รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การควบคุมเหมาะสุดของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัยที่มีการหน่วงด้วยเวลา

FOPTIMAL REGULATOR OF MORTGAGE-BACKED SECURITIES WITH TIME LAG

นายวิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากทุนส่งเสริมนักวิจัย งบประมาณเงินรายได้
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2556

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ชื่อโครงการ การควบคุมเหมาะสุดของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัยที่มีการหน่วงด้วยเวลา
แหล่งเงิน ทุนส่งเสริมนักวิจัย งบประมาณเงินรายได้
ประจำปีงบประมาณ 2556 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 50,000 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2555 ถึง 30 กันยายน 2556
หัวหน้าโครงการ นายวิชัย วิทยาเกียรติเลิศ ภาคคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาแบบจำลองการจ่ายชำระหนี้ของสินเชื่อที่อยู่อาศัยซึ่งอธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีการหน่วงเชิงเวลา โดยได้พิสูจน์การมีผลเฉลย การจากนั้นประยุกต์ผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาการควบคุมเหมาะสมที่สุด นอกจากนี้ในการวิจัยยังได้ยกตัวอย่างสถานการณ์การจ่ายชำระหนี้ที่มีตัวควบคุมและใช้ผลจากทฤษฎียืนยันการมีผลเฉลยของปัญหาการควบคุมเหมาะสมที่สุดนี้อีกด้วย

คำสำคัญ : สินเชื่อที่อยู่อาศัย, การควบคุมเหมาะสมที่สุด, แบบจำลองการจ่ายชำระหนี้, สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีการหน่วงเชิงเวลา

Research Title: OPTIMAL REGULATOR OF MORTGAGE-BACKED SECURITIES WITH TIME LAG

Researcher: Mr. Wichai Witayakiattilerd

Faculty: Science **Department:** Mathematics

ABSTRACT

In this research, the mathematical model of payment for mortgage with time delay was studied. The results was applied to the optimize problem of the differential equation with time delay. Furthermore, the Pontrykin Minimum Principle the differential equation with time delay was riased as an example that support our results.

Keywords : mortgage-backed securities , optimize problem, differential equation with delay

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้บรรลุล่วงไปด้วยดี ผู้วิจัยต้องขอขอบคุณการสนับสนุนและความช่วยเหลือเป็นอย่างดีในทุกๆด้านจากคณะวิทยาศาสตร์ และฝ่ายกองทุนวิจัย คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง “การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากแหล่งทุน รายได้คณะวิทยาศาสตร์ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2556”

นาย วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย (Mortgage-Backed Securities) หรือ MBS เป็นหนึ่งในกระบวนการแปลงสินทรัพย์ให้เป็นหลักทรัพย์(Securitization) เพื่อขายในตลาดรอง สินทรัพย์ในที่นี้ คือ เงินกู้ระยะยาวเพื่อที่อยู่อาศัยและอสังหาริมทรัพย์ดังกล่าวถูกนำมาใช้เป็นหลักทรัพย์ค้ำประกัน ระบบตลาดรองสินเชื่อที่อยู่อาศัย เป็นระบบเงินเพื่อที่อยู่อาศัยผ่านสถาบันรับจำนอง (Mortgage Company) และสถาบันที่รับซื้อสินเชื่อ (Secondary Mortgage Institution) ที่เป็นสถาบันกึ่งรัฐบาล คือ Fanie Mai ทำหน้าที่นำกองสินเชื่อที่รับซื้อมาออกตราสารที่เรียกว่า Securities และค้ำประกันการชำระเงิน จากนั้นนำออกจำหน่ายให้นักลงทุนซึ่งเป็นการโอนสิทธิ์มาให้นักลงทุน

MBS เป็นผลิตภัณฑ์ทางการเงิน ที่มีประโยชน์ต่อระบบเศรษฐกิจของประเทศ คือ ทำให้วงจรของระบบสินเชื่อที่อยู่อาศัยสมบูรณ์และมีเงินทุนหมุนเวียนต่อเนื่อง ก่อให้เกิดธุรกิจและอุตสาหกรรมทางตรงซึ่งเป็นปัจจัยสำคัญต่อการขยายตัวทางเศรษฐกิจและการจ้างงาน ทำให้ระบบการเงินเพื่อที่อยู่อาศัยมีการบริหารความเสี่ยงและการกระจายความเสี่ยงที่เหมาะสม MBS มีประโยชน์ต่อประชาชน ทำให้มีเงินทุนที่มีอัตราดอกเบี้ยคงที่ยาวนานมาใช้เพื่อที่อยู่อาศัยได้ต่อเนื่องและสม่ำเสมอ เป็นช่องทางสำหรับนักลงทุนที่ให้ผลตอบแทนสูงกว่าเงินฝากสำหรับนักลงทุน นอกจากนี้ยังมีประโยชน์ต่อสถาบันการเงิน คือ ทำให้สถาบันการเงินสามารถบริหารความเสี่ยงได้ดีขึ้น ทำกำไรต่อสินทรัพย์ได้สูงขึ้น และเป็นการลดต้นทุนของสถาบันในการระดมเงินฝากอีกด้วย

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาการควบคุมเหมาะสุดของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัยที่มีการหน่วงด้วยเวลา โดยเริ่มพิจารณาในกรณีของพันธบัตรทุนจม (Sinking-fund bond) ซึ่งการจ่ายชำระคืนเงินในแต่ละงวด (Principal Payment Schedule) $p(t)$ อธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE)

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \rho p(t) - h \,,\ t_0 < t \le T \\ p(t_0) = p_0 \end{cases} \qquad \text{....... (1)}$$

เมื่อกำหนดการจ่ายชำระคืนเริ่มต้น p_0 กำหนดเวลาไถ่ถอน (Maturity) T อัตราดอกเบี้ย (Coupon rate) ρ และอัตราคงที่ (Constant rate) h

ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาอัตราคงที่ เป็นอัตราที่สามารถควบคุมได้และเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับข้อมูลการจ่ายชำระคืนในอดีต (History payment) ดังนั้นตารางการจ่ายชำระคืนเงิน จะอธิบายได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีการหน่วงด้วยเวลาและการควบคุม

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \rho p(t) - h\big(t, p(t), p(t-l), \ldots, p(t-kl), u(t)\big) & , t_0 < t \le T \\ p(t) = \varphi(t) & , t_0 - kl \le t \le t_0 \end{cases} \quad \text{....... (2)}$$

เมื่อ $\varphi(t)$ เป็นฟังก์ชันของข้อมูลในอดีต และ $u(t)$ เป็นตัวแปรควบคุม โดยมีฟังก์ชันที่ใช้วัดผลการดำเนินงาน (Performance index) หรือ ฟังก์ชันจุดประสงค์ คือ

$$J(u) = F\big(T, p(T)\big) + \int_{t_0}^{T} L\big(t, p(t), u(t)\big)\, dt \quad \text{.......(3)}$$

เมื่อ F เป็นฟังก์ชันสภาวะสิ้นสุดเพนัลตี้ (Final state penalty) L เป็นฟังก์ชันสะท้อนที่ให้เห็นถึงค่าใช้จ่ายตั้งแต่เวลาเริ่มต้นการจ่ายชำระเงินของการจ่ายชำระเงิน $p(t)$ และการควบคุม $u(t)$ ที่สัมพันธ์กัน

ปัญหาการควบคุมเหมาะสุด คือ การหาตัวควบคุม $u_0 \in U_{ad}$ ซึ่ง

$$J(u_0) = \min_{u \in U_{ad}} J(u)$$

1.1 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1.1.1 เพื่อศึกษาและทำความเข้าใจระบบสมการพลวัตร ทฤษฎีราคาสินทรัพย์ และ โครงสร้างตราสารหนี้หนุนด้วยสินเชื่อที่อยู่อาศัย

1.1.2 เพื่อพิสูจน์การมีผลเฉลยละมุน (mild solution) และการมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว ซึ่งสอดคล้องกับตัวควบคุมที่กำหนด ของระบบสมการ (2)

1.1.3 เพื่อพิสูจน์การมีตัวควบคุมเหมาะสุด

1.1.4 เพื่อหาการควบคุมเหมาะสุดโดยใช้หลักค่าสูงสุงสุดของพอนทรายากินที่มีการหน่วงด้วยเวลา

1.1.5 เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบควบคุมที่มีการหน่วงด้วยเวลา

1.2 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1.2.1 ศึกษานิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับระบบควบคุมที่มีการหน่วงด้วยเวลา

1.2.2 ศึกษาระบบสมการพลวัตร ทฤษฎีราคาสินทรัพย์ และ โครงสร้างตราสารหนี้หนุนด้วยสินเชื่อที่อยู่อาศัย

1.2.3 ศึกษาเงื่อนไขและสมมติฐานที่จำเป็นสำหรับการมีผลเฉลยและการมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวด้วยวิธีทางฟังก์ชันวิเคราะห์ และหาการจ่ายชำระที่มีการควบคุมเหมะสุดและการหน่วงด้วยเวลา ด้วยวิธีหลักการค่าสูงสุด

1.2.4 ยกตัวอย่าง พร้อมทั้งหาผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่อสนับสนุนทฤษฎีที่ได้

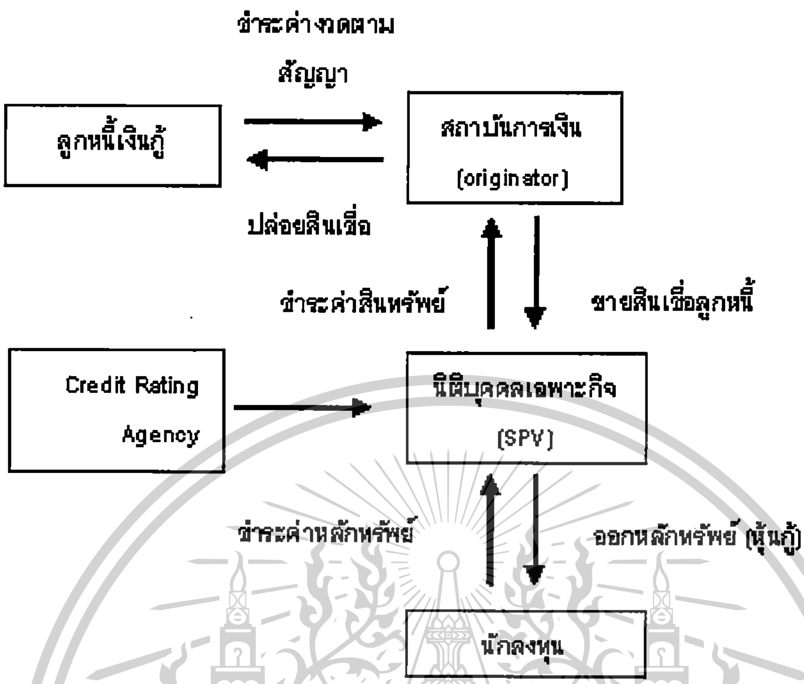
บทที่ 2
ตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย

ตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย (Mortgage Backed Securities) หรือ MBS เป็นผลิตภัณฑ์ทางการเงินซึ่งเกิดจากกระบวนการแปลงสินทรัพย์ให้เป็นหลักทรัพย์ MBS มีประโยชน์ต่อระบบเศรษฐกิจของประเทศ คือ ทำให้วงจรของระบบสินเชื่อที่อยู่อาศัยสมบูรณ์และมีเงินทุนหมุนเวียนต่อเนื่อง ก่อให้เกิดธุรกิจและอุตสาหกรรมทางตรงซึ่งเป็นปัจจัยสำคัญต่อการขยายตัวทางเศรษฐกิจและการจ้างงาน ทำให้ระบบการเงินเพื่อที่อยู่อาศัยมีการบริหารความเสี่ยงและการกระจายความเสี่ยงที่เหมาะสม MBS มีประโยชน์ต่อประชาชน ทำให้มีเงินทุนที่มีอัตราดอกเบี้ยคงที่ยาวนานมาใช้เพื่อที่อยู่อาศัยได้ต่อเนื่องและสม่ำเสมอ เป็นช่องทางสำหรับนักลงทุนที่ให้ผลตอบแทนสูงกว่าเงินฝากสำหรับนักลงทุน นอกจากนี้ยังมีประโยชน์ต่อสถาบันการเงิน คือ ทำให้สถาบันการเงินสามารถบริหารความเสี่ยงได้ดีขึ้น ทำกำไรต่อสินทรัพย์ได้สูงขึ้น และเป็นการลดต้นทุนของสถาบันในการระดมเงินฝากอีกด้วย

