วงจรกรองความถี่ดิจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น และสามารถควบคุมผลตอบสนองได้

Linear Phase Recursive Digital Filters with Controllable Magnitude Response

ธนิตย์ ตรีสุวรรณวัฒน์

THANIT TRISUWANNAWAT

อาจารย์ที่ปรึกษา

ฟูศักดิ์ ชีวสุวิทย์ D.Eng.(ENST)

ADVISOR

FUSAK CHEEVASUVIT D.Eng.(ENST)

วิทยานิพนธ์สำหรับปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2529

สารบัญ

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ เสนอการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟชนิดผ่านความถี่ใดๆ โดยให้มีผลตอบสนองเฟสเป็นเชิงเส้น พร้อมทั้งสามารถที่จะควบคุมความกว้างของผลตอบสนองขนาดและกรุ๊ฟดีเลย์ได้ ซึ่งการออกแบบในตอนต้นเป็นการใช้วิธีลดสัมประสิทธิ์ของเก๊าส์ ในการหาสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ และในตอนหลังจึงได้ทำเป็นสูตรสำเร็จหาโดยตรง

ABSTRACT

This thesis presents the design of maximally flat group delay recursive digital filters for any passband frequency. The responses of magnitude and phase are both controllable at the same time. In the first part of this design, Gaussian Elimination is used for finding the filter's coefficients, and later, a closed-form formular is obtained.

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ปัญหาและที่มาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

การออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอล (digital filter) นั้น สิ่งที่จะขาดเสียมิได้ก็คือ สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ (filter coefficients) ซึ่งจุดนี้เป็นจุดเริ่มต้นของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ที่ต้องการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอล แบบรีเคอร์ซีฟ (recursive) พร้อมทั้งสามารถควบคุมความกว้างของผลตอบสนองขนาด และกรุ๊ฟดีเลย์ (magnitude and group delay response) ได้ โดยสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ที่ต้องการออกแบบหาได้ง่ายจากการใช้ สูตรสำเร็จ (closed - form formular)

1.2 เทคนิคริเริ่ม

จาก [4] และ [5] เป็นแนวทางในการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ที่มีความถูกต้องสูง แม้จะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลที่ราคาถูกๆ ก็ตาม

การแก้ปัญหาเริ่มจากหาสมการที่จะใช้กระจาย เพื่อหาค่าของสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่แต่ละชนิดก่อน ซึ่งจากกลุ่มสมการเชิงเส้นที่กระจายออกมาได้นี้ แนวทางแรกในการหาค่าสัมประสิทธิ์ทำโดยการใช้ วิธีลดสัมประสิทธิ์ของเก๊าส์ (Gaussian Elimination) ส่วนแนวทางหลังเป็นการใช้คณิตศาสตร์เข้ามาช่วยหาสูตรสำเร็จ เพื่อใช้สำหรับหาสัมประสิทธิ์ตัวใดๆได้ตามต้องการ

บทที่ 2
คณิตศาสตร์ที่ใช้

2.1 บทนำ

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นเทคนิคการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอล ทางซอฟท์แวร์ (Software) ด้วยวิธีการประมาณค่า (approximation) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์บางทฤษฎีเข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา

2.2 แวนเดอร์มองดีเทอร์มีแนนท์ (Vandermonde determinant) [7]

ให้ $F_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = y$ เป็นโพลีโนเมียล (polynomial) อันดับที่ n ซึ่งสอดคล้องกับ (x_i, y_i) จำนวน (n+1) ชุด โดย $i = 0,1,2,\dots,n$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ a_i ที่ไม่รู้ค่าจำนวน (n+1) ตัว ได้แก่ $a_0, a_1, \dots, a_n$ จะหาค่าได้จาก (n+1) ชุดของ (x_i, y_i) ในระบบสมการเชิงเส้น

$$a_0 + a_1x_0 + a_2(x_0)^2 + \dots + a_n(x_0)^n = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2(x_1)^2 + \dots + a_n(x_1)^n = y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2(x_n)^2 + \dots + a_n(x_n)^n = y_n$$

โดยการใช้กฎของแครเมอร์ (Cramer's Rule) จะได้ว่า

$$a_o = \frac{D_o}{D} \quad , \quad a_1 = \frac{D_1}{D} \quad ,\ldots, \quad a_n = \frac{D_n}{D}$$

เมื่อ D คือ ดีเทอร์มีแนนท์ (determinant) ที่มีอันดับ n ซึ่ง

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_o & (x_o)^2 & \cdots & (x_o)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{vmatrix}$$

และดีเทอร์มีแนนท์ D นี้ มีชื่อเรียกว่า "alternant" หรือ "Vandermonde determinant" ส่วน D_o, D_1,..., D_n หาได้จากการแทนคอลัมน์ (column) ที่ 1,2,...,(n+1) ของดีเทอร์มีแนนท์ D ด้วยคอลัมน์ y_i ไปเรื่อยๆ

จากนี้เมื่อเอา x_o ไปคูณกับคอลัมน์ที่ n แล้วนำไปลบออกจากคอลัมน์ที่(n+1) เอา x_o ไปคูณกับคอลัมน์ที่ (n-1) แล้วนำไปลบออกจากคอลัมน์ที่ n และในทำนองเดียวกัน จนสุดท้ายเอา x_o ไปคูณคอลัมน์ที่ 1 แล้วนำไปลบออกจากคอลัมน์ที่ 2 เราจะได้

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1-x_o & (x_1)^2-x_1x_o & \cdots & (x_1)^n-(x_1)^{n-1}x_o \\ 1 & x_2-x_o & (x_2)^2-x_2x_o & \cdots & (x_2)^n-(x_2)^{n-1}x_o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n-x_o & (x_n)^2-x_1x_o & \cdots & (x_n)^n-(x_n)^{n-1}x_o \end{vmatrix}$$

เมื่อกระจายดีเทอร์มีแนนท์เทียบกับแถวแรก แล้วถอดตัวประกอบร่วมของแต่ละแถวออกมา เราจะได้

$$D = (x_1-x_0)(x_2-x_0)\ldots(x_n-x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \ldots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \ldots & (x_2)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \ldots & (x_n)^{n-1} \end{vmatrix}$$

เหมือนกันกับที่ผ่านมา ถ้าเราทำต่อไป สุดท้ายจะได้

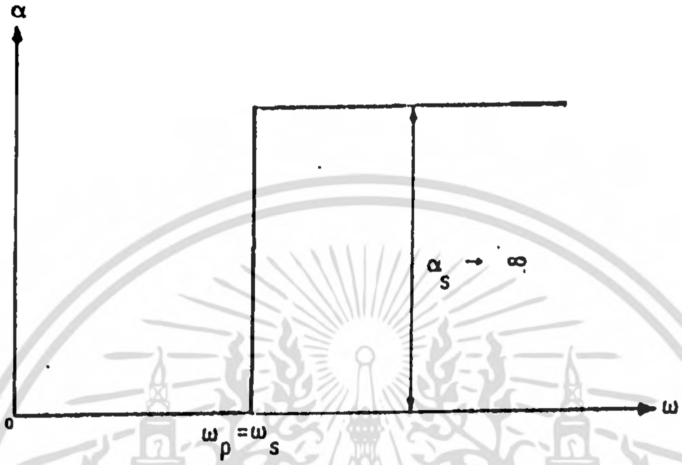
$$\begin{aligned} D = {} & (x_1-x_0)\,(x_2-x_0)\,(x_3-x_0)\,\ldots\,(x_n-x_0) \\ & (x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\,\ldots\,(x_n-x_1) \\ & (x_3-x_2)\,\ldots\,(x_n-x_2) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & (x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

หรือเขียนสั้นๆ ได้ว่า

$$D = \prod_{i>k} (x_i-x_k)$$

2.3 การประมาณค่าที่ราบเรียบที่สุด (Maximally Flat Approximation) [8]

ปัญหาส่วนใหญ่ในการออกแบบต่างๆ คือการที่ไม่สามารถหาคุณสมบัติทางอุดมคติได้ตามต้องการ เช่น ถ้าเราต้องการออกแบบวงจรกรองความถี่ที่ให้ความถี่ต่ำผ่าน โดยมีผลตอบสนองของการสูญเสีย (loss response) เป็นดังรูป



รูปที่ 2-1 Brick-wall low-pass response

ดังนั้นสมการของการสูญเสีย จึงต้องถูกประมาณค่าด้วยฟังก์ชั่น (function) ที่สามารถทำได้จริงในทางปฏิบัติ บันทัดฐานอันหนึ่งที่จะใช้เป็นเครื่องวัดว่า เราจะยินยอมหรือไม่ ในเรื่องความคลาดเคลื่อนระหว่าง เกณฑ์ที่เราตั้งไว้ และ ผลที่จะได้รับจริง อันได้แก่การเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชั่น และ (n-1) อนุพันธ์ของฟังก์ชั่นทั้งสองที่ค่าๆหนึ่งของตัวแปรอิสระ ซึ่งโดยทั่วไปตัวแปรอิสระนี้มักได้แก่ ความถี่

ให้ $F_{spec}(\omega)$ เป็นผลตอบสนองที่ต้องการ (specified response)

$F_{act}(\omega)$ เป็นผลตอบสนองที่จะได้รับจริง (actual response)

$$F_{spec}(\omega) = F_{act}(\omega)$$

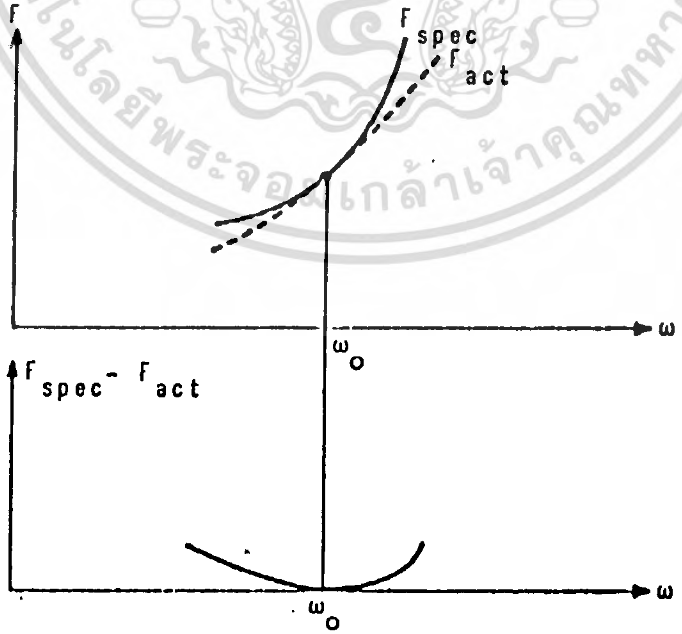
$$\frac{d}{d\omega} F_{spec} = \frac{d}{d\omega} F_{act}$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} F_{spec} = \frac{d^2}{d\omega^2} F_{act}$$

....

$$\frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} F_{spec} = \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} F_{act}$$

ที่ค่า ω ค่าหนึ่งๆ เช่น $\omega = \omega_o$ เป็นต้น



รูปที่ 2-2 แสดง maximally flat approximation

จึงเห็นได้ว่า ถ้า F_{act} เป็นฟังก์ชั่นเศษส่วน (rational function) ของ ω การที่ F_{act} จะเป็นจริงตาม n สมการข้างต้นได้ ก็หมายถึงว่า มันมี n พารามิเตอร์อิสระ เช่น สัมประสิทธิ์, โพล (pole), ซีโร (zero) เป็นต้น

ถ้า F_{act} เป็นจริงตามสมการข้างต้นนี้แล้ว ความคลาดเคลื่อนระหว่าง F_{spec} และ F_{act} เราเรียกว่า ราบเรียบที่สุด และ F_{act} ก็คือ การประมาณค่าที่ราบเรียบที่สุด ของ F_{spec}

2.4 กรุ๊ฟดีเลย์ (Group Delay) [2]

การออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอลในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นั้น ต้องการให้เฟสของวงจรกรองความถี่มีลักษณะเป็นเชิงเส้น (linear phase) หรือถ้าจะพิจารณาเป็นกรุ๊ฟดีเลย์ ก็คือ การหาอนุพันธ์ของเฟสเทียบกับความถี่ ω นั่นเอง ดังนั้นถ้าหากว่าเฟสเป็นเชิงเส้นแล้ว วงจรกรองความถี่ที่ได้ก็จะมีกรุ๊ฟดีเลย์ราบเรียบที่สุด

จากทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่น (transfer function) ของ วงจรกรองความถี่ที่มีโพลอย่างเดียว (all pole) คือ

$$H(Z) = \frac{K_o}{\sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i}}$$

ผลตอบสนองเฟส (phase response) ของ H(Z) ก็คือ

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega}\right]$$

และผลตอบสนองกรุ๊ฟดีเลย์ ก็จะได้

$$\tau(Z) = -\ (1/2)\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i i Z^{i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i Z^{i}} + \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i}}\right]$$

2.5 การกระจายอนุกรมกำลัง (Power Series Expansion) [6]

เนื่องจากเงื่อนไขของการทำให้เกิดความราบเรียบที่สุด หรือ maximally flat รอบจุด x = 0 นั้น เราต้องทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่น x จำนวน n ครั้ง ถ้าหากอันดับของความราบเรียบเท่ากับ n แต่เนื่องจากบางครั้งฟังก์ชั่นของ x แฝงอยู่ในรูปของเทอม sin x หรือ cos x ดังนั้นจึงจำเป็นต้องกระจายฟังก์ชั่น sin x หรือ cos x นี้ ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x เพื่อให้การหาค่าอนุพันธ์ง่ายยิ่งขึ้น อนุกรมกำลังของ sin x และ cos x กำหนดได้จาก [6] ดังนี้

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2m!}$$

บทที่ 3
วงจรกรองความถี่ดิจิตอลที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น และสามารถควบคุมขนาดของผลตอบสนอง

Linear phase recursive digital filters

with controllable magnitude

(Solved by using simultaneous linear equations)

3.1 บทนำ

จากการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอลของ Thiran และ Fettwies ดังใน [1] และ [3] นั้น เป็นการออกแบบเพื่อให้ได้กรุ๊ฟดีเลย์ราบเรียบที่สุด แต่ไม่สามารถที่จะควบคุมความกว้างของผลตอบสนองของขนาด และของกรุ๊ฟดีเลย์ได้ ส่วน [4] แม้จะเป็นการออกแบบที่ทำให้สามารถปรับขนาดของผลตอบสนองได้ก็จริง แต่ยังมีข้อเสียตรงที่อันดับของเศษและส่วนของวงจรกรองความถี่ต้องเท่ากัน

ในบทนี้ จึงได้เสนอการออกแบบวงจรกรองความถี่ที่สามารถเปลี่ยนแปลงอันดับได้โดยสะดวก และยังคงควบคุมความกว้างของผลตอบสนองได้ ซึ่งจะได้แสดงให้เห็นถึงการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอล ชนิดผ่านความถี่ต่ำ ผ่านความถี่สูง และไม่ผ่านความถี่กลาง โดยสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ที่ได้กล่าวมาแล้วนี้ จะหาได้จากการแก้กลุ่มของสมการเชิงเส้น

3.2 การออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟ

ในการออกแบบนี้ เราจะให้ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่น ของวงจรกรองความถี่เป็น

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i}} \qquad (1)$$

ซึ่งเราต้องการให้เกิดความราบเรียบของกรุ๊ฟดีเลย์มากที่สุด (maximally flat group delay) หรือเฟสเป็นเชิงเส้น ดังนั้น เราจึงจะทำการประมาณให้เฟสของ H(Z) เท่ากับเฟสของ $\exp[-j\{\beta_o+(\omega-\omega_o)\tau\}]$ โดยที่

$$\angle H(Z)\Big|_{Z=e^{j\omega T}} = \angle e^{-j\{\beta_o+(\omega-\omega_o)\tau\}} \tag{2}$$

หรือ

$$\angle H(Z) = -\{\beta_o+(\omega-\omega_o)\tau\} \tag{3}$$

เมื่อ T : คาบแซมพลิง (Sampling period) ซึ่งเราจะนอร์มอลไลซ์ (normalized) ให้เป็น 1 วินาที

β_o : ค่าเฟสเมื่อ $\omega = \omega_o$ มีหน่วยเป็นเรเดียน (radian)

ω_o : ความถี่ศูนย์กลาง(center frequency)ใดๆ ที่เราจะใช้ประมาณ มีหน่วยเป็นเรเดียน / วินาที (rad/s.)

τ : กรุ๊ฟดีเลย์ที่กำหนด มีหน่วยเป็นวินาที

แต่เนื่องจากเราต้องการควบคุมความกว้างของผลตอบสนองของขนาด เราจึงจะเพิ่มพารามิเตอร์(parameter) L เข้ามาในการที่จะหาค่าของสัมประสิทธิ์ a_i และ b_i โดยเราจะสมมติให้

$$H(Z) = \frac{H_L(Z)}{H_{L-1}(Z)} \tag{4}$$

เพื่อที่จะให้สมการที่ (1) มีคุณสมบัติที่ว่ากรุ๊ฟดีเลย์ราบเรียบที่สุด เราจึงจะประมาณให้

$$\angle H_L(Z) = \angle e^{-jL\{\beta_o+(\omega-\omega_o)\tau\}} \qquad (5)$$

และ

$$\angle H_{L-1}(Z) = \angle e^{-j(L-1)\{\beta_o+(\omega-\omega_o)\tau\}} \qquad (6)$$

ดังนั้นผลหารของ $H_L(Z)/H_{L-1}(Z)$ จะยังคงให้เฟสเป็นเชิงเส้น เช่นเดียวกับเฟสของ $H(Z)$ กล่าวคือ เฟสที่ได้จะมีค่าเท่ากับ $-\{\beta_o+(\omega-\omega_o)\tau\}$

ในการทำการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i เราจะกำหนดให้

$$H_L(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i}} \qquad (7)$$

นั่นคือ

$$\angle \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i}} = -L\{\beta_o+(\omega-\omega_o)\tau\} \qquad (8)$$

และในทำนองเดียวกัน ในการคำนวณเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ b_i เราจะกำหนดให้

$$H_{L-1}(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} b_i Z^{-i}} \qquad (9)$$

ซึ่งก็หมายถึงว่า

$$\angle \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} b_i Z^{-i}} = -(L-1)\{\beta_o+(\omega-\omega_o)\tau\} \qquad (10)$$

โดยที่ $0 \leqslant L \leqslant 1$

3.2.1 การออกแบบวงจรผ่านความถี่ต่ำ

ในการออกแบบเพื่อให้ย่านผ่านความถี่ (pass band) อยู่ในย่านความถี่ต่ำ เราจะกำหนดให้ความถี่ศูนย์กลาง หรือ ω_o อยู่ที่ 0 เรเดียน / วินาที และ $\beta_o = 0$ เรเดียน

3.2.1.1 การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ a_i ของวงจรผ่านความถี่ต่ำ

จากสมการที่ (7)

$$H_L(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i}}$$

$$\angle H_L(Z) = \tan^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega}\right] \qquad (11)$$

แต่เราต้องการให้เฟสของ $H_L(Z)$ เป็นดังสมการที่ (5) หรือ ดังในสมการที่ (8) กล่าวคือ เราต้องการให้

$$\angle H_L(Z) = -L\{\omega\tau\} \quad (12)$$

ถ้าให้ $\delta_L(\omega)$ เป็นความแตกต่างของเฟสของ $H_L(Z)$ ในสมการที่ (11) และสมการที่ (12)

$$\delta_L(\omega) = -\omega L\tau - \tan^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega}\right]$$

$$\tan\{\delta_L(\omega)\} = -\tan \omega L\tau - \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega}$$

$$= -\frac{\sin \omega L\tau}{\cos \omega L\tau} - \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega}$$

$$= -\frac{\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \sin(\omega L\tau)\cos(i\omega) + \sum_{i=0}^{n} a_i \cos(\omega L\tau)\sin(i\omega)\right]}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(\omega L\tau)\cos(i\omega)}$$

$$= -\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin[\omega L\tau + i\omega]}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos(\omega L\tau)\cos(i\omega)}$$

