีค่าไม่เท่ากับ "0" และ "1"
- Outside Knot = Knot ที่มีค่าเท่ากับ "0" และ "1"
- พารามิเตอร์ t : $t_{min} \leq t \leq t_{max}$: $0 \leq t \leq 1$ และมีการเพิ่มครั้งละ $1/2^j$
- m = ลำดับของ B-spline ซึ่งในที่นี้จะเท่ากับ 4
- $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ = สมาชิกของ Knot vector ซึ่งมีจำนวนเท่ากับ $2^j + 2(4) - 1$

$$x_i = 0 \quad ; 1 \leq i \leq 4$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_i = (i-4)/2^j \quad ; 5 \leq i \leq 2^j+4-1$$

$$x_i = 1 \quad ; 2^j+4 \leq i \leq 2^j+4+3$$

$$\text{Knot vector} = [\underset{\longleftarrow \text{Outside Knot}}{0 \ 0 \ 0 \ 0} \ \underset{\longleftarrow \text{Interior Knot}}{1/2 \ 2/2 \ 3/2 \ \dots \ (2^j-1)/2} \ \underset{\longrightarrow \text{Outside knot}}{1 \ 1 \ 1 \ 1}]$$

ตัวอย่างที่ 5.4

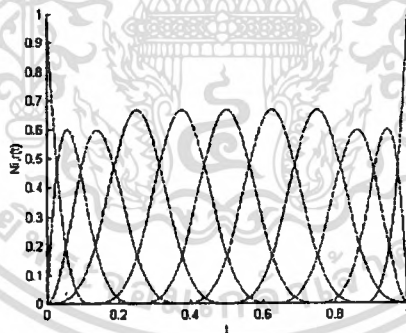
แสดงลักษณะของฟังก์ชันสเกลลิงแบบ B-spline เมื่อ $m = 4 ; j = 3$

$$\text{จำนวน } N_{i,j}(t) = 2^3 + 4 - 1 = 11$$

$$\text{Outside Knot "0"} = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [0] ; \text{Outside Knot "1"} = [x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}] = [1]$$

$$\text{Interior Knot} = [x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}] = 1/8 [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$$

ภาพที่ 59



แสดงลักษณะฟังก์ชันสเกลลิงแบบ B-spline ถ้า $m = 4 ; j = 3$ ในตัวอย่างที่ 5.4

จากภาพที่ 59 จะเห็นว่าจะมีจำนวนของฟังก์ชันสเกลลิงทั้งหมด 11 ฟังก์ชัน โดยอยู่ในช่วงขอบเขต $(0,1]$ หรืออาจกล่าวได้ว่าอยู่ในสเปซ $V_{[0,1]}^3$ ซึ่งแบ่งเป็นช่วงความกว้างละ $1/2^j = 1/2^3 = 1/8$ และฟังก์ชันจะมีการเลื่อนตำแหน่งไปครั้งละ $1/8$ ยกเว้นตรงจุดปลาย

ในส่วนต่อไปจะทำการตรวจสอบลักษณะสมบัติของฟังก์ชันแบบ B-spline ว่ามีลักษณะสมบัติเป็นฟังก์ชันสเกลลิง $\phi(t)$ ตามที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4. ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- $\phi(t)$ จะต้องมีขอบเขตช่วงเวลาของสัญญาณที่แน่นอน (Compact support)

$$\text{supp } N_m = [0, m]$$

- $\phi(t)$ จะต้องมีพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่งเสมอ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} N_m(t) dt = 1$$

- ผลของรวมทางเรขาคณิตของฟังก์ชันสเกลลิงทุกตำแหน่งมีพื้นที่เท่ากับหนึ่ง

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(t-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_m(t-k) = 1$$

- ผลรวมของสัมประสิทธิ์ที่ใช้แทนฟังก์ชันสเกลลิงต้องเท่ากับหนึ่ง

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_m(k) = 1$$

- จะต้องมีคุณสมบัติความเป็นเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกันของฟังก์ชันสเกลลิงในระดับความละเอียดเดียวกันที่ตำแหน่งต่างๆกัน

$$\langle \phi(t-l), \phi(t-k) \rangle = \delta_{lk}$$

$$\langle N_m(t-l), N_m(t-k) \rangle \neq \delta_{lk}$$

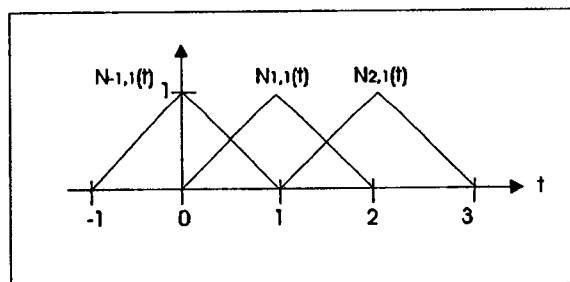
จะเห็นว่าฟังก์ชัน B-spline มีลักษณะสมบัติของฟังก์ชันสเกลลิงทุกข้อ ยกเว้นความเป็นเชิงตั้งฉาก (Orthogonality) เท่านั้น ลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉาก คือ $\phi(t)$ ที่ตำแหน่งเดียวกันเท่านั้นที่ให้ผลของ Inner product เท่ากับหนึ่ง ถ้าต่างตำแหน่งกันจะให้ผลลัพธ์เป็นศูนย์เสมอ

ให้พิจารณาตัวอย่างการทดสอบลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉากของ $N_{i,2}(t)$ โดยทำการทดสอบการ Inner product ระหว่าง $N_{1,2}(t)$ กับ $N_{1,2}(t)$ และ $N_{1,2}(t)$ กับ $N_{2,2}(t)$

$$\langle N_2(t), N_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} N_2(t) N_2(t) dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt = 2/3$$

$$\langle N_2(t), N_2(t-1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} N_2(t) N_2(t-1) dt = \int_1^2 (2-t)(t-1) dt = 1/6$$

ภาพที่ 60



แสดงลักษณะการซ้อนทับกันของฟังก์ชันที่ตำแหน่งใกล้เคียงของ $N_{i,2}(t)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากภาพที่ 60 จะเห็นว่า $N_{i,2}(t)$ ที่ตำแหน่งใดๆจะมีการซ้อนทับกับ $N_{i,2}(t)$ ที่อยู่ใกล้เคียงทั้งสองด้าน ดังนั้นเมื่อทำการตรวจสอบลักษณะเชิงตั้งฉากจะสามารถสรุปได้ว่า

$$\langle N_2(\cdot - l), N_2(\cdot - k) \rangle = \frac{2}{3} \delta_{k,l} + \frac{1}{6} \delta_{k,l+1} + \frac{1}{6} \delta_{k,l-1} \quad (5.8)$$

$$N_2(\cdot - i) = N_2(x - i) = N_{i,2}(x)$$

$N_2(\cdot - i)$ หมายถึงฟังก์ชัน $N_{i,2}(t)$ ที่เลื่อนไปยังตำแหน่ง i ใดๆ จากสมการที่ (5.8) หมายความว่า $N_{i,2}(t)$ ที่ตำแหน่ง k เมื่อทำการ Inner Product กับ $N_{i,2}(t)$ ที่ตำแหน่ง $l = k, l = k+1, l = k-1$ จะเท่ากับ $2/3$ และ $1/6$ ตามลำดับ แสดงว่าฟังก์ชันแบบ B-spline จะไม่มีลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉาก

ลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันสเกลลิ่งมีความสำคัญมาก เนื่องจากจะต้องใช้ในการโปรเจกชันสัญญาณเพื่อหาสัมประสิทธิ์ c_k ดังสมการข้างล่างนี้ การที่ฟังก์ชันสเกลลิ่งมีลักษณะเชิงตั้งฉากกันนั้นจะทำให้สัมประสิทธิ์ c_k ที่ตำแหน่งต่างๆแยกอิสระออกจากกัน หรืออาจกล่าวได้ว่าอยู่คนละมิติกันคล้ายกันค่านำหนักของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ประกอบขึ้นเป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$f_j(t) = \sum_k c_k' \phi_{j,k}(t)$$

$$\langle f_j(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \sum_k c_k' \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle$$

$$\langle f_j(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \{c_k'\}$$

ดังนั้นถ้าใช้ $N_m(t)$ เป็นฟังก์ชันสเกลลิ่งจะทำให้ไม่สามารถหา c_k ได้จากวิธีนี้ แต่ถ้าสามารถทำการหาฟังก์ชันใดๆที่มีลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉากกับฟังก์ชันสเกลลิ่ง ก็จะทำให้สามารถทำการหาสัมประสิทธิ์ c_k ได้เช่นกัน ฟังก์ชันลักษณะนี้จะเรียกว่า Dual Scaling basis function : $\tilde{\phi}_{j,k}(t)$ [1][7][8][11]

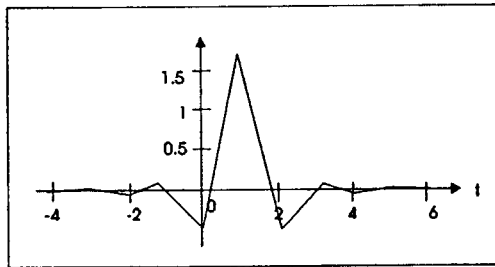
$$\langle f_j(t), \tilde{\phi}_{j,k}(t) \rangle = \sum_k c_k' \langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,k}(t) \rangle$$

$$\langle f_j(t), \tilde{\phi}_{j,k}(t) \rangle = \{c_k'\}$$

ดังนั้นในกรณีของฟังก์ชันสเกลลิ่งแบบ B-spline ก็จะใช้ $\tilde{N}_{i,m}'(t)$ ในการโปรเจกชันสัญญาณเพื่อหาสัมประสิทธิ์ c_k ในที่นี้จะไม่ขอกล่าวถึงวิธีการหา Dual function เนื่องจากต้องใช้คณิตศาสตร์ขั้นสูงในการวิเคราะห์ ซึ่งสามารถรายละเอียดได้ในเอกสารอ้างอิงที่ [1][7][8][11] ในที่นี้จะแสดงตัวอย่างให้เห็นถึงลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉากของ $\tilde{N}_{i,m}'(t)$ โดยยกตัวอย่างที่ลำดับที่ $m = 2$

$$\tilde{N}_{1,2}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{|k|} N_{1,2}(t-k) \quad (5.9)$$

ภาพที่ 61



แสดงลักษณะของ Dual B-spline scaling function ที่ลำดับ $m = 2$

พิจารณาทดสอบลักษณะเชิงตั้งฉากที่ตำแหน่งเดียวกันและที่ตำแหน่ง n ใดๆ

$$\langle \tilde{N}_{1,2}(t), N_{1,2}(t) \rangle, \langle \tilde{N}_{1,2}(t), N_{1,2}(t-n) \rangle$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}_{1,2}(t) N_{1,2}(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{|k|} N_{1,2}(t-k) N_{1,2}(t) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{|k|} \left(\frac{2}{3} \delta_{k,0} + \frac{1}{6} \delta_{k,1} + \frac{1}{6} \delta_{k,-1} \right) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{6}(\sqrt{3}-2) \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}_{1,2}(t) N_{1,2}(t-n) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{|k|} N_{1,2}(t-k) N_{1,2}(t-n) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{|k|} \left(\frac{2}{3} \delta_{k,n} + \frac{1}{6} \delta_{k,n+1} + \frac{1}{6} \delta_{k,n-1} \right) \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{n-1} \left[\frac{2}{3}(\sqrt{3}-2) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(\sqrt{3}-2)^2 \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะเห็นว่า Dual B-spline scaling function : $\tilde{N}_{i,m}^j(t)$ จะมีลักษณะเชิงตั้งฉากกับ ฟังก์ชันสเกลลิงแบบ B-spline : $N_{i,m}^j(t)$ ทุกตำแหน่งที่ n ใดๆ ซึ่งเรียกลักษณะสมบัตินี้ว่า Bi-orthogonal นั้นเอง

ถ้ากำหนดให้ $\psi(x)$ เป็นฟังก์ชันเวฟเล็ตแบบ B-spline และ $\tilde{\psi}(x)$ เป็นฟังก์ชันเวฟเล็ตแบบ Dual B-spline จะสามารถทำการหา $\psi(x)$ ได้จากสมการที่ 5.10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\psi_{N_{i,m}^0}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k N_{i,m}^1(2t-k) \quad (5.10)$$

$$N_{i,m}^0(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k N_{i,m}^1(2t-k) \quad (5.11)$$

จากสมการที่ (5.10) และ (5.11) ลำดับของ q และ p จะใช้ในการแตกฟังก์ชันสเกลลิง B-spline ที่ระดับ $j = 1$ ไปเป็นฟังก์ชันเวฟเล็ตแบบ B-spline (เวฟเล็ตแม่แบบ B-spline) และฟังก์ชันสเกลลิง B-spline ที่ระดับ $j = 0$ ตามลำดับ ดังนั้นถ้าสามารถทำการหาลำดับของ p และ q ได้ก็จะสามารถหาลักษณะของเวฟเล็ตแม่แบบ B-spline ได้จากสมการที่ (5.10)

การพิจารณาเมตริกซ์ A, B, P, Q เพื่อใช้ในการแตกกระจายและรวมสัญญาณ

กำหนดให้

- $\phi_k^j(t), \psi_k^j(t)$ เป็นฟังก์ชันสเกลลิงและเวฟเล็ต
- $\tilde{\phi}_k^j(t), \tilde{\psi}_k^j(t)$ เป็นฟังก์ชันแบบ Dual Scaling และ Dual Wavelet

จาก $V_{[0,1]}^j \subset V_{[0,1]}^{j+1}$ และ $W_{[0,1]}^j \subset V_{[0,1]}^{j+1}$ จะได้ว่า

$$\phi_k^j = \sum_{l=-m+1}^{2^{j+1}-1} p_{l,k}^j \phi_l^{j+1}(t) \quad (k = -m+1, \dots, 2^j - 1) \quad (5.12)$$

$$\psi_k^j = \sum_{l=-m+1}^{2^{j+1}-1} q_{l,k}^j \phi_l^{j+1}(t) \quad (k = -m+1, \dots, 2^j - m) \quad (5.13)$$

นำ $\tilde{\phi}_k^{j+1}(t)$ ไป Inner Product กับสมการที่ (5.12), (5.13)

$$p_{\tilde{k},k}^j = \langle \tilde{\phi}_{\tilde{k}}^{j+1}(t), \phi_k^j(t) \rangle; (\tilde{k} = -m+1, \dots, 2^{j+1}-1; k = -m+1, \dots, 2^j - 1) \quad (5.14)$$

$$q_{\tilde{k},k}^j = \langle \tilde{\phi}_{\tilde{k}}^{j+1}(t), \psi_k^j(t) \rangle; (\tilde{k} = -m+1, \dots, 2^{j+1}-1; k = -m+1, \dots, 2^j - m) \quad (5.15)$$

$$P^j = \left(p_{\tilde{k},k}^j \right)_{\substack{\tilde{k}=-m+1, \dots, 2^{j+1}-1 \\ k=-m+1, \dots, 2^j-1}} \quad (5.16)$$

$$Q^j = \left(q_{\tilde{k},k}^j \right)_{\substack{\tilde{k}=-m+1, \dots, 2^{j+1}-1 \\ k=-m+1, \dots, 2^j-m}} \quad (5.17)$$

จาก

$$f_{j+1} = f_j + g_j$$

$$\sum_{k=-m+1}^{2^{j+1}-1} c_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(t) = \sum_{k=-m+1}^{2^j-1} c_k^j \phi_k^j(t) + \sum_{k=-m+1}^{2^j-m} d_k^j \psi_k^j(t)$$

นำ $\tilde{\phi}_{\tilde{k}}^{j+1}(t); (\tilde{k} = -m+1, \dots, 2^{j+1}-1)$ ทำการ Inner Product ทั้งสองด้าน

$$c_{\tilde{k}}^{j+1} = \sum_{k=-m+1}^{2^j-1} c_k^j \langle \tilde{\phi}_{\tilde{k}}^{j+1}(t), \phi_k^j(t) \rangle + \sum_{k=-m+1}^{2^j-m} d_k^j \langle \tilde{\phi}_{\tilde{k}}^{j+1}(t), \psi_k^j(t) \rangle \quad (5.18)$$

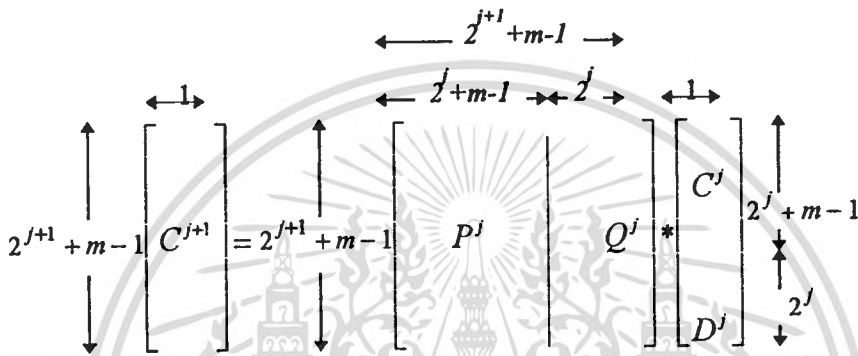
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ $\tilde{k}=-m+1$ สำหรับการใช้งานเพื่อ $\tilde{k}=-m+1$ เท่านั้น ไม่นอญญาตไหนไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (5.18),(5.14),(5.15) จะสามารถเขียนเป็นสมการการรวมกลับได้ดังนี้

$$C^j = [c_0^j, c_1^j, c_2^j, \dots, c_{2^j+m-2}^j]^T$$

$$C^{j+1} = P^j C^j + Q^j D^j; (j = j_0, \dots, N-1) \quad (5.19)$$

$$C^{j+1} = [P^j | Q^j] \begin{bmatrix} C^j \\ D^j \end{bmatrix} \quad (5.20)$$



สมการที่ (5.19) และ (5.20) เป็นสมการของการรวมกลับสัมประสิทธิ์สเกลลิงและเวฟเล็ตที่ระดับ j ไปเป็นสัมประสิทธิ์สเกลลิงที่ระดับ $j+1$ ซึ่งเป็นการรวมกลับสัญญาณ ค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (5.19) จะมีรายละเอียดดังนี้

- C^{j+1} = เป็นโวลุ่มเมตริกซ์สัมประสิทธิ์สเกลลิงของสัญญาณที่ระดับ $j+1$ ขนาด $2^{j+1} + m - 1 \times 1$ ในที่นี้จะหมายถึงเมตริกซ์ของจุดควบคุมในการสร้างลายเส้นที่ระดับความละเอียด $j+1$

- C^j = เป็นโวลุ่มเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ Scaling ของสัญญาณที่ระดับ j ขนาด $2^j + m - 1 \times 1$ ในที่นี้จะหมายถึงเมตริกซ์ของจุดควบคุมที่เหลืออยู่หลังจากผ่านการแปลง WT หนึ่งครั้งมายังระดับความละเอียด j

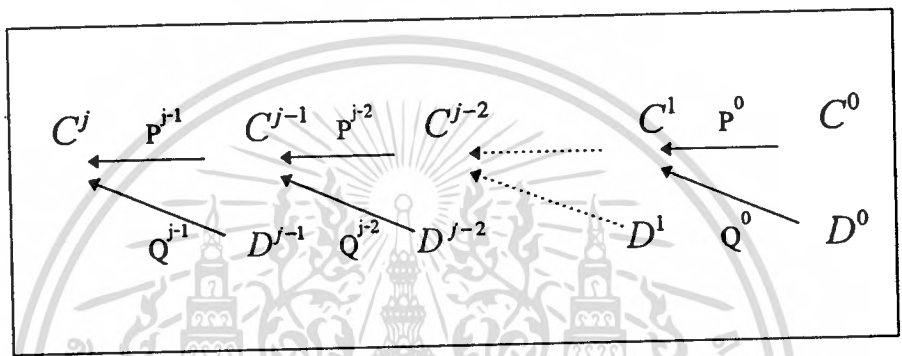
- D^j = เป็นโวลุ่มเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตของสัญญาณที่ระดับ j ขนาด $2^j \times 1$ ในที่นี้จะหมายถึงเมตริกซ์ของจุดควบคุมที่แสดงถึงรายละเอียดที่หายไปของลายเส้นหลังจากผ่านการแปลง WT หนึ่งครั้งมายังระดับความละเอียด j

- P^j = เมตริกซ์ในการแตกกระจายหาสัมประสิทธิ์ C^j ซึ่งจะมีขนาด $2^{j+1} + m - 1 \times 2^j + m - 1$

- Q^j = เมตริกซ์ในการแตกกระจายหาสัมประสิทธิ์ D^j ซึ่งจะมีขนาด $2^{j+1} + m - 1 \times 2^j$

จากสมการที่ (5.19) เมื่อนำ P^j มาคูณกับ C^j จะได้เมตริกซ์ผลลัพธ์ออกมา $2^{j+1} + m - 1$ ค่าตามกฎการคูณเมตริกซ์ ในขณะที่เดียวกันเมื่อนำ Q^j มาคูณกับ D^j จะได้เมตริกซ์ผลลัพธ์ออกมา $2^{j+1} + m - 1$ เช่นซึ่งเมื่อนำมาบวกกันแบบตัวต่อตัวก็จะได้เป็น C^{j+1} ขนาด $2^{j+1} + m - 1$ นั่นเอง สมการที่ (5.20) ก็จะนำสมการที่ (5.19) มาเขียนรวมกัน ซึ่งก็จะให้ผลเหมือนกัน สังเกตว่าเมื่อนำ P^j Q^j มาต่อกันได้เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $2^{j+1} + m - 1 \times 2^{j+1} + m - 1$ จากสมการที่ (5.20) สามารถเขียนเป็นแผนภูมิได้ดังนี้

ภาพที่ 62



แสดงแผนภูมิการใช้เมตริกซ์ P^j, Q^j ในการรวมกลับสัมประสิทธิ์

ในทำนองเดียวกันสามารถทำการสร้างเมตริกซ์ที่ใช้สำหรับการแตกกระจายสัญญาณได้โดยอาศัยหลักการเดียวกันได้ดังนี้

จาก
$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j$$

$$\sum_{k=-m+1}^{2^{j+1}-1} c_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(t) = \sum_{k=-m+1}^{2^j-1} c_k^j \phi_k^j(t) + \sum_{k=-m+1}^{2^j-m} d_k^j \psi_k^j(t)$$

นำ $\phi_{\tilde{k}}^j, \tilde{\psi}_{\tilde{k}}^j$ ทำการ Inner Product ทั้งสองด้าน จะได้ว่า

$$c_{\tilde{k}}^j = \sum_{k=-m+1}^{2^{j+1}-1} c_k^{j+1} \langle \phi_{\tilde{k}}^j(t), \phi_k^{j+1}(t) \rangle \quad (\tilde{k} = -m+1, \dots, 2^j - 1) \quad (5.21)$$

$$d_{\tilde{k}}^j = \sum_{k=-m+1}^{2^{j+1}-1} c_k^{j+1} \langle \tilde{\psi}_{\tilde{k}}^j(t), \phi_k^{j+1}(t) \rangle \quad (\tilde{k} = -m+1, \dots, 2^j - m) \quad (5.22)$$

และกำหนดให้

$$A^j = \left(a_{\tilde{k},k}^j \right)_{\substack{\tilde{k}=-m+1, \dots, 2^j-1 \\ k=-m+1, \dots, 2^{j+1}-1}}^{2^j-1, \dots, 2^{j+1}-1} \quad ; a_{\tilde{k},k}^j = \langle \phi_{\tilde{k}}^j, \phi_k^{j+1} \rangle \quad (5.23)$$

$$B^j = \left(b_{\tilde{k},k}^j \right)_{\substack{\tilde{k}=-m+1, \dots, 2^j-m \\ k=-m+1, \dots, 2^{j+1}-1}}^{2^j-m, \dots, 2^{j+1}-1} \quad ; b_{\tilde{k},k}^j = \langle \tilde{\psi}_{\tilde{k}}^j, \phi_k^{j+1} \rangle \quad (5.24)$$

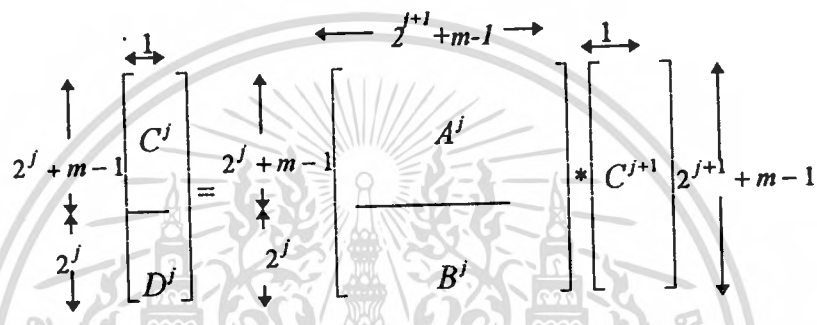
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการการแตกกระจายสัมประสิทธิ์ (Decomposition) ได้เป็น

$$C^j = A^j C^{j+1} \tag{5.25}$$

$$D^j = B^j C^{j+1} \tag{5.26}$$

$$\begin{bmatrix} C^j \\ D^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^j \\ B^j \end{bmatrix} C^{j+1} \tag{5.27}$$



สมการที่ (5.25),(5.26) เป็นสมการของการแตกกระจายสัมประสิทธิ์สเกลลิงที่ระดับ $j+1$ ไปเป็นสัมประสิทธิ์สเกลลิงและเวฟเลตที่ระดับ j ซึ่งเป็นแตกกระจายสัญญาณออกเป็นสองส่วนนั่นเอง ค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (5.25),(5.26) จะมีเหมือนกับสมการที่ (5.19)(5.20) โดยที่

- A^j = เมตริกซ์ในการแตกกระจายหาสัมประสิทธิ์ C^j ซึ่งจะมีขนาด $2^j+m-1 \times 2^{j+1}+m-1$
- B^j = เมตริกซ์ในการแตกกระจายหาสัมประสิทธิ์ D^j ซึ่งจะมีขนาด $2^j \times 2^{j+1}+m-1$