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย

2.1 คำจำกัดความของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย

ตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย (Mortgage Backed Securities) หรือ MBS เป็นผลิตภัณฑ์ทางการเงินชนิดหนึ่งในกระบวนการแปลงสินทรัพย์ให้เป็นหลักทรัพย์ (Securitization) เพื่อขายจำหน่ายแก่นักลงทุน สินทรัพย์ในที่นี้ คือ เงินกู้ระยะยาวเพื่อที่อยู่อาศัยและอสังหาริมทรัพย์ สินทรัพย์ดังกล่าวจะถูกนำมาใช้เป็นหลักทรัพย์ค้ำประกันในการออกหลักทรัพย์โดยที่ระบบตลาดรองสินเชื่อที่อยู่อาศัยซึ่งเป็นระบบเงินเพื่อที่อยู่อาศัยผ่านสถาบันรับจำนอง (Mortgage Company) และสถาบันที่รับซื้อสินเชื่อ (Secondary Mortgage Institution) ที่เป็นสถาบันกึ่งรัฐบาล คือ Fanie Mai จะทำหน้าที่นำกองสินเชื่อที่รับซื้อมาจากสถาบันการเงินในตลาดแรก เช่น ธนาคารอาคารสงเคราะห์ ธนาคารพาณิชย์ บริษัทเงินทุน เป็นต้น และทำการออกตราสารที่เรียกว่า Securities โดยค้ำประกันการชำระเงิน จากนั้นนำออกจำหน่ายให้นักลงทุนซึ่งเป็นการโอนสิทธิ์มาให้นักลงทุน



แผนภาพแสดงการออกตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย

เริ่มจากธนาคารหรือสถาบันการเงินปล่อยสินเชื่อแก่ลูกหนี้ จากนั้นสถาบันการเงินบริหารความเสี่ยงด้วยการขายสินเชื่อลูกหนี้ ให้แก่นิติบุคคลเฉพาะกิจที่จัดตั้งขึ้นเพื่อแปลงสินทรัพย์(สินทรัพย์ในที่นี้คือ สินเชื่อที่อยู่อาศัย) ให้เป็นหลักทรัพย์ เพื่อขายแก่นักลงทุน โดยมีสถาบันจัดอันดับความน่าเชื่อถือ(Credit Rating Agency) จัดอันดับความน่าเชื่อถือของกองทุนหรือหลักทรัพย์ที่นิติบุคคลนั้นออกเพื่อรับรองคุณภาพตราสารที่ออก

2.2 ประเภทของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย

2.2.1 ตราสารหนี้ประเภทพาสทรู (Pass-through)

ตราสารหนี้ประเภทพาสทรู เป็นตราสารที่จากการแปลงสินทรัพย์ให้เป็นหลักทรัพย์ ส่วนใหญ่เกิดจากการรวบรวมสินทรัพย์เพื่อใช้เป็นสินทรัพย์อ้างอิง จากนั้นจึงออกตราสารที่แบ่งปันผลประโยชน์ที่เกิดจากสินทรัพย์อ้างอิงที่ผลิตได้ในอนาคต เช่นตราสารที่ใช้สินทรัพย์ที่มีรายได้จากสินเชื่อเป็นหลัก ด้วยเหตุนี้เองกระแสเงินสดที่ผู้ถือตราสารจะได้รับจึงขึ้นอยู่กับกระแสเงินสดที่ผลิตหรือได้รับจากสินทรัพย์อ้างอิง เช่น เงินที่ลูกหนี้ชำระ หักด้วยค่าบริการและค่าใช้จ่ายอื่นๆ แล้วจัดสรรเป็นต่อหน่วย ตามส่วน ซึ่งทำ ให้กระแสเงินที่จะได้รับไม่แน่นอน เช่น ในกรณีของหุ้นกู้ที่ใช้สินทรัพย์ซึ่งเป็นรายได้จากสินเชื่อเปิดโอกาสให้ลูกหนี้จ่ายคืนเงินต้นก่อนกำ หนดได้ โดยหากลูกหนี้ส่วนใหญ่มีการชำ ระคืนเงินต้นได้เร็วก่อนกำ หนดก็จะทำ ให้ผู้ถือตราสารนั้น

ได้รับคืนเงินเร็วขึ้นตามไปด้วย จากการที่ไม่ทราบกระแสเงินสดที่แน่นอนที่จะได้รับในแต่ละงวดการจ่ายทำให้ไม่สามารถคำนวณราคาซื้อขายโดยการใช้อัตราผลตอบแทน (Yield) ไปคิดลดกระแสเงินเพื่อหามูลค่าปัจจุบันดังเช่นตราสารหนี้ทั่วไปได้ การซื้อขายในตลาดรองจึงกำหนดให้ ซื้อขายด้วยราคาเป็นหลัก (Traded by price) อย่างไรก็ตามในการประเมินอัตราผลตอบแทนที่ได้จากราคาซื้อขายที่เกิดขึ้น อาจทำ ได้โดยการประมาณการกระแสเงินสดที่จะได้รับ โดยการประมาณการกระแสเงินสดจะขึ้นอยู่กับสมมติฐานที่ผู้คำนวณกำหนดสมมติฐานที่แตกต่างกันก็จะทำ อัตราผลตอบแทนและราคาที่คำนวณได้แตกต่างกันไป สำ หรับในต่างประเทศได้มีการวิเคราะห์ตราสารพาสทรูที่ได้รับการแปลงบัญชีเงินให้กู้ยืมซึ่งลูกหนี้จำนองอสังหาริมทรัพย์ โดยเริ่มศึกษาจากพฤติกรรมการจ่ายเงินในบัญชีเงินให้กู้ยืมที่ใช้เป็นสินทรัพย์อ้างอิง จากนั้นจึงเอาข้อมูลที่ได้ไปพยากรณ์กระแสเงินที่จะถูกส่งผ่านจากการที่มีการชำระคืนเงินต้นก่อนกำหนดในตราสารพาสทรู ทั้งนี้ถือว่ากระแสเงินสดที่ผู้ถือจะได้รับในแต่ละงวดจะเป็นผลรวมของกระแสเงินสดส่วนต่างๆ ตามสมการ

$$CF_t = I_t + P_t - S_t \tag{2.1}$$

โดยที่ CF_t คือ กระแสเงินสดที่ผู้ถือตราสารจะได้รับต่อหน่วย ณ งวดการจ่ายที่ t

t คือ ลำ ดับที่ของงวดชำ ระดอกเบี้ยและเงินต้น

I_t คือ กระแสเงินจากดอกเบี้ยต่อหน่วย ณ งวดการจ่ายที่ t ซึ่ง คำนวณได้จากสูตร

$$I_t = iF_{t-1} \tag{2.2}$$

เมื่อ F_{t-1} เป็น ยอดเงินต้นคงค้างต้นงวดต่อหน่วย

i เป็น อัตราดอกเบี้ยถัวเฉลี่ยที่ลูกหนี้ต้องจ่าย

S_t คือ ค่าบริการในการแปลงสินทรัพย์ต่อหน่วย

$$S_t = sF_{t-1} \tag{2.3}$$

เมื่อ s เป็น ร้อยละของอัตราค่าบริการ

P_t คือ เงินชำ ระคืนเงินต้นทั้งหมด ณ งวดการจ่ายที่ t

$$P_t = SP_t + PR_t \tag{2.4}$$

สำหรับเงินชำระคืนเงินต้น P_t จะแบ่งเป็นสองส่วน คือ เงินชำระคืนเงินต้นที่ได้ประมาณการไว้จำนวน SP_t และ เงินชำ ระคืนเงินต้นที่มีการชำ ระคืนก่อนกำหนดอีกจำนวน PR_t

โดยในส่วนของ SP_t จะหาจากการประมาณการเงินที่ต้องชำ ระทั้งหมดจากเงินต้นคงค้างแต่ละงวด MP_t แล้วหักลบดอกเบี้ยที่จ่ายในงวดนั้นๆ ซึ่งจะได้

$$SP_t = MP_t - I_t \tag{2.5}$$

สำหรับเงินที่ต้องชำระทั้งหมดจากเงินต้นคงค้างแต่ละงวดจะเท่ากับประมาณการเงินที่คาดว่าจะได้รับทั้งหมดในงวดดอกเบี้ยนั้นๆ (ในกรณีที่ไม่รวมเงินชำ ระคืนเงินต้นก่อนกำ หนด) หักดอกเบี้ยที่จ่าย โดย MP_t คำนวณได้จาก

$$MP_t = \frac{i}{1-v^{n-t+1}} F_{t-1} \tag{2.6}$$

เมื่อ $v = \frac{1}{1+i}$ เป็นอัตราส่วนลด (Discount Factor)

n เป็น อายุหรือจำ นวนงวดดอกเบี้ยทั้งหมด (โดยปกติตราสารหนี้มีการชำระเงินเป็นรายเดือน)

สำหรับวิธีการประมาณการเงินชำ ระคืนเงินต้นที่มีการชำระคืนก่อนกำหนด PR_t ในตลาดต่างประเทศจะมี การศึกษาและรวบรวมข้อมูลพฤติกรรมการชำระคืนเงินกู้ของลูกหนี้อสังหาริมทรัพย์ เพื่อใช้ในการพยากรณ์กระแสเงินที่อาจได้รับจากการที่ลูกหนี้บัญชีที่ใช้เป็นหลักทรัพย์มีการชำระคืนเงินต้นบางส่วนก่อนกำหนด ทั้งนี้ได้มีการกำหนดมาตรฐานอ้างอิงในการประเมินชำระคืนเงินต้นก่อนกำหนด โดยสถาบัน PSA (The Public Securities Association ปัจจุบันเปลี่ยนเป็น The Bond Market Association) กำหนดให้ใช้เป็นมาตรฐาน PSA Prepayment Speed โดยวิธีการนี้จะมีสมมติฐานว่า เงินชำ ระคืนเงินต้นก่อนกำหนดที่เกิดขึ้น จะสามารถคำ นวณจากอัตราการชำ ระเงินต้นคืนก่อนกำ หนด ที่เรียกว่า ***Constant Prepayment Rate*** หรือ ***CPR*** กับเงินต้นคงค้างต้นงวดในแต่ละงวดดอกเบี้ย ค่า CPR เป็นค่า อัตราร้อยละต่อปีของการชำ ระเงินต้นคืนก่อนกำ หนด โดยกำหนดจากลักษณะประเภทของบัญชีหลักทรัพย์และข้อมูล ประวัติการชำ ระเงินของลูกหนี้ ใช้สำหรับการประมาณการเงินชำระคืนเงินต้นก่อนกำหนดต่อปี ในกรณีที่งวดการชำระคืนเงินต้นมีการชำ ระคืนมากกว่าหนึ่งครั้งต่อปี สามารถแปลงเป็นอัตราการจ่ายคืนเงินต้นต่องวด SMR (Single Mortality Rate) ได้จากสมการ

$$SMR = 1-(1-CPR)^{1/m} \tag{2.7}$$

เมื่อ m เป็นจำนวนดอกเบี้ยต่อปี

โดยเฉพาะอย่างยิ่งอัตราการชำระเงินต้นต่อเดือน (Single Monthly Mortality Rate :SMM) จะคำนวณได้จาก

$$SMM = 1-(1-CPR)^{1/12} \tag{2.8}$$

ค่า SSM จะหมายถึงอัตราของเงินต้นคงเหลือที่จะได้รับการชำระคืนก่อนกำหนดหลังหักชำระคืนเงินต้นที่ได้ประเมินไว้แล้ว ดังนั้นเงินชำระคืนเงินต้นก่อนกำหนดคำนวณได้จากสูตร

$$PR_t = (F_{t-1} - SP_t)\cdot SMM \tag{2.9}$$

จากสมการ (2.8) และ (2.9) จะเห็นว่าค่าของการชำระคืนเงินต้นก่อนกำหนดจะมากหรือน้อยจะขึ้นอยู่กับอัตรา CPR ซึ่งผู้ประเมินกระแสเงินสดกำหนดขึ้น ตามมาตรฐานของ PSA ตัวอย่างเช่น PSA ได้กำหนดค่า CPR อ้างอิงสำหรับตราสารที่มีอายุ 30 ปี และมีการชำระคืนเป็นรายเดือน ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1) กำหนดอัตรา CPR สำหรับเดือนที่ t, $1 \le t \le 30$ แทนด้วย CPR_t คำนวณจาก $CPR_t = 0.002t$ (ต่อปี)