ถ้าหากเราถือว่าการประมาณนี้ เฟสมีความแตกต่างกันน้อยมาก หรือ เท่ากันเลย หรือ $\delta_L(\omega) = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sin [(i+L\tau)\omega] = 0 \qquad (13)$$

เนื่องจากว่า เราต้องการให้เกิดความราบเรียบที่สุด เราจะกระจายอนุกรมกำลังของ ω แล้วให้สัมประสิทธิ์ของ ω ที่กำลังต่างๆ เป็นศูนย์

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(i+L\tau)\omega]^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (i+L\tau)^{2k+1} = 0$$

เพื่อความสะดวกในการทำคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $a_0 = 1$ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (i+L\tau)^{2k+1} = -(L\tau)^{2k+1} \qquad (14)$$

เมื่อแปรค่า k ตั้งแต่ 0,1,2,...,n-1 สมการที่ (14) จะสามารถเขียนในรูปแมททริกซ์ (matrix) ได้เป็น

$$\underline{A}\,\underline{a} = \underline{c}$$

$$\underline{A} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} (1+L\tau) & (2+L\tau) & \cdots & (n+L\tau) \\ (1+L\tau)^{3} & (2+L\tau)^{3} & \cdots & (n+L\tau)^{3} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (1+L\tau)^{2n-1} & (2+L\tau)^{2n-1} & \cdots & (n+L\tau)^{2n-1} \end{array}\right] n \\ \longleftarrow n \longrightarrow \end{array}$$

$$\underline{a} = \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{array}\right] n \quad , \quad \underline{c} = \left[\begin{array}{c} -(L\tau) \\ -(L\tau)^{3} \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{2n-1} \end{array}\right] n$$

3.2.1.2 การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ b_i ของวงจรผ่านความถี่ต่ำ

การหาค่าของสัมประสิทธิ์ b_i ก็ทำได้เช่นเดียวกับการหาค่าของสัมประสิทธิ์ a_i ในที่สุดก็จะได้

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \{i+(L-1)\tau\}^{2k+1} = -\{(L-1)\tau\}^{2k+1} \qquad (15)$$

และเมื่อแปรค่า k ตั้งแต่ 0,1,2,...,m-1 สมการที่ (15) ก็สามารถเขียนในรูปแมททริกซ์ได้เป็น

$$\underline{B}\ \underline{b} = \underline{d}$$

$$\underline{B} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} [1+(L-1)\tau] & [2+(L-1)\tau] & \cdots & [m+(L-1)\tau] \\ [1+(L-1)\tau]^3 & [2+(L-1)\tau]^3 & \cdots & [m+(L-1)\tau]^3 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ [1+(L-1)\tau]^{2m-1} & [2+(L-1)\tau]^{2m-1} & \cdots & [m+(L-1)\tau]^{2m-1} \end{bmatrix} \updownarrow m \\ \longleftarrow m \longrightarrow \end{array}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \updownarrow m \quad , \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} -[(L-1)\tau] \\ -[(L-1)\tau]^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -[(L-1)\tau]^{2m-1} \end{bmatrix} \updownarrow m$$

ถ้าพิจารณาดู จะเห็นได้ว่าสมาชิก(elements) ของแมททริกซ์ $\underline{B}$ ในแต่ละคอลัมน์ i คือ $\{i+(L-1)\tau\}^{2k+1}$ ดังนั้นถ้าหากว่า $i = -(L-1)\tau$ แล้ว จะทำให้คอลัมน์ที่ i ของแมททริกซ์ $\underline{B}$ เป็นศูนย์ทั้งคอลัมน์ เราจึงต้องหลีกเลี่ยงโดยการกำหนดค่า L ที่เหมาะสมที่จะไม่ทำให้แมททริกซ์ $\underline{B}$ เป็นซิงกูล่า (singular) ซึ่งค่า L ที่ทำให้แมททริกซ์ $\underline{B}$ เป็นซิงกูล่า หาได้จาก

$$\begin{aligned} i &= -(L-1)\tau \\ L-1 &= -\,i/\tau \\ L &= 1-i/\tau \\ &= (\tau - i)/\tau \end{aligned}$$

3.2.1.3 ผลลัพธ์ตัวอย่างของวงจรผ่านความถี่ต่ำ

เมื่อให้ $n = 5$, $m = 5$, $\omega_o = 0$ เรเดียน/วินาที, $\tau = 4$ วินาที และ $\beta_o = 0$ เรเดียน จากนั้นก็แปรค่า L ไปเรื่อยๆ โดยที่ ที่ค่าของพารามิเตอร์ L ค่าหนึ่ง เราจะหาค่าของ a_i และ b_i ได้โดยการแก้กลุ่มสมการเชิงเส้น ซึ่งจะได้ค่าของ a_i และ b_i ที่ค่า L นั้นๆ เช่น เมื่อกำหนดให้ L = 0.525 เราจะได้ค่าต่างๆ ดังนี้

$a_0 = 1$ $\qquad b_0 = 1$

$a_1 = -2.05882322$ $\qquad b_1 = 8.63636364$

$a_2 = 1.91176437$ $\qquad b_2 = 15.1136363$

$a_3 = -0.971552372$ $\qquad b_3 = 6.47727274$

$a_4 = 0.2649688282$ $\qquad b_4 = 0.498251749$

$a_5 = -0.0306020336$ $\qquad b_5 = -3.21452738\text{ E-}3$

รากของ $Z^n \{ \sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i} \}$ และขนาดของรากแต่ละตัวเป็นดังนี้

Root#	Real	Imaginary	Magnitude
1	0.428852	0	0.428852
2	0.422012	-0.180487	0.458987675
3	0.422012	0.180487	0.458987675
4	0.392974	-0.429292	0.581996723
5	0.392974	0.429292	0.581996723

ส่วนรากของ $Z^m \{ \sum_{i=0}^{m} b_i Z^{-i} \}$ และขนาดของรากแต่ละตัวเป็นดังนี้

Root#	Real	Imaginary	Magnitude
1	-0.106428	0	0.106428
2	5.98 E-3	0	5.98 E-3
3	-0.489486	0	0.489486
4	-1.600817	0	1.600817
5	-6.445613	0	6.445613

เมื่อหาค่าผลตอบสนองขนาด จาก

$$|H_L(Z)| = 1 / \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega\right)^2}$$

และ

$$|H_{L-1}(Z)| = 1 / \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{m} b_i \cos i\omega\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i \sin i\omega\right)^2}$$

จะได้ผลตอบสนองขนาด ของ $H_L(Z)$ และ $H_{L-1}(Z)$ เมื่อ $\omega = 0$ เรเดียน/วินาที ดังนี้

$$\left| H_L(Z)\Big|_{\omega = \omega_o} \right| = 8.63889316$$

$$\left| H_{L-1}(Z)\Big|_{\omega = \omega_o} \right| = 0.0315235555$$

ซึ่งเราจะใช้ค่าของผลตอบสนองขนาด ทั้งสองค่านี้ นอร์มอลไลซ์ผลตอบสนอขนาดที่ความถี่อื่นๆ ต่อไป

สำหรับผลตอบสนองกรุ๊ฟดีเลย์นั้น เราจะหาได้จาก

$$\tau = -\frac{d\theta}{d\omega}(\psi)$$

ในกรณีของ $H_L(Z)$ นั้น $\theta(\omega) = \angle H_L(Z)$

กรุ๊ฟดีเลย์ของ $H_L(Z) = \tau_a = -\frac{d}{d\omega}\angle H_L(Z)$.

$$\tau_a = -\frac{d}{d\omega}\tan^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega}\right]$$

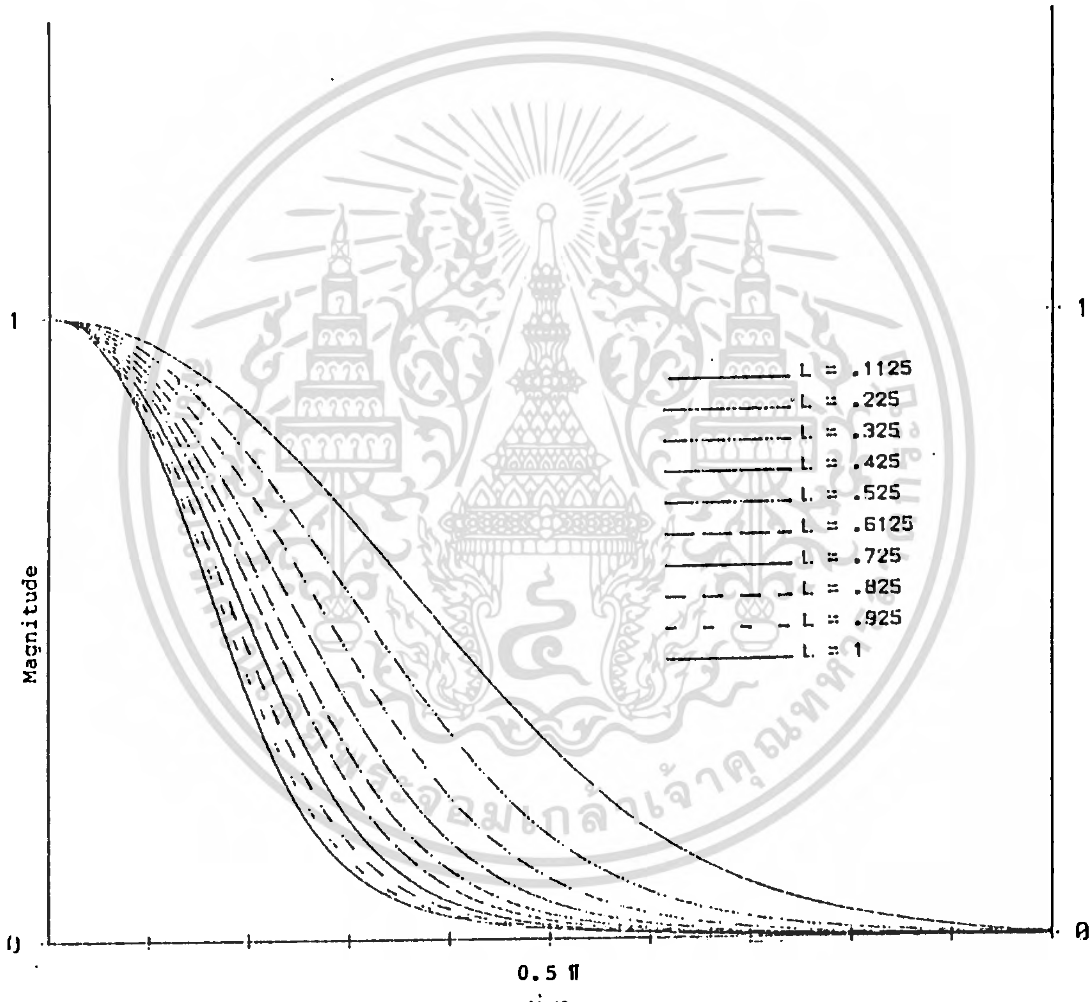
$$= -\frac{[\sum_{i=0}^{n} ia_i \cos i\omega][\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega]+[\sum_{i=0}^{n} ia_i \sin i\omega][\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega]}{[\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega]^2 + [\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega]^2}$$

และในทำนองเดียวกัน กรุ๊ฟดีเลย์ของ $H_{L-1}(Z)$ หรือ τ_b

$$\tau_b = -\frac{d}{d\omega}\tan^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{m} b_i \cos i\omega}\right]$$

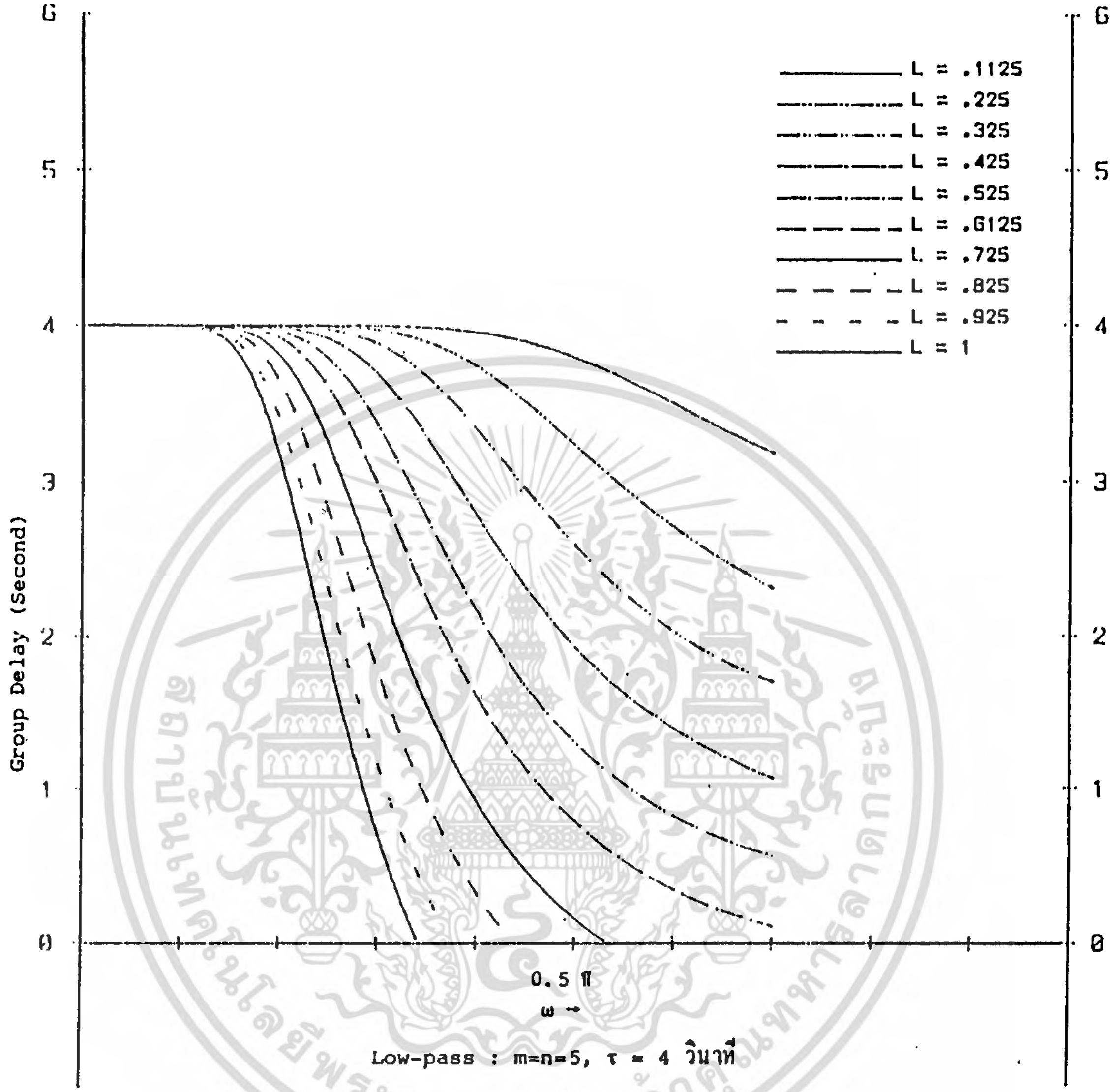
แต่ $H(Z) = H_L(Z) / H_{L-1}(Z)$ ดังนั้น กรุ๊ฟดีเลย์ของ $H(Z)$ หรือ $\tau = \tau_a - \tau_b$

ในรูปที่ 3-1 ได้แสดงให้เห็นถึงผลตอบสนองขนาด เมื่อ L แปรค่าไป ส่วนรูปที่ 3-2 เป็นผลตอบสนองทางเฟสหรือ กรุ๊ฟดีเลย์ที่ค่า L ที่สอดคล้องกับรูปที่ 3-1



Low-pass : m=n=5, τ = 4 วินาที

รูปที่ 3-1



รูปที่ 3-2

3.2.2 การออกแบบวงจรผ่านความถี่สูง

ในกรณีนี้ความถี่ศูนย์กลาง $\omega_o = \pi$ เรเดียน/วินาที ส่วน $\beta_o = 0$ เรเดียน จากนั้นก็ดำเนินการหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i และ b_i ได้เช่นเดียวกัน

3.2.2.1 การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i ของวงจรผ่านความถี่สูง

เมื่อ $\omega_o = \pi$ เรเดียน/วินาที ก็หมายถึงว่า เราจะต้องประมาณให้เฟสของ $H_L(Z)$ มีค่าเท่ากับเฟสของ $\exp[-jL\{\beta_o + (\omega - \pi)\tau\}]$ นั่นคือ

$$\angle H_L(Z) = \angle e^{-jL\{(\omega - \pi)\tau\}} \qquad (16)$$

ซึ่ง $H_L(Z)$ เราจะให้มีทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่นดังในสมการที่ (7) คือ

$$H_L(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

ฉะนั้นผลต่างของเฟสในสมการที่ (7) และ (16) คือ

$$\delta_L(\omega) = -(\omega - \pi)L\tau - \tan^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega}\right]$$

หรือ

$$\varepsilon_L(\omega) = -\tan[(\omega - \pi)L\tau] - \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cos i\omega}$$

เมื่อให้ผลต่างของเฟสมีค่าน้อยที่สุด หรือ มีค่าเป็นศูนย์ จะได้

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sin [(\omega-\pi)L\tau + i\omega] = 0$$

ให้ $\omega-\pi = x$ หรือ $\omega = x+\pi$ เมื่อแทนในสมการข้างบน จะได้

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sin [(i+L\tau)x+i\pi] = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sin [(i+L\tau)x] \cos (i\pi) = 0$$

จากนี้ดำเนินการเช่นเดียวกับการหาค่า a_i ในย่านผ่านความถี่ต่ำ ในที่สุดจะได้

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (i+L\tau)^{2k+1} \cos(i\pi) = -(L\tau)^{2k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (-1)^i (i+L\tau)^{2k+1} = -(L\tau)^{2k+1} \qquad (17)$$

เมื่อแปรค่า k จาก 0,1,2,...,n-1 สมการที่ 17 ก็จะเขียนในรูปแมททริกซ์ได้เป็น

$$\underline{A}\ \underline{a} = \underline{c}$$

โดย

$$\underline{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(1+L\tau) & (2+L\tau) & \cdots & (-1)^n(n+L\tau) \\ -(1+L\tau)^3 & (2+L\tau)^3 & \cdots & (-1)^n(n+L\tau)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -(1+L\tau)^{2n-1} & (2+L\tau)^{2n-1} & \cdots & (-1)^n(n+L\tau)^{2n-1} \end{bmatrix}}_{n} \Bigg\updownarrow n$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \updownarrow n \quad , \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{2n-1} \end{bmatrix} \updownarrow n$$

3.2.2.2 การคำนวณหาค่า b_i ของวงจรผ่านความถี่สูง

เราก็ทำได้เช่นเดียวกับที่ผ่านมาในการหาค่า a_i จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m} b_i (-1)^i \{i+(L-1)\tau\}^{2k+1} = -\{(L-1)\tau\}^{2k+1} \quad (18)$$