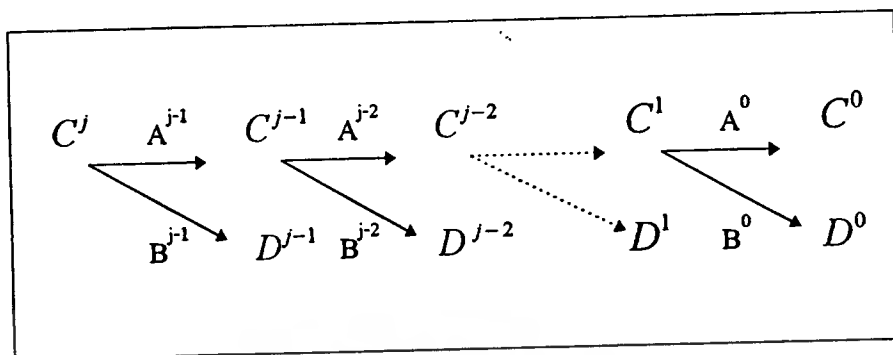
จากสมการที่ (5.25),(5.26) จะเห็นว่าเมื่อนำ A^j คูณกับ C^{j+1} ได้เมตริกซ์ผลลัพธ์ C^j ขนาด $2^j+m-1 \times 1$ ตามกฎการคูณเมตริกซ์ ในขณะที่เดียวกันเมื่อนำ B^j มาคูณกับ C^{j+1} จะได้เมตริกซ์ผลลัพธ์ D^j ขนาด $2^j \times 1$ ถ้านำสมการที่ (5.25),(5.26) มาเขียนรวมกันจะได้เป็นสมการที่ (5.27) ซึ่งก็จะให้ผลเหมือนกัน สังเกตว่าเมื่อนำ $A^j B^j$ มาต่อกันจะได้เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $2^{j+1}+m-1 \times 2^{j+1}+m-1$

จากสมการที่ (5.20) และ (5.27) จะสามารถสรุปได้ว่า

$$[P^j|Q^j]^{-1} = \begin{bmatrix} A^j \\ B^j \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

ซึ่งจากสมการที่ (5.27) จะสามารถเขียนเป็นแผนภูมิการแตกกระจายสัมประสิทธิ์ได้ดังแสดงในภาพที่ 63

ภาพที่ 63



แสดงแผนภูมิการใช้เมตริกซ์ A^j, B^j ในการแตกกระจายสัมประสิทธิ์

เมตริกซ์ A^j, B^j ที่ใช้ในการแตกกระจายสัญญาณจะเรียกว่า Analysis matrix ส่วนเมตริกซ์ P^j, Q^j ที่ใช้ในการรวมสัมประสิทธิ์จะเรียกว่า Synthesis matrix ซึ่งค่าต่างๆในเมตริกซ์เหล่านี้ก็คือสัมประสิทธิ์ของ $h_0(n), h_1(n), g_0(n), g_1(n)$ ที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 ซึ่งจะสามารถสรุปได้ดังนี้

$A^j = \text{Analysis Matrix} = h_0(n) = \text{Lowpass Analysis filter}$

$B^j = \text{Analysis Matrix} = h_1(n) = \text{Highpass Analysis filter}$

$P^j = \text{Synthesis Matrix} = g_0(n) = \text{Lowpass Synthesis filter}$

$Q^j = \text{Synthesis Matrix} = g_1(n) = \text{Highpass Synthesis filter}$

เมื่อสามารถทำการหา B^j หรือ $h_1(n)$ ได้แล้ว จะสามารถหาลักษณะของฟังก์ชันเวฟเล็ดแบบ B-spline ได้โดยวิธีการ Successive approximation หรือ อาจใช้เมตริกซ์ Q^j โดยการใช้สมการที่ (5.10) ก็ได้ ซึ่งลักษณะของฟังก์ชันเวฟเล็ดแบบ B-spline จะแสดงดังภาพที่ 64

จากเนื้อหาในบทนี้แสดงให้เห็นว่า สามารถใช้ฟังก์ชันเวฟเล็ตแบบ B-spline ทำการแตกกระจายสัญญาณออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆตามระดับความละเอียด j ใดๆก็ได้ จากหัวข้อสุดท้ายในบทนี้ ถ้าให้สัมประสิทธิ์ C^{j+1} เป็นสัมประสิทธิ์ของจุดควบคุมลายเส้นที่มีลักษณะข้อมูลคู่ลำดับบนระนาบ xy ตามที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อแรกของบทนี้ ก็จะสามารถนำเมตริกซ์ A^j, B^j, P^j, Q^j มาใช้ในการแตกกระจายข้อมูลของลายเส้นให้ออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆที่ระดับความละเอียด j ใดๆ และสามารถรวมกลับมารวมที่ระดับความละเอียดเดิมได้ จากการทำสามารถทำการแตกกระจายสัญญาณลายเส้นออกเป็นส่วนๆได้ก็จะทำให้สามารถทำการแยกพิจารณาข้อมูลในแต่ละส่วน ซึ่งข้อมูลแต่ละส่วนเหล่านี้จะมีอิทธิพลในการกำหนดลักษณะต่อลายเส้นต่างกันออกไป รายละเอียดต่างๆเหล่านี้จะกล่าวในบทต่อไป ซึ่งจะอธิบายลักษณะการแตกข้อมูลของลายเส้นพร้อมกับการทดลองการเปลี่ยนแปลงลักษณะของลายเส้นโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตแบบ Cubic B-spline



บทที่ 6

การประยุกต์ใช้การแปลงเวฟเล็ตแก้ไขลักษณะของลายเส้น

บทนำ

เนื้อหาในบทนี้จะนำหลักการที่ได้ศึกษามาแล้วในบทที่ 5. มาประยุกต์ในการแก้ไขลักษณะของลายเส้น เพื่อเปลี่ยนแปลงลักษณะของลายเส้นให้เป็นที่ต้องการ โดยจะแบ่งเนื้อหาออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ๆ ในส่วนแรกนี้จะแสดงให้เห็นถึงลักษณะของการเกิดลายเส้น โดยใช้หลักการของลายเส้นแบบ B-spline จากนั้นจะนำข้อมูลเหล่านี้มาเป็นอินพุตของขบวนการ WT เพื่อใช้ในแตกกระจาย (Decomposition) และการรวมกลับ (Reconstruction) ของลายเส้น ซึ่งจะแสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของกลุ่มข้อมูลแต่ละกลุ่มที่มีผลต่อลักษณะของลายเส้นว่าเป็นอย่างไร ในส่วนที่สองจะก็นำหลักการของการแปลงเวฟเล็ตแบบ B-spline มาใช้ในการแก้ไขลักษณะของลายเส้น โดยจะแบ่งออกเป็นเนื้อหาและการทดลอง 3 ส่วนด้วยกันคือ การแก้ไขลักษณะของลายเส้น การแก้ไขรายละเอียดของลายเส้น และการประมาณลายเส้น การประยุกต์ใช้งานต่างๆ เหล่านี้ได้ทำการพัฒนาขึ้นโดยใช้โปรแกรม Matlab[®] V.4.2 ในการทดลอง ซึ่งในบทนี้จะไม่กล่าวถึงรายละเอียดของโปรแกรมเนื่องจากจะอธิบายไว้ในภาคผนวก ในที่นี้จะแสดงเฉพาะสมการคณิตศาสตร์ที่ใช้ และการทดลองรวมทั้งผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองเท่านั้น

การแตกกระจายและการรวมกลับของข้อมูลลายเส้น

ในหัวข้อนี้จะแบ่งออกเป็นเนื้อหาออกเป็น 3 ส่วนด้วยกัน ในส่วนแรกจะเป็นการทดลองการสร้างลายเส้นแบบ B-spline เพื่อให้เห็นถึงลักษณะของข้อมูลที่จะนำไปใช้ในขบวนการ WT ซึ่งจะเป็นเนื้อหาในส่วนที่สอง ในส่วนสุดท้ายจะเป็นการรวมกลับข้อมูลของการแตกกระจายที่ได้จากขบวนการ WT เพื่อสร้างกลับไปเป็นลายเส้นตามปรกติ

การสร้างลายเส้น B-spline

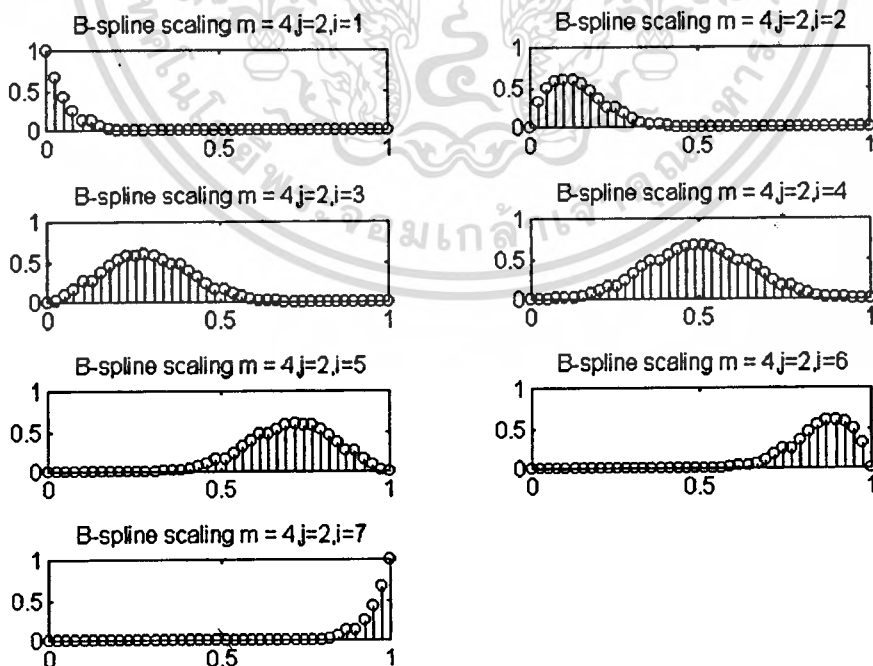
ในหัวข้อนี้จะอธิบายเกี่ยวกับวิธีการสร้างลายเส้นโดยใช้หลักการของ B-spline ซึ่งในขั้นแรกนี้จะทำการทดลองกรณีข้อมูลพิคเคเดียว นั่นคือ ลายเส้นจะมีการเปลี่ยนแปลงตามแกนควบคุมอ้างอิง t ซึ่งใช้เป็นแกนอ้างอิงสำหรับตำแหน่งการเกิดของฟังก์ชันสเกลลิงแบบ B-spline : $N_{i,m}(t)$ ในที่นี้จะใช้ฟังก์ชัน Cubic B-spline เท่านั้น นั่นคือ $m = 4$ ซึ่งได้กล่าวรายละเอียดมาแล้วในบทที่ 5.

ถ้ากำหนดให้

C^j เป็นเมตริกซ์ ซึ่งเก็บลำดับข้อมูลของจุดควบคุม (Control point) ที่ใช้ในการกำหนดแนวการเปลี่ยนแปลงของลายเส้น โดยมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ $2^j + m - 1$ เทอม พารามิเตอร์ j เป็นค่าแสดงระดับความละเอียดและบอกถึงจำนวนข้อมูลของจุดควบคุมในเมตริกซ์ C^j ที่จะทำให้เกิดลายเส้นนั้นๆ ดังนั้นในกรณีที่ $m = 4$ จะได้ว่า

$$C_i^j = [c_0^j, c_1^j, \dots, c_{2^j+4-2}^j] \quad (6.1)$$

ภาพที่ 65



แสดงลักษณะของข้อมูลที่เกี่ยวข้องในเมตริกซ์ $N_{i,j}(t)$ ที่ระดับ $j = 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$N_{i,4}(t)$ เป็นเมตริกซ์ที่เก็บข้อมูลที่ถูกรวมของฟังก์ชันสเกลลิง B-spline ลำดับที่ 4 ดังนั้น แสดงว่า $N_{i,4}(t)$ จะเป็นเมตริกซ์ 2 มิติ ซึ่งมีจำนวนแถวเท่ากับ 2^j+4-1 เท่ากับจำนวนของจุดควบคุมในเมตริกซ์ C^j ในขณะที่จำนวนของคอลัมน์ของเมตริกซ์จะเท่ากับจำนวนช่วง (2^j-1) บนแกน t คูณกับจำนวนข้อมูลต่อช่วงในแต่ละช่วง ซึ่งในการทดลองจะใช้ข้อมูลต่อช่วงละ 40 จุด ดังนั้นจะสามารถหาจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ได้จาก $(2^j-1) \times 40$ ในภาพที่ 65 จะแสดงตัวอย่างของข้อมูลต่อช่วงที่บรรจุอยู่ใน $N_{2,4}(t)$

จะเห็นว่าเมื่อระดับความละเอียดสูงขึ้นจะทำให้ช่วงของข้อมูลบนแกน t แคบลงตามค่า 2^j แต่จำนวนข้อมูลต่อช่วงในแต่ละช่วงยังคงเท่าเดิม เนื่องจากใช้ข้อมูลชุดเดิมแต่ใส่ลงไปในช่วงที่เล็กลงเท่านั้น (ให้ดูรายละเอียดในบทที่ 5.)

ดังนั้นจากสมการที่ (5.1) จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$[P] = [C^j][N_{i,4}(t)] ; i = 0, 1, 2, \dots, 2^j-4-2 \quad (6.2)$$

จากสมการที่ (6.2) จะทำให้เมตริกซ์ P เป็นโลว์เมตริกซ์ซึ่งมีจำนวนคอลัมน์เท่ากับจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ $N_{i,4}(t)$ โดยที่เมตริกซ์ P จะเก็บลำดับของข้อมูลต่อช่วงของข้อมูลหลายเส้นที่ได้จากสมการที่ (6.2) ดังแสดงในการทดลองที่ 6.1 และ 6.2

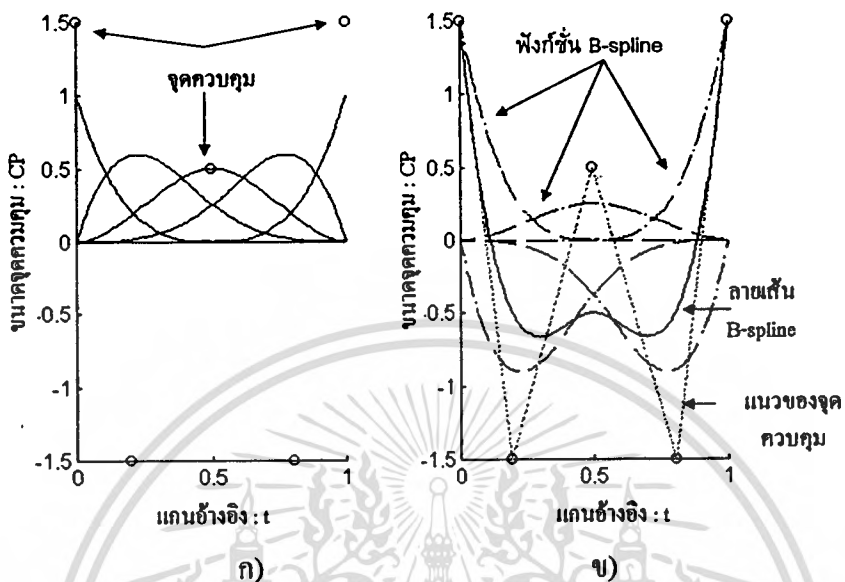
การทดลองที่ 6.1 การสร้างภาพหลายเส้นด้วยข้อมูลพิกัดเดียวที่ระดับ $j = 1$

การสร้างหลายเส้นจากจุดควบคุม 5 จุดเทียบกับแกนอ้างอิง t ข้อมูลทั้งหมดมี 5 จุดแสดงว่า $j = 1 (2^1+4-1 = 5)$ กำหนดให้ข้อมูลจุดควบคุมเท่ากับ $C^1 = [1.5, 5, 0.5, -1.5, 1.5]$ ดังนั้นแสดงว่าความกว้างแต่ละช่วงบนแกน t เท่ากับ $1/2^1$ โดย i เป็นตัวชี้ลำดับของข้อมูล 2^j+4-1 เทอม ซึ่งแสดงว่า $i = 0, 1, 2, 3, 4$ จากจุดควบคุมเหล่านี้และสมการที่ (6.2) ทำให้ได้ภาพหลายเส้นดังในภาพที่ 66

การทดลองที่ 6.2 การสร้างภาพหลายเส้นด้วยข้อมูลพิกัดเดียวที่ระดับ $j = 2$

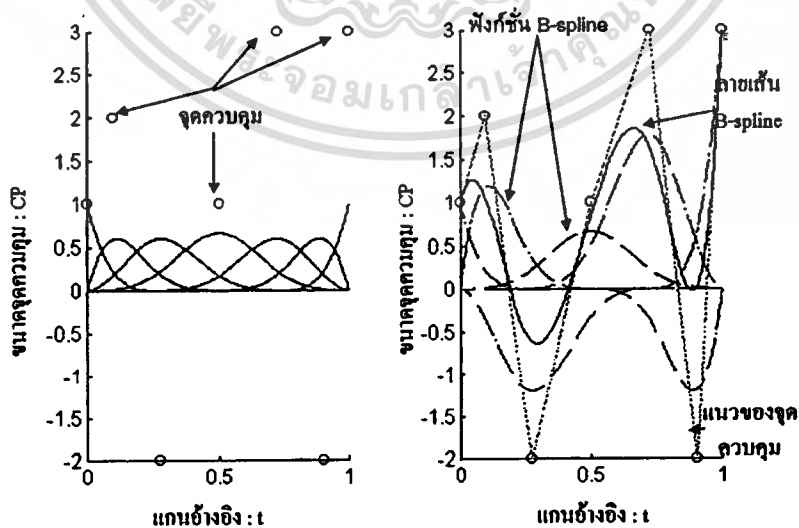
การสร้างหลายเส้นจากจุดควบคุม 7 จุดเทียบกับแกนอ้างอิง t ($j = 2, 2^2+4-1 = 7$) โดยการใช้จุดควบคุม $C^2 = [1, 2, -2, 1, 3, -2, 3]$ ดังนั้นแสดงว่าความกว้างแต่ละช่วงบนแกน t เท่ากับ $1/2^2$ โดย i เป็นตัวชี้ลำดับของข้อมูล 2^j+4-1 เทอม ซึ่งแสดงว่า $i = 0, 1, 2, 3, 4$ จากจุดควบคุมเหล่านี้และสมการที่ (6.2) จะทำให้ได้ภาพหลายเส้นดังแสดงในภาพที่ 67

ภาพที่ 66



- ก) แสดงของตำแหน่งของจุดควบคุม C' และลักษณะของฟังก์ชัน $N_{i,4}(t)$ แต่ละฟังก์ชัน
- ข) แสดงลักษณะของลายเส้นที่เกิดจาก $[C'] / [N_{i,4}(t)]$

ภาพที่ 67



ผลการทดลองลักษณะของลายเส้นที่เกิดจากจุดควบคุมในการทดลองที่ 6.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการทดลองที่ 6.1 และ 6.2 จะเห็นว่าลายเส้นมีการเปลี่ยนแปลงอยู่ภายใต้จุดควบคุมตามทฤษฎีที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 5. ในการทดลองนี้เป็นลักษณะของลำดับข้อมูลลายเส้นพิกัดเดิยวที่เปลี่ยนแปลงตามแกนอ้างอิง t เท่านั้น ดังนั้นสามารถพัฒนาเป็นการเกิดลายเส้นบนพิกัด xy ได้โดยใช้หลักการเดิยวกันเพียงแต่เปลี่ยนข้อมูลจุดควบคุมให้อยู่ในรูปแบบข้อมูลคู่ลำดับเท่านั้น ดังนั้นแสดงว่ามีข้อมูล 2 ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน และแต่ละชุดมีการเปลี่ยนแปลงตามแกนอ้างอิง t ซึ่งจะเขียนได้เป็นสมการที่ (6.3)

$$[P(x,y)] = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x^j \\ C_y^j \end{bmatrix} N_{i,4}(t) \quad ; i = 0,1,2,\dots,2^j-4-2 \quad (6.3)$$

เมตริกซ์ C^j จะกลายเป็นเมตริกซ์ของจุดคู่ลำดับ xy ของจุดควบคุม โดยมีขนาด 2 แถว 2^j+4-1 คอลัมน์ และเมตริกซ์ P เป็นเมตริกซ์ของคู่ลำดับของข้อมูลคู่ของคู่ลำดับ xy ของภาพลายเส้น โดยมีขนาด 2 แถว $2^j \times 40$ คอลัมน์ (ข้อมูลคู่เท่ากับ 40 จุดต่อช่วง) ลักษณะของภาพลายเส้นที่เป็นข้อมูล xy จะแสดงในการทดลองที่ 6.3 และ 6.4

การทดลองที่ 6.3 การสร้างภาพลายลายเส้นในพิกัด xy

ต้องการสร้างภาพลายเส้นที่เกิดจากข้อมูลจุดควบคุมที่มีคู่ลำดับดังนี้

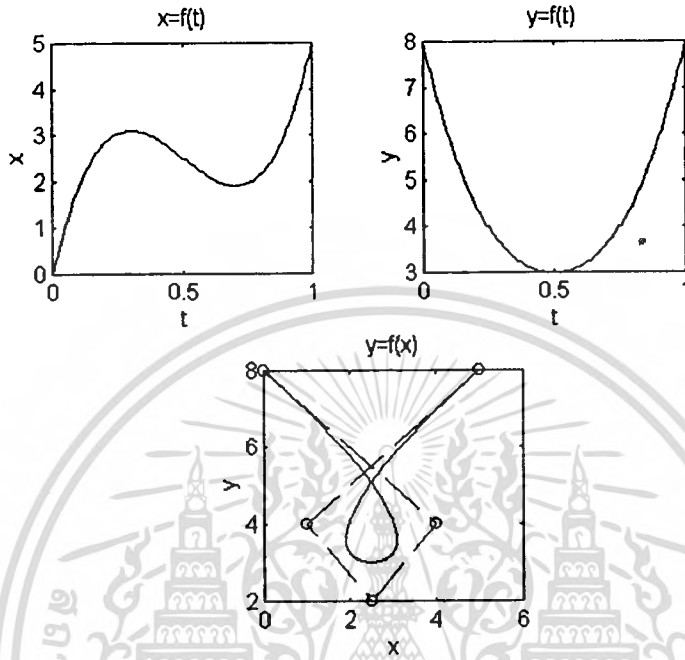
x	0	4	2.5	1	5
y	8	4	2	4	8

ในภาพที่ 68 จะแสดงลักษณะของการเกิดลายเส้นจากจุดควบคุม 2 กลุ่มข้อมูล คือลำดับข้อมูล x และลำดับข้อมูล y ซึ่งในภาพบนจะแสดงลักษณะของลายเส้นของการเปลี่ยนแปลงของกลุ่มข้อมูล x เทียบกับแกนอ้างอิง t และกลุ่มข้อมูล y เทียบกับแกนอ้างอิง t ตามลำดับ ส่วนในภาพด้านล่างจะเป็นการเกิดภาพลายเส้นจากความสัมพันธ์ของกลุ่มข้อมูล x, y ที่ตำแหน่งแกนอ้างอิง t เดิยวกัน ซึ่งเป็นไปตามที่ได้กล่าวมาแล้วในสมการที่ 6.3

การทดลองที่ 6.4 การสร้างภาพลายลายเส้นรูปสปริงในพิกัด xy

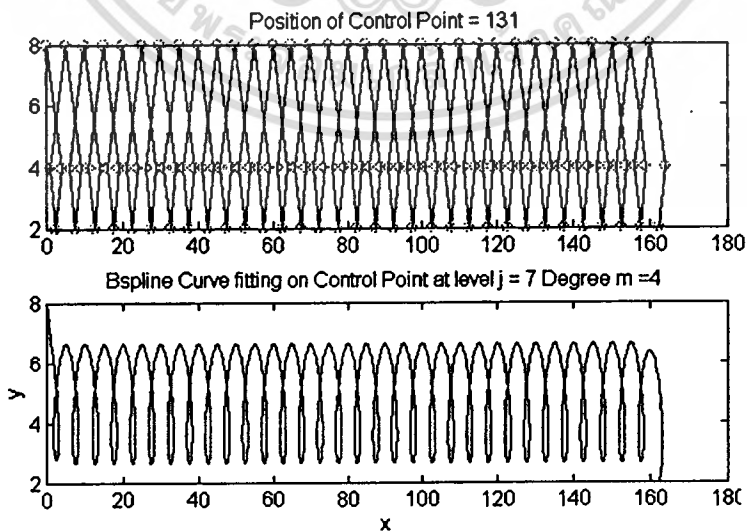
ต้องการสร้างลายเส้นในพิกัด xy จากจุดควบคุม 131 จุด ($j = 2^7+4-1 = 131$) โดยการใช้กลุ่มข้อมูลในการทดลองที่ 6.3 มาทำการเรียงต่อกันให้ได้เป็นข้อมูลจุดควบคุมจำนวน 131 จุด ซึ่งแสดงผลลัพธ์ของลายเส้นในภาพที่ 69

ภาพที่ 68



ผลการทดลองลักษณะการเกิดลายเส้นจากจุดควบคุม 2 มิติในการทดลองที่ 6.3

ภาพที่ 69



ผลการทดลองการสร้างภาพลายเส้นในการทดลองที่ 6.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในภาพที่ 69 ภาพด้านบนแสดงให้เห็นแนวของจุดควบคุมที่สร้างขึ้นตามข้อกำหนดในการทดลองที่ 6.4 ในขณะที่ภาพล่างจะเป็นลายเส้นที่เกิดขึ้นภายใต้จุดควบคุมเหล่านี้

การแตกกระจายข้อมูลหลายเส้น

จากสมการที่ (5.27) และ (5.28) ซึ่งเป็นสมการการแตกกระจายข้อมูลของการแปลงเวฟเล็ตแบบ B-spline ที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 5.