2) และ $CPR_t = 0.005$ (ต่อปี) สำหรับเดือนที่ $t \ge 30$

นิยามความเร็วของการชำระคืนเป็น $\alpha(PSA)$, $\alpha > 0$ โดยกำหนดให้ความเร็วของการชำระคืน $1(PSA)$ หรือ $100\%(PSA)$ เป็นความเร็วในการชำระคืนเงินต้นก่อนกำหนดตามที่ระบุไว้ในเงื่อนไข (1) และ (2) เราสามารถคำนวณ อัตรา CPR ตามความเร็วในเดือนที่ t ดังนี้

$$CPR_t(\alpha(PSA)) = CPR_t \times \alpha$$

เพื่อความเข้าใจขอให้ศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดตราสารหนี้อายุ 30 ปี เป็นตราสารหนี้ที่เกิดจากการแปลงสินทรัพย์หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย โดยลูกหนี้มีพฤติกรรมการชำระหนี้สอดคล้องตามมาตรฐานของ PSA มีการชำระเงินและดอกเบี้ยเป็นรายเดือน ที่อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี มีค่าบริการ (Service Fee) เท่ากับร้อยละ 0.5 ต่อปี กำหนดเงินต้น 1,000,000 บาท และ กำหนดความเร็วในการชำระคืนเงินต้นก่อนกำหนด (PSA Speed) เท่ากับ 180% จงประมาณกระแสเงินสดที่จะได้รับในงวดแรก

วิธีทำ จาก
$$CF_1 = I_1 + P_1 - S_1$$

ขั้นตอนที่ 1) คำนวณหา I_1 จาก $I_t = iF_{t-1}$ จะได้

$$I_1 = \frac{0.12}{12} \times 1,000,000 = 10,000$$

ขั้นตอนที่ 2) คำนวณหา P_1 จาก $P_1 = SP_1 + PR_1$ โดยที่

$$SP_1 = MP_1 - I_1$$

คำนวณหา MP_1 จาก $MP_t = \frac{i}{1-v^{n-t+1}} F_{t-1}$ โดยที่ $v = \frac{1}{1+i}$ จะได้

$$MP_1 = \frac{.01}{1-(1.01)^{-360}} 1,000,000 = 10,286.13$$

ดังนั้นเงินชำระคืนเงินต้น $SP_1 = 10,286.13 - 10,000 = 286.13$

คำนวณหา PR_1 จาก $PR_1 = (F_0 - SP_1) \cdot SMM$

โดย $SMM = 1-(1-CPR_1(180\%PSA))^{1/12} = 1-(1-1.8(0.002))^{1/12} = 0.0003$

ดังนั้น $PR_1 = (1,000,000 - 286.13) \cdot 0.0003 = 299.91$

และทำให้ได้ $P_1 = 286.13 + 299.91 = 586.04$

ขั้นตอนที่ 3) คำนวณหาค่าบริการ S_1 จะได้ $S_1 = sF_0 = \frac{0.005}{12} \times 1,000,000 = 416.67$

นำตัวเลขจากขั้นตอนที่ (1)-(3) แทนในสมการการประมาณกระแสเงินสด จะได้ ประมาณกระแสเงินสดของเดือนที่ 1 เท่ากับ $CF_1 = 10,000 + 586.04 - 416.67 = 10,169.37$ บาท ■

จากตัวอย่างถ้าเราเปลี่ยนค่าความเร็วในการชำระเงินต้นก่อนกำหนด ค่าของเงินต้นคงค้างในแต่ละงวดจะเปลี่ยนไปด้วย ซึ่งถ้าค่าความเร็วในการชำระเงินต้นก่อนกำหนดเพิ่มมากขึ้น จะทำให้การชำระคืนเงินต้นก่อนก่อนกำหนดมีมากขึ้น ซึ่งส่งผลให้เงินต้นคงค้างลดลง รวมถึงจะทำให้อายุคงเหลือของการผ่อนชำระลดลงด้วย ทั้งนี้เมื่อเราสามารถประเมินกระแสเงินสดได้ครบทุกงวดแล้ว เราก็จะสามารถประเมินราคาตราสารได้โดยหาผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่ได้รับทุกงวดเช่นเดียวกับการคำนวณราคาในตราสารหนี้ทั่วๆไป นั่นคือ

$$\text{ราคาตราสารหนี้ เท่ากับ } \sum_{k=1}^{n} v^k CF_k \qquad (2.10)$$

โดย $v = \dfrac{1}{1+i_E}$ เมื่อ i_E เป็นอัตราดอกเบี้ยที่คาดหวังต่องวด

2.2.2 ตราสารหนี้ประเภท สทริป (Stripped mortgage-backed securities)

ตราสารหนี้ประเภท สทริป เป็นหลักทรัพย์ที่เกิดจากการแปลงสินทรัพย์(กองสินเชื่อเพื่อที่อยู่อาศัย)ให้เป็นหลักทรัพย์ โดยกระแสเงินสดจากกองสินทรัพย์จะถูกแบ่งไปยังกลุ่มหลักทรัพย์อื่นที่เรียกว่า ***สทริป*** (Stripe) แต่ละสทริปจะประกอบด้วย 2 ส่วน คือส่วนของเงินต้นและส่วนของดอกเบี้ยตามที่ได้รับจากการชำระของลูกหนี้ในกระแสเงินสด ยกตัวอย่างเช่น สทริปของเงินต้นเพียงอย่างเดียว (A principal-only stripped mortgage-backed security: PO) เป็นตราสารที่หนุนโดยเงินต้นที่ได้รับชำระคืนจากลูกหนี้ซึ่งจะมีส่วนประกอบเป็นเงินต้น 100 % และ ดอกเบี้ย 0% ส่วนสทริปของดอกเบี้ยอย่างเดียว (An interest-only stripped mortgage-backed security :IO) เป็นตราสารที่หนุนโดยดอกเบี้ยซึ่งรับชำระมาจากลูกหนี้ซึ่งจะมีส่วนประกอบเป็นเงินต้น 0 % และ ดอกเบี้ย 100%

2.2.3 ตราสารหนี้ประเภท ซีเอ็มโอ (Collateralized Mortgage Obligation : CMO)

ตราสารหนี้ประเภท ซีเอ็มโอ เป็นรูปแบบของการออกหลักทรัพย์ โดย นำลูกหนี้เงินกู้ซื้อบ้านมาแบ่งกลุ่มตามระยะเวลาการชำระหนี้ของลูกหนี้ แล้วจึงออกหุ้นกู้โดยแยกกลุ่มตามอายุหนี้ การตั้งราคาหุ้นกู้แต่ละกลุ่มจะแตกต่างกันไปตามการคาดการณ์ถึงโอกาสในการที่ลูกหนี้จะคืนหนี้ก่อนกำหนดซึ่งอาจเกิดขึ้นได้เนื่องจากการจ่ายเงินใน ลักษณะพาสทรู นักลงทุนมีความเสี่ยงด้านการชำระเงินล่วงหน้าค่อนข้างสูง เพราะว่าหากภาวะอัตราดอกเบี้ยในตลาดขณะนั้นอยู่ในขาลง ลูกหนี้ก็มีโอกาสที่จะรีไฟแนนซ์เงินกู้ เพื่อลดภาระหนี้สินของตน ดังนั้นเมื่อมีการไถ่ถอนก่อนกำหนด ก็จะทำให้นักลงทุนไม่สามารถนำเงินที่ได้จากการเรียกเก็บ ไปลงทุนต่อ ณ อัตราผลตอบแทนเดิม เพื่อที่จะลดความเสี่ยงดังกล่าว ตราสารหนี้ประเภท ซีเอ็มโอ จึงได้มีการพัฒนาออกสู่ตลาด เพื่อเป็นทางเลือกหนึ่งของนักลงทุน ไม่เพียงแต่ลดภาระด้านการจ่ายชำระล่วงหน้า (Prepayment) ลงได้ แต่ยังปฏิรูปการส่งถ่ายเงินของนิติบุคคลเฉพาะกิจ (SPV) อีกด้วย เนื่องจากตราสารประเภท ซีเอ็มโอ มีการกำหนดการจ่ายเงินในแต่ละชั้นที่ค่อนข้างแน่นอน ส่งผลให้ นิติบุคคลเฉพาะกิจ สามารถนำเงินที่ได้จาก

ลูกหนี้ ที่เก็บได้ในแต่ละงวด ไปลงทุนต่อได้ (หรือเรียกว่าสามารถบริหารเงินที่ได้รับจากลูกหนี้(Originator) เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุด) จากนั้นค่อยจ่ายเงินให้แก่นักลงทุนไม่ว่าจะเป็น ดอกเบี้ยหรือเงินต้นคืนแก่นักลงทุน เมื่อถึงระยะเวลาที่กำหนด ยกตัวอย่างเช่นในกรณีของกองทุนหนึ่ง กำหนดให้รับคูปองที่ร้อยละ 8 ต่อปี โดยจ่ายทุกครึ่งปี และรับเงินต้นคืนเมื่อครบกำหนดไถ่ถอน ดังนั้นการจ่ายเงินแบบนี้ของนิติบุคคลเฉพาะกิจ เราจะเรียกว่าการจ่ายเงินแบบ ***จ่ายผ่าน (Pay through)***

2.3 แบบจำลองของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงแบบจำลองของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัย ซึ่งเป็นตัวแบบที่เงินต้นลดลงอย่างต่อเนื่องด้วยอัตราเชิงสุ่ม(Random Rate) และตัวแปรสถานะอาจมีผลต่อการจ่ายชำระของหลักทรัพย์อนุพันธ์(Derivative Securities)

เราพิจารณาแบบจำลองของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัยตามแนวคิดของการจ่ายชำระด้วยวิธีเงินทุนจม หรือวิธีเงินทุนสะสม (Sinking-fund Method) กำหนดให้ $P(t)$ แทนเงินต้นคงเหลือที่เวลา t ใดๆ

$\rho(t)$ แทนอัตราคูปองที่เวลา t ใดๆ

$h(t)$ แทนการอัตราเงินชำระคืน

และ T แทนอายุของตราสารหนี้

จะได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเงินต้น $\frac{dP(t)}{dt}$ จะถูกกำหนดด้วย อัตราการจ่ายคูปองของเงินต้น $P(t)$ บาท และอัตราการลดลงของเงินต้น นั่นคือ

$$\frac{dP(t)}{dt} = \rho(t)P(t) - h(t) \tag{2.11}$$

เรียก แบบจำลอง (2.11) เป็นแบบจำลองของเงินต้นตามกำหนด (Scheduled Principle)

ในกรณีเฉพาะ $\rho(t) = \rho$ และ $h(t) = h$ จะได้

$$\frac{dP(t)}{dt} = \rho P(t) - h \tag{2.12}$$

สมการ (2.12) เป็นสมการเชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $P_0 > 0$ ดังนั้นเงินต้นคงเหลือตามกำหนด จะอยู่ในรูป

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{h}{\rho}\right)e^{\rho t} + \frac{h}{\rho} \tag{2.13}$$

และ การลดลงของเงินต้น h จะ เท่ากับ

$$h = \frac{\rho P_0 e^{\rho T}}{e^{\rho T} - 1} \tag{2.14}$$

การจำนองบ้านที่เป็นตราสารหนี้เงินทุนจมจ่ายชำระล่วงหน้าได้ (Prepayable Sinking-fund Bond) จะหมายถึง ผู้กู้ (Borrower) มีออปชัน หรือ สิทธิ์ (Option) ที่จะไม่จ่ายชำระต่อ ที่ ณ เวลาใดๆก็ได้ (หรือภายใต้ข้อกำหนดบางประการ) โดยเลือกที่จะจ่ายเงินก้อนซึ่งเป็นเงินต้นคงเหลือทั้งหมดแก่เจ้าหนี้

บทที่ 3
แบบจำลองการจ่ายชำระหนี้และการมีผลเฉลย

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองการจ่ายชำระหนี้และพิสูจน์การมีผลเฉลยของแบบจำลองของพอร์ตฟอลิโอหรือรายการการจ่ายชำระหนี้สินเชื่อที่อยู่อาศัย n รายการของลูกหนี้ (ผู้กู้) โดยเริ่มจากการพิจารณาการจ่ายชำระหนี้สินเชื่อที่อยู่อาศัย 1 รายการ