เมื่อ k แปรค่าจาก 0,1,2,...,m-1 สมการที่ (18) ก็เขียนในรูปแมททริกซ์ ได้เป็น

$$\underline{B}\ \underline{b} = \underline{d}$$

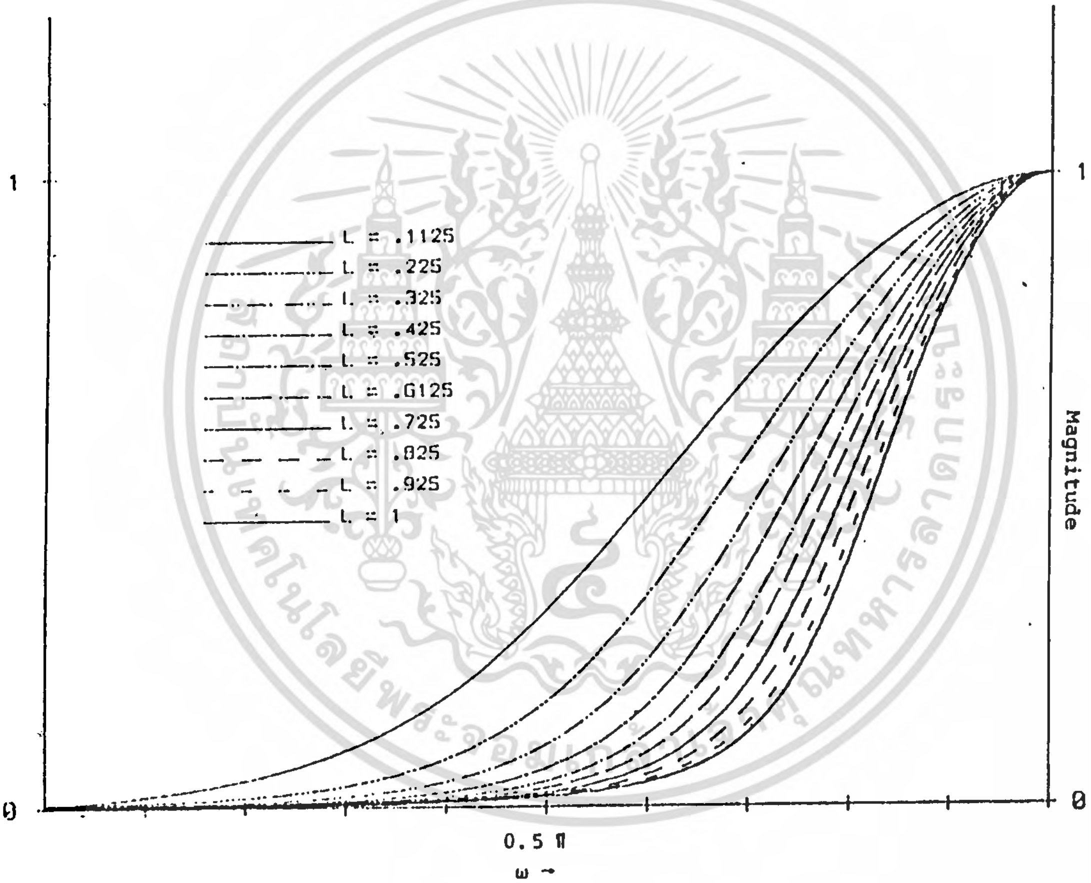
โดย

$$\underline{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\{1+(L-1)\tau\} & \{2+(L-1)\tau\} & \ldots & (-1)^m\{m+(L-1)\tau\} \\ -\{1+(L-1)\tau\}^3 & \{2+(L-1)\tau\}^3 & \ldots & (-1)^m\{m+(L-1)\tau\}^3 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -\{1+(L-1)\tau\}^{2m-1} & \{2+(L-1)\tau\}^{2m-1} & \ldots & (-1)^m\{m+(L-1)\tau\}^{2m-1} \end{bmatrix}}_{m} \updownarrow m$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \updownarrow m \quad , \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} -[(L-1)\tau] \\ -[(L-1)\tau]^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -[(L-1)\tau]^{2m+1} \end{bmatrix} \updownarrow m$$

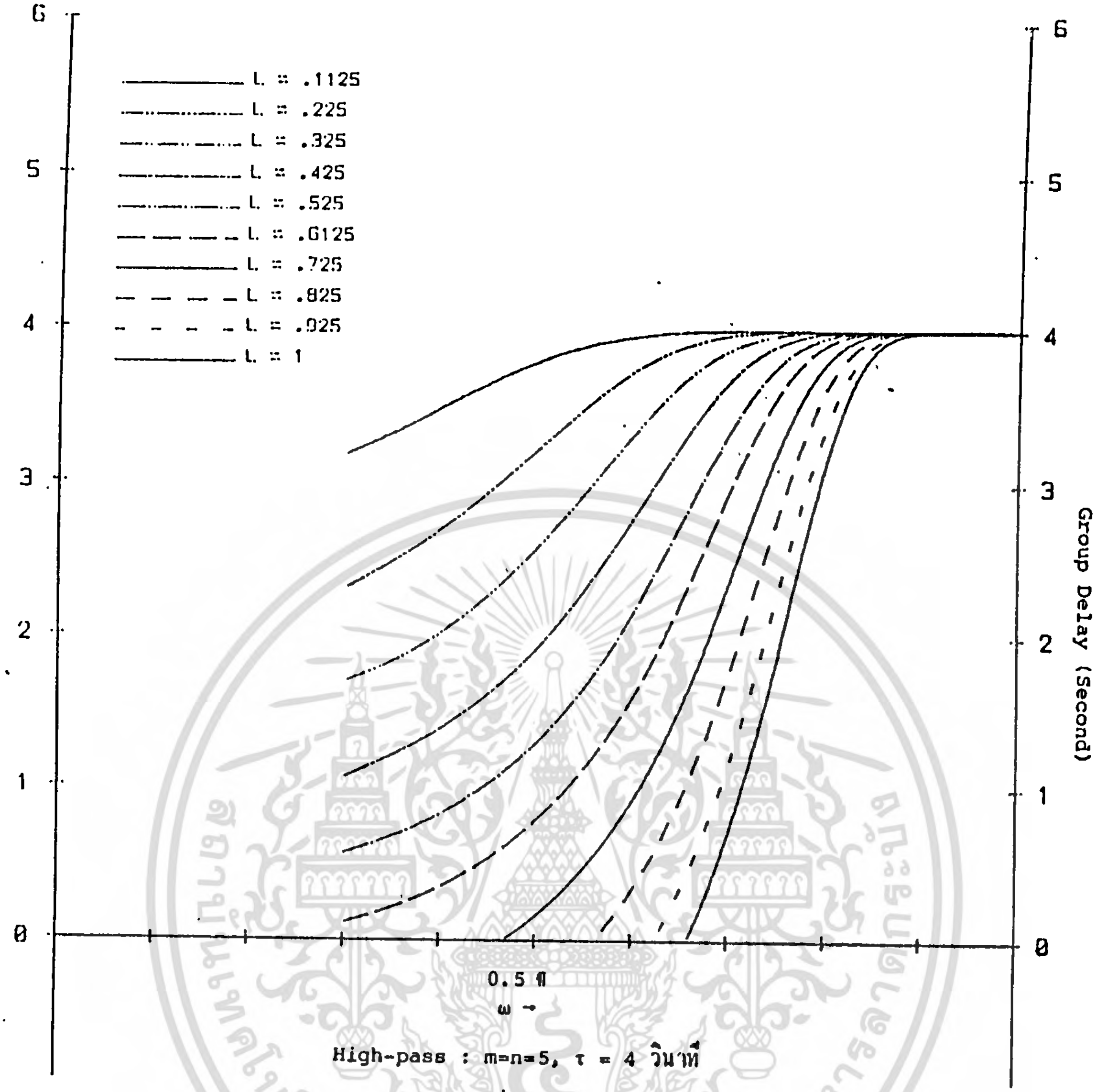
3.2.2.3 ผลลัพธ์ตัวอย่างของวงจรผ่านความถี่สูง

เมื่อให้ m = 5, n = 5, τ = 4 วินาที, β_o = 0 เรเดียน และ ω_o = π เรเดียน/วินาที ส่วนพารามิเตอร์ L แปรค่าไป รูปที่ 3-3 แสดงให้เห็นผลตอบสนองขนาดโดยนอร์มอลไลซ์ให้มีค่าเป็นหนึ่งที่ ω = π เรเดียน/วินาที ส่วนรูปที่ 3-4 เป็นผลตอบสนองกรุ๊ฟดีเลย์ที่ค่า L ต่างๆที่สอดคล้องกับรูปที่ 3-3



High-pass : m=n=5, τ = 4 วินาที

รูปที่ 3-3



รูปที่ 3-4

3.2.3 การออกแบบวงจรไม่ผ่านความถี่กลาง

ถ้าเราให้ย่านผ่านความถี่อยู่ที่ย่านความถี่ต่ำและย่านความถี่สูงแล้ว ก็หมายถึงว่า เราได้วงจรกรองความถี่ชนิดไม่ผ่านความถี่กลาง ดังนั้น เราจึงจะหาค่าของสัมประสิทธิ์ a_i และ b_i ของวงจรกรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟชนิดไม่ผ่านความถี่กลางได้จากสัมประสิทธิ์ a_i ในย่านผ่านความถี่ต่ำรวมกับ a_i ในย่านผ่านความถี่สูง เพื่อให้ได้สัมประสิทธิ์ a_i ของวงจรไม่ผ่านความถี่กลาง และ สัมประสิทธิ์ b_i ของวงจรก็หาได้โดยวิธีเดียวกัน

3.2.3.1 การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i ของวงจรไม่ผ่านความถี่กลาง

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า เราจะใช้สัมประสิทธิ์ a_i ของสองย่านผ่านความถี่รวมกัน ดังนั้น ถ้าเรากระจายสมการที่ (14) เพียง n/2 สมการ และสมการที่ (17) อีก n/2 สมการ เมื่อแปรค่า k ตั้งแต่ 0,1,2,...,(n/2)-1 สมการที่ 14 และ สมการที่ (17) จะเขียนในรูปแมททริกซ์ได้เป็น

$$\underline{A}\ \underline{a} = \underline{c}$$

โดย

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} (1+L\tau) & (2+L\tau) & \cdots & (n+L\tau) \\ (1+L\tau)^3 & (2+L\tau)^3 & \cdots & (n+L\tau)^3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (1+L\tau)^{n-1} & (2+L\tau)^{n-1} & \cdots & (n+L\tau)^{n-1} \\ \hline -(1+L\tau) & (2+L\tau) & \cdots & (-1)^n(n+L\tau) \\ -(1+L\tau)^3 & (2+L\tau)^3 & \cdots & (-1)^n(n+L\tau)^3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -(1+L\tau)^{n-1} & (2+L\tau)^{n-1} & \cdots & (-1)^n(n+L\tau)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n/2 \\ \\ \updownarrow n/2 \end{matrix}$$

$$\longleftarrow n \longrightarrow$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{(n/2)} \\ \hline a_{(n/2)+1} \\ a_{(n/2)+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n/2 \\ \\ \updownarrow n/2 \end{matrix} , \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{n-1} \\ \hline -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n/2 \\ \\ \updownarrow n/2 \end{matrix}$$

3.2.3.2 การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ b_i ของวงจรไม่ผ่านความถี่กลาง

โดยวิธีเดียวกันกับการหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i จากสมการที่ (15) และสมการที่ (18) เมื่อกระจายสมการออกเป็นสมการละ m/2 ก็จะได้รูปแมททริกซ์ของสมการเป็น

$$\underline{B}\ \underline{b} = \underline{d}$$

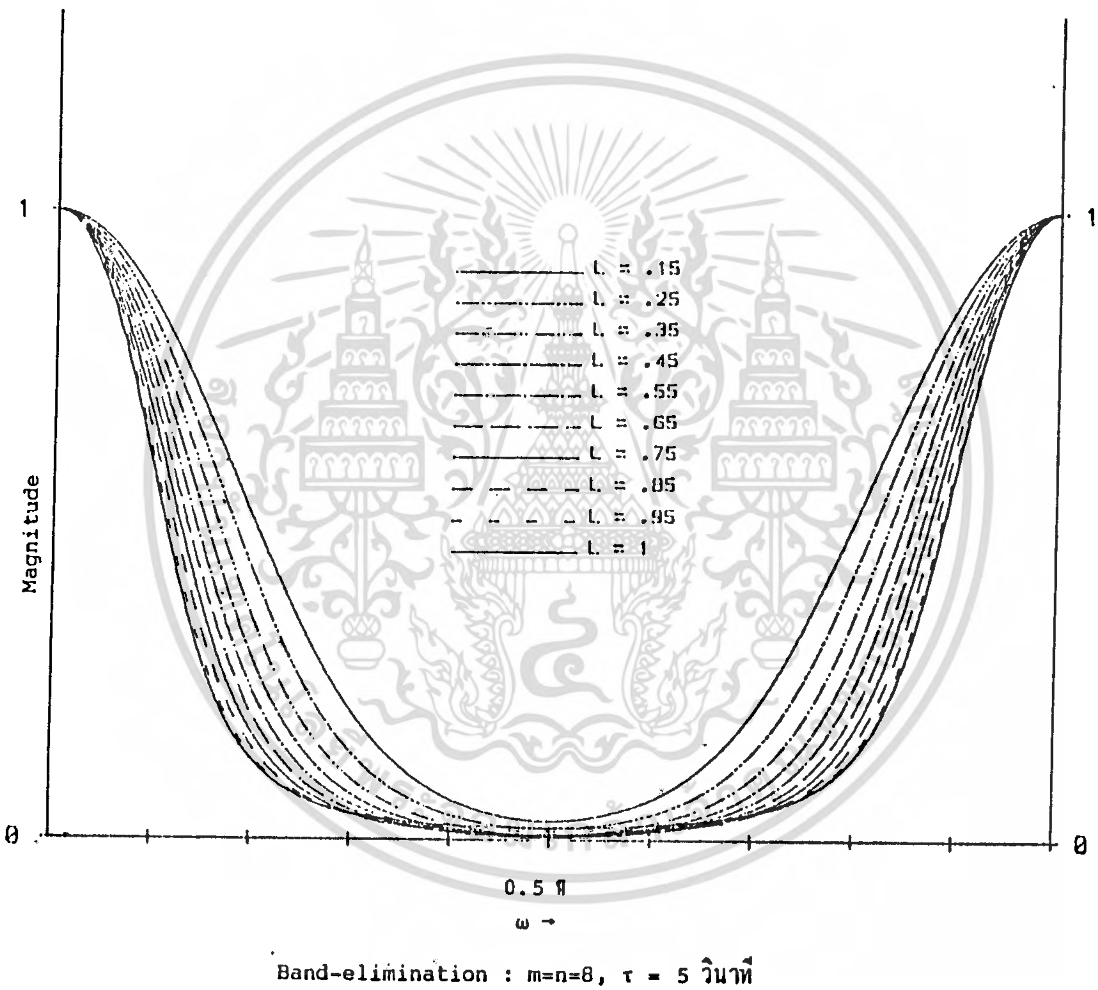
โดย

$$\underline{B} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc}
\{1+(L-1)\tau\} & \{2+(L-1)\tau\} & \cdots & \{m+(L-1)\tau\} \\
\{1+(L-1)\tau\}^{3} & \{2+(L-1)\tau\}^{3} & \cdots & \{m+(L-1)\tau\}^{3} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\{1+(L-1)\tau\}^{m-1} & \{2+(L-1)\tau\}^{m-1} & \cdots & \{m+(L-1)\tau\}^{m-1} \\
\hdashline
-\{1+(L-1)\tau\} & \{2+(L-1)\tau\} & \cdots & (-1)^{m}\{m+(L-1)\tau\} \\
-\{1+(L-1)\tau\}^{3} & \{2+(L-1)\tau\}^{3} & \cdots & (-1)^{m}\{m+(L-1)\tau\}^{3} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
-\{1+(L-1)\tau\}^{m-1} & \{2+(L-1)\tau\}^{m-1} & \cdots & (-1)^{m}\{m+(L-1)\tau\}^{m-1}
\end{array}\right]}_{m}
\begin{array}{l} \updownarrow m/2 \\ \\ \updownarrow m/2 \end{array}$$

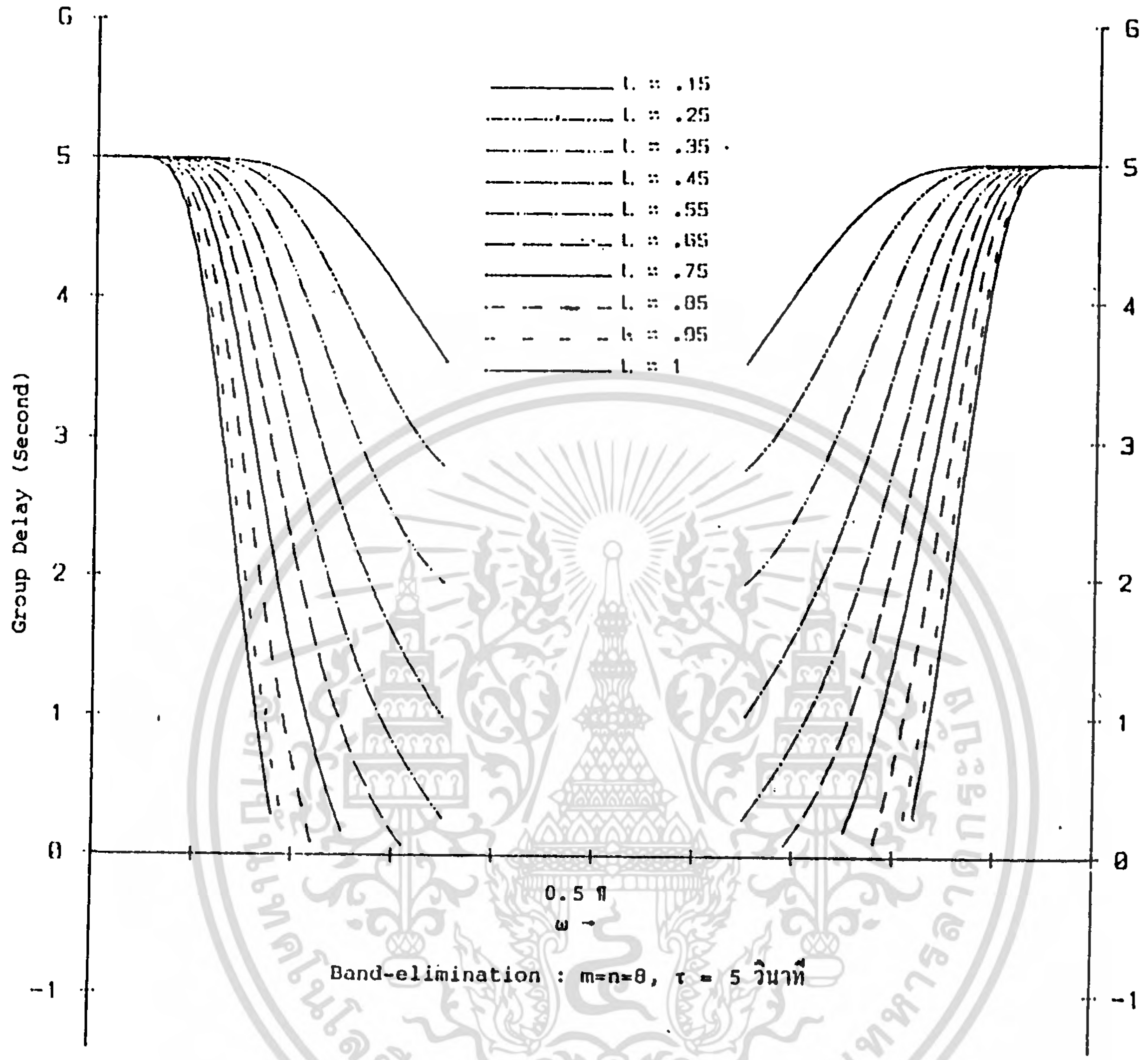
$$\underline{b} = \left[\begin{array}{c}
b_{1} \\ b_{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{(m/2)} \\ \hdashline b_{(m/2)+1} \\ b_{(m/2)+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m}
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \updownarrow m/2 \\ \\ \updownarrow m/2 \end{array}
, \quad
\underline{d} = \left[\begin{array}{c}
-[(L-1)\tau] \\ -[(L-1)\tau]^{3} \\ \cdot \\ \cdot \\ -[(L-1)\tau]^{m-1} \\ \hdashline -[(L-1)\tau] \\ -[(L-1)\tau]^{3} \\ \cdot \\ \cdot \\ -[(L-1)\tau]^{m-1}
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \updownarrow m/2 \\ \\ \updownarrow m/2 \end{array}$$