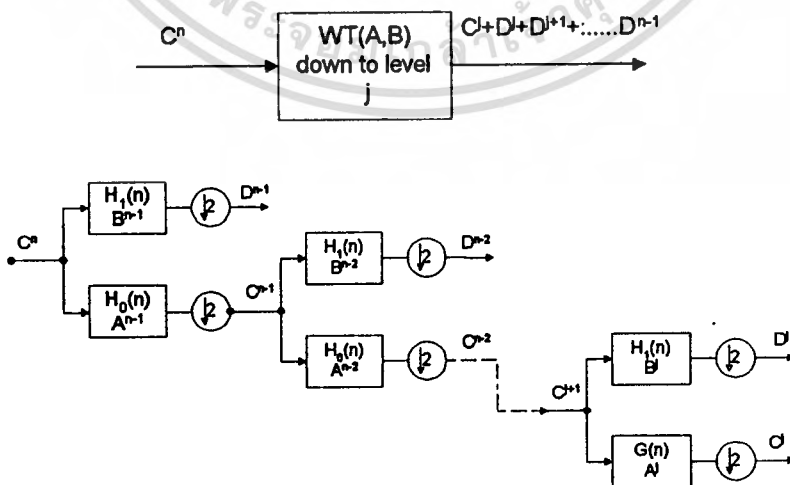
$$C_i^j = [c_0^j, c_1^j, \dots, c_{2^j+4-2}^j]$$

$$\begin{bmatrix} C^j \\ D^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^j \\ B^j \end{bmatrix} C^{j+1}$$

$$\begin{bmatrix} A^j \\ B^j \end{bmatrix} = [P^j | Q^j]^{-1}$$

เมตริกซ์ P^j และ Q^j จะเป็นเมตริกซ์ที่ใช้ในการทำการแปลงเวฟเล็ต ซึ่งได้อธิบายแล้วในบทที่ 5. และเมตริกซ์ C^j ก็เป็นเมตริกซ์ของจุดควบคุมซึ่งเป็นข้อมูลคู่ลำดับ xy ดังนั้นจากสมการข้างต้นจะทำให้แตกกระจายข้อมูลคู่ลำดับของจุดควบคุมไปที่ระดับความละเอียดต่างๆกันโดยใช้วิธีการของการแปลงเวฟเล็ตแบบ B-spline ซึ่งบล็อกไดอะแกรมการแตกกระจายข้อมูลแสดงในภาพที่ 70

ภาพที่ 70



แสดงภาพบล็อกไดอะแกรมของการกระจายข้อมูลโดย WT

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

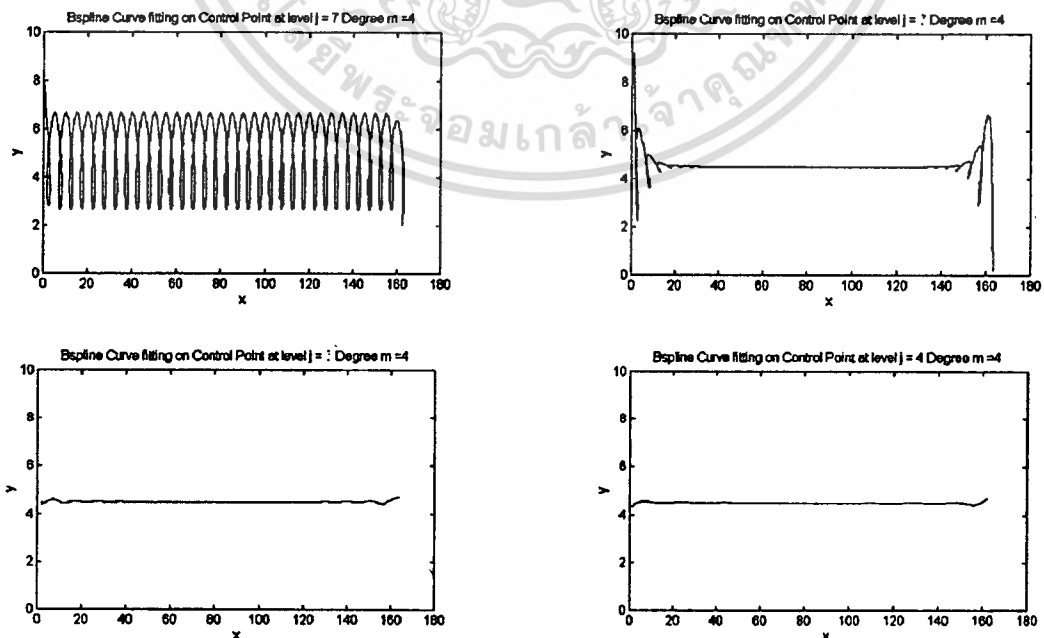
จากภาพที่ 70 จะเห็นว่าสามารถทำการแตกกระจายข้อมูล C^n ซึ่งเป็นข้อมูลที่ระดับความละเอียด n ใดๆ ไปยังข้อมูลระดับความละเอียด j ใดๆ โดยที่ข้อมูล C^j และ D^j ในแต่ละระดับจะมีขนาดเท่ากับ $2^{j+4}-1$ และ 2^j ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อทำการการแตกกระจายข้อมูลลงมาถึงระดับ j ใดๆ ก็จะได้เป็นกลุ่มข้อมูลสองกลุ่มคือ กลุ่มข้อมูลของสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันสเกลลิง : C^j และกลุ่มข้อมูลของสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันเวฟเล็ต : $[D^j, D^{j+1}, D^{j+2}, \dots, D^{n-1}]$

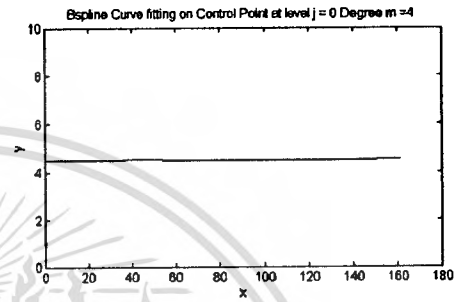
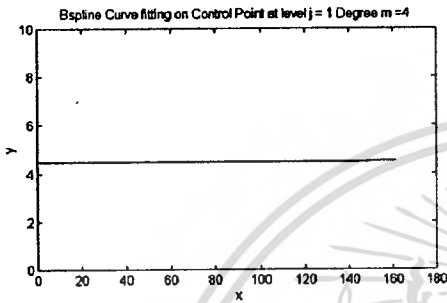
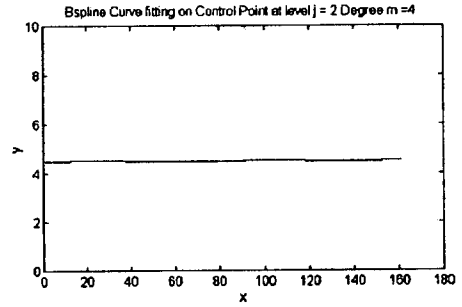
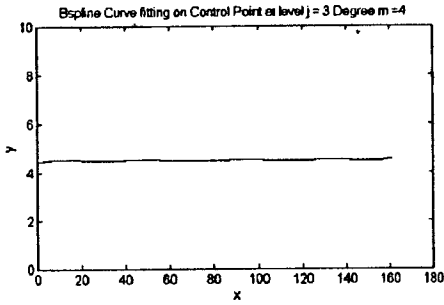
จากการแตกกระจายข้อมูลด้วย WT ตามที่ได้แสดงในบล็อกไดอะแกรม ถ้าให้ C^n เป็นข้อมูลของจุดควบคุมในการสร้างลายเส้นที่ระดับความละเอียด n ใดๆ ก็จะสามารถทำการแตกกระจายข้อมูลลายเส้นนี้ออกเป็นกลุ่มข้อมูลในแต่ละส่วนต่างๆกันได้ ซึ่งแสดงให้เห็นในการทดลองที่ 6.5 และ 6.6

การทดลองที่ 6.5 การแตกกระจายลายเส้นรูปสปริง

ทำการแตกกระจายข้อมูลลายเส้นจากการทดลองที่ 6.4 ซึ่งมีข้อมูลจำนวน 131 คู่ลำดับ ซึ่งแสดงว่าระดับความละเอียดสูงสุดอยู่ที่ $j = 7$ ดังนั้นจะสามารถแตกกระจายข้อมูลโดยใช้เมตริกซ์ P^j และ Q^j ได้ดังแสดงในภาพที่ 71

ภาพที่ 71





ผลการทดลองการแตกกระจายลายเส้นในการทดลองที่ 6.5

ในภาพที่ 71 จะแสดงลักษณะของภาพลายเส้นที่เกิดจากจุดควบคุมที่ระดับความละเอียด j ต่างๆกัน โดยในแต่ละระดับจะมีจำนวนจุดควบคุมเท่ากับ $2^j + 4 - 1$ คู่ลำดับ เช่น ที่ระดับ $j = 7$ จะมีจุดควบคุม 131 คู่ลำดับ และที่ระดับ $j = 6$ จะมีจำนวนจุดควบคุมเท่ากับ 67 คู่ลำดับลดลง $2^6 = 64$ คู่ลำดับ ภาพลายเส้นในแต่ละระดับความละเอียดจะถูกสร้างขึ้นด้วยลายเส้น B-spline โดยใช้จุดควบคุม C^j ที่เหลืออยู่ในแต่ละระดับ j ใดๆ

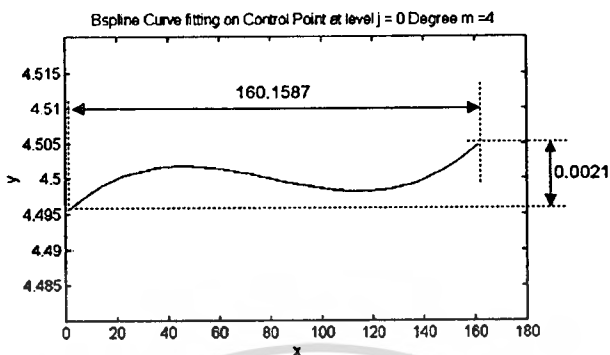
ถ้าพิจารณาที่ระดับความละเอียด $j = 0$ ซึ่งเป็นระดับความละเอียดต่ำสุดจะมีจำนวนคู่ลำดับเหลืออยู่ทั้งหมด 4 คู่ลำดับ ดังนี้

x	1.1727	54.7384	104.7575	161.3314
y	4.4955	4.5128	4.4869	4.5149

จากคู่ลำดับดังกล่าวจะทำให้เกิดภาพลายเส้นเป็นลักษณะเส้นตรง แต่ถ้าทำการขยายสเกลในแนวแกน y ให้ละเอียดขึ้นดังแสดงให้เห็นในภาพที่ 72 จะเห็นว่าลักษณะลายเส้นจริงๆจะไม่ใช่เส้นตรงแต่เนื่องจากการเปลี่ยนข้อมูลทางแกน y จะมีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับค่าข้อมูลในแนวแกน x จึงทำให้มองเห็นเป็นแนวเส้นตรงโดยเฉพาะในกรณีที่พิจารณาช่วงแกน y ให้มีสเกลกว้างขึ้น

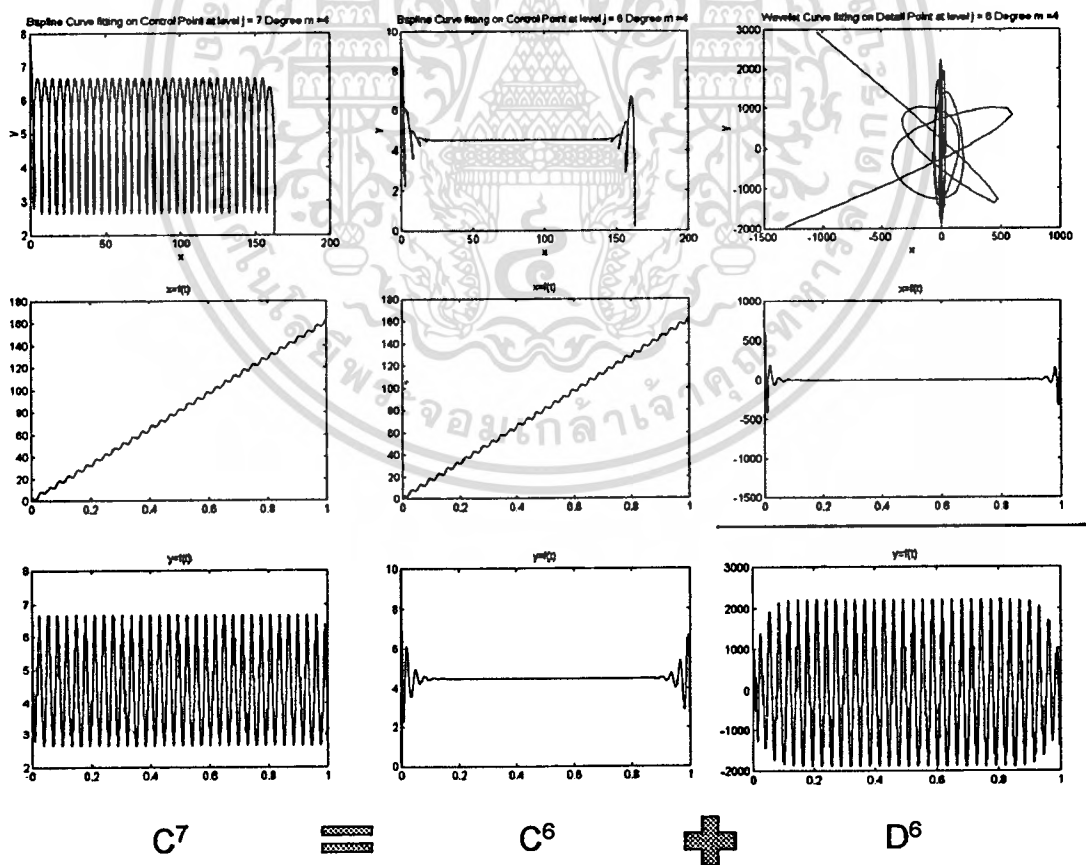
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพที่ 72



แสดงภาพการขยายสเกลแกน y ที่ระดับความละเอียด $j = 0$ ในการทดลองที่ 6.5

ภาพที่ 73



แสดงลักษณะของภาพลายเส้นตามสมการที่ (6.4) และ (6.5)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการทำ WT แต่ละครั้งจะเกิดกลุ่มข้อมูลของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต D^j ทุกครั้งซึ่งมีจำนวนเท่ากับ 2^j ในแต่ละระดับตามสมการ

$$\sum_{i=0}^{2^{j+1}+m-2} c_i^{j+1} \phi_{i,k}^{j+1}(t) = \sum_{i=0}^{2^j+m-2} c_i^j \phi_{i,k}^j(t) + \sum_{i=0}^{2^j-1} d_i^j \psi_{i,k}^j(t) \quad (6.4)$$

ดังนั้นสามารถพล็อตลักษณะของการเปลี่ยนแปลงลายเส้นที่เกิดจากสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแต่ละระดับ j ใดๆได้จากสมการ

$$g^j(t) = \sum_{i=0}^{2^j-1} d_i^j \psi_{i,k}^j(t) \quad (6.5)$$

ในที่นี้จะยกตัวอย่างให้เห็นเฉพาะผลของการแตกกระจายข้อมูลจุดควบคุมจากระดับ $j = 7$ ลงมายังระดับ $j = 6$ เพื่อให้เห็นถึงลักษณะของการเกิดลายเส้นในส่วนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต ดังแสดงในภาพที่ 73

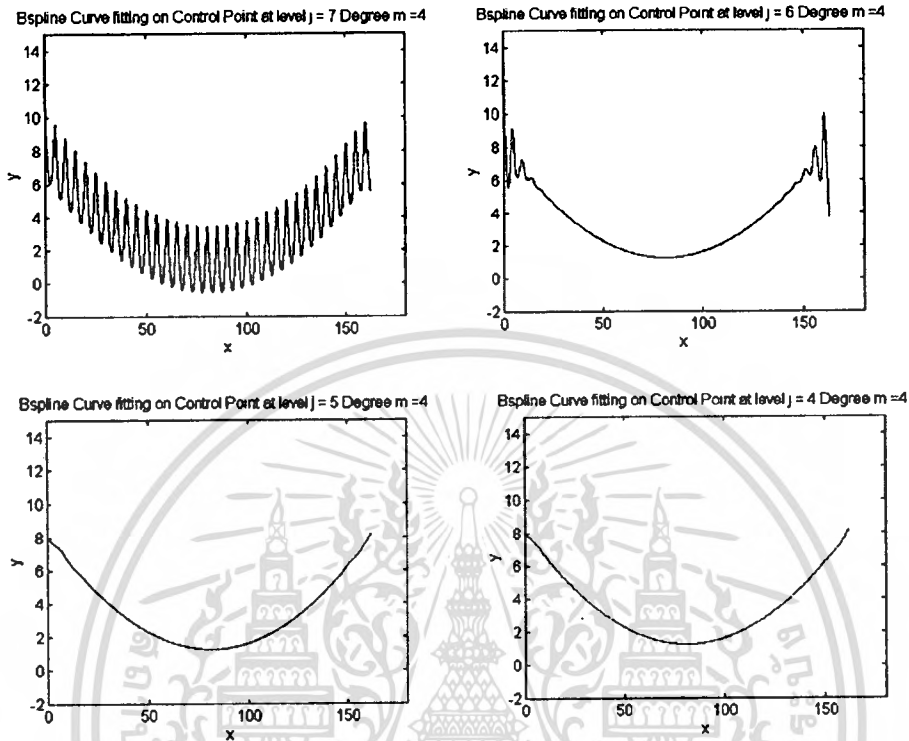
ในภาพที่ 73 จะแยกเป็น 3 คอลัมน์ คอลัมน์แรกจะเป็นภาพลายเส้นของรูปสปริงที่ระดับ $j = 7$ ซึ่งจะเป็นข้อมูลอินพุทเริ่มต้นโดยแยกพล็อตเป็น $y=f(x), x=f(t), y=f(t)$ ส่วนในคอลัมน์ที่สองและสามจะเป็นภาพลายเส้นที่เกิดจากสัมประสิทธิ์ของ C^6 และ D^6 ที่เกิดขึ้นภายหลังการทำ WT หนึ่งครั้ง โดยที่ D^6 เป็นสัมประสิทธิ์แสดงความแตกต่างระหว่าง C^7 กับ C^6 ตามที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 5. ดังนั้นภาพลายเส้น $y=f(x)$ ของ D^6 จึงแสดงเป็นความแตกต่างของข้อมูลในแนวแกน x และแกน y ซึ่งจะอธิบายได้ดังนี้

พิจารณา $x=f(t)$ ของ D^6 จะอธิบายความหมายได้ว่า $x=f(t)$ ของ C^7 กับ C^6 จะมีความคล้ายคลึงกันแต่จะต่างกันเพียงเล็กน้อยบริเวณจุดปลายทั้งสองด้านเท่านั้น ในขณะที่กราฟ $y = f(t)$ ของ D^6 จะแสดงให้เห็นว่า $y=f(t)$ ของ C^7 กับ C^6 มีความแตกต่างกันมากบริเวณตรงกลางของลายเส้นและจะลดลงบริเวณตรงปลายของลายเส้น ซึ่งเมื่อนำสมการ $x=f(t)$ และ $y=f(t)$ ของ D^6 มาพล็อตรวมกันจะได้กราฟแสดงความแตกต่างของข้อมูลระหว่าง C^7 กับ C^6 ในแนวแกน x และ y ซึ่งจะเห็นว่าจะมีการซ้อนทับกันของลายเส้นในแนวตั้งมาก แสดงว่ามีการแตกต่างของข้อมูลในแนวแกน y มาก ในขณะที่การซ้อนทับกันของลายเส้นในแนวนอนจะมีน้อย ซึ่งจะแสดงว่าความแตกต่างของข้อมูลในแนวแกน x น้อยนั่นเอง

การทดลองที่ 6.6 การแตกกระจายลายเส้นรูปฟันเลื่อย

ต้องการแตกกระจายภาพลายเส้นฟันเลื่อยที่มีแนวลายเส้นแบบพาราโบลา ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ในภาพที่ 74

ภาพที่ 74



ผลการทดลองการแตกกระจายหลายเส้นในการทดลองที่ 6.6 ที่ระดับ $j = 7, 6, 5, 4$

ในภาพที่ 74 จะแสดงการแตกกระจายข้อมูลหลายเส้นอีกตัวอย่างหนึ่ง ซึ่งจะแสดงเฉพาะที่ระดับความละเอียด $j = 7, 6, 5$ และ 4 เท่านั้น ส่วนที่ระดับความละเอียดที่ $3, 2$ และ 1 จะมีลักษณะคล้ายกับหลายเส้นที่ระดับที่ 4 ซึ่งจะเห็นว่าผลลัพธ์มีลักษณะคล้ายกับผลลัพธ์ในการทดลองที่ 6.5

การรวมกลับของข้อมูลหลายเส้น (Reconstruction)

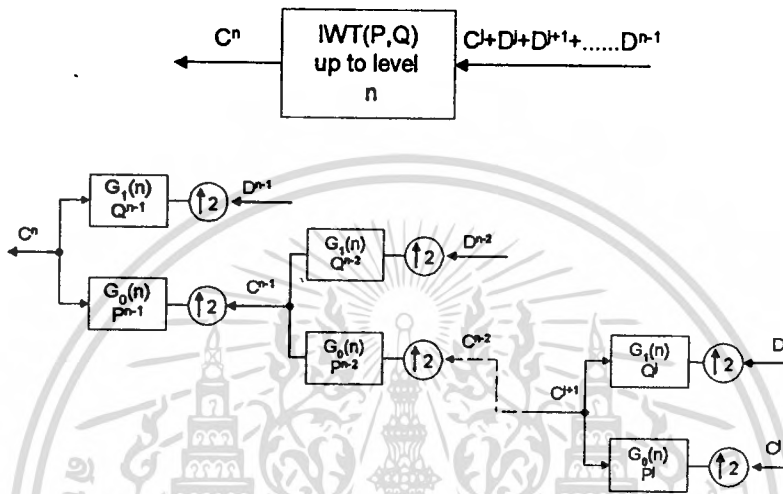
การรวมกลับของข้อมูลหลายเส้น เป็นขั้นตอนการกระทำย้อนกลับกับการแตกกระจายข้อมูลหลายเส้น ซึ่งเป็นการรวมกลุ่มของสัมประสิทธิ์ที่ถูกแตกกระจายออกไปในแต่ละระดับมาทำการรวมกันตามลำดับของการแตกกระจาย การรวมกันของข้อมูลในแต่ละระดับสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$[C^{j+1}] = [P^j | Q^j] \begin{bmatrix} C^j \\ D^j \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการดังกล่าวสามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมของการรวมกลับข้อมูลได้ดังแสดง
ในภาพที่ 75

ภาพที่ 75



แสดงบล็อกไดอะแกรมของการรวมกลับข้อมูล

จากสมการและบล็อกไดอะแกรมในภาพที่ 75 ทำให้สามารถทำการรวมข้อมูลที่ถูกระบายกระจายกลับไปเป็นภาพหลายเส้นตามปรกติได้ ในที่นี้จะไม่แสดงผลการทดลองเนื่องจากสามารถดูภาพการรวมกลับข้อมูลได้จากภาพที่ 71 และ 74 เพียงแต่ดูย้อนกลับขึ้นไปจากระดับความละเอียดต่ำสุดไปจนถึงระดับความละเอียดสูงสุด ซึ่งจากการทดลองจะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ระดับความละเอียดสุดท้ายจะมีลักษณะของหลายเส้นเหมือนเดิมทุกประการ

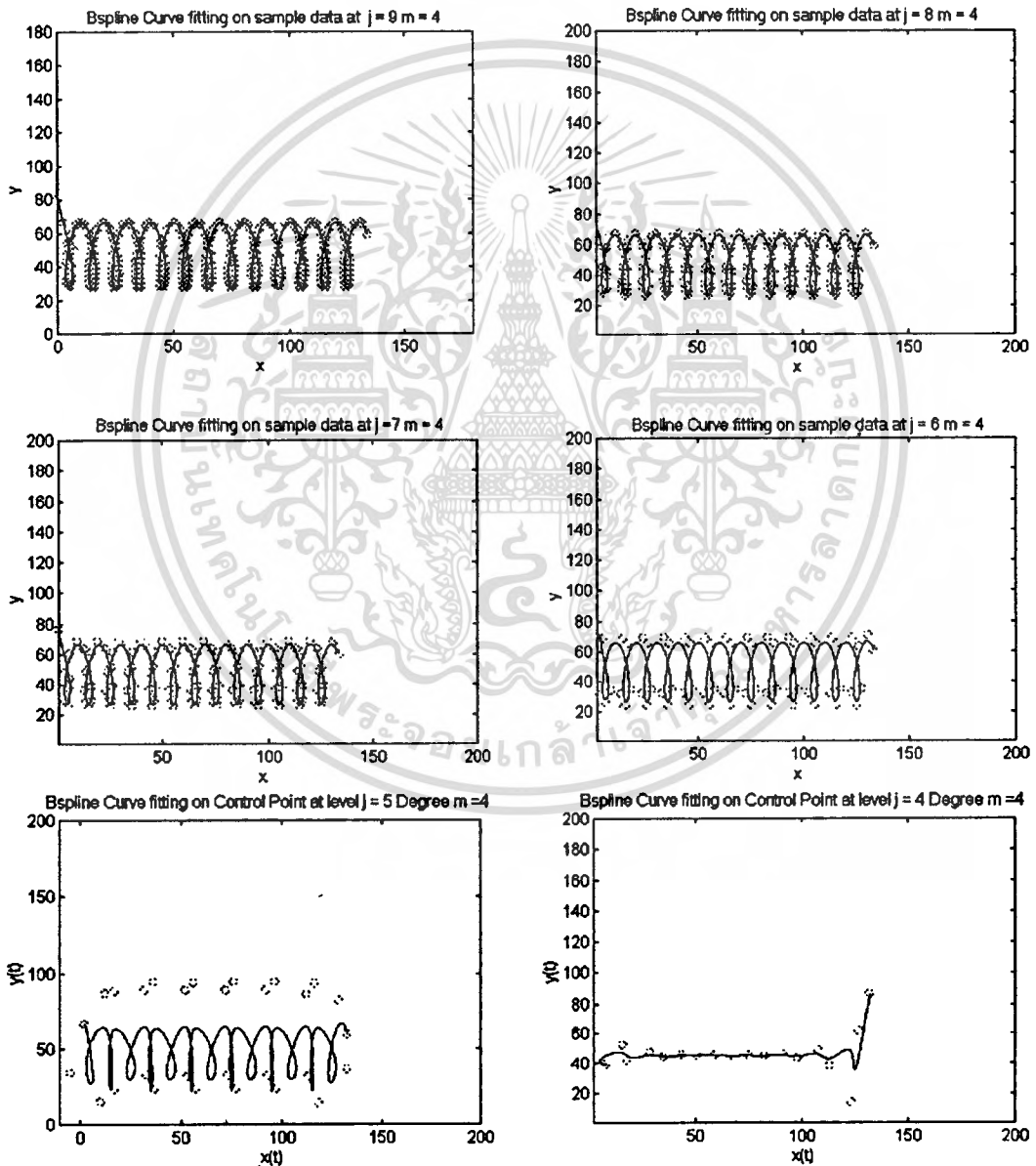
การทดลองการแตกกระจายข้อมูลที่กล่าวมา ใช้ลำดับข้อมูลของจุดควบคุม CP เป็นอินพุทซึ่งในทางปฏิบัติอาจจะไม่ทราบจุด CP ที่ทำให้เกิดหลายเส้นเหล่านั้น ดังนั้นจึงได้ทำการทดลองโดยทำการนำข้อมูลรุ่มของลำดับข้อมูลหลายเส้นจริงมาเป็นอินพุทในการทำ WT จากนั้นใช้เมตริกซ์ A' , B' ทำการแตกกระจายข้อมูลในลักษณะเดียวกัน และในแต่ละระดับก็มีการพิจารณาลักษณะของหลายเส้นของข้อมูลที่เหลืออยู่ โดยหลักการของหลายเส้น B-spline เพื่อแสดงให้เห็นถึงลักษณะของหลายเส้นที่เปลี่ยนไป และทำการศึกษาเปรียบเทียบกับการใช้จุดควบคุมเป็นข้อมูลอินพุท การทดลองที่ 6.7 จะแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างที่กล่าวมานี้