3.1 แบบจำลองการจ่ายชำระหนี้

พิจารณาการจ่ายชำระหนี้สินเชื่อที่อยู่อาศัย 1 รายการของลูกหนี้ สมมุติให้ p_0 เป็นเงินต้นที่ลูกหนี้กู้ยืมหรือวงเงินที่สถาบันการเงินอนุมัติให้ผู้กู้ โดยที่การจ่ายชำระคืนนั้นจะต้องจ่ายชำระคืนเป็นจำนวนเงินที่มากกว่าดอกเบี้ยที่เกิดขึ้น ณ เวลานั้น, $p(t)$ แทนเงินต้นหรือมูลค่าหนี้คงเหลือหลังจากการชำระหนี้ที่เวลา t ใดๆ ตลอดช่วงเวลาแห่งสัญญาการกู้ยืม $[0,T]$ โดยที่ T เป็นเวลาสิ้นสุดของสัญญา สมมติว่าผู้กู้สามารถจ่ายชำระคืนเงินกู้ ได้ตลอดเวลา โดยที่อัตราการจ่ายชำระคืน ที่ t ใดๆเท่ากับ $h(t)$ ต่อปี ภายใต้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง $\rho(t)$ ต่อปี พิจารณามูลค่าของหนี้คงเหลือที่เวลา $t+\delta$ หลังจากมีการจ่ายชำระหนี้อย่างต่อเนื่องบนช่วง $[t,t+\delta], \delta << 1$ จะได้ว่า เงินต้นคงเหลือหลังจากการชำระหนี้ที่เวลา $t+\delta$ เท่ากับ มูลค่าของหนี้สะสม หักด้วย มูลค่าของเงินจ่ายชำระคืนตลอดช่วง $[t,t+h]$ นั่นคือ

$$p(t+\delta) = p(t)e^{\int_t^{t+\delta}\rho(s)ds} - \int_t^{t+\delta} h(s)e^{\int_s^{t+\delta}\rho(\tau)d\tau}ds \tag{3.1}$$

โดยใช้สัญลักษณ์โอตัวเล็ก(Little-o notation) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(t+\delta) &= p(t)e^{\rho(t)\delta+o(\delta)} - h(t)e^{\rho(t)\delta+o(\delta)}\delta + o(\delta) \\ &= [p(t)-r(t)\delta][1+\rho(t)\delta] + o(\delta^2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

ซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{p(t+\delta)-p(t)}{\delta} = -h(t) + [p(t)-h(t)\delta]\rho(t) + o(\delta) \tag{3.3}$$

ถ้าให้ $\delta \to 0$ จะได้

$$\frac{dp(t)}{dt} = \rho(t)p(t) - h(t) \tag{3.4}$$

โดยที่ p_0 เป็นค่าเริ่มต้น

จากแบบจำลองการจ่ายชำระหนี้สินเชื่อ 1 รายการ ตามสมการที่ 3.4 ดังนั้นจะได้แบบจำลองการจ่ายชำระหนี้ของพอร์ตฟอลิโอของสินเชื่อขนาด n(รายการ) อธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ใน $\mathbb{R}^n$ ดังนี้

$$\frac{dp(t)}{dt} = \rho p(t) - h(t) \tag{3.5}$$

เมื่อ $p(t)=\begin{bmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{bmatrix}$ แทนพอร์ตฟอลิโอของเงินต้นคงเหลือที่เวลา t ใดๆ

$$\rho=\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_n \end{bmatrix}$$ แทนเมทริกซ์ของอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง

$h(t)$ แทนการลดลงของเงินต้น หรือ อัตราการจ่ายชำระคืน

T_i แทนอายุของสัญญาการจ่ายชำระหนี้ สัญญาที่ $i=1,\ldots,n$ และ $T=\max_i T_i^*$

* T จะเป็นเวลาที่น้อยที่สุดที่จ่ายชำระหนี้ ครบทุกสัญญา

สำหรับงานวิจัยนี้สนใจศึกษาสมการ (3.5) ภายใต้สมมติฐานว่า อัตราการจ่ายชำระคืน (h)สามารถควบคุมได้ด้วยฟังก์ชันควบคุม u ในเซตควบคุมยอมรับได้(Admissible control set) ซึ่งจะเขียนแทนเซตนี้ด้วย $\mathcal{A}_{ad}$ การควบคุมนี้หมายรวมถึงเงื่อนไขหรือกฎเกณฑ์ต่างๆในรูปแบบฟังก์ชันที่ควบคุมให้การจ่ายชำระเป็นไปตามที่เจ้าหนี้ต้องการซึ่งจะทำให้ไม่เกิดการสูญเสียหนี้ โดยเมื่อครบกำหนดชำระ แล้วจำนวนเงินต้นหรือหนี้คงเหลือเป็นศูนย์ ($P(T)=0$) นอกจากนี้ยังสมมติว่าอัตราการจ่ายชำระคืนยังขึ้นอยู่ข้อมูลของการจ่ายหรือประวัติการจ่ายชำระในอดีต (Histories Data) $p_{il}(t)=p(t-il)$, $i=1,\ldots,k$ ดังนั้นสมการ (3.5) ภายใต้สมมติฐานดังกล่าวจะอยู่ในรูป

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt}=\rho p(t)-h(t,p(t),p_l(t),\ldots,p_{kl}(t),u(t)) & ,0\le t\le T \\ p(t)=\varphi(t) & ,-kl\le t\le 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

เมื่อ $u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$ เป็นฟังก์ชันควบคุมใน $\mathcal{A}_{ad}$, $\varphi(t)=\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ซึ่งเป็นฟังก์ชันของข้อมูลในอดีตซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เป้าหมายสุดท้ายของงานวิจัยนี้คือ ศึกษาปัญหาการควบคุมเหมาะของระบบสมการ (3.6) ภายใต้ฟังก์ชันนัลจุดประสงค์(Objective functional) นิยามโดย

$$J(u)=\int_0^T r(p(t),u(t))\,dt+g(p(T)) \tag{3.7}$$

สำหรับทุกๆ $u\in\mathcal{A}_{ad}$ เมื่อ T เป็นเวลาครบกำหนดไถ่ถอน $r:\mathbb{R}^n\times\mathbb{A}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันผลประโยชน์รวม (Accumulative function) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ แทนฟังก์ชันผลประโยชน์เพิ่มเติมเมื่อเกิดการชำระหนี้จนเงินต้นเป็น 0 ที่เวลา T ($p(T)=0$) โดยถ้า การชำระหนี้จนเงินต้นเป็น 0 ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ที่เวลา T ระบบจะถูกขยายไปยังโดเมนเวลาที่กำหนดวันสิ้นสุดชำระใหม่ $T'>T$ ซึ่งปัญหาการควบคุมจะถูกพิจารณาใหม่อีกครั้งบน

ช่วง $[-kl,T']$ ภายใต้ข้อกำหนด $p(T')=0$
นั่นคือ ต้องการหาฟังก์ชันควบคุม $u_0 \in \mathcal{A}_{ad}$ ที่ซึ่ง

$$J(u_0)=\max_{u\in\mathcal{A}_{ad}} J(u) \tag{P}$$

3.2 ผลเฉลยของระบบสมการที่มีการหน่วงเชิงเวลา

ในหัวข้อนี้เราศึกษาผลเฉลยของระบบสมการที่มีการหน่วงเชิงเวลา ในรูป

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt}=\rho p(t)-h(t,p(t),p_l(t),\ldots,p_{kl}(t)) & ,0\le t\le T \\ p(t)=\varphi(t) & ,-kl\le t\le 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

ภายใต้สมมติฐาน (H) กำหนดให้ $\|\cdot\|$ เป็นยูคลิเดียนนอร์ม และ $M=\sup\|e^{\rho t}\|$

H_1: ให้ $h:[0,T]\times C([0,T],\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ มีจำนวนจริงบวก a ที่เล็กเพียงพอที่ทำให้

$$TMa(k+1)<1 \tag{3.9}$$

และ

$$\|h(t,x_1,\ldots,x_k)-h(s,y_1,\ldots,y_k)\|\le a\left(|t-s|+\|x_1(t)-y_1(s)\|+\ldots+\|x_k(t)-y_k(s)\|\right) \tag{3.10}$$

สำหรับทุก ๆ $t,s\in[0,T]$ และ $x_j,\ y_j\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ สำหรับทุกๆ $j=1,\ldots,n$

H_2: มีจำนวนจริงบวก b ซึ่ง

$$\|h(t,x_1(t),\ldots,x_k(t))\|\le b\left(1+\|x_1\|+\ldots+\|x_k\|\right) \tag{3.11}$$

สำหรับทุก ๆ $t,s\in[0,T]$ และ $x_j\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$

บทนิยาม 3.1 กำหนดให้ $p\in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$ จะเรียก p ว่า " ผลเฉลยละมุน(Mild solution) " ของสมการ (3.4) ถ้า p สอดคล้องกับสมการเชิงปริพันธ์

$$\begin{cases} p(t)=e^{\rho t}\varphi_0-\int_0^t e^{\rho(t-s)}h(s,p(s),p_l(s),\ldots,p_{kl}(s))ds & ,0\le t\le T \\ p(t)=\varphi(t) & ,-kl\le t\le 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

ต่อไป นิยามตัวดำเนินการ Q โดย

$$\begin{cases} Qp\ (t)=e^{\rho t}\varphi_0-\int_0^t e^{\rho(t-s)}h(s,p\ (s),p_l\ (s),\ldots,p_{kl}(s))ds & ,0\le t\le T \\ Qp\ (t)=\varphi(t) & ,-kl\le t\le 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

สำหรับทุกๆ $p\ \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$

ต่อไปจะแสดงว่า ตัวดำเนินการ Q มีสมบัติต่อไปนี้

บทตั้ง 3.3 ภายใต้สมมติฐาน H จะได้ว่า $Qp\ \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$ สำหรับทุกๆ $p\ \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$

พิสูจน์ ให้ $p\ \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$ โดยเงื่อนไข H_1 และ H_2 จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $0<\delta<\gamma$ สำหรับบาง $\gamma>0$ สำหรับทุกๆ $t\in[0,T]$ จะได้ว่า

$$\|Qp(t+\delta)-Qp(t)\|$$
$$\leq \|I-e^{\rho\delta}\|\|e^{\rho t}\varphi_0\|$$
$$+\left\|\int_0^{t+\delta} e^{\rho(t+\delta-s)}h(s,p\ (s),p_l\ (s),...,p_{kl}(s))ds - \int_0^t e^{\rho t}h(s,p\ (s),p_l\ (s),...,p_{kl}(s))ds\right\|$$
$$\leq \|I-e^{\rho\delta}\|\|e^{\rho t}\varphi_0\| + \left\|\int_{-\delta}^t e^{\rho(t-s)}h(s+\delta,p\ (s+\delta),p_l\ (s+\delta),...,p_{kl}(s+\delta))ds\right.$$
$$\leq \|I-e^{\rho\delta}\|\|e^{\rho t}\varphi_0\| + \int_{-\delta}^0 \|e^{\rho(t-s)}\|\|h(s+\delta,p\ (s+\delta),p_l\ (s+\delta),...,p_{kl}(s+\delta),u(s+\delta))\|ds$$
$$\left. -\int_0^t e^{\rho(t-s)}h(s,p(s),p_l\ (s),...,p_{kl}(s),u(s))ds\right\|$$
$$+\int_0^t \|e^{\rho(t-s)}\|\|h(s+\delta,p(s+\delta),p_l\ (s+\delta),...,p_{kl}(s+\delta))-h(s,p(s),p_l\ (s),...,p_{kl}(s))\|ds$$
$$\leq \|I-e^{\rho\delta}\|\|e^{\rho t}\varphi_0\| + A(1+\|\ p\ \|+\|\ p_l\ \|+...+\|\ p_{kl}\ \|)\delta$$
$$+A\int_0^t \|\ p(s+\delta)-p(s)\ \|+\|\ p_l\ (s+\delta)-p_l\ (s)\ \|+...+\|\ p_{kl}(s+\delta)-p_{kl}(s)\ \|ds$$
, สำหรับบาง $A>0$

เพราะว่า $p, p_{il} \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ สำหรับทุกๆ $i=1,...,k$ ดังนั้น $\|Qp(t+\delta)-Qp(t)\| \to 0$ เมื่อ $\delta \to 0$ สำหรับทุกๆ $t\in[-kl,0]$ เราได้ผลลัพธ์ชัดเจนจากการนิยามตัวดำเนินการ Q ดังนั้นจึงทำให้เราสรุปได้ว่า $Qp \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$ □

บทตั้ง 3.4 ภายใต้สมมติฐาน H_1 จะได้ว่า Q เป็นการส่งหดตัวอย่างเข้ม

พิสูจน์ โดยสมมติฐาน H_1 จะมีค่าคงที่ $a>0$ ซึ่ง $TMa(k+1)<1$ และ

$$\|h(t,x_1,...,x_k)-h(s,y_1,...,y_k)\| \leq a\left(|t-s|+\|x_1(t)-y_1(s)\|+...+\|x_k(t)-y_k(s)\|\right)$$

สำหรับทุกๆ $t,s\in[0,T]$ และ $x_j,\ y_j \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ สำหรับทุกๆ $j=1,...,n$