3.2.3.3 ผลลัพธ์ตัวอย่างของวงจรไม่ผ่านความถี่กลาง

ในรูปที่ 3-5 เป็นผลตอบสนองขนาด เมื่อให้ $m = n = 8$, $\tau = 5$ วินาที แล้วแปรค่า L ไป ส่วนรูปที่ 3-6 เป็นผลตอบสนองกรุ๊ฟดีเลย์ของรูปที่ 3-5



รูปที่ 3-5



รูปที่ 3-6

3.3 สรุป

จากเทคนิคในการออกแบบนี้ จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะเป็นวงจรกรองความถี่ชนิดผ่านความถี่ต่ำ ผ่านความถี่สูง และไม่ผ่านความถี่กลาง เราล้วนสามารถใช้พารามิเตอร์ L ในการควบคุมขนาดของผลตอบสนองทั้งขนาด และกรุ๊ฟดีเลย์ได้ โดยที่กรุ๊ฟดีเลย์ในย่านผ่านความถี่มีความราบเรียบที่สุด

เทคนิคในการหาค่า สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ในบทนี้ ได้ใช้วิธีลดสัมประสิทธิ์ของเก๊าส์ หาค่า a_i และ b_i ซึ่งอันนี้จะเป็นข้อเสีย ในกรณีที่วงจรกรองความถี่มีอันดับสูงๆ จะทำให้ค่าผิดพลาดจากการคำนวณมีมาก แต่ข้อเสียนี้เราจะแก้ไขได้ โดยใช้เทคนิคในบทที่ 4

ท่านผู้อ่าน สามารถดูตัวอย่างของการใช้ วิธีลดสัมประสิทธิ์ของเก๊าส์ เพื่อหาค่า a_i และ b_i ในกรณีที่วงจรกรองความถี่มีอันดับสูงๆได้จากภาคผนวก ซึ่งเป็นตัวอย่างของการใช้โปรแกรมออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอล ชนิดไม่ผ่านความถี่กลาง โดยมีอันดับของเศษและอันดับของส่วนเท่ากับ 20 และให้กรุ๊ฟดีเลย์เท่ากับ 5 วินาที

บทที่ 4
สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ดิจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่กรุ๊ฟดีเลย์ราบเรียบที่สุด และสามารถควบคุมผลตอบสนอง

Filter coefficients of maximally flat group delay recursive digital filters with controllable magnitude

4.1 บทนำ

ในบทที่ 3 เราได้เพิ่มพารามิเตอร์ L เข้ามาช่วยในการควบคุมผลตอบสนอง สำหรับในบทนี้ก็จะได้แสดงเทคนิค การออกแบบวงจรกรองความถี่ทั้งสามแบบที่ได้ทำมาแล้วในบทที่ 3 โดยจะแก้ข้อเสียของเทคนิคในบทที่ 3 ด้วยการใช้สูตรสำเร็จรูปคงตัว

จากบทความวิจัยที่ [4] ได้เสนอสูตรสำเร็จรูปสำหรับการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอลชนิดผ่านความถี่ต่ำ แต่วิธีดังกล่าวมีข้อเสียคือ สูตรที่ใช้สำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์ของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่นของวงจรกรองความถี่ดิจิตอล ที่แต่ละอันดับจะมีสูตรที่แตกต่างกันไป อีกทั้งจะต้องใช้อันดับของเศษและส่วนเท่ากัน ในบทนี้ จะเสนอวิธีการหาสูตรสำหรับการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ทุกชนิดที่กล่าวมาแล้ว และสูตรที่ได้นี้ใช้ได้กับทุกอันดับของเศษและส่วน คณิตศาสตร์สำหรับการสร้างสูตรเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ ได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 2

4.2 การออกแบบ

4.2.1 การออกแบบวงจรผ่านความถี่ต่ำ

จากสมการที่ (14) ในบทที่ 3

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \,(L\tau+i)^{2k+1} = -(L\tau)^{2k+1}$$

เมื่อแปรค่า k ตั้งแต่ 0,1,2,...,n-1 สมการข้างบนจะเขียนในรูปแมททริกซ์ได้เป็น

$$\underline{A}\,\underline{a} = \underline{c}$$

โดย

$$\underline{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} (L\tau+1) & (L\tau+2) & \cdots & (L\tau+n) \\ (L\tau+1)^3 & (L\tau+2)^3 & \cdots & (L\tau+n)^3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (L\tau+1)^{2n-1} & (L\tau+2)^{2n-1} & \cdots & (L\tau+n)^{2n-1} \end{bmatrix}}_{n} \; n$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} n \quad , \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \vdots \\ -(L\tau)^{2n-1} \end{bmatrix} n$$

จากกลุ่มของสมการเชิงเส้นข้างบน เราสามารถใช้ กฎของแครเมอร์ ในการหาค่าของสัมประสิทธิ์ a_i ได้ง่าย จากผลหารของ แวนเดอร์มอง ดีเทอร์มีแนนท์สองชุด กล่าวคือ

$$a_k = \Delta_k / \Delta$$

เมื่อ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (L\tau+1) & (L\tau+2) & \cdots & (L\tau+n) \\ (L\tau+1)^3 & (L\tau+2)^3 & \cdots & (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (L\tau+1)^{2n-1} & (L\tau+2)^{2n-1} & \cdots & (L\tau+n)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \prod_i (L\tau+i) \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ (L\tau+1)^2 & (L\tau+2)^2 & \cdots & (L\tau+n)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (L\tau+1)^{2n-2} & (L\tau+2)^{2n-2} & \cdots & (L\tau+n)^{2n-2} \end{vmatrix}$$

ให้ $X_i = (L\tau+i)^2$ และ $X_j = (L\tau+j)^2$

$$\Delta = \prod_i (L\tau+i) \prod_{i>j} (X_i - X_j)$$

$$= \prod_i (L\tau+i) \prod_{i>j} [(L\tau+i)^2 - (L\tau+j)^2]$$

และ

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} (L\tau+1) & \cdots (L\tau+k-1) & (L\tau) & (L\tau+k+1) & \cdots (L\tau+n) \\ (L\tau+1)^3 & \cdots (L\tau+k-1)^3 & (L\tau)^3 & (L\tau+k+1)^3 & \cdots (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdots \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\ \cdot & \cdots \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\ (L\tau+1)^{2n-1} & \cdots (L\tau+k-1)^{2n-1} & (L\tau)^{2n-1} & (L\tau+k+1)^{2n-1} & \cdots (L\tau+n)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_k = -(L\tau) \prod_{i \neq k}(L\tau+i) \prod_{\substack{i>k \\ i,j \neq k}}[(L\tau+i)^2 - (L\tau+j)^2] \prod_{j<k}[(L\tau)^2 - (L\tau+j)^2]$$

$$\prod_{i>k}[(L\tau+i)^2 - (L\tau)^2]$$

$$a_k = \Delta_k/\Delta = (-1)^k \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{n} \frac{2L\tau + i}{2L\tau + k + i}$$

ซึ่ง a_k ที่ได้นี้ก็คือ สัมประสิทธิ์ a_i ของ $H_L(Z)$ นั่นเอง

ในทำนองเดียวกัน การหาค่า b_i ของ $H_{L-1}(Z)$ เราก็ใช้สมการ (15) ในบทที่ 3 มากระจาย แล้วหาค่าของ b_k ในที่สุดจะได้

$$b_k = (-1)^k \binom{m}{k} \prod_{i=0}^{m} \frac{2(L-1)\tau+i}{2(L-1)\tau+k+i}$$

4.2.2 การออกแบบวงจรผ่านความถี่สูง

การหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i ของ $H_L(Z)$ ในกรณีนี้ เราจะใช้สมการที่ (17) ในบทที่ 3 มากระจาย ซึ่งจะได้

$$\underline{A}\ \underline{a} = \underline{c}$$

โดย

$$
\underline{A} = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
-(L\tau+1) & (L\tau+2) & \cdots & (-1)^{n}\,(L\tau+n) \\
-(L\tau+1)^{3} & (L\tau+2)^{3} & \cdots & (-1)^{n}\,(L\tau+n)^{3} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
-(L\tau+1)^{2n-1} & (L\tau+2)^{2n-1} & \cdots & (-1)^{n}\,(L\tau+n)^{2n-1}
\end{bmatrix} & \updownarrow n \\
\xleftrightarrow{\quad n \quad} &
\end{array}
$$

$$
a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \updownarrow n \quad , \quad c = \begin{bmatrix} -(L\tau) \\ -(L\tau)^{3} \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{2n-1} \end{bmatrix} \updownarrow n
$$

ให้ $a_k = \Delta_k/\Delta$ โดยที่ $k = 1,2,3,\ldots,n$

$$
\Delta = (-1)^{P} \begin{vmatrix}
(L\tau+1) & (L\tau+2) & \cdots & (L\tau+n) \\
(L\tau+1)^{3} & (L\tau+2)^{3} & \cdots & (L\tau+n)^{3} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
(L\tau+1)^{2n-1} & (L\tau+2)^{2n-1} & \cdots & (L\tau+n)^{2n-1}
\end{vmatrix}
$$

โดยที่ $P = n/2$ ถ้า n เป็นเลขคู่

และ $P = (n+1)/2$ ถ้า n เป็นเลขคี่

$$\Delta_k = (-1)^{q}(-1)$$

$$\begin{vmatrix} (L\tau+1) & (L\tau+2) & \cdots & (L\tau+k-1) & (L\tau) & (L\tau+k+1) & \cdots & (L\tau+n) \\ (L\tau+1)^3 & (L\tau+2)^3 & \cdots & (L\tau+k-1)^3 & (L\tau)^3 & (L\tau+k+1)^3 & \cdots & (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (L\tau+1)^{2n-1} & (L\tau+2)^{2n-1} & \cdots & (L\tau+k-1)^{2n-1} & (L\tau)^{2n-1} & (L\tau+k+1)^{2n-1} & \cdots & (L\tau+n)^{2n-1} \end{vmatrix}$$

ซึ่ง q จะมีค่าที่ขึ้นอยู่กับค่า n และ k ดังนี้

n	k	q	p	$(-1)^{q-p}$	$(-1)^k$
คู่	คู่	n/2	n/2	1	1
คู่	คี่	(n-2)/2	n/2	-1	-1
คี่	คู่	(n+1)/2	(n+1)/2	1	1
คี่	คี่	(n-1)/2	(n+1)/2	-1	-1

$$a_k = \Delta_k/\Delta = (-1)^{q-p}\left[(-1)^k \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{n} \frac{2L\tau + i}{2L\tau + k + i}\right].$$

ในที่สุดจะได้ $a_k = \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{n} \dfrac{2L\tau + i}{2L\tau + k + i}$

และในทำนองเดียวกัน เราจะหาค่าของ b_k ได้ โดยการแทน n ด้วย m และ L ด้วย (L-1) ก็จะได้

$$b_k = \binom{m}{k} \prod_{i=0}^{m} \frac{2(L-1)\tau + i}{2(L-1)\tau + k + i}$$

4.2.3 การออกแบบวงจรไม่ผ่านความถี่กลาง

จากการออกแบบวงจรผ่านความถี่ต่ำและผ่านความถี่สูง ถ้าเรานำเอาสมการที่ (14) และ (17) ในบทที่ 3 มากระจายเพียงสมการละครึ่งเดียว กล่าวคือเพียง n/2 สมการ ก็จะได้รูปแบบแมททริกซ์เป็น

$$\underline{A}\,\underline{a} = \underline{c}$$

โดย

$$\underline{A} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} (L\tau+1) & (L\tau+2) & \cdots & (L\tau+n) \\ (L\tau+1)^3 & (L\tau+2)^3 & \cdots & (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (L\tau+1)^{n-1} & (L\tau+2)^{n-1} & \cdots & (L\tau+n)^{n-1} \\ \hdashline -(L\tau+1) & (L\tau+2) & \cdots & (-1)^n (L\tau+n) \\ -(L\tau+1)^3 & (L\tau+2)^3 & \cdots & (-1)^n (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -(L\tau+1)^{n-1} & (L\tau+2)^{n-1} & \cdots & (-1)^n (L\tau+n)^{n-1} \end{array}\right] \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n/2 \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n/2 \end{array} \\ \longleftarrow n \longrightarrow \end{array}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{(n/2)} \\ ---- \\ a_{(n/2)+1} \\ a_{(n/2)+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} n \quad , \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{n-1} \\ ----- \\ -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} n/2 \\ \\ n/2 \end{matrix}$$

สลับคอลัมน์ของ $\underline{A}$ ใหม่ ซึ่งก็จะทำให้ $\underline{a}$ สลับตามไปด้วย แต่ $\underline{c}$ จะยังคงเหมือนเดิม

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} (L\tau+1) & (L\tau+3) & \ldots & (L\tau+n-1) & (L\tau+2) & (L\tau+4) & \ldots & (L\tau+n) \\ (L\tau+1)^3 & (L\tau+3)^3 & \ldots & (L\tau+n-1)^3 & (L\tau+2)^3 & (L\tau+4)^3 & \ldots & (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (L\tau+1)^{n-1} & (L\tau+3)^{n-1} & \ldots & (L\tau+n-1)^{n-1} & (L\tau+2)^{n-1} & (L\tau+4)^{n-1} & \ldots & (L\tau+n)^{n-1} \\ \hline -(L\tau+1) & -(L\tau+3) & \ldots & -(L\tau+n-1) & (L\tau+2) & (L\tau+4) & \ldots & (L\tau+n) \\ -(L\tau+1)^3 & -(L\tau+3)^3 & \ldots & -(L\tau+n-1)^3 & (L\tau+2)^3 & (L\tau+4)^3 & \ldots & (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -(L\tau+1)^{n-1} & -(L\tau+3)^{n-1} & \ldots & -(L\tau+n-1)^{n-1} & (L\tau+2)^{n-1} & (L\tau+4)^{n-1} & \ldots & (L\tau+n)^{n-1} \end{array}\right]$$

$$\underline{a} = \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ \hdashline a_2 \\ a_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ n/2 \\ \\ \\ \\ \\ n/2 \\ \\ \\ \end{array} , \quad \underline{c} = \left[\begin{array}{c} -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{n-1} \\ \hdashline -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{n-1} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ n/2 \\ \\ \\ \\ \\ n/2 \\ \\ \\ \end{array}$$

เอาแถวที่ $(n/2)+1$ บวกกับแถวที่ 1

เอาแถวที่ $(n/2)+2$ บวกกับแถวที่ 2

ทำอย่างนี้ไปเรื่อยๆ จะได้

$$\underline{A} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} (L\tau+1) & (L\tau+3) & \ldots & (L\tau+n-1) & (L\tau+2) & (L\tau+4) & \ldots & (L\tau+n) \\ (L\tau+1)^3 & (L\tau+3)^3 & \ldots & (L\tau+n-1)^3 & (L\tau+2)^3 & (L\tau+4)^3 & \ldots & (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (L\tau+1)^{n-1} & (L\tau+3)^{n-1} & \ldots & (L\tau+n-1)^{n-1} & (L\tau+2)^{n-1} & (L\tau+4)^{n-1} & \ldots & (L\tau+n)^{n-1} \\ \hdashline 0 & 0 & \ldots & 0 & 2(L\tau+2) & 2(L\tau+4) & \ldots & 2(L\tau+n) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2(L\tau+2)^3 & 2(L\tau+4)^3 & \ldots & 2(L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2(L\tau+2)^{n-1} & 2(L\tau+4)^{n-1} & \ldots & 2(L\tau+n)^{n-1} \end{array}\right]$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ \hline a_2 \\ a_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n/2 \\ \\ \updownarrow n/2 \end{matrix} , \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{n-1} \\ \hline -2(L\tau) \\ -2(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -2(L\tau)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n/2 \\ \\ \updownarrow n/2 \end{matrix}$$

เอา 2 หารแถวที่ (n/2)+1 แล้วนำไปลบออกจากแถวที่ 1

เอา 2 หารแถวที่ (n/2)+2 แล้วนำไปลบออกจากแถวที่ 2

ทำไปเรื่อยๆ จะได้

$$\underline{A} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} (L\tau+1) & (L\tau+3) & \ldots & (L\tau+n-1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (L\tau+1)^3 & (L\tau+3)^3 & \ldots & (L\tau+n-1)^3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (L\tau+1)^{n-1} & (L\tau+3)^{n-1} & \ldots & (L\tau+n-1)^{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & (L\tau+2) & (L\tau+4) & \ldots & (L\tau+n) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & (L\tau+2)^3 & (L\tau+4)^3 & \ldots & (L\tau+n)^3 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & (L\tau+2)^{n-1} & (L\tau+4)^{n-1} & \ldots & (L\tau+n)^{n-1} \end{array}\right]$$

$$\underline{a} = \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ \hline a_2 \\ a_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{array}\right] \begin{array}{c} \updownarrow n/2 \\ \\ \updownarrow n/2 \end{array} , \quad \underline{c} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \hline -(L\tau) \\ -(L\tau)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ -(L\tau)^{n-1} \end{array}\right] \begin{array}{c} \updownarrow n/2 \\ \\ \updownarrow n/2 \end{array}$$

จากคุณสมบัติของ แวนเดอร์มอง ดีเทอร์มีแนนท์ สุดท้ายจะได้

$$a_k = (-1)^{k/2} \binom{n/2}{k/2} \prod_{i=0}^{n/2} \frac{L\tau + i}{L\tau + i + (k/2)}$$