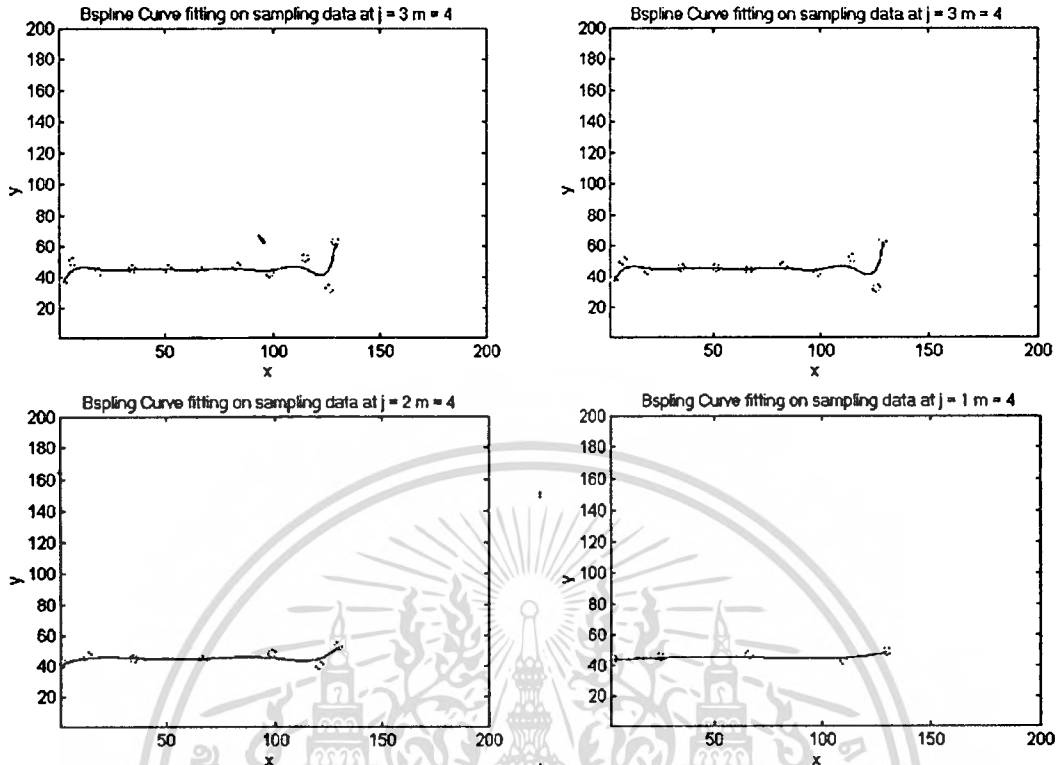
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทดลองที่ 6.7 การใช้ข้อมูลคู่ของลายเส้นเป็นข้อมูลอินพุท

การใช้ข้อมูลคู่ของข้อมูลคู่ลำดับของลายเส้นสปริงจริงเป็นอินพุทในการทำ WT ซึ่งจะมีจำนวนข้อมูลอินพุททั้งหมดเท่ากับ $2^j + 3$ เทอม ผลการทดลองจะแสดงให้เห็นถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของลายเส้นดังแสดงให้เห็นในภาพที่ 76

ภาพที่ 76



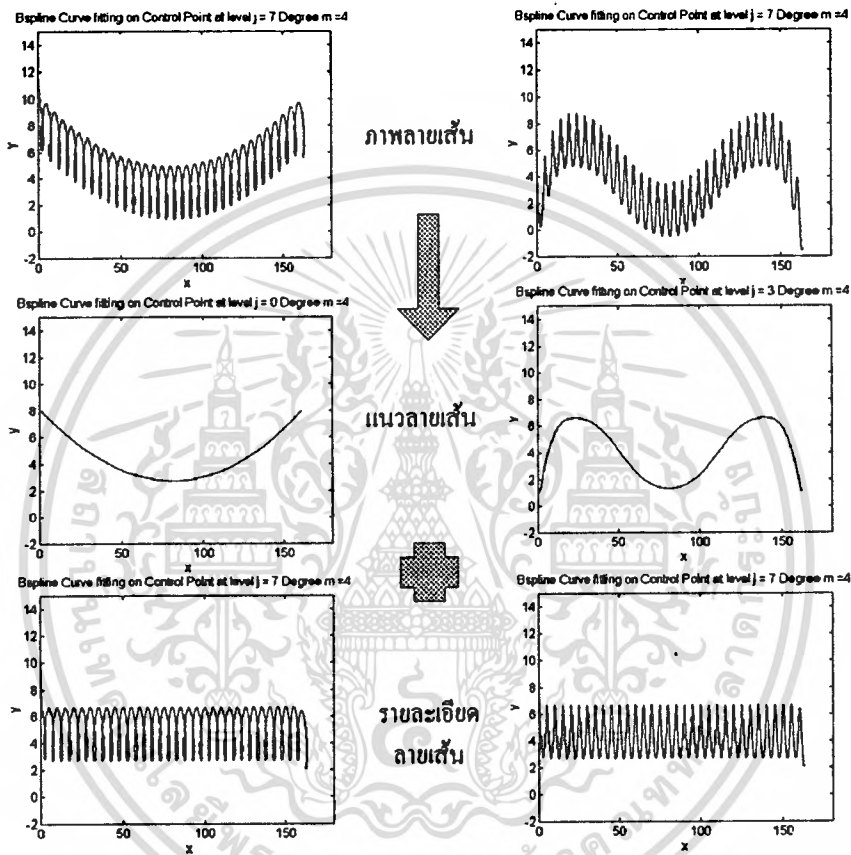


ผลการทดลองลักษณะการใช้ข้อมูลกลุ่มจริงในการทดลองที่ 6.7

จากภาพที่ 76 ซึ่งแสดงการทำ WT กับจุดข้อมูลกลุ่มจริงๆของลายเส้น ซึ่งแสดงด้วยจุดวงกลมสีเทา สังเกตว่าลายเส้น B-spline ที่เกิดขึ้นจะเหมือนซ้อนทับสลับกับจุดข้อมูลกลุ่ม นั้นแสดงว่าในกรณีที่มีจุดควบคุมหลายๆเพื่อใช้ในการเกิดลายเส้น จะทำให้ลายเส้นนั้นเหมือนเป็นแนวเดียวกับแนวของจุดควบคุม เมื่อทำการทรานส์ฟอร์มลงมาถึงระดับที่ $j = 0$ จะพบว่าการใช้ข้อมูลกลุ่มจริงของลายเส้นจะให้ผลลัพธ์ของลายเส้นเอ้าท์พุทออกมาคล้ายกับการใช้จุดควบคุมเป็นอินพุท ข้อแตกต่างมีเพียงการใช้จุดควบคุมเป็นอินพุทจะใช้จำนวนของข้อมูลน้อยกว่าการใช้ข้อมูลกลุ่มจริง แต่การใช้ข้อมูลกลุ่มจริงของลายเส้นก็สามารถลดจำนวนข้อมูลอินพุทลงได้โดยการใช้จำนวนข้อมูลกลุ่มน้อยลงได้แล้วใช้หลักการของ B-spline interpolation [5][6] ในการหาค่าข้อมูลที่อยู่ระหว่างข้อมูลกลุ่มดังกล่าวเพื่อสร้างลายเส้นจริง นอกจากนี้การใช้ข้อมูลกลุ่มจริงจะมีความสะดวกมากกว่าในทางปฏิบัติ เนื่องจากสามารถทำการหาข้อมูลอินพุทจากลายเส้นลักษณะใดก็ได้ ซึ่งถ้าจะใช้จุดควบคุมเป็นอินพุทต้องทำการพัฒนาโปรแกรมในการหาจุดควบคุมที่เหมาะสมสำหรับลายเส้นนั้นๆ ซึ่งจะกระทำได้ยากมาก

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่าลักษณะของลายเส้นจะประกอบด้วยส่วนประกอบสองส่วน คือ แนวของลายเส้น และส่วนแสดงรายละเอียดของลายเส้น ดังแสดงในภาพที่ 77

ภาพที่ 77



แสดงตัวอย่างแนวและรายละเอียดของลายเส้นแบบต่างๆ

พิจารณาในภาพที่ 77 ในแนวคอลัมน์ทางซ้าย จะเห็นว่าแนวของลายเส้นจะมีลักษณะเป็น พาราโบลาหงายและมีรายละเอียดเป็นรูปสปริง ในขณะที่ภาพแนวคอลัมน์ทางด้านขวาจะมีแนว ลายเส้นในลักษณะถูกคลื่นและมีรายละเอียดเป็นรูปฟันเลื่อย

ซึ่งจากการทดลองใช้ WT ทำการแตกข้อมูลของลายเส้นออกมาในแต่ละระดับความละเอียดตามการทดลองที่ 6.5 6.6 และ 6.7 จะสังเกตเห็นว่าการทำ WT ในแต่ละระดับจะทำให้รายละเอียดของลายเส้นหายไปเรื่อยๆ รายละเอียดที่หายไปเหล่านี้จะไปปรากฏอยู่ในสัมประสิทธิ์เวฟเลต (D') ของการทำ WT แต่ละระดับ เมื่อทำการแปลงไปจนถึงระดับสุดท้าย ($j=0$) จะมีข้อมูล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

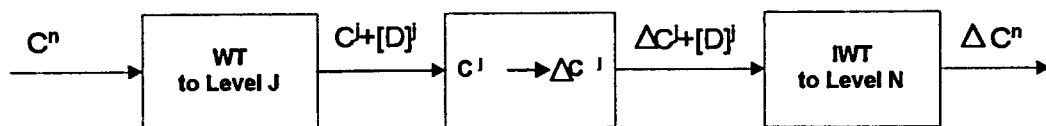
เหลืออยู่เพียง 4 เทอม ซึ่งข้อมูลเหล่านี้เมื่อนำมาสร้างเป็นภาพลายเส้นจะแสดงออกมาเป็นแนวของลายเส้นนั่นเอง ผลลัพธ์เหล่านี้จะสอดคล้องกับทฤษฎีของ WT ที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 3 และ 4 ซึ่งได้อธิบายว่า สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตเป็นส่วนข้อมูลที่ผ่าน Highpass filter เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองจะสังเกตเห็นลักษณะของรายละเอียดของลายเส้นจะเป็นส่วนที่ทำให้ข้อมูลของลายเส้นเบี่ยงเบนไปจากแนวของลายเส้นซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็วและมีค่าการเปลี่ยนแปลงสูง ดังนั้นจะเปรียบเสมือนสัญญาณความถี่สูงนั่นเอง ในขณะที่ข้อมูลที่เหลืออยู่ซึ่งแสดงแนวของลายเส้นจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าของข้อมูลในลักษณะที่ต่อเนื่องราบเรียบ ซึ่งก็จะเป็นข้อมูลสัมประสิทธิ์ในส่วนที่ผ่าน Lowpass filter ตามทฤษฎีที่กล่าวมานั่นเอง

จึงสามารถสรุปได้อีกครั้งว่า การแปลงเวฟเล็ตแบบ B-spline สามารถทำการแยกข้อมูลออกเป็นกลุ่มข้อมูลที่แสดงแนวของลายเส้นกับกลุ่มข้อมูลที่แสดงรายละเอียดในระดับความละเอียดต่างกันได้ ซึ่งจากผลการทดลองนี้ทำให้สามารถนำไปใช้ในการแก้ไขลักษณะของลายเส้นและนำไปประยุกต์ใช้ในงานอื่นๆ ได้อีกมากมายคงจะกล่าวต่อไป

การทดลองแก้ไขแนวของลายเส้น

การแก้ไขแนวของลายเส้นเป็นการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้นให้เป็นไปตามที่ต้องการ จากวิธีการเดิมที่ต้องทำหาสมการแนวลายเส้นใหม่แล้วทำการเคลื่อนย้ายจุดทุกจุดไปตามสมการแนวลายเส้นใหม่ แต่วิธีการของ WT ทำให้สามารถทำการแยกข้อมูลที่ตัวแทนแนวลายเส้นออกมา แล้วทำการเปลี่ยนแปลงเฉพาะข้อมูลเหล่านั้นให้แสดงเป็นภาพแนวลายเส้นที่ต้องการ จากหลักการดังกล่าวนี้สามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมของการแก้ไขลายเส้นได้ดังแสดงในภาพที่ 78

ภาพที่ 78



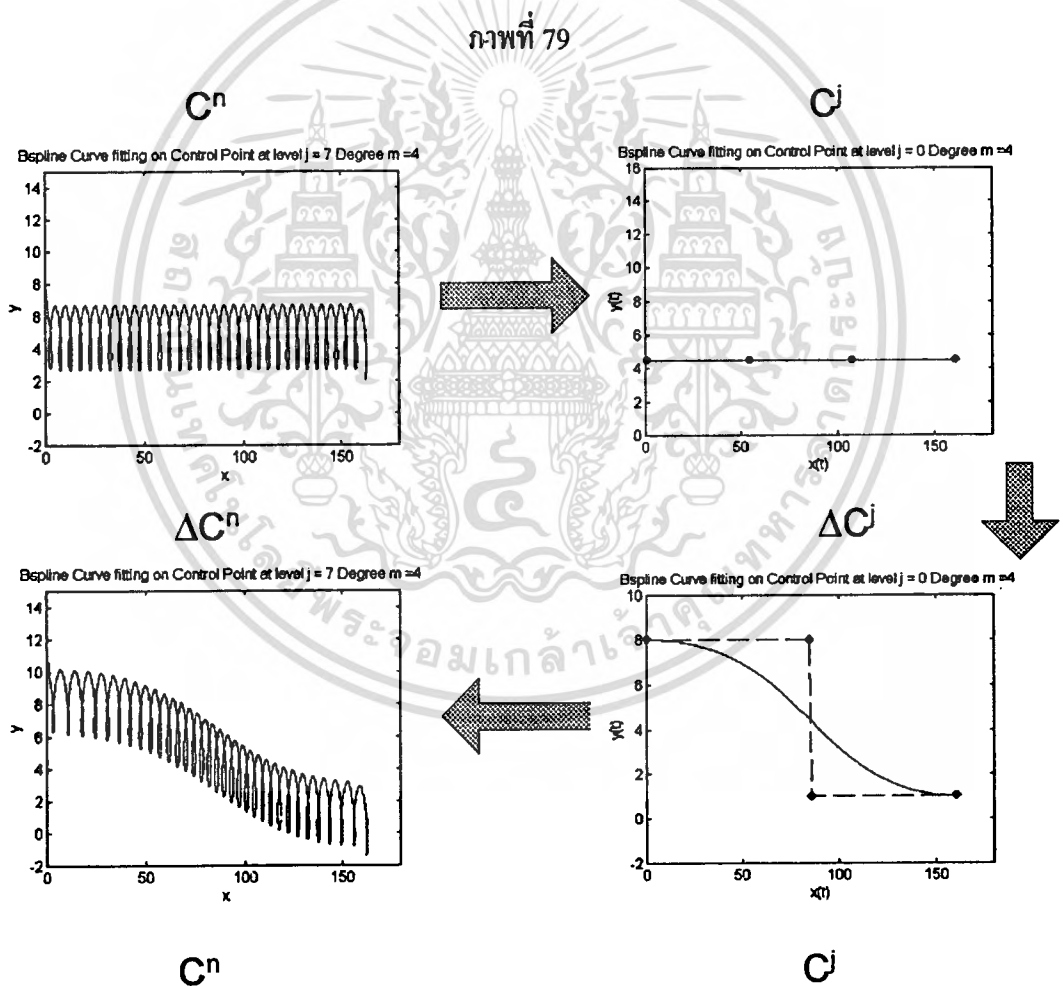
แสดงบล็อกไดอะแกรมของการแก้ไขแนวของลายเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากบล็อกโคโคแกรมในภาพที่ 78 เป็นการนำข้อมูลภาพลายเส้นมาทำขบวนการ WT จนถึงระดับความละเอียด j ใดๆ แล้วทำการเปลี่ยนแปลงข้อมูลของจุดควบคุมที่ระดับความละเอียดนั้น เพื่อให้แนวลายเส้นเปลี่ยนไปตามที่ต้องการ ดังแสดงในการทดลองที่ 6.8 และ 6.9

การทดลองที่ 6.8 การแก้ไขแนวของลายเส้นที่ระดับ $j = 0$

ต้องการทำการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้นรูปสปริงที่มีลักษณะเป็นเส้นตรง ให้กลายเป็นแนวเส้นโค้ง โดยการแก้ไขข้อมูลที่ระดับ $j = 0$ ผลการทดลองได้แสดงไว้ในภาพที่ 79



ผลการทดลองการแก้ไขแนวของลายเส้นที่ระดับ $j = 0$ ในการทดลองที่ 6.8

จากภาพที่ 79 เมื่อทำการแปลง WT ลงมาจนถึงระดับความละเอียด $j = 0$ จะทำให้มีข้อมูลเหลืออยู่ C^0 จำนวน 4 คู่ลำดับ ซึ่งเมื่อนำข้อมูลที่เหลืออยู่เหล่านี้ มาสร้างเป็นลายเส้น B-spline จะแสดงเป็นแนวลายเส้นตรง ข้อมูลใน C^0 เป็นดังนี้

C_x^0	1.1727	54.7384	107.7575	161.3314
C_y^0	4.4955	4.5128	4.4869	4.5149

จากนั้นทำการเปลี่ยนตำแหน่งของคู่ลำดับเหล่านี้ เพื่อสร้างเป็นแนวลายเส้นใหม่ที่มีลักษณะเป็นแนวเส้นโค้ง โดยทำการเปลี่ยนข้อมูลใน C^0 เป็นดังตาราง

ΔC_x^0	1	85	86	161
ΔC_y^0	8	8	1	1

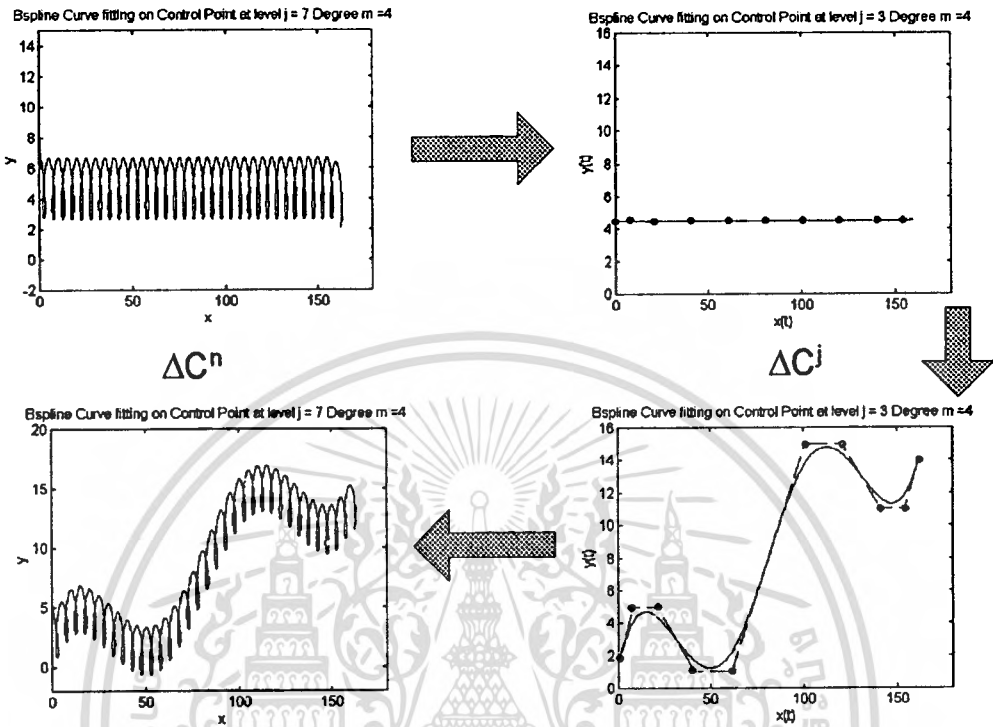
แล้วทำการรวมกลับข้อมูล ก็จะได้เป็นภาพลายเส้นที่มีแนวของลายเส้นเปลี่ยนไปตามที่ ต้องการ โดยยังคงมีรายละเอียดเป็นรูปสปริงเช่นเดิม

การทดลองที่ 6.9 การแก้ไขแนวของลายเส้นที่ระดับ $j = 3$

ต้องการทำการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้นรูปสปริงที่มีลักษณะเป็นเส้นตรง ให้กลายเป็นแนวเส้นโค้งที่ซับซ้อนขึ้น โดยการแก้ไขข้อมูลที่ระดับ $j = 3$ ผลการทดลองได้แสดงไว้ในภาพที่ 80

จากการทดลองที่ 6.8 และ 6.9 จะเห็นว่าสามารถทำการแก้ไขแนวของลายเส้นได้อย่างง่ายดายและสะดวกมาก รวมทั้งยังสามารถมองเห็นแนวของลายเส้นที่จะเปลี่ยนไปได้อย่างรวดเร็วก่อนที่จะเห็นลายเส้นจริงทั้งหมด เนื่องจากสามารถสร้างลายเส้นเพื่อตรวจสอบแนวของลายเส้นจากจุดข้อมูลที่เหลืออยู่ซึ่งจะมีจำนวนน้อยมาก นอกจากนี้ในกรณีที่ต้องการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้นให้มีความละเอียดหรือมีความยืดหยุ่นมากขึ้น ก็สามารถทำได้ที่ระดับความละเอียดสูงขึ้น ซึ่งจะมีจำนวนข้อมูลของ C^j ที่จะใช้ในการเปลี่ยนแปลงมากขึ้น ทำให้สามารถกำหนดแนวของลายเส้นได้อย่างละเอียดซับซ้อนมากขึ้น

ภาพที่ 80



ผลการทดลองการแก้ไขแนวของสายเส้นที่ระดับ $j = 3$ ในการทดลองที่ 6.9

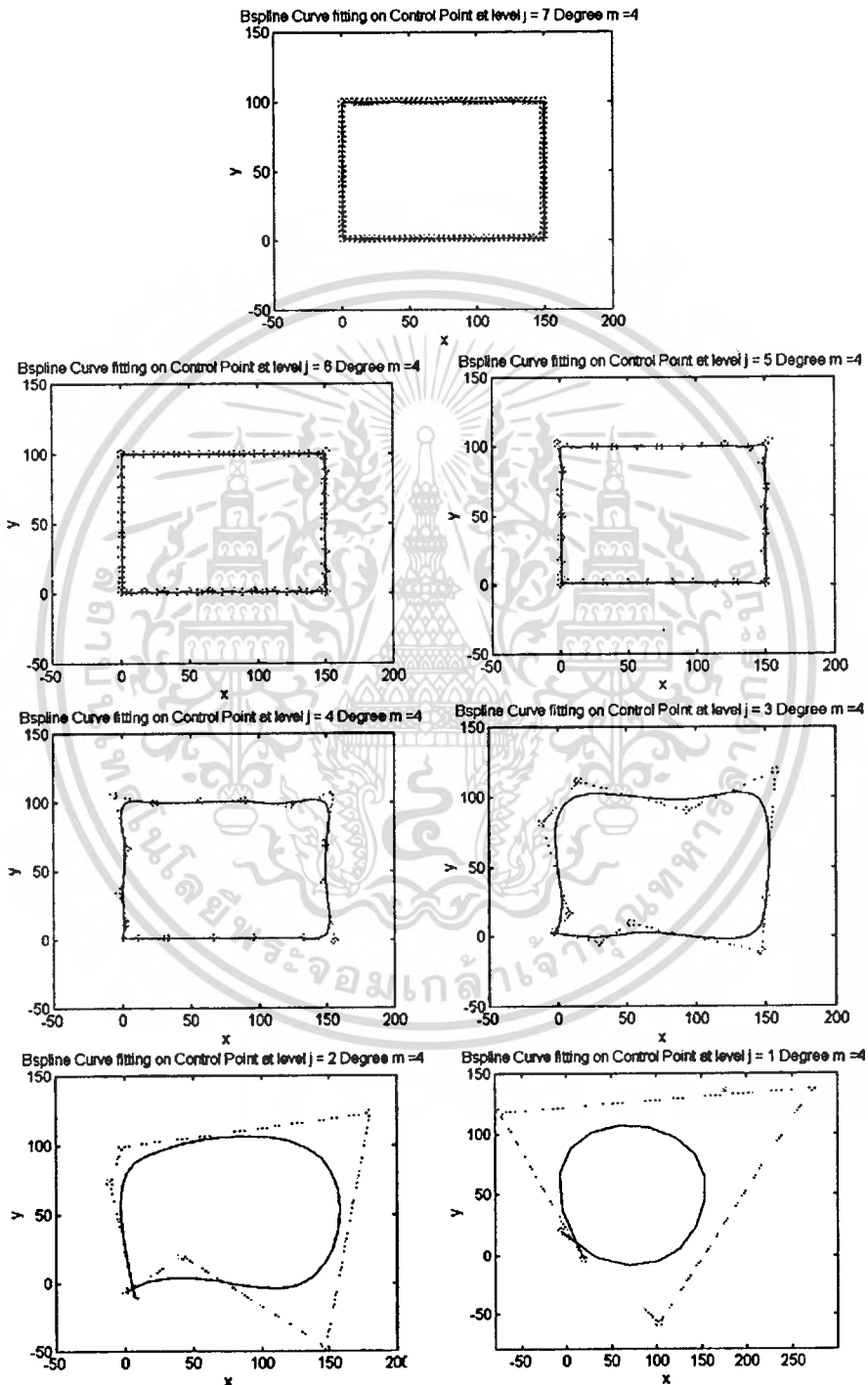
จากหลักการนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการแก้ไขลักษณะแนวเส้นรอบรูปของรูปทรงเรขาคณิตในกรณี 2 มิติ และ 3 มิติ ได้เช่นกัน ซึ่งจะแสดงให้เห็นในการทดลองที่ 6.10 ถึง 6.14