ให้ x และ y เป็นผลเฉลยละมุน สำหรับทุกๆ $t\in[0,T]$ เลือก $c=TMa(k+1)$

$$\|Qx(t)-Qy(t)\|$$
$$=\left\|\int_0^t e^{\rho(t-s)}h(s,x(s),x_l\ (s),...,x_{kl}(s))ds-\int_0^t e^{\rho(t-s)}h(s,y(s),y_l\ (s),...,y_{kl}(s))ds\right\|$$
$$\leq \int_0^t \|e^{\rho(t-s)}\|\|h(s,x(s),x_l\ (s),...,x_{kl}(s))-h(s,y(s),y_l\ (s),...,y_{kl}(s))\|ds$$
$$\leq \int_0^t \|e^{\rho(t-s)}\|a\left(\|x(s)-y(s)\|+\|x_l\ (s)-y_l\ (s)\|+...+\|x_{kl}(s)-y_{kl}(s)\|\right)ds$$
$$\leq \int_0^t a(k+1)\|e^{\rho(t-s)}\|\|x(s)-y(s)\|ds$$

$\leq TMa(k+1)\|x-y\| = c\|x-y\|$

สำหรับทุกๆ $t \in [-kl,0]$ เราได้ผลลัพธ์ชัดเจนจากการนิยามตัวดำเนินการ Q

ดังนั้น Q การส่งแบบหดตัวอย่างเข้ม □

กำหนดฟังก์ชันเริ่มต้น $p_0 \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$ นิยามลำดับ p_n โดย

$$p_n = Q^n(p_0) \tag{3.14}$$

เมื่อ $Q^n = Q^{n-1} \circ Q$ ($\circ$ เป็นตัวดำเนินการคอมโพสิท)โดยการนิยามของ x_n จะได้ว่า

$$p_n = Q(p_{n-1}) \tag{3.15}$$

บทตั้ง 3.5 ถ้า $N \in \mathbb{N}$ แล้ว $p_n = Q^{N+1}(p_{n-N-1})$ สำหรับทุกๆ $n > N$

พิสูจน์ ให้ $N \in \mathbb{N}$ โดยการนิยามของ p_n จะได้

$$p_n = Q^n(p_0) = Q^{n-1}(Q(p_0)) = Q^{n-1}(p_1) = Q^{n-2}(Q(p_1)) = Q^{n-2}(p_2) = \ldots$$

$= Q^{n-(n-N-1)}(Q(p_{n-N-2})) = Q^{N+1}(p_{n-N-1})$ สำหรับทุกๆ $n > N$

□

บทตั้ง 3.6 กำหนด ฟังก์ชันเริ่มต้น $p_0 \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$ จะได้ว่า $\|p_n - p_{n-1}\| \leq AK^{n-1}$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ เมื่อ $K = aM(k+1)T$ และ $A = \|p_1 - p_0\|$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่า $\|p_n - p_{n-1}\| \leq AK^{n-1}$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u> สำหรับ $n=1$ ข้อความเป็นจริง เนื่องจาก $\|p_1 - p_0\| = A$

<u>ขั้นอุปนัย</u> สมมติว่า $\|p_j - p_{j-1}\| \leq AK^{j-1}$ สำหรับทุกๆ $j \in \{1,2,\ldots,q\}$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $t \in [0,T]$

$\|p_{q+1}(t) - p_q(t)\|$

$\leq \int_0^t \|e^{\rho(t-s)}\| \|h(s,p_q(s),p_{(q)l}(s),\ldots,p_{(q)kl}(s)) - h(s,p_{q-1}(s),p_{(q-1)l}(s),\ldots,p_{(q-1)kl}(s))\| ds$

$\leq aM\int_0^t \left(\|p_q(s) - p_{q-1}(s)\| + \|p_{(q)l}(s) - p_{(q-1)l}(s)\| + \ldots + \|p_{(q)kl}(s) - p_{(q-1)kl}(s)\|\right) ds$

$\leq aM(k+1)T\|p_q - p_{q-1}\|$

$\leq K\left(AK^{q-1}\right) = AK^q$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $\|p_n - p_{n-1}\| \leq AK^{n-1}$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$

□

บทตั้ง 3.7 กำหนดฟังก์ชันเริ่มต้น $p_0 \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$ จะได้ว่า $\|p_n - p_0\| \leq \dfrac{A\left(1-K^n\right)}{1-K}$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ เมื่อ $K = aM(k+1)T$ และ $A = \|p_1 - p_0\|$

พิสูจน์ ให้ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\|p_n - p_0\| = \|p_n - p_n + p_{n-1} - p_{n-1} + p_{n-2} - \ldots - p_1 + p_1 - p_0\|$$

$$\leq \|p_n - p_{n-1}\| + \|p_{n-1} - p_{n-2}\| + \ldots + \|p_1 - p_0\|$$

$$\leq AK^{n-1} + AK^{n-2} + ... + A = \frac{A(1-K^n)}{1-K} \quad \text{(โดยบทตั้ง 3.5)}$$

□

ทฤษฎีบท 3.8 ลำดับ p_n เป็นลำดับโคชีใน $C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$

พิสูจน์ เพราะว่า $K = aM(k+1)T < 1$ ดังนั้น $\frac{A(1-K^n)}{1-K} \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

นั่นคือสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\frac{A(1-K^n)}{1-K} < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $n > N$

กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ และกำหนดให้ $m,n \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $m,n > N$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติว่า $n > m$ จากบทตั้ง 3.5 เราได้ว่า $p_m = Q^{N+1}(p_{m-N-1})$ และ $p_n = Q^{N+1}(p_{n-N-1})$

และเพราะว่า Q เป็นการส่งหดตัว ดังนั้นจะมี $0 < c \leq 1$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}
\|p_m - p_n\| &= \|Q^{N+1}(p_{m-N-1}) - Q^{N+1}(p_{n-N-1})\| \\
&\leq c^{N+1}\|p_{m-N-1} - p_{n-N-1}\| \\
&\leq c^{N+1}\left(\|p_{m-N-1} - p_0\| + \|p_{n-N-1} - p_0\|\right) \\
&\leq c^{N+1}\left(\frac{A(1-K^{m-N-1})}{1-K} + \frac{A(1-K^{n-N-1})}{1-K}\right) \\
&< 2c^{N+1}\left[\frac{A(1-K^{n-N-1})}{1-K}\right] < 2c^{N+1}\left[\frac{A(1-K^n)}{1-K}\right] < 2c^{N+1}\varepsilon
\end{aligned}$$

เพราะว่า ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ดังนั้น p_n เป็นลำดับโคชี ใน $C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ □

ทฤษฎีบท 3.9 ภายใต้สมมติฐาน H ระบบสมการ (3.6) มีผลเฉลยละมุน นั่นคือ มี $p \in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ ซึ่ง

$$\begin{cases} p(t) = e^{\rho t}\varphi_0 - \int_0^t e^{\rho(t-s)} h(s, p(s), p_l(s), ..., p_{kl}(s))ds & ,0 < t \leq T \\ p(t) = \varphi(t) & ,-kl \leq t \leq 0 \end{cases}$$

พิสูจน์ กำหนด ฟังก์ชันเริ่มต้น $p_0 \in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ นิยามลำดับ p_n ตามสมการ 3.10 โดย ทฤษฎีบท 3.8 จะได้ว่า ลำดับ p_n เป็นลำดับโคชีใน $C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ เนื่องจาก $C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ ดังนั้น p_n ลู่เข้าสู่ p สำหรับบางสมาชิก $p \in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ ซึ่งเป็นผลให้ $\lim_{n\to\infty} p_{n-1} = p$

เพราะว่า Q เป็นการส่งแบบหดตัว จึงส่งผลให้ Q เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ผลที่ตามมาคือ

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} Q(p_{n-1}) = Q(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}) = Q(p)$$

นั่นคือ $\begin{cases} p(t) = e^{\rho t}\varphi_0 - \int_0^t e^{\rho(t-s)} h(s, p(s), p_l(s), ..., p_{kl}(s))ds & ,0 < t \leq T \\ p(t) = \varphi(t) & ,-kl \leq t \leq 0 \end{cases}$

บทที่ 4

ปัญหาการควบคุม

ในหัวข้อนี้จะศึกษาปัญหาการควบคุม(P) ของระบบสมการ (3.6) ภายใต้ฟังก์ชัลนัลจุดประสงค์ (3.7)

$$J(u)=\int_0^T r(p(t),u(t))\,dt+g(p(T))$$

สำหรับทุกๆ $u\in\mathcal{A}_{ad}$ นั่นคือ ต้องการหาฟังก์ชันควบคุม $u_0\in\mathcal{A}_{ad}$ ที่ซึ่ง

$$J(u_0)=\max_{u\in\mathcal{A}_{ad}}J(u) \tag{P}$$

4.1 การมีผลเฉลยของระบบควบคุม

เราพิจารณาสมการ (3.6) ภายใต้สมมติฐาน

สมมติฐาน (U)

กำหนดให้ $M=\sup\left\|e^{\rho t}\right\|$ และ $\mathcal{A}_{ad}=C\left([0,T],\mathbb{R}^m\right)$

สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(U-1) มีค่าคงที่ $l>0$ ที่ทำให้ $TMl(k+1)<1$ และ

$$\|f(t,x(t),x_1(t),\dots,x_k(t),z(t))\|\le l\left[1+\|x(t)\|+\|x(t)\|+\dots+\|x(t)\|+\|z(t)\|\right]$$

สำหรับทุกๆ $t\in[0,T]$, $x,x_j\in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$, $j=1,\dots,k$ และสำหรับทุกๆ $z\in\mathcal{A}_{ad}$

(U -2) มีค่าคงที่ $L>0$ ที่ทำให้

$$\|f(s,x_1(s),\dots,x_k(s),u(s))-f(t,y_1(t),\dots,y_k(t),v(t))\|$$

$$\le L\left[|s-t|+\|x_1(s)-y_1(t)\|+\dots+\|x_k(s)-y_k(t)\|+\|u(s)-v(t)\|\right]$$

สำหรับทุกๆ $s,t\in[0,T]$, $x_j,y_j\in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$, $j=1,\dots,k$ และ $u,v\in\mathcal{A}_{ad}$

บทนิยาม 4.1 กำหนดให้ $u\in\mathcal{A}_{ad}$ และ $p\in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ จะเรียก p ว่า ***ผลเฉลยละมุน*** ของสมการ (3.2) ที่สัมพันธ์กับตัวควบคุม u บนช่วง $[-kl,T]$ ถ้า p สอดคล้องกับสมการเชิงปริพันธ์

$$\begin{cases} p(t)=e^{\rho t}\varphi_0-\int_0^t e^{\rho(t-s)}h(s,p(s),p_l(s),\dots,p_{kl}(s),u(s))ds & ,0<t\le T\\ p(t)=\varphi(t) & ,-kl\le t\le 0\end{cases}$$

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดตัวควบคุม $u\in\mathcal{A}_{ad}$ ภายใต้สมมติสมมติฐาน (B) จะได้ว่า สมการ (3.2) มีผลเฉลยละมุนที่สัมพันธ์กับตั๋วควบคุม u

พิสูจน์ กำหนดให้ $u\in\mathcal{A}_{ad}$ นิยาม $f_u(t,p(t),p_1(t),\dots,p_k(t))=f(t,p(t),p_1(t),\dots,p_k(t),u(t))$ โดยใช้สมมติฐาน (B) และ ความต่อเนื่องของ u จะได้ว่า f_u สอดคล้องกับสมมติฐาน (H) โดยใช้ทฤษฎีบท 3.9

ทำให้เราสรุปได้ว่า สมการ (3.6) มีผลเฉลยละมุนที่สัมพันธ์กับตัวควบคุม u

□

หมายเหตุ เพื่อความสะดวก สำหรับทุกๆ $u \in \mathcal{A}_{ad}$ ผลเฉลยละมุน $p \in C\left([-kl,T],\mathbb{R}^n\right)$ ที่สอดคล้องกับตัวควบคุม u จะเขียนแทนด้วย p^u หรืออาจเขียนโดยละตัวควบคุม u เป็น p

4.2 ปัญหาการควบคุมเหมาะสุด

ต่อไป เราพิสูจน์การมีการควบคุมเหมาะสุดภายใต้สมมติฐานต่อไปนี้

สมมติฐาน (O)

(O -1) ฟังก์ชันการทำงาน $r: C([-kl,T],\mathbb{R}^n)\times \mathcal{A}_{ad} \to (-\infty,\infty]$ สามารถวัดได้ เชิงโบเรล (Borel measurable)