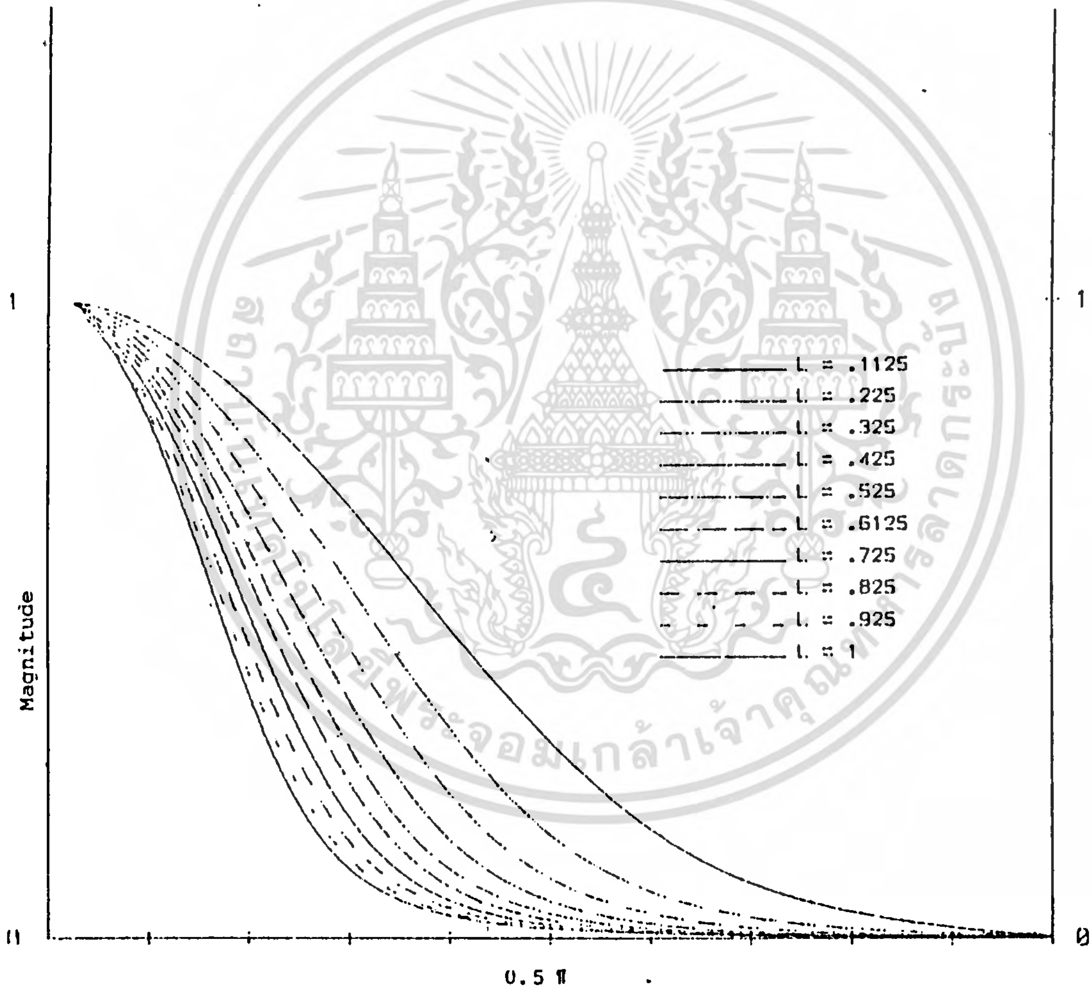
เมื่อ k = 0,2,4,...,n

การหาค่าของ b_k ก็เพียงแต่แทน L ด้วย (L-1) และ n ด้วย m ในที่สุดจะได้

$$b_k = (-1)^{k/2} \binom{m/2}{k/2} \prod_{i=0}^{m/2} \frac{(L-1)\tau + i}{(L-1)\tau + i + (k/2)}$$

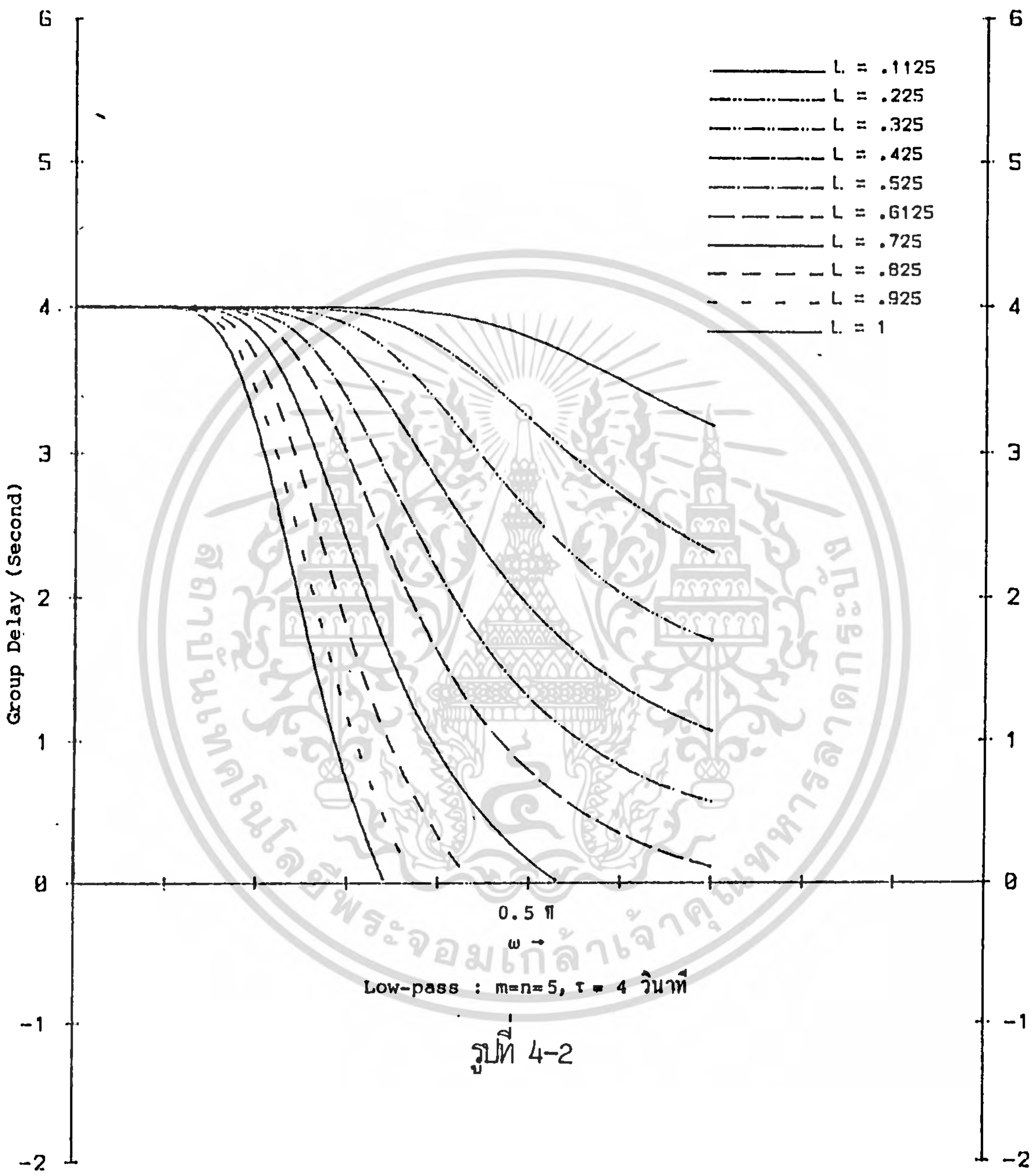
4.3 ผลลัพธ์ตัวอย่าง

จากการให้ m , n , กรุ๊ฟดีเลย์ , และพารามีเตอร์ L ของวงจรกรองความถี่แต่ละชนิด มีค่าเช่นเดียวกับในบทที่ 3 จะได้ ผลตอบสนองขนาดและกรุ๊ฟดีเลย์ของวงจรกรองความถี่แต่ละชนิด ดังแสดงในรูปที่ 4-1 ถึง รูปที่ 4-6 ตามลำดับ

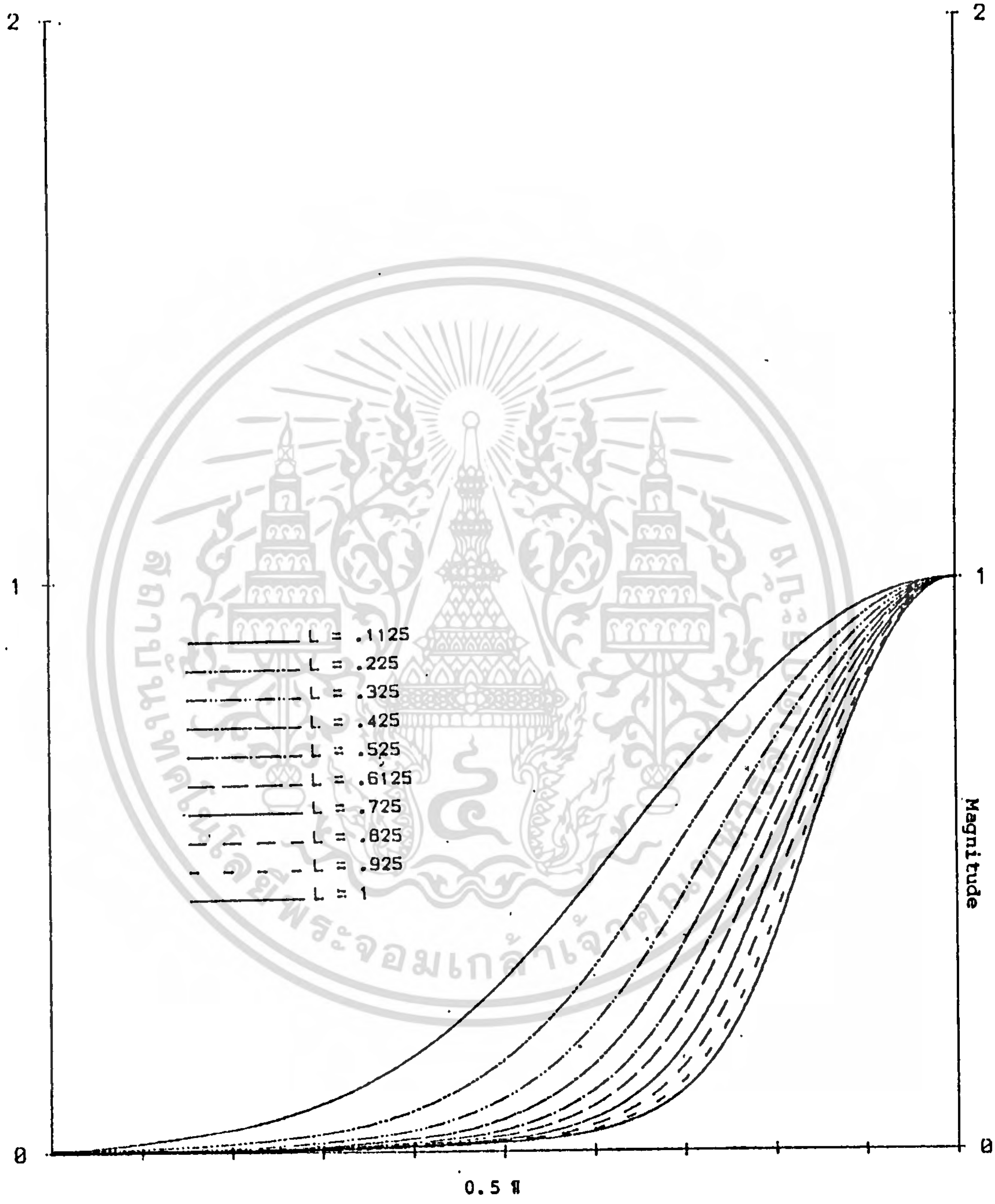


Low-pass : m=n=5, τ = 4 วินาที

รูปที่ 4-1

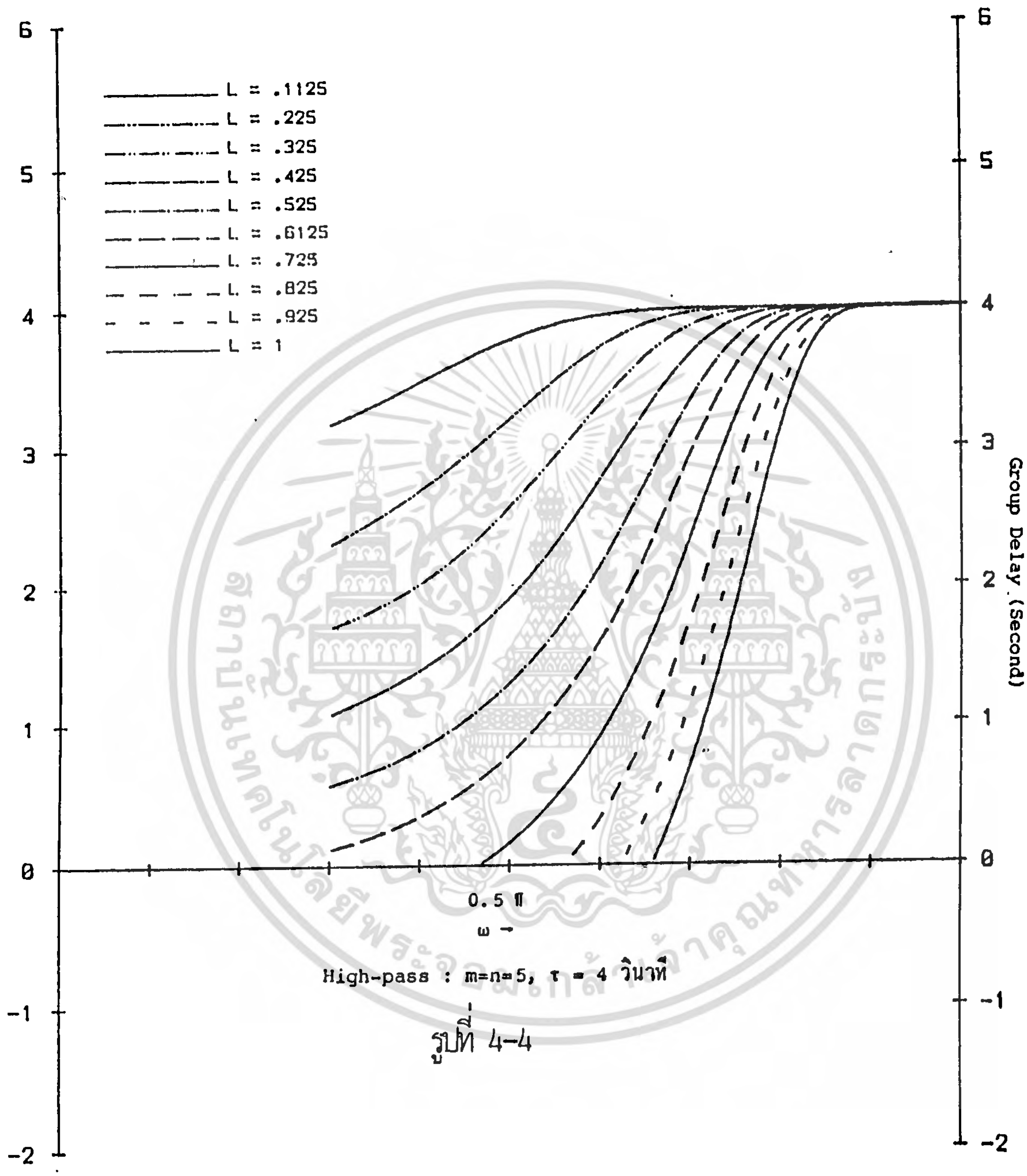

6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
Group Delay (Second)
L = .1125
L = .225
L = .325
L = .425
L = .525
L = .6125
L = .725
L = .825
L = .925
L = 1
0.5 π
ω →
Low-pass : m=n=5, τ = 4 วินาที