การทดลองที่ 6.10 การแตกกระจายข้อมูลรูปทรงเรขาคณิต 2 มิติ โดยใช้ข้อมูลต่อเนื่องชุดเดียว

ในที่นี้จะใช้ข้อมูลเส้นรอบรูปของรูปทรงเรขาคณิตเป็นอินพุตที่ต่อเนื่องกันชุดเดียว นำมาทำการแตกกระจายข้อมูลจนถึงระดับ $j = 0$ ผลการทดลองแสดงในภาพที่ 81

ในภาพที่ 81 ที่ระดับ $j = 0$ จะเห็นว่าลักษณะของแนวของเส้นรอบรูปจะเป็นวงกลม ทั้งๆที่ภาพต้นแบบเป็นที่เหลี่ยม สาเหตุเนื่องจากข้อมูลทั้งหมดจะมีลักษณะที่สัมพันธ์กัน โดยเฉพาะตรงมุมของสี่เหลี่ยม ซึ่งลักษณะแนวสายเส้นที่ระดับ $j = 0$ แบบนี้ จะทำให้การเปลี่ยนแปลงแนวของสายเส้นรอบรูปกระทำได้ยาก เนื่องจากไม่สามารถคาดคะเนผลลัพธ์สุดท้ายที่จะปรากฏออกมาภายหลังการรวมกลับข้อมูล วิธีการแก้ปัญหานี้ คือ ทำการแบ่งส่วนของเส้นรอบรูปออกเป็นส่วนๆ ซึ่งได้เป็นชุดข้อมูลอินพุตหลายชุดตามส่วนของเส้นตรงที่แบ่ง ดังแสดงในการทดลองที่ 6.11

ภาพที่ 81



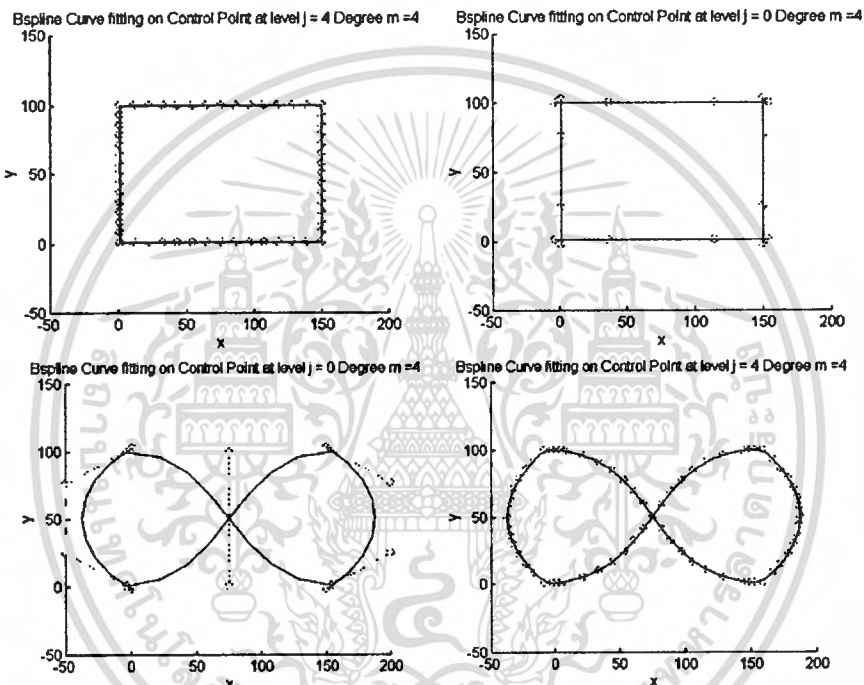
ผลการทดลองการแตกกระจายเส้นรอบรูปในการทดลองที่ 6.10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทดลองที่ 6.11 การแก้ไขแนวของรูปทรงเรขาคณิตโดยใช้การแบ่งข้อมูลเป็นส่วนๆ

ในการทดลองนี้จะใช้รูปทรงเรขาคณิตจากการทดลองที่ 6.10 แต่จะทำการแบ่งข้อมูลเส้นรอบรูปออกเป็นเส้นตรง 4 เส้น โดยแต่ละเส้นจะมีจุดควบคุมเท่ากับ 19 จุดหรือมีระดับความละเอียด $j = 4$ ดังนั้นจะได้ข้อมูลอินพุต 4 ชุด นำมาทำ WT โดยแยกอิสระต่อกัน จนถึงระดับ $j = 0$

ภาพที่ 82



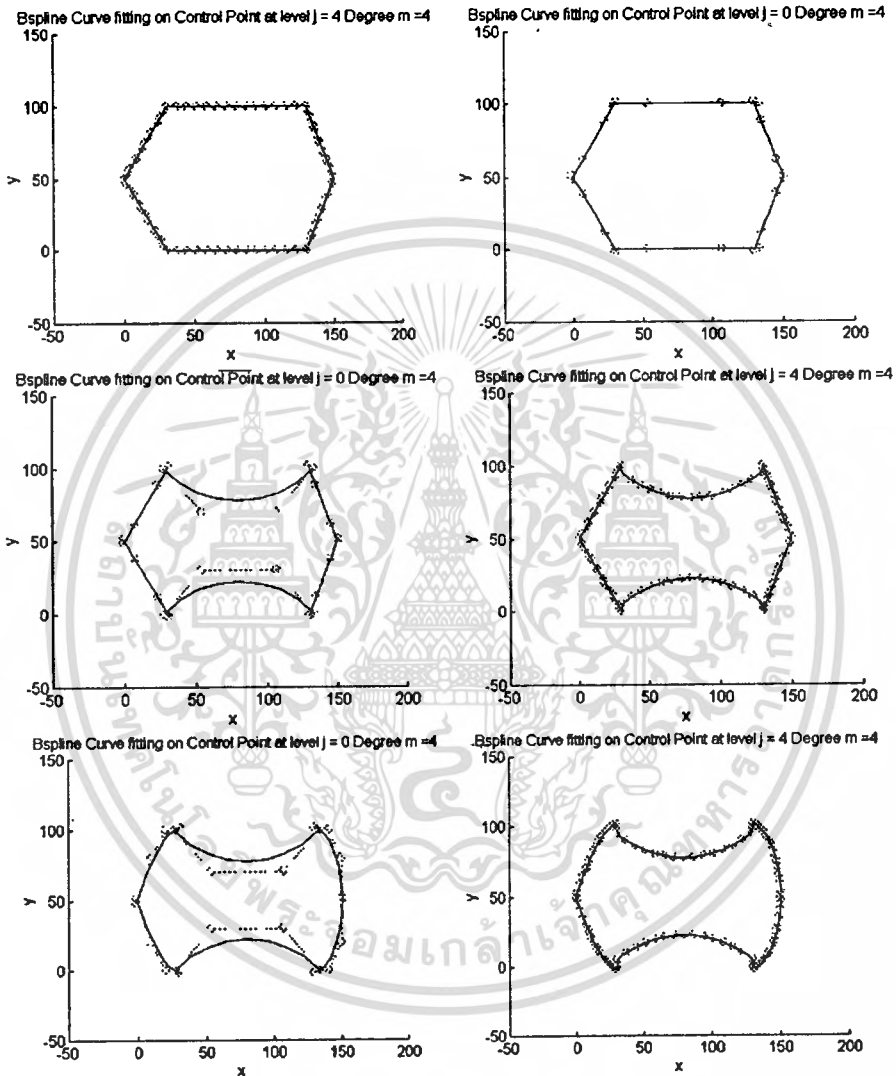
ผลการทดลองการแก้ไขรูปทรงเรขาคณิตแบบแบ่งข้อมูลเป็นส่วนๆ ในการทดลองที่ 6.11

จากภาพที่ 82 ด้านบน จะเห็นว่าเมื่อทำการแปลงข้อมูลถึงระดับ $j = 0$ แนวของเส้นรอบรูปยังคงเป็นสี่เหลี่ยมเช่นเดิม เพียงแต่มีข้อมูลน้อยลงเท่านั้น ดังนั้นสามารถทำการเปลี่ยนแปลงแนวของลายเส้นรอบรูปในแต่ละส่วนได้ดังแสดงในภาพที่ 82 ด้านล่าง จากนั้นทำการรวมกลับข้อมูลกลับไป ก็จะได้แนวของลายเส้นรอบรูปที่เปลี่ยนไปตามความต้องการนั่นเอง

ในการทดลองที่ 6.12 6.13 และ 6.14 จะเป็นการแก้ไขแนวของรูปทรงเรขาคณิตโดยการแบ่งข้อมูลลายเส้นออกเป็นส่วนๆ เหมือนในการทดลองที่ 6.11 โดยที่จำนวนข้อมูลในแต่ละส่วนจะเท่ากับ $2^j + 3$ เสมอ

การทดลองที่ 6.12 การแก้ไขแนวของรูปห้าเหลี่ยมที่ระดับ $j = 4$

ภาพที่ 83

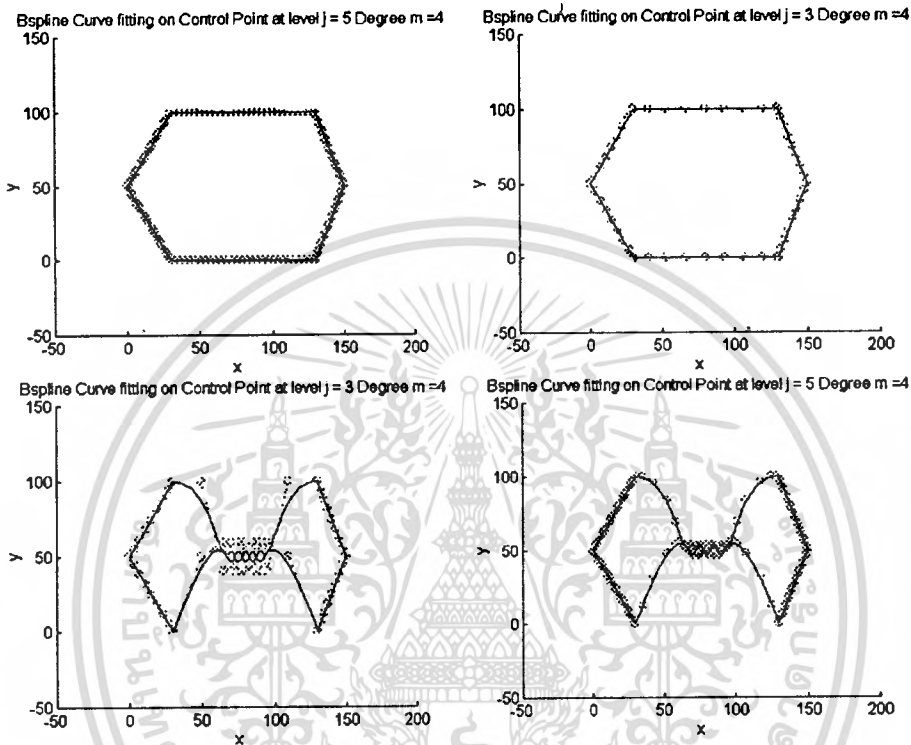


ผลการทดลองการแก้ไขแนวรูปห้าเหลี่ยมในการทดลองที่ 6.12

ในภาพที่ 83 ด้านบนเป็นรูปห้าเหลี่ยมอินพุตที่ถูกแปลงมาที่ระดับ $j = 0$ ในขณะที่ภาพด้านล่างสี่ภาพจะเป็นตัวอย่างสองรูปแบบสำหรับการแก้ไขแนวของรูปทรงห้าเหลี่ยมที่ระดับ $j = 0$ แล้วทำการรวมกลับข้อมูลกลับไปที่ระดับ $j = 4$ เช่นเดิม

การทดลองที่ 6.13 การแก้ไขแนวของรูปห้าเหลี่ยมที่ระดับ $j = 5$

ภาพที่ 84



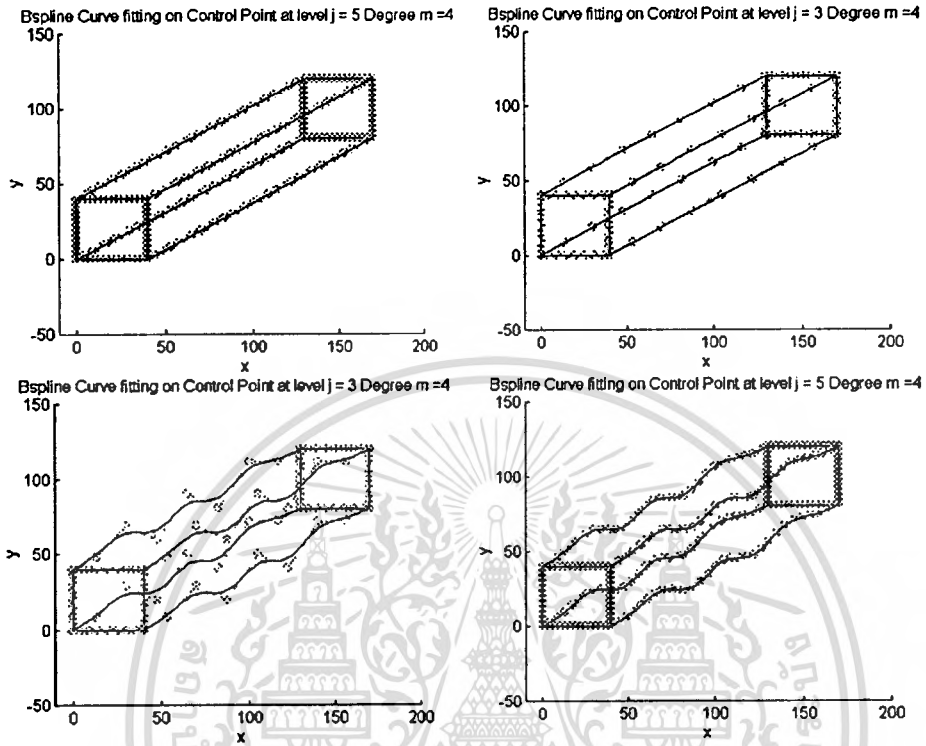
ผลการทดลองการแก้ไขแนวรูปห้าเหลี่ยมที่ระดับ $j = 5$ ในการทดลองที่ 6.13

ในภาพที่ 84 จะเป็นการแก้ไขแนวรูปห้าเหลี่ยมคล้ายกับการทดลองที่ 6.12 เพียงแต่ทำการเพิ่มข้อมูลเข้าไป เพื่อทำการเปลี่ยนแปลงแนวของหลายเส้นในระดับที่ $j = 3$ ทำให้มีข้อมูลในการเปลี่ยนแปลงมากขึ้นนั่นเอง

การทดลองที่ 6.14 การแก้ไขแนวของแท่งรูปสี่เหลี่ยม 3 มิติที่ระดับ $j = 5$

เป็นแก้ไขแนวของแท่งของรูปสี่เหลี่ยม 3 มิติ โดยใช้หลักการแบ่งข้อมูลหลายเส้นเป็นส่วนๆ เช่นเดิม แต่ละส่วนจะมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ $2^j + 3$ เทอม ในการทดลองนี้จะเป็นการบิดเฉพาะแนวตามยาวของแท่งสี่เหลี่ยมให้เป็นคลื่น ดังแสดงในภาพที่ 85

ภาพที่ 85



ผลการทดลองการแก้ไขแนวของรูปแท่งสี่เหลี่ยมในการทดลองที่ 6.14

จากการทดลองที่กล่าวมาทั้งหมด จะเห็นว่าการนำคุณสมบัติของ WT มาใช้ในการแก้ไขแนวของลายเส้น จะทำให้สามารถแก้ไขแนวของลายเส้นได้อย่างสะดวกและรวดเร็วกว่าการหาสมการแนวของลายเส้นใหม่ เนื่องจากจำนวนข้อมูลที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก (ระดับ $j = 0$ จะมีข้อมูลเพียง 4 เทอมเท่านั้น) และสามารถพิจารณาตรวจสอบเปลี่ยนแปลงแนวลายเส้นใหม่ได้อย่างรวดเร็ว ก่อนที่จะทำการรวมกลับข้อมูลเพื่อให้ได้เป็นภาพลายเส้นดั้งเดิม

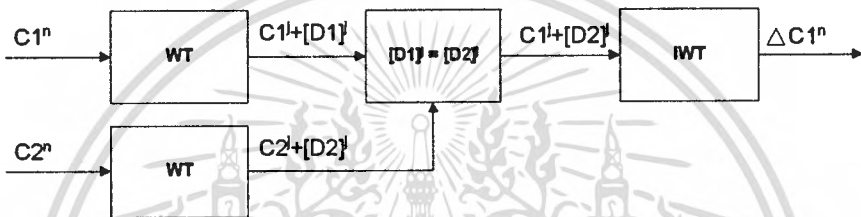
การทดลองแก้ไขรายละเอียดของลายเส้น

โดยปรกติแล้วการแก้ไขรายละเอียดของลายเส้นจะสามารถกระทำได้ด้วยวิธีการหาสมการของลายเส้นใหม่ทั้งหมด ซึ่งวิธีการดังกล่าวจะเป็นการยุ่งยากเนื่องจากรายละเอียดของลายเส้นจะเปลี่ยนแปลงไม่แน่นอน แต่จากการที่ WT สามารถทำการแยกข้อมูลรายละเอียดของลายเส้นออกมา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ได้ทำให้สามารถทำการเปลี่ยนรายละเอียดของลายเส้นได้ง่ายขึ้น โดยทำการเปลี่ยนกลุ่มข้อมูลที่แสดงรายละเอียดของลายเส้นด้วยกลุ่มข้อมูลรายละเอียดใหม่ที่เตรียมไว้แล้ว ดังนั้นระบบจึงมีความสะดวกและง่ายต่อการแก้ไขรายละเอียด นอกจากนี้ยังสามารถเก็บข้อมูลรายละเอียดเหล่านี้ไว้เป็นฐานข้อมูลเพื่อใช้ต่อไปได้อีกด้วย จากหลักการดังกล่าวมาสามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมของการเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของลายเส้น ได้ดังแสดงในภาพที่ 86

ภาพที่ 86



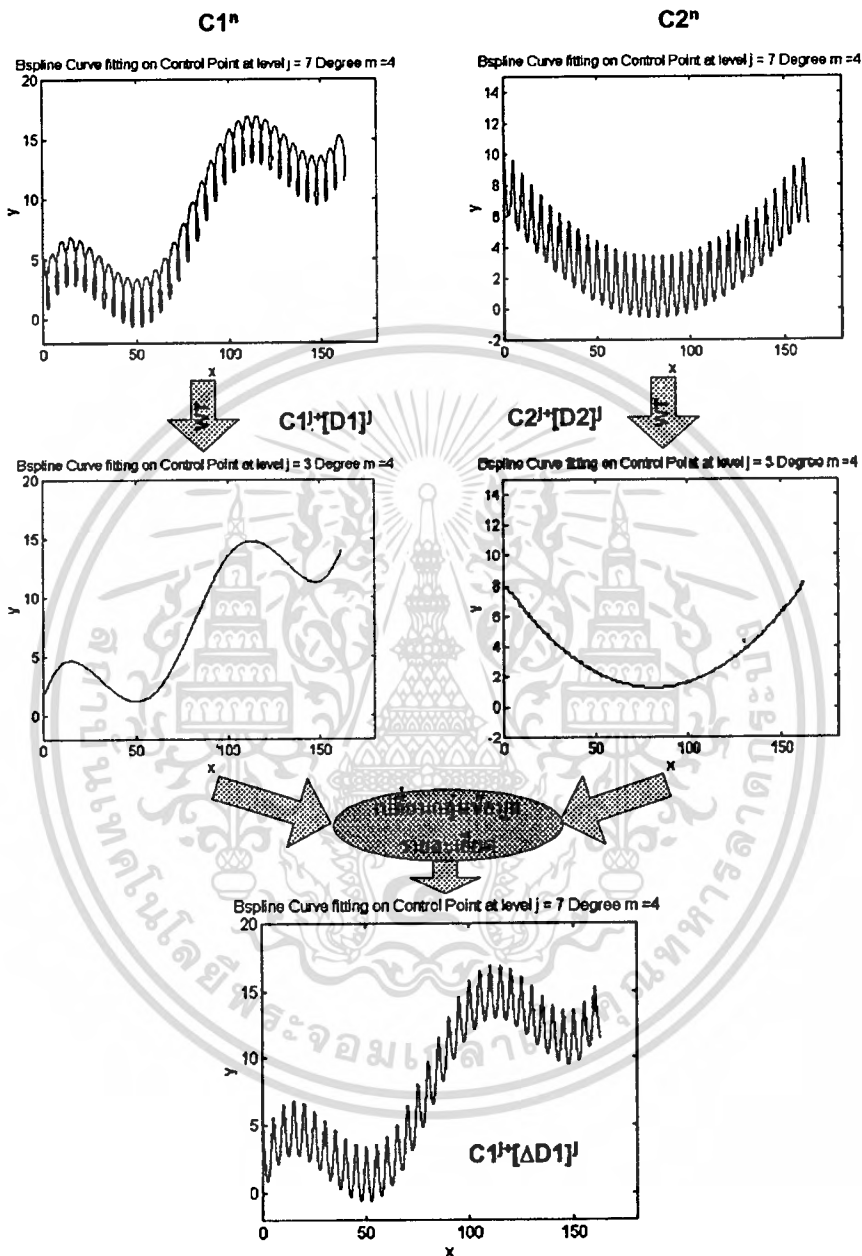
แสดงบล็อก ไดอะแกรมของการแก้ไขรายละเอียดของลายเส้น

ในภาพที่ 86 แสดงลักษณะการแก้ไขรายละเอียดของข้อมูลภาพลายเส้น $C1^n$ ให้กลายเป็นรายละเอียดของข้อมูลภาพลายเส้น $C2^n$ โดยการนำข้อมูลภาพลายเส้น $C1^n$ และ $C2^n$ ซึ่งมีระดับความละเอียดระดับที่ n มาทำ WT ไปที่ระดับความละเอียด j ใดๆ จากนั้นทำการแทนที่ข้อมูลรายละเอียด $[D1]^j$ ของภาพ $C1^n$ ด้วยรายละเอียด $[D2]^j$ ของภาพ $C2^n$ แล้วนำข้อมูลที่ได้รับการเปลี่ยนแปลงนี้ไปทำการรวมกลับไปที่ระดับความละเอียด n ก็จะได้เป็นภาพลายเส้น $\Delta C1^n$ ที่มีรายละเอียดเป็นของภาพลายเส้น $C2^n$ แต่ยังคงมีแนวของลายเส้นเช่นเดิม จากหลักการดังกล่าวสามารถพิจารณาผลลัพธ์ได้จากการทดลองดังต่อไปนี้

การทดลองที่ 6.15 การแก้ไขรายละเอียดของภาพลายเส้น

ในภาพที่ 87 ภาพทางด้านซ้ายจะเป็นภาพลายเส้นที่มีรายละเอียดเป็นรูปสปริงและมีแนวลายเส้นเป็นเส้นโค้ง ส่วนภาพทางด้านขวาจะเป็นภาพลายเส้นที่มีรายละเอียดเป็นรูปพื้นเลื้อนมีแนวเส้นเป็นแบบพาราโบลา ในที่นี้จะทำการเปลี่ยนรายละเอียดภาพทางด้านซ้ายมือให้กลายเป็นรูปพื้นเลื้อนในขณะที่แนวของลายเส้นยังคงเป็นเส้นโค้งเช่นเดิม