(O -2) ฟังก์ชันการทำงาน $r(\cdot,\cdot)$ เป็น sequentialy lower semicontinuous บน $C([-kl,T],\mathbb{R}^n)\times \mathcal{A}_{ad}$

(O -3) ฟังก์ชันการทำงาน $r(p,\cdot)$ เป็นฟังก์ชันนูนบน $\mathcal{A}_{ad}$ สำหรับทุกๆ $p \in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$

(O -4) มีค่าคงที่ $a,\ b>0$ ซึ่ง $r(p(t),u(t)) \ge a\|p(t)\| + b\|u(t)\|$

สำหรับทุกๆ $t\in[0,T]$, $p\in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ และ $u \in \mathcal{A}_{ad}$

(O -5) ฟังก์ชันขั้วปลาย $g: C([-lk,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 4.3 สมมติให้สมมติฐาน(U) และ (O) จะได้ว่า ปัญหาการควบคุมเหมาะสุดเชิงเวลา ของระบบสมการ (3.6) ภายใต้ฟังก์ชันนัลจุดประสงค์ (3.7) มีผลเฉลยอย่างน้อยหนึ่ง

พิสูจน์ ให้ $m = \inf\left\{J(p^u,u) \mid u\in\mathcal{A}_{ad}\right\}$ ถ้า $m=+\infty$ แล้วทุกๆ (p^u,u) เป็นผลเฉลยเหมาะสุด นั่นคือ ปัญหาการควบคุมเหมาะสุด มีผลเฉลย ดังนั้นจะสมมติว่า $m<+\infty$

โดย (O-4) มีค่าคงที่ $a,\ b>0$ ซึ่ง

$$r(p^u(t),u(t)) \ge a\|p^u(t)\| + b\|u(t)\|$$

สำหรับทุกๆ $p^u \in C([-kl,T],\mathbb{R}^n)$ และ $u\in\mathcal{A}_{ad}$

กำหนดให้ $\tau\in[0,T]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} J(p^u,u) &= \int_0^T r(p^u(t),u(t))dt + g(p^u(T)) \\ &\ge a\int_0^\tau \|p^u(t)\|dt + b\int_0^\tau \|u(t)\|dt) + g(p^u(T)) \\ &\ge -\omega > -\infty \end{aligned}$$

สำหรับบาง $\omega>0$ สำหรับทุกๆ $u\in\mathcal{A}_{ad}$

ทำให้ได้ว่า $m\ge\omega>-\infty$ โดยนิยามของค่าต่ำสุด จะมีลำดับของจุดต่ำสุด $\{u_n\}$ ของ J ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} J(p^{u_n},u_n)=m$ ที่ซึ่ง

$$J(p^{u_n},u_n) \ge a\int_0^T \|p^{u_n}(t)\|dt + b\int_0^T \|u_n(t)\|dt) + g(p^u(T)) \tag{4.1}$$

ดังนั้น มี $N_0 > 0$ และ $m_1 > 0$ ซึ่ง $m + m_1 \geq J(p^{u_n}, u_n) \geq b\int_0^T \|u_n(t)\|dt$ สำหรับทุกๆ $n \geq N_0$ สำหรับทุกๆ $\tau \in [0,T]$ นำไปสู่ $\dfrac{m+m_1}{b} \geq \int_0^T \|u_n(t)\|dt$ ซึ่งส่งผลให้ $\|u_n\| \leq \dfrac{m+m_1}{Tc}$ สำหรับทุกๆ $n \geq N_0$ ดังนั้น $\{u_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตใน $\mathcal{A}_{ad} \subset L_2\left([0,T], \mathbb{R}^m\right)$ โดยอาศัยความเป็นปริภูมิบานาคสะท้อน (reflexive Banach space) ของ $L_2\left([0,T], \mathbb{R}^m\right)$ จะได้ว่า $\{u_n\}$ มีลำดับย่อย $\left\{u_{n_q}\right\}$ ซึ่ง $u_{n_q} \xrightarrow{w} u^0$ (weakly convergent) สำหรับบาง $u^0 \in U_{ad}$

ให้ $p^0 \in C([-kl,T], \mathbb{R}^n)$ เป็นผลเฉลยละมุนซึ่งสัมพันธ์กับตัวควบคุม u^0 และ $\left\{p_{n_q}\right\}$ เป็นลำดับของผลเฉลยละมุนที่สัมพันธ์กับลำดับของตัวควบคุม $\left\{u_{n_q}\right\}$ นั่นคือ

$$\begin{cases} p_{n_q}(t) = e^{\rho t}\varphi_0 - \int_0^t e^{\rho(t-s)} h(s, p_{n_q}(s), p_{(n_q)l}(s), \ldots, p_{(n_q)kl}(s), u_{n_q}(s))ds & , 0 \leq t \leq \tau \\ p(t) = \varphi(t) & , -kl \leq t \leq 0 \end{cases}$$

โดยสมมติฐาน (U) และ (O) จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $0 \leq t \leq T$ จะมีค่าคงที่ $a > 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} \left\|p_{n_q}(t) - p^0(t)\right\| &\leq 2Ma\left[\int_0^t \left\|p_{n_q}(s) - p^0(s)\right\|ds + \int_0^t \left\|u_{n_q}(s) - u^0(s)\right\|ds\right] \\ &\leq 2Ma\left[\int_0^t \left\|p_{n_q}(s) - p^0(s)\right\|ds + T\left\|u_{n_q} - u^0\right\|_2\right] \end{aligned}$$

โดยใช้ บทตั้งของกรอนวอลล์ (Gronwal Lemma) จะมี $M_1 > 0$ ซึ่ง

$$\left\|p_{n_q} - p^0\right\| \leq M_1\left\|u_{n_q} - u^0\right\|$$

เพราะว่า $u_{n_q} \xrightarrow{w} u^0$ ส่งผลให้ $p_{n_q} \xrightarrow{w} p^0$ โดยสมมติฐาน (O-2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} m = \varliminf_{n_q \to \infty} J(p_{n_q}^{u_{n_q}}, u_{n_q}) &= \varliminf_{n_q \to \infty} \int_0^T r(p_{n_q}^{u_{n_q}}(t), u_{n_q}(t))dt + \varliminf_{n_q \to \infty} g(p_{n_q}^{u_{n_q}}(T)) \\ &\geq \int_0^T \varliminf_{n_k \to \infty} r(p_{n_q}^{u_{n_q}}(t), u_{n_q}(t))dt + g(\varliminf_{n_q \to \infty} p_{n_q}^{u_{n_q}}(T)) \\ &\geq \int_0^T r(p^0(t), u^0(t))dt + g(p^0(T)) = J(p^0, u^0) \end{aligned}$$

ดังนั้น $J(p^0, u^0) = m$ นั่นคือ $J(p^0, u^0) \leq J(p^u, u)$ ทุกๆ $u \in U_{ad}$ □

บทที่ 5
ปัญหาการควบคุม

5.1 หลักการค่าต่ำสุด

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงหลักการค่าต่ำสุดของพอนทรายากินซึ่งเป็นหลักในการหาตัวควบคุมเหมาะสุดของระบบการควบคุม (3.6)

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \rho p(t) - h(t, p(t), p_l(t), \ldots, p_{kl}(t), u(t)) & ,0 \le t \le T \\ p(t) = \varphi(t) & ,-kl \le t \le 0 \end{cases} \tag{ODE}$$

โดยมีฟังก์ชันจุดประสงค์ในรูป (3.7)

$$J(u) = \int_0^T r(p(t), u(t))\,dt + g(p(T)) \tag{J}$$

ภายใต้สมมติฐาน (U) และ (O) ที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา

5.1 หลักการค่าต่ำสุดของพอนทรายากิน

บทนิยาม 5.1 สำหรับระบบควบคุม (ODE) ภายใต้ฟังก์ชันจุดประสงค์ในรูป (J) ฟังก์ชันฮามิลโทเนียน (Hamiltonian function) นิยามโดย

$$\begin{aligned} H\big(t, p(t), p_l(t), \ldots, p_{kl}(t), u(t), \lambda(t)\big) &= r\big(p(t), u(t)\big) \\ &\quad + \lambda(t) \cdot \big[\rho p(t) - h\big(t, p(t), p_l(t), \ldots, p_{kl}(t), u(t)\big)\big] \end{aligned} \tag{5.1}$$

เมื่อ $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$

ต่อไปเพื่อความสะสะดวกกำหนดให้ $H(t) = H\big(t, p(t), p_l(t), \ldots, p_{kl}(t), u(t), \lambda(t)\big)$ และ สัญญาลักษณ์ $\nabla_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}^t$ เป็นตัวดำเนินการเวกเตอร์เกรเดียนต์ (Gradient vector operator) เมื่อ $x \in \mathbb{R}^n$

ทฤษฎีบท 5.2(หลักค่าต่ำสุดของพอนทรายากิน) ถ้าคู่อันดับ (u^0, x^0) เป็นการควบคุมเหมาะสุด ของ ระบบควบคุม (3.6) ภายใต้ฟังก์ชันจุดประสงค์ในรูป (3.7) แล้วจะมี $\lambda^0(t)$ ซึ่ง สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

สมการสถานะ(state equation :SE)

$$\begin{cases} \dfrac{dp^0(t)}{dt} = \nabla_\lambda H\big(t, p^0(t), p_l^0(t), \ldots, p_{kl}^0(t), u^0(t), \lambda^0(t)\big) & ,0 \le t \le T \\ p(t) = \varphi(t) & ,-kl \le t \le 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

และ สมการสถานะร่วม(costate equation: CE) สำหรับทุกๆ $t\in[-kl,T]$,

$$\begin{cases}\dfrac{d\lambda^0(t)}{dt}=\nabla_p H(t)+\nabla_p H(t+l)+\cdots+\nabla_p H(t+kl); \quad 0\le t\le T-kl\\ \dfrac{d\lambda^0(t)}{dt}=\nabla_p H(t)+\nabla_p H(t+l)+\cdots+\nabla_p H(t+(k-1)l); \quad T-kl\le t\le T-(k-1)l\\ \vdots\\ \dfrac{d\lambda^0(t)}{dt}=\nabla_p H(t)+\nabla_p H(t+l) \ ; \quad T-2l\le t\le T-l\\ \dfrac{d\lambda^0(t)}{dt}=\nabla_p H(t) \ ; \quad T-l\le t\le T\\ \lambda^0(T)=-\nabla_p g(p(T))\end{cases} \tag{5.3}$$

และ สมการค่าต่ำสุดของฮามิโทเนียน(maximum equation: ME) ,

$$0=\nabla_u H(t,p^0(t),p_l^0(t),\ldots,p_{kl}^0(t),u^0(t),\lambda^0(t)); \quad t\ge 0 \tag{5.4}$$

5.2 ตัวอย่าง

สถานการณ์ : สมมตินายเอ จ่ายชำระหนี้สินเชื่อที่อยู่อาศัย 2 รายการ คือ บ้านเดี่ยวและคอนโดมิเนียม สมมุติวงเงินกู้สำหรับบ้านเท่ากับ 5,000,000 บาท และ วงเงินกู้สำหรับคอนโดมิเนียมเท่ากับ 2,000,000 บาท เป็นเงินต้นที่ลูกหนี้กู้ยืมหรือวงเงินที่สถาบันการเงินอนุมัติให้ผู้กู้ นั่นคือ $p_0=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5,000,000\\2,000,000\end{bmatrix}$ โดยที่การจ่ายชำระคืนนั้นจะต้องจ่ายชำระคืนเป็นจำนวนเงินที่มากกว่าดอกเบี้ยที่เกิดขึ้น ณ เวลานั้น, $p(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}$ แทนเงินต้นหรือมูลค่าหนี้คงเหลือหลังจากการชำระหนี้ที่เวลา t ใดๆ ตลอดช่วงเวลาแห่งสัญญาการกู้ยืม $[0,20]$ โดยที่ $T=20$ เป็นเวลาสิ้นสุดของสัญญา สมมติว่าผู้กู้สามารถจ่ายชำระคืนเงินกู้ ได้ตลอดเวลาโดยที่อัตราการจ่ายชำระคืน ที่ t ใดๆเท่ากับ $h(t)=\begin{bmatrix}400,000\\200,000\end{bmatrix}+0.5(p(t-10)-p(t))+u(t)$ ต่อปี เมื่อ $u(t)=\begin{bmatrix}a(t)\\b(t)\end{bmatrix}$ ซึ่งหมายถึงอัตราการจ่ายส่วนแรกชำระคงที่และส่วนที่สองเป็นเงินที่ผู้กู้ต้องการจ่ายชำระเพิ่มขึ้นพิจารณาจากมูลค่าดอกเบี้ยจ่ายรวมย้อนหลัง 10 ปีโดย จ่ายชำระเพิ่มขึ้นอีก 0.5 เท่าของผลต่างระหว่างเงินต้นคงเหลือของเวลาดังกล่าวกับเงินต้นคงเหลือ ณ ปัจจุบัน โดยที่อัตราการจ่าย $h(t)$ สามารถควบคุมได้ด้วยฟังก์ชันควบคุม $u:[0,20]\to\mathbb{R}^2$ ในเซตควบคุมยอมรับได้ (Admissible control set)ซึ่งจะทำให้จำนวนเงินต้นหรือหนี้คงเหลือเป็นศูนย์เมื่อครบกำหนดสัญญา นั่นคือ $P(20)=\begin{bmatrix}x(20)\\y(20)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ภายใต้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องของสินเชื่อบ้าน เท่ากับ 0.06 ต่อปี และ อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องของสินเชื่อคอนโดมิเนียม เท่ากับ 0.08 นั่นคือ $\rho=\begin{bmatrix}0.06 & 0\\0 & 0.08\end{bmatrix}$ ในการจ่ายนั้นผู้กู้จะต้องคำนึงถึงค่าใช้จ่ายหรือต้นทุนของเงินที่จ่ายชำระคืนด้วยซึ่งหมายความรวมถึงดอกเบี้ยจ่ายรวม ดอกเบี้ยจาก