รูปที่ 4-2



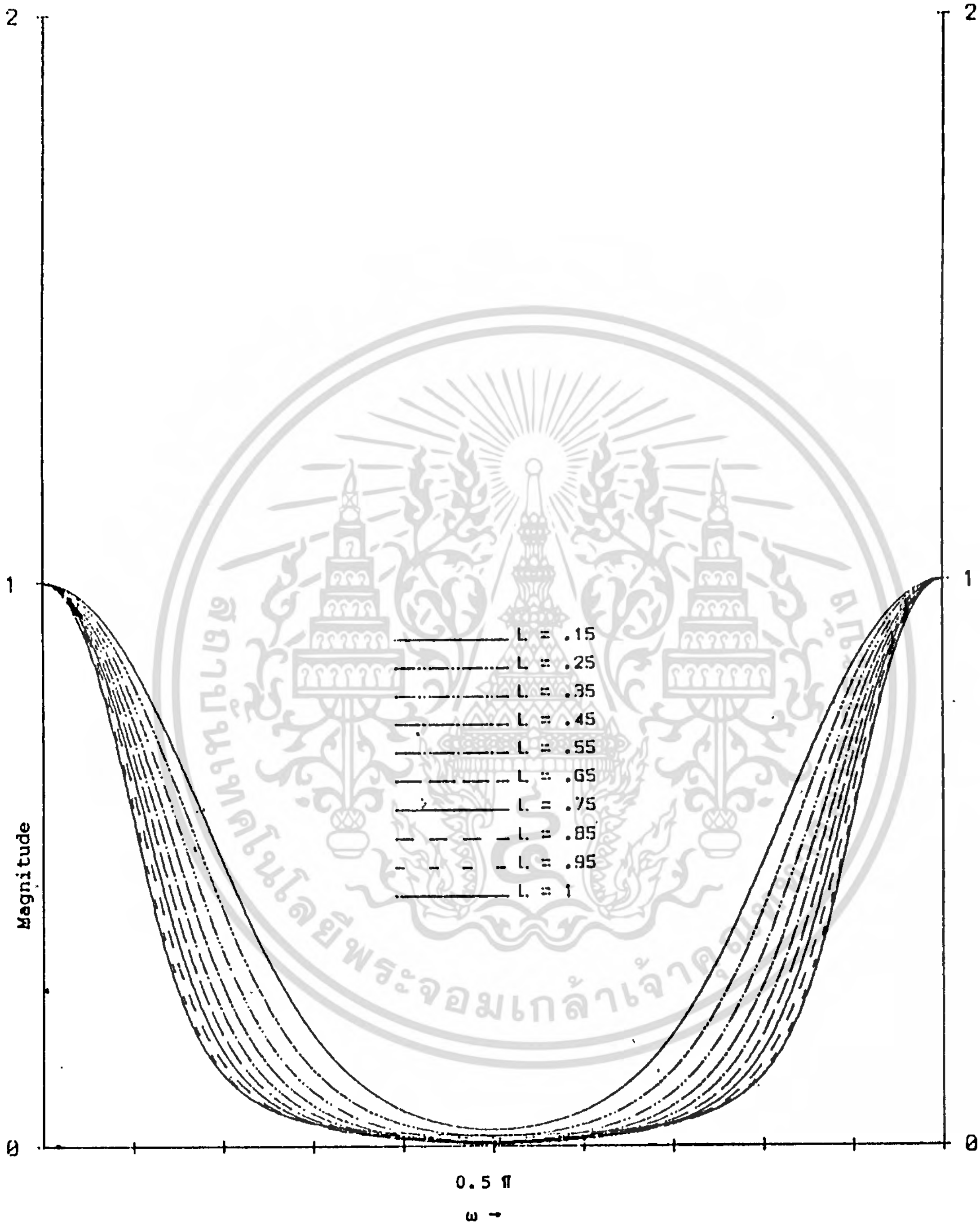
High-pass : m=n=5, τ = 4 วินาที

รูปที่ 4-3



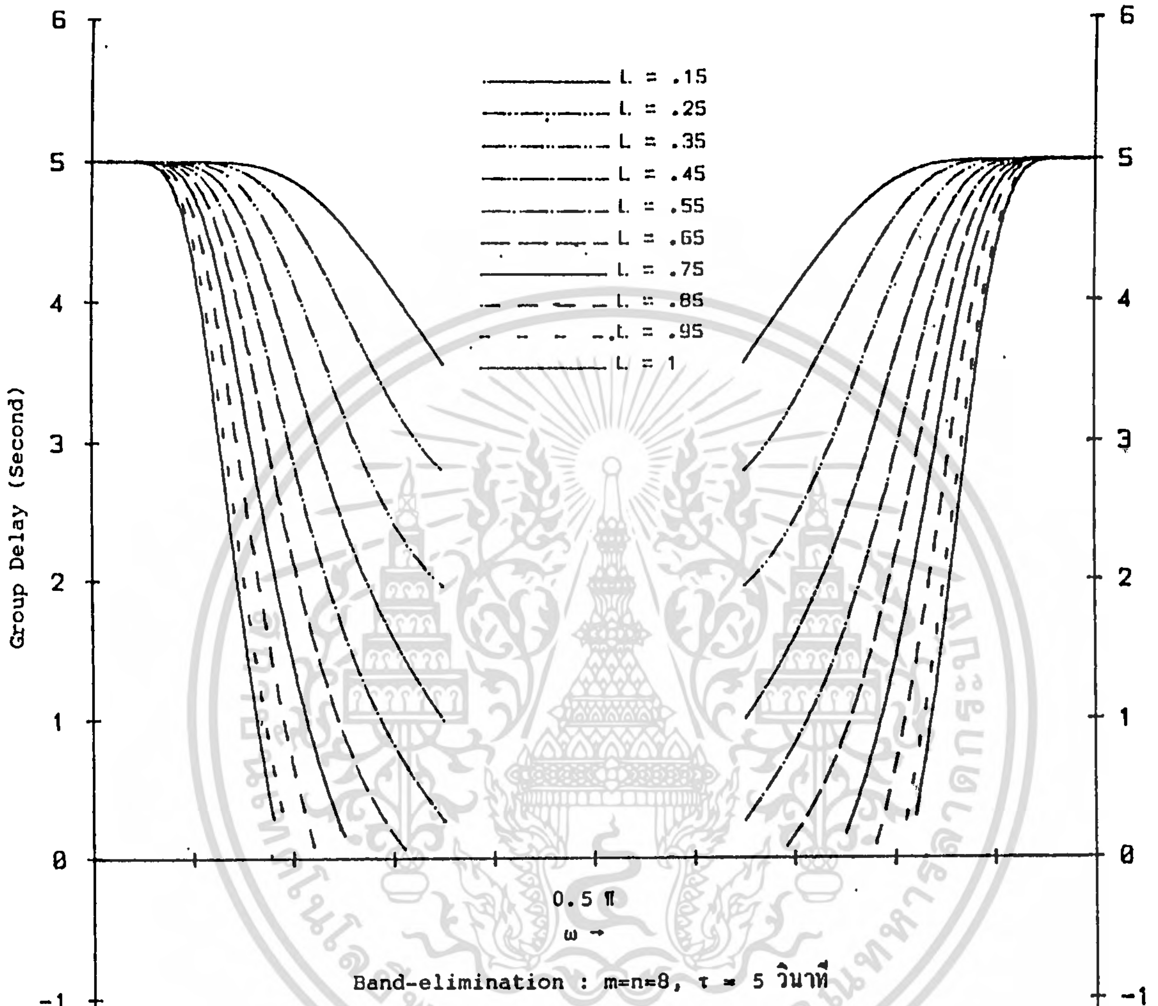
High-pass : m=n=5, τ = 4 วินาที

รูปที่ 4-4



Band-elimination : m=n=8, τ = 5 วินาที

รูปที่ 4-5



6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
Group Delay (Second)
L = .15
L = .25
L = .35
L = .45
L = .55
L = .65
L = .75
L = .85
L = .95
L = 1
0.5 π
ω →
Band-elimination : m=n=8, τ = 5 วินาที

รูปที่ 4-6

4.4 สรุป

จากการใช้สูตรสำเร็จที่หามาได้ แล้วนำสัมประสิทธิ์ที่ได้จากสูตรสำเร็จนี้ไปแทนค่าในทรานส์เฟอร์ฟังก์ชั่น ของวงจรกรองความถี่ทั้งสามแบบดังกล่าวข้างต้น จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองที่ได้เหมือนกับผลตอบสนองที่ได้จากวิธีแก้กลุ่มสมการเชิงเส้น แต่ใช้เวลาในการหาค่าสัมประสิทธิ์น้อยกว่าวิธีแรก และถ้าหากว่าอันดับของวงจรกรองความถี่มีค่าสูงๆ แล้ว วิธีในบทนี้จะยังคงให้ผลตอบสนองได้ถูกต้อง ซึ่งถ้าใช้วิธีในบทที่ 3 แล้วจะไม่สามารถหาค่าผลตอบสนองได้ ท่านผู้อ่านจะเห็นได้ชัดเจน ในภาคผนวกของตัวอย่างการใช้โปรแกรม

บทที่ 5
สรุป

ในบทที่ 1 ได้กล่าวถึงปัญหาและที่มาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และ เทคนิคริเริ่มที่ใช้แก้ปัญหาดังกล่าว ในบทที่ 2 จึงเป็นการกล่าวถึงคณิตศาสตร์ที่ได้นำมาช่วยในการแก้ปัญหา

บทที่ 3 เป็นเทคนิคการออกแบบวงจรกรองความถี่ดิจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟ ที่เฟสเป็นเชิงเส้น ทั้งชนิดผ่านความถี่ต่ำ ผ่านความถี่สูง และไม่ผ่านความถี่กลาง เทคนิคในบทที่ 3 นี้ ยังมีข้อเสียตรงที่สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ ต้องแก้ปัญหาโดยการใช้วิธีลดสัมประสิทธิ์ของเก๊าส์ แต่เทคนิคในบทที่ 3 นี้ ต่างจาก [4] ตรงที่อันดับของเศษและส่วนจะเปลี่ยนไปอย่างไรก็ทำได้สะดวก ในบทที่ 4 จึงได้หาเทคนิคใหม่เข้ามาช่วยแก้ปัญหา การหาค่าของสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ โดยทำเป็นสูตรสำเร็จ ซึ่งก็แน่นอนว่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ ที่หามาจากสูตรสำเร็จนี้ ย่อมหาได้รวดเร็วกว่าเดิม และมีความผิดพลาดน้อยมาก

ข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่สนใจจะทำวิจัยต่อ ก็คือ ถ้าหากเราทำให้ผลตอบสนองขนาดมีความราบเรียบที่สุด พร้อมทั้งกรุ๊ฟดีเลย์ ก็ยังคงราบเรียบที่สุดเช่นกัน ขณะเดียวกันก็ยังควบคุมความกว้างของผลตอบสนองทั้งสองอย่างได้ ถ้าทำได้เช่นนี้แล้วก็จะทำให้ได้ความสมบูรณ์ของการออกแบบมากยิ่งขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จด้วยคำแนะนำในการแก้ปัญหาจาก ผศ.ดร.ฟูศักดิ์ ชีวสุวิทย์ และ ผศ.กิตติ ตีรเศรษฐ ตลอดระยะเวลาที่ผู้เขียนศึกษา ณ สถาบันแห่งนี้ ซึ่งผู้เขียนขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ธนิตย์ ตรีสุวรรณวัฒน์

เอกสารอ้างอิง

[1] J.P.Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay" , IEEE Trans. Circuit Theory, Vol.CT-18, pp. 659-664, Nov. 1971.

[2] J.P.Thiran, "Equal-Ripple Delay Recursive Digital Filters", IEEE Trans. Circuit Theory, Vol.CT-18,pp.664-669, Nov. 1971.

[3] A.Fettwies, "A Simple design of maximally flat delay digital filter" , IEEE Trans. Audio Electroacoust, Vol. AU-20, pp. 112-114, June 1972.

[4] P.Thajchayapong, and P. Lomtong, "A Maximally Flat Group Delay Recursive Digital Filters with Controllable Magnitude", IEEE Trans. Circuit Syst., Vol. CAS-25, No. 1, pp. 51-53, January 1978.

[5] P. Thajchayapong and F. Cheevasuvit , "Filter coefficients of high-pass and band-elimination recursive digital filters with a maximally flat group delay", Int. j. Electronics, Vol.47, No.4, 1979.

[6] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics 3 rd ed., New York : Wiley 1972

[7] R. Subramanian, P.Açhuthan, and K.Venkatesan, Numerical Analysis for Engineers and Physicists, New York : Springer Verag 1976.

[8] Grabor C. Temes and Jack W. LaPatra , Introduction to circuit synthesis and design , New York : McGraw-Hill 1977.

ภาคผนวก

โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ

```
]LOAD DIGITAL.FILTERS
]LIST -1400

1000  REM  L/H/BEL W/CLOSED-FORM
1010  REM  N=ORDER OF a(i)
1020  REM  D=ORDER OF b(i)
1030  REM  T=GROUP DELAY
1040  REM  L=CONTROLLING PARAMETER
1050  REM   CO=0 => LOW-PASS
1060  REM   CO=1 => HIGH-PASS
1070  REM   CO=2 => BAND-ELIMINATION
1080  LOMEM: 24576
1090  HOME
1100 PI = 3.14159265358979323846264 3:BO = 0
1110  INPUT "CO=";CO: PRINT
1120  INPUT " N=";NA: PRINT
1130  INPUT " D=";DA: PRINT
1140  INPUT " T=";TD: PRINT
1150  INPUT " L=";LA: PRINT
1160  INPUT "CLOSED-FORM ? ";CF$: PRINT
1170  INPUT "PRINTER Y/N ? ";P$
1180 LB = LA - 1
1190  DIM AA(20,21),AI(20),A(40),C(40),RR(20),RI(20),AC(2
   ,20),AB(2),B(20),WN(1)
1200  FOR ID = 1 TO 2
1210  IF ID = 1 THEN L = LA:N = NA
1220  IF ID = 2 THEN L = LB:N = DA
1230 M = N + 1:T = TD:BO = 0:WO = CO * PI
1240  HOME : IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
1250  IF CO < > 2 AND ID = 1 THEN  PRINT " N = ";N; SPC(
   5);" BO = ";BO; SPC( 5);" T = ";TD; SPC( 5);" WO = ";
   CO;"PI"; SPC( 5);" L = ";L: PRINT : PRINT
1260  IF CO = 2 AND ID = 1 THEN  PRINT " N = ";N; SPC( 5)
   ;" BO = ";BO; SPC( 5);" T = ";TD; SPC( 5);" WO = 0 &
   1 PI"; SPC( 5);" L = ";L: PRINT : PRINT
1270  IF CO < > 2 AND ID = 2 THEN  PRINT " D = ";N; SPC(
   5);" BO = ";BO; SPC( 5);" T = ";TD; SPC( 5);" WO = ";
   CO;"PI"; SPC( 5);" L-1 = ";L: PRINT : PRINT
1280  IF CO = 2 AND ID = 2 THEN  PRINT " D = ";N; SPC( 5)
   ;" BO = ";BO; SPC( 5);" T = ";TD; SPC( 5);" WO = 0 &
   1 PI"; SPC( 5);" L-1 = ";L: PRINT : PRINT
1290  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
1300  IF CO = 2 AND CF$ < > "Y" THEN  GOSUB 4780
1310  IF CO = 2 AND CF$ = "Y" THEN  GOSUB 4520
1320  IF CO < > 2 AND CF$ = "Y" THEN  GOSUB 4300
1330  IF CO < > 2 AND CF$ < > "Y" THEN  GOSUB 2420
1340  IF CF$ = "Y" THEN 1360
1350  GOSUB 2680
1360  IF CO < > 2 THEN  GOSUB 2930
1370  IF CO = 2 THEN  GOSUB 5070
1380  GOSUB 3040
1390  NEXT ID
1400  DIM MN(101),PH(101)

]
```

LIST 1400-1800

```
1400  DIM MN(101),PH(101)
1410 SS = 100: REM  MEANS NO.OF POINTS = SS+1
1420  FOR S = 0 TO SS
1430 W = S * PI / SS
1440 MR = 0:MI = 0:AC(1,0) = 1:PC = 0:PS = 0
1450  FOR I = 0 TO NA
1460 MR = AC(1,I) *  COS (I * W) + MR:PC = I * AC(1,I) *
     COS (I * W) + PC
1470 MI = AC(1,I) *  SIN (I * W) + MI:PS = I * AC(1,I) *
     SIN (I * W) + PS
1480  NEXT I
1490 MA =  SQR (MR * MR + MI * MI)
1500 TA =  - 1 * (PC * MR + PS * MI) / (MR * MR + MI * MI
    )
1510 MR = 0:MI = 0:AC(2,0) = 1:PC = 0:PS = 0
1520  FOR I = 0 TO DA
1530 MR = AC(2,I) *  COS (I * W) + MR:PC = I * AC(2,I) *
     COS (I * W) + PC
1540 MI = AC(2,I) *  SIN (I * W) + MI:PS = I * AC(2,I) *
     SIN (I * W) + PS
1550  NEXT I
1560 MB =  SQR (MR * MR + MI * MI)
1570 TB =  - 1 * (PC * MR + PS * MI) / (MR * MR + MI * MI
    )
1580 MN(S) = (AB(1) / MA) * (MB / AB(2)):PH(S) = TA - TB
1590  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
1600  PRINT "Pt.#  ";S; TAB( 10);"  W = ";S / SS;" PI"; TAB(
    30);MN(S); SPC( 25 -  LEN ( STR$ (MN(S))));PH(S)
1610  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
1620  HOME : VTAB (9): PRINT  TAB( 10): FLASH : PRINT "DO
     NOT DISTURB !": NORMAL
1630  VTAB (12): PRINT  TAB( 15);S;"->";SS
1640  PRINT  CHR$ (7)
1650  NEXT S
1660  DIM XH(101),YV(101)
1670  FOR ID = 1 TO 2
1680  FOR I = 1 TO SS + 1
1690  IF ID = 1 THEN YV(I) = MN(I - 1)
1700  IF ID = 2 THEN YV(I) = PH(I - 1)
1710 XH(I) = PI * (I - 1) / SS
1720  NEXT I: TEXT :
1730 Y1 = YV(1):Y2 = YV(1):X1 = XH(1):X2 = XH(1)
1740  FOR I = 2 TO SS + 1
1750  IF (Y1 - YV(I)) <  = 0 THEN 1780
1760 Y1 = YV(I)
1770  GOTO 1800
1780  IF (Y2 - YV(I)) > 0 THEN 1800
1790 Y2 = YV(I)
1800  IF (X1 - XH(I)) <  = 0 THEN 1830

]
```

```
LIST 1800-2200

1800  IF (X1 - XH(I)) <  = 0 THEN 1830
1810 X1 = XH(I)
1820  GOTO 1850
1830  IF (X2 - XH(I)) >  = 0 THEN 1850
1840 X2 = XH(I)
1850  NEXT I
1860  PRINT "X-AXIS MIN.= ";X1; SPC( 20 -  LEN ( STR$ (X1
   )));"MAX.= ";X2: PRINT "Y-AXIS MIN.= ";Y1; SPC( 20 -
    LEN ( STR$ (Y1)));"MAX. = ";Y2
1870  INPUT "IF YOU DON'T WANT TO CHANGE PLEASE TYPE N";N
   $
1880  IF N$ <  > "N" THEN  INPUT "NEW VALUES OF X1,X2,Y1,
   Y2";X1: INPUT X2: INPUT Y1: INPUT Y2
1890  IF N$ = "N" THEN X1 = X1:X2 = X2:Y1 = Y1:Y2 = Y2
1900 XD = X2 - X1:YD = Y2 - Y1
1910  IF XD = 0 THEN XD = 1
1920  IF YD = 0 THEN YD = 1
1930  HCOLOR= 7: HGR
1940  HPLOT 8,1 TO 8,150
1950  FOR Y = 150 TO 0 STEP  - (150 / 8): HPLOT 5,Y TO 7,
   Y: NEXT Y
1960  FOR Y = 150 TO 0 STEP  - (150 / 4): HPLOT 3,Y TO 7,
   Y: NEXT Y
1970  HPLOT 13,154 TO 279,154
1980  FOR X = 13 TO 279 STEP 266 / 8: HPLOT X,155 TO X,15
   7: NEXT X
1990  FOR X = 13 TO 279 STEP 266 / 4: HPLOT X,157 TO X,15
   9: NEXT X
2000  FOR I = 1 TO SS + 1
2010 X = 279 - ((X2 - XH(I)) * 266 / XD)
2020 Y = 150 - ((YV(I) - Y1) * 150 / YD)
2030  IF X > 279 OR X < 13 OR Y < 0 OR Y > 154 THEN 2070
2040  IF I = 1 THEN 2060
2050  HPLOT  TO X,Y
2060  HPLOT X,Y
2070  NEXT I
2080  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
2090  IF ID = 1 THEN  PRINT  TAB( 5);"MAGNITUDE  "; SPC(
   5);"N=";NA; SPC( 5);"T=";TD; SPC( 5);"L=";LA
2100  IF ID = 2 THEN  PRINT  TAB( 5);"GROUP DELAY"; SPC(
   5);"N=";NA; SPC( 5);"T=";TD; SPC( 5);"L=";LA
2110  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
2120  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1: PRINT  CHR$ (17): PR# 0
2130  NEXT ID
2140  TEXT
2150  PRINT  CHR$ (7): INPUT "OKay ? ";OK$
2160  IF OK$ <  > "OK" THEN  PR# 6
2170  GOSUB 2200
2180  PR# 6
2190  END
2200  INPUT "Enter File Name of Magnitude (LM-NA-TD-LA)";
   M$

]
```

LIST 2200-2600

```
2200  INPUT "Enter File Name of Magnitude (LM-NA-TD-LA)";
    M$
2210 D$ =  CHR$ (4)
2220  PRINT D$;"MON C,I,O"
2230  PRINT D$;"OPEN";M$;",V254,S6,D1
2240  PRINT D$;"DELETE";M$
2250  PRINT D$;"OPEN";M$
2260  PRINT D$;"WRITE";M$
2270  FOR I = 0 TO 100
2280  PRINT MN(I)
2290  NEXT I
2300  PRINT D$;"CLOSE";M$
2310  INPUT "Enter File Name of Group Delay (LG-NA-TD-LA)
    ";G$
2320  PRINT D$;"OPEN";G$;",V254,S6,D1
2330  PRINT D$;"DELETE";G$
2340  PRINT D$;"OPEN";G$
2350  PRINT D$;"WRITE";G$
2360  FOR I = 0 TO 100
2370  PRINT PH(I)
2380  NEXT I
2390  PRINT D$;"CLOSE";G$
2400  PRINT D$;"NOMON C,I,O"
2410  RETURN
2420  FOR I = 1 TO N
2430  FOR K = 0 TO N - 1
2440 F1 = ( - 1 ^ (I * CO)) * (I + L * T) ^ (2 * K + 1)
2450 AA(K + 1,I) = F1
2460  NEXT K
2470  NEXT I
2480  FOR K = 0 TO N - 1
2490 F3 =  - 1 * (L * T) ^ (2 * K + 1)
2500 AA(K + 1,M) = F3
2510  NEXT K
2520  FOR I = 1 TO N
2530 B(I) = AA(I,M)
2540  NEXT I
2550  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
2560  FOR R = 1 TO N
2570  FOR C = 1 TO M - 1
2580  IF C > 1 THEN 2610
2590  PRINT "A(";R;",";C;") = ";AA(R,C); SPC( 20 -  LEN (
    STR$ (AA(R,C))));"B(";R;") = ";B(R)
2600  GOTO 2620

]
```

```
LIST 2600-3000

2600  GOTO 2620
2610  PRINT "A(";R;",";C;") = ";AA(R,C)
2620  NEXT C
2630  PRINT
2640  NEXT R
2650  PRINT : PRINT
2660  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
2670  RETURN
2680  FOR I = 1 TO N - 1:AMAX = 0
2690  FOR K = I TO N: IF  ABS (AA(K,I)) > AMAX THEN KMAX =
    K:AMAX =  ABS (AA(K,I))
2700  NEXT K
2710  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
2720  IF AMAX < .0000001 THEN  PRINT "THE EQUATION ARE IL
    L-CONDITIONED."
2730  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
2740  FOR J = I TO N:TEMP = AA(KMAX,J):AA(KMAX,J) = AA(I,
    J):AA(I,J) = TEMP: NEXT J:TEMP = B(KMAX):B(KMAX) = B(
    I):B(I) = TEMP: PRINT "OK-1"
2750  FOR II = I + 1 TO N:RT = AA(II,I) / AA(I,I):B(II) =
    B(I) * RT - B(II): FOR J = I TO N:AA(II,J) = RT * AA(
    I,J) - AA(II,J): NEXT J: NEXT II: PRINT "OK-2"
2760  NEXT I
2770  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
2780  IF  ABS (AA(N,N)) < .0000001 THEN  PRINT "AA(N,N) I
    N THE LAST STEP IS TOO SMALL. ": PRINT "THE EQUATIONS
     ARE PROBABLY DEPENDENT."
2790  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
2800 AI(N) = B(N) / AA(N,N)
2810  FOR K = N - 1 TO 1 STEP  - 1:AI(K) = B(K): FOR J =
    K + 1 TO N:AI(K) = AI(K) - AA(K,J) * AI(J): NEXT J:AI
    (K) = AI(K) / AA(K,K)
2820  NEXT K
2830 AI(0) = 1
2840  FOR I = 0 TO N
2850 AC(ID,I) = AI(I)
2860  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
2870  IF ID = 1 THEN  PRINT "a";I;" = ";AC(ID,I)
2880  IF ID = 2 THEN  PRINT "b";I;" = ";AC(ID,I)
2890  NEXT I
2900  PRINT : PRINT
2910  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
2920  RETURN
2930 W = CO * PI:AI(0) = 1
2940 MR = 0:MI = 0
2950  FOR I = 0 TO N
2960 MR = AI(I) *  COS (I * W) + MR
2970 MI = AI(I) *  SIN (I * W) + MI
2980  NEXT I
2990 AB(ID) =  SQR (MR * MR + MI * MI)
3000  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1

]
```