ภาพที่ 87

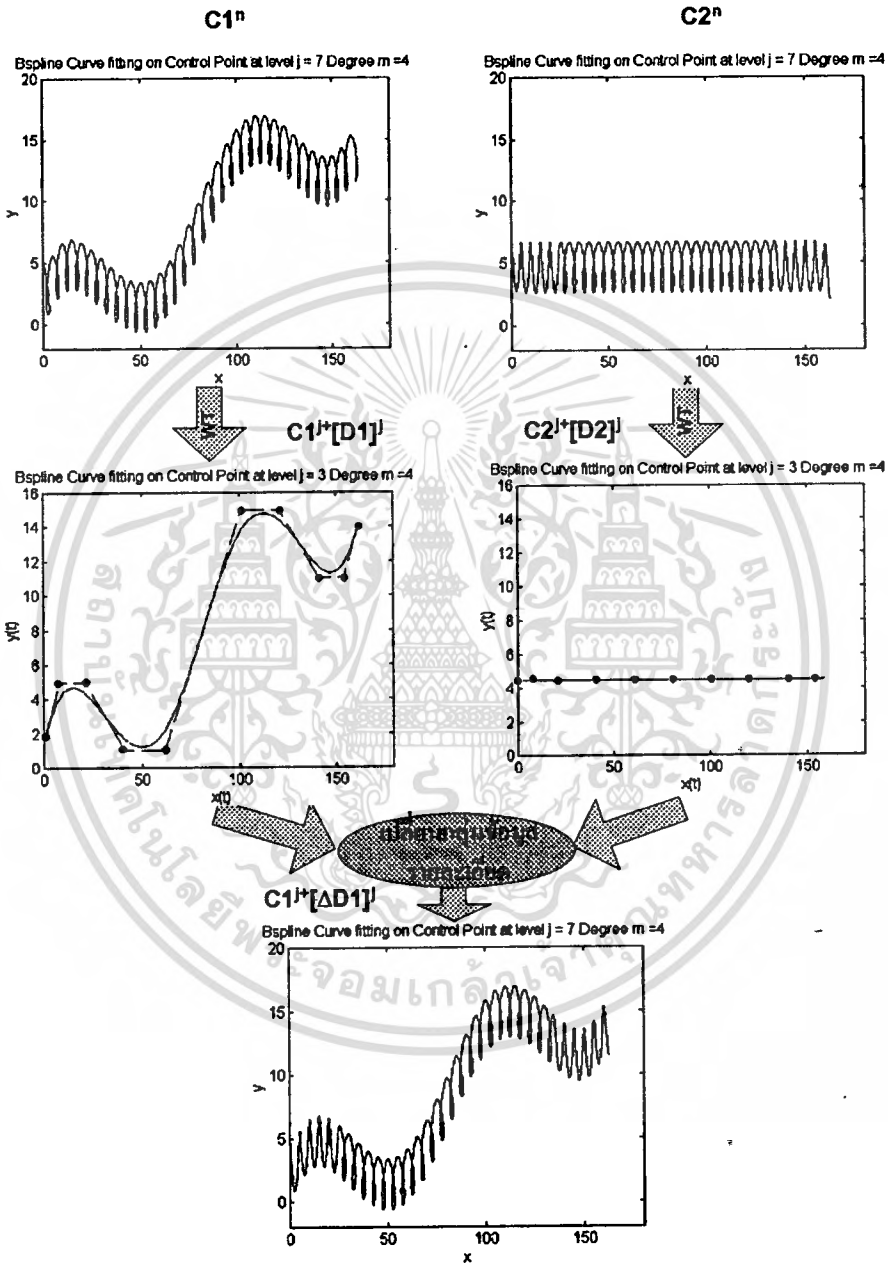


ผลการทดลองในการแก้ไขรายละเอียดในการทดลองที่ 6.15

ในภาพที่ 87 จะเป็นการแลกเปลี่ยนรายละเอียดกันที่ระดับ $j = 3$ เนื่องจากต้องการรักษา รายละเอียดของแนวลาชเส้นโค้งของภาพด้านขวาไว้นั่นเอง ส่วนภาพที่ 88 ก็เป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง เช่นกันแต่จะสังเกตเห็นว่ารายละเอียดจะเป็นรูปสปริงตรงปลายและรูปพื้นเล็ขอบริเวณตรงกลาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพที่ 88



ผลการทดลองตัวอย่างที่ 2 ของการทดลองที่ 6.15

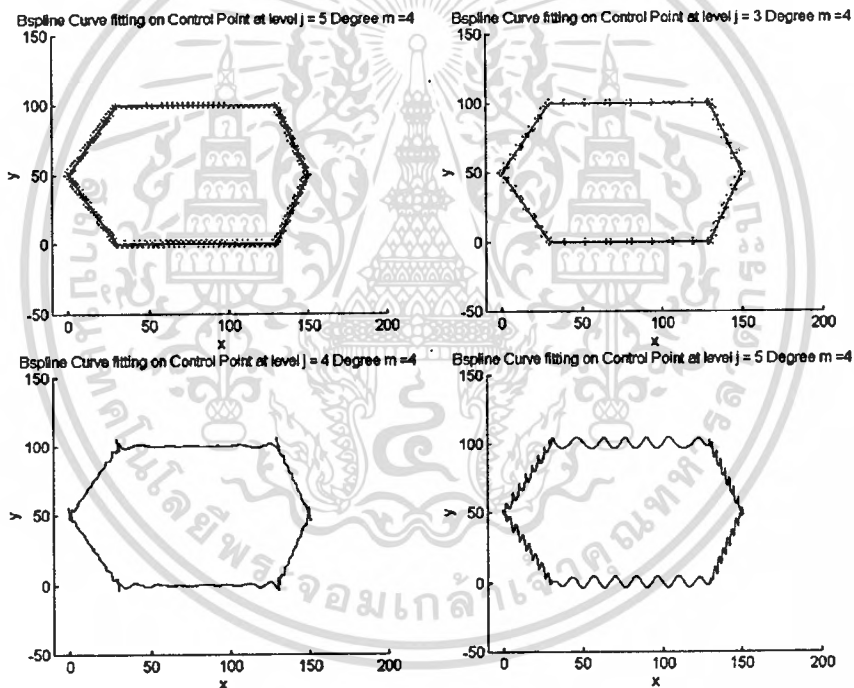
จากหลักการแก้ไขรายละเอียดของหลายเส้นนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการแก้ไขรายละเอียดของภาพรูปทรงเรขาคณิตได้เช่นกัน ดังแสดงในการทดลองที่ 6.16 ถึง 6.18

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทดลองที่ 6.16 การแก้ไขรายละเอียดของภาพรูปห้าเหลี่ยม

ในการทดลองนี้จะยังคงแบ่งลายเส้นออกเป็นส่วนๆที่ระดับ $j = 5$ (แต่ละส่วนมีจำนวนข้อมูล $2^j + 3$ เทอม) แล้วนำมาทำ WT จนกระทั่งถึงระดับความละเอียดที่ $j = 3$ ในขณะเดียวกันก็นำภาพลายเส้นพื้นเลื่อยที่ระดับความละเอียด $j = 5$ มาแยกรายละเอียดจนถึงระดับ $j = 3$ นำรายละเอียดจากระดับ $j = 3$ ถึง 5 ไปใส่ในข้อมูลลายเส้นรูปห้าเหลี่ยมในแต่ละส่วนแล้วทำการรวมกลับข้อมูลไปที่ระดับความละเอียด $j = 5$ เช่นเดิม ซึ่งก็จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงในภาพที่ 89

ภาพที่ 89



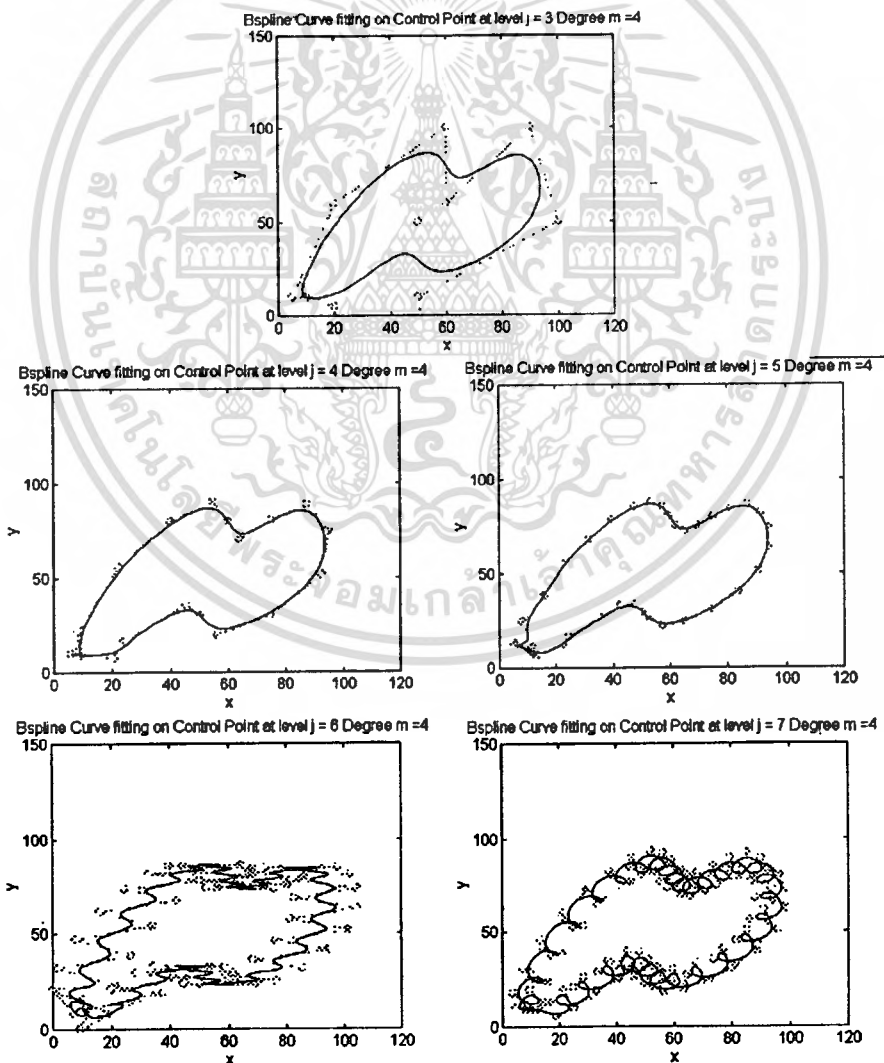
ผลการทดลองการแก้ไขรายละเอียดของรูปห้าเหลี่ยมในการทดลองที่ 6.16

ในภาพที่ 89 ด้านบนจะเป็นภาพอินพุตที่แสดงที่ระดับความละเอียด $j = 5$ และภาพลายเส้นหลังจากผ่านการแปลงมาที่ระดับ $j = 3$ ส่วนภาพด้านล่างเป็นภาพที่เกิดจากการรวมกลับข้อมูลของระดับ $j = 4$ และ 5 ซึ่งถูกเปลี่ยนแปลงด้วยรายละเอียดของรูปพื้นเลื่อยเรียบร้อยแล้ว

การทดลองที่ 6.17 การแก้ไขรายละเอียดของภาพรูปเลขแปด

ในการทดลองนี้จะไม่แบ่งลายเส้นออกเป็นส่วนๆ แต่จะใช้ลายเส้นรอบรูประดับ $j = 3$ ที่มีจำนวนข้อมูลเท่ากับ 11 เทอม ซึ่งทำให้เกิดเป็นภาพลายเส้นรอบรูปเลขแปด จากนั้นนำภาพลายเส้นรูปสปริงที่ระดับความละเอียด $j = 7$ มาทำ WT ลงถึงระดับ $j = 3$ แล้วนำกลุ่มข้อมูลรายละเอียดของภาพสปริงมาใส่ในข้อมูลลายเส้นรอบรูปเลขแปดดังกล่าว แล้วทำการรวมกลับข้อมูล ก็จะทำให้ได้ภาพรูปเลขแปดที่มีรายละเอียดเป็นรูปสปริง ซึ่งในขณะนี้มีจำนวนข้อมูลเท่ากับ 131 เทอม ($2^7 + 3$) ผลการทดลองแสดงในภาพที่ 89

ภาพที่ 89

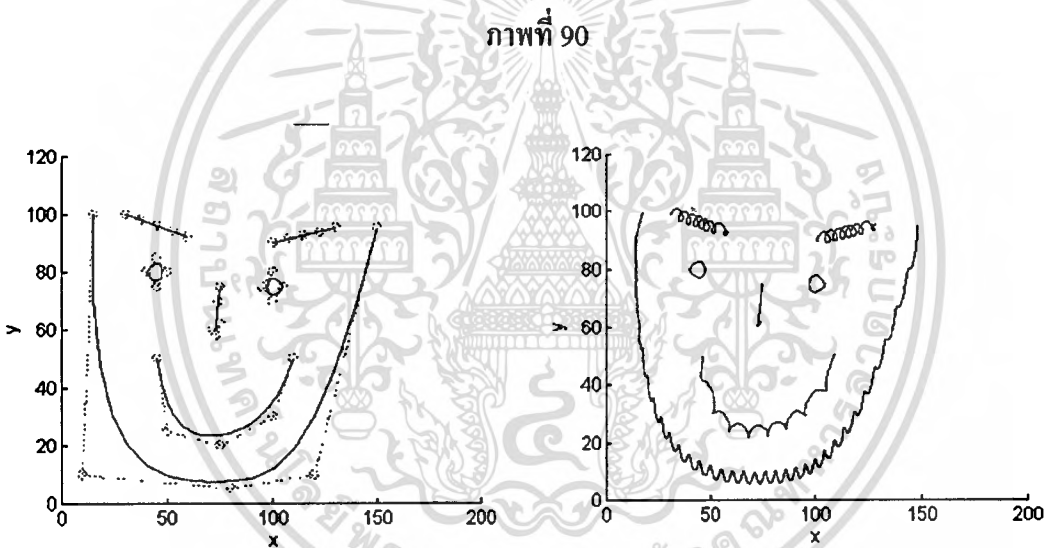


ผลการทดลองการแก้ไขรายละเอียดของรูปเลขแปดในการทดลองที่ 6.17

ในภาพที่ 89 ภาพบนสุดจะเป็นภาพอินพุท ส่วนภาพด้านล่างจะเป็นภาพการรวมกลับ ข้อมูลหลังจากเติมรายละเอียดรูปสปริงเข้าไปที่ระดับ $j = 4, 5, 6$ และ 7 ตามลำดับ

การทดลองที่ 6.18 การแก้ไขรายละเอียดของภาพวาดรูปการ์ตูนหน้าคน

ในที่นี้จะสร้างภาพหน้าคนด้วยลายเส้น 7 ลายเส้น โดยแต่ละลายเส้นจะมีระดับความละเอียดที่ $j = 1$ นั้นแสดงว่าลายเส้นแต่ละอันจะเกิดจากจุดควมเพียง $2^1 + 3$ จุดเท่านั้น จากนั้นนำรายละเอียดของลายเส้นที่เหลือที่ระดับ $j = 7$ มาใส่ที่ลายเส้นคาง และนำรายละเอียดของลายเส้นสปริงที่ระดับความละเอียด $j = 5$ มาใส่ที่ลายเส้นคิ้วและปาก ซึ่งให้ผลลัพธ์ดังแสดงในภาพที่ 90



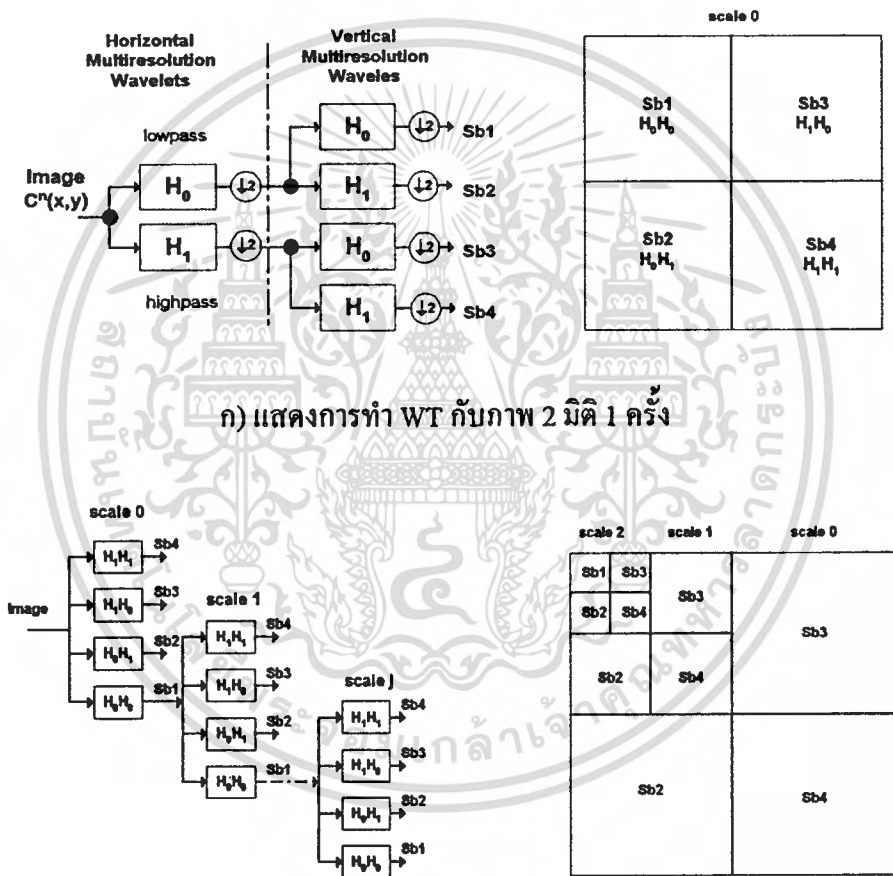
ผลการทดลองแก้ไขรายละเอียดในการทดลองที่ 6.18

นอกจากการเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของภาพรูปทรงเรขาคณิตแล้ว แนวความคิดนี้ยังสามารถนำไปประยุกต์เพื่อการแก้ไขรายละเอียดของภาพถ่าย 2 มิติได้ ซึ่งจะเป็นการทดลองให้เห็นในหัวข้อต่อไป

การทดลองแก้ไขรายละเอียดของภาพถ่าย 2 มิติ

การทำ WT กับภาพถ่าย 2 มิติจะเป็นการทำการแปลงเวฟเล็ตในทางแนวแกน x และแกน y สลับกันในแต่ละครั้ง ซึ่งสามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมได้ดังแสดงในภาพที่ 91 [1][2][9][10]

ภาพที่ 91

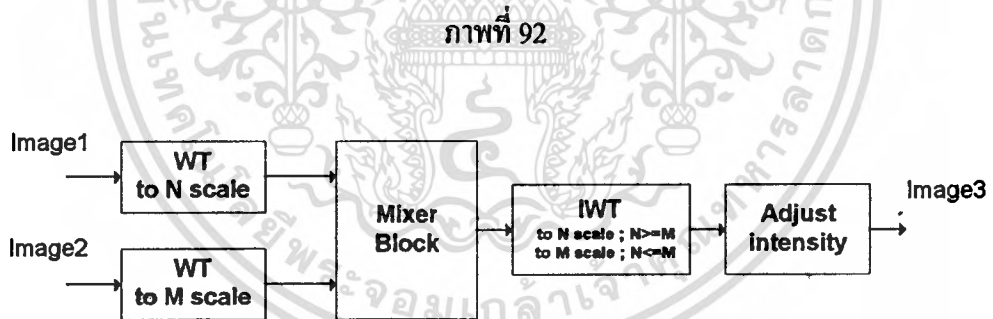


ข) แสดงบล็อกไดอะแกรมการทำ WT กับภาพ 2 มิติถึงระดับสเกล j

จากภาพที่ 91 สามารถอธิบายได้ว่า การทำ WT 2 มิติ จะเป็นการทำ WT ในแนวแกน x ตามจำนวนแถวของจุดภาพ ซึ่งทำให้ภาพถูกแบ่งเป็น 2 ชั้นแบนด์ จากนั้นทำ WT ในแนวแกน y ตามจำนวนคอลัมน์ของจุดภาพ ซึ่งทำให้ภาพถ่าย 2 มิติที่ผ่านการทำ WT หนึ่งครั้งจะถูกแบ่งเป็น 4 ส่วน (ชั้นแบนด์) ตามที่แสดงในรูปที่ 91 ก) ชั้นแบนด์ที่ 1 ($Sb1$) จะเป็นส่วนภาพที่ผ่าน Lowpass filter ทั้งสองแนวแกน ชั้นแบนด์ที่ 2 ($Sb2$) จะเป็นส่วนภาพที่ผ่าน Highpass filter ในแนวนอนและ

Lowpass filter ในแนวดิ่ง ชั้นแบนด์ที่ 3 (Sb3) จะเป็นส่วนภาพที่ผ่าน Lowpass filter ในแนวนอน และ Highpass filter ในแนวดิ่ง ชั้นแบนด์สุดท้าย (Sb4) จะเป็นส่วนภาพที่ผ่าน Highpass filter ทั้งสองแนวแกน ดังนั้นส่วนที่แสดงรายละเอียดของภาพจะเป็นส่วนข้อมูลในชั้นแบนด์ที่ 2, 3, 4 นอกจากนี้ เมื่อนำเอาชั้นแบนด์ที่ 1 ไปทำ WT ต่อไปเรื่อยๆ ก็จะสามารถทำการแยกชั้นแบนด์ของภาพออกไปได้มากขึ้นด้วย

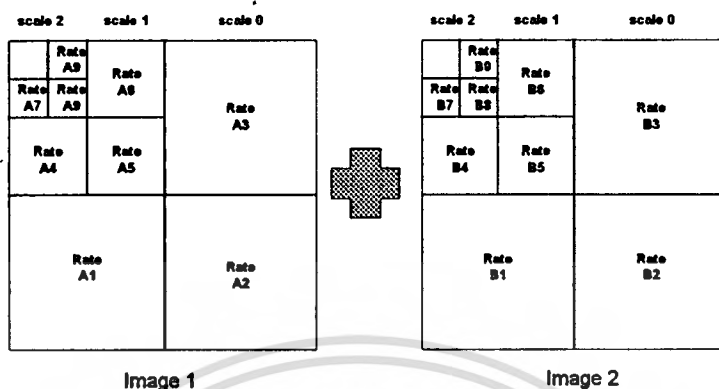
ในการทดลองการเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของภาพถ่าย 2 ภาพ สามารถกระทำได้โดยการแลกเปลี่ยนหรือผสมกันระหว่างชั้นแบนด์ที่เป็นส่วนภาพที่ผ่าน Highpass filter ในที่นี้คือ Sb2, 3 และ 4 ในแต่ละระดับของการทำ WT จากคุณสมบัติของ WT จะเห็นว่าสามารถทำการแลกเปลี่ยนหรือผสมข้อมูลที่ชั้นแบนด์ใดก็ได้ตามอัตราส่วนอย่างเป็นอิสระในแต่ละชั้นแบนด์ นอกจากนี้ยังสามารถเพิ่มจำนวนชั้นแบนด์ในการผสมได้โดยการเพิ่มระดับของการทำ WT ซึ่งทำให้ได้ชั้นแบนด์เพิ่มขึ้น สิ่งเหล่านี้จะเป็นข้อดีของการผสมภาพโดยใช้ WT ที่สามารถปรับอัตราส่วนการผสมได้หลายพารามิเตอร์ตามความต้องการทำให้เกิดความยืดหยุ่นและความอิสระในการผสมภาพ ซึ่งต่างจากการผสมภาพโดยการบวกกันตรงที่จะสามารถทำได้เพียงการปรับอัตราส่วนผสมกับภาพทั้งภาพเท่านั้น หลักการที่กล่าวมานี้จะแสดงให้เห็นในภาพที่ 92 และ 93



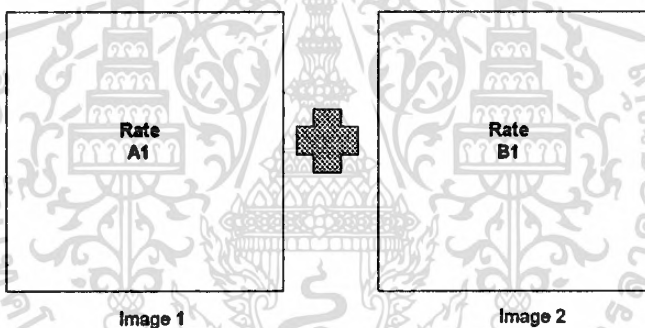
แสดงบล็อกโคโอะแกรมของการผสมภาพถ่ายโดยใช้ WT

ในภาพที่ 92 จะแสดงบล็อกโคโอะแกรมตามหลักการที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ใน Mixer Block ก็จะเป็นการผสมกันระหว่างชั้นแบนด์ของภาพทั้งสอง ซึ่งจะสามารถปรับอัตราส่วนการผสมได้ตามที่แสดงในภาพที่ 93 เมื่อทำการผสมเรียบร้อยแล้ว ก็จะมีการรวมกลับข้อมูล ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะต้องมีการปรับค่าของจุดภาพให้อยู่ระหว่าง "0" ถึง "255" เพื่อจะได้แสดงภาพในระดับขาวดำได้ต่อไป

ภาพที่ 93



ก) การผสมภาพระหว่างซับแบนด์โดยใช้อัตราส่วนต่างกัน



ข) การผสมภาพทั้งภาพโดยวิธีการบวกกันโดยตรง

ในภาพที่ 93 แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างการผสมภาพโดยใช้เทคนิค WT กับการบวกกันโดยตรง ในที่นี้ คำว่า "Rate" จะหมายถึงอัตราส่วนค่าคงที่ที่ใช้ในการคูณกับข้อมูลในซับแบนด์นั้นๆเพื่อปรับอัตราส่วนการผสมภาพนั่นเอง

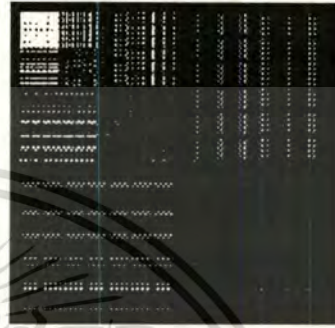
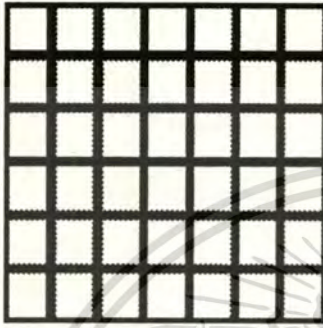
การทดลองที่ 6.19 การผสมภาพรูปทรงเรขาคณิตกับภาพรูปลายผ้า