การกู้เงินจากสถาบันการเงินอื่นๆเพื่อมาจ่ายชำระหนี้ ค่าธรรมการโอนสินทรัพย์ ภาษีและค่าธรรมเนียมต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธุรกรรมการเงินที่เกี่ยวข้อง สมมติว่าต้นทุนดังกล่าวประกอบด้วย 2 ส่วนคือ ส่วนแรกเป็นต้นทุนระหว่างสัญญาที่เกิดขึ้น ณ เวลา t ใดๆ ซึ่งจะขึ้นกับ เงินต้นคงเหลือ $p(t)$ และเงินที่จ่ายชำระเพิ่มเติมเนื่องจากการควบคุม $u(t)$ และส่วนที่สองเป็น ต้นทุนที่เกิดขึ้น ณ เวลาครบกำหนดสัญญา $T=20$ โดยอัตราต้นทุนต้นทุนระหว่างสัญญาที่เกิดขึ้น ณ เวลา t ใดๆ กำหนดด้วยฟังก์ชันวิ่ง, $r(p(t),u(t))=u(t)'\begin{bmatrix}0.02 & 0\\ 0 & 0.04\end{bmatrix}u(t)$ และต้นทุนที่เกิดขึ้น ณ เวลาครบกำหนดสัญญา $g(p(20))=\begin{bmatrix}0.06\\0.08\end{bmatrix}\cdot p(20)+200,000$

ดังนั้น สถานการณ์ดังกล่าวสามารถอธิบายได้ในรูป

$$\begin{cases} p'(t)=\begin{bmatrix}0.06 & 0\\ 0 & 0.08\end{bmatrix}p(t)-\left(\begin{bmatrix}400,000\\200,000\end{bmatrix}+0.5(p(t-10)-p(t))+u(t)\right) & ,0\le t\le 20\\ p(t)=\begin{bmatrix}5,000,000(1-0.1t)\\2,000,000(1-0.1t)\end{bmatrix} & ,-10\le t\le 0\end{cases} \tag{5.5}$$

เมื่อ $p(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}$ และ $u(t)=\begin{bmatrix}a(t)\\b(t)\end{bmatrix}$

โดยมีฟังก์ชันจุดประสงค์ในรูป

$$J(u)=\int_0^{20}\left(u(t)'\begin{bmatrix}0.02 & 0\\ 0 & 0.04\end{bmatrix}u(t)\right)dt+\left(\begin{bmatrix}0.06\\0.08\end{bmatrix}\cdot p(20)+200,000\right) \tag{5.6}$$

ในที่เราต้องการหาการควบคุม $u^0=\begin{bmatrix}a^0\\b^0\end{bmatrix}\in A_{ad}$ ที่ทำให้

$$J(u_0)=\min_u J(u)$$

โดยใช้ หลักค่าต่ำสุดของพอนทรายากิน

สำหรับระบบควบคุม (5.5) ภายใต้ฟังก์ชันจุดประสงค์ในรูป (5.6) ฟังก์ชันฮามิลโทเนียน(Hamiltonian function) นิยามโดย

$$\begin{aligned} H\big(t,p(t),p_l(t),\ldots,p_{kl}(t),u(t),\lambda(t)\big) &= u(t)'\begin{bmatrix}0.02 & 0\\ 0 & 0.04\end{bmatrix}u(t)\\ &+\lambda(t)\cdot\left[\begin{bmatrix}0.06 & 0\\ 0 & 0.08\end{bmatrix}p(t)-\left(\begin{bmatrix}400,000\\200,000\end{bmatrix}+0.5(p(t-10)-p(t))+u(t)\right)\right]\end{aligned} \tag{5.7}$$

เมื่อ $\lambda(t)\in\mathbb{R}^n$ โดยหลักค่าต่ำสุดของพอนทรายากิน) จะได้ สมการสถานะร่วม

$$\lambda^0(20) = \begin{bmatrix} -0.06 \\ -0.08 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

$$\frac{d\lambda^0(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0 \\ 0 & 0.58 \end{bmatrix} \lambda^0(t) \qquad ;10 \le t \le 20 \tag{5.9}$$

$$\frac{d\lambda^0(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0 \\ 0 & 0.58 \end{bmatrix} \lambda^0(t) - 0.5\lambda^0(t+10) \qquad ;0 \le t \le 10 \tag{5.10}$$

และ สมการค่าต่ำสุดของฮามิโทเนียน(minimum equation: ME) ,

$$0 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{bmatrix} u(t) - \lambda^0(t); \qquad t \ge 0 \tag{5.11}$$

เราหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (5.9)

$$\frac{d\lambda^0(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0 \\ 0 & 0.58 \end{bmatrix} \lambda^0(t) \quad ;10 \le t \le 20$$

ภายใต้เงื่อนไข $\lambda^0(20) = \begin{bmatrix} -0.06 \\ -0.08 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\lambda^0(t) = \begin{bmatrix} -8.2045 \times 10^{-7} e^{0.56t} \\ -7.3329 \times 10^{-7} e^{0.58t} \end{bmatrix} \quad ; 10 \le t \le 20 \tag{5.15}$$

สำหรับ $0 \le t \le 10$ จะได้

$$-0.5\lambda^0(t+10) = -0.5 \begin{bmatrix} -8.2045 \times 10^{-7} e^{0.56(t+10)} \\ -7.3329 \times 10^{-7} e^{0.58(t+10)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1094 \times 10^{-4} e^{0.56t} \\ 9.9150 \times 10^{-5} e^{0.58t} \end{bmatrix}$$

แทนใน (5.10) จัดรูปได้

$$\frac{d\lambda^0(t)}{dt} - \begin{bmatrix} 0.56 & 0 \\ 0 & 0.58 \end{bmatrix} \lambda^0(t) = \begin{bmatrix} 1.1094 \times 10^{-4} e^{0.56t} \\ 9.9150 \times 10^{-5} e^{0.58t} \end{bmatrix} \qquad ;0 \le t \le 10 \tag{5.16}$$

ต่อไปจะหาผลเฉลยของสมการ (5.16) โดยใช้เงื่อนไขขอบ

$$\lambda^0(10) = \begin{bmatrix} -8.2045 \times 10^{-7} e^{5.6} \\ -7.3329 \times 10^{-7} e^{5.8} \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\lambda^0(t) = \begin{bmatrix} 1.1094 \times 10^{-4} \left(-10.0074 e^{0.56t} + e^{0.56t} t\right) \\ 9.9150 \times 10^{-5} \left(-10.0074 e^{0.58t} + e^{0.58t} t\right) \end{bmatrix} \qquad ;0 \le t \le 10 \tag{5.20}$$

โดยการแทน $\lambda^0(t)$ ในสมการ (5.11) และจัดรูปจะได้

$$u^0(t)=\begin{bmatrix}0.04 & 0\\ 0 & 0.08\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1.1094\times10^{-4}\left(-10.0074e^{0.56t}+e^{0.56t}t\right)\\ 9.9150\times10^{-5}\left(-10.0074e^{0.58t}+e^{0.58t}t\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.7735\times10^{-3}\left(-10.0074e^{0.56t}+e^{0.56t}t\right)\\ 1.2394\times10^{-3}\left(-10.0074e^{0.58t}+e^{0.58t}t\right)\end{bmatrix}$$

$$;0\le t\le 10 \qquad (5.21)$$

และ

$$u^0(t)=\begin{bmatrix}0.04 & 0\\ 0 & 0.08\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-8.2045\times10^{-7}e^{0.56t}\\ -7.3329\times10^{-7}e^{0.58t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.0511\times10^{-5}e^{0.56t}\\ -9.1661\times10^{-6}e^{0.58t}\end{bmatrix} \quad ;10\le t\le 20 \qquad (5.22)$$

ต่อไปเราจะหาผลเฉลยของสมการ ODEs ของสมการสถานะ

สำหรับ $0\le t\le 10$ จะได้ว่า $p(t-10)=\begin{bmatrix}5,000,000(1-0.1(t-10))\\ 2,000,000(1-0.1(t-10))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5,000,000(2-0.1t)\\ 2,000,000(2-0.1t)\end{bmatrix}$

เมื่อ แทน $u^0(t)$ ในสมการ ODE จะได้

$$p'(t)-\begin{bmatrix}0.56 & 0\\ 0 & 0.58\end{bmatrix}p(t)=\begin{bmatrix}-400,000-2,500,000(2-0.1t)-2.7735\times10^{-3}\left(-10.0074e^{0.56t}+e^{0.56t}t\right)\\ -200,000-1,000,000(2-0.1t)-1.2394\times10^{-3}\left(-10.0074e^{0.58t}+e^{0.58t}t\right)\end{bmatrix} \qquad (5.23)$$

โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $p(0)=\begin{bmatrix}5,000,000\\ 2,000,000\end{bmatrix}$ ผลเฉลยของสมการ (5.23) อยู่ในรูป

$$p^0(t)=\begin{bmatrix}8,845,663.2653-446,428.5714t+e^{0.56t}\left(-3,845,663.2653+2.7756\times10^{-2}t-1.3868\times10^{-3}t^2\right)\\ 3,495,838.2878-172,413.7931t+e^{0.58t}\left(-1,495,838.2878+1.2403\times10^{-2}t-6.1970\times10^{-4}t^2\right)\end{bmatrix}$$

$$;\ 0\le t\le 10 \quad (5.24)$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (5.5) สำหรับ $10\le t\le 20$ ดังนี้

สำหรับ $10\le t\le 20$ จากสมการ (5.24) จะได้

$p^0(t-10)$

$$=\begin{bmatrix}13,309,948.9793-446,428.5714t+e^{0.56t}\left(-14,220.7402+2.0520\times10^{-4}t-5.1282\times10^{-6}t^2\right)\\ 5,219,976.2188-172,413.7931t+e^{0.58t}\left(-4,528.7329+7.5074\times10^{-5}t-1.8762\times10^{-6}t^2\right)\end{bmatrix}$$

เมื่อ แทน $u^0(t)$ ในสมการ ODE (5.5) จะได้

$$p'(t)-\begin{bmatrix}0.56 & 0\\ 0 & 0.58\end{bmatrix}p(t)=\begin{bmatrix}-400,000-0.5p_1(t-10)+2.0511\times10^{-5}e^{0.56t}\\ -200,000-0.5p_2(t-10)+9.1661\times10^{-6}e^{0.58t}\end{bmatrix};10\le t\le 20 \qquad (5.25)$$

โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบเขต $p^0(10)=\begin{bmatrix}-1.0356\times10^{9}\\ -4.9230\times10^{8}\end{bmatrix}$ จะได้

$$p^0(t)=\begin{bmatrix}714,285.7143+e^{1.12t}\left(2.6043\times10^{-1}-4.0934\times10^{-9}t+9.3915\times10^{-11}t^2\right)\\ 344,827.5862+e^{1.16t}\left(3.5785\times10^{-2}-6.4434\times10^{-10}t+1.4825\times10^{-11}t^2\right)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}e^{0.56t}\left(-3,831,083.3388-136.5002t+2.2892t^2\right)\\ +e^{0.58t}\left(-1,491,321.2803-23.9234t+3.9509\times10^{-11}t^2\right)\end{bmatrix} \quad ;10\le t\le 20 \quad (5.26)$$