LIST 3000-3400

```
3000  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
3010  PRINT "MAGNITUDE (";ID;") AT (W=)WO = ";1 / AB(ID)
3020  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
3030  RETURN
3040 O = N:AI(O) = 1
3050  FOR I = 1 TO O + 1
3060 A(I) = AI(O + 1 - I)
3070  NEXT I
3080 IT = O:N = O
3090  IF A(N + 1) <  > 0 THEN 3110
3100  GOTO 3130
3110  IF N > 0 THEN 3130
3120  GOTO 4030
3130 NX = O
3140 NY = N + 1
3150 N2 = 1
3160 KJ = N + 1
3170  FOR Z = 1 TO KJ
3180 MT = KJ - Z + 1
3190 C(MT) = A(Z)
3200  NEXT Z
3210  REM   SET INITIAL VALUES
3220 XO = .00500101:YO = .01000101
3230 IN = 0
3240 X = XO
3250 XO =  - 10 * YO:YO =  - 10 * X
3260  REM  SET X AND Y TO CURRENT VALUE
3270 X = XO:Y = YO
3280 IN = IN + 1: GOTO 3330
3290 IT = 1
3300 XP = X
3310 YP = Y
3320  REM  EVALUATE POLYNOMIAL & DERIVATIVES
3330 IC = 0
3340 UX = 0:UY = 0:V = 0:YT = 0:XT = 1.00
3350 U = C(N + 1)
3360  IF U <  > 0 THEN 3380
3370  GOTO 3830
3380  FOR I = 1 TO N
3390 Z = N - I + 1
3400 T = C(Z)

]
```

```
LIST 3400-3800

3400 T = C(Z)
3410 X2 = X * XT - Y * YT:Y2 = X * YT + Y * XT
3420 U = U + T * X2
3430 V = V + T * Y2
3440 F1 = I
3450 UX = UX + F1 * XT * T
3460 UY = UY - F1 * YT * T
3470 XT = X2:YT = Y2: NEXT I
3480 SQ = (UX ^ 2) + (UY ^ 2)
3490  IF SQ <  > 0 THEN 3510
3500  GOTO 3740
3510 DX = (V * UY - U * UX) / SQ
3520 X = X + DX
3530 DY =  - (U * UY + V * UX) / SQ
3540 Y = Y + DY
3550  IF  ABS (DY) +  ABS (DX) - 1E - 5 < 0 THEN 3640
3560  REM  STEP ITERATION COUNTER
3570 IC = IC + 1
3580  HOME : VTAB (9): PRINT  TAB( 15): FLASH : PRINT "CO
    MPUTING": NORMAL
3590  VTAB (11): PRINT  TAB( 15);IC; TAB( 23);IN
3600  IF IC - 500 < 0 THEN 3340
3610  IF IT <  > 0 THEN 3640
3620  IF IN - 5 < 0 THEN 3240
3630  GOTO 4030
3640  FOR Z = 1 TO NY
3650 MT = KJ - Z + 1
3660 T = A(MT)
3670 A(MT) = C(Z)
3680 C(Z) = T: NEXT Z
3690 IP = N
3700 N = NX
3710 NX = IP
3720  IF IT <  > 0 THEN 3770
3730  GOTO 3290
3740  IF IT <  > 0 THEN 3760
3750  GOTO 3240
3760 X = XP:Y = YP
3770 IT = 0
3780  IF  ABS (Y) - (1E - 4 *  ABS (X)) < 0 THEN 3860
3790 AL = X + X
3800 SQ = (X ^ 2) + Y ^ 2

]
```

LIST 3800-4200

```
3800 SQ = (X ^ 2) + Y ^ 2
3810 N = N - 2
3820  GOTO 3900
3830 X = 0
3840 NX = NX - 1
3850 NY = NY - 1
3860 Y = 0
3870 SQ = 0
3880 AL = X
3890 N = N - 1
3900 C(2) = C(2) + AL * C(1)
3910  FOR Z = 2 TO N
3920 C(Z + 1) = C(Z + 1) + AL * C(Z) - SQ * C(Z - 1)
3930  NEXT Z
3940 RI(N2) = Y:RR(N2) = X
3950 N2 = N2 + 1
3960  IF SQ <  > 0 THEN 3980
3970  GOTO 4010
3980 Y =  - Y
3990 SQ = 0
4000  GOTO 3940
4010  IF N > 0 THEN 3220
4020  GOTO 4060
4030  INVERSE : PRINT : PRINT "UNABLE TO COMPUTE AFTER 50
     0 ITERATIONS"
4040  NORMAL
4050  END
4060  REM   OUTPUT RESULTS
4070  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
4080  HOME : PRINT : PRINT "FOR THE POLYNOMIAL EQUATION:"

4090  PRINT : PRINT "0 =  (";A(1);")+(";A(2);")Z"
4100  FOR K = 3 TO O + 1
4110  PRINT  TAB( 5);"+(";A(K);")Z";: PRINT  CHR$ (27);"S
     "; CHR$ (0);: PRINT K - 1;: PRINT  CHR$ (27);"T"
4120  NEXT K
4130  PRINT : PRINT "THE ROOTS ARE :"
4140  PRINT : PRINT " ROOT #   REAL PART      IMAGINARY P
     ART"
4150  FOR I = 1 TO O
4160 RR(I) =  INT (RR(I) * 1E6 + .5) / 1E6:RI(I) =  INT (
     RI(I) * 1E6 + .5) / 1E6
4170  PRINT  TAB( 3)I; TAB( 14)RR(I); TAB( 30)RI(I): NEXT
     I
4180  PRINT : PRINT : GOTO 4200
4190  END
4200  FOR I = 1 TO O

]
```

```
LIST 4200-4600

4200  FOR I = 1 TO Q
4210  IF ID = 1 THEN H$ = "H<L>(Z)"
4220  IF ID = 2 THEN H$ = "H<L-1>(Z)"
4230 RP =  SQR (RR(I) * RR(I) + RI(I) * RI(I))
4240  PRINT "MAGNITUDE OF ROOT #";I;" = ";RP
4250  IF RP > 1 THEN  PRINT  TAB( 5);"ROOT# ";I;" OF ";H$
   ;" IS > 1 (";RP;")"
4260  NEXT I
4270  PRINT : PRINT
4280  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
4290  RETURN
4300  FOR K = 1 TO N
4310 Q = 1:F = 1:P = 1:R = N + 1
4320  FOR I = 1 TO R
4330 P = P * (2 * L * T + I - 1) / (2 * L * T + K + I - 1
   )
4340  IF N - K >  = I THEN 4370
4350 F = F:Q = Q
4360  GOTO 4390
4370 F = F * (N - I + 1)
4380 Q = Q * (N - K - I + 1)
4390  NEXT I
4400 AI(K) = ( - 1 ^ (K * (1 - CO))) * P * F / Q
4410  NEXT K
4420 AI(0) = 1
4430  FOR I = 0 TO N
4440 AC(ID,I) = AI(I)
4450  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
4460  IF ID = 1 THEN  PRINT "a";I;" = ";AC(ID,I)
4470  IF ID = 2 THEN  PRINT "b";I;" = ";AC(ID,I)
4480  NEXT I
4490  PRINT : PRINT
4500  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
4510  RETURN
4520  FOR K = 1 TO N / 2
4530 Q = 1:P = 1:F = 1
4540 R = (N / 2) + 1
4550  FOR I = 1 TO R
4560 P = P * (L * T + I - 1) / (L * T + K + I - 1)
4570  IF (N / 2) - K >  = I THEN 4600
4580 F = F:Q = Q
4590  GOTO 4620
4600 F = F * (N / 2 - I + 1)

]
```

LIST 4600-5000

```
4600 F = F * (N / 2 - I + 1)
4610 Q = Q * (N / 2 - K - I + 1)
4620  NEXT I
4630 AI(2 * K) = P * ( - 1) ^ K * F / Q
4640 AI(2 * K - 1) = 0
4650  PRINT "Ak(";2 * K;") == ";AI(2 * K)
4660  NEXT K
4670  PRINT : PRINT
4680 AI(0) = 1
4690  FOR I = 0 TO N
4700 AC(ID,I) = AI(I)
4710  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
4720  IF ID = 1 THEN  PRINT "a";I;" = ";AC(ID,I)
4730  IF ID = 2 THEN  PRINT "b";I;" = ";AC(ID,I)
4740  NEXT I
4750  PRINT : PRINT
4760  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
4770  RETURN
4780  FOR I = 1 TO N
4790  FOR K = 0 TO N / 2 - 1
4800 F1 = (I + L * T) ^ (2 * K + 1)
4810 F3 =  - 1 * ((L * T) ^ (2 * K + 1))
4820 F2 = ( - 1 ^ I) * ((I + L * T) ^ (2 * K + 1))
4830 F4 =  - 1 * ((L * T) ^ (2 * K + 1))
4840 AA(K + 1,I) = F1
4850 AA(K + 1,M) = F3
4860 AA(K + 1 + N / 2,I) = F2
4870 AA(K + 1 + N / 2,M) = F4
4880  NEXT K
4890  NEXT I
4900  FOR I = 1 TO N
4910 B(I) = AA(I,M)
4920  NEXT I
4930  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
4940  FOR R = 1 TO N
4950  FOR C = 1 TO M - 1
4960  IF C > 1 THEN 4990
4970  PRINT "A(";R;",";C;") = ";AA(R,C); TAB( 40);"B(";R;
     ") = ";B(R)
4980  GOTO 5010
4990  PRINT "A(";R;",";C;") = ";AA(R,C)
5000  GOTO 5010

]
```

```
LIST 5000-

5000  GOTO 5010
5010  NEXT C
5020  PRINT
5030  NEXT R
5040  PRINT : PRINT
5050  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
5060  RETURN
5070  FOR J = 0 TO 1
5080 AI(0) = 1:MR = 0:MI = 0
5090 W = J * PI
5100  FOR I = 0 TO N
5110 MR = AI(I) *  COS (I * W) + MR
5120 MI = AI(I) *  SIN (I * W) + MI
5130  NEXT I
5140 WN(J) =  SQR (MR * MR + MI * MI)
5150  NEXT J
5160  IF WN(0) > WN(1) THEN AB(ID) = WN(0)
5170  IF WN(0) = WN(1) THEN AB(ID) = WN(1)
5180  IF WN(0) < WN(1) THEN AB(ID) = WN(1)
5190  IF P$ = "Y" THEN  PR# 1
5200  PRINT "MAGNITUDE (";ID;") AT (W=)WO = ";1 / AB(ID)
5210  IF P$ = "Y" THEN  PR# 0
5220  RETURN

]
```

ตัวอย่าง การใช้โปรแกรม

ในการออกแบบวงจรไม่ผ่านความถี่กลาง กำหนดให้ $m=n=20, \tau=5$ วินาที และ $L=0.9$ ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีลดสัมประสิทธิ์ของเกาส์ และจากการใช้สูตรสำเร็จตามลำดับ

```
a0 = 1
a1 = -1.18880303
a2 = -2.86358295
a3 = 1.54585261
a4 = 2.66745658
a5 = -.841033553
a6 = -.963195865
a7 = .163331763
a8 = -.250895064
a9 = .0694541773
a10 = .493065292
a11 = -.0654335705
a12 = -.293498617
a13 = .0251843833
a14 = .103406024
a15 = -5.68709294E-03
a16 = -.0229531348
a17 = 7.38740118E-04
a18 = 2.9998931E-03
a19 = -4.31156417E-05
a20 = -1.77740875E-04


MAGNITUDE (1) AT (W=)WO = 2.35952412

FOR THE POLYNOMIAL EQUATION:
```

$$
\begin{aligned}
0 = {} & (-1.77740875E-04)+(-4.31156417E-05)Z \\
& +(2.99989931E-03)Z^{2} \\
& +(7.38740118E-04)Z^{3} \\
& +(-.0229531348)Z^{4} \\
& +(-5.68709294E-03)Z^{5} \\
& +(.103406024)Z^{6} \\
& +(.0251843833)Z^{7} \\
& +(-.293498617)Z^{8} \\
& +(-.0654335705)Z^{9} \\
& +(.493065292)Z^{10} \\
& +(.0694541773)Z^{11} \\
& +(-.250895064)Z^{12} \\
& +(.163331763)Z^{13} \\
& +(-.963195865)Z^{14} \\
& +(-.841033553)Z^{15} \\
& +(2.66745658)Z^{16} \\
& +(1.54585261)Z^{17} \\
& +(-2.86358295)Z^{18} \\
& +(-1.18880303)Z^{19} \\
& +(1)Z^{20}
\end{aligned}
$$

THE ROOTS ARE :

ROOT #	REAL PART	IMAGINARY PART
1	-.519906	0
2	-.518845	.236568
3	-.518845	-.236568
4	.552282	.040748
5	.552282	-.040748
6	-.518259	.408098
7	-.518259	-.408098
8	.548184	.114265
9	.548184	-.114265
10	-.519854	.110517
11	-.519854	-.110517
12	.528507	-.215942
13	.528507	.215942
14	.510536	-.366881
15	.510536	.366881
16	-.750784	-.118442
17	-.750784	.118442
18	.031717	.775952
19	.031717	-.775952
20	1.981741	0

MAGNITUDE OF ROOT #1 = .519906
MAGNITUDE OF ROOT #2 = .570232017
MAGNITUDE OF ROOT #3 = .570232017
MAGNITUDE OF ROOT #4 = .553783177
MAGNITUDE OF ROOT #5 = .553783177
MAGNITUDE OF ROOT #6 = .659648671
MAGNITUDE OF ROOT #7 = .659648671
MAGNITUDE OF ROOT #8 = .559966238
MAGNITUDE OF ROOT #9 = .559966238
MAGNITUDE OF ROOT #10 = .53147172
MAGNITUDE OF ROOT #11 = .53147172
MAGNITUDE OF ROOT #12 = .570920832
MAGNITUDE OF ROOT #13 = .570920832
MAGNITUDE OF ROOT #14 = .628688059
MAGNITUDE OF ROOT #15 = .628688059
MAGNITUDE OF ROOT #16 = .760069156
MAGNITUDE OF ROOT #17 = .760069156
MAGNITUDE OF ROOT #18 = .776599945
MAGNITUDE OF ROOT #19 = .776599945
MAGNITUDE OF ROOT #20 = 1.981741
ROOT# 20 OF H<L>(Z) IS > 1 (1.981741)

b0 = 1
b1 = 3.91137332
b2 = -.938273414
b3 = -.0237306942
b4 = 2.87285352E-03
b5 = 3.47483807E-04
b6 = -9.58151311E-05
b7 = -1.35711656E-05
b8 = 5.99528226E-06
b9 = 6.56807567E-07
b10 = -4.052768819E-07
b11 = -1.6914296E-08
b12 = 2.10775511E-08
b13 = -2.36110836E-09
b14 = -5.26213337E-10
b15 = 4.44895519E-10
b16 = 2.57830099E-11
b17 = -3.63329581E-11
b18 = -9.50782242E-12
b19 = 1.300523E-12
b20 = 8.45501178E-13

MAGNITUDE (2) AT (W=)WO = .253005298

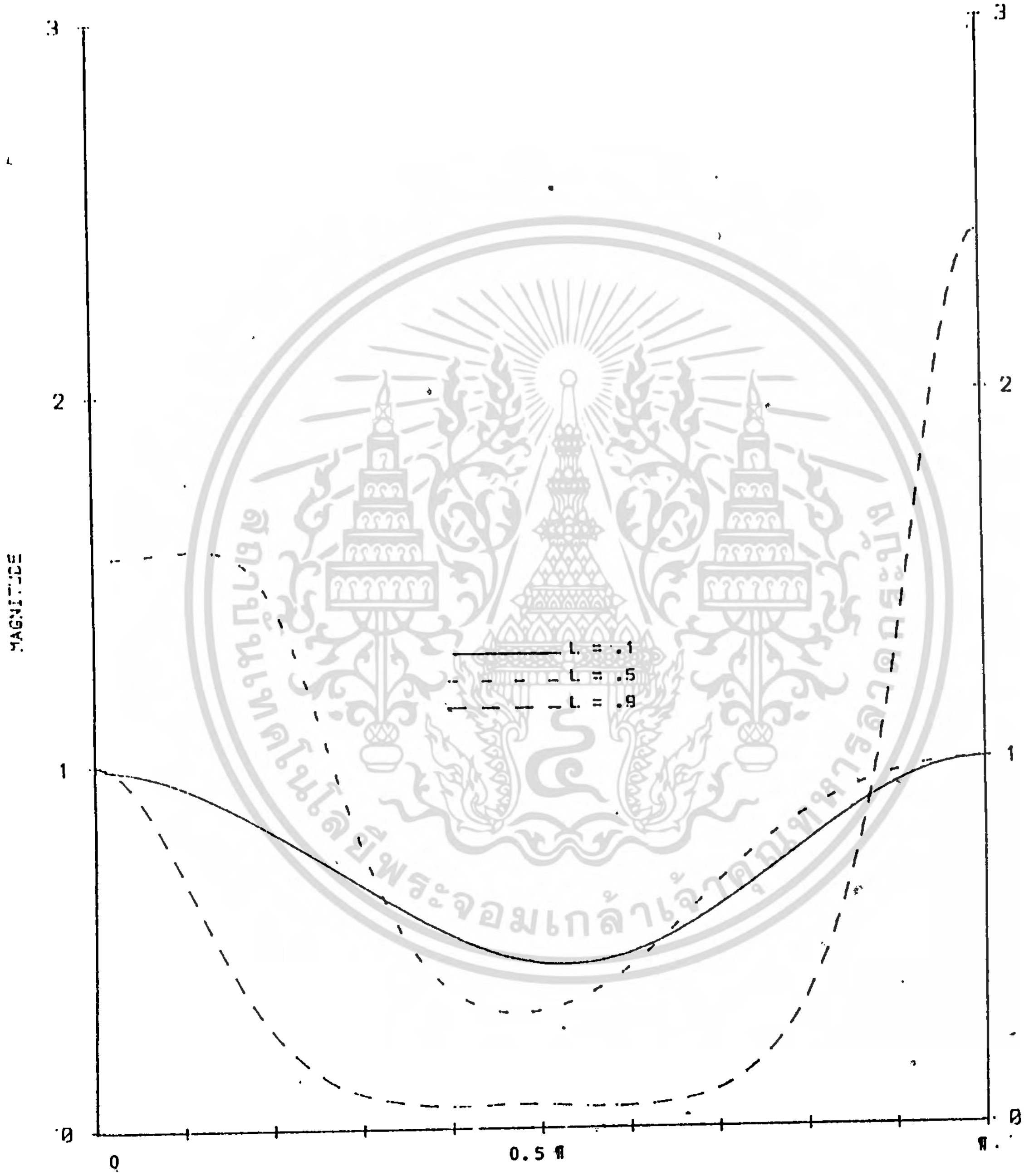
FOR THE POLYNOMIAL EQUATION:

$$
\begin{aligned}
0 = \; & (8.45501178E-13)+(1.300523E-12)Z \\
& +(-9.50782242E-12)Z^{2} \\
& +(-3.63329581E-11)Z^{3} \\
& +(2.57830099E-11)Z^{4} \\
& +(4.44895519E-10)Z^{5} \\
& +(-5.26213337E-10)Z^{6} \\
& +(-2.36110836E-09)Z^{7} \\
& +(2.10775511E-08)Z^{8} \\
& +(-1.6914296E-08)Z^{9} \\
& +(-4.05276819E-07)Z^{10} \\
& +(6.56807567E-07)Z^{11} \\
& +(5.99528226E-06)Z^{12} \\
& +(-1.35711656E-05)Z^{13} \\
& +(-9.58151311E-05)Z^{14} \\
& +(3.47483807E-04)Z^{15} \\
& +(2.87285352E-03)Z^{16} \\
& +(-.0237306942)Z^{17} \\
& +(-.938273414)Z^{18} \\
& +(3.91137332)Z^{19} \\
& +(1)Z^{20}
\end{aligned}
$$