เป็นการทดลองการผสมภาพรูปทรงเรขาคณิตกับภาพลายผ้า โดยการใช้เทคนิคของ WT ซึ่งจะทำการแปลงเวฟเกิด 3 ระดับ จากนั้นทำการผสมภาพโดยใช้ภาพลายผ้าเป็นภาพหลัก นั่นคือจะใช้ส่วนภาพที่ผ่าน Lowpass filter จากภาพลายผ้า ในขณะที่ซับแบนด์อื่นๆจะเกิดจากการผสมกันด้วยอัตราส่วนที่แตกต่างกันออกไปในแต่ละซับแบนด์ระหว่างภาพทั้งสอง หลังจากนั้นก็ทำการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รวมกลับข้อมูลเพื่อให้ได้ภาพปรกติ ผลการทดลองที่ได้จะเปรียบเทียบกับภาพผสมภาพแบบบวกกันตรงๆเพื่อดูความแตกต่างๆ ดังแสดงในภาพที่ 94

ภาพที่ 94



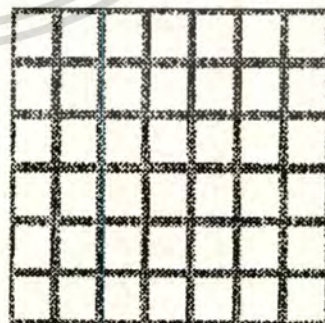
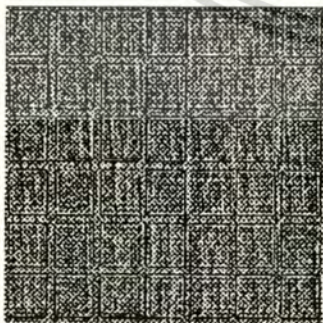
ก) ภาพรูปทรงเรขาคณิต (Image 1)

ข) ภาพการทำ WT ของ Image 1 สามครั้ง



ค) ภาพลายผ้า (Image 2)

ง) ภาพการทำ WT ของ Image 2 สามครั้ง



จ) ภาพที่เกิดจากการผสมด้วย WT ฉ) ภาพที่เกิดจากการผสมกันโดยตรง

แสดงการผสมภาพถ่าย 2 มิติในการทดลองที่ 6.19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

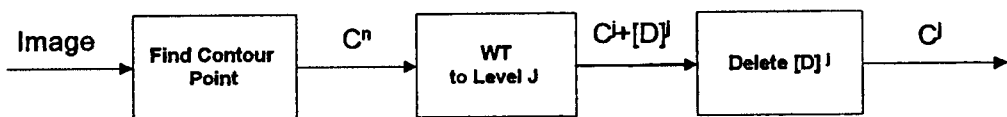
จากภาพที่ 94 จะเห็นว่า การผสมภาพโดยใช้ WT นอกจากจะให้ความยืดหยุ่นในการผสมภาพแล้ว การผสมภาพด้วยวิธีนี้ทำให้ได้ภาพการผสมที่มีรายละเอียดความต่อเนื่องมากกว่าการผสมภาพแบบบวกกันโดยตรง ซึ่งจะเห็นได้ว่าลักษณะของภาพลายผ้าจะปรากฏอย่างชัดเจนและต่อเนื่องกว่าการผสมภาพแบบโดยตรง

จากการทดลองการแก้ไขรายละเอียดของลายเส้นทั้งหมดที่กล่าวมา จะแสดงให้เห็นว่าการใช้เทคนิคการวิเคราะห์สัญญาณแบบ MRA ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่มีอยู่ใน WT จะทำให้สามารถทำการแก้ไขเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของภาพลายเส้นหรือภาพต่างๆที่ระดับความละเอียดใดก็ได้ ซึ่งทำให้มีความยืดหยุ่นและความสะดวกมากในการเปลี่ยนแปลงข้อมูล ดังแสดงให้เห็นแล้วจากการทดลอง

การทดลองการประมาณลายเส้น

การประมาณลายเส้น จะเป็นการลดรายละเอียดของลายเส้นลง ในกรณีที่ลายเส้นมีความละเอียดมากเกินไปจนความจำเป็น ซึ่งก็จะทำให้มีข้อมูลมากเกินไปด้วย ดังนั้นจะนำหลักการของ WT มาใช้ในการแยกรายละเอียดในส่วนที่ไม่จำเป็นทิ้งไป ซึ่งก็จะทำให้ข้อมูลของลายเส้นลดลงและส่งผลกระทบต่อรายละเอียดของลายเส้นลดลงทำให้ลายเส้นมีลักษณะราบเรียบมากยิ่งขึ้น จากหลักการดังกล่าวสามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมได้ดังภาพที่ 95

ภาพที่ 95

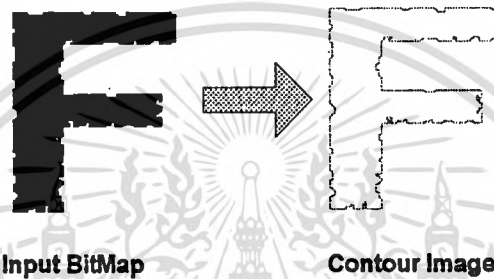


แสดงบล็อกไดอะแกรมของการประมาณลายเส้น

การทดลองที่ 6.20 การประมาณลายเส้นรอบรูปตัวอักษร

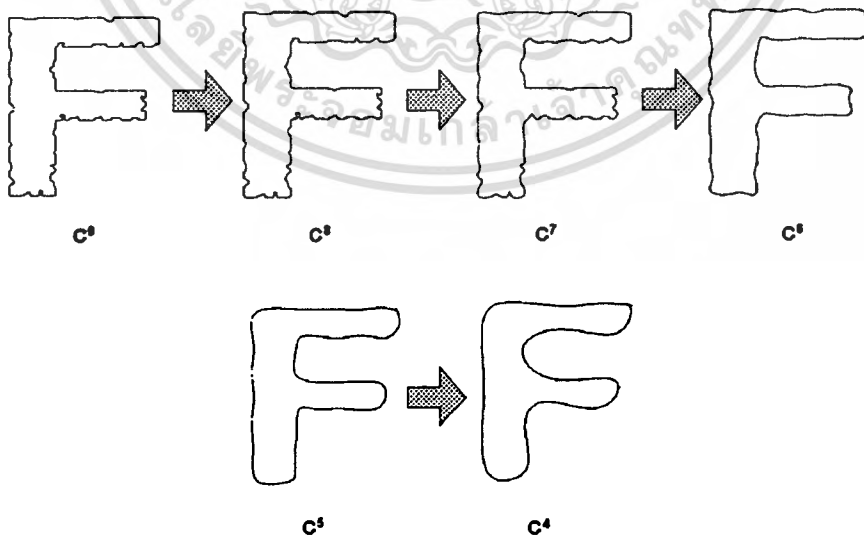
ในการทดลองนี้จะใช้หลักการในบล็อกไดอะแกรมที่แสดงในภาพที่ 95 มาใช้ โดยทำการทดสอบกับลายเส้นรอบรูปของตัวอักษรจากภาพขนาด 128×128 จุดภาพ โดยเส้นรอบรูปจะมีระดับความละเอียดอยู่ที่ $j = 9$ (515 จุด) ดังแสดงในภาพที่ 96

ภาพที่ 96



แสดงลายเส้นรอบรูปของตัวอักษรที่ใช้เป็นอินพุตในการประมาณลายเส้น

ภาพที่ 97



แสดงลายเส้นรอบรูปของตัวอักษรหลังจากตัดกลุ่มรายละเอียดที่ระดับต่างๆทิ้งไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพที่ 97 จะเกิดจากการนำข้อมูลของเส้นรอบรูปที่ระดับ $j = 9$ มาทำการแยกข้อมูลรายละเอียดออกมาในระดับต่างๆ แล้วทำการตัดเอาส่วนของรายละเอียดที่ไม่ต้องการทิ้งไป ซึ่งการตัดกลุ่มรายละเอียดในแต่ละกลุ่มออกไปก็ทำให้ภาพลายเส้นรอบรูปตัวอักษรมีความราบเรียบต่อเนื่องกันมากยิ่งขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 97

จากภาพที่ 97 จะเห็นว่าสามารถทำการประมาณลายเส้นที่ระดับความละเอียดใดก็ได้ เพื่อลดขนาดของข้อมูล ซึ่งเทคนิคสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการซูมภาพ ในการพิจารณาความละเอียดของภาพที่ระดับความละเอียดใดๆก็ได้ เพื่อความรวดเร็วในแสดงผล ตัวอย่างเช่นภาพลายเส้นแผนที่เมื่อนำมาทำการแปลงข้อมูลเป็นเวฟเล็ด ระบบก็จะสามารถทำการขูดภาพแผนที่ที่ระดับความละเอียดต่างๆกัน ได้ โดยการไม่แสดงรายละเอียดที่อยู่ในระดับความละเอียดที่สูงกว่าเป็นต้น

จากผลการทดลองที่กล่าวมาทั้งหมดจะสามารถสรุปได้ว่า การใช้คุณสมบัติการแตกกระจายข้อมูลโดยใช้ WT จะทำให้สามารถทำการแก้ไขหรือเปลี่ยนแปลงลักษณะของภาพลายเส้นได้อย่างง่ายดายและสะดวกมากกว่าการใช้วิธีการหาสมการในการเปลี่ยนแปลงลักษณะของลายเส้น ดังที่แสดงให้เห็นแล้วในการทดลองที่กล่าวมาทั้งหมด จากเทคนิคเหล่านี้ก็จะสามารถนำไปใช้กับการประยุกต์ในงานที่มีความเกี่ยวข้องกับลายเส้นได้เป็นอย่างดี

บทที่ 7

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

จากวัตถุประสงค์ของงานวิจัย และผลการวิจัยที่กล่าวมาทั้งหมด จะสามารถกล่าวสรุปได้ ได้โดยแบ่งเป็นส่วนของคุณลักษณะสมบัติของการแปลงเวฟเล็ด และในส่วนของการวิจัยการแก้ไข ลักษณะลายเส้นได้ดังนี้

สรุปทฤษฎีการแปลงเวฟเล็ด

การแปลงเวฟเล็ดเป็นการแปลงข้อมูลจากโดเมนส์ของเวลา ไปอยู่ในระนาบของเวลาและความถี่ ซึ่งเป็นข้อมูลในลักษณะสองมิติ ดังนั้นจึงสามารถทำการเลือกพิจารณาข้อมูลที่ตำแหน่งเวลาและความถี่ใดก็ได้ ข้อมูลจะถูกพิจารณาผ่านฟังก์ชันหน้าต่างที่สามารถทำการหดหรือขยายความถี่ได้ เรียกว่า "ฟังก์ชันเวฟเล็ด" โดยที่มีขอบเขตช่วงเวลาคำวิเคราะห์เป็นสัดส่วนผกผันกับความถี่ของฟังก์ชันเวฟเล็ด นั่นคือ ฟังก์ชันเวฟเล็ดที่ความถี่สูงจะมีช่วงขอบเขตเวลาที่แคบ ในขณะที่ความถี่ต่ำจะมีช่วงขอบเขตเวลาที่กว้างขึ้น จากลักษณะสมบัตินี้จะทำให้ระนาบเวลาและความถี่ของ WT มีการเปลี่ยนแปลงสเกลในแกนเวลาและความถี่ในลักษณะลอการิทึม ซึ่งสัมพันธ์กับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณในทางปฏิบัตินั่นเอง

จากสมการการแปลงเวฟเล็ด สามารถพิจารณาได้ว่า การแปลงเวฟเล็ดเป็นแตกกระจายสัญญาณออกไปเป็นฟังก์ชันของสัญญาณย่อยๆ โดยมีค่าถ่วงน้ำหนักอยู่ในแต่ละฟังก์ชันย่อยๆเหล่านั้น ฟังก์ชันย่อยๆเหล่านี้ก็คือ ฟังก์ชันเวฟเล็ดที่ตำแหน่งเวลาและความถี่ใดๆนั่นเอง ดังนั้นถ้าทำการแตกกระจายสัญญาณด้วยฟังก์ชันเวฟเล็ดที่ระดับความถี่สูงก็จะสามารถแตกกระจายสัญญาณออกมาเป็นฟังก์ชันย่อยๆได้มาก เนื่องจากขอบเขตช่วงเวลาที่ของฟังก์ชันเวฟเล็ดที่ความถี่สูงจะแคบนั่นเอง สำหรับในกรณีที่ระดับความถี่ต่ำก็จะกลับกัน จากลักษณะสมบัติเหล่านี้จะเห็นว่า การแปลงเวฟเล็ดสามารถเลือกทำการวิเคราะห์สัญญาณที่ระดับความละเอียด (ความถี่) ใดก็ได้ เรียกลักษณะสมบัตินี้ว่า "การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด" (Multiresolution Analysis : MRA) ลักษณะสมบัติดังกล่าวนี้จะเป็นข้อดีของ WT เมื่อเทียบกับการแปลงข้อมูลรูปแบบอื่นๆ เช่น การแปลงฟูรีเยร์ ซึ่งไม่สามารถเลือกตำแหน่งเวลาและความถี่ที่จะทำการวิเคราะห์ได้ หรือ การแปลงแบบ STFT ที่สามารถเลือกตำแหน่งเวลาและความถี่ในการวิเคราะห์ได้ แต่ไม่สามารถเปลี่ยนช่วง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขอบเขตเวลาและช่วงขอบเขตความถี่ในการวิเคราะห์ได้ ซึ่งอาจทำให้ต้องทำการแปลงข้อมูลทีหลายตำแหน่งจึงจะทำให้ได้ข้อมูลครบถ้วน

จากลักษณะสมบัติ MRA ของขบวนการ WT สามารถพิจารณาให้มีความสัมพันธ์กับขบวนการ Filter banks ได้ จึงทำให้สามารถหา Impluse response ของ Filter ที่ใช้สำหรับการทำ WT ได้ โดยที่ Impluse response เหล่านี้จะขึ้นอยู่กับชนิดหรือรูปแบบของฟังก์ชันเวฟเล็ดที่ใช้ ซึ่งก็จะให้ลักษณะสมบัติของการทำ WT ที่ต่าง ๆ กันออกไป ในงานวิจัยนี้ได้นำฟังก์ชันเวฟเล็ดแบบ B-spline ซึ่งเป็นฟังก์ชันในการสร้างลายเส้นโคจมาใช้ ทำให้สามารถทำการแตกกระจายข้อมูลลายเส้นออกเป็นส่วนๆตามระดับความละเอียดที่ต้องการได้

สรุปงานวิจัย

จากลักษณะสมบัติของการแปลงเวฟเล็ดแบบ B-spline ทำให้สามารถทำการแตกกระจายข้อมูลลายเส้นออกมาเป็นส่วนๆ โดยจะแบ่งเป็นกลุ่มข้อมูลที่แสดงถึงแนวของลายเส้น และกลุ่มข้อมูลหลายๆกลุ่มที่แสดงถึงรายละเอียดของลายเส้นที่ระดับความละเอียดต่างๆกัน ดังนั้นเมื่อสามารถทำการแยกข้อมูลเป็นกลุ่มได้ ก็จะทำให้สามารถทำการเปลี่ยนแปลงแก้ไขลักษณะของลายเส้นได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว โดยการเปลี่ยนแปลงแก้ไขข้อมูลเฉพาะในส่วนที่สนใจเท่านั้น ซึ่งในงานวิจัยได้แบ่งการทดลองออกเป็นสามส่วนใหญ่ๆ ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

- การแก้ไขแนวของลายเส้น

สามารถกระทำได้โดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูลในกลุ่มข้อมูลที่เป็นตัวแทนแนวของลายเส้น ซึ่งถูกแยกออกมาโดยใช้ WT กลุ่มข้อมูลเหล่านี้จะเป็นจุดควบคุมเพียงไม่กี่จุดเท่านั้นขึ้นอยู่กับระดับความละเอียดที่ต้องการ ดังนั้นจึงทำให้สามารถทำการตรวจสอบแนวของลายเส้นที่ต้องการเปลี่ยนแปลงได้อย่างง่ายดายจากจุดข้อมูลเหล่านี้ โดยการสร้างลายเส้น B-spline เพื่อใช้ในการพิจารณาหาแนวของลายเส้นใหม่เมื่อจุดควบคุมเหล่านี้ถูกเปลี่ยนแปลง ซึ่งสามารถกระทำได้อย่างอิสระและรวดเร็ว เนื่องจากข้อมูลมีจำนวนน้อยมาก ซึ่งหลักการนี้สามารถนำไปใช้การเปลี่ยนแนวของลายเส้นสำหรับรูปทรงเรขาคณิตแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ได้เช่นกัน ดังนั้นวิธีการแก้ไขแนวของลายเส้นด้วยหลักการที่นำเสนอนี้ จึงมีความสะดวกมากกว่าการหาสมการแนวของลายเส้นใหม่เพื่อที่จะเคลื่อนย้ายจุดทุกจุดไปตามสมการแนวลายเส้นใหม่ โดยเฉพาะกรณีที่แนวของลายเส้นมีความซับซ้อนมากขึ้น

- การแก้ไขรายละเอียดของลายเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของลายเส้นสามาดกระทำได้อย่างง่ายและสะดวก โดยการเปลี่ยนแปลงลักษณะกลุ่มข้อมูลที่แสดงรายละเอียดของลายเส้นด้วยกลุ่มข้อมูลรายละเอียดของลายเส้นที่ต้องการ จากนั้นก็ทำการแปลงข้อมูลเหล่านี้กลับไปเป็นภาพลายเส้น ก็จะทำให้ได้ภาพลายเส้นที่มีรายละเอียดเปลี่ยนไป โดยที่แนวของลายเส้นยังคงเดิม ซึ่งวิธีนี้จะสะดวกกว่าการหาสมการของลายเส้นใหม่เพื่อทำการเปลี่ยนรายละเอียดของลายเส้น ซึ่งจะมีความยุ่งยากมากโดยเฉพาะกรณีที่มีรายละเอียดของลายเส้นมีความซับซ้อนมาก นอกจากนี้สามารถทำการพัฒนาเป็นระบบฐานข้อมูลที่เก็บลักษณะของรายละเอียดไว้หลายๆแบบเพื่อสะดวกในการเปลี่ยนแปลง

จากหลักการดังกล่าวสามารถนำไปใช้ในการแก้ไขรายละเอียดของภาพถ่าย 2 มิติ ได้เป็นอย่างดี โดยการนำภาพถ่ายที่จะแลกเปลี่ยนรายละเอียดมาทำการแปลง WT จึงถึงระดับความละเอียดที่ต้องการ ซึ่งจะทำให้ได้ข้อมูลภาพที่แบ่งเป็นชั้นแบนด์หลายๆชั้นแบนด์ โดยแต่ละชั้นแบนด์จะแสดงถึงรายละเอียดของภาพที่ระดับต่าง ๆ กัน ทำให้สามารถทำการปรับเปลี่ยนอัตราส่วนผสมกันระหว่างชั้นแบนด์ของภาพทั้งสองได้ หรือ อาจเพิ่มชั้นแบนด์ในการผสมโดยการแปลง WT ให้มีระดับความละเอียดลดลงไปอีกก็ได้ สิ่งเหล่านี้ทำให้การผสมภาพโดยใช้เทคนิคของ WT จะมีความยืดหยุ่นและมีอิสระในการปรับเปลี่ยนอัตราส่วนในการผสมภาพมากกว่าวิธีการผสมภาพแบบบวกกันโดยตรง

- การประมาณลายเส้น

เนื่องจากในบางกรณีลายเส้นมีความละเอียดมากเกินไป ซึ่งจะแสดงถึงรายละเอียดที่ไม่ต้องการ ดังเช่น กรณีของเส้นขอบของวัตถุที่ดูไม่ราบเรียบ จากหลักการของ WT จะสามารถแตกกระจายข้อมูลออกเป็นกลุ่มข้อมูลที่ระดับความละเอียดต่างๆกันออกไป ทำให้สามารถทำการประมาณข้อมูลลายเส้นใหม่ โดยการตัดกลุ่มข้อมูลรายละเอียดที่ไม่ต้องการออกไป ก็จะสามารถลดข้อมูลของลายเส้นลงโดยที่ยังคงโครงสร้างของเส้นเดิมอยู่ได้ และลายเส้นที่ได้จะมีลักษณะราบเรียบมากยิ่งขึ้น

ข้อดีอีกประการหนึ่งคือ จะเห็นว่าข้อมูลอินพุทของภาพลายเส้นจะเป็นลำดับของคู่ลำดับในพิกัด xy ดังนั้นทำให้เกิดความสะดวกในการพิจารณาข้อมูล เพราะไม่จำเป็นต้องทราบถึงลักษณะของสมการลายเส้นนั้นๆเลย

ปัญหาและข้อเสนอแนะ

ปัญหาที่สำคัญในการแก้ไขลักษณะของลายเส้นคือระดับความละเอียดของการทำ WT ที่มีการลดระดับข้อมูลลงครึ่งละสองเท่าในลักษณะของ Octave ซึ่งค่อนข้างจะหยวบเกินไป เช่นในเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์เพื่อการเรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีข้อมูลมี 256 เทอม ที่ระดับความละเอียดที่ $j = 8$ ข้อมูลเหล่านี้จะถูกลดลงเป็น 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 ซึ่งเป็นระดับความละเอียดที่ 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 ตามลำดับ จะเห็นว่าจำนวนของข้อมูลมีการลดลงอย่างรวดเร็ว ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในลักษณะที่หายาก ดังนั้นหากพัฒนาให้สามารถเปลี่ยนแปลงระดับความละเอียดในลักษณะที่เป็นทศนิยมได้เช่น 1.2, 1.5, 2.5 เป็นต้น ก็จะทำให้เกิดความยืดหยุ่นมากขึ้น

นอกจากนี้ปัญหาหนึ่งที่พบคือเมื่อระดับข้อมูลมีความละเอียดสูงขึ้น จะทำให้ข้อมูลมากขึ้น ทำให้ต้องใช้เวลาในการทำการแปลงข้อมูลมากขึ้น เช่น ในกรณีที่ระดับ $j = 8$ เป็นต้นไป การแปลงข้อมูลจากระดับที่ 8 ไปสู่ระดับที่ 7 จะเริ่มกระทำได้ช้า วิธีการแก้ไขที่ทำให้ได้อย่างง่ายที่สุดคือการเพิ่มสมรรถนะของเครื่องคอมพิวเตอร์ให้มีความเร็วสูงขึ้น หรือทำการพัฒนาโปรแกรมการทดลองโดยใช้ภาษา C แทนการใช้โปรแกรม Matlab[®] เนื่องจากการเขียนด้วยภาษา C จะสามารถควบคุมการเขียนโปรแกรมได้ทุกส่วนและสามารถทำเป็น EXE ไฟล์ได้ ซึ่งทำให้การประมวลผลข้อมูลกระทำได้เร็วกว่า ในขณะที่โปรแกรม Matlab[®] จะไม่มีการแปลงเป็น EXE ไฟล์แต่จะเก็บเป็นซอร์สโปรแกรม ซึ่งจะทำการคอมไพล์เมื่อทำการประมวลผลเท่านั้นและนอกจากนั้นโปรแกรม Matlab[®] จะมีการคำนวณในลักษณะของเมตริกซ์ ซึ่งจะต้องมีการคอมไพล์อีกครั้ง ดังนั้นจะไม่สามารถควบคุมความยาวของโปรแกรมที่จะเกิดจากการคอมไพล์ตรงจุดนี้ได้ อย่างไรก็ตามเนื่องจากเป็นการศึกษาถึงแนวความคิดการประยุกต์การแปลงเวฟเล็ต แต่การทดลองในที่นี้ทั้งหมดยังคงใช้โปรแกรม Matlab[®] เนื่องจากมีความสะดวกในการออกแบบส่วนติดต่อกับผู้ใช้ เช่นการแสดงภาพกราฟ หรือ ปุ่มกดต่างๆ ซึ่งทำให้ไม่ต้องเสียเวลาในการเขียนโปรแกรมในส่วนต่างๆเหล่านี้

จากความสามารถของ WT ในการวิเคราะห์ลักษณะลายเส้น โดยทำการแตกหรือกระจายข้อมูลของลายเส้นออกเป็นกลุ่มๆทำให้สามารถวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละกลุ่มได้ คุณสมบัติดังกล่าวเหล่านี้สามารถที่จะนำไปประยุกต์ใช้กับงานในต่างๆที่มีความสัมพันธ์กับลายเส้นได้มากมาย ซึ่งสามารถพัฒนาต่อไปโดยใช้หลักการจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นพื้นฐานได้ ดังเช่น

- การวิเคราะห์รู้จำลายมือเขียนโดยใช้เวฟเล็ตทรานส์ฟอร์ม ทำได้โดยการแตกกลุ่มข้อมูลลายเส้นออกเป็นกลุ่มๆแล้วใช้ขบวนการรู้จำเฉพาะส่วนข้อมูลบางกลุ่ม หรือหลายๆกลุ่มมารวมกันในกรณีนี้ที่ทำการพิจารณาครั้งแรกแล้วไม่สามารถทำการตัดสินใจได้ว่าเป็นตัวอักษรอะไร ซึ่งวิธีดังกล่าวนี้จะทำให้ใช้ข้อมูลการรู้จำน้อยลงด้วย ซึ่งจะก่อให้เกิดความรวดเร็วขึ้นในการรู้จำ

- การวิเคราะห์รู้จำลายเส้น ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ลายเส้นในรูปแบบหนึ่งเช่นกัน ซึ่งก็จะอาศัยการแตกข้อมูลลายเส้นออกเป็นกลุ่มๆเช่นเดียวกัน และทำการเปรียบเทียบรู้จำข้อมูลเฉพาะบางกลุ่มหรือจากความสัมพันธ์หลายกลุ่มรวมกันก็ได้ ซึ่งอาจจะต้องพิจารณารวมกับลักษณะพิเศษเฉพาะอื่นๆอีกเช่น ความเร็วในการเขียน ความหนักเบาของลายเส้นแต่ละช่วง เป็นต้น

บรรณานุกรม

- 1 C.K. Chui., "An Introduction to Wavelets.", Academic Press.Boston 1992.
- 2 R.K. Young., "WAVELET THEORY AND ITS APPLICATIONS.", Kluwer Academic Publishers. Boston 1993.
- 3 R.L. Motard and B. Joseph., "Wavelet Applications Chemical Engineering.", Kluwer Academic Publishers. Boston 1994.
- 4 N.J. Fliege., "Multirate Digital Signal Processing.", John Wiley & Sons Ltd. Singapore 1994.
- 5 D.F. Rogers and J.A. Adams., "Mathematical Elements for Computer Graphics - Second Edition.", McGRAW-HILL. NewYork. 1989
- 6 F.S. Hill Jr., "Computer Graphics.", Macmillan Publishing Company'NewYork. 1990, pp. 483-519.
- 7 E.Quak and N. Weyrich , "Decomposition and Reconstruction Algorithms for Spline Wavelets on a Bounded Interval.", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol.1, no.3, June 1994, pp. 217-231.
- 8 C.K.Chui and E.Quak, "Wavelets on a Bounded Interval.", in *Numerical Methods in Approximation Theory Vol. 9*, D.Braessnad L.L. Schumaker, eds., Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland, 1992, pp. 53-75.
- 9 S.Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation.", *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.11, no. 7, July 1989, pp. 674-693.
- 10 Oliver Rioul and Martin Vetterli, "Wavelets and Signal Processing.", *IEEE SP Magazine*, Oct. 1991, pp. 14-88.
- 11 M. Unser, and A. Aldroubi, "Polynomial splines and wavelets-A signal processing perspective.", in *Wavelets-A Tutorial in Theory and Applications* (C. K. Chui, Ed.). San Diego: Academic, 1992, pp. 91-122.
- 12 M. Unser, and A. Aldroubi, "B-spline signal processing. Part I: Theory.", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 2 , pp. 821-833, Feb. 1993.