สรุปคือ ผลเฉลยของปัญหานี้คือ

$$p^0(t)=\begin{bmatrix}8,845,663.2653-446,428.5714t+e^{0.56t}\left(-3,845,663.2653+2.7756\times10^{-2}t-1.3868\times10^{-3}t^2\right)\\ 3,495,838.2878-172,413.7931t+e^{0.58t}\left(-1,495,838.2878+1.2403\times10^{-2}t-6.1970\times10^{-4}t^2\right)\end{bmatrix} \quad ;\ 0\le t\le 10$$

และ

$$p^0(t)=\begin{bmatrix}714,285.7143+e^{1.12t}\left(2.6043\times10^{-1}-4.0934\times10^{-9}t+9.3915\times10^{-11}t^2\right)\\ 344,827.5862+e^{1.16t}\left(3.5785\times10^{-2}-6.4434\times10^{-10}t+1.4825\times10^{-11}t^2\right)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}e^{0.56t}\left(-3,831,083.3388-136.5002t+2.2892t^2\right)\\ e^{0.58t}\left(-1,491,321.2803-23.9234t+3.9509\times10^{-11}t^2\right)\end{bmatrix} \quad ;10\le t\le 20$$

ข้อสังเกต $p^0(10)=\begin{bmatrix}-1.0356\times10^{9}\\ -4.9230\times10^{8}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ นั่นแสดงว่าเราได้จ่ายหนี้ ครบก่อน 10 ปี ไปแล้ว

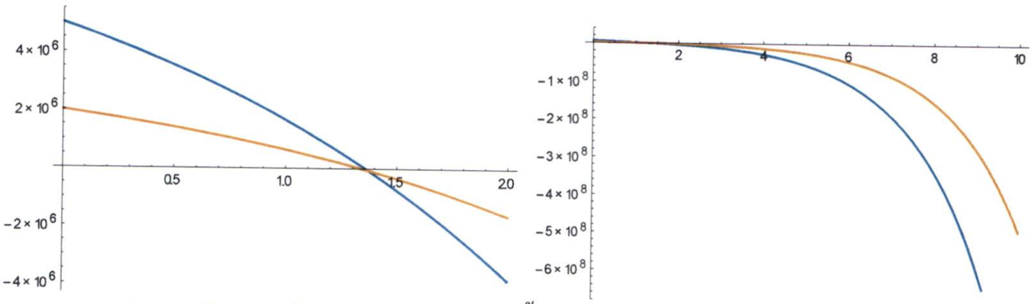
นั่นคือ $p^0(t)\approx\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ สำหรับ $10\le t\le 20$

โดยที่มีการควบคุมเหมาะสมที่สุด

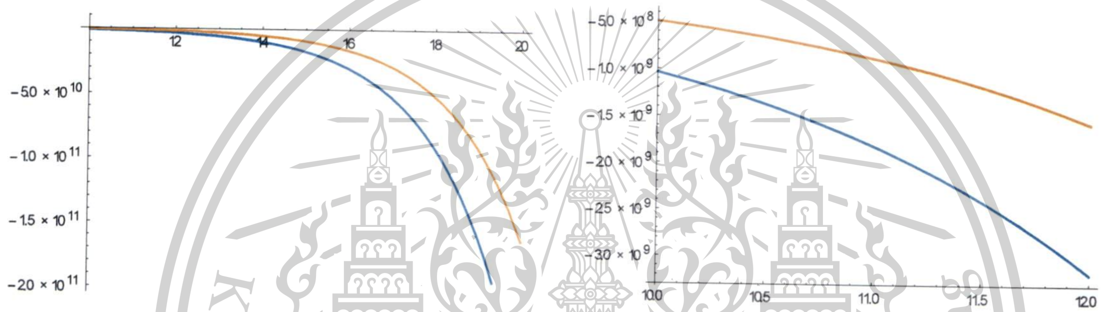
$$u^0(t)=\begin{bmatrix}2.7735\times10^{-3}\left(-10.0074e^{0.56t}+e^{0.56t}t\right)\\ 1.2394\times10^{-3}\left(-10.0074e^{0.58t}+e^{0.58t}t\right)\end{bmatrix} \quad ;0\le t\le 10$$

และ

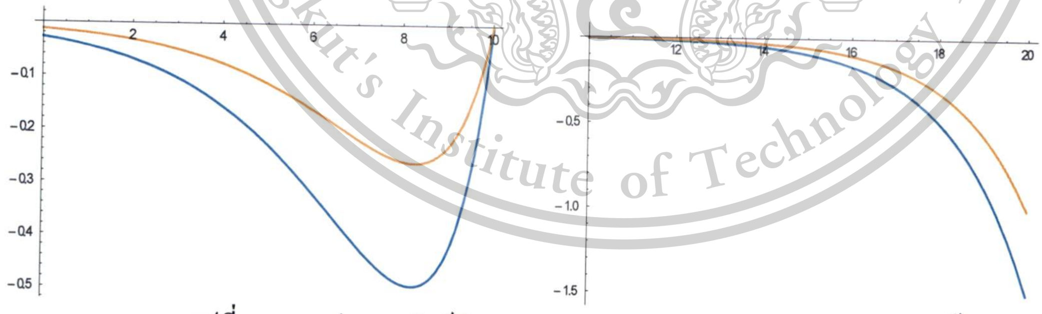
$$u^0(t)=\begin{bmatrix}-2.0511\times10^{-5}e^{0.56t}\\ -9.1661\times10^{-6}e^{0.58t}\end{bmatrix} \quad ;10\le t\le 20$$



รูปที่ 5.1 ก) กราฟแสดงเงินคงเหลือจากการจ่ายชำระหนี้ $p^0(t)$, $0 \le t \le 10$ จากกราฟจะเห็นว่าการชำระหนี้ครบที่เวลา $t = 1.4$ ปี และหลังจากนั้น $p^0(t) \to 0$



ข) กราฟแสดงเงินคงเหลือจากการจ่ายชำระหนี้ $p^0(t)$, $10 \le t \le 20$ จะได้ $p^0(t) \to 0$



รูปที่ 5.2 กราฟแสดงฟังก์ชันการควบคุมเหมาะสุดสำหรับการจ่ายชำระหนี้

บทที่ 6
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้เรากล่าวสรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยเรื่องการควบคุมเหมาะสุดของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัยที่มีการหน่วงด้วยเวลา

6.1 สรุปผลการวิจัย

สำหรับผลงานวิจัยนี้ ในระยะเวลาวิจัยทั้งหมด 1 ปี เราได้ผลการวิจัยดังนี้

1) เราได้สร้างแบบจำลองการจ่ายชำระหนี้สินเชื่อที่อยู่อาศัย ภายใต้สมมติฐานว่า อัตราการจ่ายชำระคืน (h) สามารถควบคุมได้ด้วยฟังก์ชันควบคุม u ในเซตควบคุมยอมรับได้(Admissible control set) ซึ่งจะเขียนแทนเซตนี้ด้วย $\mathcal{A}_{ad}$ การควบคุมนี้หมายรวมถึงเงื่อนไขหรือกฎเกณฑ์ต่างๆในรูปแบบฟังก์ชันที่ควบคุมให้การจ่ายชำระเป็นไปตามที่เจ้าหนี้ต้องการซึ่งจะทำให้ไม่เกิดการสูญเสียหนี้ โดยเมื่อครบกำหนดชำระแล้วจำนวนเงินต้นหรือหนี้คงเหลือเป็นศูนย์ ($P(T)=0$) นอกจากนี้ยังสมมติว่าอัตราการจ่ายชำระคืนยังขึ้นอยู่ข้อมูลของการจ่ายหรือประวัติการจ่ายชำระในอดีต (Histories Data) $p_{il}(t)=p(t-il)$, $i=1,\ldots,k$ ดังนั้นสมการ (3.5) ภายใต้สมมติฐานดังกล่าวจะอยู่ในรูป

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt}=\rho p(t)-h(t,p(t),p_l(t),\ldots,p_{kl}(t),u(t)) & ,0\le t\le T \\ p(t)=\varphi(t) & ,-kl\le t\le 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

เมื่อ $u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$ เป็นฟังก์ชันควบคุมใน $\mathcal{A}_{ad}$, $\varphi(t)=\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ

และได้พิสูจน์การมีผลเฉลยละมุนของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีการหน่วงเชิงเวลาในรูปของสมการ (6.1) โดยอาศัยเครื่องมือทางด้านคณิตวิเคราะห์ อาทิเช่น ความบริบูรณ์ของปริภูมิ ตัวดำเนินการหดตัว เป็นต้น

2) เราได้ศึกษาปัญหาการควบคุม และพิสูจน์การมีการควบคุมเหมาะสุด ภายใต้ฟังก์ชันนัลจุดประสงค์

$$J(u)=\int_0^T r(p(t),u(t))\,dt+g(p(T))$$

สำหรับทุกๆ $u\in\mathcal{A}_{ad}$

3) เราได้กล่าวถึงหลักการควบคุมเหมาะสุดของพอนทรายากิน พร้อมยกตัวอย่างสถานการณ์การจ่ายชำระหนี้สินเชื่อที่อยู่อาศัยซึ่งแบบจำลองอธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีการควบคุมและการหน่วงเชิงเวลา

6.2 ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ยังสามารถพัฒนาให้มีขั้นตอนในการคำนวณไม่ยุ่งยากไม่ซับซ้อน อาจจะต้องมีการเขียนโปรแกรมขึ้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณ ในงานวิจัยนี้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้โปรแกรม MATHEMATICA อย่างไรก็ตาม ค่าอาจมีการคาดเคลื่อนเนื่องจากการประมาณค่า

6.3 ผลลัพธ์ที่ได้รับแล้วและที่จะคาดว่าจะได้รับอีกในปีที่ 1

6.3.1 ผลลัพธ์ที่ได้รับแล้ว

นำเสนอผลงานในรูปแบบโปสเตอร์

1. วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ, “การควบคุมเหมาะสุดของตราสารหนี้หนุนโดยสินเชื่อที่อยู่อาศัยที่มีการหน่วงด้วยเวลา” งานแสดงผลงานวิจัยสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ประจำปีงบประมาณ 2556.

6.3.2 ผลลัพธ์ที่จะคาดว่าจะได้รับ

1. ตีพิมพ์ในวารสารงานวิจัยนานาชาติ เรื่อง การควบคุมเหมาะสุดของฟังก์ชันการจ่ายต่อเนื่องของสินเชื่อที่อยู่อาศัยที่มีการหน่วงด้วยเวลา”

เอกสารอ้างอิง

[1] Darrell Duffie, "Dynamic Asset Pricing Theory" 2nd edition, Princeton, New Jersey, 1996.

[2] Gerhard Manfred Schoen, "Stability and Stabilization of Time-Delay Systems", Diss. ETH No. 11166, Zurich, 1995.

[3] Lawrence C. Evans, "An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory", California, Berkeley, 2000.

[4] W.Witayakiattilerd & A.Chonwerayuth, "Fractional integro-differential equations of mixed type with solution operator and optimal controls", Journal of Mathematics Research(JMR), Vol.3, No.3, pp. 140–152, 2011.

ข้อมูลประวัติคณะผู้วิจัย

ประวัติส่วนตัว

ชื่อ-สกุล...นายวิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

ตำแหน่งปัจจุบัน อาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์

ประวัติการศึกษา

ชื่อย่อปริญญา	สาขา	สถาบันที่จบ	ปีที่จบ
วท.ด (คณิตศาสตร์)	คณิตศาสตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	2554
วท.ม (คณิตศาสตร์)	คณิตศาสตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	2550
วท.บ (คณิตศาสตร์)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยศิลปากร	2547

สาขาวิจัยที่มีความชำนาญพิเศษ **คณิตศาสตร์ประยุกต์ทางการเงิน**

ทุนวิจัยที่เคยได้รับ

ปี พ.ศ.	ทุนการศึกษาและทุนวิจัย	สถาบันที่ให้
2556	ทุนวิจัยคณะวิทยาศาสตร์ เรื่อง "IMPULSIVE FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES"	คณะวิทยาศาสตร์
2556	ทุนวิจัยคณะวิทยาศาสตร์ เรื่อง "OPTIMAL REGULATOR OF MORTGAGE-BACKED SECURITIES WITH TIME LAG"	คณะวิทยาศาสตร์
2556-2557	ทุนพัฒนาอาจารย์ใหม่ เรื่อง "FUZZY OPTIMAL CONTROL OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH TIME DELAY AND FUZZY OPTIMAL CONTROL OF MORTGAGE-BACKED SECURITIES WITH TIME DELAY"	กองทุนวิจัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
2557	ทุนวิจัยคณะวิทยาศาสตร์ เรื่อง"Singular	คณะวิทยาศาสตร์