THE ROOTS ARE :

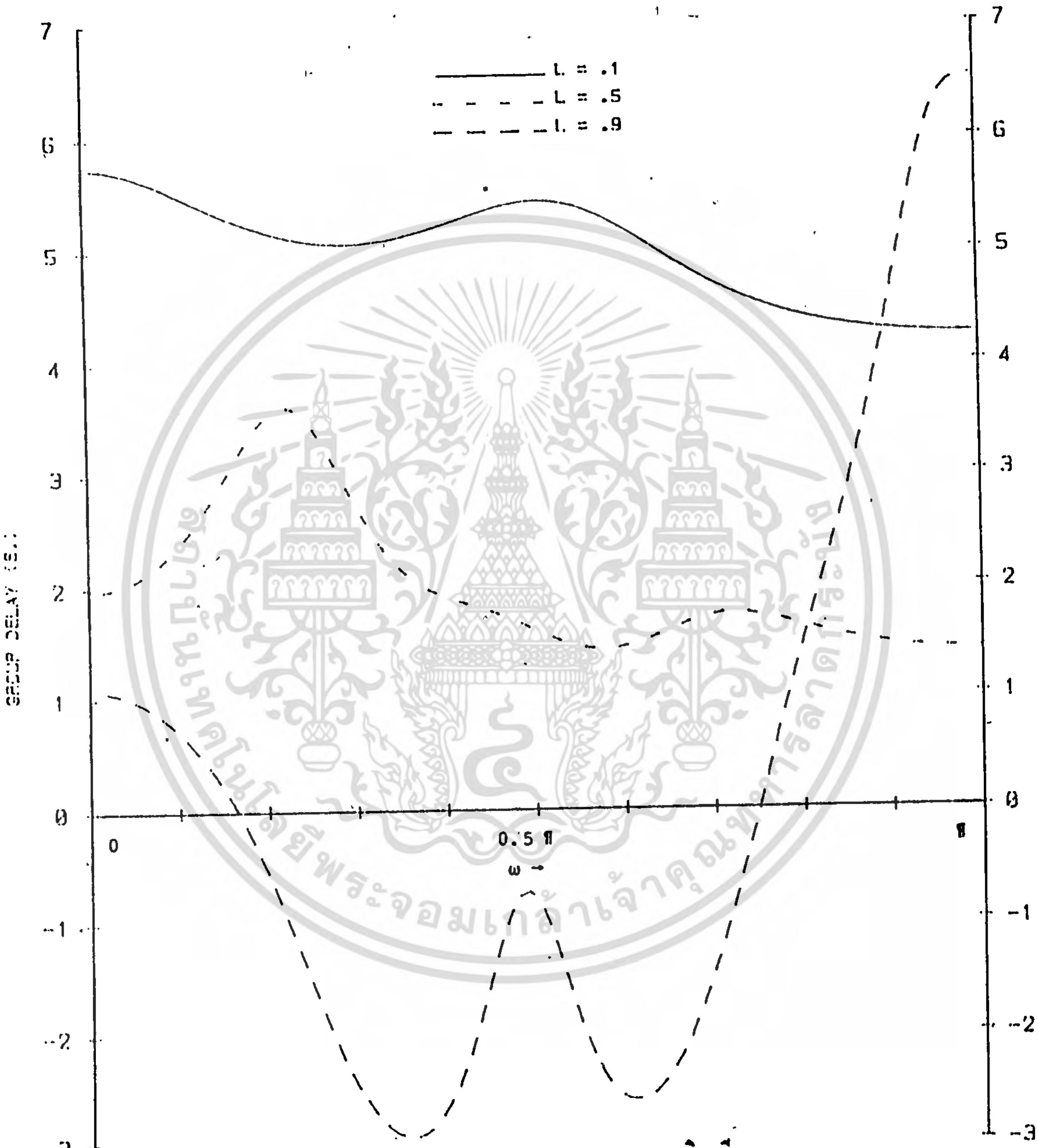
ROOT #	REAL PART	IMAGINARY PART
1	-.200415	0
2	.102487	.196511
3	.102487	-.196511
4	-.162637	-.124245
5	-.162637	.124245
6	.236618	-.017907
7	.236618	.017907
8	.165677	-.146807
9	.165677	.146807
10	-.191456	-.063603
11	-.191456	.063603
12	-.056889	-.203622
13	-.056889	.203622
14	.025924	-.216906
15	.025924	.216906
16	.205751	.083389
17	.205751	-.083389
18	-.112572	-.171201
19	-.112572	.171201
20	-4.136761	0

MAGNITUDE OF ROOT #1 = .200415
MAGNITUDE OF ROOT #2 = .22163068
MAGNITUDE OF ROOT #3 = .22163068
MAGNITUDE OF ROOT #4 = .204664637
MAGNITUDE OF ROOT #5 = .204664637
MAGNITUDE OF ROOT #6 = .237294624
MAGNITUDE OF ROOT #7 = .237294624
MAGNITUDE OF ROOT #8 = .221362064
MAGNITUDE OF ROOT #9 = .221362064
MAGNITUDE OF ROOT #10 = .201744248
MAGNITUDE OF ROOT #11 = .201744248
MAGNITUDE OF ROOT #12 = .211419671
MAGNITUDE OF ROOT #13 = .211419671
MAGNITUDE OF ROOT #14 = .218449689
MAGNITUDE OF ROOT #15 = .218449689
MAGNITUDE OF ROOT #16 = .222007206
MAGNITUDE OF ROOT #17 = .222007206
MAGNITUDE OF ROOT #18 = .204895675
MAGNITUDE OF ROOT #19 = .204895675
MAGNITUDE OF ROOT #20 = 4.136761
ROOT# 20 OF H<L-1>(Z) IS > 1 (4.136761)



Band-elimination : m=n=20, τ=5 วินาที

(ใช้ Gaussian Elimination)



Band-elimination : m=n=20, τ=5 วินาที

(ใช้ Gaussian Elimination)

N = 20   BO = 0   T = 5   WO = 0 & 1 PI   L = .9

a0 = 1
a1 = 0
a2 = -2.90322581
a3 = 0
a4 = 4.35483871
a5 = 0
a6 = -4.31336406
a7 = 0
a8 = 3,06015693
a9 = 0
a10 = -1.60069747
a11 = 0
a12 = .618155528
a13 = 0
a14 = -.172508519
a15 = 0
a16 = .0330641329
a17 = 0
a18 = -3.90828994E-03
a19 = 0
a20 = 2.15354752E-04

MAGNITUDE (1) AT (W=)WO = 13.7501442

FOR THE POLYNOMIAL EQUATION:

0 = (2.15354752E-04)+(0)Z
+(-3.90828994E-03)Z^{2}
+(0)Z^{3}
+(.0330641329)Z^{4}
+(0)Z^{5}
+(-.172508519)Z^{6}
+(0)Z^{7}
+(.618155528)Z^{8}
+(0)Z^{9}
+(-1.60069747)Z^{10}
+(0)Z^{11}
+(3.06015693)Z^{12}
+(0)Z^{13}
+(-4.31336406)Z^{14}
+(0)Z^{15}
+(4.35483871)Z^{16}
+(0)Z^{17}
+(-2.90322581)Z^{18}
+(0)Z^{19}
+(1)Z^{20}

THE ROOTS ARE :

ROOT #	REAL PART	IMAGINARY PART
1	-.587571	.038896
2	-.587571	-.038896
3	.587571	.038897
4	.587571	-.038897
5	-.590648	.119178
6	-.590648	-.119178
7	.597492	.207866
8	.597492	-.207866
9	-.610047	.314822
10	-.610047	-.314822
11	.590648	.119178
12	.590648	-.119178
13	-.597492	.207866
14	-.597492	-.207866
15	.634204	-.464568
16	.634204	.464568
17	.610047	.314822
18	.610047	-.314822
19	-.634204	-.464568
20	-.634204	.464568

MAGNITUDE OF ROOT #1 = .588857011
MAGNITUDE OF ROOT #2 = .588857011
MAGNITUDE OF ROOT #3 = .588857077
MAGNITUDE OF ROOT #4 = .588857077
MAGNITUDE OF ROOT #5 = .602551621
MAGNITUDE OF ROOT #6 = .602551621
MAGNITUDE OF ROOT #7 = .63261755
MAGNITUDE OF ROOT #8 = .63261755
MAGNITUDE OF ROOT #9 = .686491248
MAGNITUDE OF ROOT #10 = .686491248
MAGNITUDE OF ROOT #11 = .602551621
MAGNITUDE OF ROOT #12 = .602551621
MAGNITUDE OF ROOT #13 = .63261755
MAGNITUDE OF ROOT #14 = .63261755
MAGNITUDE OF ROOT #15 = .786154018
MAGNITUDE OF ROOT #16 = .786154018
MAGNITUDE OF ROOT #17 = .686491248
MAGNITUDE OF ROOT #18 = .686491248
MAGNITUDE OF ROOT #19 = .786154018
MAGNITUDE OF ROOT #20 = .786154018

D = 20   BO = 0   T = 5   WO = 0 & 1 PI   L-1 = -.1

b0 = 1
b1 = 0
b2 = .476190477
b3 = 0
b4 = -.0931677018
b5 = 0
b6 = .0298136646
b7 = 0
b8 = -9.66183574E-03
b9 = 0
b10 = 2.7986007E-03
b11 = 0
b12 = -6.77080814E-04
b13 = 0
b14 = 1.28967774E-04
b15 = 0
b16 = -1.79633685E-05
b17 = 0
b18 = 1.61832149E-06
b19 = 0
b20 = -7.05422188E-08

MAGNITUDE (2) AT (W=)WO = .711536806

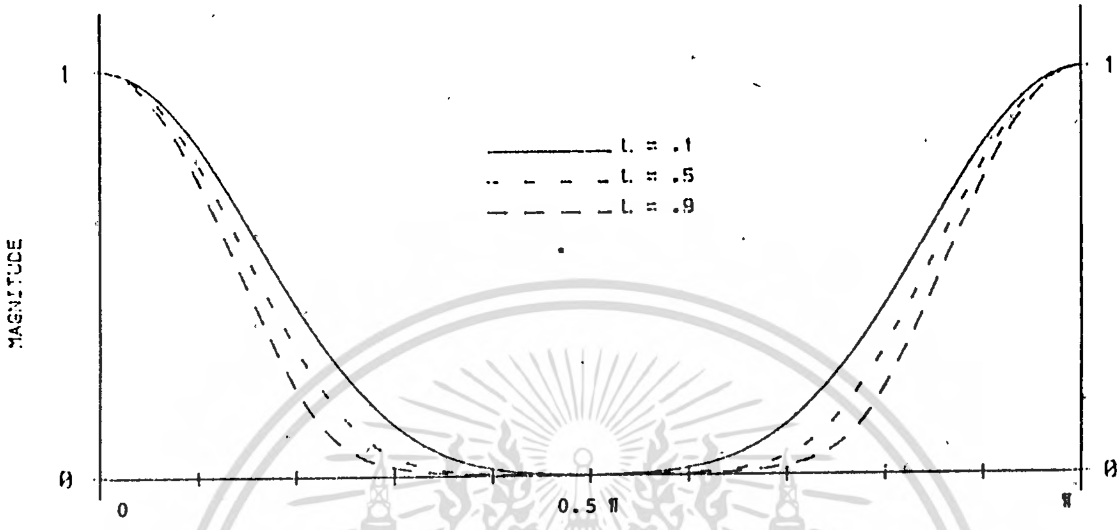
FOR THE POLYNOMIAL EQUATION:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & (-7.05422188E-08)+(0)Z \\
& +(1.61832149E-06)Z^{2} \\
& +(0)Z^{3} \\
& +(-1.79633685E-05)Z^{4} \\
& +(0)Z^{5} \\
& +(1.28967774E-04)Z^{6} \\
& +(0)Z^{7} \\
& +(-6.77080814E-04)Z^{8} \\
& +(0)Z^{9} \\
& +(2.7986007E-03)Z^{10} \\
& +(0)Z^{11} \\
& +(-9.66183574E-03)Z^{12} \\
& +(0)Z^{13} \\
& +(.0298136646)Z^{14} \\
& +(0)Z^{15} \\
& +(-.0931677018)Z^{16} \\
& +(0)Z^{17} \\
& +(.476190477)Z^{18} \\
& +(0)Z^{19} \\
& +(1)Z^{20}
\end{aligned}
$$

THE ROOTS ARE :

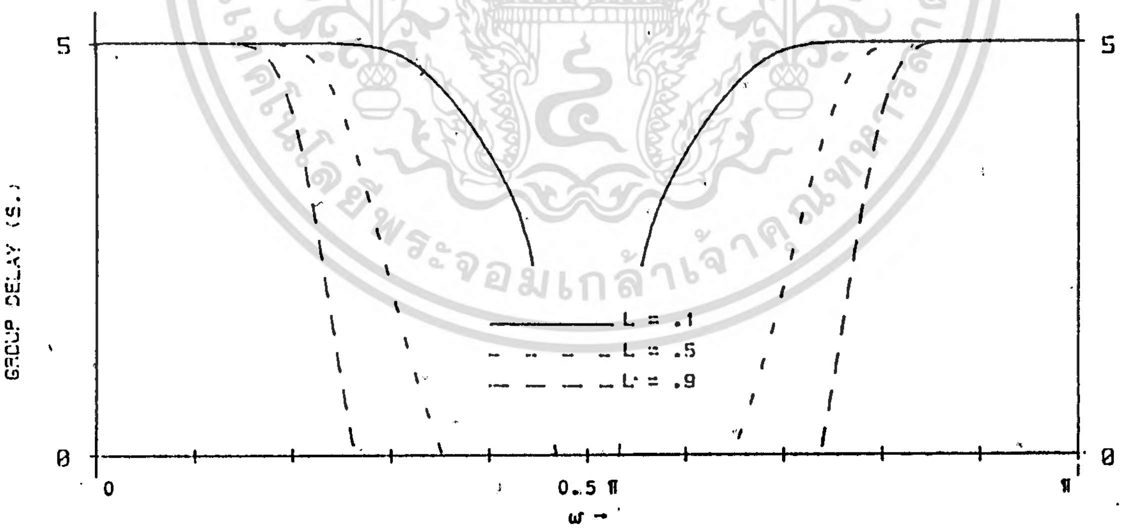
ROOT #	REAL PART	IMAGINARY PART
1	-.356467	0
2	-.303635	.296091
3	-.303635	-.296091
4	.351844	.088482
5	.351844	-.088482
6	-.336384	.183827
7	-.336384	-.183827
8	.356467	0
9	.303635	.296091
10	.303635	-.296091
11	-.351844	.088482
12	-.351844	-.088482
13	.336384	-.183827
14	.336384	.183827
15	.231955	-.447692
16	.231955	.447692
17	-.231955	-.447692
18	-.231955	.447692
19	0	-.842443
20	0	.842443

MAGNITUDE OF ROOT #1 = .356467
MAGNITUDE OF ROOT #2 = .424103871
MAGNITUDE OF ROOT #3 = .424103871
MAGNITUDE OF ROOT #4 = .362799207
MAGNITUDE OF ROOT #5 = .362799207
MAGNITUDE OF ROOT #6 = .383336095
MAGNITUDE OF ROOT #7 = .383336095
MAGNITUDE OF ROOT #8 = .356467
MAGNITUDE OF ROOT #9 = .424103871
MAGNITUDE OF ROOT #10 = .424103871
MAGNITUDE OF ROOT #11 = .362799207
MAGNITUDE OF ROOT #12 = .362799207
MAGNITUDE OF ROOT #13 = .383336095
MAGNITUDE OF ROOT #14 = .383336095
MAGNITUDE OF ROOT #15 = .504213495
MAGNITUDE OF ROOT #16 = .504213495
MAGNITUDE OF ROOT #17 = .504213495
MAGNITUDE OF ROOT #18 = .504213495
MAGNITUDE OF ROOT #19 = .842443
MAGNITUDE OF ROOT #20 = .842443



Band-elimination : m=n=20, τ=5 วินาที

(ใช้สูตรสำเร็จ)



Band-elimination : m=n=20, τ=5 วินาที

(ใช้สูตรสำเร็จ)

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

1. "วงจรกรองความถี่ดิจิตอลแบบรีเคอร์ซีฟชนิดผ่านความถี่สูง ที่กรุ๊ฟดีเลย์ราบเรียบที่สุด และสามารถควบคุมกรุ๊ฟดีเลย์กับผลตอบสนองขนาด" การประชุมทางวิชาการวิศวกรรมไฟฟ้า สถาบันอุดมศึกษาแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 9 ณ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เล่มที่ 2 หน้า 5-8-1.--.5-8-10 วันที่ 3-4 ธันวาคม 2529

2. "วงจรกรองความถี่ดิจิตอลชนิดไม่ผ่านความถี่กลางแบบรีเคอร์ซีฟที่ให้เฟสเป็นเชิงเส้น และสามารถควบคุมผลตอบสนองของขนาด กับ กรุ๊ฟดีเลย์ในย่านผ่านความถี่" การประชุมทางวิชาการวิศวกรรมไฟฟ้า สถาบันอุดมศึกษาแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 9 ณ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เล่มที่ 2 หน้า 5-7-1 -5-7-11 วันที่ 3-4 ธันวาคม 2529