- 13 C. Makkun, P. Koosirivanichakorn, K. Chitsakul and M. Sangworasil, "Editing Character of curve by Wavelets." *Proceeding of the REGIONAL SYMPOSIUM ON TELECOMMUNICATIONS ELECTRONICS CIRCUIT AND SYSTEMS, KMITL* Bangkok, July 1996, pp. C49-54.
- 14 C. Makkun, P. Koosirivanichakorn, K. Chitsakul and M. Sangworasil, "Editing Details of Image by Wavelets Transform." *Proceeding of the International conference on ROBOTICS, VISION AND PARALLEL PROCESSING FOR INDUSTRIAL AUTOMATION*, Ipoh, Malaysia, Nov. 1996, pp. 116-121.
- 15 D.M. Etter., "ENGINEERING PROBLEM SOLVING WITH MATLAB.", Prentice-Hall, Inc. New Jersey. 1993.



ภาคผนวก ก.

ผลงานวิจัยที่ได้รับตีพิมพ์

1. ชัยชาญ มัคคุ่น, โกสินทร์ จ่านงไทย, "วิธีการรู้จำลายนิ้วมือโดยใช้ตำแหน่งของจุดแยก", การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้า ครั้งที่ 16, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 25-26 พฤศจิกายน 2536. หน้าที่ 636-645.
2. ชัยชาญ มัคคุ่น, กิตติพล ชิตสกุล, มนต์ สัจวรศิลป์, "การแก้ไขลักษณะลายเส้นโดยใช้เวฟเล็ต", Annual Meeting in Mathematics with a workshop on Theory of Computing : Parallel Computing KMITL." พัทยา, 21-24 พฤษภาคม 2539
3. C. Makkun, P. Koosirivanichakorn, K. Chitsakul and M. Sangworasil, "Editing Character of curve by Wavelets Transform.", *Proceeding of the REGIONAL SYMPOSIUM ON TELECOMMUNICATIONS ELECTRONICS CIRCUIT AND SYSTEMS, KMITL Bangkok, July 1996, pp. C49-54*
4. C. Makkun, P. Koosirivanichakorn, K. Chitsakul and M. Sangworasil, "Editing Details of Image by Wavelets Transform.", *Proceeding of the International conference on ROBOTICS, VISION AND PARALLEL PROCESSING FOR INDUSTRIAL AUTOMATION, Ipoh, Malaysia, Nov. 1996, pp. 116-121.*

ภาคผนวก ข.

โครงสร้างของโปรแกรมการทดลอง

ในที่นี้จะแสดงเฉพาะส่วนโปรแกรมที่สำคัญเท่านั้น ซึ่งจะแบ่งได้เป็น 3 ส่วนใหญ่ๆ คือ

1. การสร้าง B-spline curves.
2. การแตกกระจายข้อมูลจุดควบคุม
3. การรวมกลับข้อมูลจุดควบคุม

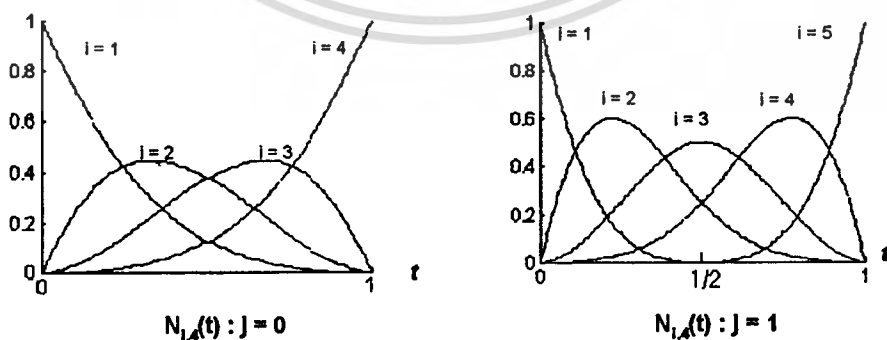
1. การสร้าง B-spline curves.

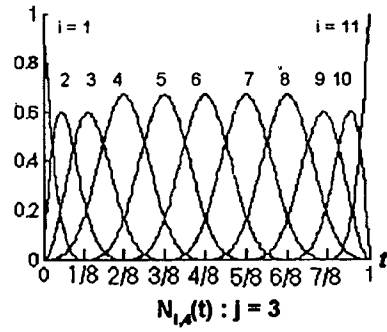
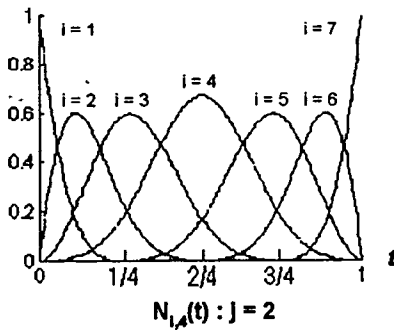
จากสมการ $P(t) = \sum_{i=1}^{2^j+1} B_i N_{i,m}(t)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว
ในบทที่ 6 ได้เป็น

$$[P] = [c^T] [N_{i,4}(t)] ; i = 1, 2, \dots, 2^j + 1$$

เมตริกซ์ P จะเก็บแชนเปิดค่าของจุดตำแหน่ง xy ของสายเส้น ในขณะที่เมตริกซ์ c จะเก็บตำแหน่งของจุดควบคุมจำนวน $2^j + 3$ เทอม และเมตริกซ์ $N_{i,4}(t)$ จะเก็บแชนเปิดค่าของฟังก์ชัน B-spline ที่ตำแหน่งต่างๆตามจำนวนของจุดควบคุมดังแสดงตัวอย่างในภาพที่ ค.1

ภาพที่ ค.1

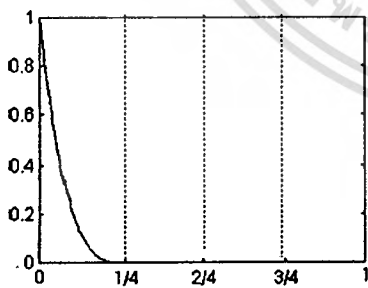




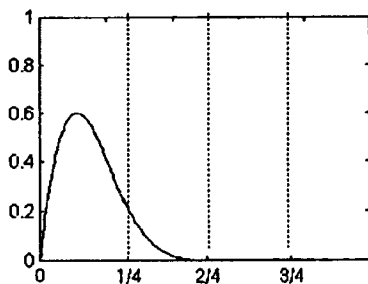
แสดงลักษณะของ $N_{1,4}(t)$ ที่ตำแหน่ง $j = 0, 1, 2, 3$

จากภาพที่ ค.1 จะเห็นว่าเมตริกซ์ $N_{1,4}(t)$ จะต้องมีขนาดเท่ากับ $j+3$ แถวเท่ากับจำนวนฟังก์ชันที่ระดับ j นั้นๆ และมีจำนวนคอลัมน์เท่ากับ n โดยที่ n เป็นจำนวนแชนเนลคาต้าทั้งหมดของฟังก์ชันตามความยาวแกนอ้างอิง t นอกจากนี้จากการสังเกตจะพบว่า ที่ระดับ j ใดๆจะประกอบไปด้วยฟังก์ชันพื้นฐานที่คล้ายคลึงกันเพียง 4 ฟังก์ชันเท่านั้น ให้พิจารณาที่ $j = 2$ จะเห็นว่าเริ่มมีฟังก์ชันดังกล่าวครบทั้ง 4 ฟังก์ชัน ดังนั้นจะใช้ฟังก์ชันเหล่านี้ที่ $i = 1, 2, 3, 4$ ของระดับ $j = 2$ เป็นฟังก์ชันอ้างอิงที่จะประมาณเป็น $N_{1,4}(t)$ ที่ระดับ j ต่างๆ และที่ตำแหน่ง i ต่างๆด้วย เพื่อให้เกิดความรวดเร็วในการหาแชนเนลคาต้าของฟังก์ชันที่ระดับ j ใดๆ สมการของฟังก์ชันพื้นฐานเหล่านี้จะแสดงในภาพที่ ค.2

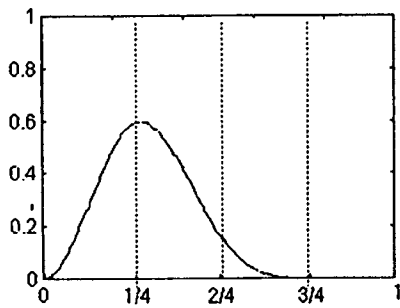
ภาพที่ ค.2



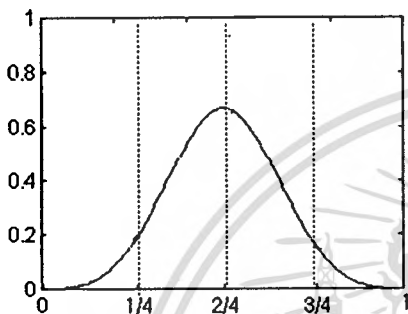
$$N_{1,4}(t) = 1 - 12t + 48t^2 - 64t^3 \quad ; 0 \leq t < 1/4$$



$$N_{2,4}(t) = \begin{cases} 12t - 72t^2 + 12t^3 & ; 0 \leq t < 1/4 \\ 2 - 12t + 24t^2 - 16t^3 & ; 1/4 \leq t < 2/4 \end{cases}$$



$$N_{3,4}(t) = \begin{cases} 24t^2 - \frac{176}{3}t^3 & ; 0 \leq t < 1/4 \\ \frac{3}{2} + 18t - 48t^2 + \frac{112}{3}t^3 & ; 1/4 \leq t < 2/4 \\ \frac{9}{2} - 18t + 24t^2 - \frac{32}{3}t^3 & ; 2/4 \leq t < 3/4 \end{cases}$$



$$N_{4,4}(t) = \begin{cases} \frac{32}{3}t^3 & ; 0 \leq t < 1/4 \\ \frac{2}{3} - 8t + 32t^2 - 32t^3 & ; 1/4 \leq t < 2/4 \\ -\frac{22}{3} + 40t - 64t^2 + 32t^3 & ; 2/4 \leq t < 3/4 \\ \frac{32}{3} - 32t + 32t^2 - \frac{32}{3}t^3 & ; 2/4 \leq t < 3/4 \end{cases}$$

แสดงสมการของฟังก์ชันพื้นฐานที่ $j = 2, i = 1, 2, 3, 4$

จะสังเกตได้ว่าระดับ j ที่ไม่เท่ากับ 2 จะเป็นการนำฟังก์ชันเหล่านี้ไปใส่ลงในช่วงตำแหน่งต่างๆที่เหมาะสมเท่านั้น สังเกตได้จากภาพที่ ค.1 โดยจะสามารถสรุปได้ดังนี้

กรณีที่ $j \geq 2$

$i = 1, 2, 3$ จะประกอบด้วยฟังก์ชัน $N_{1,4}, N_{2,4}, N_{3,4}$ อยู่ในช่วง 0 ถึง $3/2^j$

$i = 4, 5, \dots, 2^j$ จะประกอบด้วยฟังก์ชัน $N_{4,4}$ อยู่ในช่วง 0 ถึง $3/2^j$ แต่จะมีการขีฟไปครั้งละ $1/2^j$

$i = 2^j + 1, 2^j + 2, 2^j + 3$, จะประกอบด้วยฟังก์ชันเดียวกับ $i = 3, 2, 1$ เพียงแต่กลับด้านกันเท่านั้น

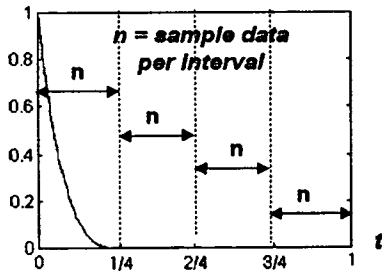
โดยอยู่ในช่วง $(2^j - 3)/2^j$ ถึง 1 ให้สังเกตได้จากภาพที่ ค.1

กรณีที่ $j = 0, 1$

จะคล้ายกับกรณีที่ $j \geq 2$ เพียงแต่ทำการตัดฟังก์ชันตรงกลางทิ้งไปเท่านั้นให้เหลือจำนวนเท่ากับ $2^j + 3$ ให้สังเกตได้จากภาพที่ ค.1

เนื่องจากทราบสมการของฟังก์ชันพื้นฐานทั้ง 4 ฟังก์ชัน ดังนั้นจะสามารถทำการหาแอมพลิจูดของฟังก์ชันเหล่านี้ได้ ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างการหาแอมพลิจูดของฟังก์ชันที่ $i = 0, j = 2$ เท่านั้น ส่วนกรณีฟังก์ชันอื่นๆก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอญญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



Matlab command :

$$t = 0:1/((2^j \times n)-1):1;$$

% เป็นการกำหนดแซมเปิลคาต้าบนแกน t ($j = 2$)

$$N_{1,j} = 1 - 12t + 48(t.^2) - 64(t.^3);$$

% เป็นการหาแซมเปิลคาต้าของ $N_{1,j}(t)$

จากวิธีดังกล่าวนี้จะทำให้สามารถหาแซมเปิลคาต้าของฟังก์ชันพื้นฐานทั้งสี่ได้ ในที่นี้จะเก็บแซมเปิลคาต้าของฟังก์ชันทั้งสี่ที่มีแซมเปิลคาต้า (n) ในแต่ละช่วงของ $1/2$ เท่ากับ 5,10,20,30,40 ไว้ในตัวแปรชื่อ fd ซึ่งจะมีขนาดเท่ากับ 4 แถว $2^j \times n$ คอลัมน์ ในไฟล์ $fd3_5.mat$ $fd3_10.mat$ $fd3_20.mat$ $fd3_30.mat$ และ $fd3_40.mat$ ตามลำดับ สาเหตุที่มีแซมเปิลคาต้าหลายค่า เนื่องจากกรณีที่มีจุดควบคุมมากๆ การที่ใช้แซมเปิลคาต้าน้อยๆจะทำให้การคำนวณหาแซมเปิลคาต้าของหลายเส้นทำได้รวดเร็วขึ้น หรือในกรณีที่ไม่ต้องการแสดงรายละเอียดของหลายเส้นมากนัก

เมื่อทำการเก็บฟังก์ชันพื้นฐานเหล่านี้ไว้ในไฟล์ ก็จะสามารถสร้างเมตริกซ์ $N_{i,j}(t)$ ที่ระดับ j ใดๆได้ โดยการโหลดไฟล์คาต้าของฟังก์ชันพื้นฐานเหล่านี้ขึ้นมา แล้วทำการตัดเติมลงไป ในเมตริกซ์ $N_{i,j}(t)$ ในตำแหน่งต่างๆที่ถูกต้อง ซึ่งจะสามารถเป็นโครงสร้างของโปรแกรมได้ดังนี้

Procedure GetB-spline funtion to Matrix $N_{i,j}$

Input :

j = level % intergel only

n = sample data per interval % only 5,10,20,30,40

Process :

Switch n

$n=5$ load Matrix fd from file $fd3_5.mat$ %basicfunction at sample data = 5

$n=10$ load Matrix fd from file $fd3_10.mat$ %basicfunction at sample data = 10

$n=20$ load Matrix fd from file $fd3_20.mat$ %basicfunction at sample data = 20

$n=30$ load Matrix fd from file $fd3_30.mat$ %basicfunction at sample data = 30

$n=40$ load Matrix fd from file $fd3_40.mat$ %basicfunction at sample data = 40

end;

$t = 0:1/(2^j \times n-1):1$ %define reference matrix t for level j

$N = \text{zeros}(1:2^j+3,1:\text{length}(t))$ %define zeros matrix N 2 dimension

If $j == 0$ then

$N(1,1:n) = fd(1,1:n);$ %create $N_{1,1}$

$N(4,:) = \text{fliplr}(N(1,:));$ %create $N_{4,1}$ โดยการสลับเมตริกซ์จากซ้ายมาขวา $N_{1,1}$

$N(2,1:n*2) = \text{even}(fd(2,1:n*2));$ %create $N_{2,1}$ คำนวณหาค่าที่ตำแหน่งคู่เท่านั้น เพื่อลดแซมเปิล

$N(3,:) = \text{fliplr}(N(2,:));$ %create $N_{3,1}$ โดยการสลับเมตริกซ์จากซ้ายมาขวา $N_{2,1}$

end;

เอกสารนี้เป็นเอกสาร If $j \neq 1$ สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

N(1,1:n) = fd(1,1:n); %create N1,4
N(5,:) = flipr(N(1,:)); %create N5,4 โดยการสลับเมทริกซ์จากซ้ายมาขวา N1,4
N(2,1:n*2) = fd(2,1:n*2); %create N2,4
N(4,:) = flipr(N(2,:)); %create N4,4 โดยการสลับเมทริกซ์จากซ้ายมาขวา N1,4
N(3,1:n*3) = third(fd(3,1:n*3)); %create N3,4 ดึงมณฑลที่สามแห่งที่ 3 ทารองค้ำที่ออกผสมเปิด
end;
If j >= 2
N(1,1:n) = fd(1,1:n); %create N1,4
N(2^j+3,:) = flipr(N(1,:)); %create N2^j+3,4 โดยการสลับเมทริกซ์จากซ้ายมาขวา N1,4
N(2,1:n*2) = fd(2,1:n*2); %create N2,4
N(2^(j+3)-1,:) = flipr(N(2,:)); %create N2^j+2,4 โดยการสลับเมทริกซ์จากซ้ายมาขวา N1,4
N(3,1:n*3) = (fd(3,1:n*3)); %create N3,4 ดึงมณฑลที่สามแห่งที่ 3 ทารองค้ำที่ออกผสมเปิด
N(2^(j+3)-2,:) = flipr(N(3,:)); %create N2^j+1,4 โดยการสลับเมทริกซ์จากซ้ายมาขวา N1,4

master = fd(4,:);
start = 1;
For i=4 to 2^j do %create N4,4 to N2^j,4 by shifting
N(i,start:start+length(master)) = master;
start=start+length(master)+1;
end;
end;

```

Output :

N = Matrix B-spline scaling function

Procedure Create B-spline Curves**Input :**

$[C_j]$ = Matrix of Control point 2^j+3 element

j = Level of Data input

n = Sample data per interval

Process :

$[N_i,4]$ = GetB-spline function (j,n);

$[P]$ = $[C_j][N_i,4]$;

Output :

$[P]$ = Sample data of B-spline Curves

2. การแตกกระจายจุดควบคุม

จากสมการการแตกกระจายข้อมูล 1 ระดับ

$$\begin{bmatrix} c^j \\ d^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^j \\ B^j \end{bmatrix} [c^{j+1}] ; [P^j | Q^j]^{-1} = \begin{bmatrix} A^j \\ B^j \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการจะเห็นว่าสิ่งสำคัญคือการหาเมตริกซ์ P^j และ Q^j ซึ่งเมตริกซ์เหล่านี้จะแสดงไว้แล้วในบทที่ 5 โดยในที่นี้จะทำการเก็บค่าของเมตริกซ์เหล่านี้ไว้ในไฟล์เพื่อสะดวกในการเรียกขึ้นมาใช้งานดังนี้

file : pqj0.mat เก็บค่าเมตริกซ์ P^0 และ Q^0

file : pqj1.mat เก็บค่าเมตริกซ์ P^1 และ Q^1

file : pqj2.mat เก็บค่าเมตริกซ์ P^2 และ Q^2

file : pqj3.mat เก็บค่าเมตริกซ์ P^3 และ Q^3

ในกรณีที่ $j \geq 4$ จะใช้เมตริกซ์ P^3 และ Q^3 มาทำการขยายโดยกระทำการเติมสัมประสิทธิ์ตรงกลางและทำการขยายขนาดของเมตริกซ์ออกไป (ให้พิจารณาลักษณะเมตริกซ์ P^j และ Q^j ได้ในบทที่ 5) จากหลักการดังกล่าวนี้จะทำให้สามารถเขียนโครงสร้างโปรแกรมของการแตกการกระจายข้อมูลจากระดับ $j+1$ ไปยังระดับ j ได้ดังนี้

Procedure Decomposition Data 1 dimension level $j+1$ to level j

Input :

$[C_{j+1}]$ = row matrix i/p data * xy coordinate : $2^{(j+1)+3}$ element
 $j+1$ = level of data

Process :

$P, Q = \text{FindPQ}(j);$
 $[AB] = \text{inv}([PQ]);$
 $[CD] = [AB]*[C_{j+1}];$
 $[C_j] = CD[1:2^{(j)+3}, 1];$
 $[D_j] = CD[2^{(j)+3}+1:2^{(j)+3}, 1];$

Output :

$[C_j]$ = row matrix o/p data * $2^{(j)+3}$ element
 $[D_j]$ = row matrix o/p data * $2^{(j)}$ element

Procedure FindPQ

Input :

j = level of data

Process :

Switch j

$j = 0$ load Matrix P, Q form file *pqdj0.mat*

$j = 1$ load Matrix P, Q form file *pqdj1.mat*

$j = 2$ load Matrix P, Q form file *pqdj2.mat*

$j = 3$ load Matrix P, Q form file *pqdj3.mat*

end;

If $j \geq 4$ then

$P, Q = \text{load Matrix } P, Q \text{ form file } \textit{pqdj3.mat}$

```

% Define Matrix Px,Qx at level j
Px = zeros(2^(j+1)+3 : 2^j+3);
Qx = zeros(2^(j+1) : 2^j);

% find matrix P

% copy head and end of matrix P
Px(1:6,1:3) = P(1:6,1:3);
Px(2^(j+1)+3-5:2^(j+1)+3,2^j+3-5:2^j+3)=Px(2^4+3-5:2^4+3,2^3+3-5:2^3+3);

% copy center of matrix P and translate to any position of matrix Px
master = P(4:8,4);
start = 4;
For i=4 to 2^j do
    Px(start:start+length(master)-1,i)=master;
    start = start+length(master);
end;

% find matrix Q

% copy head and end of matrix Q
Qx(1:12,1:3) = Q(1:12,1:3);
Qx(2^(j+1)-11:2^(j+1),2^j-11:2^j)=Q(2^4-11:2^4,2^3-11:2^3);

master = Q(4:14,4);
start = 4;
For i=4 to 2^j-2 do
    Qx(start:start+length(master)-1,i)=master;
    start = start+length(master);
end;

end;
P = Px, Q = Qx;

Output :
P = matrix o/p * 2^(j+1)+3 * 2^(j)+3
Q = matrix o/p * 2^(j+1) * 2^(j)

```

3. การรวมกลับข้อมูลจุดควมคุม

จะมีลักษณะคล้ายกับการแตกกระจายข้อมูลเพียงแต่ใช้สมการดังนี้

$$[c^{j+1}] = [P^j | Q^j] \begin{bmatrix} c^j \\ d^j \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะสามารถเขียนเป็นโครงสร้างของโปรแกรมการรวมข้อมูลได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Procedure Reconstruction Data 1 dimension level j to level j+1

Input :

$[C_j]$ = row matrix i/p data * $2^{(j)}+3$ element

$[D_j]$ = row matrix i/p data * $2^{(j)}$ element

j = level data of C_j, D_j

Process :

$[CD]$ = $[C_j; D_j]$; combine row matrix * $2^{(j+1)}+3$ element

$[P], [Q]$ = FindPQ(j);

$[C_{j+1}]$ = $[PQ] * [CD]$

Output :

$[C_{j+1}]$ = row matrix o/p data * $2^{(j+1)}+3$ element



ประวัติผู้เขียน

ชื่อ นายรัชชาญ มัคคูน
เกิดวันที่ 20 ตุลาคม 2514 จังหวัดตรัง
การศึกษา ปีการศึกษา 2529-2531
 ระดับ ปวช. สาขาอิเล็กทรอนิกส์
 วิทยาลัยเทคนิคตรัง
 ปีการศึกษา 2531-2532
 ระดับ ปวส. สาขาคอมพิวเตอร์เทคโนโลยี
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุงเทพมหานคร
 ปีการศึกษา 2532-2534
 ระดับ ปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี กรุงเทพมหานคร
การทำงาน 15/03/2534 - 30/09/2536
 วิศวกร แผนก Traffic Engineering บริษัท เทเลคอมเอเชีย มหาชน จำกัด
 1/11/2536 - 30/02/2537
 วิศวกรระบบ แผนก Industrail Automation บริษัท IEC มหาชน จำกัด